

# **Zbierka úloh z Logiky pre informatikov**

Ján KEUKA, Júlia PUKANCOVÁ, Martin HOMOLA, Jozef ŠIŠKA

Letný semester 2017/18

Posledná aktualizácia: 12. marca 2018

# 1 Úvod do logiky

**Úloha 1.0.1.** Stav sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie, je jej

- |                  |                      |                   |
|------------------|----------------------|-------------------|
| a) formalizácia, | c) model,            | e) redukcia,      |
| b) dôkaz,        | d) logický dôsledok, | f) interpretácia. |

**Úloha 1.0.2.** Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých stavoch sveta, v ktorých je pravdivá teória, je jej

- |                        |                 |                   |
|------------------------|-----------------|-------------------|
| a) premisou,           | c) záverom,     | e) kontradikciou, |
| b) logickým dôsledkom, | d) implikáciou, | f) tautológiou.   |

**Úloha 1.0.3.** Usudzovacie pravidlo je vzorom

- |             |                |              |
|-------------|----------------|--------------|
| a) premís,  | c) záverov,    | e) dôkazov,  |
| b) úsudkov, | d) tautológií, | f) dedukcií. |

**Úloha 1.0.4.** Usudzovacie pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodlia pravdivé závery, nazývame

- |                |                  |              |
|----------------|------------------|--------------|
| a) induktívne, | c) deduktívne,   | e) korektné, |
| b) konkrétne,  | d) tautologické, | f) úplné.    |

**Úloha 1.0.5.** Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodlia pravdivé závery, sa nazýva:

- |                   |                  |                |
|-------------------|------------------|----------------|
| a) interpretácia, | c) formalizácia, | e) dedukcia,   |
| b) abdukcia,      | d) indukcia,     | f) inferencia. |

**Úloha 1.0.6.** Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme možné príčiny z ich následkov, sa nazýva:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| a) dedukcia, | c) abdukcia, |
| b) analógia, | d) indukcia. |

## 2 Výroková logika

### 2.1 Syntax výrokovkej logiky

**Úloha 2.1.1.** Rozhodnite, či nasledovné reťazce sú výrokovými formulami nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$  a svoje rozhodnutie neformálne zdôvodnite:

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| a) $p_1 \rightarrow p_2$         | f) $(p_1 \wedge (u_2 \rightarrow p_3))$                       |
| b) $(p_1) \wedge (p_2)$          | g) $((p_1 \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \vee p_1)$            |
| c) $(p_1 \vee (\neg p_2))$       | h) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1))$ |
| d) $(p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$ | i) $((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_2 \wedge p_1))$            |
| e) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$ | j) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (u_2 \wedge p_1))$ |

*Riešenie.* a) Postupnosť symbolov  $p_1 \rightarrow p_2$  nie je formula nad  $\mathcal{V}$ , pretože to nie je ani výroková premenná z  $\mathcal{V}$ , ani nie je v tvare  $\neg A$  pre nejakú formulu  $A$  (lebo nezačína symbolom „ $\neg$ “), ani nie je v jednom z tvarov  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$  pre nejaké formuly  $A$  a  $B$  (lebo nezačína symbolom „ $($ “).

d) Postupnosť symbolov  $(p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$  je formula nad  $\mathcal{V}$ . Dokazuje to jej vytvárajúca postupnosť:  $p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2), (p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$ . □

**Úloha 2.1.2.** Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou výrokových premenných  $\mathcal{V}$ . V prípade kladnej odpovede určte množinu  $\mathcal{V}$  a nájdite vytvárajúcu postupnosť. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- |   |   |
|---|---|
| a) $(a \wedge \neg a)$                                    | f) $(\forall x \vee \neg \exists y)$  |
| b) $(tweety\_is\_penguin \rightarrow \neg tweety\_flies)$ | g) $(\neg(\neg wow))$   |
| c) $(happy(jack) \wedge loves(marry, jack))$              | h) $(\neg \neg a \neg \rightarrow \neg \neg(b \vee c))$                         |
| d) $\neg \neg \neg koľko\_je\_hodín?$                     | i) $\forall x ((student(x) \wedge \neg studies(x)) \rightarrow fails\_exam(x))$ |
| e) $\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg q$             | j) $(edo = vrátnik \vee edo = otec(ivana))$                                     |

*Riešenie.* b) Postupnosť symbolov  $(tweety\_is\_penguin \rightarrow \neg tweety\_flies)$  je formulou nad každou množinou  $\mathcal{V}$ , ktorá obsahuje výrokové premenné  $tweety\_is\_penguin$ ,  $tweety\_flies$ . Jej vytvárajúcou postupnosťou je:  $tweety\_is\_penguin$ ,  $tweety\_flies$ ,  $\neg tweety\_flies$ ,  $(tweety\_is\_penguin \rightarrow \neg tweety\_flies)$ .

c) Postupnosť symbolov ( $happy(jack) \wedge loves(marry, jack)$ ) nie je formulou. Má tvar  $(A \wedge B)$ , kde  $A$  je postupnosť symbolov  $happy(jack)$  a  $B$  je  $loves(marry, jack)$ . Avšak  $A$  nie je formula: Nezačína symbolom „ $\neg$ “, takže nie je negáciou podľa bodu (ii) definície 2.6. Nezačína ani symbolom „( $\wedge$ “, takže nie je ani formulou podľa bodu (iii). Musí teda byť výrokovou premennou. Ale výrokové premenné podľa definície 2.3 nemôžu obsahovať symboly zátvoriek ani logických spojok.  $\dashv$

**Úloha 2.1.3.** Napíšte po dve rôzne vytvárajúce postupnosti pre formuly:

- $\neg(q \wedge p)$
- $(\neg p \rightarrow q)$
- $((p \wedge q) \vee p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p)$
- $((p \wedge p) \wedge (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge p) \wedge (p \wedge p))$

*Riešenie.* a) Dvoma rôznymi vytvárajúcimi postupnosťami pre formulu  $\neg(q \wedge p)$  sú napríklad:

- $p, q, (q \wedge p), \neg(q \wedge p);$
- $q, p, \neg q, \neg p, (q \wedge p), (q \vee p), \neg(q \wedge p).$

$\dashv$

**Úloha 2.1.4.** Cieľom tejto úlohy je precvičiť si písanie indukčných definícií, ktoré sme na prednáške použili na zadefinovanie výrokových formúl.

- Zadefinujte výrokové formuly s binárnou *Shefferovou spojkou* (NAND, symbol  $\uparrow$ ) nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V}$ . Vo formulách sa nebudú vyskytovať žiadne ďalšie spojky (ani negácia).

Napríklad postupnosti symbolov

$$\top \quad kim \quad (kim \uparrow sarah) \quad ((jim \uparrow (kim \uparrow jim)) \uparrow (sarah \uparrow sarah))$$

by podľa vašej definície mali byť formulami nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah\}$ .

- Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi súčtu, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných  $\mathcal{V}$ .

Napríklad postupnosti symbolov

$$x \quad -z \quad (x + x) \quad (x \times -y) \quad -(x \times -( -(z \times y) + -(x + y)))$$

by podľa vašej definície mali byť aritmetickými výrazmi nad množinou premenných  $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ .

- Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi *rozdielu*, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných  $\mathcal{V}$ . Zamyslite sa nad tým, či vaša definícia umožňuje výrazy jednoznačne rozložiť nad podvýrazy.

- d) Zadefinujte výrokové formuly nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V}$  s ternárnou spojkou  $(\dots ? \dots : \dots)$  (*ak-tak-inak*) a dvoma nulárnymi spojkami (výrokovými konštantami)  $\top$  a  $\perp$ . Iné spojky sa v týchto formulách nemajú vyskytovať. Príklady formúl nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah, mokro, slnečno, polievacie\_auto, prší\}$ :

$$\perp \quad prší \quad (kim ? jim : sarah) \quad (mokro ? (slnečno ? polievacie\_auto : prší) : \top)$$

Riešenie. a)

**Definícia.** Symbolmi jazyka výrokovej logiky so Shefferovou spojkou sú:

- výrokové premenné z nejakej spočítateľnej množiny  $\mathcal{V}$ , ktorej prvkami nie sú symboly  $\uparrow$ ,  $($ ,  $)$ , ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- logický symbol:  $\uparrow$  (Shefferova spojka);
- pomocné symboly:  $($ ,  $)$ .

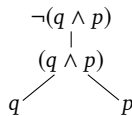
Spojka  $\uparrow$  je binárna.

**Definícia.** Množina  $\mathcal{E}$  výrokových formúl so Shefferovou spojkou nad množinou výrokových premenných  $\mathcal{V}$  je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- Každá výroková premenná  $p \in \mathcal{V}$  je formulou z  $\mathcal{E}$ .
- Ak  $A$  a  $B$  sú formulami z  $\mathcal{E}$ , tak aj postupnosť  $(A \uparrow B)$  je formulou z  $\mathcal{E}$ .

**Úloha 2.1.5.** Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 2.1.3.

Riešenie. a)



**Úloha 2.1.6.** Určte stupeň formúl z úlohy 2.1.3.

Riešenie. Stupeň formuly  $\neg(q \wedge p)$  je  $\deg(\neg(q \wedge p)) = 1 + \deg((q \wedge p)) = 1 + (1 + \deg(q) + \deg(p)) = 1 + (1 + 0 + 0) = 2$ .

**Úloha 2.1.7.** Zadefinujte výrokové „formuly“ so spojkami  $\neg$  a  $\rightarrow$  tak, aby pre ne neplatila veta o jednoznačnosti rozkladu. Nájdite príslušný kontrapríklad, teda „formulu“  $X$ , ktorá sa dá rozložiť na priame „podformuly“ viacerými spôsobmi.

**Úloha 2.1.8.** Vypíšte všetky a) priame podformuly a b) podformuly pre formuly z úlohy 2.1.3.

**Úloha 2.1.9.** Zadefinujte:

- $\text{vars}(A)$  – množinu všetkých výrokových premenných formuly  $A$ ;
- $\text{vcount}(A, p)$  – počet výskytov výrokovej premennej  $p$  vo formule  $A$ ;

- c)  $\text{subfs}(A)$  — množinu všetkých podformúl formuly  $A$ ;
- d)  $\text{pcount}(A)$  — počet výskytov zátvoriek vo formule  $A$ ;
- e)  $\text{cons}(A)$  — množina všetkých logických spojok vo formule  $A$ ;
- f)  $\text{ccount}(A)$  — počet výskytov logických spojok vo formule  $A$ .

Riešenie. e)

💡 Funkciu  $\text{cons}$  zadefinujeme indukčnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre každý z možných tvarov formlí. Sme si pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly nižšieho stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

**Definícia.** Pre každú výrokovú premennú  $p \in \mathcal{V}$  a pre všetky formuly  $A, B$  nad  $\mathcal{V}$  definujeme:

$$\text{cons}(p) = \emptyset$$

$$\text{cons}(\neg A) = \{\neg\} \cup \text{cons}(A)$$

$$\text{cons}((A \wedge B)) = \{\wedge\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

$$\text{cons}((A \vee B)) = \{\vee\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

$$\text{cons}((A \rightarrow B)) = \{\rightarrow\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

💡 Ak sú prípady pre rôzne binárne výrokové spojky navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

**Definícia.** Pre všetky výrokové premenné  $p \in \mathcal{V}$ , všetky formuly  $A, B$  nad  $\mathcal{V}$  a všetky binárne spojky  $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$  definujeme:

$$\text{cons}(p) = \emptyset$$

$$\text{cons}(\neg A) = \{\neg\} \cup \text{cons}(A)$$

$$\text{cons}((A \ b \ B)) = \{b\} \cup \text{cons}(A) \cup \text{cons}(B)$$

□

**Úloha 2.1.10.** Vybudujte teóriu syntaxe výrokovej logiky pre nasledujúce kombinácie spojok:

- a) jediná binárna spojka  $\uparrow$  (*Shefferova spojka*, NAND);
- b) jediná binárna spojka  $\downarrow$  (*Peircova spojka*, NOR);
- c) unárna spojka  $\neg$  a binárna spojka  $\rightarrow$  („a nie“);
- d) binárne spojky  $\leftrightarrow$  („a nie“) a  $\rightarrow$ .

Teória syntaxe pre každú z týchto kombinácií pozostáva z definícií pojmov

- (i) *symboly* jazyka výrokovej logiky,
- (ii) *výroková formula* nad množinou výrokových premenných,

- (iii) vytvárajúca postupnosť a vytvárajúca postupnosť pre formulu,
- (iv) vytvárajúci strom pre formulu.

Formuly majú obsahovať iba spojky z príslušnej kombinácie.

Riešenie. a)

💡 Definície (i) a (ii) sme už uviedli v riešení úlohy 2.1.4 a). Pokračujeme teda bodmi (iii) a (iv):

**Definícia.** Vytvárajúcou postupnosťou je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z  $\mathcal{V}$ , alebo má tvar  $(A \uparrow B)$ , pričom  $A$  a  $B$  sú nejaké predchádzajúce členy tejto postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre  $X$  je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je  $X$ .

**Definícia.** Vytvárajúcim stromom pre formulu  $X$  je binárny strom  $T$  obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni  $T$  je formula  $X$ ;
- ak vrchol obsahuje formulu  $(A \uparrow B)$ , tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu  $A$  a pravé formulu  $B$ ;
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami. □

**Úloha 2.1.11.** Rozhodnite: Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

**Úloha 2.1.12.** Výpis vytvárajúceho stromu formuly  $X$  v poradí:

- |              |                        |
|--------------|------------------------|
| a) preorder, | c) postorder,          |
| b) inorder,  | d) žiadnom z uvedených |

je vytvárajúcou postupnosťou pre formulu  $X$ .

**Úloha 2.1.13.** Dokážte alebo vyvráťte nájdením kontrapríkladu nasledujúce tvrdenia:

- a) počet výskytov pravých zátvoriek v  $A$  plus počet negácií v  $A$  je menší alebo rovný stupňu  $A$ ;
- b) ak  $A$  je podformulou  $B$ , tak sa nachádza v každej vytvárajúcej postupnosti pre  $B$ ;
- c) ak sa  $A$  nachádza vo vytvárajúcej postupnosti pre  $B$ , tak  $A$  je podformulou  $B$ ;
- d) ak sa  $A$  nachádza pred  $B$  vo vytvárajúcej postupnosti pre formulu  $X$ , tak  $A$  je podformulou  $B$ ;
- e) všetky vytvárajúce postupnosti pre formulu  $A$  majú rovnakú dĺžku;
- f) ak  $T$  je vytvárajúci strom pre  $A$  a  $P$  je vytvárajúca postupnosť pre  $A$ , potom počet vrcholov  $T$  je rovnaký ako dĺžka  $P$ ;

- g) dĺžka vytvárajúcej postupnosti pre  $A$  je rovná stupňu  $A$ ;
- h) počet vrcholov vytvárajúceho stromu pre  $A$  je rovný stupňu  $A$ .
- i) počet vnútorných vrcholov vytvárajúceho stromu pre  $A$  je rovný stupňu  $A$ .

## 2.2 Formalizácia vo výrokovej logike

**Úloha 2.2.1.** Sformalizujte nasledujúce tvrdenia (podľa Smullyana [2]) pomocou výrokovej logiky.

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

- a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- b) Doyle nikdy nepracuje sám.
- c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
- d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

*Riešenie.*

💡 Najprv prezrieme všetky tvrdenia, určíme množinu potrebných výrokových premenných a popíšeme ich význam. Významom každej premennej je *výrok*, teda tvrdenie, o ktorého pravdivosti má zmysel uvažovať. Navyše sú to *jednoduché* výroky — neobsahujú žiadne prvky, ktoré sa dajú vyjadriť výrokovými spojkami. Následne môžeme sformalizovať tvrdenia spájaním výrokových premenných do formúl.

Majme množinu výrokových premenných  $\mathcal{V} = \{a, b, d\}$ , kde význam jednotlivých premenných je nasledujúci:  $a$  — Adamsová je vinná,  $b$  — Mills je vinný,  $d$  — Doyle je vinný.

Zistenia z vyšetrovania potom sformalizujeme nasledovne:

- a)  $((a \wedge \neg b) \rightarrow d)$
- b)  $(d \rightarrow (a \vee b))$
- c)  $(a \rightarrow \neg d)$
- d)  $(a \vee (b \vee d))$      $\models$

**Úloha 2.2.2.** Sformalizujte nasledujúce vety (podľa Ghidini a Serafiniho [1]) v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných  $\mathcal{V}$  a popíšte význam použitých premenných.

- a) Aldo nie je Talian.
- b) Aldo je Talian, ale Bob je Angličan.
- c) Ak Aldo nie je Angličan, potom ani Bob nie je Angličan.
- d) Aldo je Talian, alebo ak Aldo nie je Talian, tak Bob je Angličan.
- e) Buď je Aldo Talian a Bob je Angličan, alebo ani Aldo nie je Talian, ani Bob nie je Angličan.



**Úloha 2.2.3.** Sformalizujte nasledujúce vety vo výrokovej logike nad vhodnou spoločnou množinou výrokových premenných  $\mathcal{V}$  a popíšte význam použitých premenných:

- a) Hanka príde na párty, ak Dávid nepríde, ale ak Dávid príde, potom Fero nepríde.
- b) Môžeme si byť istí, že ak Eva príde na párty, tak ak Fero a Hanka neprídu, potom príde Dávid.
- c) Ak ani Eva ani Fero neprídu na párty, potom Dávid príde, iba ak príde Hanka.

**Úloha 2.2.4.** Sformalizujte nasledujúci logický problém (podľa Voronkova [3]) v jazyku výrokovej logiky:

Máme tri osoby, ktoré sa volajú Stirlitz, Müller a Eismann. Vieme, že práve jeden z nich je Rus, kým ostatní dvaja sú Nemci. Navyše každý Rus musí byť špión.

Keď Stirlitz stretne Müllera na chodbe, zavtipkuje: „Vieš, Müller, ty si taký Nemec, ako som ja Rus.“ Je všeobecne známe, že Stirlitz vždy hovorí pravdu, keď vtipkuje.

Máme rozhodnúť, že Eismann nie je ruský špión.

Zvoľte takú množinu výrokových premenných, aby ste tvrdenia sformalizovali verne, nezjednodušujte príliš (napríklad byť Rusom a byť špiónom nie je to isté). Popíšte význam použitých premenných.

Zároveň ale dajte pozor, aby formalizácia nepripúšťala nejaké nečakané možnosti (napríklad „Eismann nie je Rus ani Nemec“ či „Stirlitz je zároveň Rus aj Nemec“).

**Úloha 2.2.5.** Uvažujme nasledovné tvrdenia o problémoch so štartovaním auta. Navrhnite vhodné výrokové premenné a popíšte ich význam. Následne sformalizujte tvrdenia vo výrokovej logike:

- a) Ak je batéria pokazená alebo ak je vybitá, je to príčinou toho, že nepočujeme zvuk štartéra.
- b) To, že počujeme zvuk štartéra, ale auto nenašartuje, môže byť (okrem iného) zapríčinené tým, že batéria je takmer vybitá, alebo tým, že je nádrž prázdna.
- c) Ak sa minulo palivo alebo ak je nádrž deravá, tak je nádrž prázdna.
- d) Auto nenašartuje vtedy, keď je nádrž prázdna alebo keď je batéria takmer vybitá.
- e) Rovnako platí, že ak sme nepočuli zvuk štartéra, auto nemôže naštartovať.

**Úloha 2.2.6.** V pobočke banky zmizli peniaze zo sejfu. Vo výrokovej logike sformalizujte zistené fakty týkajúce sa viny alebo neviny podozrivých:

- a) V čase krádeže bola pobočka zavretá a prístup do nej mali len traja zamestnanci — Atem, Bersičová a Citrák.

- b) Ak Atem má alibi, tak má aj Bersičová alibi.
- c) Atem nemá kľúč od sejfu, takže sa doň dostal, len ak mu pomohol niekto z dvojice Bersičová a Citrák.
- d) Atem bol v čase lúpeže na obede.

## 2.3 Sémantika výrokovej logiky

**Úloha 2.3.1.** Majme danú množinu výrokových premenných  $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$  a jej ohodnotenie  $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$ . Zistite, či ohodnotenie  $v$  spĺňa nasledovné formuly:

- |  |  |
|--|--|
| a) $(p \wedge (\neg q \rightarrow r))$                   | g) $\neg\neg\neg p$  |
| b) $((r \wedge q) \rightarrow \neg p)$                   | h) $(\neg(p \wedge p) \vee \neg q)$  |
| c) $((\neg p \vee \neg q) \vee \neg r)$                  | i) $(\neg q \rightarrow \neg q)$   |
| d) $((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \vee p))$ | j) $(r \rightarrow ((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \rightarrow r)))$                      |
| e) $\neg(q \rightarrow q)$                               | k) $((\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow (q \vee \neg(q \rightarrow r))))$ |
| f) $(p \wedge p)$  |  |

*Riešenie.* a) 1. spôsob — zhora nadol: Podľa definície spĺňania výrokových formúl:

$$\begin{aligned}
 v \models (p \wedge (\neg q \rightarrow r)) & \text{ vtt } v \models p \text{ a súčasne } v \models (\neg q \rightarrow r) \\
 & \text{vtt } v(p) = t, \text{ čo platí, a súčasne } v \not\models \neg q \text{ alebo } v \models r \\
 & \text{vtt } v \not\models \neg q \text{ alebo } v \models r \\
 & \text{vtt } v \models q \text{ alebo } v(r) = t \\
 & \text{vtt } v(q) = t \text{ alebo } v(r) = t \\
 & \text{vtt } f = t, \text{ čo neplatí, alebo } f = t, \text{ čo neplatí.}
 \end{aligned}$$

Konštatujeme teda, že  $v \not\models (p \wedge (\neg q \rightarrow r))$ .

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme splnenie formuly  $F = (p \wedge (\neg q \rightarrow r))$  podľa definície spĺňania pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti:  $p, q, r, \neg q, (\neg q \rightarrow r), (p \wedge (\neg q \rightarrow r))$ :

1.  $v(p) = t$ , teda  $v \models p$ .
2.  $v(q) = f$ , teda  $v \not\models q$ .
3.  $v(r) = f$ , teda  $v \not\models r$ .
4.  $v \not\models q$ , teda  $v \models \neg q$ .
5. Neplatí ani  $v \not\models \neg q$ , ani  $v \models r$ , teda  $v \not\models (\neg q \rightarrow r)$ .
6. Keďže neplatí  $v \models (\neg q \rightarrow r)$ , tak  $v \not\models (p \wedge (\neg q \rightarrow r))$ .

💡 Tento postup sa dá stručnejšie zapísať do tabuľky, kde v záhlaví si zapíšeme jednotlivé podformuly, ktoré budeme k určeniu splnenia našej formuly potrebovať, a do riadku  $v$  poznačíme, či  $v$  príslušnú podformulu spĺňa ( $\models$ ) alebo nespĺňa ( $\not\models$ ):

	$p$	$q$	$r$	$\neg q$	$(\neg q \rightarrow r)$	$(p \wedge (\neg q \rightarrow r))$
$v$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\not\models$

⌋

**Úloha 2.3.2.** O každej z nasledujúcich formúl nad  $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$  rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, (iii) falzifikovateľná, alebo (iv) nespĺniteľná:

- |  |   |
|--|---|
| a) $(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$ | h) $(p \wedge \neg p)$  |
| b) $((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \vee \neg q))$          | i) $\neg\neg\neg(p \vee p)$   |
| c) $(p \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow p)))$     | j) $((p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge q))$   |
| d) $(p \wedge (q \vee \neg(p \rightarrow r)))$             | k) $((q \vee \neg r) \wedge (p \rightarrow \neg r)) \rightarrow$<br>$(\neg r \rightarrow (\neg p \wedge q))$  |
| e) $((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow \neg p$  | l) $((p \rightarrow (\neg r \rightarrow q)) \wedge$<br>$((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(p \rightarrow r)))$ |
| f) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$                        |   |
| g) $((p \wedge \neg p) \vee (p \vee \neg p))$              |   |

**Riešenie.** a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula  $F = (\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$ , preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v  $F$ :

💡 Keďže v  $F$  sa vyskytujú dve premenné, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

	$v_i$									
	$p$	$q$	$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$
$v_1$	$f$	$f$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
$v_2$	$t$	$f$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
$v_3$	$f$	$t$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
$v_4$	$t$	$t$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$

💡 Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly  $F$ , nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

- (i) Keďže  $v_2 \not\models F$ , teda *nie všetky* ohodnotenia spĺňajú  $F$ , tak  $F$  *nie je* tautológiou.
- (ii) Keďže  $v_1 \models F$ , teda *aspoň jedno* ohodnotenie spĺňa  $F$ , tak  $F$  *je* splniteľná.
- (iii) Keďže  $v_2 \not\models F$ , teda *aspoň jedno* ohodnotenie nespĺňa  $F$ , tak  $F$  *je* aj falzifikovateľná.
- (iv) Keďže  $v_1 \models F$ , teda *nie je pravda*, že *všetky* ohodnotenia *nespĺňajú*  $F$ , tak  $F$  *nie je* nespĺniteľná.

⌋

**Úloha 2.3.3.** Zadefinujte vzťah *ohodnotenie*  $v$  *spĺňa formulu*  $X$  ( $v \models X$ ) pre výrokovú logiku s nasledujúcimi kombináciami spojok:

- jediná binárna spojka  $\uparrow$  (*Shefferova spojka*, NAND) s neformálnym významom:  $(A \uparrow B)$  je pravdivé práve vtedy, keď nie je súčasne pravdivé  $A$  aj  $B$ ;
- jediná binárna spojka  $\downarrow$  (*Peircova spojka*, NOR) s neformálnym významom:  $(A \downarrow B)$  je pravdivé práve vtedy, keď nie je pravda, že je pravdivé  $A$  alebo je pravdivé  $B$ ;
- unárna spojka  $\neg$  a binárna spojka  $\leftrightarrow$  („a nie“) s neformálnym významom:  $(A \leftrightarrow B)$  je pravdivé práve vtedy, keď je pravdivé  $A$  a nie je pravdivé  $B$ ;
- binárne spojky  $\rightarrow$  a  $\leftarrow$  („a nie“, viď predchádzajúci variant).

Definícia syntaxe pre tieto logiky bola predmetom úlohy 2.1.10.

*Riešenie.* a)

**Definícia.** Nech  $\mathcal{V}$  je množina výrokových premenných. Nech  $v$  je ohodnotenie množiny  $\mathcal{V}$ . Pre všetky výrokové premenné  $p$  z  $\mathcal{V}$  a všetky formuly  $A, B$  nad  $\mathcal{V}$  definujeme:


- $v \models p$  vtt  $v(p) = t$ ;
- $v \models (A \uparrow B)$  vtt  $v \not\models A$  alebo  $v \not\models B$ .

□

**Úloha 2.3.4.** Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre problém  $n$  dám ( $n$  queens) pre každé  $n \in \mathbb{N}$ :

Ako je možné na šachovnici s rozmermi  $n \times n$  políček rozmiestniť  $n$  dám tak, aby sa vzájomne neohrozovali?

Každá dáma ohrozuje na šachovnici všetky ostatné figúrky vo svojom riadku, vo svojom stĺpci a na oboch uhlopriečkach pretínajúcich sa na jej pozícii.


 **Pomôcka.** Použite výrokové premenné  $q_{i,j}$ ,  $0 \leq i, j < n$ , ktorých pravdivostná hodnota bude hovoriť, či je alebo nie je na pozícii  $(i, j)$  umiestnená dáma.

Obmedzenia na umiestnenie dám sa dajú sformalizovať jednoduchými implikáciami  $(q_{i,j} \rightarrow \neg q_{k,\ell})$ , kde  $(i, j)$  a  $(k, \ell)$  sú navzájom sa ohrozujúce pozície dám.

Nemusíme počítať počet dám. Stačí požadovať, že v každom riadku musí byť nejaká dáma (určite nemôžu byť dve dámy v tom istom riadku, keďže ich má byť  $n$ , musí byť v každom riadku práve jedna).

**Úloha 2.3.5.** Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre každý vstupný hlavolam Sudoku popísaný maticou  $9 \times 9$  čísel  $0, 1, \dots, 9$ , pričom  $0$  predstavuje prázdne políčko.

Riešenie hlavolamu doplní čísla  $1, \dots, 9$  do prázdnych políček tak, aby sa všetky tieto čísla vyskytovali v každom riadku, v každom stĺpci a vo všetkých  $9$  vzájomne sa nepretínajúcich podmaticiach  $3 \times 3$ .

 **Pomôcka.** Pomocou výrokových premenných  $s_{i,j,n}$ ,  $0 \leq i, j \leq 8, 1 \leq n \leq 9$ , môžeme sformalizovať, že na súradniciach  $(i, j)$  je vpísané číslo  $n$ . Musíme však sformalizovať obmedzenie, že na každej pozícii musí byť *práve* jedno číslo (teda súčasne najviac jedno a nie dve rôzne). Dá sa to podobne ako pri probléme  $n$  dam.

## 2.4 Vyplývanie

**Úloha 2.4.1.** Uvažujme nasledovnú teóriu nad  $\mathcal{V} = \{p, r, s\}$ :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} p, \\ ((p \wedge r) \rightarrow s), \\ (s \vee (r \rightarrow p)) \end{array} \right\}$$


Zistite, či z  $T$  vyplývajú nasledovné formuly:

- |                        |   |
|------------------------|---|
| a) $(r \wedge s)$      | c) $((r \rightarrow s) \rightarrow \neg p)$ |
| b) $(r \rightarrow s)$ | d) $(\neg s \rightarrow (\neg r \vee p))$   |

*Riešenie.* Úlohu vyriešime pre formuly (a) a (b). Urobíme analýzu všetkých možných ohodnotení  $v$  výrokových premenných z teórie  $T$ , ktoré si zapíšeme do tabuľky. Zistíme, ktoré z týchto ohodnotení sú modely  $T$ . Potom preveríme vyplývanie podľa definície: zistíme, či vo všetkých modeloch  $T$  sú formuly (a) a (b) splnené:

	$v_i$			$T$			(a)	(b)
	$p$	$r$	$s$	$p$	$((p \wedge r) \rightarrow s)$	$(s \vee (r \rightarrow p))$	$(r \wedge s)$	$(r \rightarrow s)$
$v_1$	$f$	$f$	$f$	$\neq$	—	—	—	—
$v_2$	$f$	$f$	$t$	$\neq$	—	—	—	—
$v_3$	$f$	$t$	$f$	$\neq$	—	—	—	—
$v_4$	$f$	$t$	$t$	$\neq$	—	—	—	—
$v_5$	$t$	$f$	$f$	$\models$	$\neq$	—	—	—
$v_6$	$t$	$f$	$t$	$\models$	$\models$	$\models$	$\neq$	$\models$
$v_7$	$t$	$t$	$f$	$\models$	$\neq$	—	—	—
$v_8$	$t$	$t$	$t$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$

Analýza ohodnotení ukázala, že teória  $T$  má dva modely, v tabuľke sú uvedené ako  $v_6$  a  $v_8$ . V prípade (a) konštatujeme, že  $T \not\models (r \wedge s)$ , pretože  $v_6 \not\models (r \wedge s)$ . V prípade (b) naopak  $T \models (r \rightarrow s)$  keďže  $v_6 \models (r \rightarrow s)$  aj  $v_8 \models (r \rightarrow s)$ .

 Všimnime si tiež, že pokiaľ pre niektoré ohodnotenie  $v_i$  zistíme, že  $v_i \not\models A$ , pre hociktorú formulu  $A \in T$ , tak  $v_i$  už modelom  $T$  byť podľa definície nemôže. Preto splnenie ostatných formúl v danom riadku už vyhodnocovať netreba. Tieto prípady sme označili znakom „—“. Toto nám ušetrí množstvo práce. □

**Úloha 2.4.2.** Nech  $\mathcal{V} = \{p, r\}$ . Zistite, či z teórie  $S_i$  vyplýva formula  $X_i$ , pre nasledujúce dvojice  $S_i$  a  $X_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \begin{array}{l} (r \rightarrow p), \\ (\neg r \rightarrow (\neg p \vee p)) \end{array} \right\} & X_1 &= ((p \rightarrow r) \rightarrow r); \\ S_2 &= \left\{ \begin{array}{l} (\neg r \rightarrow (\neg p \vee r)), \\ (p \vee \neg r) \end{array} \right\} & X_2 &= ((p \vee r) \rightarrow p); \\ S_3 &= \left\{ \begin{array}{l} ((p \rightarrow r) \rightarrow p), \\ (p \vee \neg r) \end{array} \right\} & X_3 &= (\neg p \rightarrow (r \wedge p)). \end{aligned}$$

**Úloha 2.4.3.** Je daná teória  $T$  nad  $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$ :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (p \rightarrow (q \wedge r)), \\ ((q \rightarrow p) \vee (s \rightarrow r)), \\ (\neg p \rightarrow (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z  $T$  vyplývajú nasledovné formuly:

- |   |   |
|---|---|
| a) $p$ ,  | e) $((p \wedge q) \rightarrow s)$ ,                 |
| b) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ ,                           | f) $\neg r$ ,                                       |
| c) $((s \wedge r) \rightarrow \neg p)$ ,                      | g) $((s \vee p) \rightarrow r)$ ,                   |
| d) $((\neg p \wedge s) \rightarrow (\neg r \wedge \neg q))$ , | h) $((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p))$ . |

**Úloha 2.4.4.** V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil štyroch podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonalda, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:


(A<sub>1</sub>) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

(A<sub>2</sub>) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

(A<sub>3</sub>) Taylor nikdy nepracuje bez McDonalda.

(A<sub>4</sub>) McDonald je vinný, ak je Brown nevinný.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

 **Pomôcka.** Sformalizujte zistené skutočnosti ako teóriu  $T$  nad množinou vhodne zvolených výrokových premenných  $\mathcal{V}$ . Zistite, či je teória  $T$  konzistentná. Následne rozhodnite, koho vina a koho nevina z  $T$  vyplýva. Zistite, koho vina a nevina je od  $T$  nezávislá. Vyvodte z toho závery o tom, koho je možné obviniť, koho je možné oslobodiť, a o koho vine ani nevine nemožno rozhodnúť.

**Úloha 2.4.5.** V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Inšpektorka Fishcousová počas vyšetrovania zistila tieto skutočnosti:

- (A<sub>1</sub>) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- (A<sub>2</sub>) Doyle nikdy nepracuje sám.
- (A<sub>3</sub>) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
- (A<sub>4</sub>) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.


Podobne ako v predchádzajúcej úlohe zistíte, koho z podozrivých má inšpektorka obviňovať, kto je určite nevinný a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

**Úloha 2.4.6.** Nech  $X$  a  $Y$  sú ľubovoľné výrokové formuly, nech  $T$  je ľubovoľná výroková teória.

Dokážte alebo vyvráťte:

- a)  $\{\} \models X$  vtt  $X$  je tautológia.
- b) Formuly  $X$  a  $Y$  sú ekvivalentné vtt  $(X \leftrightarrow Y)$  je tautológia.
- c) Ak  $T \models \neg X$ , tak  $T \not\models X$ .
- d) Ak  $T \not\models X$ , tak  $T \models \neg X$ .
- e)  $T \models (X \rightarrow Y)$  vtt  $T \cup \{X\} \models Y$ .
- f) Formula  $(X \rightarrow Y)$  je nespĺniteľná vtt  $X$  je tautológia a  $Y$  je nespĺniteľná.
- g) Formula  $X$  je nezávislá od  $\{\}$  vtt  $X$  je splniteľná a falzifikovateľná.
- h) Ak formula  $X$  logicky nevyplýva z  $T$  a ani nie je nezávislá od  $T$ , tak  $T$  je splniteľná a vyplýva z nej negácia  $X$ .

*Riešenie.* a)


 Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že  $\{\} \models X$  je postačujúcou ( $\Rightarrow$ ) aj nutnou ( $\Leftarrow$ ) podmienkou toho, že  $X$  je tautológia, teda:

( $\Rightarrow$ ) ak  $\{\} \models X$ , tak  $X$  je tautológia;

( $\Leftarrow$ ) ak  $X$  je tautológia,  $\{\} \models X$ .

( $\Rightarrow$ ) a ( $\Leftarrow$ ) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie  $\rightarrow$ ). Obe dokážeme priamymi dôkazmi. Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

( $\Rightarrow$ ) Nech  $X$  je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že  $\{\} \models X$ . Chceme ukázať, že potom  $X$  je tautológia.

 Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že každé ohodnotenie  $v$ , ktoré spĺňa teóriu  $\{\}$ , spĺňa aj formulu  $X$ . Podľa definície tautológie chceme dokázať, že každé ohodnotenie  $v$  spĺňa  $X$ .

🔗 Keď je cieľom dokázať, že všetky objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (spĺňajú  $X$ ), zoberieme si hocikaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie  $v$ . Pretože teória  $\{\}$  neobsahuje žiadne formuly,  $v$  spĺňa všetky formuly, ktoré do nej patria, a teda podľa definície splnenia teórie ohodnotením,  $v \models \{\}$ . Z predpokladu, že  $z \{\}$  vyplýva  $X$ , potom máme, že  $v \models X$ . Na základe tohto zistenia a preto, že  $v$  bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že každé ohodnotenie  $v$  spĺňa  $X$ , teda  $X$  je tautológia, čo bolo treba dokázať.

( $\Leftarrow$ ) Nech  $X$  je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že  $X$  je tautológia, teda že (podľa definície) všetky ohodnotenia spĺňajú  $X$ . Chceme ukázať, že potom  $\{\} \models X$ , teda že (podľa definície) všetky ohodnotenia, ktoré spĺňajú  $\{\}$ , spĺňajú aj  $X$ .

🔗 Jasnejšia formulácia tohto tvrdenia je: Pre všetky ohodnotenia  $v$ , ak  $v \models \{\}$ , tak  $v \models X$ . Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie  $v$ . Predpokladajme, že  $v \models \{\}$ , a ukážme, že  $v \models X$ . To však máme priamo z predpokladu, že  $X$  je tautológia. Teda konštatujeme, že každé ohodnotenie, ktoré spĺňa  $\{\}$ , spĺňa aj  $X$ , teda  $z \{\}$  vyplýva  $X$ , čo bolo treba dokázať.

Dokázaním tvrdení ( $\Rightarrow$ ) a ( $\Leftarrow$ ) sme dokázali tvrdenie a). □

## 2.5 Ekvivalencia a konjunktívny normálny tvar

**Úloha 2.5.1.** Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl, ktoré sa zvyčajne používajú na ekvivalentné úpravy formúl, sú (sémanticky) ekvivalentné ( $\top$  je ľubovoľná tautológia,  $\perp$  je ľubovoľná nespítnateľná formula):

- |  |   |
|--|---|
| a) asociatívnosť $\wedge$ a $\vee$ :                           | $\neg(p \vee r)$ a $(\neg p \wedge \neg r)$ ; |
| $(p \wedge (q \wedge r))$ a $((p \wedge q) \wedge r)$ ,        |   |
| $(p \vee (q \vee r))$ a $((p \vee q) \vee r)$ ;                | e) dvojité negácia:                           |
|  | $\neg\neg p$ a $p$ ;                          |
| b) distributívnosť $\wedge$ cez $\vee$ a $\vee$ cez $\wedge$ : | f) idempotencia:                              |
| $(p \wedge (q \vee r))$ a $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ , | $(p \wedge p)$ a $p$ ,                        |
| $(p \vee (q \wedge r))$ a $((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ ;   | $(p \vee p)$ a $p$ ;                          |
| c) komutatívnosť $\wedge$ a $\vee$ :                           | g) identita:                                  |
| $(p \wedge r)$ a $(r \wedge p)$ ,                              | $(p \wedge \top)$ a $p$ ,                     |
| $(p \vee r)$ a $(r \vee p)$ ;                                  | $(p \vee \perp)$ a $p$ ;                      |
| d) de Morganove pravidlá:                                      | h) absorpcia:                                 |
| $\neg(p \wedge r)$ a $(\neg p \vee \neg r)$ ,                  |   |



- $(p \vee (p \wedge r))$  a  $p$ ,  
 $(p \wedge (p \vee r))$  a  $p$ ;  
 i) vylúčenie tretieho:  
 $(p \vee \neg p)$  a  $\top$ ;  
 j) spor:  
 $(p \wedge \neg p)$  a  $\perp$ ;  
 k) nahradenie  $\rightarrow$ :  
 $(p \rightarrow r)$  a  $(\neg p \vee r)$ .

**Riešenie.** d) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme splnenie formúl  $\neg(p \wedge r)$  a  $(\neg p \vee \neg r)$  vo všetkých rôznych ohodnotení tých výrokových premených, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

	$v_i$									
	$p$	$r$	$p$	$r$	$\neg p$	$\neg r$	$(p \wedge r)$	$\neg(p \wedge r)$	$(\neg p \vee \neg r)$	
$v_1$	f	f	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	
$v_2$	t	f	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	
$v_3$	f	t	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	
$v_4$	t	t	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme:

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie  $v_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , platí  $v_i \models \neg(p \wedge r)$  vtt  $v_i \models (\neg p \vee \neg r)$ . Z toho, z tvrdenia 2.25 z prednášky a z definície ekvivalencie vyplýva, že formuly  $\neg(p \wedge r)$  a  $(\neg p \vee \neg r)$  sú ekvivalentné.  $\square$

**Úloha 2.5.2.** Nájdite k nasledujúcim formulám ekvivalentné formuly v CNF:

- a)  $(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$   
 b)  $((q \wedge \neg s) \rightarrow (p \wedge r))$   
 c)  $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$   
 d)  $((\neg p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$   
 e)  $((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s))$

**Riešenie.** a) 1.  $(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$

2.  $(\neg(q \vee r) \vee (\neg \neg p \vee s))$

3.  $(\neg(q \vee r) \vee (p \vee s))$

4.  $((\neg q \wedge \neg r) \vee (p \vee s))$

5.  $((\neg q \wedge \neg r) \vee p) \vee s$

6.  $((\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)) \vee s$

7.  $((\neg q \vee p) \vee s) \wedge ((\neg r \vee p) \vee s)$

[nahradenie implikácie]

[odstránenie dvojitej negácie]

[de Morganovo pravidlo]

[asociatívnosť  $\vee$ ]

[distributívnosť  $\vee$  cez  $\wedge$ ]

[distributívnosť  $\vee$  cez  $\wedge$ ]

**Úloha 2.5.3.** Pre každú CNF formulu z úlohy 2.5.2 určte množinu jej klauzúl a mohutnosť tejto množiny.

**Úloha 2.5.4.** Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare. Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

- |   |  |
|---|--|
| a) $p$  | j) $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)$               |
| b) $\neg r$                                       | k) $((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)$                 |
| c) $\neg \neg q$                                  | l) $((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$       |
| d) $((p \vee q) \rightarrow r)$                   | m) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| e) $((p \vee q) \vee r)$                          | n) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$   |
| f) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$       | o) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$ |
| g) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$  | p) $((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \vee \neg p)$   |
| h) $((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge r))$        | q) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee \neg(r \wedge \neg p)$  |
| i) $(p \wedge (q \wedge (\neg q \wedge \neg r)))$ | r) $((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$   |

**Úloha 2.5.5.** Pre každú formulu  $X$  z úlohy 2.5.4, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v  $X$ , ktoré spĺňajú  $X$ .

**Úloha 2.5.6.** Nech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a  $D$  sú formuly. Dokážte priamo z definície ekvivalenosti formúl alebo vyvráťte:

- Ak  $A$  je ekvivalentná s  $C$  a  $B$  je ekvivalentná s  $D$ , tak  $(A \wedge B)$  je ekvivalentná s  $(C \wedge D)$ .
- Ak  $(A \wedge B)$  je ekvivalentná s  $(C \wedge D)$ , tak  $A$  je ekvivalentná s  $C$  a  $B$  je ekvivalentná s  $D$ .

## 2.6 Tablový kalkúl

**Úloha 2.6.1.** Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 2.4.5: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

- Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- Doyle nikdy nepracuje sám.
- Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
- Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

*Riešenie.* Naším cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno obviňovať, a ktorý je naopak nevinný. Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické výroky, ktoré reprezentujeme výrokovými premennými  $\mathcal{V} = \{A, M, D\}$ , pričom každá premenná znamená, že príslušný podozrivý je vinný.

Zistenia (a–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} ((A \wedge \neg M) \rightarrow D), \\ (D \rightarrow (A \vee M)), \\ (A \rightarrow \neg D), \\ (A \vee (M \vee D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkuľom. Najprv preveríme, či je  $T$  splniteľná, a to tak, že sa v table pre  $T^+ = \{T((A \wedge \neg M) \rightarrow D)), T(D \rightarrow (A \vee M)), T(A \rightarrow \neg D), T(A \vee (M \vee D))\}$  pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

1.  $T((A \wedge \neg M) \rightarrow D) \quad T^+$
2.  $T(D \rightarrow (A \vee M)) \quad T^+$
3.  $T(A \rightarrow \neg D) \quad T^+$
4.  $T(A \vee (M \vee D)) \quad T^+$

5. $F(A \wedge \neg M) \beta 1$		6. $TD \beta 1$				
7. $FD \beta 2$ * 6, 7		8. $T(A \vee M) \beta 2$				
		9. $TA \beta 8$		10. $TM \beta 8$		
				11. $FA \beta 3$		16. $T \neg D \beta 3$
				12. $TA \beta 4$ * 11, 12		17. $FD \alpha 16$ * 6, 17
				13. $T(M \vee D) \beta 4$		
		14. $TM \beta 13$		15. $TD \beta 13$		

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe úplné a otvorené. Teda  $T$  je konzistentná. Na otázku, ktorý z obvinených je vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

Následne je našou úlohou overiť, kto z obvinených je vinný a kto nie. Pokúsime sa dokázať, že Mills je vinný, teda že  $T \models M$ . Platí to, ak sa nám v table pre  $T_M^+ = \{T((A \wedge \neg M) \rightarrow D)), T(D \rightarrow (A \vee M)), T(A \rightarrow \neg D), T(A \vee (M \vee D)), FM\}$  podarí uzavrieť všetky vetvy.

1.  $T((A \wedge \neg M) \rightarrow D) \quad T_M^+$
2.  $T(D \rightarrow (A \vee M)) \quad T_M^+$
3.  $T(A \rightarrow \neg D) \quad T_M^+$
4.  $T(A \vee (M \vee D)) \quad T_M^+$
5.  $FM \quad T_M^+$

6. $TA \beta 4$			13. $T(M \vee D) \beta 4$				
7. $F(A \vee \neg M) \beta 1$		9. $TD \beta 1$		14. $TM \beta 13$ * 5, 14	15. $TD \beta 13$		
8. $FA$ *	$\alpha 7$ 6, 8	10. $FA \beta 3$ * 6, 10	11. $T \neg D \beta 3$ 12. $FD$ $\alpha 11$ * 9, 12		16. $FD \beta 2$ * 15, 16	17. $T(A \vee M) \beta 2$	
					18. $TA \beta 17$		22. $TM \beta 17$ * 5, 22
					19. $FA \beta 3$ * 18, 19	20. $T \neg D \beta 3$ 21. $FD$ $\alpha 20$ * 15, 21	

Podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla, a teda sme dokázali, že  $T \models M$ . Keďže  $T$  je konzistentná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný. O vine, či nevine Adamsovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom.  $\models$

**Úloha 2.6.2.** Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 2.4.4: Inšpektor Nick Fishtawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonalda, pričom zistil, že:


- (A<sub>1</sub>) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.
- (A<sub>2</sub>) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.
- (A<sub>3</sub>) Taylor nikdy nepracuje bez McDonalda.
- (A<sub>4</sub>) McDonald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkuľom. Záver slovne zdôvodnite.

**Úloha 2.6.3.** Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

- |   |   |
|---|---|
| a) $((p \rightarrow r) \rightarrow ((r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)))$ ,                      | i) $(p \rightarrow (r \rightarrow p))$ ,  |
| b) $((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))$ ,  | j) $(p \rightarrow (p \vee r))$ ,   |
| c) $(p \leftrightarrow \neg \neg p)$ ,  | k) $(\neg p \rightarrow (p \rightarrow r))$ ,                                   |
| d) $((p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow \neg r)) \rightarrow \neg p$ ,                                   | l) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$ ,                |
| e) $(p \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg(p \rightarrow r)))$ ,   | m) $((p \wedge (r \vee s)) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (p \wedge s)))$ , |
| f) $((p \rightarrow (r \rightarrow s)) \rightarrow$<br>$((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow s)))$ , | n) $((p \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow p)$ .                                |
| g) $(p \rightarrow (r \rightarrow (p \wedge r)))$ ,   | o) $((p \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow r)$ ,                             |
| h) $((p \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow$<br>$((p \vee r) \rightarrow s)$ ,               | p) $((\neg r \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow \neg p)$ .                   |

*Riešenie.* b) Aby sme dokázali, že  $((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))$  je tautológia, stačí zistiť, či je množina  $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))\}$  nesplniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

 Pre formuly  $(A \leftrightarrow B)$  nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za  $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$ . V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

$$1. \quad \mathbf{F}(((\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow p)) \wedge ((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r))) \quad S^+$$

2. $\mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \rightarrow (r \rightarrow p))$	$\beta 1$	11. $\mathbf{F}((r \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg r))$	$\beta 1$
3. $\mathbf{T}(\neg p \rightarrow \neg r)$	$\alpha 2$	12. $\mathbf{T}(r \rightarrow p)$	$\alpha 11$
4. $\mathbf{F}(r \rightarrow p)$	$\alpha 2$	13. $\mathbf{F}(\neg p \rightarrow \neg r)$	$\alpha 11$
5. $\mathbf{T}r$	$\alpha 4$	14. $\mathbf{T}\neg p$	$\alpha 13$
6. $\mathbf{F}p$	$\alpha 4$	15. $\mathbf{F}\neg r$	$\alpha 13$
7. $\mathbf{F}\neg p$	$\beta 3$	16. $\mathbf{F}p$	$\alpha 14$
8. $\mathbf{T}p$	$\alpha 7$	17. $\mathbf{T}r$	$\alpha 15$
* 6, 8		18. $\mathbf{F}r$	$\beta 12$
		* 17, 18	
9. $\mathbf{T}\neg r$	$\beta 3$	19. $\mathbf{T}p$	$\beta 12$
10. $\mathbf{F}r$	$\beta 9$	* 19, 16	
* 6, 10			

Našli sme uzavreté tablo pre množinu  $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))\}$ , ktorá je teda nespĺniteľná, a preto  $((\neg p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow (r \rightarrow p))$  je tautológia.  $\models$

**Úloha 2.6.4.** Dokážte, že z nasledujúcich tvrdení:

- (A<sub>1</sub>) Keď mám dáždnik, nikdy neprší.
- (A<sub>2</sub>) Cesta je mokrá, iba ak prší alebo prešlo umývacie auto.
- (A<sub>3</sub>) Umývacie auto nejazdí cez víkend.

vyplýva

(X) Ak mám dáždnik a je mokrá cesta, nie je víkend.

Tvrdenia sformalizujte a využite tablový kalkul.

**Úloha 2.6.5.** Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviňovať? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

**Úloha 2.6.6.** Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých X, Y, Z a zistili nasledujúce fakty:

- (A<sub>1</sub>) Každý z podozrivých X, Y, Z bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.
- (A<sub>2</sub>) X vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.
- (A<sub>3</sub>) Z nie je vinný alebo je vinný Y.

( $A_4$ ) Ak sú vinní práve dvaja, tak  $X$  je jedným z nich.

( $A_5$ )  $Y$  je vinný, iba ak je vinný aj  $Z$ .

Koho má inšpektorka Fishcousová obviň?

# Literatúra

- [1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. <http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf>.
- [2] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.
- [3] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. <http://www.voronkov.com/lics.cgi>.