4.3 Entropi (Bilgi Kazancı)

Rassal bir değişkenin belirsizlik ölçütü olarak bilinen Entropi, bir süreç için tüm örnekler tarafından içerilen enformasyonun beklenen değeridir. ***Enformasyon ise rassal bir olayın gerçeklesmesine ilişkin bir bilgi ölçütüdür.*** Eşit olasılıklı durumlar yüksek belirsizliği temsil eder. Shannon'a göre bir sistemdeki durum değiştiğinde entropideki değişim kazanılan enformasyonu tanımlar. Buna göre maksimum belirsizlik durumundaki değişim muhtemelen maksimum enformasyonu sağlayacaktır. Shannon bilgiyi bitlerle temsil ettiği için logartimayı iki tabanında kullanımıştır.

$$I(x) = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x)$$

Shannon'a göre entropi, iletilen bir mesajın tasıdığı enformasyonun beklenen değeridir.

Shannon Entropisi (H) adıyla anılan terim, tüm x_i durumlarına ait $P(x_i)$ olasılıklarına bağlı bir değerdir.

$$H(X) = E(I(X)) = \sum_{1 \le i \le n} P(x_i).I(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 P_i$$

$$Log_2(P) = \frac{10}{3} Log_{10}(P)$$

$$H(X) = -\frac{10}{3} \sum_{i=1}^{n} P_i \, Log_{10} P_i$$

10 tabanında logaritmik ifadeler:

- Log1=0, Log 2 ≈ 0.3, Log 3 ≈ 0.477, Log 5 ≈ 0.7, Log 7 ≈ 0.845, Log10=1 • log(a*b)=loga + logb; $loga^n$=n*loga

Örnek:

Bir paranın havaya atılması olayı, rassal X sürecini temsil etsin. Yazı (1/2) ve tura (1/2) gelme olasılıkları eşit olduğu için X sürecinin entropisi 1 olan para atma olayı (X) gerçeklestiğinde 1 bitlik bilgi kazanılacaktır.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log_2 p_i \quad = -(0.5\log_2 0.5 + 0.5\log_2 0.5) = 1$$

Örnek:

Hava, nem, rüzgar, su sıcaklığı gibi değerlere göre pikniğe gidip gitmeme kararı verilmiş 4 olay sonucunda pikniğe gidildi mi? sorusunun iki yanıtı var. Evet yanıtının olasılığı: ¾, hayır yanıtının olasılığı:1/4.

Olay No	Hava	Nem	Rüzgar	Su sıcaklığı	Pikniğe gidildi mi?
1	güneşli	normal	güçlü	ılık	Evet
2	güneşli	yüksek	güçlü	ılık	Evet
3	yağmurlu	yüksek	güçlü	ılık	Hayır
4	güneşli	yüksek	güçlü	soğuk	Evet

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p_i \log_2 p_i$$

Entropy(S)=H(x)=-(3/4)$\log_2$(3/4)-(1/4)$\log_2$(1/4)=0.811

Örnek:

Makine öğrenmesi algoritmasının olasılık hesaplanması sonucunda karar vermesi gerekmektedir. İki durum söz konusudur. Birinci durumun olma olasılığı, P1=0.6, olmama olasığı, P2=0.4 ise entropisini hesaplayınız.

$$Log_2(0.6) = -0.743$$
$$Log_2(0.4) = -4/3$$

Entropi, H(x)=0.6*0.743+0.4*4/3=0.979