

Método Quine-McCluskey

FDD -ESCOM

Introducción

- El método de minimización mediante el mapa de Karnaugh es un método cómodo pero tiene el inconveniente de que no se trata de un procedimiento sistemático y totalmente objetivo, sobre todo cuando se tratan de funciones de conmutación de más de cuatro variables.
- Existe un procedimiento que aunque es arduo de seguir a mano, tiene la ventaja de que es sistemático y fácilmente programable en una computadora. Se trata del método de Quine-McCluskey (Q-M en adelante).

Adyacencias de una función

- **El método de Quine-McCluskey (Q-M) o método tabular consiste en obtener de manera sistemática adyacencias en orden creciente hasta llegar a las de mayor orden posible, las cuales llamaremos implicantes primarios.**

Ejemplo:

- **Sea la siguiente función lógica de 5 variables:**
 - $F(X, Y, Z, U, V) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 22, 29, 30)$

Primer Paso

- Representar los minterminos en su forma binaria y especificar su índice (número de unos)

Minterm (DEC)	Minterm (BIN)	INDICE
0	00000	0
2	00010	1
3	00011	2
5	00101	2
7	00111	3
8	01000	1
10	01010	2
11	01011	3
13	01101	3
15	01111	4
22	10110	3
29	11101	4
30	11110	4

Segundo Paso

- Agrupar los minterminos según el número de unos que contengan (su índice)

Índice	Minterms	
0	0	✓
1	2	✓
	8	✓
2	3	✓
	5	✓
	10	✓
3	7	✓
	11	✓
	13	✓
	22	✓
4	15	✓
	29	✓
	30	✓

Tercer paso

- **Obtener las adyacencias de primer orden siguiendo los siguientes pasos y reglas:**
 - Comparar cada mintermino con sus adyacentes (es decir los de índice inmediatamente superior)
 - Un mintermino sólo puede ser adyacente con otro del siguiente grupo siempre que tenga un valor decimal mayor
 - Un mintermino sólo puede ser adyacente con otro siempre que su diferencia sea una potencia de 2.
 - Montar una tabla donde además de las parejas de minterminos que forman adyacencias de primer orden, aparezca entre paréntesis la diferencia entre sus valores decimales.
 - Esta diferencia dará la posición de la coordenada (-). Los dos minterminos los escribiremos ordenados (a la izquierda el menor).
 - Los minterminos que vayamos usando para obtener adyacencias se marcan en la tabla anterior para saber que han sido cubiertos

Tercer paso

Índice	Minterms	
0	0	✓
1	2	✓
	8	✓
2	3	✓
	5	✓
	10	✓
3	7	✓
	11	✓
	13	✓
	22	✓
4	15	✓
	29	✓
	30	✓

Adyacencias primer orden	Valor en binario	
0-2 (2)	000-0	✓
0-8 (8)	0-000	✓
2-3 (1)	0001-	✓
2-10 (8)	0-010	✓
8-10 (2)	010-0	✓
3-7 (4)	00-11	✓
3-11 (8)	0-011	✓
5-7 (2)	001-1	✓
5-13 (8)	0-101	✓
10-11 (1)	0101-	✓
7-15 (8)	0-111	✓
11-15 (4)	01-11	✓
13-15 (2)	011-1	✓
13-29 (16)	011-1	
22-30 (8)	1-110	

Cuarto paso

- **Se deben realizar los siguientes pasos y reglas:**
 - 1°) Comparamos las adyacencias de un grupo con las de su siguiente
 - 2°) Para que dos adyacencias de primer orden formen una de segundo orden es necesario que la posición de su coordenada vacua (que hemos escrito entre paréntesis) esté en la misma posición.
 - 3°) Una adyacencia de primer orden $A1=(m11-m12)$ sólo puede ser adyacente con otra del siguiente grupo $A2=(m21-m22)$ si su primer mintermino $m11$ es menor que el primer mintermino $m21$ de $A2$.
 - 4°) Dos adyacencias de primer orden $A1=(m11-m12)$ y $A2=(m21-m22)$ sólo podrán formar una de segundo orden si $m21-m11$ es una potencia de 2.
 - 5°) Escribimos según esto otra tabla donde además de las parejas de adyacencias de primer orden que forman adyacencias de segundo orden, aparezcan entre paréntesis y separados por coma la diferencia anterior y nueva entre los valores decimales de los minterminos iniciales.
 - Estas diferencias darán la posición de las dos coordenadas vacuas -. Los cuatro minterminos los escribiremos ordenados (a la izquierda el menor).

Cuarto Paso

- 6°) Podremos formar una adyacencia de segundo orden a través de dos parejas diferentes de adyacencias de primer orden aunque sólo las escribiremos una vez
- 7°) Las adyacencias que vayamos usando para obtener adyacencias mayores las marcaremos en la tabla anterior para saber que han sido cubiertas.

Adyacencias segundo orden	Valor en binario	
0-2-8-10 (2, 8)	0-0-0	
2-3-10-11 (1, 8)	0-01-	
3-7-11-15 (4, 8)	0--11	
5-7-13-15 (2, 8)	0-1-1	

Quinto Paso

- **Se sigue con las adyacencias de tercer orden y superior con el mismo procedimiento anterior hasta que ya no se obtengan más adyacencias.**

Sexto Paso

- **Nombramos las adyacencias no cubiertas empezando por las del final (orden mayor) hacia las del principio (orden menor)**
- **De esta forma se obtiene la siguiente lista:**

Orden	Adyacencia	
2	5-7-13-15	a
2	3-7-11-15	b
2	2-3-10-11	c
2	0-2-8-10	d
1	22-30	e
1	13-29	f

Implicantes primarios

- **Definición:** Dadas dos funciones “f” y “g” con las mismas variables se dice que “f” incluye a “g” (se representa como “f” > “g”) si para cualquier carácter del alfabeto de entrada cuando “g” sea uno, “f” también sea uno.
- Es decir, si la tabla verdad de “f” tiene al menos todos los “1” de la tabla verdad de “g”.
- Una función lógica se puede expresar como una suma de minterminos; en caso de que dos minterminos formen una adyacencia de primer orden las expresiones de los dos minterminos se transformarían en una única expresión (de una variable menos). Así seguiríamos sucesivamente hasta llegar a las adyacencias de mayor orden posible.
- Todas estas expresiones (minterminos, adyacencias de 1^{er} orden adyacencias de 2^o orden, etc.) se llaman implicantes ya que el que una de ellas valga uno, implica que la función lógica valga también uno (independientemente del valor del resto de términos).
- Cuando tenemos una adyacencia (implicante) que ya no puede ser incluida en otra de orden superior decimos que tenemos un implicante primario.
- La lista de adyacencias obtenida en el apartado anterior está formada por los implicantes primarios de la función lógica del ejemplo.
- **Teorema:** Cualquier realización mínima en la forma de suma de productos ha de incluir sólo implicantes primarios.

Tabla de implicantes

- Según el teorema anterior cualquier realización mínima ha de estar formada sólo por implicantes primarios. Sin embargo cualquier realización que incluya sólo implicantes primarios no quiere decir que sea mínima.
- A partir de la siguiente tabla se eliminan los implicantes primarios no necesarios y quedan los implicantes primarios esenciales.
- En las filas se colocan los implicantes primarios encontrados y en las columnas los minterminos de la función.
- En las intersecciones se coloca una “x” en caso de que el implicante contenga al mintermino en cuestión.
- En primer lugar se obtienen los implicantes primarios esenciales examinando la tabla por columnas. Aquella columna que tenga una única “x” convertirá al implicante que la contenga en esencial.
- En este caso se obtienen los implicantes primarios esenciales son { a, d, e, f }
- En segundo lugar, una vez determinados los implicantes primarios esenciales marcamos (✓) los minterminos cubiertos por ellos así como los implicantes primarios esenciales.
- En este caso quedan todos los minterminos marcados excepto { 3, 11 }

Tabla de implicantes

	✓ 0	✓ 2		✓ 5	✓ 7	✓ 8	✓ 10		✓ 13	✓ 15	✓ 22	✓ 29	✓ 30
✓ a				x	x				x	x			
b			x		x			x		x			
c		x	x				x	x					
✓ d	x	x				x	x						
✓ e											x		x
✓ f									x			x	

Tabla de implicantes

- En tercer lugar hay que escoger implicantes primarios que cubran los minterminos no cubiertos. Este paso suele ser sencillo y normalmente puede hacerse por simple inspección.
- En este caso cualquiera de los dos implicantes b y c cubre los minterminos por cubrir (3 y 11) por lo que dado que ambos son del mismo costo (mismo número de entradas) elegiremos cualquiera de los dos indistintamente.
- Se tiene por tanto que la función lógica simplificada puede expresarse de la siguiente forma:
- $F = a + b + d + e + f$ ó $F = a + c + d + e + f$
- donde a, b, c, d, e, f son (en función de las variables lógicas x,y,z,u,v)

	<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z</u>	<u>u</u>	<u>v</u>						
a	=	0	-	1	-	1	=	x'	z	v	
b	=	0	-	-	1	1	=	x'	u	v	
c	=	0	-	0	1	-	=	x'	z'	u	
d	=	0	-	0	-	0	=	x'	z'	v'	
e	=	1	-	1	1	0	=	x	z	u	v'
f	=	-	1	1	0	1	=	y	z	u'	v

Tabla de implicantes reducida

- En caso de que el paso anterior no se pueda resolver a simple vista hay que construir una nueva tabla denominada tabla de implicantes reducida.
- En ella sólo representaremos los minterminos no cubiertos y los implicantes primarios no esenciales.
- Por ejemplo supongamos que tenemos la siguiente tabla de implicantes obtenida de la función lógica:
 - $F(x, y, z, u, v) = \Sigma(0, 1, 4, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 20, 21, 25, 27, 28, 29, 31)$

Tabla de implicantes reducida

[illegible]

Implicantes reducidos

- La tabla de implicantes reducida quedaría como sigue:

	1	12	13
c		x	x
d			x
f		x	
h	x		
i	x		

Implicantes reducidos

- El procedimiento para obtener los implicantes primarios que cubran los minterminos pendientes es el de ir eliminando filas basándonos en los conceptos de equivalencia y dominancia.
- Definición: Decimos que dos filas de una tabla de implicantes reducida son equivalentes si cubren los mismos minterminos (tienen las mismas marcas).
- Definición: Decimos que una fila de una tabla de implicantes reducida domina a otra si cubre todos sus minterminos y algunos más.
- En este último ejemplo las filas h e i son equivalentes ya que ambas cubren únicamente al mismo mintermino (el 1). Si volvemos a la tabla de implicantes de la que proceden vemos que además ambos implicantes primarios son del mismo costo (mismo número de compuertas), por lo que escogeremos cualquiera de ellos.
- Por otro lado vemos que el implicante primario d está dominado por el c, por lo que el d puede descartarse.
- Igualmente el implicante f está también dominado por el c, por lo que para cubrir los minterminos 12 y 13 utilizamos el implicante primario dominante c.
- Las dos posibles combinaciones de implicantes primarios no esenciales para cubrir los minterminos no cubiertos 1, 12 y 13 son entonces $c + h$ ó $c + i$.

