Презентация по лабораторной работе №5

НКНбд-01-21

Юсупов Эмиль Артурович

Теоретическое введение

Модель хищник-жертва

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены -bxy и dxy в правой части уравнения).

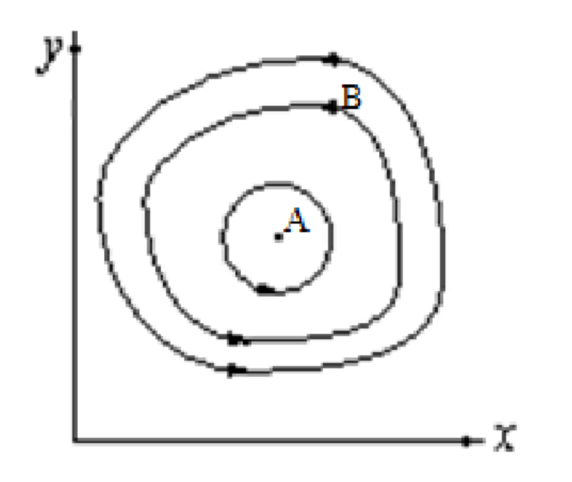

Figure 1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры.

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (А на рис. 1), всякое же другое начальное состояние (В) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние В.

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

При малом изменении модели

$$\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) + \epsilon f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) + \epsilon g(x, y), \epsilon \ll 1$$

(прибавление к правым частям малые члены, учитывающие, например,конкуренцию жертв за пищу и хищников за жертв), вывод о периодичности (возвращении системы в исходное состояние B), справедливый для жесткой системы Лотки-Вольтерры, теряет силу. Таким образом, мы получаем так называемую мягкую модель «хищник-жертва». В зависимости от вида малых поправок f и g возможны следующие сценарии 1-3 рис. 2

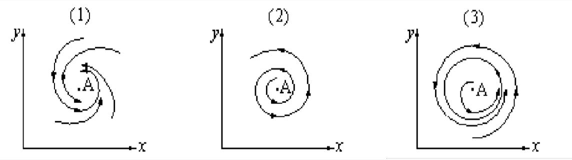

Figure 2: Мягкая модель борьбы за существование.

В случае 1 равновесное состояние А устойчиво. При любых других начальных условиях через большое время устанавливается именно оно.

В случае 2 система стационарное состояние неустойчиво. Эволюция приводит то к резкому увеличению числа хищников, то к их почти полному вымиранию. Такая система в конце концов попадает в область столь больших или столь малых значений x и y, что модель перестает быть применимой.

В случае 3 в системе с неустойчивым стационарным состоянием А с течением времени устанавливается периодический режим. В отличие от исходной жесткой модели Лотки-Вольтерры, в этой модели установившийся периодический режим не зависит от начального условия. Первоначально незначительное отклонение от стационарного состояния А приводит не к малым колебаниям около А, как в модели Лотки-Вольтерры, а к колебаниям вполне определенной (и не зависящей от малости отклонения) амплитуды.

Вывод: жесткую модель всегда надлежит исследовать на структурную устойчивость полученных при ее изучении результатов по отношению к малым изменениям модели (делающим ее мягкой).

Задание

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.83x(t) + 0.083x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.82 - 0.082x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:$x_0 = 8, y_0 = 16$. Найдите стационарное состояние системы.

Результаты работы

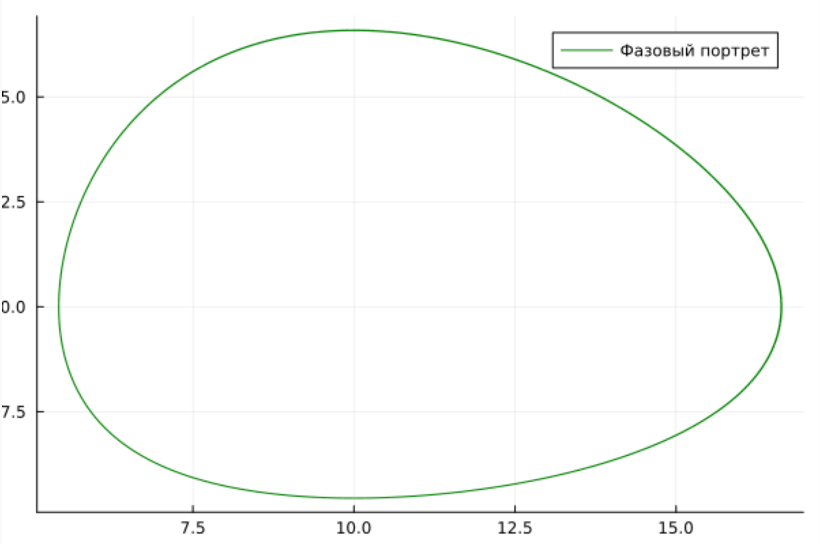

Figure 3: зависимости численности хищников от численности жертв

Результаты работы

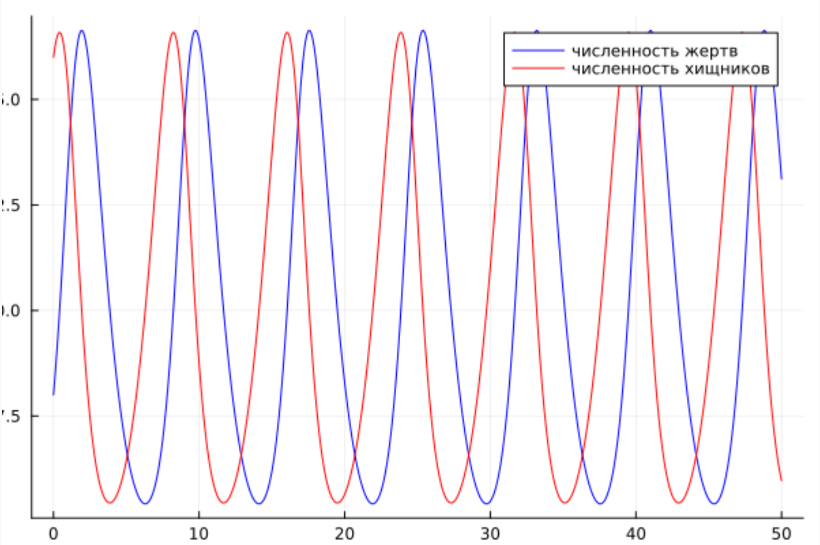

Figure 4: изменения численности хищников и численности жертв

Результат работы

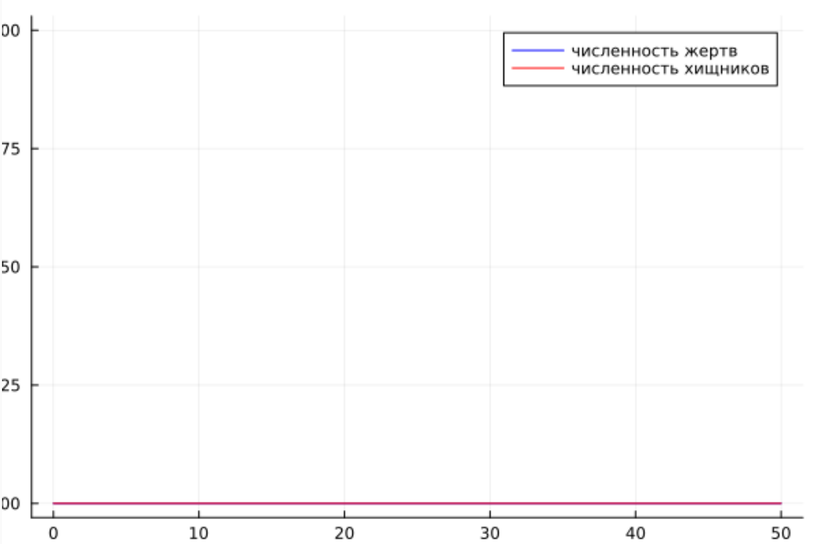

Figure 5: изменения численности хищников и численности жертв при

Вывод