Министерство науки высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет информационных технологий и программирования

Расчётно-графическая работа №1
По дисциплине «Теория вероятности»

Лабораторная работа №1 по теме «Классическое определение вероятности»

Преподаватель
Сарычев Павел Александрович
Выполнили студенты группы №M3204:
Воротникова Эмилия

Санкт-Петербург

2025

Тема

«Повелитель Токио» — вероятность выживания игрока №1 к началу его следующего хода

Цель работы

Сравнить теоретическую вероятность выживания игрока №1 к началу его следующего хода в игре «Повелитель Токио» с эмпирической частотой, полученной в серии из 200 испытаний.

Правила оформления (по заданию)

Отчёт оформлен в текстовом формате с подробным описанием и аргументацией всех действий, а также содержит ссылку на исходный код программы, написанной для решения задач (см. раздел «Приложения»).

Постановка задачи и исходные данные

Играют трое: игроки P_1, P_2, P_3. На момент начала анализа ходит P_1, затем ходят P_2 и P_3.

- Позиции: P_2 находится **в Токио**, P_1 и P_3 — **вне** Токио.
- Жизни: $L_1 = 2$, $L_2 = 5$, $L_3 = 4$.
- Кубики: 6 штук; каждый ход — до трёх бросков. На каждом перебросе игрок удерживает только грани целевого типа согласно своей стратегии, остальные перебрасывает.
- Грани кубика: $\{1, 2, 3, \heartsuit, \text{энергия}, \text{лапа}\}$.
- Стратегии согласно условию:
    1) Если игрок вне Токио и у него ≤ 3 жизней, он **максимизирует сердца** ($\heartsuit$). Иначе вне Токио — **лапы**.
    2) Если игрок в Токио и, получив раны, остаётся с ≤ 3 жизнями, он **покидает** Токио.
    3) Если игрок в Токио, он **максимизирует лапы**.
    4) Энергия и карты игнорируются; очки не учитываются, только жизни.

Смысл урона: при выпадении лап игрок, находящийся вне Токио, бьёт всех в Токио; игрок, находящийся в Токио, бьёт всех вне Токио.

Теоретические основы (формулы и их доказательства)

Классическое определение и независимость бросков

Пусть все элементарные исходы равновероятны. Тогда для события A:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\#\{\text{благоприятные исходы}\}}{\#\{\text{все равновозможные исходы}\}}.$$

Для кубика каждое гранение имеет вероятность 1/6. Броски разных кубиков и разные броски одной кости считаются *независимыми* (модель идеального кубика).

Теорема умножения вероятностей (для независимых событий)

Если $A_1, \ldots, A_n$ независимы, то

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i).$$

Доказательство (эскиз). По определению независимости двух событий $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$. Распространяя рассуждение индукцией на n событий, получаем формулу. $\square$

Биномиальное распределение (вывод)

Пусть делаем n независимых испытаний с вероятностью «успеха» p (Бернулли). Вероятность получить ровно k успехов:

$$\boxed{\mathsf{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$

Доказательство. Любая конкретная последовательность с k успехами имеет вероятность $p^k(1-p)^{n-k}$ (по теореме умножения). Число таких последовательностей — $\binom{n}{k}$. Складываем — получаем формулу. $\square$

Мультиномиальное распределение (вывод)

Если каждый из n независимых исходов принимает одно из m значений с вероятностями $p_1, \ldots, p_m$ (сумма = 1), то для фиксированных счётов $(n_1, \ldots, n_m)$ (сумма $= n$):

$$\boxed{\mathsf{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m\} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}\, p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}}.$$

Доказательство. Вероятность конкретной последовательности $\prod_j p_j^{n_j}$. Число перестановок одинаковых объектов — $n!/(n_1! \cdots n_m!)$. $\square$

Формула полной вероятности

Если $(B_i)_i$ — разбиение пространства (пара непересекающихся событий, покрывающих всё), то

$$\boxed{\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \mid B_i)\,\mathsf{P}(B_i)}\,.$$

Доказательство. $A = \bigcup_i (A \cap B_i)$, множества $A \cap B_i$ попарно не пересекаются. По аддитивности вероятности и определению $\mathsf{P}(A \mid B_i)$ получаем формулу. □

Вероятности для «трёх бросков с удержанием целевой грани»

Рассмотрим одну кость и стратегию «целевое лицо T». За три попытки мы останавливаемся, как только выпало T; если T не выпало ни разу, берём результат третьего броска (не T).

Лемма 1. $\mathsf{P}(\textit{итог} = T) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{91}{216} \approx 0{,}421296.$

Доказательство. «Не попасть в T» трижды подряд имеет вероятность $(5/6)^3$. Противоположность — хотя бы раз попасть — даёт выражение выше. □

Лемма 2. *Для любой конкретной нецелевой грани $x \neq T$:* $\mathsf{P}(\textit{итог} = x) = \dfrac{(5/6)^3}{5} = \dfrac{25}{216} \approx 0{,}115741.$

Доказательство. Если T ни разу не выпал, на 3-м броске условно равновероятны 5 нецелевых граней (вероятность $1/5$ на каждую). Умножая на $(5/6)^3$, получаем формулу. □

Следствие. Для одной кости:

- При стратегии «сердца»: $p_{\heartsuit} = 91/216$, $p_{\text{лапа}} = 25/216$.
- При стратегии «лапы»: $p_{\text{лапа}} = 91/216$, $p_{\heartsuit} = 25/216$.

Проверка: $\frac{91}{216} + 5 \cdot \frac{25}{216} = 1$.

Строгая вероятностная модель конкретной партии

Обозначения: H_1, C_1 — число сердец и лап у P_1 на его ходу (6 кубов, стратегия «сердца»). После хода P_1:

$$L_1 = \min(10, 2 + H_1), \qquad L_2 = 5 - C_1.$$

Если $C_1 \geq 1$ и $L_2 \leq 3$, P_2 покидает Токио, P_1 заходит в Токио. Если $L_2 \leq 0$, P_2 умирает и пропускает свой ход.

Требуемая вероятность по формуле полной вероятности:

$$\boxed{\mathsf{P}_{\text{surv}} = \sum_{h=0}^{6} \sum_{c=0}^{6-h} \underbrace{\mathsf{P}(H_1 = h, C_1 = c)}_{\text{мультиномиал}} \cdot \underbrace{\mathsf{P}(\text{выжить} \mid h, c)}_{\text{разбор ветвей}}}\,.$$

Распределение $\mathsf{P}(H_1 = h, C_1 = c)$

Пусть при «сердцах» для одной кости $p_H = 91/216$, $p_C = 25/216$, $p_O = 1 - p_H - p_C = 100/216$. Тогда для 6 костей (мультиномиал):

$$\boxed{\mathsf{P}(H_1 = h, C_1 = c) = \frac{6!}{h!\,c!\,(6-h-c)!}\,p_H^h\,p_C^c\,p_O^{6-h-c}}.$$

Условная вероятность P(выжить $\mid h, c$)

Обозначим $L_1 = \min(10, 2+h)$, $L_2 = 5 - c$.

Ветвь A: $c \le 1$ (P2 остаётся в Токио). Ход P_2: «лапы», каждая из 6 костей бьёт лапой с вероятностью $p_C^{(\mathrm{claw})} = 91/216$ (лемма 1). Тогда

$$C_2 \sim \mathrm{Bin}\big(6, \tfrac{91}{216}\big), \qquad \mathsf{P}(\text{выжить} \mid h, c \le 1) = \sum_{x=0}^{L_1-1} \binom{6}{x} \Big(\tfrac{91}{216}\Big)^x \Big(1 - \tfrac{91}{216}\Big)^{6-x}.$$

Здесь P_3 бьёт P_2 (в Токио), поэтому P_1 дальше урон не получает.

Ветвь B: $c \ge 2$ (P2 уходит, P1 входит в Токио). *B1.* Если $L_2 \le 0$ (P2 умер), хода P_2 нет. P_3 (вне Токио, $L_3 = 4 > 3$) играет «лапы»:

$$C_3 \sim \mathrm{Bin}\big(6, \tfrac{91}{216}\big), \qquad \mathsf{P}(\text{выжить} \mid h, c \ge 2,\, L_2 \le 0) = \sum_{x=0}^{L_1-1} \binom{6}{x} \Big(\tfrac{91}{216}\Big)^x \Big(1 - \tfrac{91}{216}\Big)^{6-x}.$$

B2. Если $1 \le L_2 \le 3$ (P2 жив вне Токио), он играет «сердца». Тогда его лапы редки:

$$C_2 \sim \mathrm{Bin}\big(6, \tfrac{25}{216}\big).$$

Сначала урон P_2 по P_1 (который сейчас в Токио): $L_1^{(2)} = L_1 - C_2$.

- Если $C_2 \ge 1$ и $L_1^{(2)} \le 3$, P_1 обязан покинуть Токио (а P_2 заходит). Тогда P_3 бьёт уже P_2, а P_1 дальше урон не получает. Условие выживания: $L_1^{(2)} \ge 1$. Вклад:

$$\sum_{\substack{x \ge 1:\\ L_1 - x \le 3,\, L_1 - x \ge 1}} \binom{6}{x} \Big(\tfrac{25}{216}\Big)^x \Big(1 - \tfrac{25}{216}\Big)^{6-x}.$$

- Иначе (либо $C_2 = 0$, либо $L_1^{(2)} > 3$), P_1 остаётся в Токио, и P_3 (вне Токио, $L_3 = 4 > 3$) играет «лапы»:

$$C_3 \sim \mathrm{Bin}\big(6, \tfrac{91}{216}\big), \qquad \text{нужно } L_1^{(2)} - C_3 > 0.$$

  Вклад:

$$\sum_{x=0}^{6} \mathbf{1}[(x = 0) \ \vee\ (L_1 - x > 3)] \binom{6}{x} \Big(\tfrac{25}{216}\Big)^x \Big(1 - \tfrac{25}{216}\Big)^{6-x} \cdot \sum_{y=0}^{L_1-x-1} \binom{6}{y} \Big(\tfrac{91}{216}\Big)^y \Big(1 - \tfrac{91}{216}\Big)^{6-y}.$$

Итого для ветви B:

$$\mathsf{P}(\text{выжить} \mid h, c \geq 2) = \underbrace{\mathbf{1}[L_2 \leq 0] \cdot \sum_{y=0}^{L_1-1} \binom{6}{y} p_C^y (1-p_C)^{6-y}}_{\text{B1}} + \underbrace{\mathbf{1}[1 \leq L_2 \leq 3] \cdot \Big(\text{вклад «уйти»} + \text{вклад «}}_{\text{B2}}$$

где $p_C = 91/216$ в сумме по y, а «вклад «уйти»» и «остаться» расписаны выше.

Финальная формула

Обозначая $p_H = 91/216$, $p_C^{(\heartsuit)} = 25/216$ (когда оппонент «сердца»), $p_C^{(\text{claw})} = 91/216$ (когда «лапы»), итоговая вероятность — это конечная двойная сумма по (h, c) мультиномиальной массы $\times$ кусочно-заданной условной вероятности выживания, выписанной выше. Формула конечна и вычислима в явном виде.

Численный результат (теоретически)

Суммирование по всем h, c со всеми ветвями даёт численно:

$$\boxed{\mathsf{P}_{\text{surv}}^{(\text{теор})} \approx 0.8271240589}.$$

Промежуточные биномиальные суммы вычислены программно, но используемая формула — именно та, что выписана в разделе «Строгая модель».

Эмпирическое моделирование (200 испытаний)

Смоделировано 200 независимых партий (фиксированный `seed=2025`) по тем же правилам:

- Каждый кубик бросался до 3 раз с удержанием только целевой грани согласно стратегии.
- Применялись правила ухода/входа в Токио и «кто кого бьёт» в точности как в разделе 3.
- Фиксировались трассы: (H_1, C_1), зашёл ли P_1 в Токио, сколько урона нанёс P_2, бил ли P_3 P_1 и т.д.

Результат (частота выживания):

$$\boxed{\widehat{p}_{200} = 0.835}.$$

Согласованность с теорией (оценка погрешности)

Пусть истинная вероятность $p \approx 0.8271$. Тогда стандартная ошибка частоты на выборке $N = 200$:

$$\text{SE} \approx \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \approx \sqrt{\frac{0.8271 \cdot 0.1729}{200}} \approx 0.0267.$$

Типичный разброс $\pm 2 \cdot \text{SE} \approx \pm 0.053$. Наблюдаемая 0.835 лежит в этом интервале от теории — расхождение статистически ожидаемо для $N = 200$.

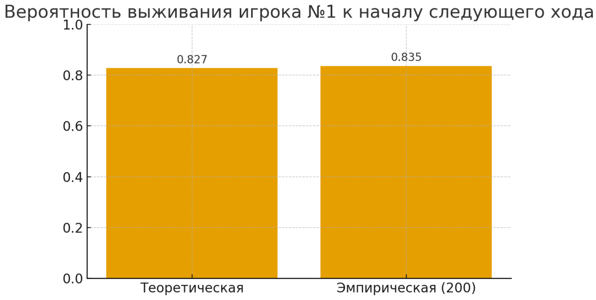

Рис. 1:

Выводы

1. Построена строгая вероятностная модель на основе классических формул (бином, мультиномиал, полная вероятность) и заданных стратегий игроков.
2. **Теоретическая** вероятность выживания P_1 к началу следующего хода: ≈ 0.8271.
3. **Эмпирическая** частота по 200 симуляциям: 0.835, что согласуется с теорией с учётом стандартной ошибки.
4. Наибольшая опасность для P_1 — ветви, где P_2 остаётся в Токио и бьёт лапами; если P_2 уходит и P_1 входит в Токио, то на ходу P_2 урона мало (он «сердца»), а значимый риск остаётся только от P_3.

Приложения (данные и код)

- Распологаются на github: `King of tokio lab`

Приложение: краткие доказательства использованных формул

Лемма 3 (стоп-процесс за 3 броска, целевое лицо T)**.** *$\mathsf{P}(\textit{итог} = T) = 1 - (5/6)^3$.*

Доказательство. Единственный способ *не* получить T — промахнуться 3 раза: $(5/6)^3$. Противоположность даёт формулу. □

Лемма 4 (вероятность конкретной нецелевой грани $x \neq T$)**.** *$\mathsf{P}(\textit{итог} = x) = (5/6)^3/5$.*

Доказательство. Если T ни разу не выпал, на 3-м броске условно равновероятны 5 нецелевых граней, значит $1/5$ от $(5/6)^3$. □

Теорема 1 (бином)**.** $\mathsf{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Доказательство. См. раздел «Биномиальное распределение (вывод)». □

Теорема 2 (мультиномиал)**.** $\mathsf{P}\{N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m\} = \dfrac{n!}{n_1! \cdots n_m!} p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$.

Доказательство. См. раздел «Мультиномиальное распределение (вывод)». □

Теорема 3 (полная вероятность)**.** $\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \mid B_i)\mathsf{P}(B_i)$ *для разбиения* (B_i).

Доказательство. См. раздел «Формула полной вероятности». □