Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2017/2018

4. prednáška

CNF
Tablový kalkul

12. marca 2018

Obsah 4. prednášky

Opakovanie

Sémantika

Teória, model a splniteľnosť

Definícia 2.23

(Výrokovologickou) teóriou nazývame každú množinu formúl.

Definícia 2.25

Nech T je teória. Ohodnotenie v *spĺňa teóriu* T (skrátene $v \models T$) vtt v spĺňa každú formulu X z množiny T.
Spĺňajúce ohodnotenie nazývame *modelom* teórie T.

Definícia 2.28

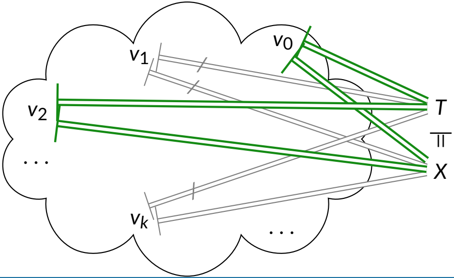
Teória T je *súčasne výrokovologicky splniteľná* (skrátene *splniteľná*) vtt existuje aspoň jeden model T.
Teória je *nesplniteľná* vtt nie je splniteľná.

Vyplývanie

Výrokovologické vyplývanie

Definícia 2.31 (Výrokovologické vyplývanie)

Z teórie T *výrokovologicky vyplýva* formula X
(tiež X je *výrokovologickým dôsledkom* T, skrátene $T \models X$) vtt
každé ohodnotenie výrokových premenných, ktoré spĺňa T, spĺňa aj X.



Tvrdenie 2.33

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt teória $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.

Splniteľnosť a výrokovologické vyplývanie

Definícia 2.34

Formula X je *nezávislá* od teórie T, ak existuje dvojica ohodnotení v_1, v_2 spĺňajúcich T, pričom v_1 spĺňa X, ale v_2 nespĺňa X.

2.6

Ekvivalencia formúl

Ekvivalentné úpravy

Definícia 2.38

Dve formuly X a Y sú *(výrokovologicky) ekvivalentné* ($X \Leftrightarrow Y$) vtt
pre každé ohodnotenie v výrokových premenných platí,
že v spĺňa X vtt v spĺňa Y.

Definícia 2.44 (Substitúcia)

Nech X, A, B sú formuly.
Substitúciou B za A v X (skrátene $X[A|B]$) nazývame formulu, ktorá vznikne nahradením každého výskytu A v X formulou B.

Ekvivalentné úpravy

Tvrdenie 2.45 (Dosadenie do ekvivalentných formúl)

Nech A a B sú navzájom ekvivalentné formuly, p je výroková premenná a Y je formula. Potom formuly $A[p|Y]$ a $B[p|Y]$ sú ekvivalentné.

Veta 2.46 (Ekvivalentné úpravy)

Nech X je formula, A a B sú ekvivalentné formuly.
Potom formuly X a $X[A|B]$ sú tiež ekvivalentné.

Lema 2.47

Nech X je výroková formula, p je výroková premenná, A je formula a v je ohodnotenie výrokových premenných.
Potom $v \models X[p|A]$ vtt $v_{p|A} \models X$, kde $v_{p|A}$ je ohodnotenie, pre ktoré platí:

- $v_{p|A}(r) = v(r)$, *ak r je výroková premenná a $p \neq r$;*
- $v_{p|A}(p) = t$, *ak $v \models A$;*
- $v_{p|A}(p) = f$, *ak $v \not\models A$.*

2.6.2 Konjunktívna a disjunktívna normálna forma

Konjunkcia a disjunkcia postupnosti formúl

Dohoda

Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ je konečná postupnosť formúl.

- *Konjunkciu postupnosti formúl* $A_1, \dots, A_n$,
  teda $(((A_1 \land A_2) \land A_3) \land \dots \land A_n)$,
  skrátene zapisujeme $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \dots \land A_n)$, prípadne $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.
  - Konjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl ($n = 0$) označujeme $\top$.
    Chápeme ju ako ľubovoľnú *tautológiu*, napríklad $(p_1 \lor \neg p_1)$.
- *Disjunkciu postupnosti formúl* $A_1, \dots, A_n$,
  teda $(((A_1 \lor A_2) \lor A_3) \lor \dots \lor A_n)$,
  skrátene zapisujeme $(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \dots \lor A_n)$, prípadne $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$.
  - Disjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl ($n = 0$) označujeme $\bot$ alebo $\square$.
    Chápeme ju ako ľubovoľnú *nesplniteľnú* formulu, napríklad $(p_1 \land \neg p_1)$.
- Ak je postupnosť *jednoprvková* ($n = 1$), chápeme samotnú formulu A_1 ako konjunkciu *aj* ako disjunkciu postupnosti formúl A_1.

Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar

Definícia 2.49

Literál je výroková premenná alebo negácia výrokovej premennej.

Klauzula (tiež „klauza“) je *disjunkcia* literálov.

Formula v disjunktívnom normálnom tvare (DNF) je *disjunkcia* formúl, z ktorých každá je konjunkciou literálov.

Formula v konjunktívnom normálnom tvare (CNF) je *konjunkcia* klauzúl.

Príklad 2.50

Literály: p, $\neg q$

Klauzuly: p, $\neg q$, $\square$, $(\neg p \lor q \lor \neg r)$

DNF: p, $\neg q$, $(p \lor \neg q)$, $\square$, $\top$, $(p \land \neg q \land r)$, $((\neg p \land q) \boldsymbol{\lor} (q \land r))$

CNF: p, $\neg q$, $\top$, $(p \lor \neg q)$ $(p \land \neg q \land r)$, $\square$, $((p \lor q) \land \square)$, $((\neg p \lor q) \boldsymbol{\land} (q \lor r))$

Existencia DNF a CNF

Veta 2.51

1. *Ku každej formule X existuje ekvivalentná formula D v disjunktívnom normálnom tvare.*
2. *Ku každej formule X existuje ekvivalentná formula C v konjunktívnom normálnom tvare.*

Dôkaz.

1. Zoberme všetky ohodnotenia $v_1, \ldots, v_n$ také, že $v_i \models X$ a $v_i(q) = f$ pre všetky premenné $q \notin \mathrm{vars}(X)$. Pre každé v_i zostrojme formulu C_i ako konjunkciu obsahujúcu p, ak $v_i(p) = t$, alebo $\neg p$, ak $v_i(p) = f$, pre každú $p \in \mathrm{vars}(X)$. Očividne formula $D = \bigvee_{1 \leq i \leq n} C_i$ je v DNF a je ekvivalentná s X (vymenúva všetky možnosti, kedy je X splnená).
2. K $\neg X$ teda existuje ekvivalentná formula D v DNF. Znegovaním D a aplikáciou de Morganových pravidiel dostaneme formulu C v CNF, ktorá je ekvivalentná s X. $\square$

CNF — trochu lepší prístup

- Skúmanie všetkých ohodnotení nie je ideálny spôsob ako upraviť formulu do CNF — najmä keď má veľa premenných a jej splniteľnosť chceme rozhodnúť SAT solverom.
- Je nejaký lepší *systematický* postup?
- Všimnime si:
  CNF je konjunkcia disjunkcií literálov — výrokových premenných alebo ich negácií
  Teda:
  - CNF neobsahuje implikácie — ako sa ich zbavíme?
  - Negácia sa vyskytuje iba pri výrokových premenných — ako ju tam dostaneme, ak to tak nie je (napr. $\neg(A \lor B)$)?
  - Disjunkcie sa nachádzajú iba vnútri konjunkcií — ako presunieme „vonkajšie“ disjunkcie „dovnútra“ konjunkcií (napr. $(A \lor (B \land C))$)?

CNF — trochu lepší prístup

Algoritmus CNF_1

1. Nahradíme implikáciu disjunkciou:
   - $(A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A \vee B)$.
2. Presunieme $\neg$ dovnútra pomocou de Morganových pravidiel a dvojitej negácie.
3. „Roznásobíme" $\wedge$ s $\vee$ podľa distributívnosti a komutatívnosti:
   - $(A \vee (B \wedge C)) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
   - $((B \wedge C) \vee A) \Leftrightarrow (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \Leftrightarrow ((B \vee A) \wedge (A \vee C)) \Leftrightarrow \quad ((B \vee A) \wedge (C \vee A))$
4. Prezátvorkujeme na požadovaný tvar pomocou asociatívnych pravidiel.

Tvrdenie 2.52

Výsledná formula alg. CNF_1 je ekvivalentná s pôvodnou a je v CNF.

CNF — trochu lepší prístup

Príklad 2.53

1. $((a \lor \neg b) \to \neg(c \lor (d \land \neg e)))$
2. $(\neg(a \lor \neg b) \lor \neg(c \lor (d \land \neg e)))$ [1 — nahradenie implikácie]
3. $((\neg a \land \neg\neg b) \lor \neg(c \lor (d \land \neg e)))$ [2 — deMorganovo pravidlo]
4. $((\neg a \land b) \lor \neg(c \lor (d \land \neg e)))$ [2 — dvojitá implikácia]
5. $((\neg a \land b) \lor (\neg c \land \neg(d \land \neg e)))$ [2 — deMorganovo pravidlo]
6. $((\neg a \land b) \lor (\neg c \land (\neg d \lor \neg\neg e)))$ [2 — deMorganovo pravidlo]
7. $((\neg a \land b) \lor (\neg c \land (\neg d \lor e)))$ [2 — dvojitá implikácia]
8. $(((\neg a \land b) \lor \neg c) \land ((\neg a \land b) \lor (\neg d \lor e)))$ [3 — distributívnosť]
9. $(((\neg a \lor \neg c) \land (b \lor \neg c)) \land ((\neg a \lor (\neg d \lor e)) \land (b \lor (\neg d \lor e))))$ [3]
10. $((\neg a \lor \neg c) \land (b \lor \neg c) \land (\neg a \lor (\neg d \lor e)) \land (b \lor (\neg d \lor e)))$ [4]
11. $((\neg a \lor \neg c) \land (b \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg d \lor e) \land (b \lor \neg d \lor e))$ [4 — asoc.]

CNF — prečo iba *trochu* lepší prístup

Distribúcia $\lor$ cez $\land$ spôsobuje nárast formuly:

- $A_2 = ((p_1 \land q_1) \lor (p_2 \land q_2))$
  $C_2 = ((p_1 \lor p_2) \land (p_1 \lor q_2) \land (q_1 \lor p_2) \land (q_1 \lor p_2))$
  $A_2 \Leftrightarrow C_2, \quad \deg(A_2) = 3, \quad \deg(B_2) = 7$
- $A_3 = ((p_1 \land q_1) \lor (p_2 \land q_2) \lor (p_3 \land q_3))$
  $C_3 = ((p_1 \lor p_2 \lor p_3) \land (p_1 \lor q_2 \lor p_3) \land (q_1 \lor p_2 \lor p_3) \land (q_1 \lor p_2 \lor p_3) \land (p_1 \lor p_2 \lor q_3) \land (p_1 \lor q_2 \lor q_3) \land (q_1 \lor p_2 \lor q_3) \land (q_1 \lor p_2 \lor q_3))$
  $A_3 \Leftrightarrow C_3, \qquad \deg(A_3) = 5, \qquad \deg(C_3) = 23$
- $A_n = ((p_1 \land q_1) \lor \cdots \lor (p_n \land q_n))$
  Koľko klauzúl bude obsahovať C_n?
  Akého bude stupňa?

CNF — obmedzenie exponenciálneho rastu

Otázka

Dá sa vyhnúť exponenciálnemu nárastu formuly $A_n = ((p_1 \land q_1) \lor \cdots \lor (p_n \land q_n))$ kvôli distributívnosti?

1. Zoberme *nové* výrokové premenné $r_1, \ldots, r_n, s$
2. Vyjadrime, že r_i je ekvivalentným zástupcom konjunkcie $(p_i \land q_i)$: $(r_i \leftrightarrow (p_i \land q_i))$
3. Použime r_i na vyjadrenie, že s je ekvivalentným zástupcom disjunkcie A_n: $(s \leftrightarrow (r_1 \lor \cdots \lor r_n))$
4. A_n teda môžeme nahradiť formulou $((s \leftrightarrow (r_1 \lor \cdots \lor r_n)) \land (r_1 \leftrightarrow (p_1 \land q_1)) \land \cdots \land (r_n \leftrightarrow (p_n \land q_n)) \land s)$

Ekvivalentnými úpravami

- prvý konjunkt upravíme na $n + 1$ klauzúl,
- ďalších n na 3 klauzuly každý

spolu iba $4 \cdot n + 2$ klauzúl!

CNF — Cejtinova transformácia

Cejtinova transformácia (angl. Tseytin transformation)

- algoritmus nájdenia CNF použitím tohto princípu na všetky podformuly
- výsledok Cejtinovej transformácia $T(X)$ **nie je ekvivalentný** s X, iba *ekvisplniteľný*: formula $T(X)$ je splniteľná vtt X je splniteľná

2.7

Kalkuly

Dokazovanie ekvivalencie syntakticky vs. sémanticky

- Pomocou substitúcie ekvivalentných formúl vieme dokázať, že dve formuly sú ekvivalentné bez toho, aby sme vyšetrovali všetky ohodnotenia ich výrokových premenných.
- Výhodné pri formulách s veľkým počtom premenných.
- Formulu $X = ((a \lor \neg b) \to \neg(c \lor (d \land \neg e)))$ sme upravili do CNF $Y = ((\neg a \lor \neg c) \land (b \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg d \lor e) \land (b \lor \neg d \lor e))$ pomocou 12 substitúcií ekvivalentných podformúl.
- Zároveň sme dokázali, že X a Y sú ekvivalentné.
- Na dôkaz ich ekvivalencie tabuľkovou metódou by sme potrebovali vyšetriť 32 prípadov.

Ekvivalencia syntakticky vs. sémanticky

- Tabuľková metóda je **sémantická**
  - využíva ohodnotenia výrokových premenných a spĺňanie formúl ohodnoteniami
- Substitúcie ekvivalentných formúl sú **syntaktickou** metódou
  - pracujú iba s postupnosťami symbolov, nie s ohodnoteniami
- Navyše sú **deduktívnou** metódou
  - odvodíme *iba* formuly ekvivalentné s pôvodnou

Kalkuly — dokazovanie vyplývania syntakticky

- Ak začneme nejakou formulou a budeme substituovať ekvivalentné podformuly, dostávame postupne rôzne formuly, ktoré sú ale stále ekvivalentné s pôvodnou formulou.
- Čo keby sme začali s tautológiou?
  - Dostávame stále tautológie.
- Logiku viac zaujíma vyplývanie ako ekvivalencia a tautológie
- Vyplývanie dôsledkov z teórií sme doteraz dokazovali sémanticky — vyšetrovaním všetkých ohodnotení.
- Na tento účel ale existujú aj syntaktické metódy — *kalkuly*.
- Ukážeme si dva kalkuly:

  tablový — stromový, prirodzenejší
  rezolvenciu — lineárny, strojový

2.8
Tablový kalkul

Dôkaz vyplývania sporom v slovenčine

Príklad 2.54

Dokážme, že z $T'_{\text{party}} = \{ (kim \rightarrow (jim \land \neg sarah)), (eva \rightarrow kim) \}$ vyplýva $(sarah \rightarrow \neg eva)$. Poďme na to sporom:

Predpokladajme, že existuje také ohodnotenie v, že $v \models T'_{\text{party}}$, teda (1) $v \models (kim \rightarrow (jim \land \neg sarah))$ a (2) $v \models (eva \rightarrow kim)$, ale pritom (3) $v \not\models (sarah \rightarrow \neg eva)$.

Podľa definície splnenia implikácie z faktu (3) vyplýva, že (4) $v \models sarah$ a zároveň (5) $v \not\models \neg eva$. Z (5) dostávame, že (6) $v \models eva$.

Podľa (2) máme dve možnosti: (7) $v \not\models eva$ alebo (8) $v \models kim$. Možnosť (7) je v spore s (6).

Platí teda (8) a podľa (1) ďalej môžu nastať dva prípady: (9) $v \not\models kim$, ktorý je však v spore s (8), alebo (10) $v \models (jim \land \neg sarah)$. V tom prípade (11) $v \models jim$ a (12) $v \models \neg sarah$, čiže (13) $v \not\models sarah$, čo je zase v spore s (4).

Vo všetkých prípadoch sme prišli k sporu, predpoklad je teda neplatný a každé ohodnotenie, ktoré spĺňa T'_{party}, spĺňa aj $(sarah \rightarrow \neg eva)$. $\square$

Tablová notácia pre dôkazy

Predchádzajúcu úvahu môžeme stručne zapísať, ak sa dohodneme, že:

- **F** X označuje, že v nespĺňa X;
- **T** X označuje, že v spĺňa X;
- ak z niektorého z predchádzajúcich faktov vyplýva priamo z definície spĺňania nový fakt, zapíšeme ho do *ďalšieho* riadka;
- ak z niektorého faktu vyplýva, že platí fakt F_1 *alebo* fakt F_2, **rozdelíme** úvahu na dve nezávislé vetvy, pričom prvá začne faktom F_1 a druhá faktom F_2;
- ak nastane spor, pridáme riadok so symbolom $*$.

Dôkaz vyplývania sporom v tablovej notácii

Príklad 2.55

(1)	$\mathbf{T}(kim \to (jim \land \neg sarah))$	z T'_{party}
(2)	$\mathbf{T}(eva \to kim)$	z T'_{party}
(3)	$\mathbf{F}(sarah \to \neg eva)$	dôkaz sporom
(4)	$\mathbf{T}\, sarah$	z (3)
(5)	$\mathbf{F}\, \neg eva$	z (3)
(6)	$\mathbf{T}\, eva$	z (5)

Vetvenie:

(7)	$\mathbf{F}\, eva$	z (2)
	$*$	(6) a (7)

(8)	$\mathbf{T}\, kim$	z (2)

Vetvenie pod (8):

(9)	$\mathbf{F}\, kim$	z (1)
	$*$	(8) a (9)

(10)	$\mathbf{T}(jim \land \neg sarah)$	z (2)
(11)	$\mathbf{T}\, jim$	z (10)
(12)	$\mathbf{T}\, \neg sarah$	z (10)
(13)	$\mathbf{F}\, sarah$	z (12)
	$*$	(4) a (13)

Spĺňanie a priame podformuly

Pozorovanie 2.56

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly.

1. T) *Ak v spĺňa $\neg X$, tak v nespĺňa X.*
   F) *Ak v nespĺňa $\neg X$, tak v spĺňa X.*
2. T) *Ak v spĺňa $(X \wedge Y)$, tak v spĺňa X a v spĺňa Y.*
   F) *Ak v nespĺňa $(X \wedge Y)$, tak v nespĺňa X alebo v nespĺňa Y.*
3. T) *Ak v spĺňa $(X \vee Y)$, tak v spĺňa X alebo v spĺňa Y.*
   F) *Ak v nespĺňa $(X \vee Y)$, tak v nespĺňa X a v nespĺňa Y.*
4. T) *Ak v spĺňa $(X \rightarrow Y)$, tak v nespĺňa X alebo v spĺňa Y.*
   F) *Ak v nespĺňa $(X \rightarrow Y)$, tak v spĺňa X a v nespĺňa Y.*

Označené formuly a ich sémantika

Definícia 2.57

Nech X je formula výrokovej logiky.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nazývame *označenými formulami*.

Definícia 2.58

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom

- v spĺňa $\mathbf{T}\,X$ vtt v spĺňa X;
- v spĺňa $\mathbf{F}\,X$ vtt v nespĺňa X.

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X^+_7.
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T^+_3.

Tablové pravidlá

Podľa pozorovania 2.56 a definície 2.58 môžeme sformulovať pravidlá pre označené formuly:

$$\frac{\alpha}{\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}} \qquad \frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\begin{matrix}\mathbf{T}\,X\\ \mathbf{T}\,Y\end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\begin{matrix}\mathbf{F}\,X\\ \mathbf{F}\,Y\end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\begin{matrix}\mathbf{T}\,X\\ \mathbf{F}\,Y\end{matrix}} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{T}\,Y}$$

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 2.59 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je typu α vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 2.60 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Ak v spĺňa α, tak v spĺňa α_1 a v spĺňa α_2.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 2.61 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je typu β vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 2.62 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Ak v spĺňa β, tak v spĺňa β_1 alebo v spĺňa β_2.

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 2.63

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene *tablo pre* S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktoroukoľvek z operácií:
  - **A:** Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - **B:** Ak sa na vetve π_y vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - S^+: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

Vetvy a uzavretosť

Definícia 2.64

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.
Označená formula X^+ sa *vyskytuje na vetve* π v $\mathcal{T}$ vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π.

Definícia 2.65

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ je *uzavretá* vtt obsahuje označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X. Inak je π *otvorená*.

Tablo $\mathcal{T}$ je *uzavreté* vtt každá jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je *otvorené* vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

2.8.1 Korektnosť

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 2.66 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+. Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 2.67

Nech S je teória formúl a X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\, A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\, X\}$ (skr. $S \vdash X$), tak X vyplýva z S ($S \vDash X$).

Pozorovanie 2.68

Formula X je tautológia vtt $\mathbf{F}\, X$ je nesplniteľná.

Dôsledok 2.69

Nech X je formula a existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\, X\}$ (skr. $\vdash X$). Potom X je tautológia ($\vDash X$).

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.