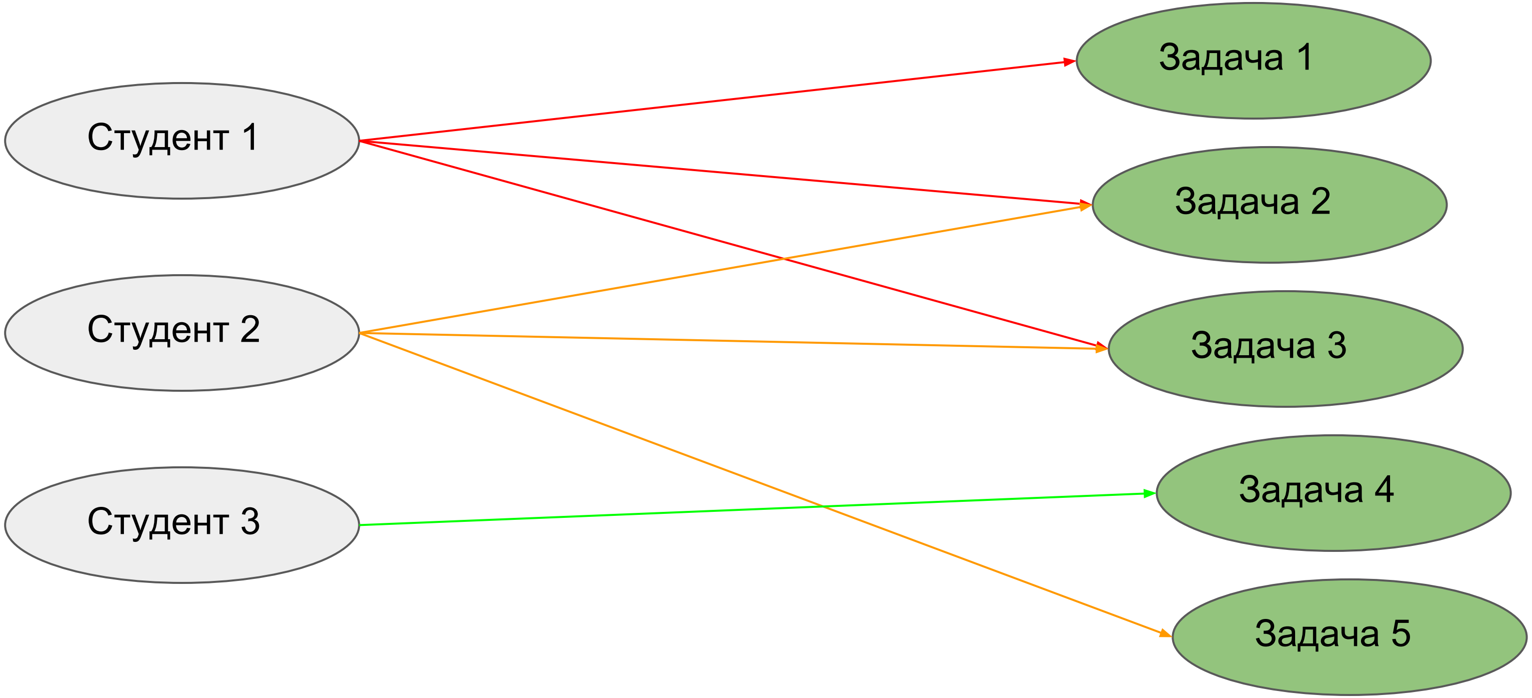
Графы и отношения

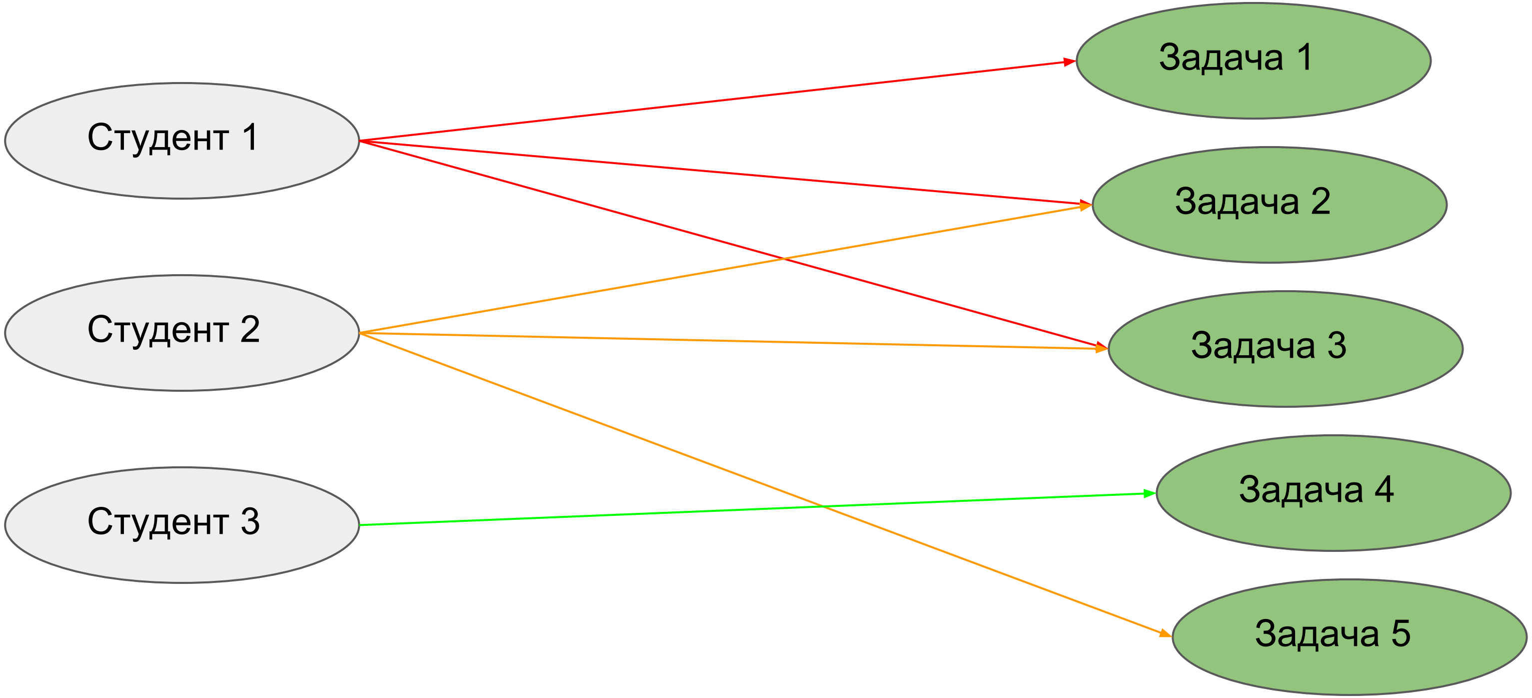
Графы и отношения

	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Студент 1	+	+	+		
Студент 2		+	+		+
Студент 3				+	

Графы и отношения

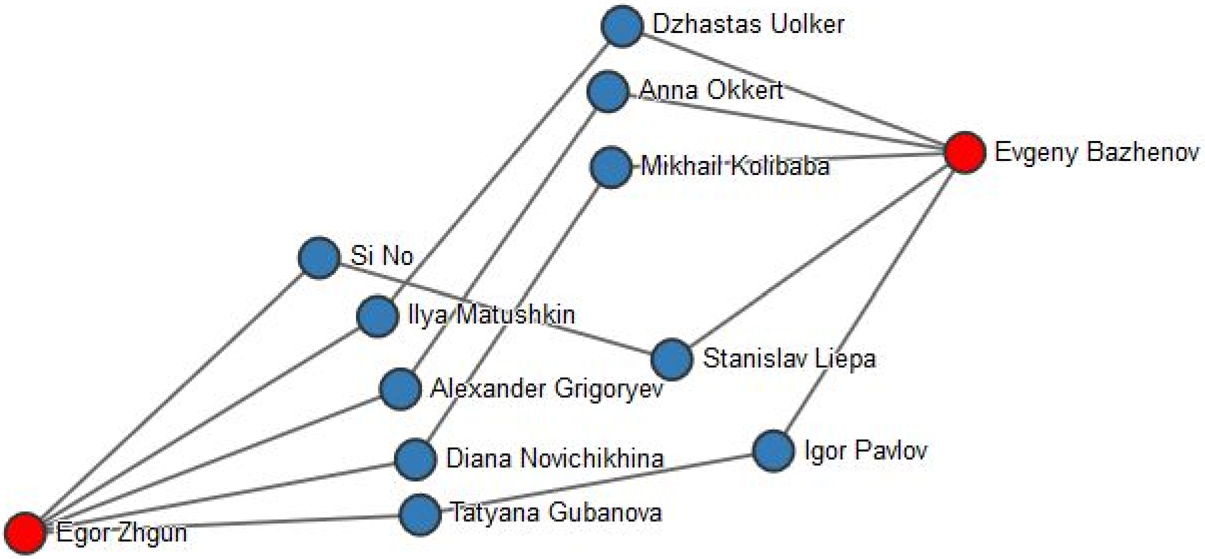


Графы и отношения

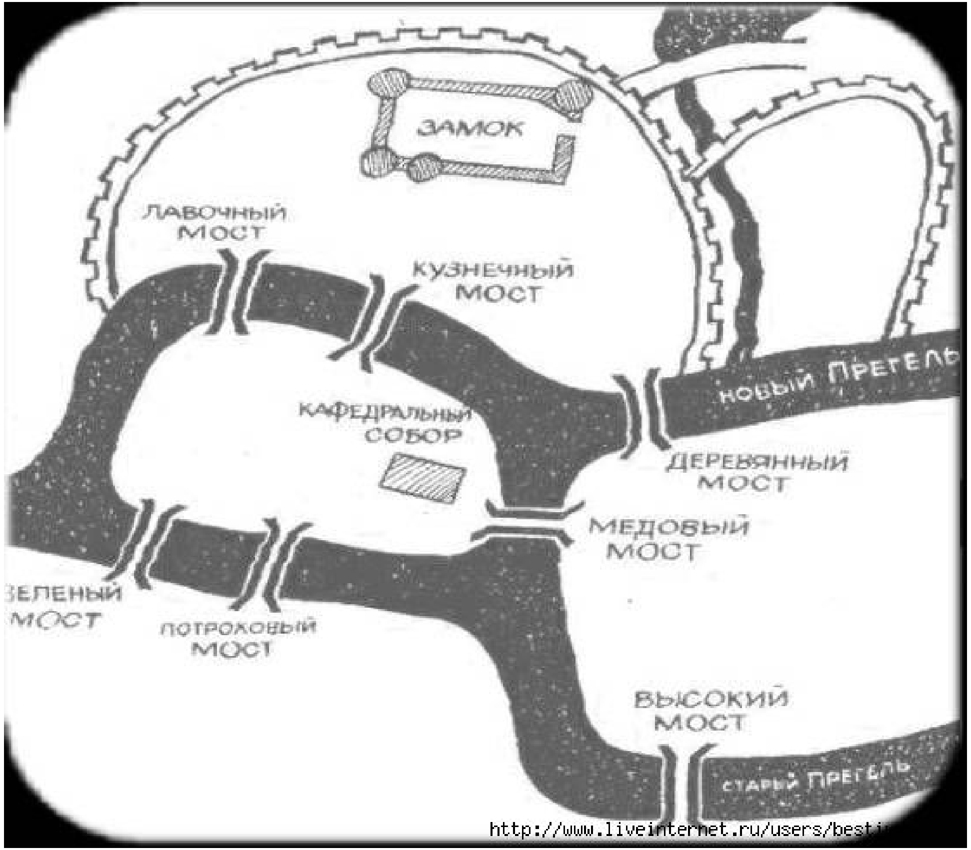


Ребра - подмножество декартового произведения множества студентов и задач

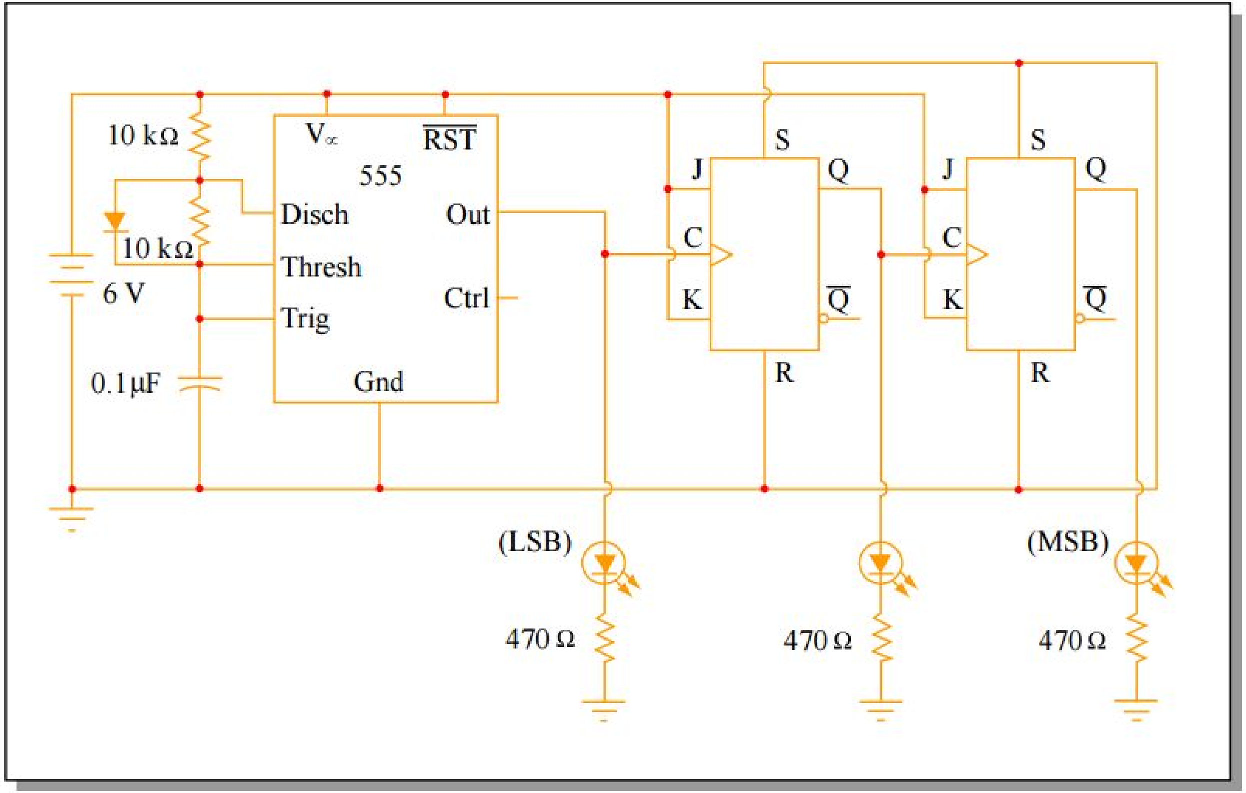
Графы и отношения



Графы и отношения



Графы и отношения



Графы: определения

Графы: определения

$$G = (V, E)$$

Графы: определения

$$G = (V, E)$$

V - множество различимых объектов

Графы: определения

$$G = (V, E)$$

V - множество различимых объектов

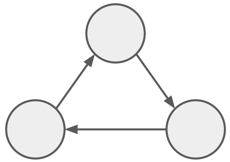
E множество упорядоченных пар (x, y)

Графы: определения

$$G = (V, E)$$

V - множество различимых объектов

E множество упорядоченных пар (x, y)



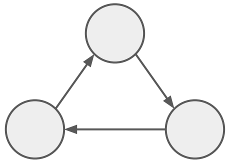
Графы: определения

$$G = (V, E)$$

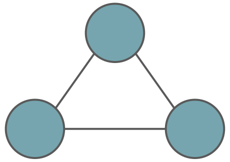
V - множество различимых объектов

E

множество упорядоченных пар (x, y)



множество неупорядоченных пар $(x, y) = (y, x)$



Графы: определения

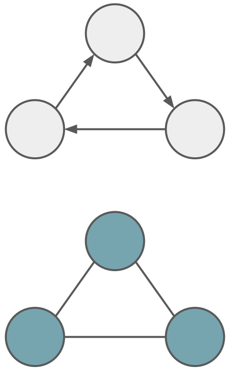
$$G = (V, E)$$

V - множество различимых объектов

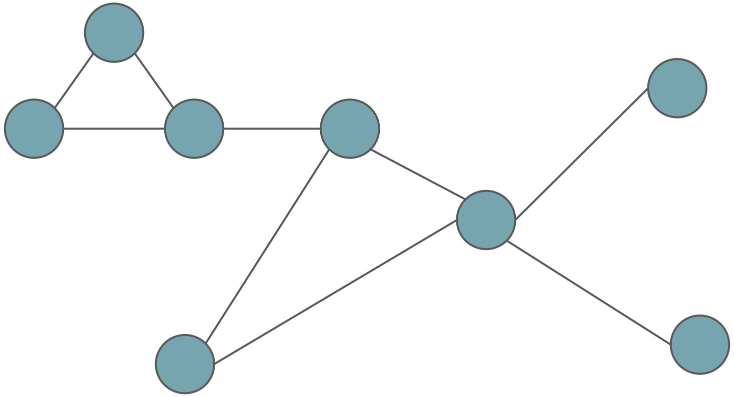
E

множество упорядоченных пар (x, y)

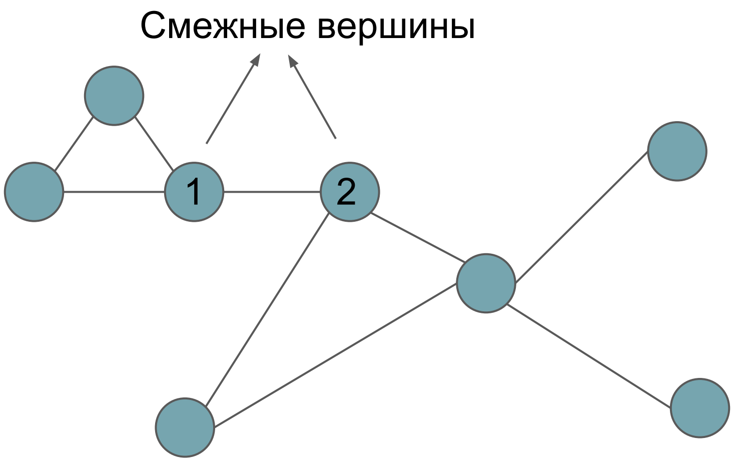
множество неупорядоченных пар $(x, y) = (y, x)$



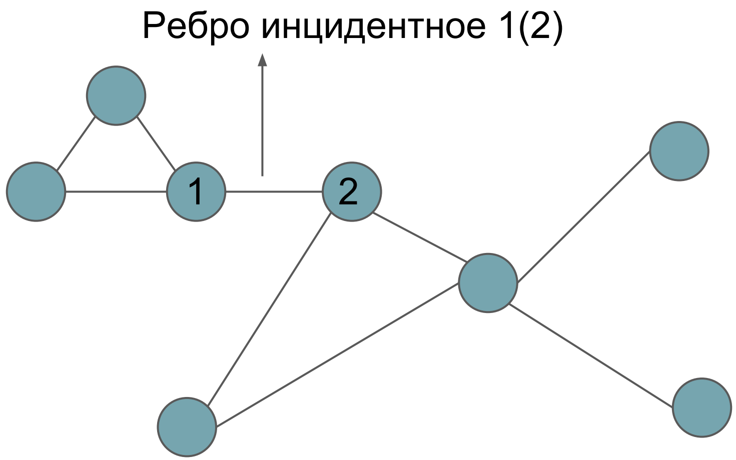
Графы: определения



Графы: определения

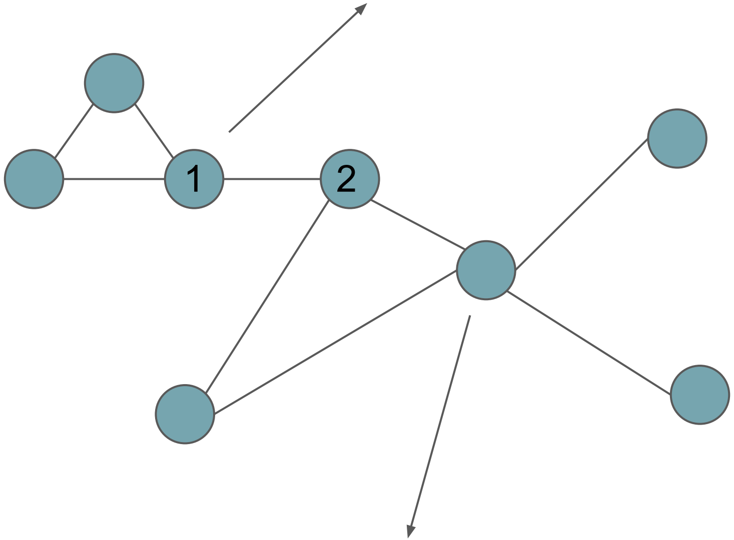


Графы: определения



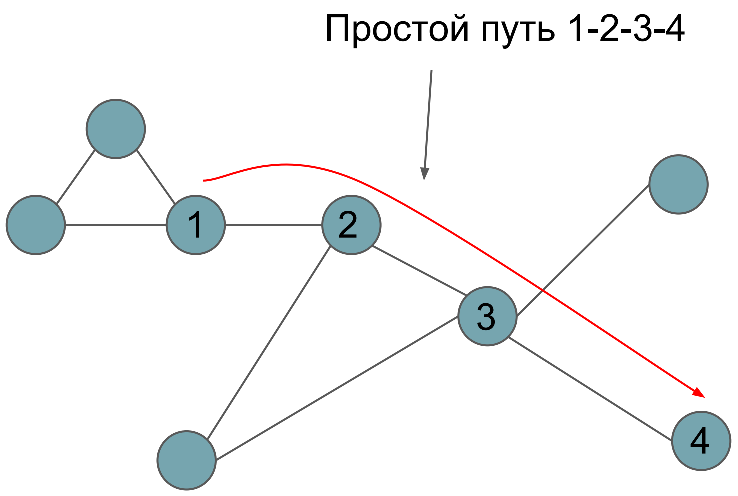
Графы: определения

Вершина степени 3



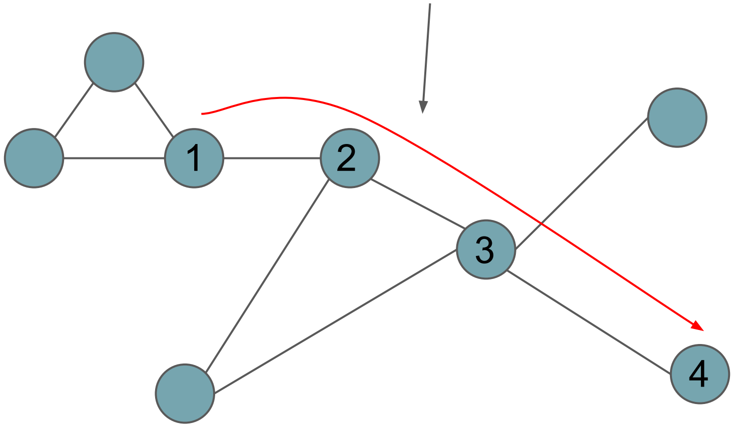
Вершина степени 4

Графы: определения

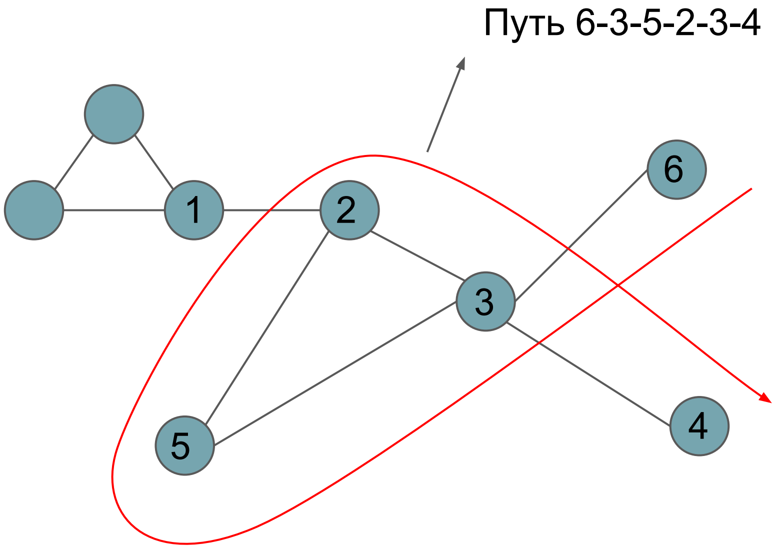


Графы: определения

Простой путь 1-2-3-4, длины 3

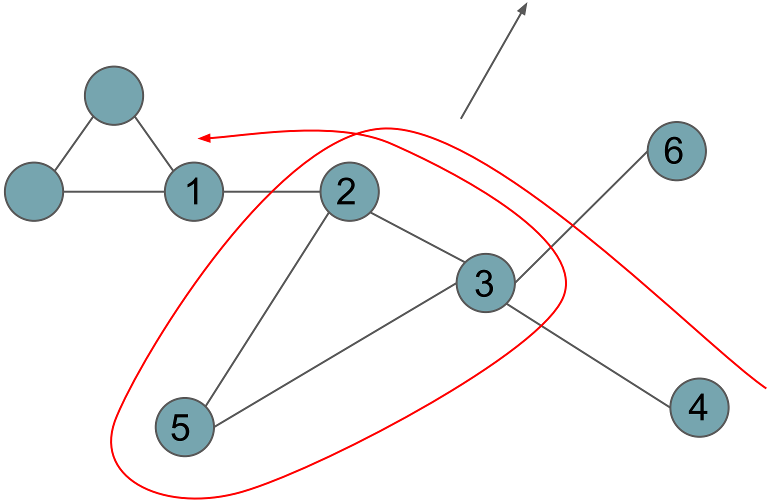


Графы: определения



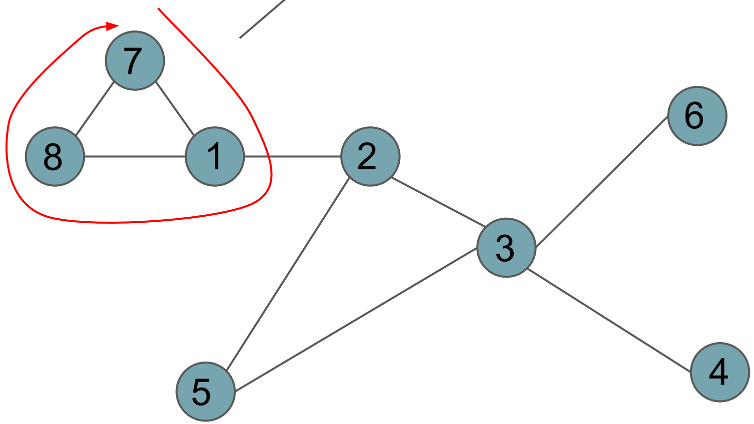
Графы: определения

Маршрут 4-3-2-5-3-2-1

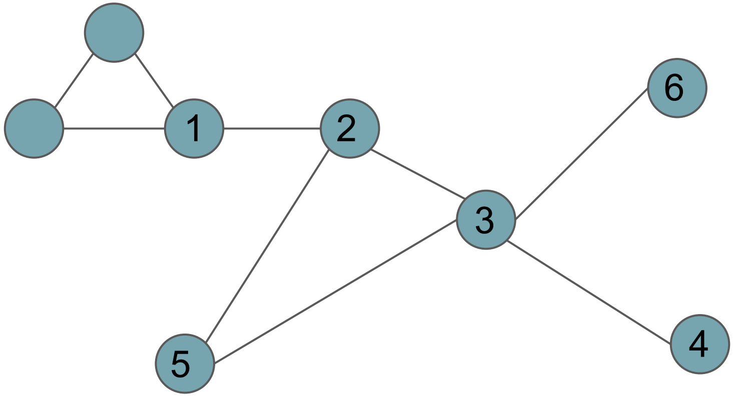


Графы: определения

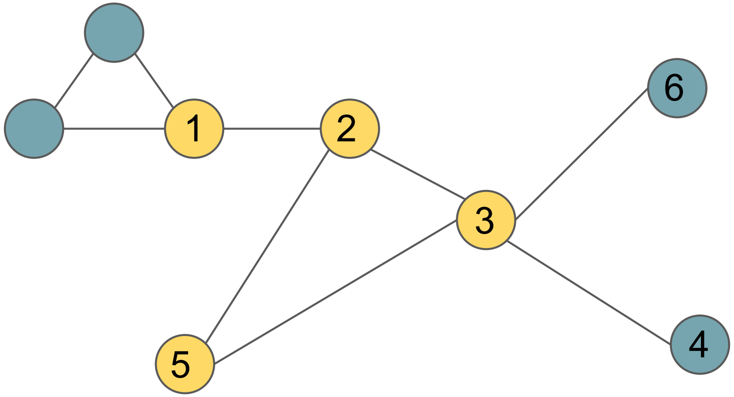
Простой цикл 7-1-8-7



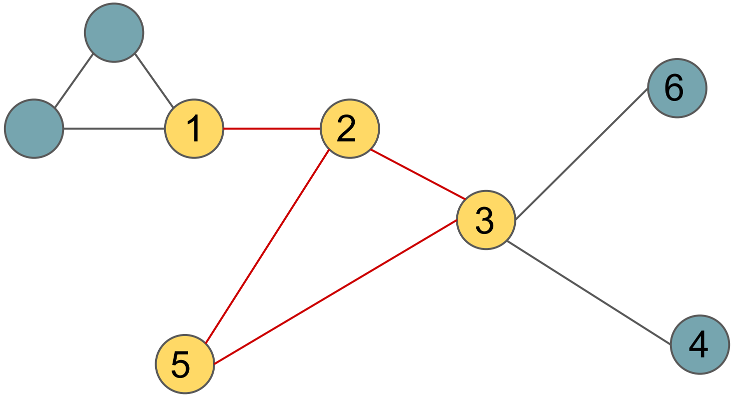
Графы: определения



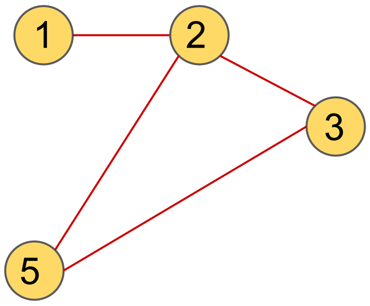
Графы: определения



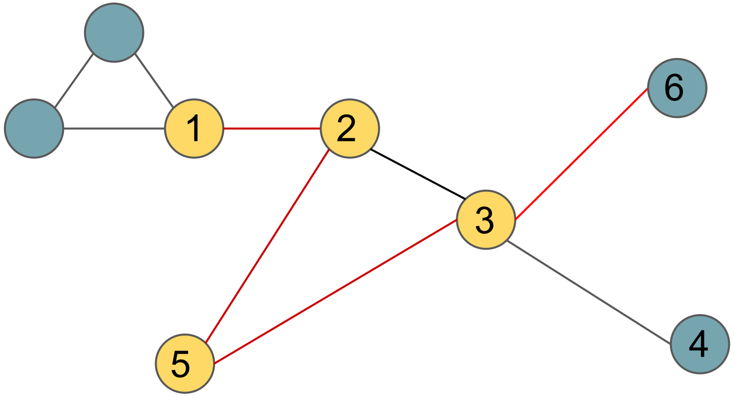
Графы: определения



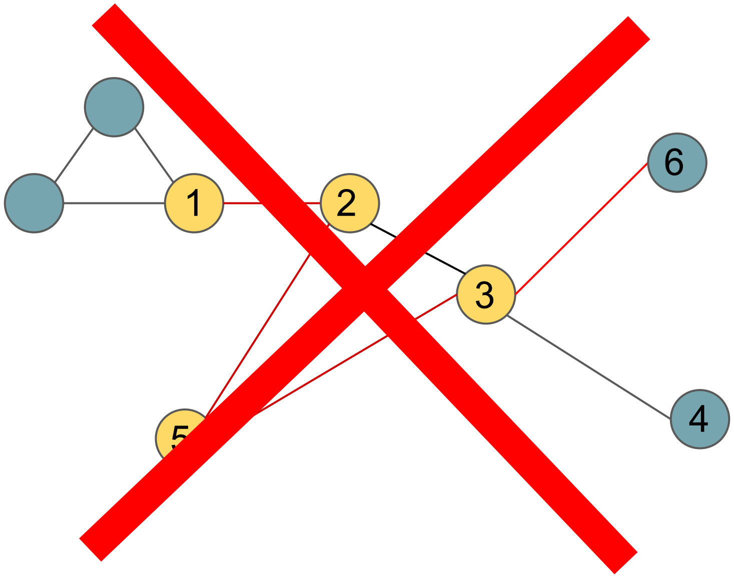
Графы: определения



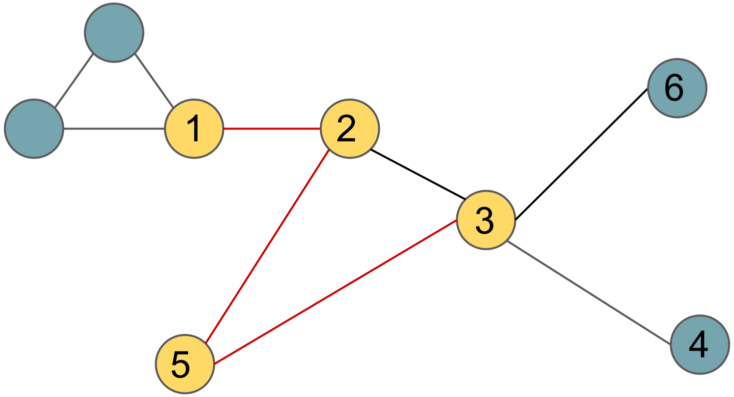
Графы: определения



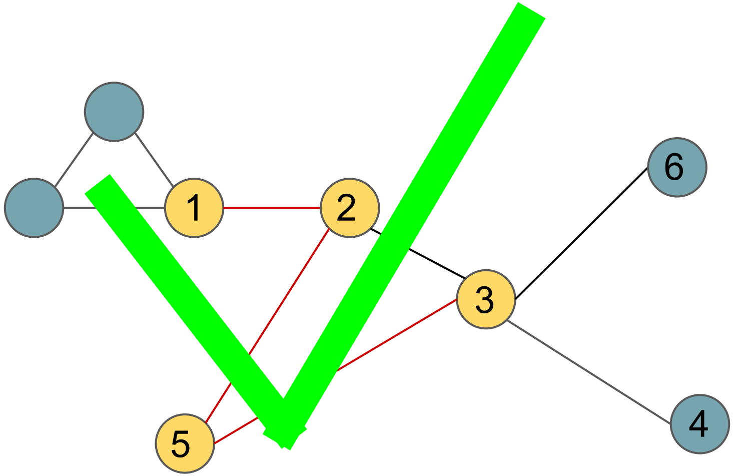
Графы: определения



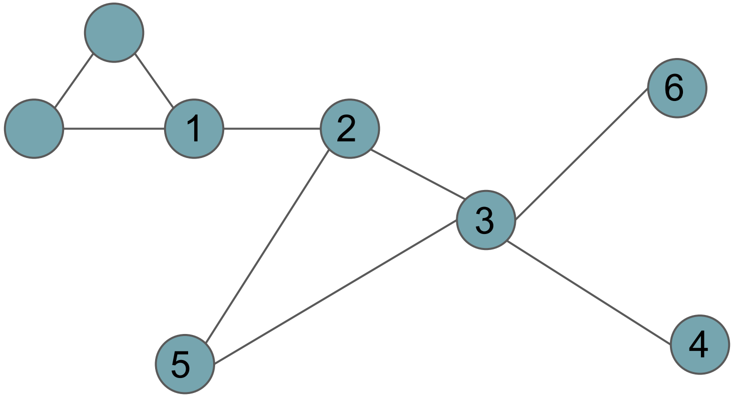
Графы: определения



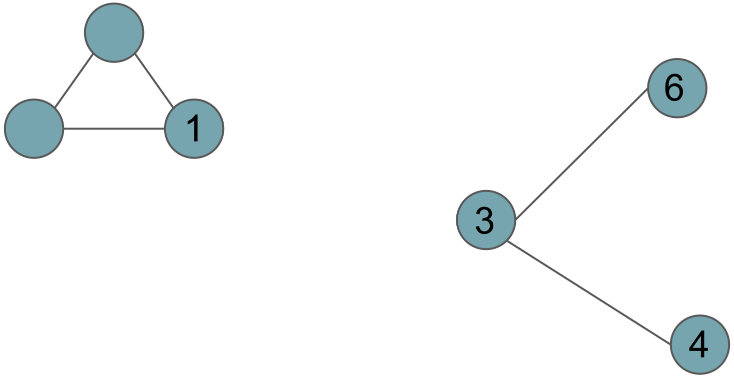
Графы: определения



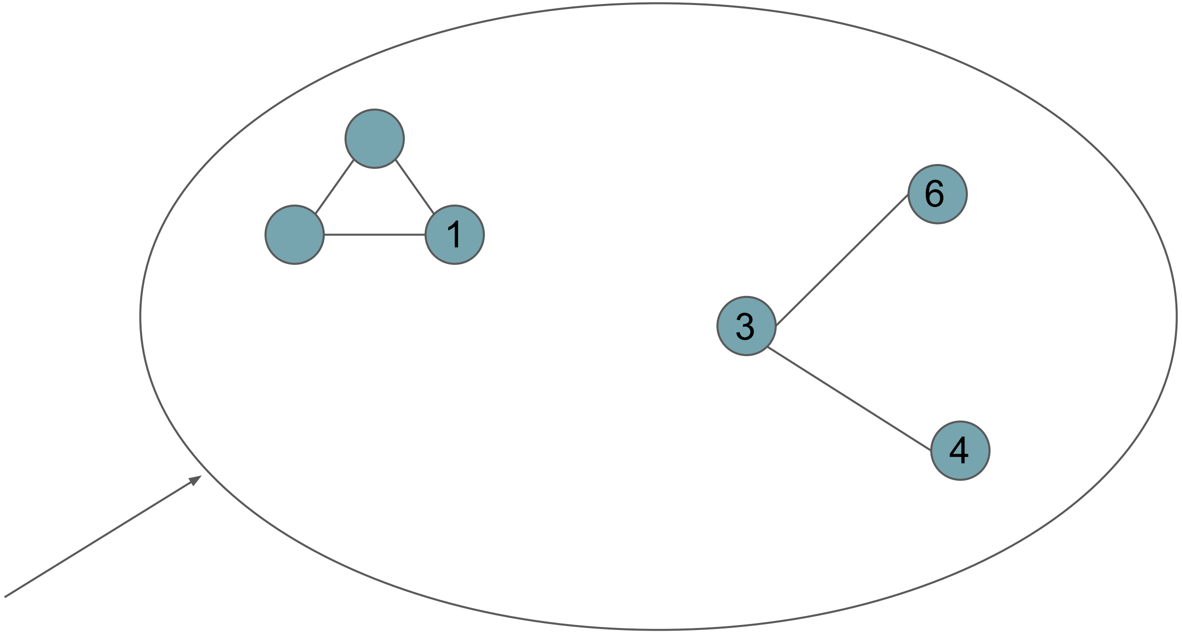
Графы: определения



Графы: определения

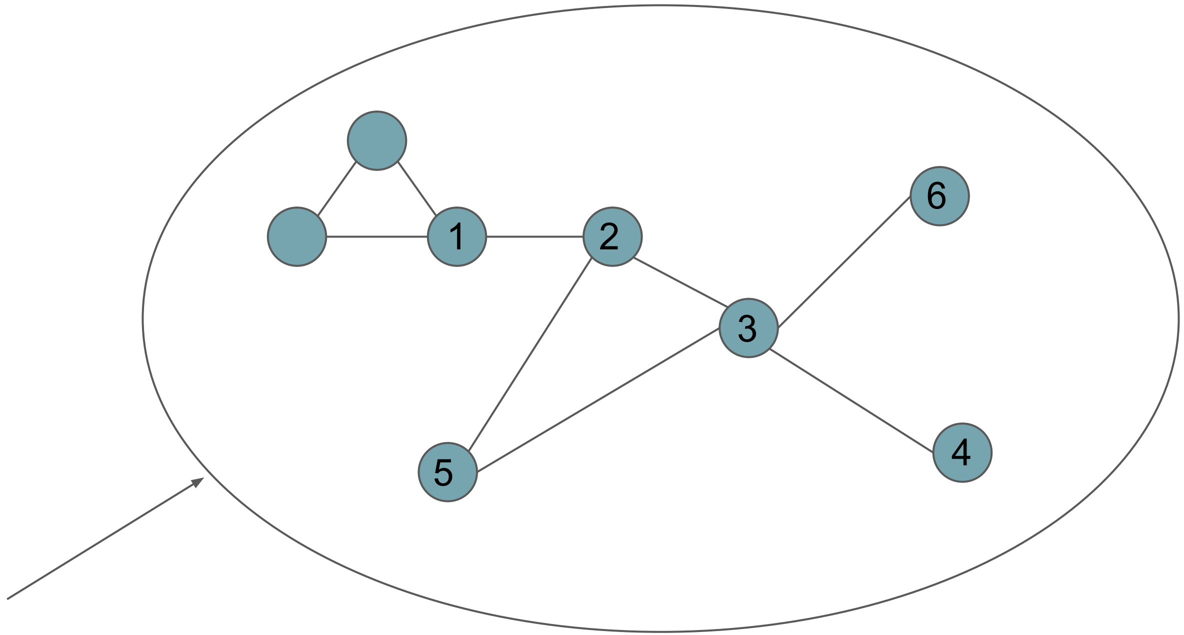


Графы: определения



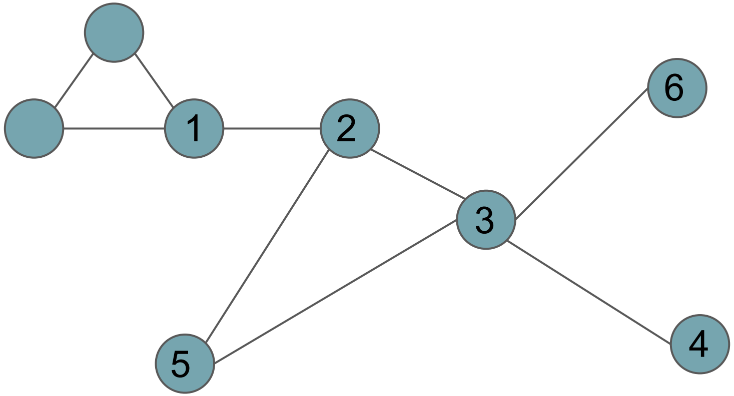
Несвязный граф

Графы: определения



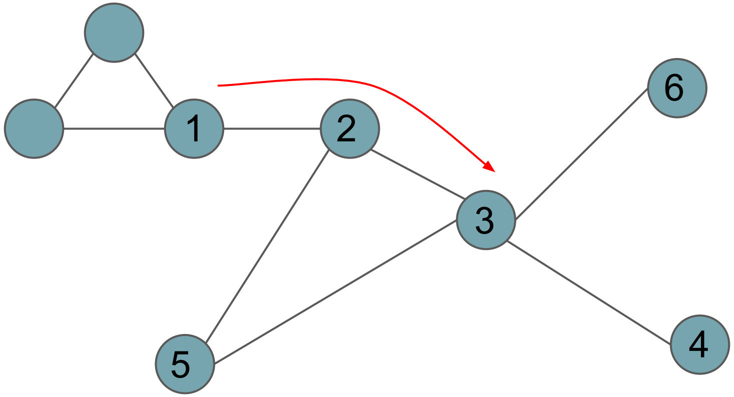
Связный граф

Графы: определения



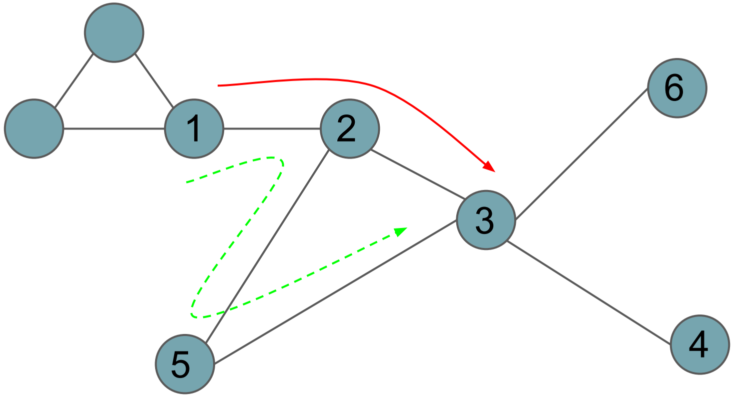
Расстояние - минимальная длина пути между двумя вершинами

Графы: определения



Расстояние - минимальная длина пути между двумя вершинами

Графы: определения

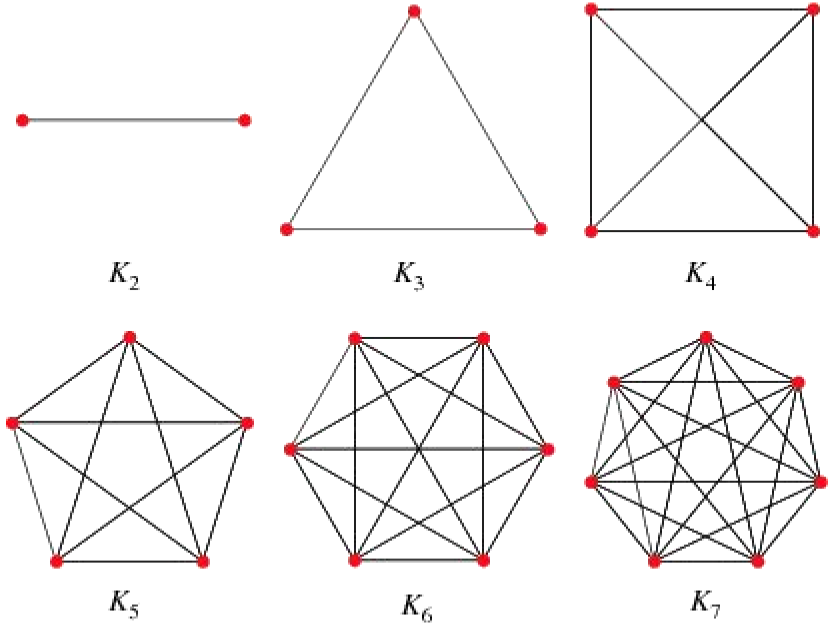


Расстояние - минимальная длина пути между двумя вершинами

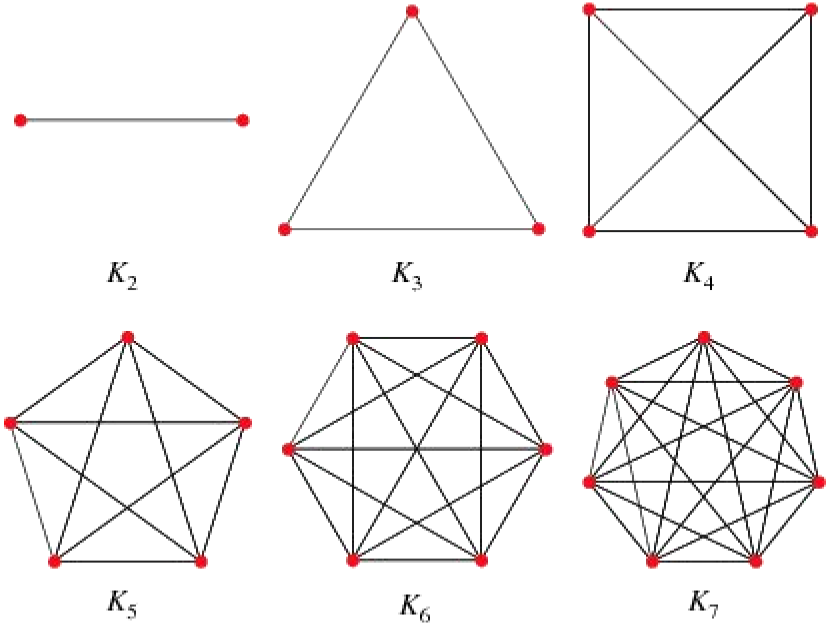
$$dist(1,3) = 2$$

Виды графов: полные

Виды графов: полные



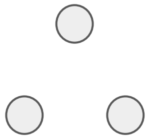
Виды графов: полные



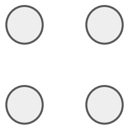
Виды графов: пустые

N_1

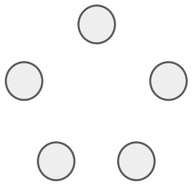
N_2



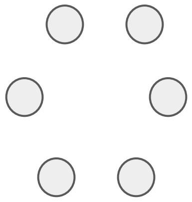
N_3



N_4

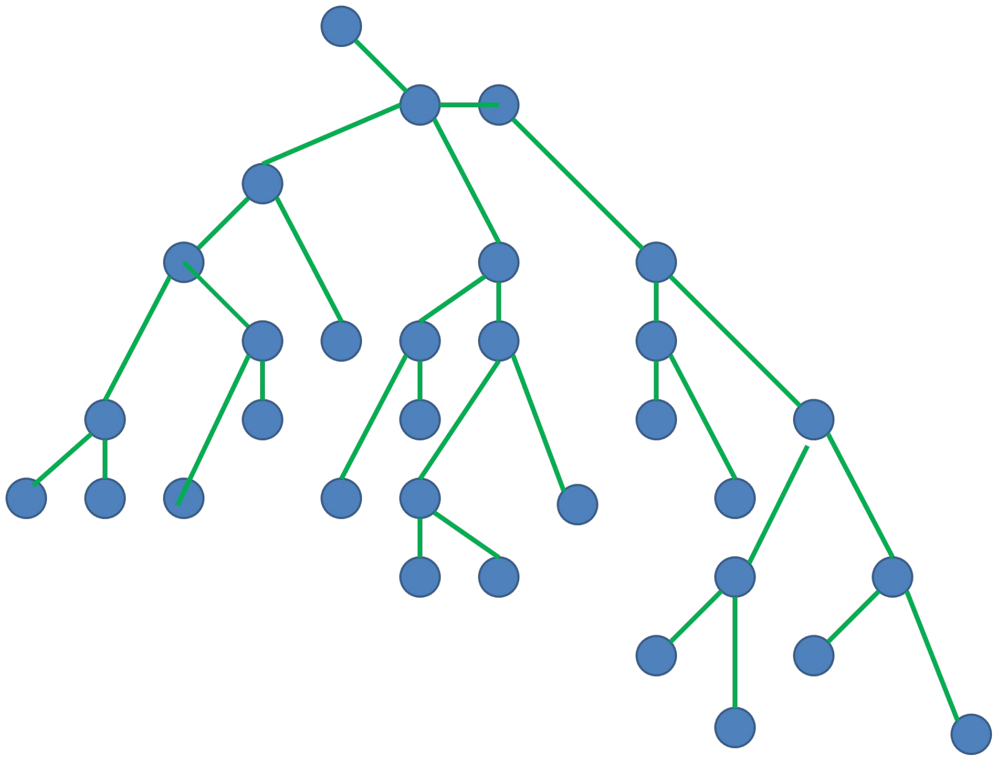


N_5

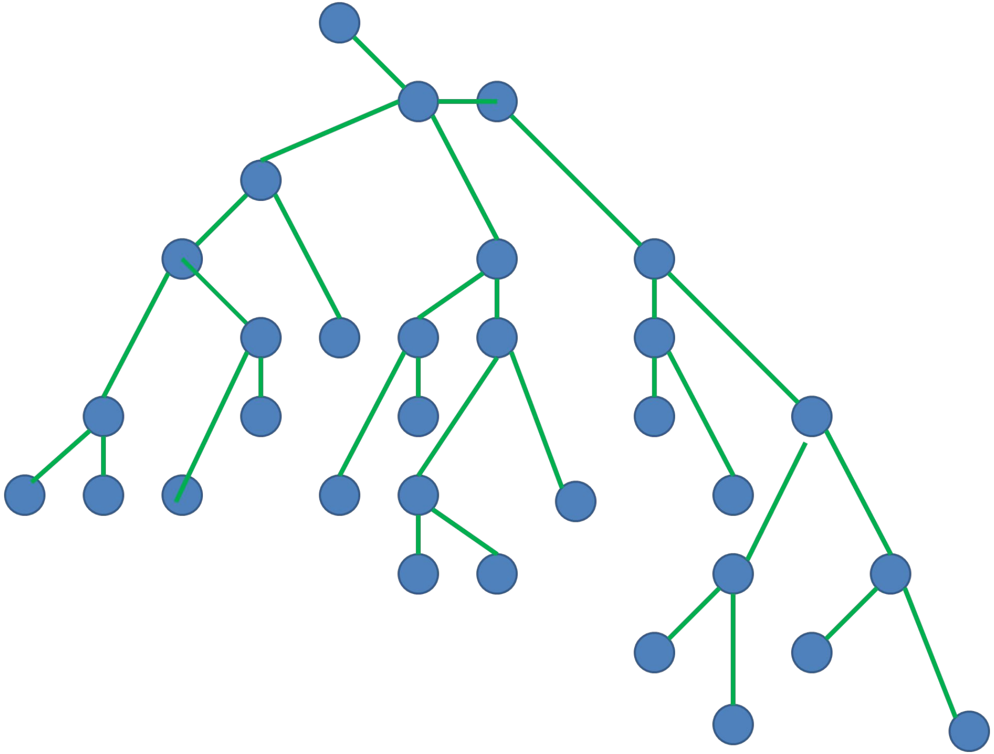


N_6

Виды графов: деревья

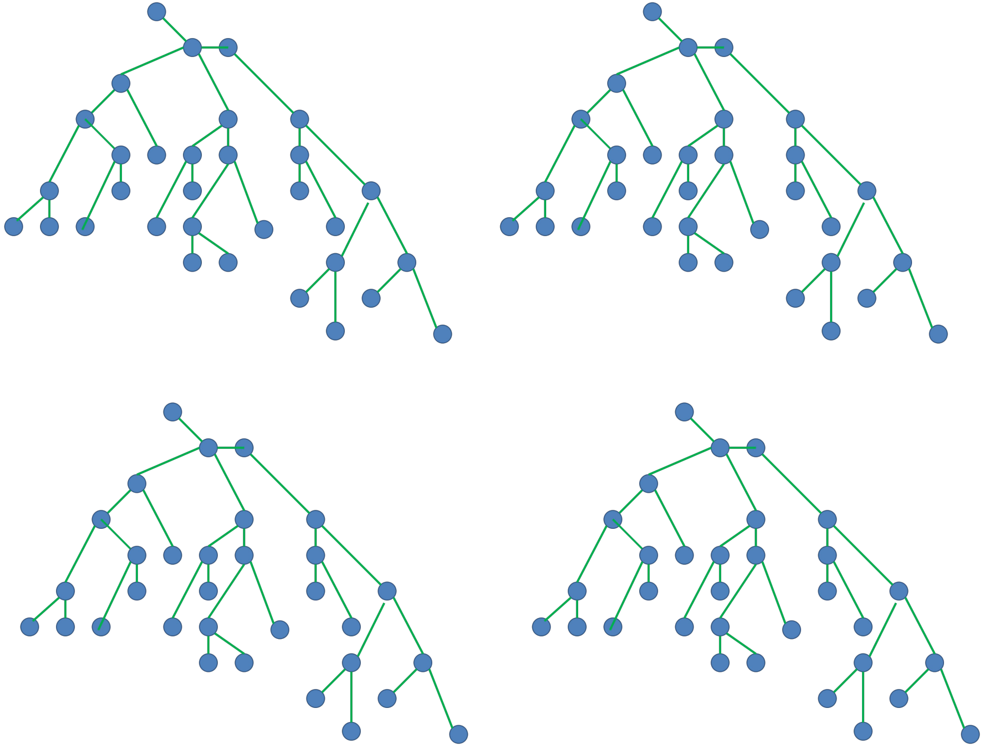


Виды графов: деревья



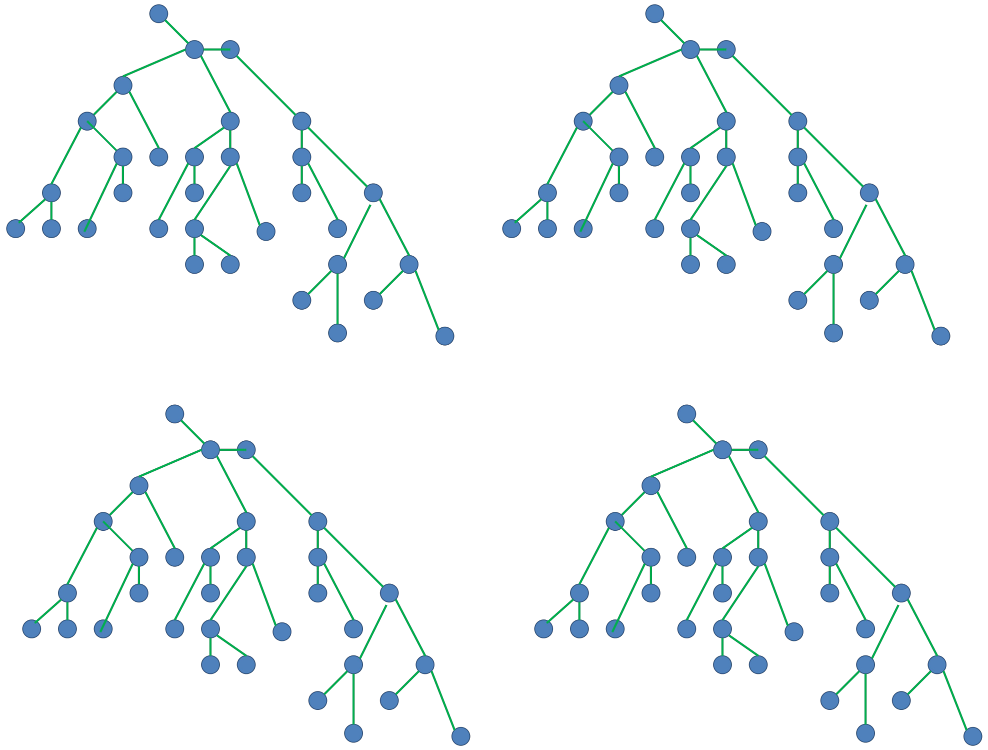
Дерево - связный граф без циклов

Виды графов: деревья



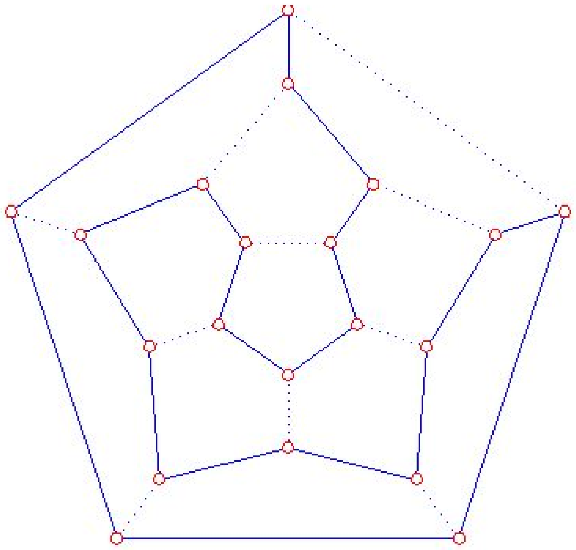
Лес - несвязный граф без циклов

Виды графов: деревья

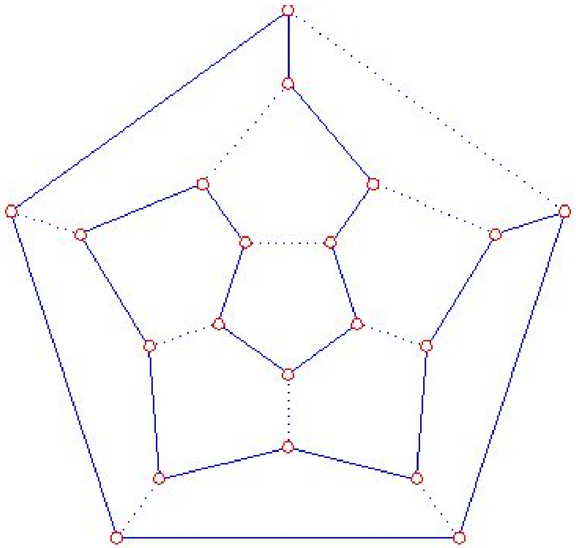


Лес - несвязный граф без циклов

Виды графов: Гамильтонов граф

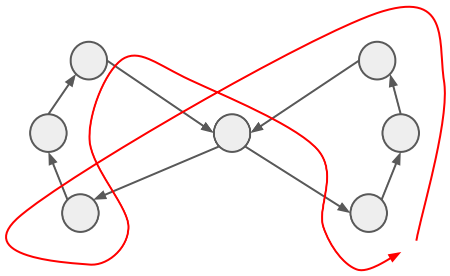


Виды графов: Гамильтонов граф



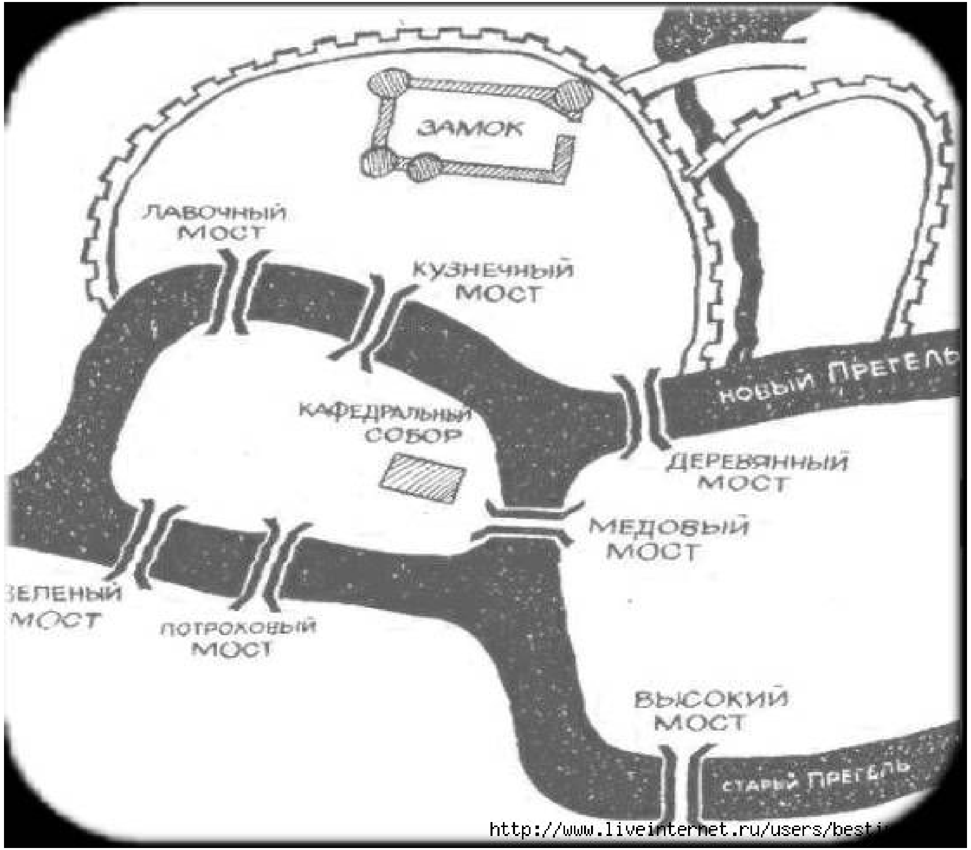
Граф, в котором существует путь, содержащий в себе все вершины

Виды графов: Эйлеров граф

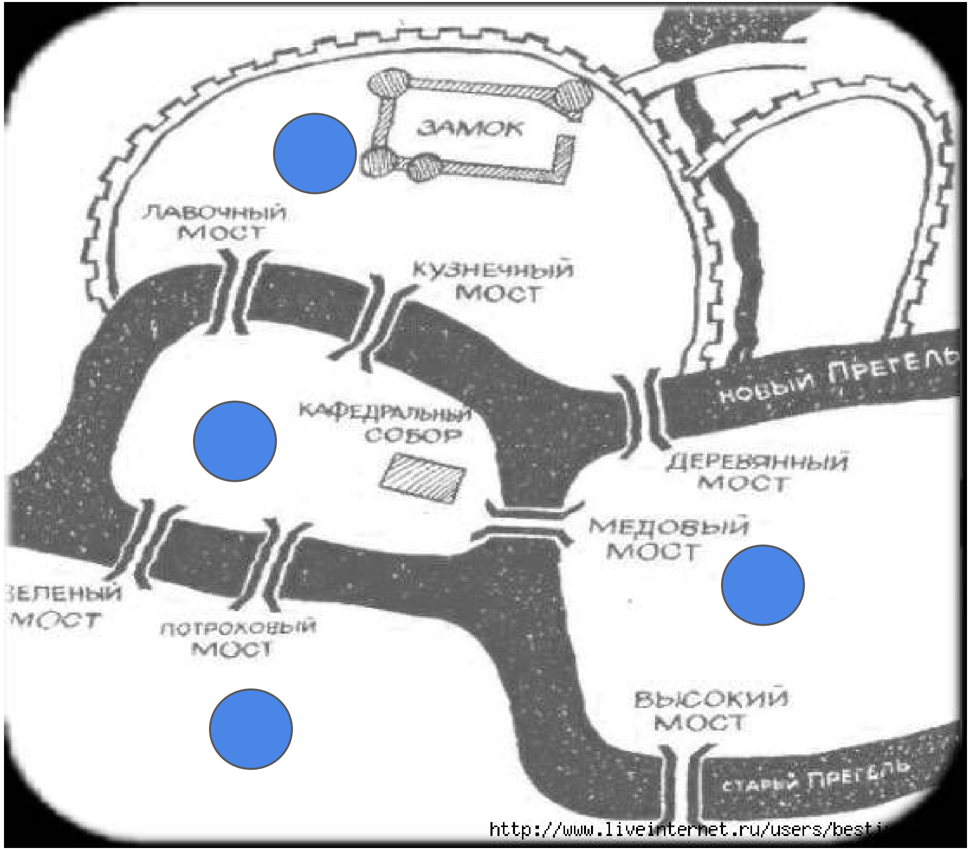


Граф, в котором существует путь, содержащий в себе все ребра

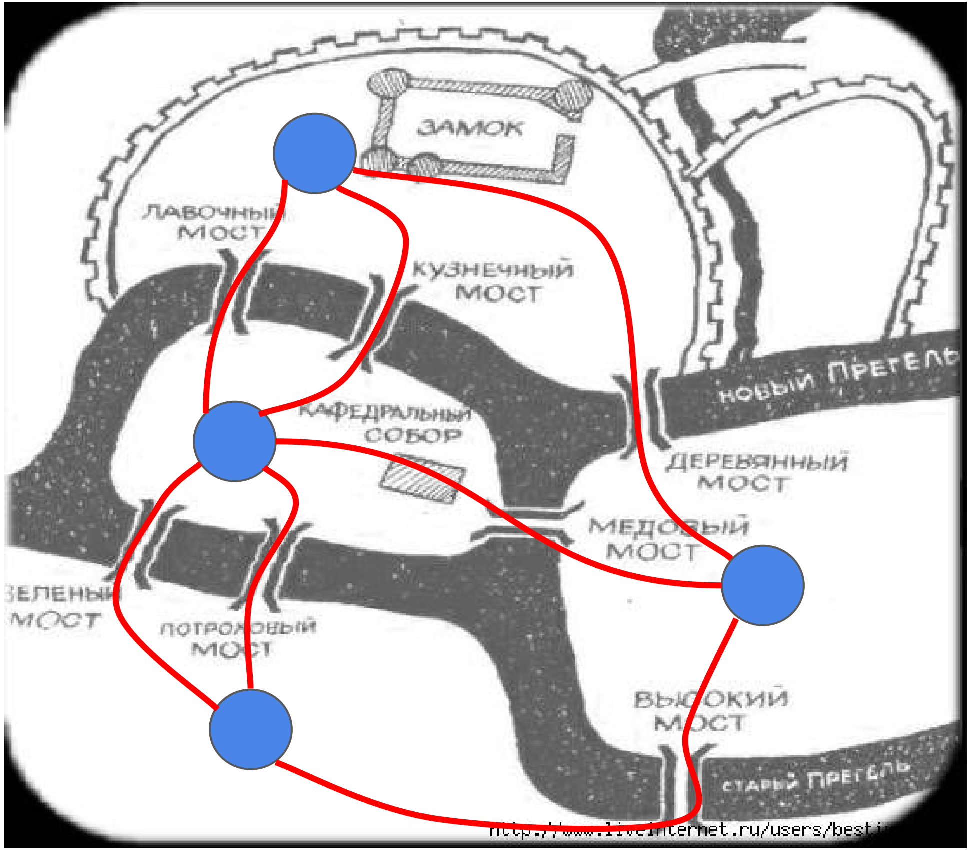
Мосты Кёнигсберга



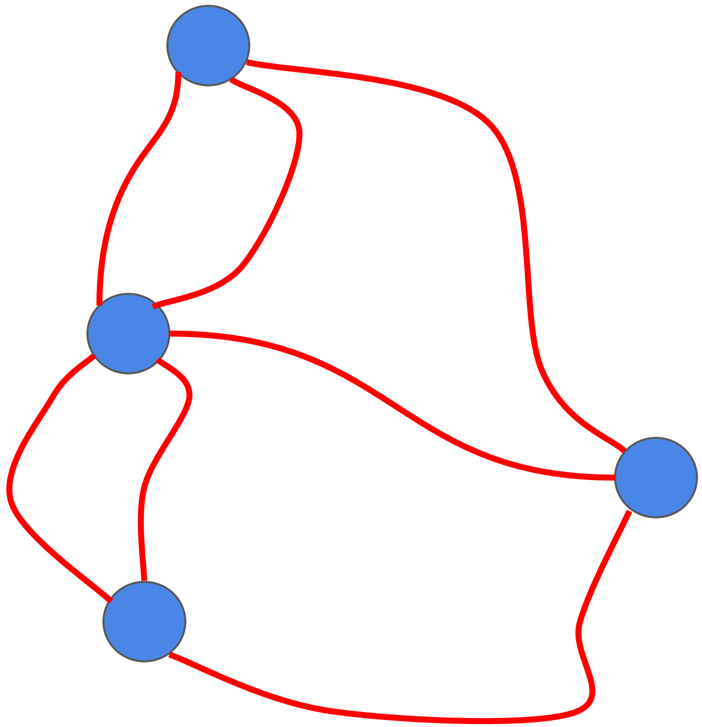
Мосты Кёнигсберга: трансформация



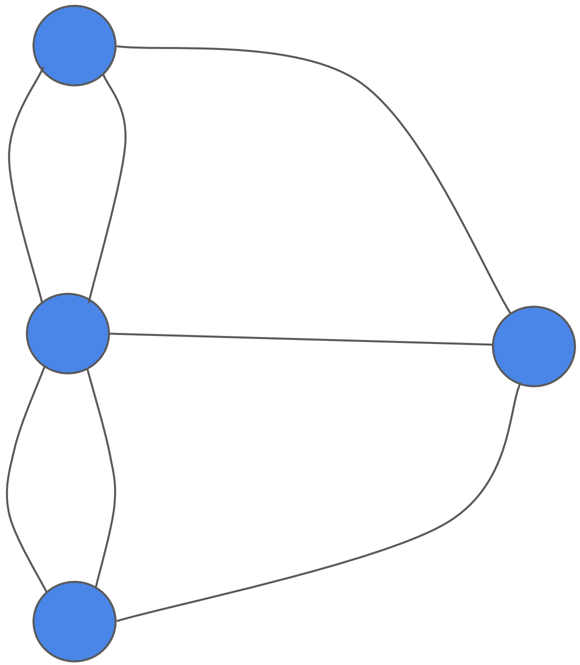
Мосты Кёнигсберга: трансформация



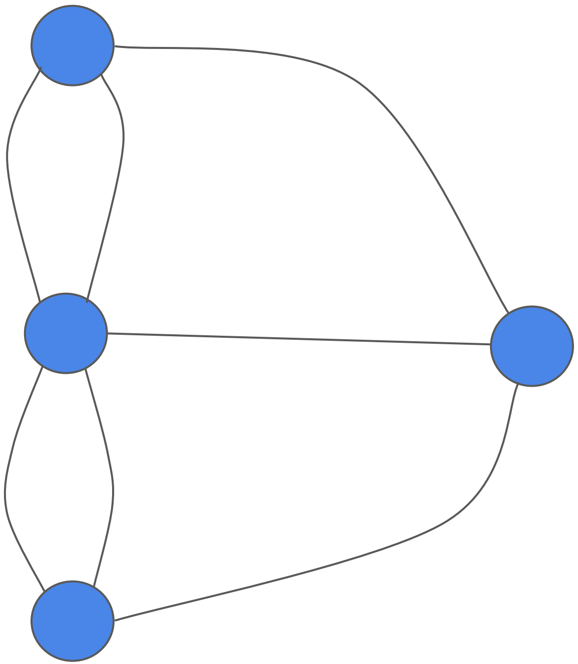
Мосты Кёнигсберга: трансформация



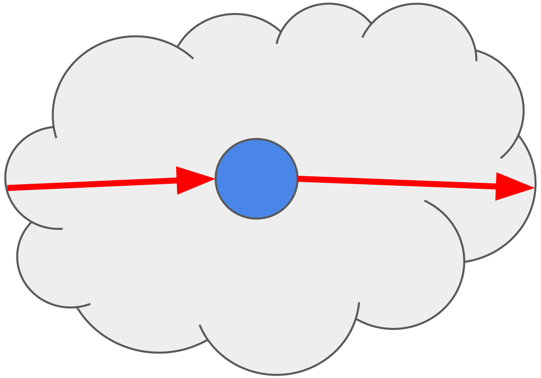
Мосты Кёнигсберга: трансформация



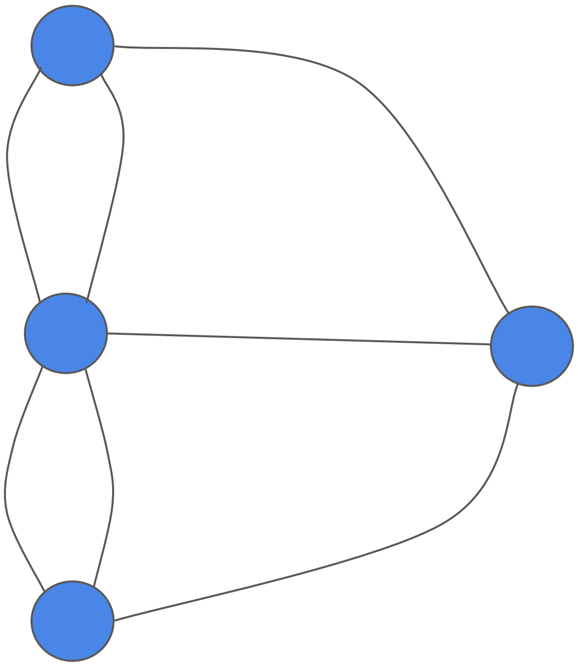
Мосты Кёнигсберга: критерий



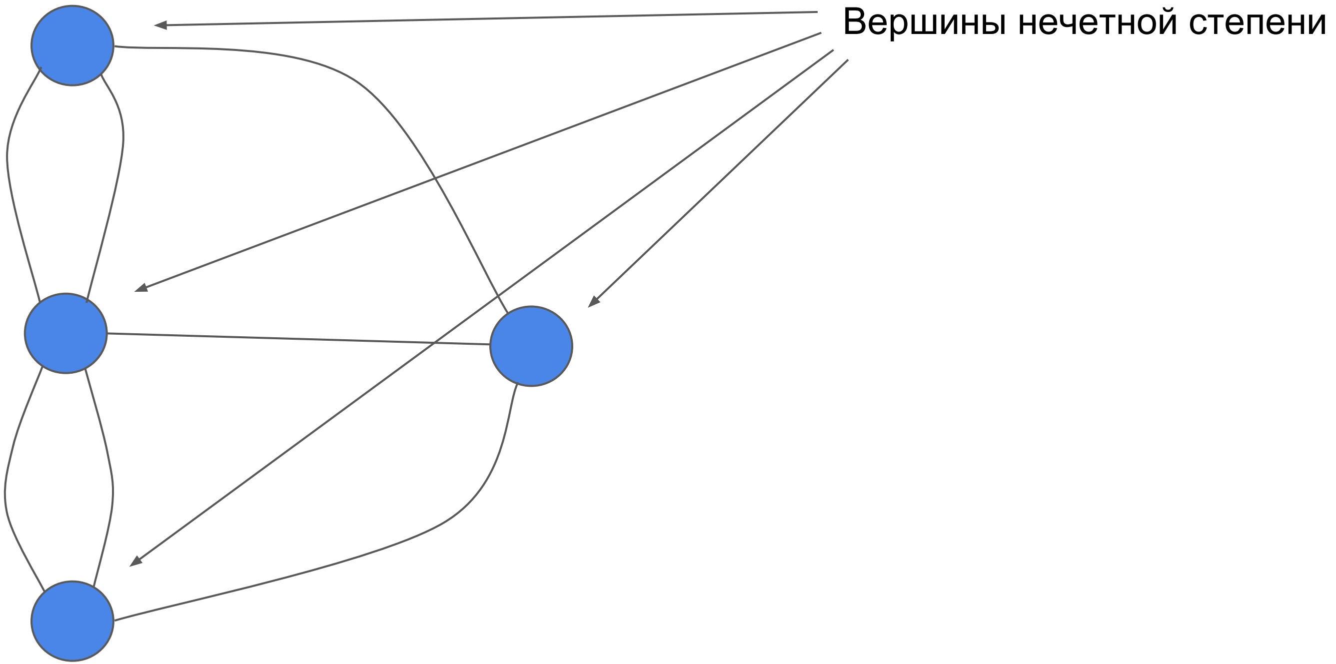
Мосты Кёнигсберга: критерий



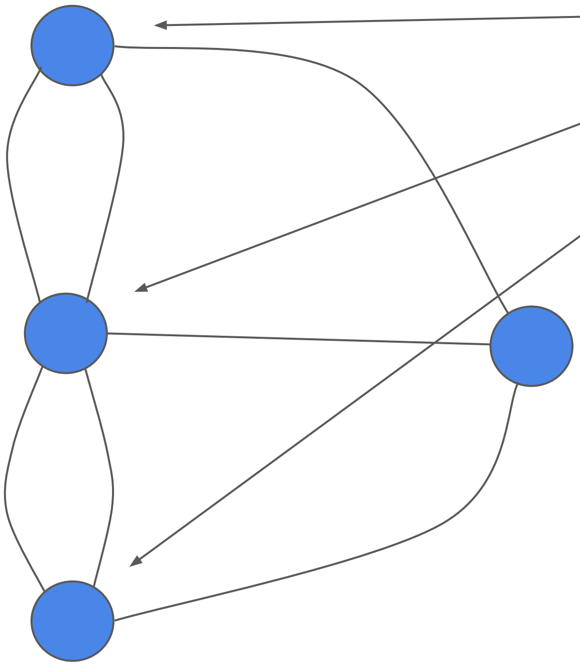
Мосты Кёнигсберга: критерий



Мосты Кёнигсберга: критерий



Мосты Кёнигсберга: критерий



Вершины нечетной степени

Эйлерова пути не существует!

Мосты Кёнигсберга: критерий

В связном графе не существует Эйлерова пути, если количество вершин нечетной степени не равно двум

Мосты Кёнигсберга: критерий

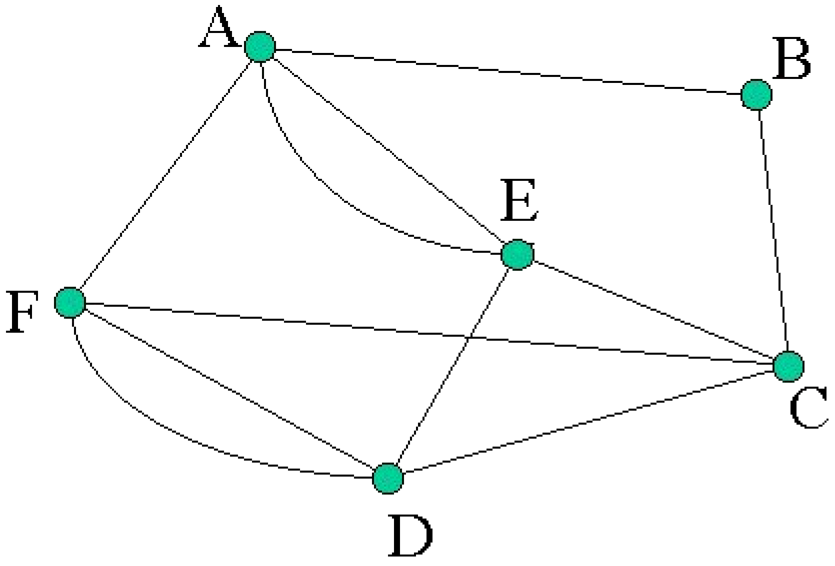
В связном графе не существует Эйлерова пути, если количество вершин нечетной степени не равно двум

В связном графе не существует Эйлерова цикла, если в нем есть вершины нечетной степени

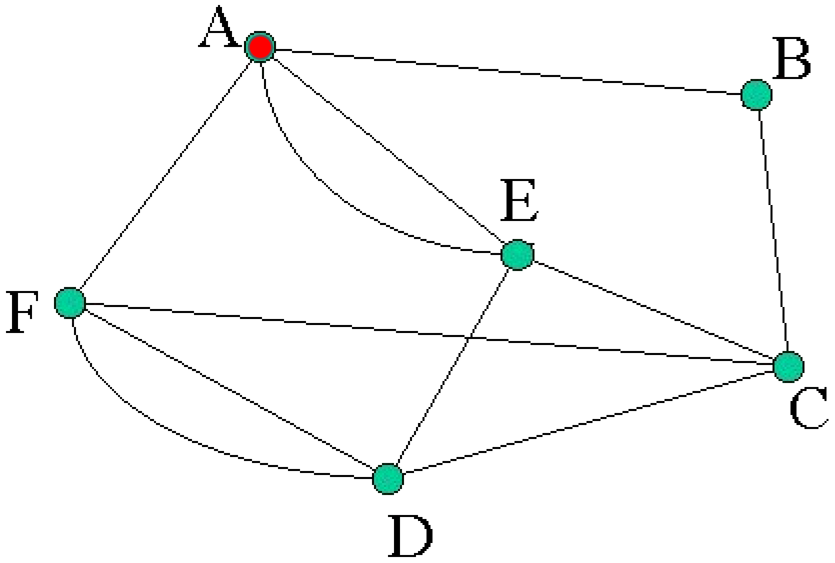
Критерий существования Эйлерова цикла

В связном графе существует Эйлеров цикл, если в нем все вершины четной степени

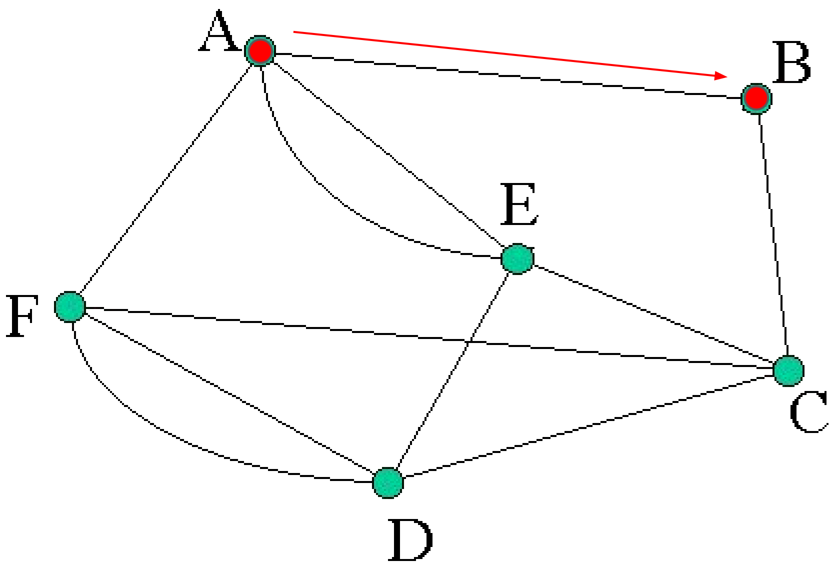
Критерий существования Эйлерова цикла



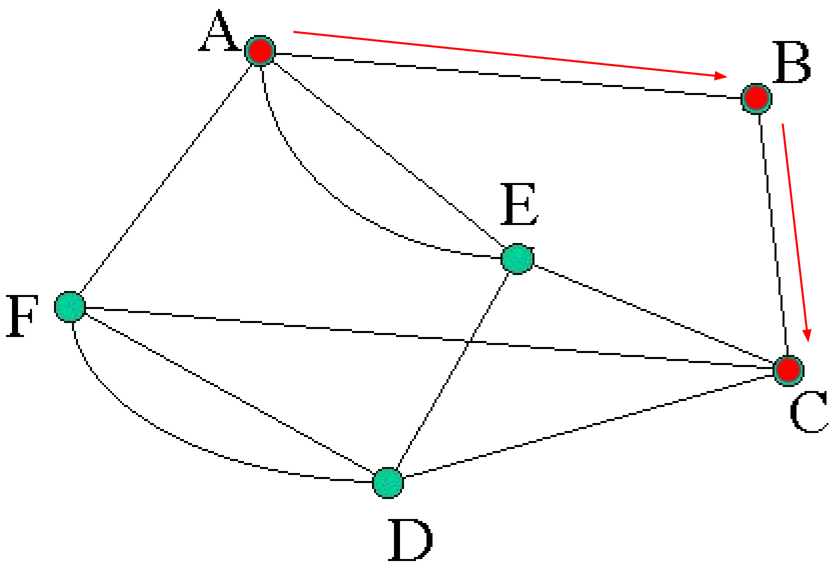
Критерий существования Эйлерова цикла



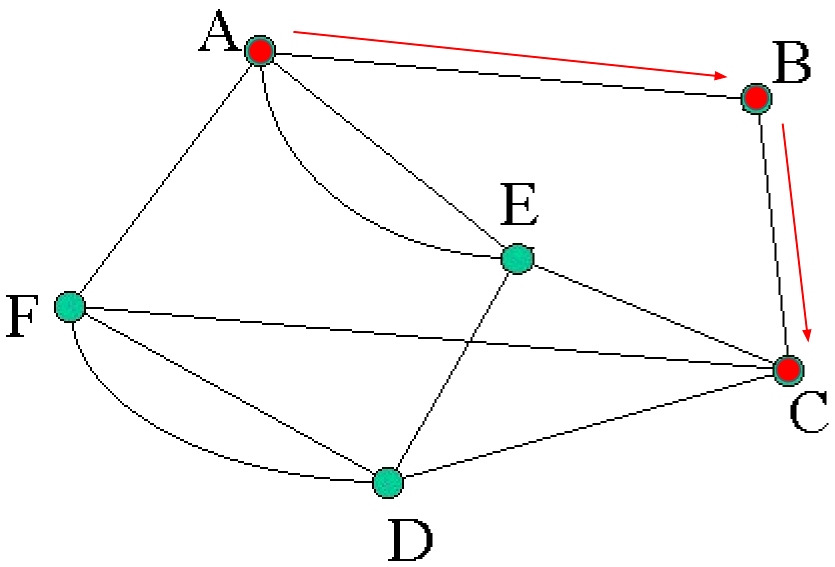
Критерий существования Эйлерова цикла



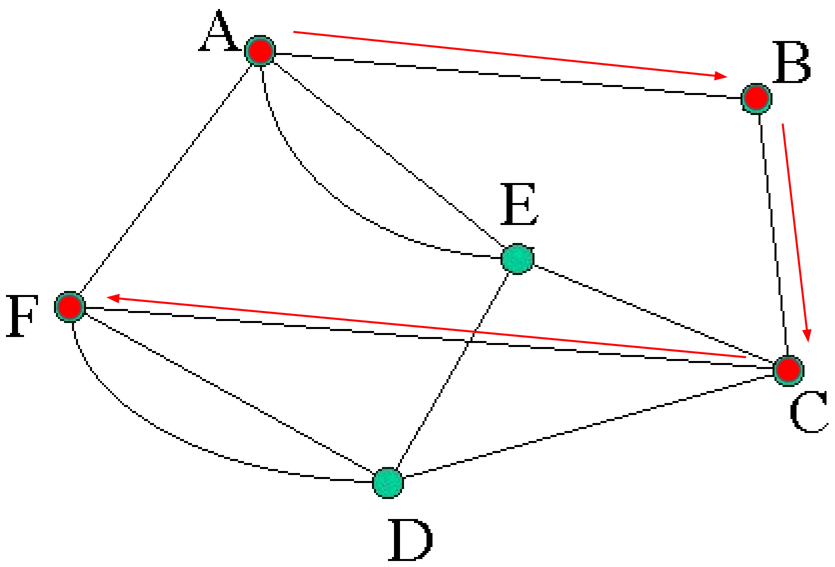
Критерий существования Эйлерова цикла



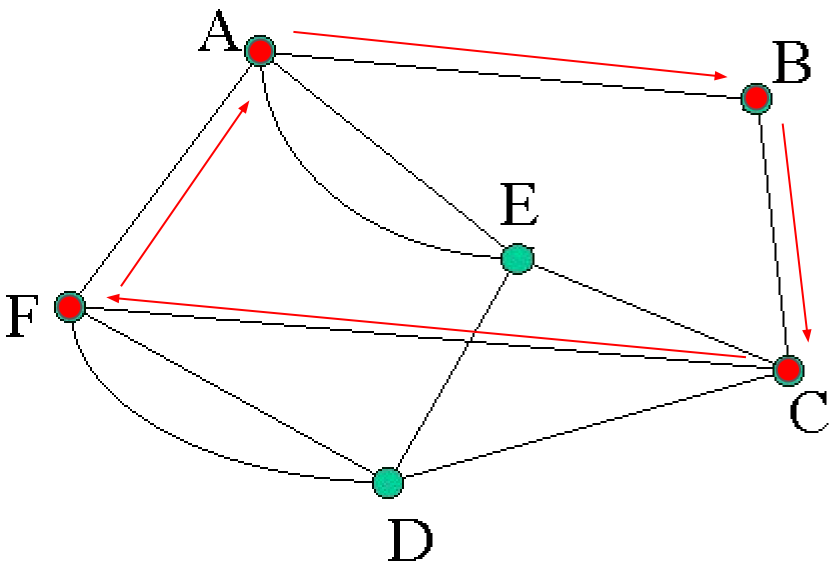
Критерий существования Эйлерова цикла



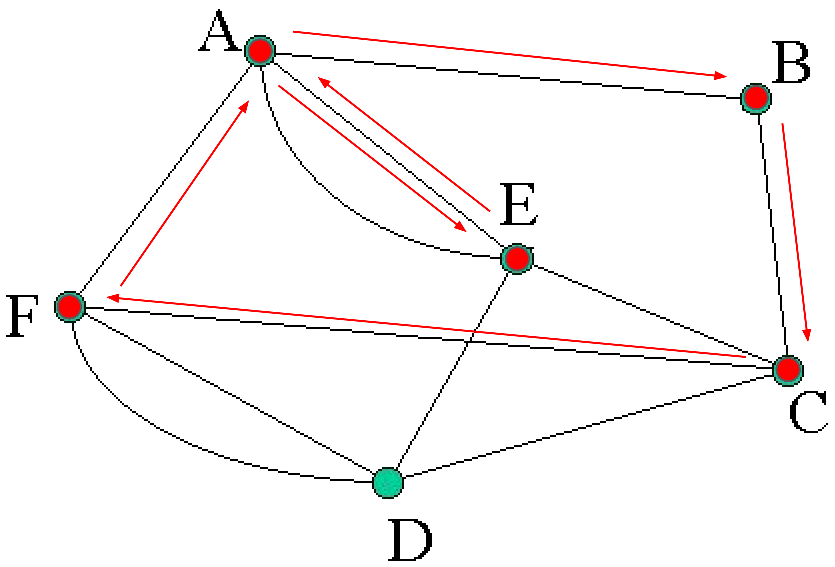
Критерий существования Эйлерова цикла



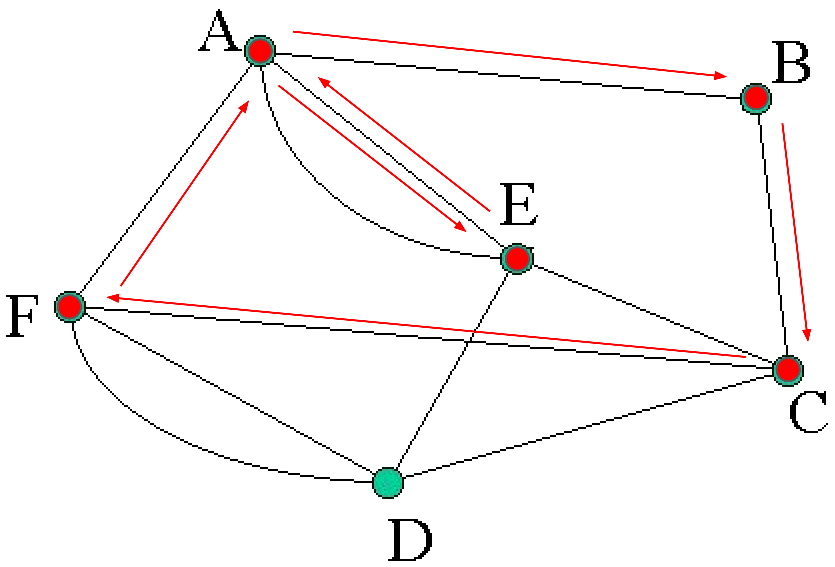
Критерий существования Эйлерова цикла



Критерий существования Эйлерова цикла

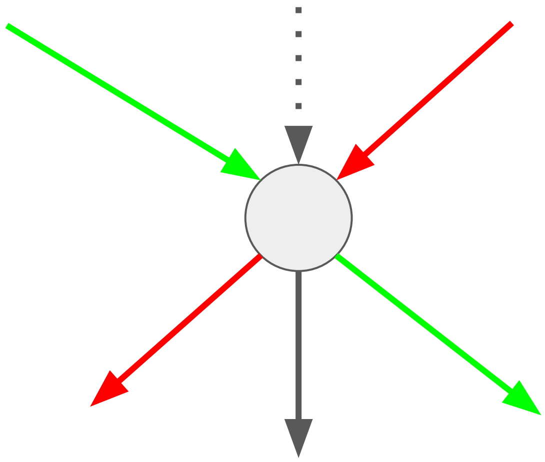


Критерий существования Эйлерова цикла

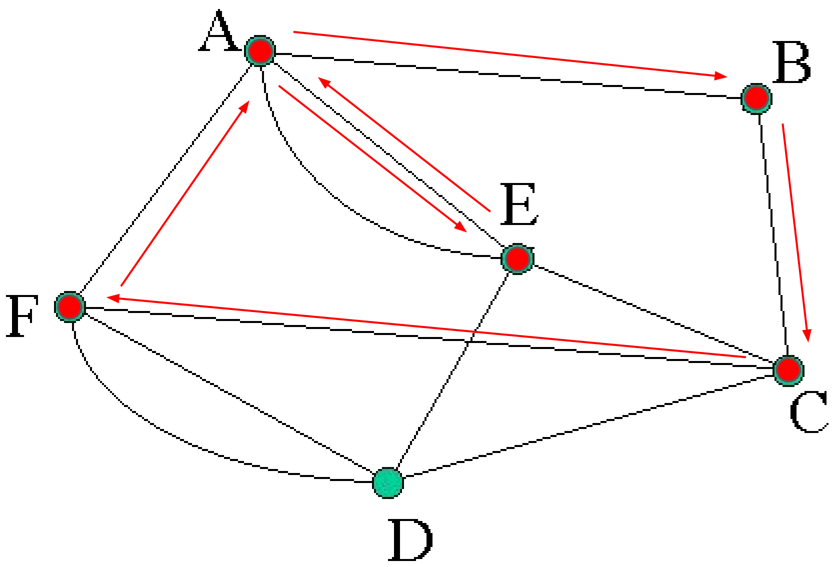


Почему цикл всегда заканчивается в вершине из которой мы начали?

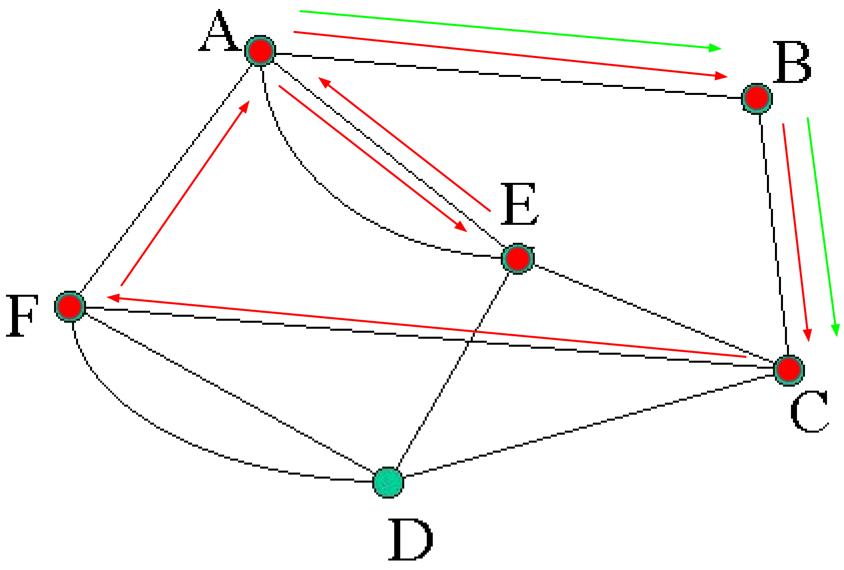
Критерий существования Эйлерова цикла



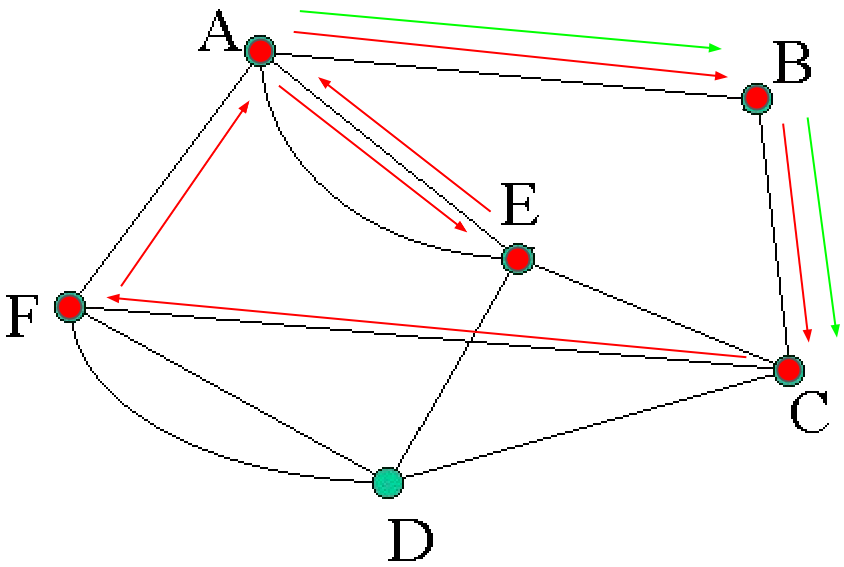
Критерий существования Эйлерова цикла



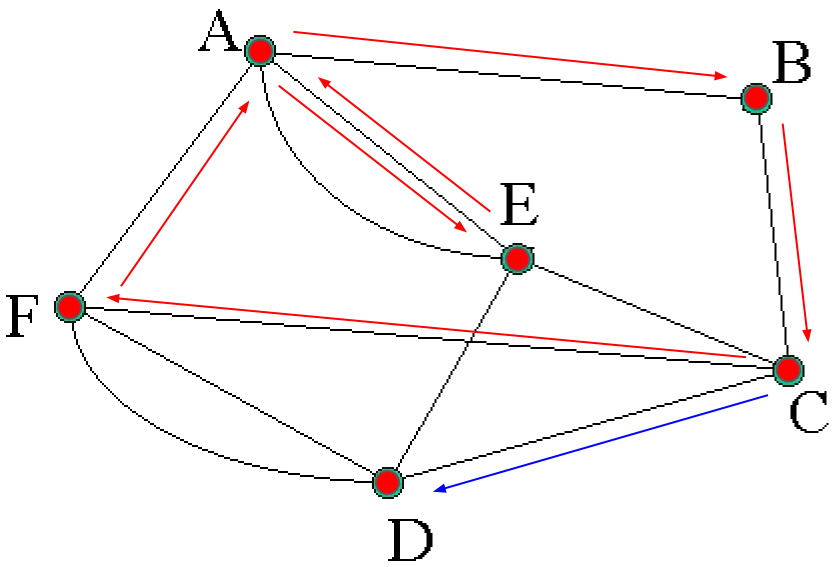
Критерий существования Эйлерова цикла



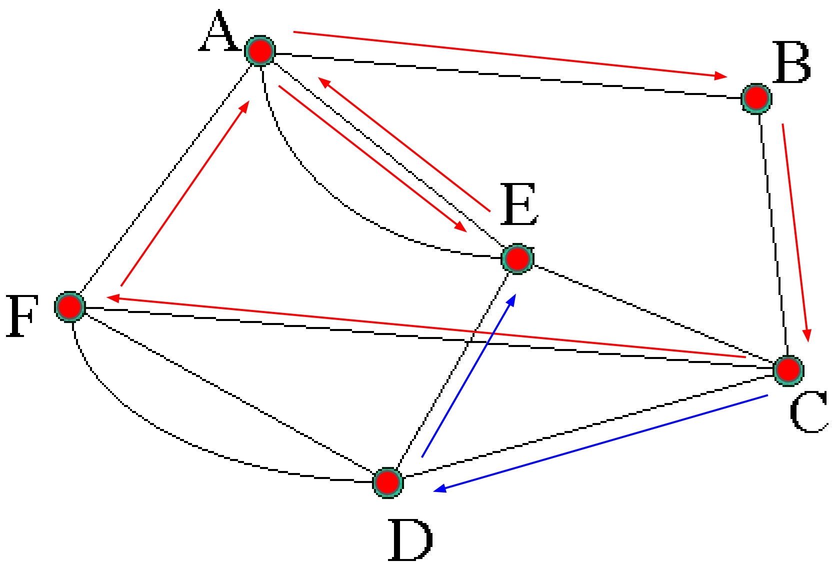
Критерий существования Эйлерова цикла



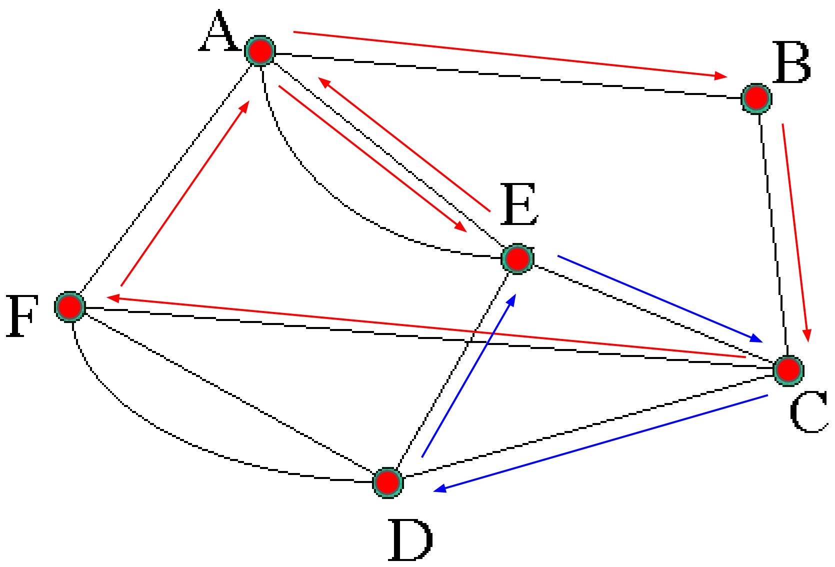
Критерий существования Эйлерова цикла



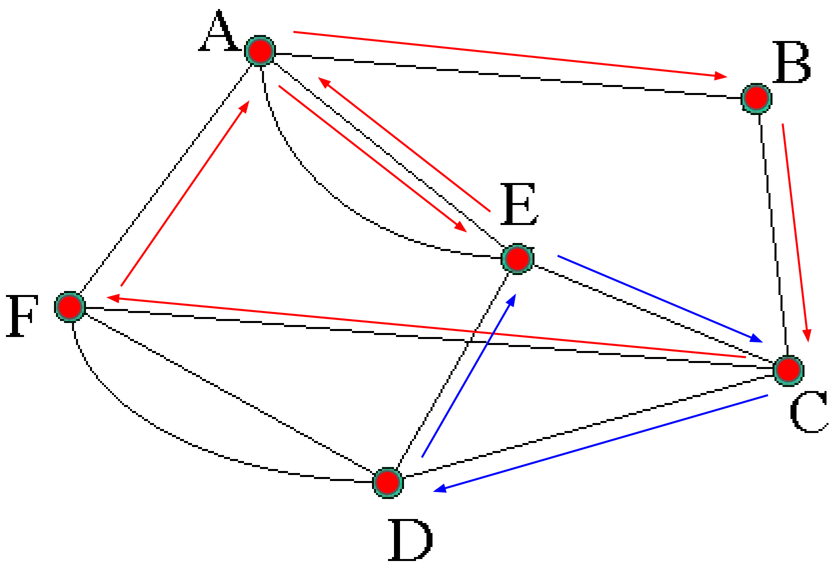
Критерий существования Эйлерова цикла



Критерий существования Эйлерова цикла



Критерий существования Эйлерова цикла



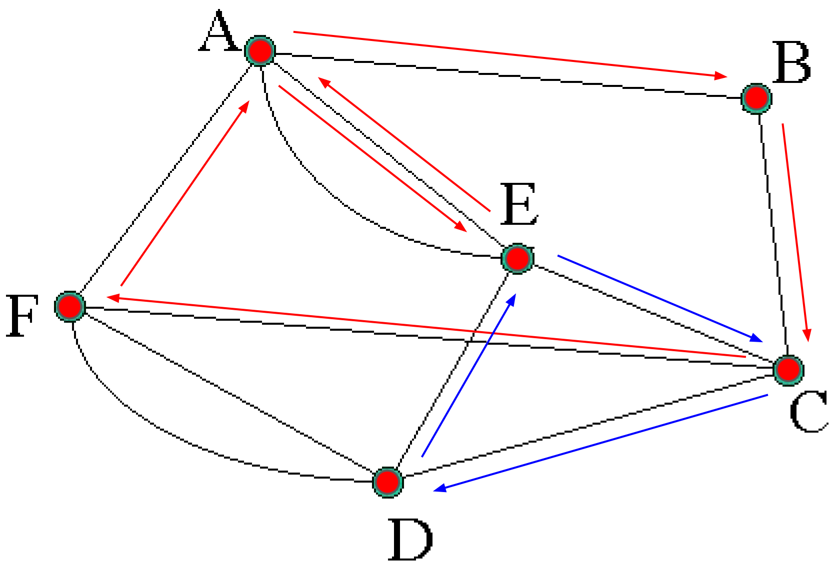
Цикл 1:

$$AB - BC - CF - FA - AE - EA$$

Цикл 2:

$$CD - DE - EC$$

Критерий существования Эйлерова цикла



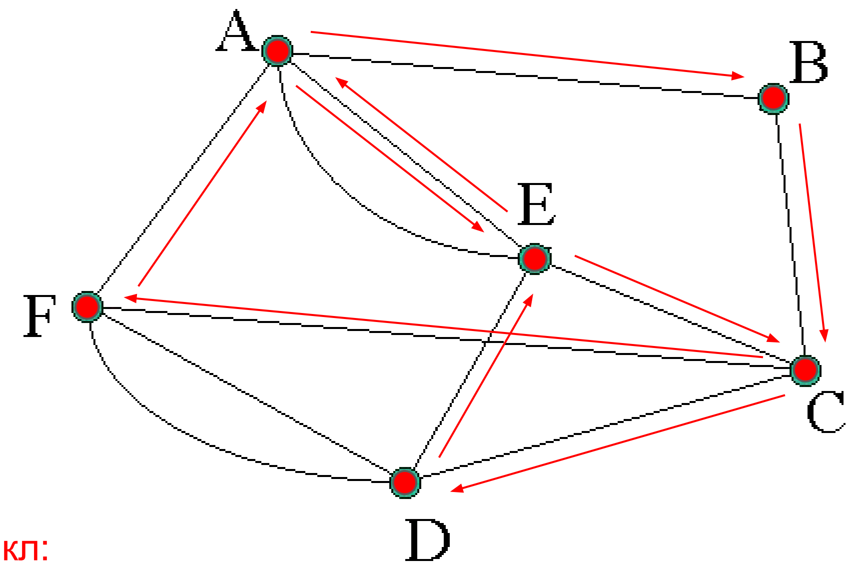
Цикл 1:

$AB - BC - CF - FA - AE - EA$

Цикл 2:

$CD - DE - EC$

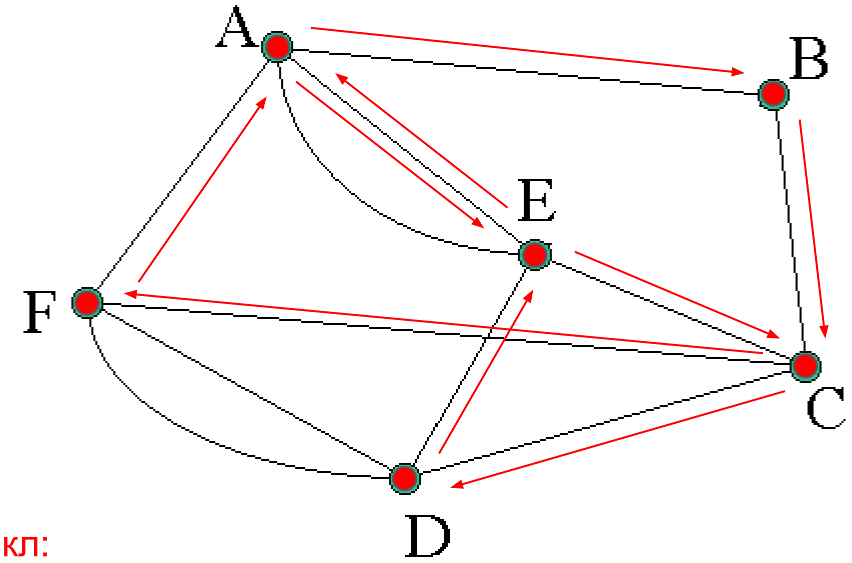
Критерий существования Эйлерова цикла



Объединенный цикл:

$$AB - BC - CD - DE - EC - CF - FA - AE - EA$$

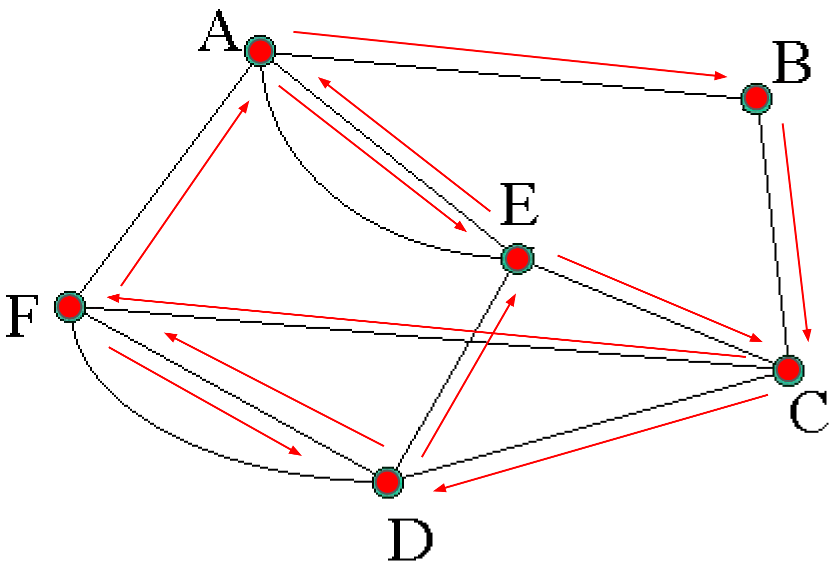
Критерий существования Эйлерова цикла



Объединенный цикл:

$$AB - BC - CD - DE - EC - CF - FA - AE - EA$$

Критерий существования Эйлерова цикла



Эйлеров цикл:

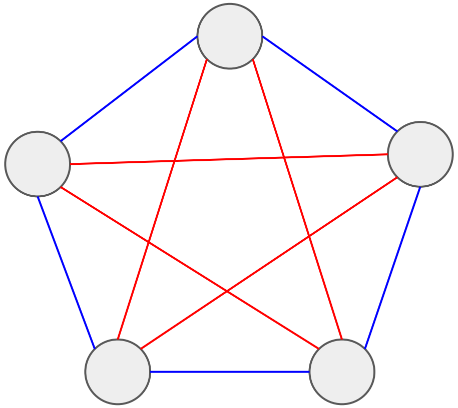
$$AB - BC - CD - DF - FD - DE - EC - CF - FA - AE - EA$$

Критерий существования Эйлерова пути

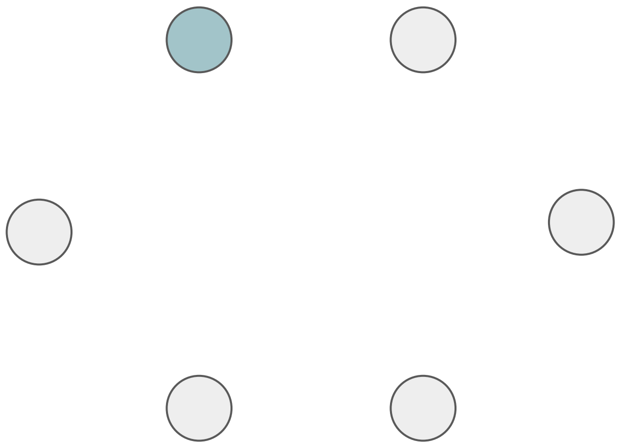
В связном графе существует Эйлеров путь, если в нем ровно две вершины нечетной степени

Задача: Доказать, что в группе из шести человек есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.

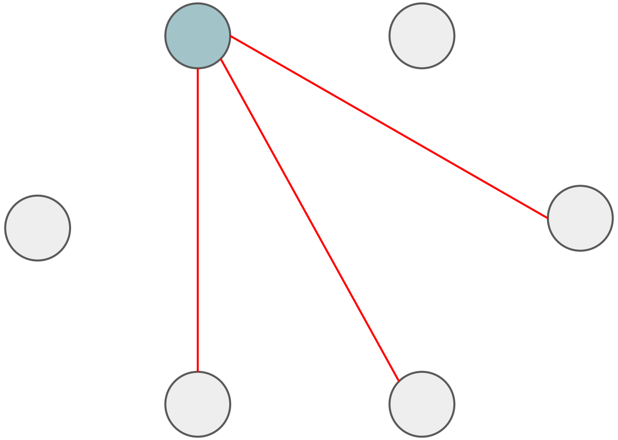
Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



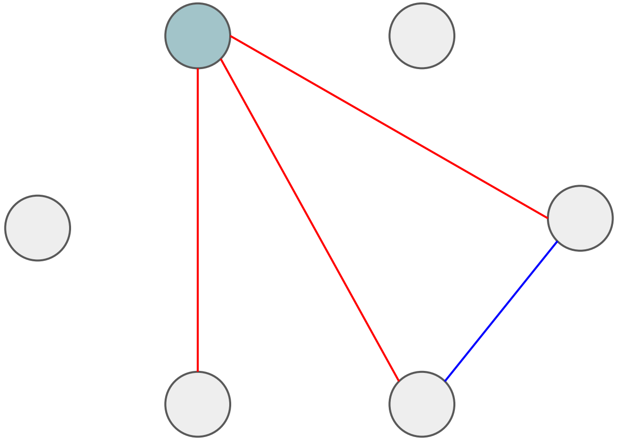
Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



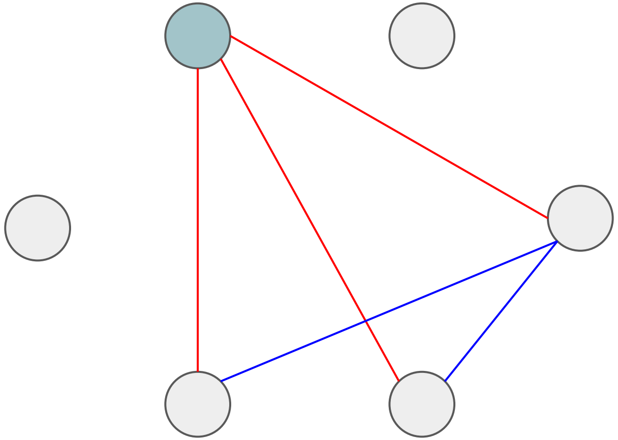
Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



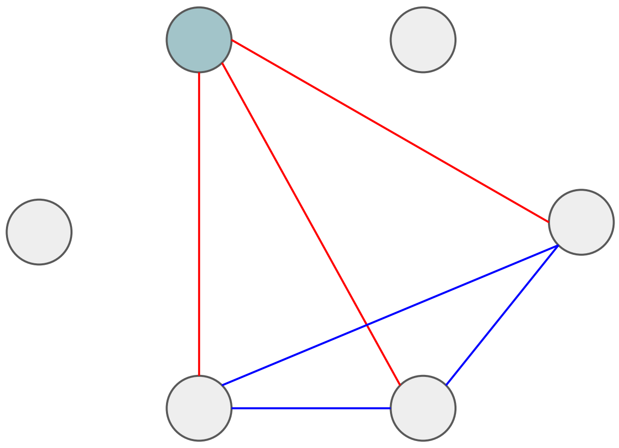
Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



Задача: Доказать, что в группе из шести человек обязательно есть группа из трех людей, среди которых либо все знакомы либо не знакомы.



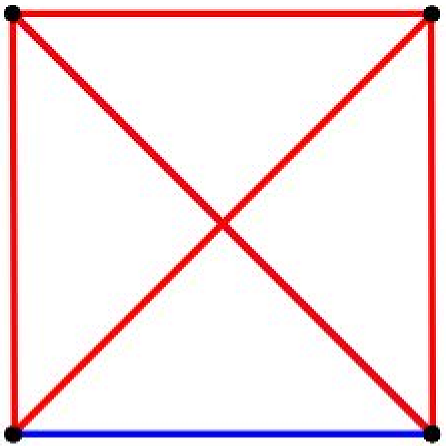
Числа Рамсея

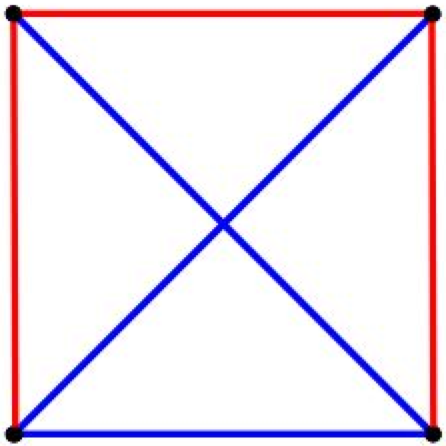
Числа Рамсея

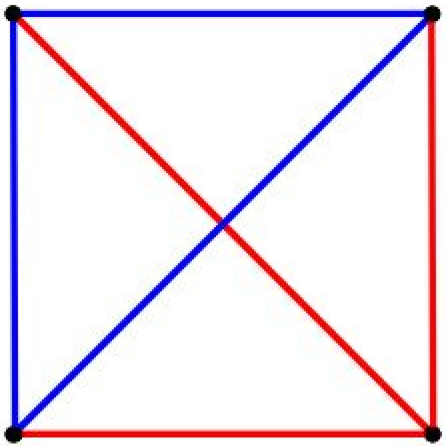
2-раскрашиваемые графы - графы, ребра которых раскрашены в один из двух цветов

Числа Рамсея

2-раскрашиваемые графы - графы, ребра которых раскрашены в один из двух цветов







Числа Рамсея

$R(s)$ - малое число Рамсея

Какой размер должен иметь полный двураскрашиваемый граф, чтобы в нем обязательно содержался полный одноцветный подграф размера s

Числа Рамсея

$R(s)$ - малое число Рамсея

Какой размер должен иметь полный двураскрашиваемый граф, чтобы в нем обязательно содержался полный одноцветный подграф размера s

$R(s, t)$ - большое число Рамсея

Какой размер должен иметь полный двураскрашиваемый граф, чтобы в нем обязательно содержался полный одноцветный подграф цвета 1 размера s или полный одноцветный подграф цвета 2 размера t

Числа Рамсея

R(s,t)	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

Теорема Рамсея 1

Теорема Рамсея 1

Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s, t)$

Метод математической индукции

$$1) P(0)$$

Метод математической индукции

$$1) P(0)$$

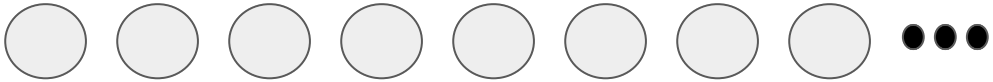
$$2) P(x)$$

Метод математической индукции

1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$

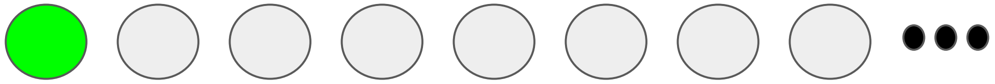
Метод математической индукции

1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$



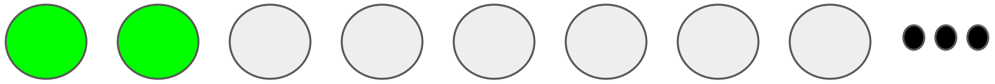
Метод математической индукции

1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$



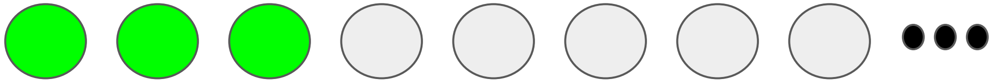
Метод математической индукции

1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$



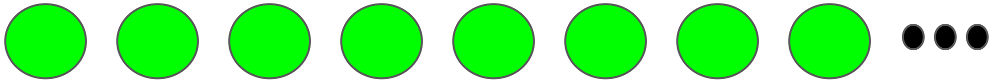
Метод математической индукции

1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$

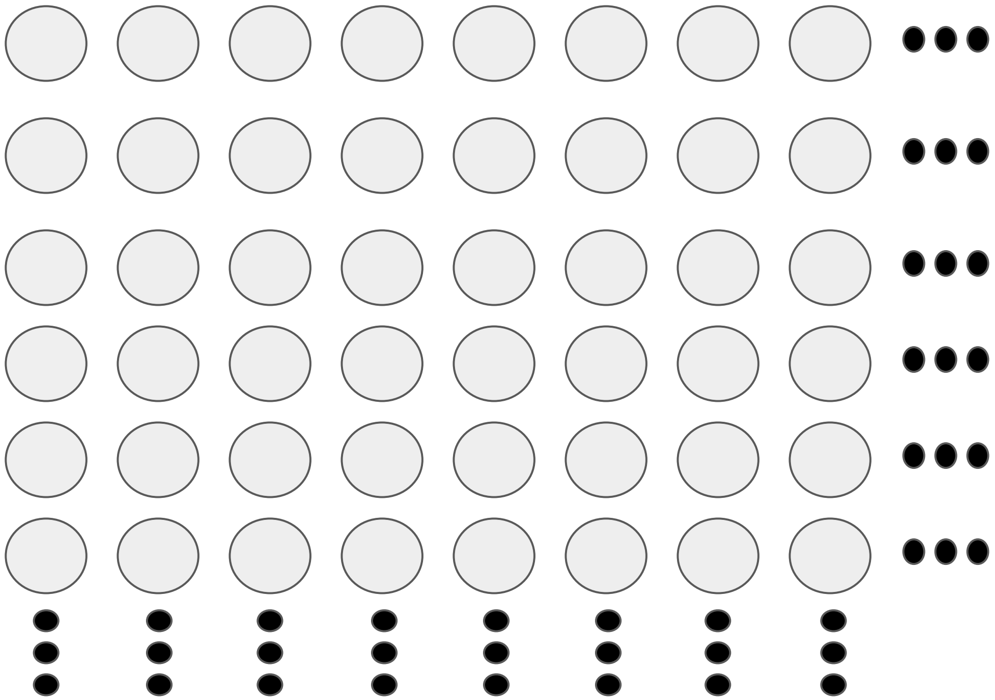


Метод математической индукции

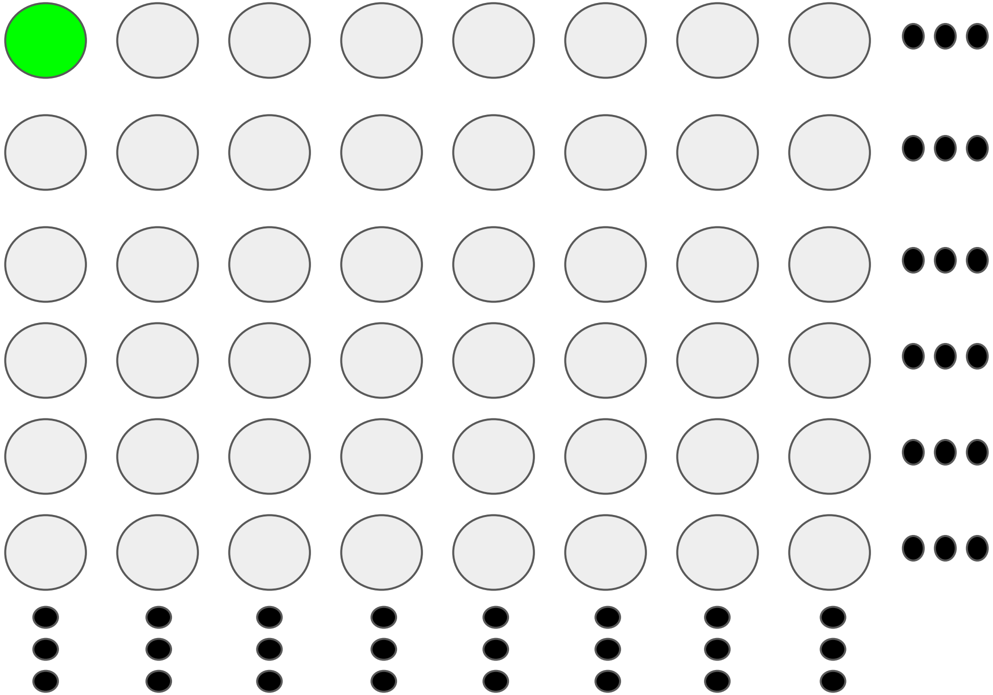
1) $\mathrm{P}(0)$
2) $\mathrm{P}(\mathrm{x})$
3) $\mathrm{P}(\mathrm{x}) \rightarrow P(x+1)$



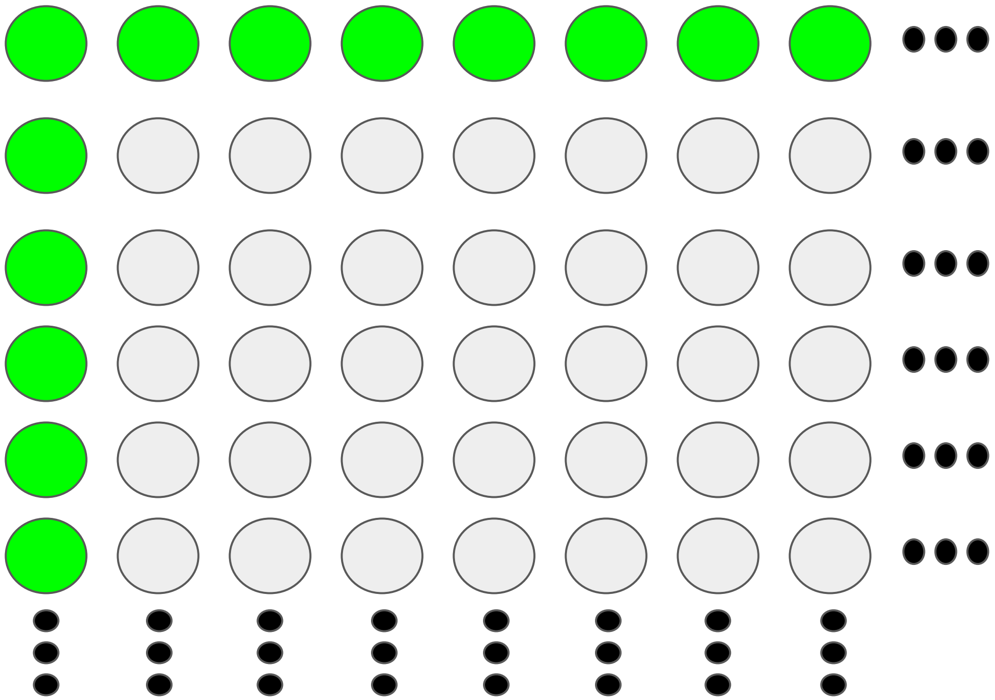
Метод математической индукции



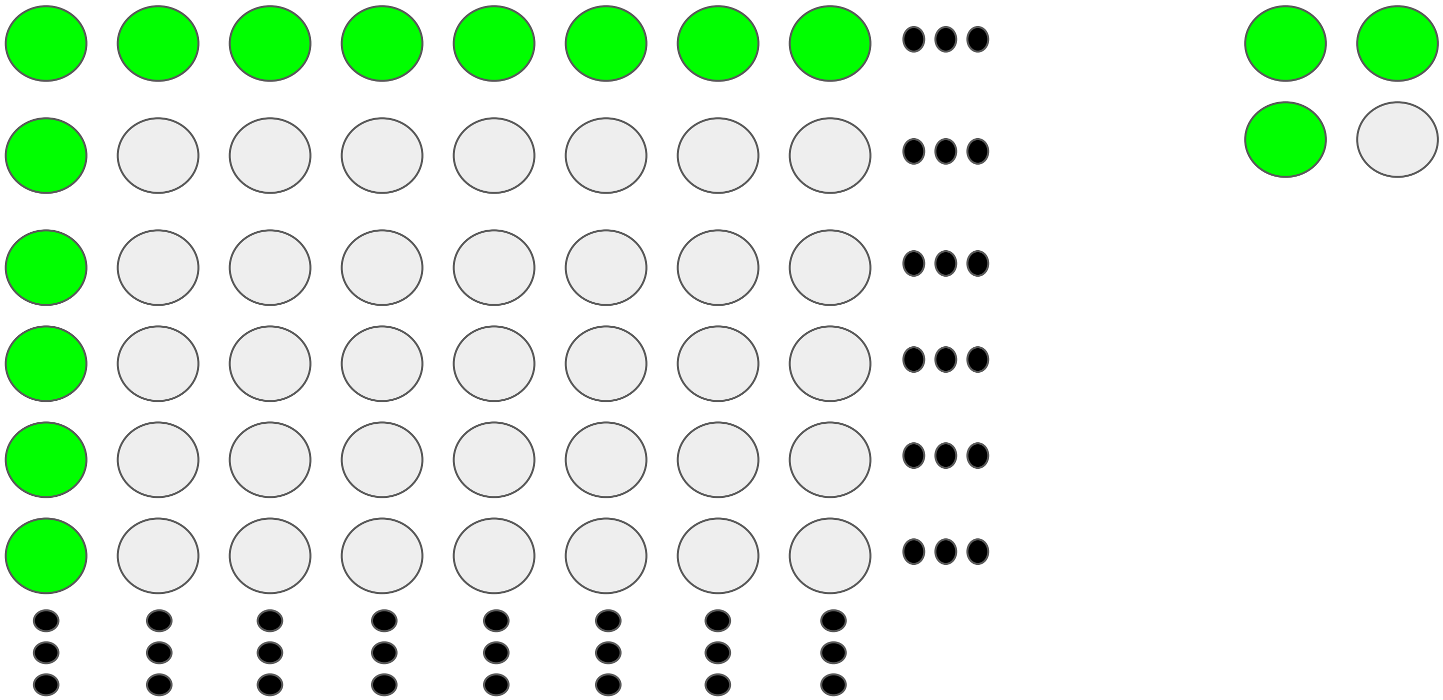
Метод математической индукции



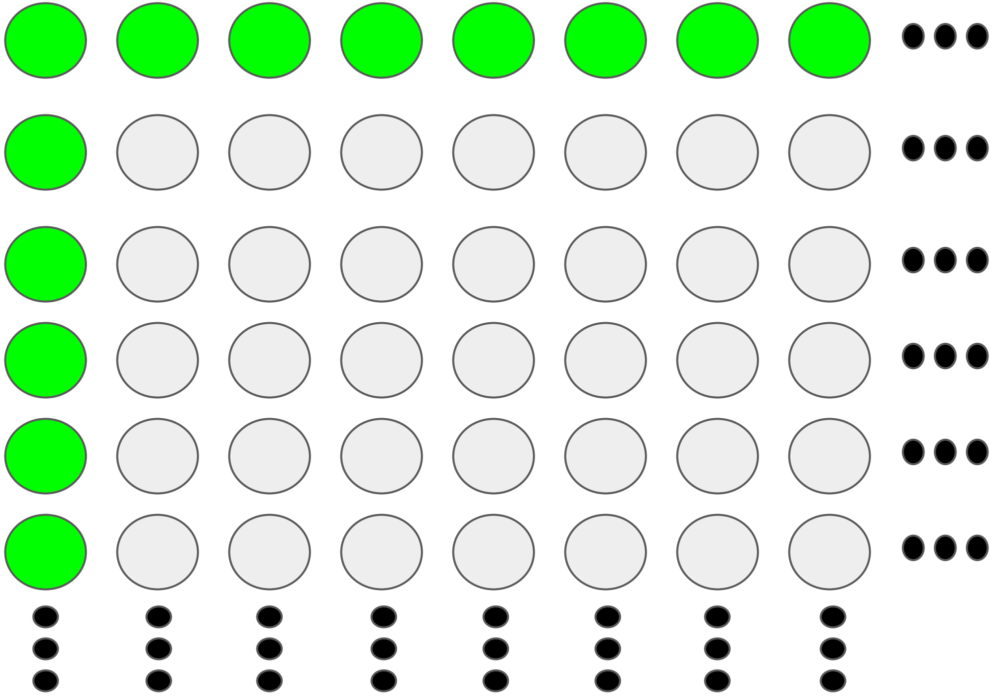
Метод математической индукции

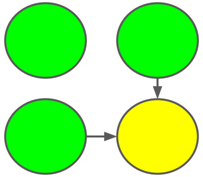


Метод математической индукции

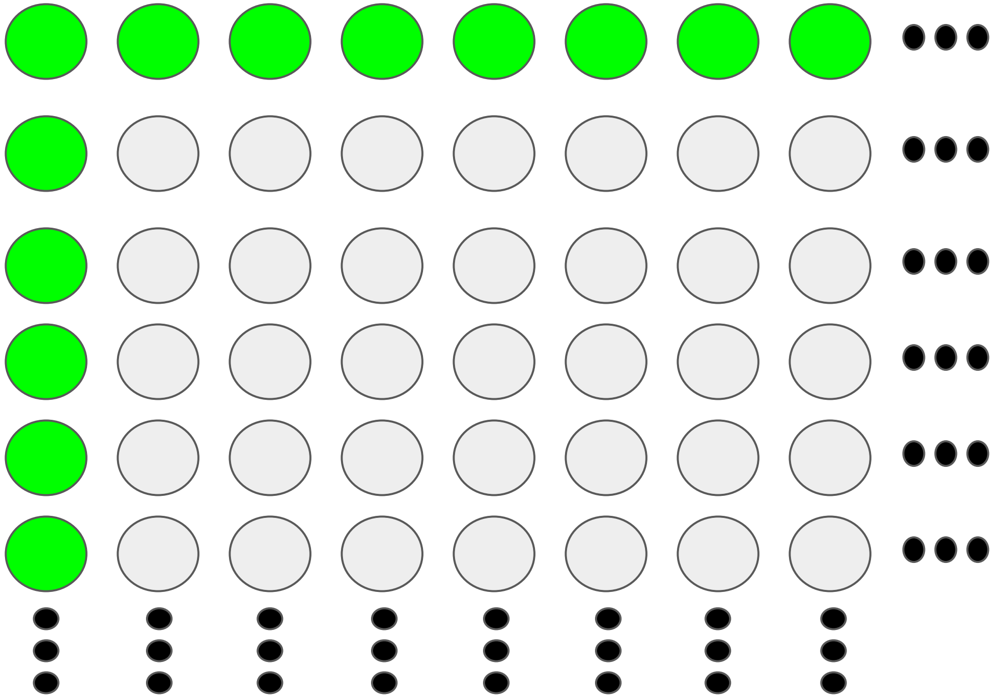


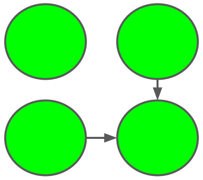
Метод математической индукции



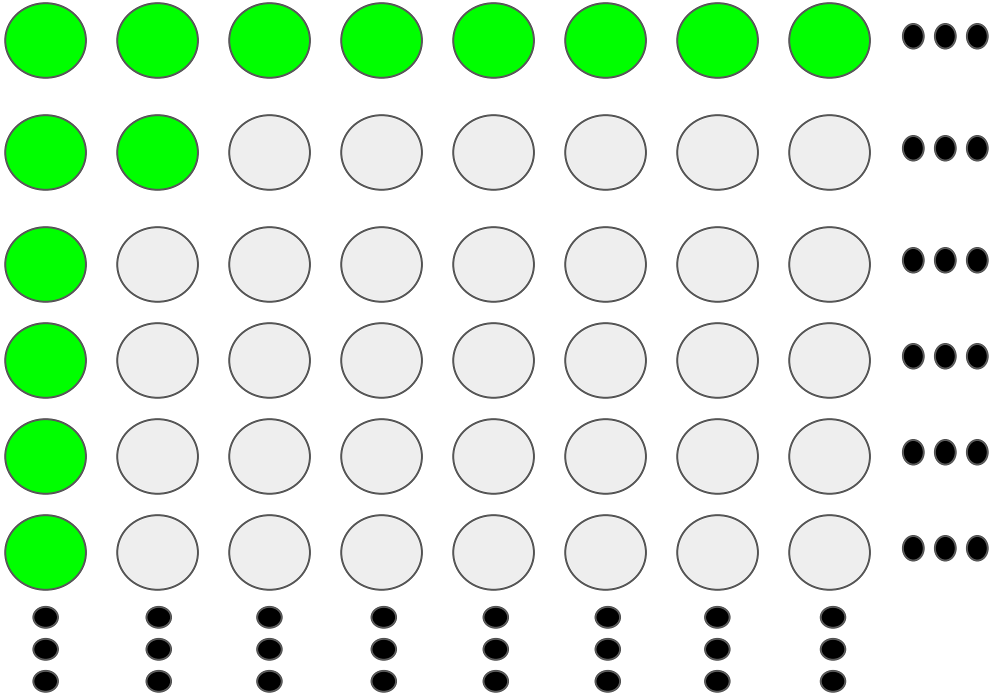


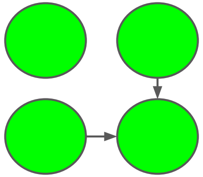
Метод математической индукции



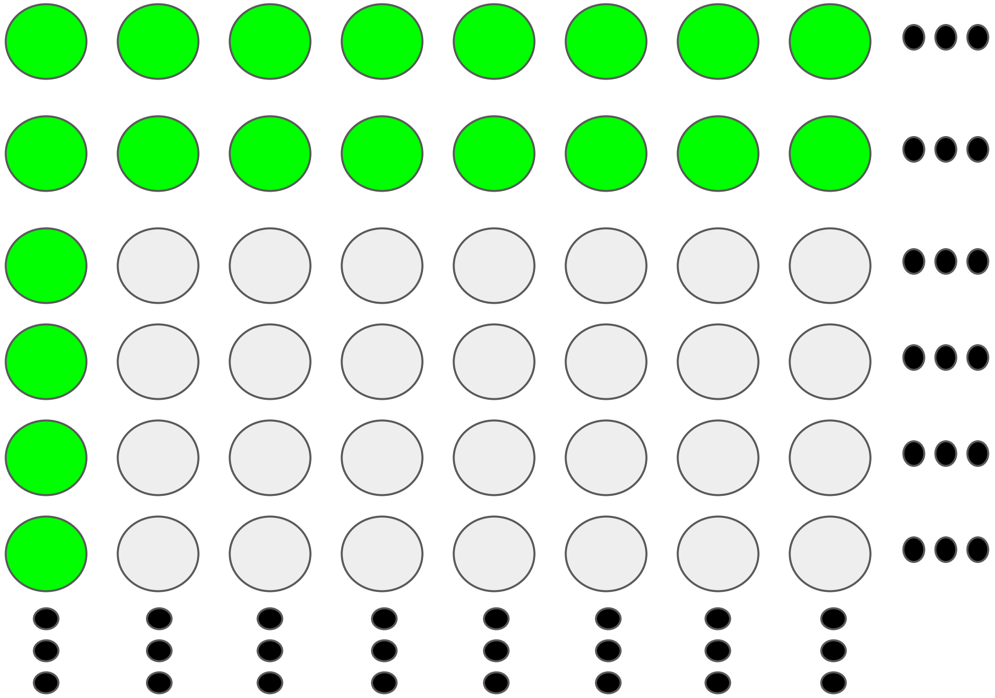


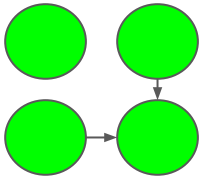
Метод математической индукции



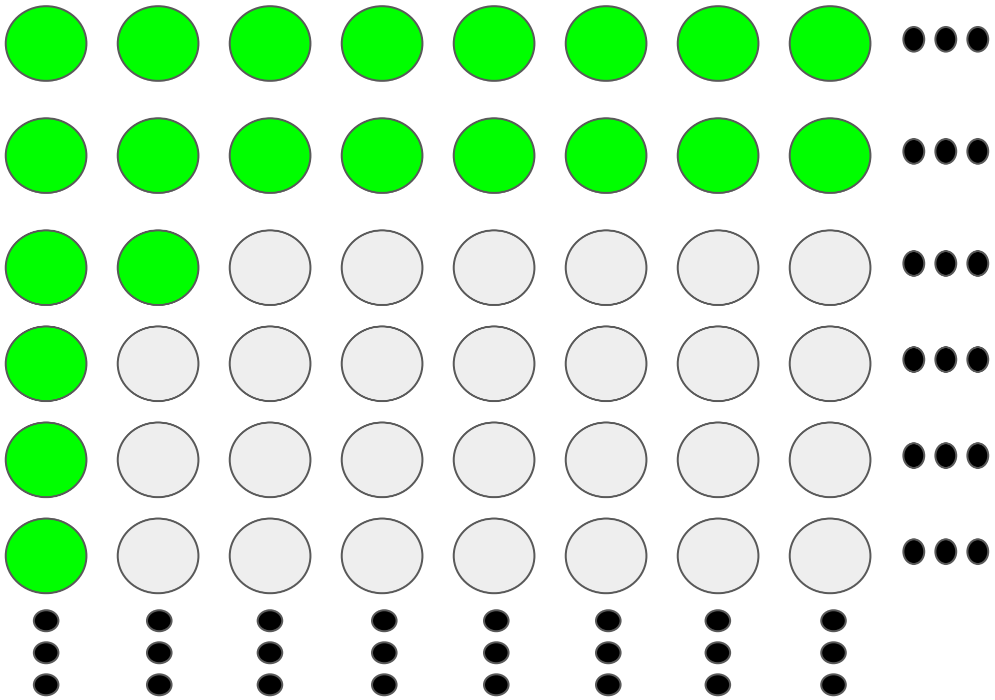


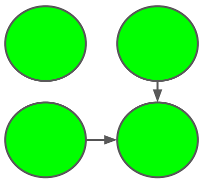
Метод математической индукции



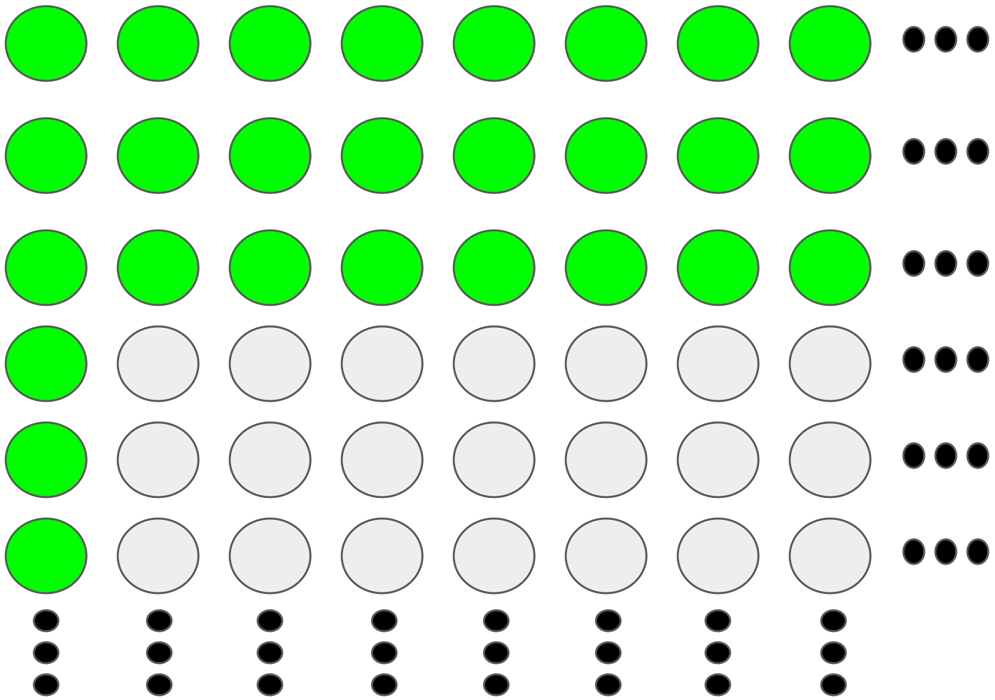


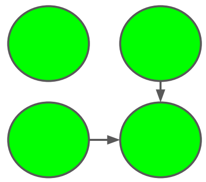
Метод математической индукции



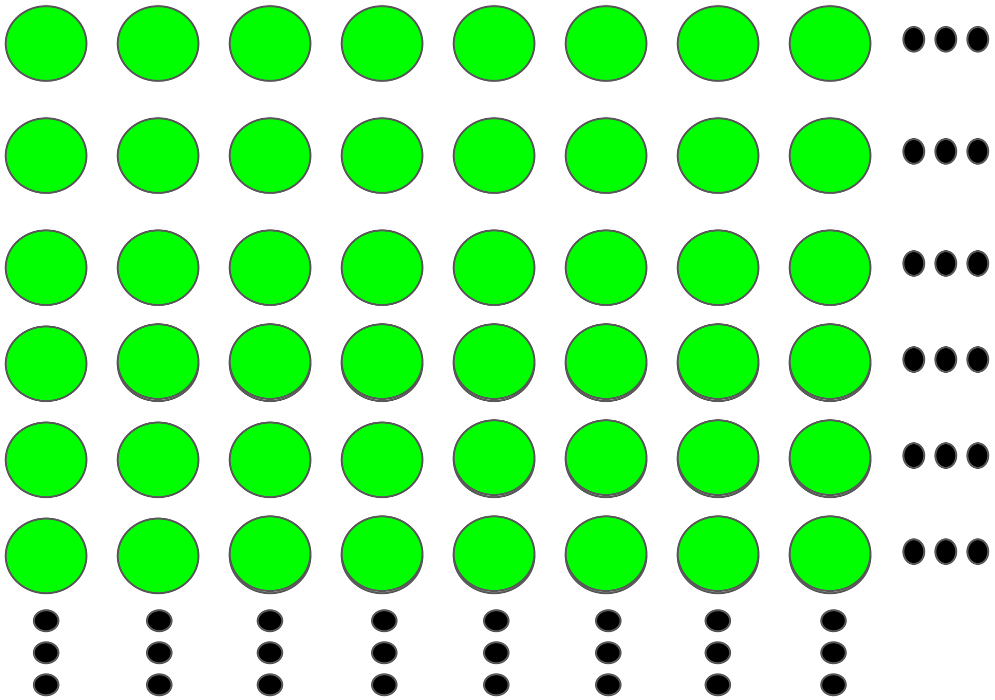


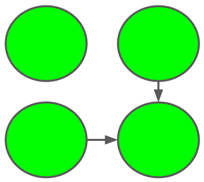
Метод математической индукции





Метод математической индукции





Теорема Рамсея 1

Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s,t)$

План доказательства:

1) Доказать $R(s,1)$ - конечно, $R(1,t)$ - конечно
2) Доказать, что если $R(s-1,t)$ - конечно и $R(s,t-1)$ - конечно, то $R(s,t)$ - конечно

Теорема Рамсея 1

Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s, t)$

1) Доказать $R(s, 1)$ - конечно, $R(1, t)$ - конечно

K_1

Теорема Рамсея 1

Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s, t)$

1) Доказать $R(s, 1)$ - конечно, $R(1, t)$ - конечно

K_1 

$$R(s, 1) = R(1, t) = 1$$

Теорема Рамсея 1

Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s, t)$

1) Доказать $R(s, 1)$ - конечно, $R(1, t)$ - конечно

K_1 

$$R(s, 1) = R(1, t) = 1$$

$$R(s, 2) = R(2, s) = s$$

Теорема Рамсея 1

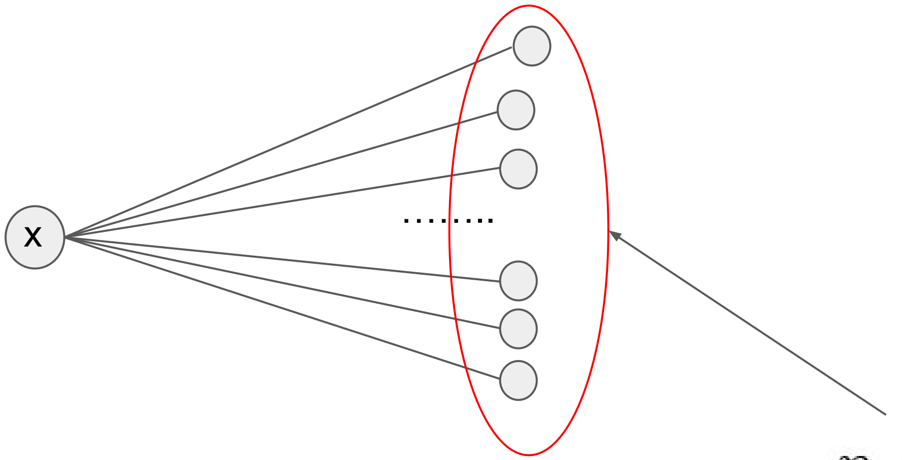
Для любых $s, t \in \mathbb{N}$ существует конечное $R(s, t)$

2) Доказать, что если $R(s-1, t)$ - конечно и $R(s, t-1)$ - конечно, то $R(s, t)$ - конечно

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

Теорема Рамсея 1

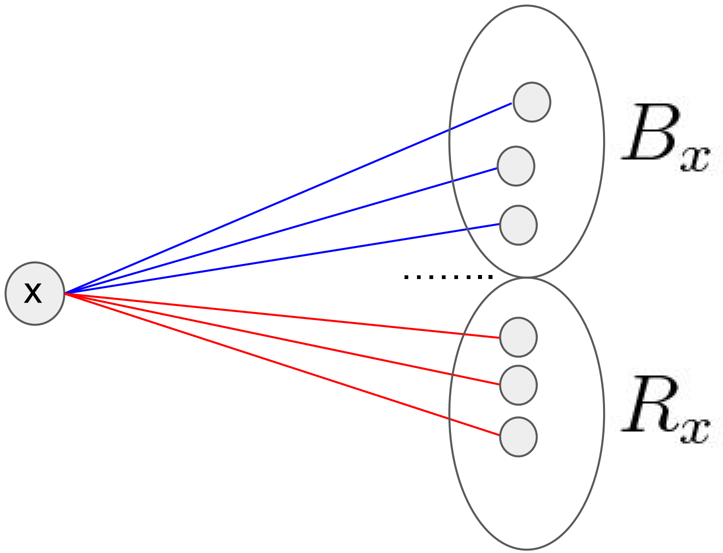
$$n = R(s-1,t) + R(s,t-1)$$



$n-1$ вершина

Теорема Рамсея 1

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

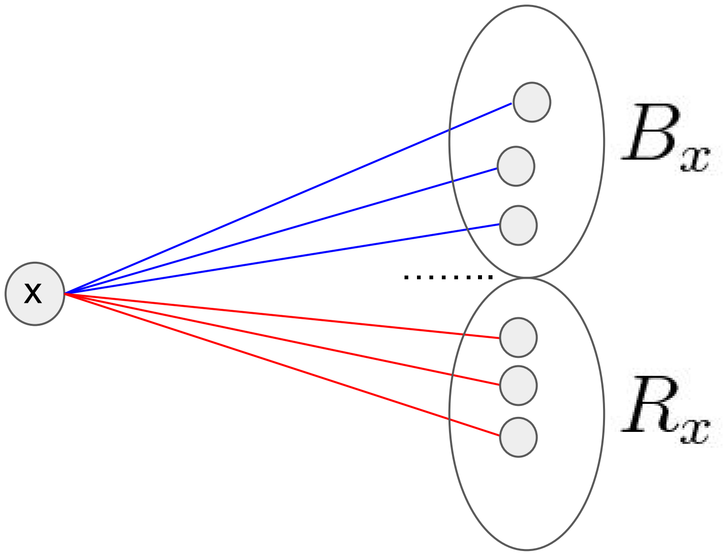


$$B_x + R_x = n - 1$$

$$B_x \geq R(s, t-1) \qquad R_x \geq R(s-1, t)$$

Теорема Рамсея 1

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$

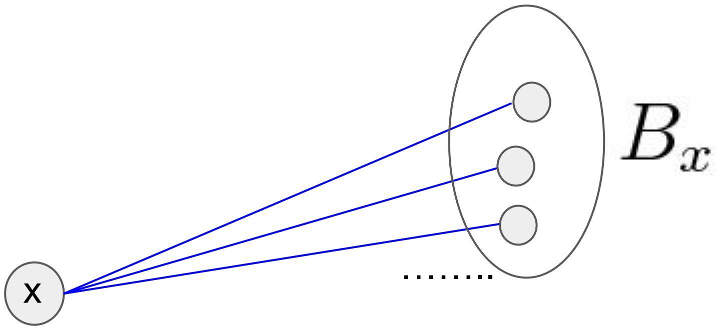


$$B_x + R_x = n - 1$$

$$B_x \geq R(s, t-1) \qquad R_x \geq R(s-1, t)$$

Теорема Рамсея 1

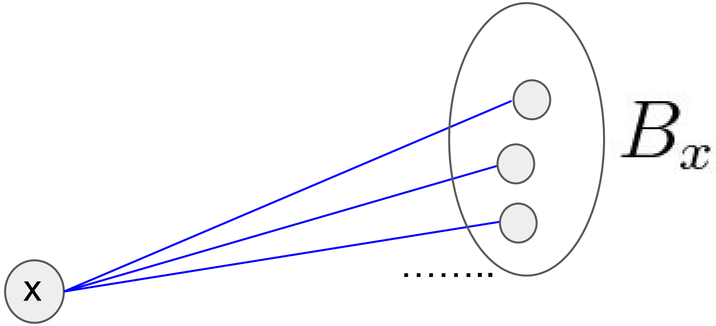
$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$



$$B_x \geq R(s, t-1)$$

Теорема Рамсея 1

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$



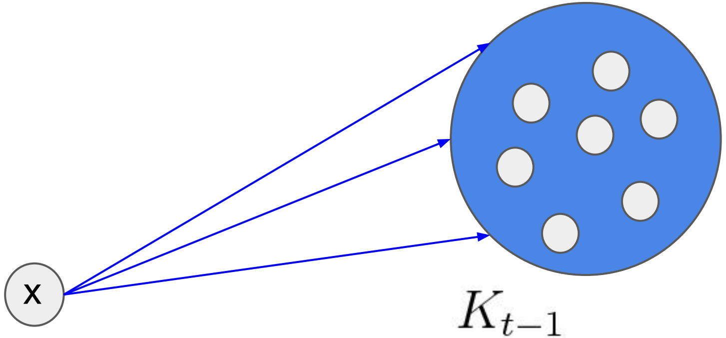
$$B_x \geq R(s, t-1)$$

Красный K_s → DONE!

Синий K_{t-1}

Теорема Рамсея 1

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$



K_{t-1}

$$B_x \geq R(s, t-1)$$

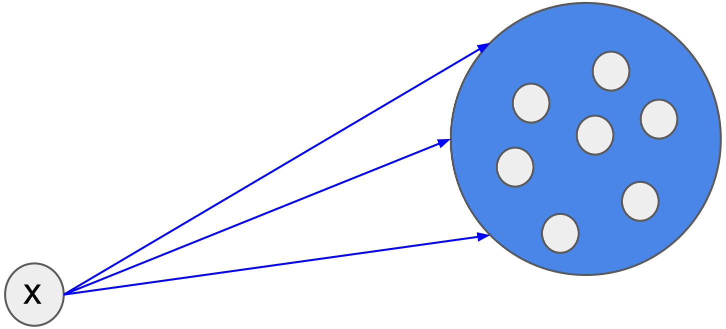
Красный K_s

Синий K_{t-1}

DONE!

Теорема Рамсея 1

$$n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$$



$$B_x \geq R(s, t-1)$$

Красный K_s

DONE!

Синий K_{t-1}

$x \cup K_{t-1}$ - синий K_t

Теорема Рамсея 2

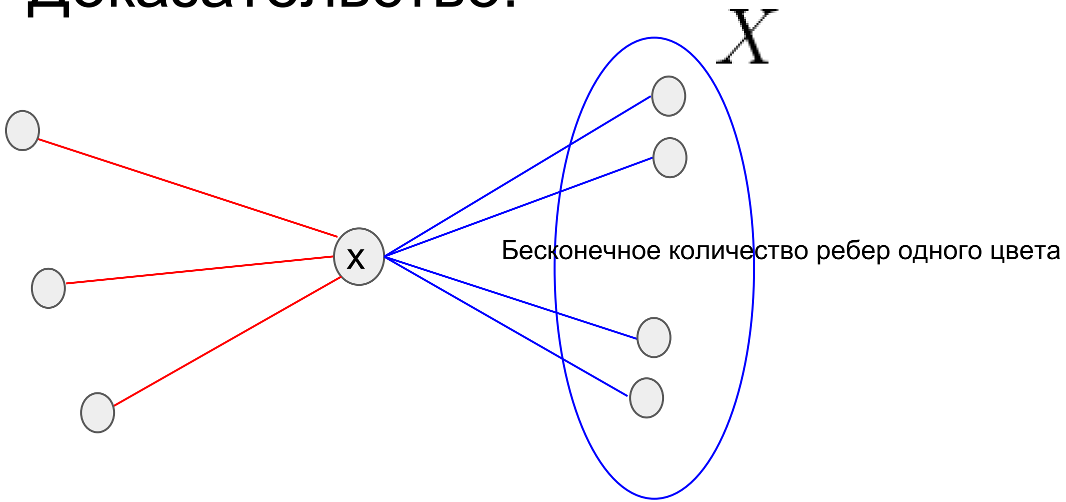
Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует бесконечный одноцветный полный подграф

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

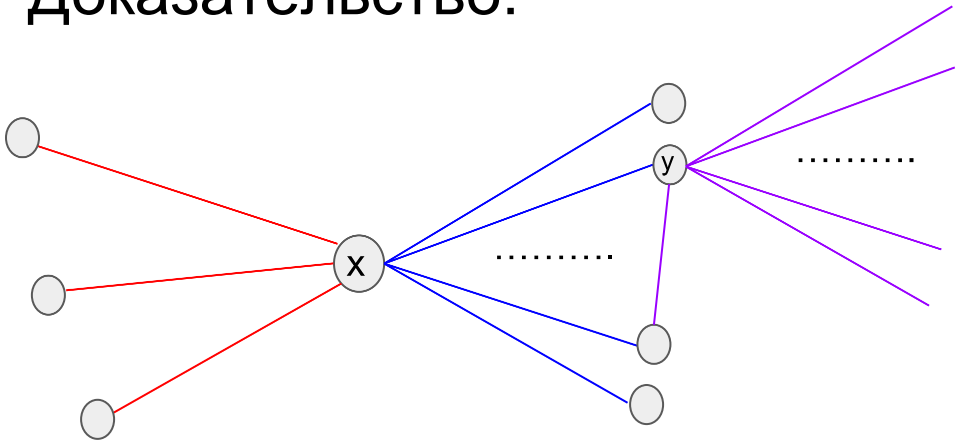
Доказательство:



Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

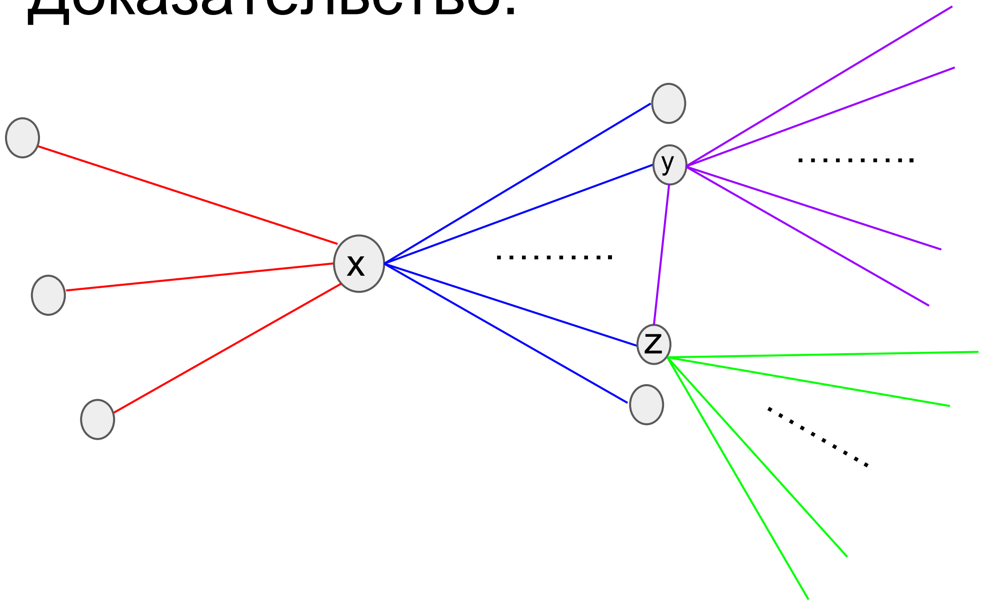
Доказательство:



Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

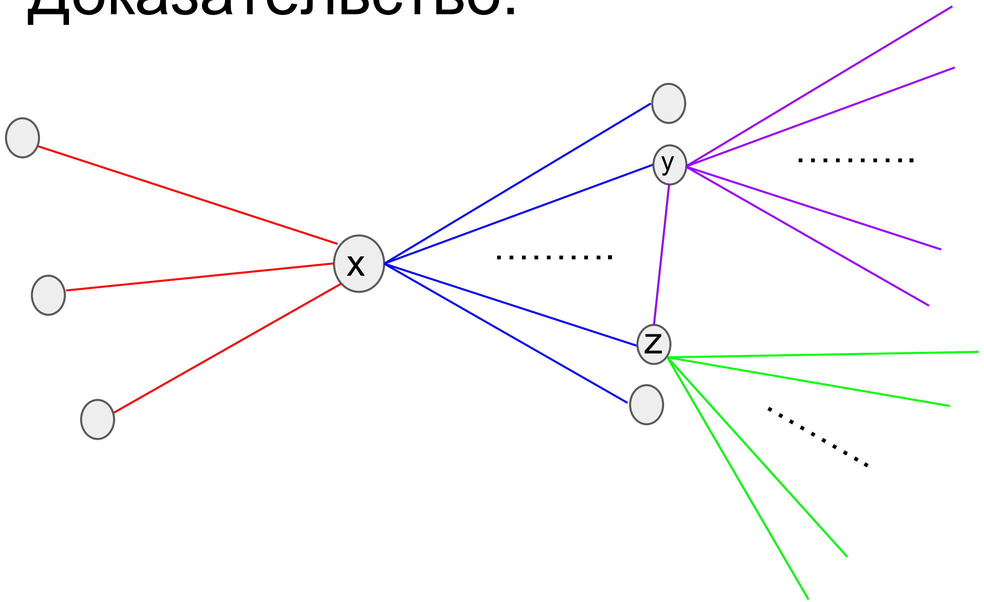
Доказательство:



Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

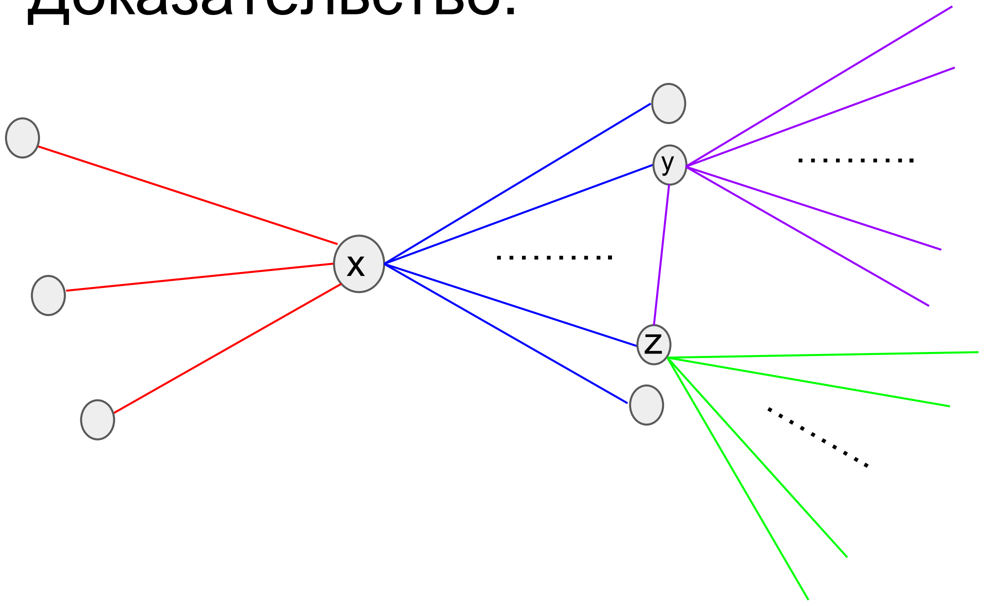
Доказательство:



Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:

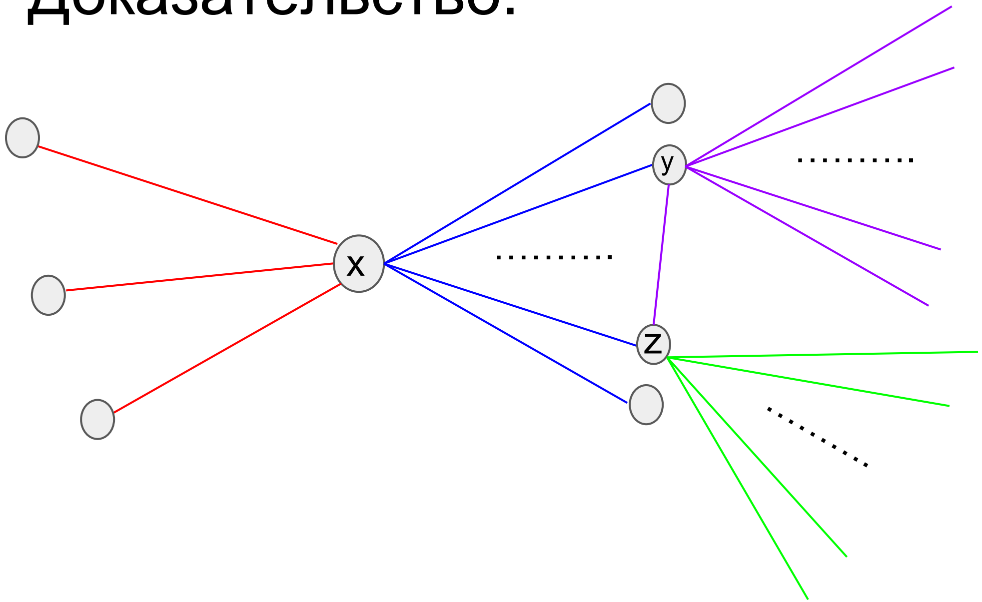


$$V = \{x, y, z, \ldots\}$$

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:



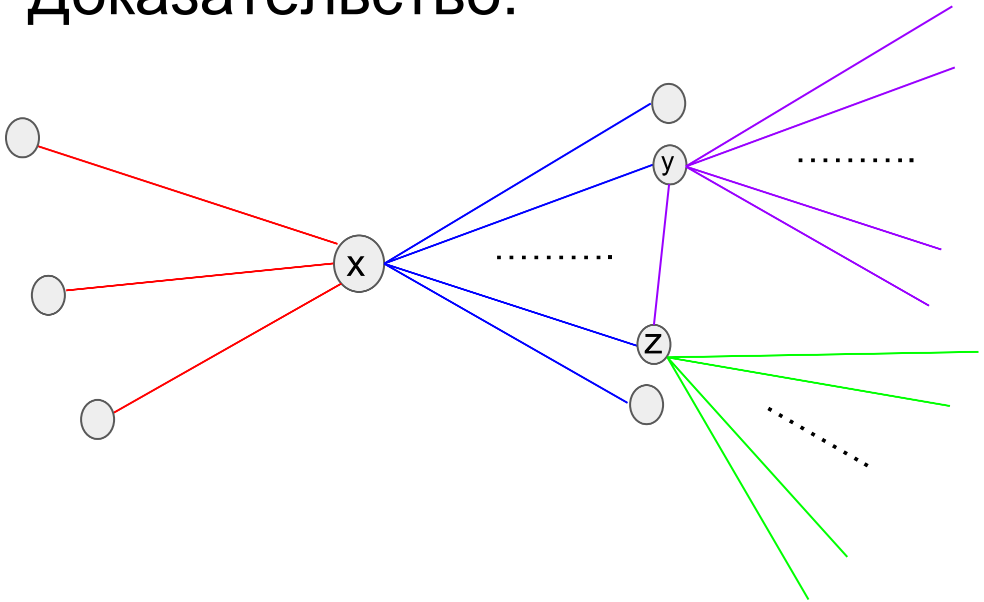
$$V = \{x, y, z, \ldots\}$$

$$E = \{xy, xz, \ldots, yz, \ldots\}$$

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:



$$V = \{x, y, z, \ldots\}$$

$$E = \{xy, xz, \ldots, yz, \ldots\}$$

xx' - одного цвета

yy' - одного цвета

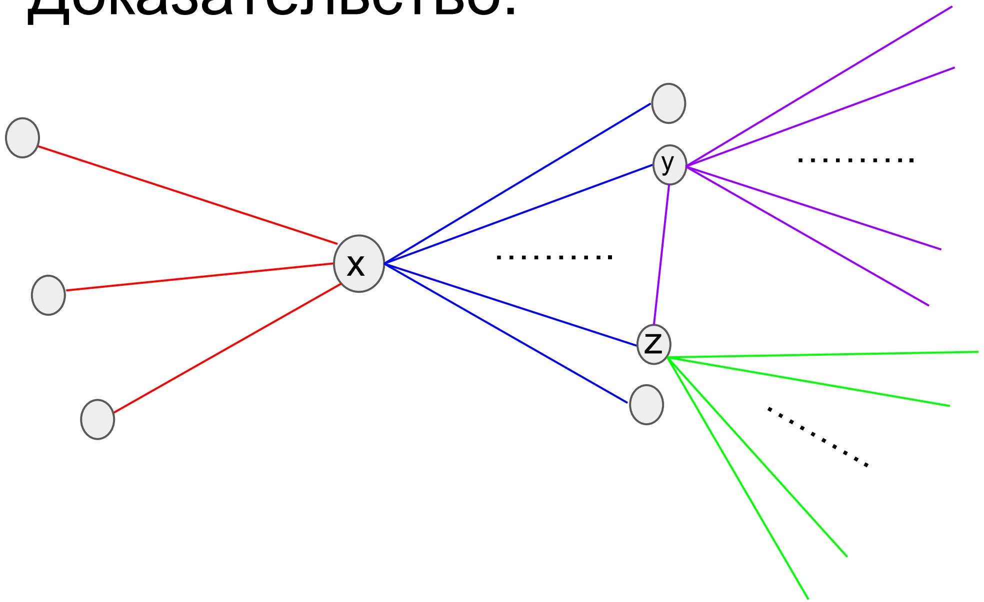
zz' - одного цвета

$\ldots$

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:



$$V = \{x, y, z, \ldots\}$$

$$E = \{xy, xz, \ldots, yz, \ldots\}$$

xx' - одного цвета

yy' - одного цвета

zz' - одного цвета

$\ldots$

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:

$V = \{x, y, z, \ldots\}$ - вершины покрашены в два цвета

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:

$$V = \{x, y, z, \dots\}$$

- вершины покрашены в два цвета

$\downarrow$

есть цвет, в который покрашено бесконечно количество вершин

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:

$$V = \{x, y, z, \ldots\}$$

- вершины покрашены в два цвета

$$v_1, v_2, v_3, \ldots$$

есть цвет, в который покрашено бесконечно количество вершин

Теорема Рамсея 2

В бесконечном полном графе $K_{\mathbb{N}}$ существует одноцветный бесконечный полный подграф

Доказательство:

$$V = \{x, y, z, \dots\}$$

- вершины покрашены в два цвета

есть цвет, в который покрашено бесконечно количество вершин

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

Образуют бесконечный одноцветный подграф

Применение теории Рамсея

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число n, что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Применение теории Рамсея

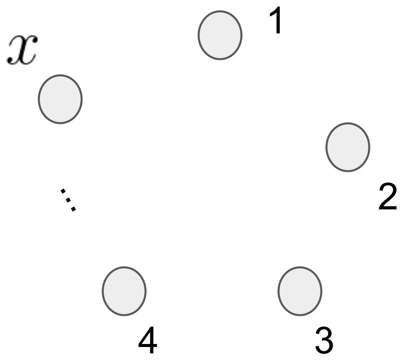
Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число n, что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

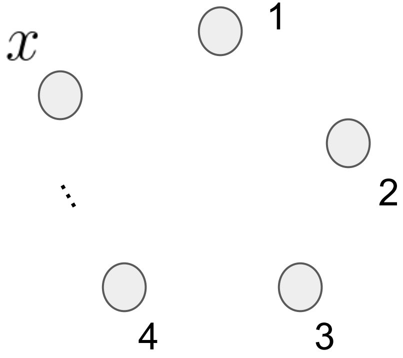
Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно

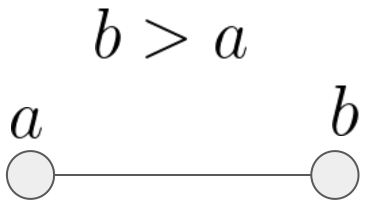


Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно

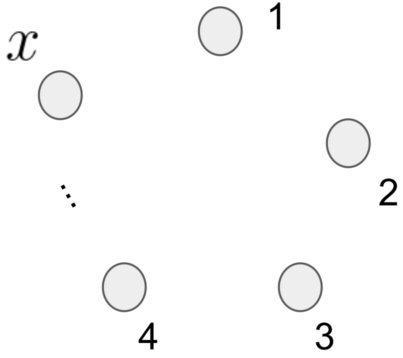




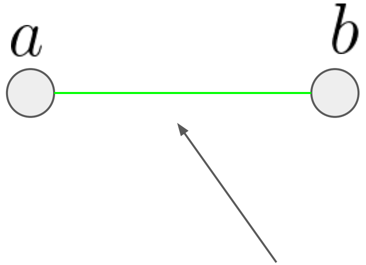
Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно



$b > a$

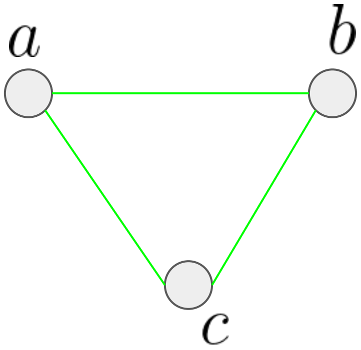


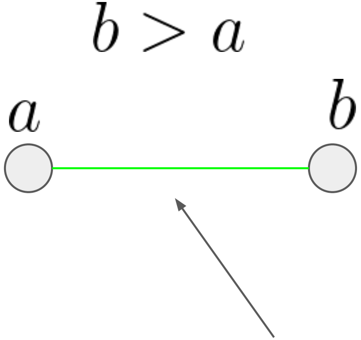
Покрасим в цвет который имеет $b - a$

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно



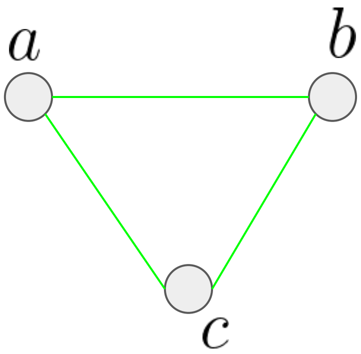


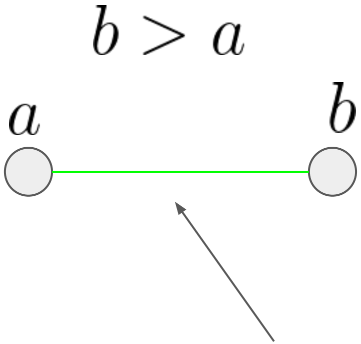
Покрасим в цвет который имеет $b - a$

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно





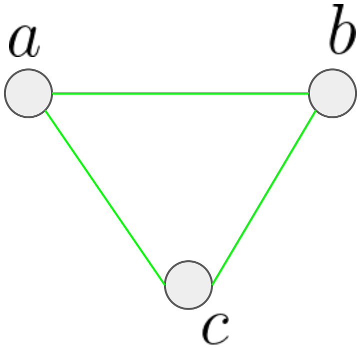
Покрасим в цвет который имеет $b - a$

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

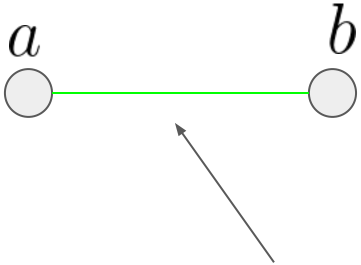
Из теории Рамсея известно, что $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{r}) = x$ - конечно

$c > b > a$



$c - b, b - a, c - a$ - одного цвета

$b > a$



Покрасим в цвет который имеет $b - a$

Применение теории Рамсея

Все натуральные числа покрашены в r цветов. Доказать, что найдется такое число ,
что всегда найдется тройка чисел $x, y, z < n$ такие что $x + y = z$

$c - b, b - a, c - a$ - одного цвета

$$(c - b) + (b - a) = (c - a)$$

$$x = (c - b)$$

$$y = (b - a)$$

$$z = (c - a)$$