Introducción: Álgebra de Boole

Fundamento de Diseño Digital

Algebra de Boole binaria

En 1860 George Boole desarrolló un Algebra en la que los valores de A y B sólo podían ser "verdadero" o "falso" (1 ó 0). Se llama *Algebra de Boole* y se utiliza en Electrónica Digital

Elementos: {0,1}

Operadores:

Suma Booleana: es la función lógica OR

$$X=A+B$$

Producto Booleano: es la función lógica AND

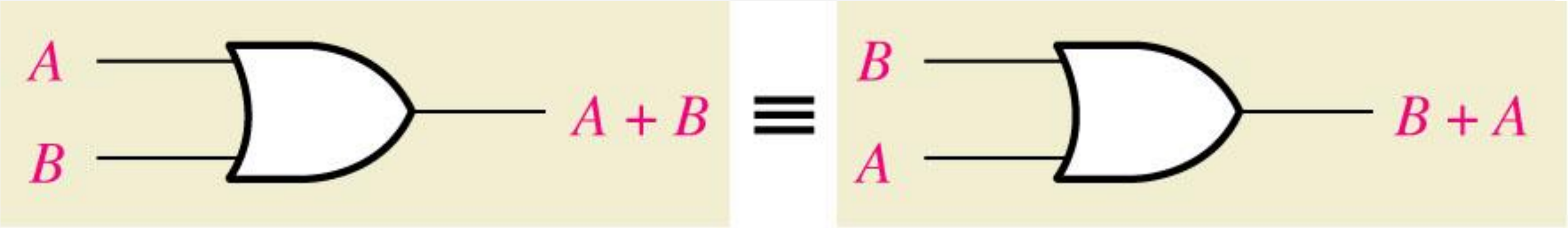
$$X = AB$$

Axiomas

Axioma: Propiedad Conmutativa

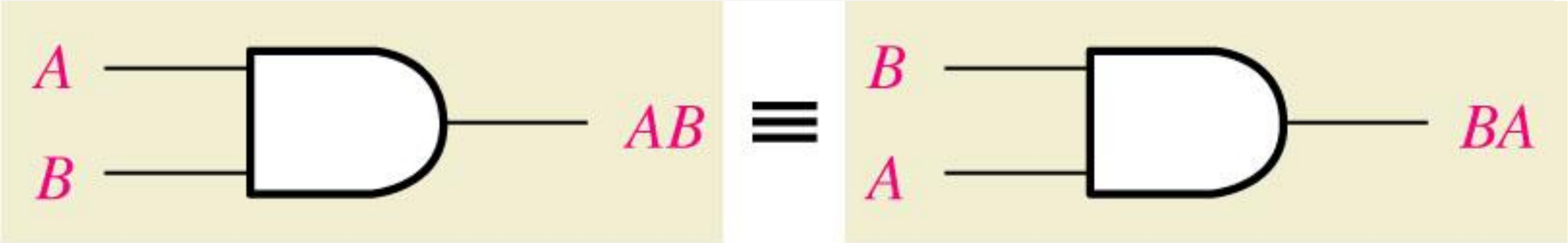
A+B = B+A

El orden en la OR no importa



AB = BA

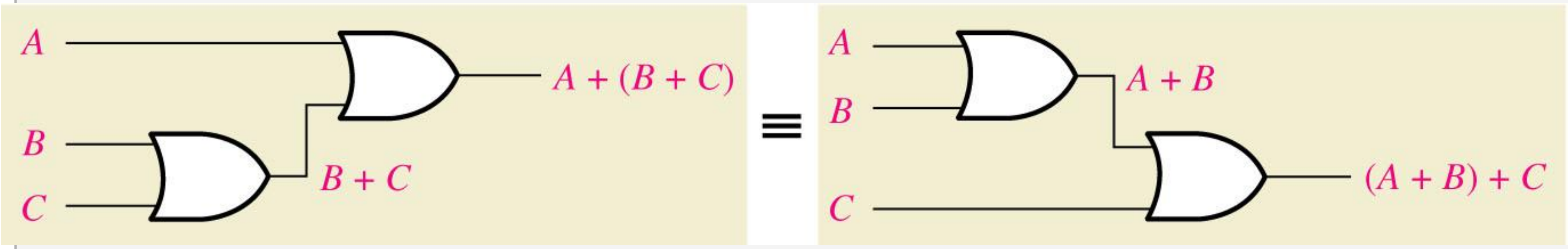
El orden en la AND no importa



Axioma: Propiedad asociativa

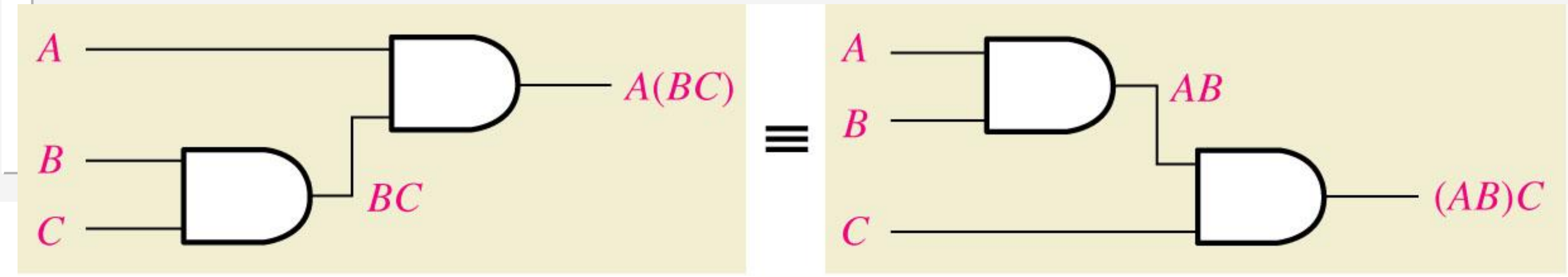
A + (B + C) = (A + B) + C

Agrupar variables en la OR no importa



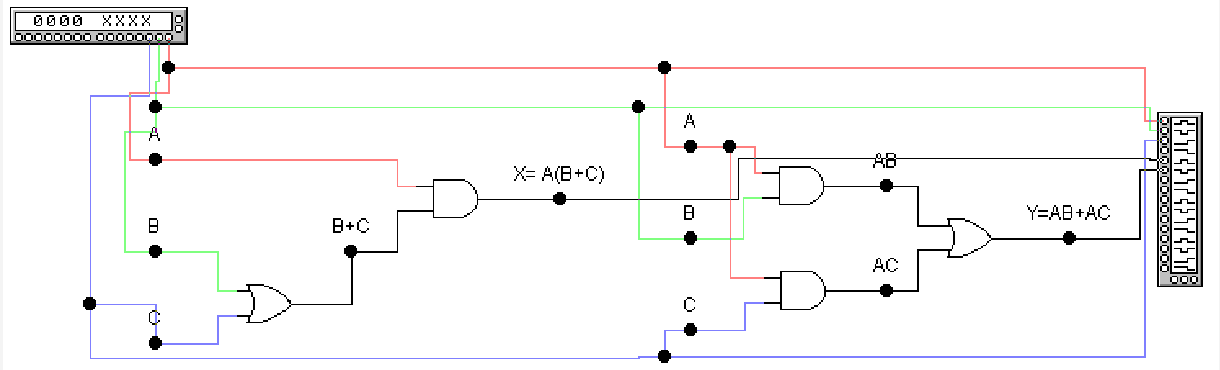
A (B C) = (A B) C

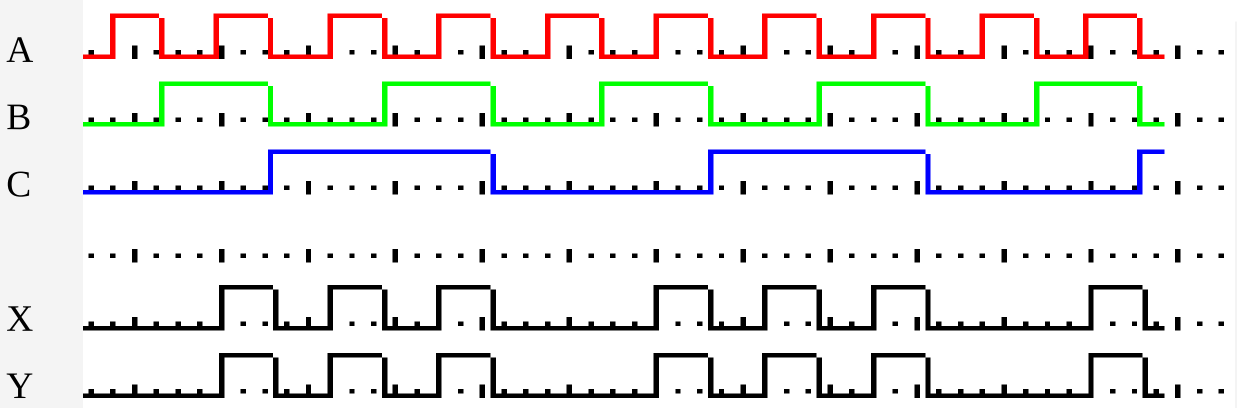
Agrupar variables en la AND no importa



Axioma: Propiedad distributiva I

$$A(B + C) = AB + AC$$

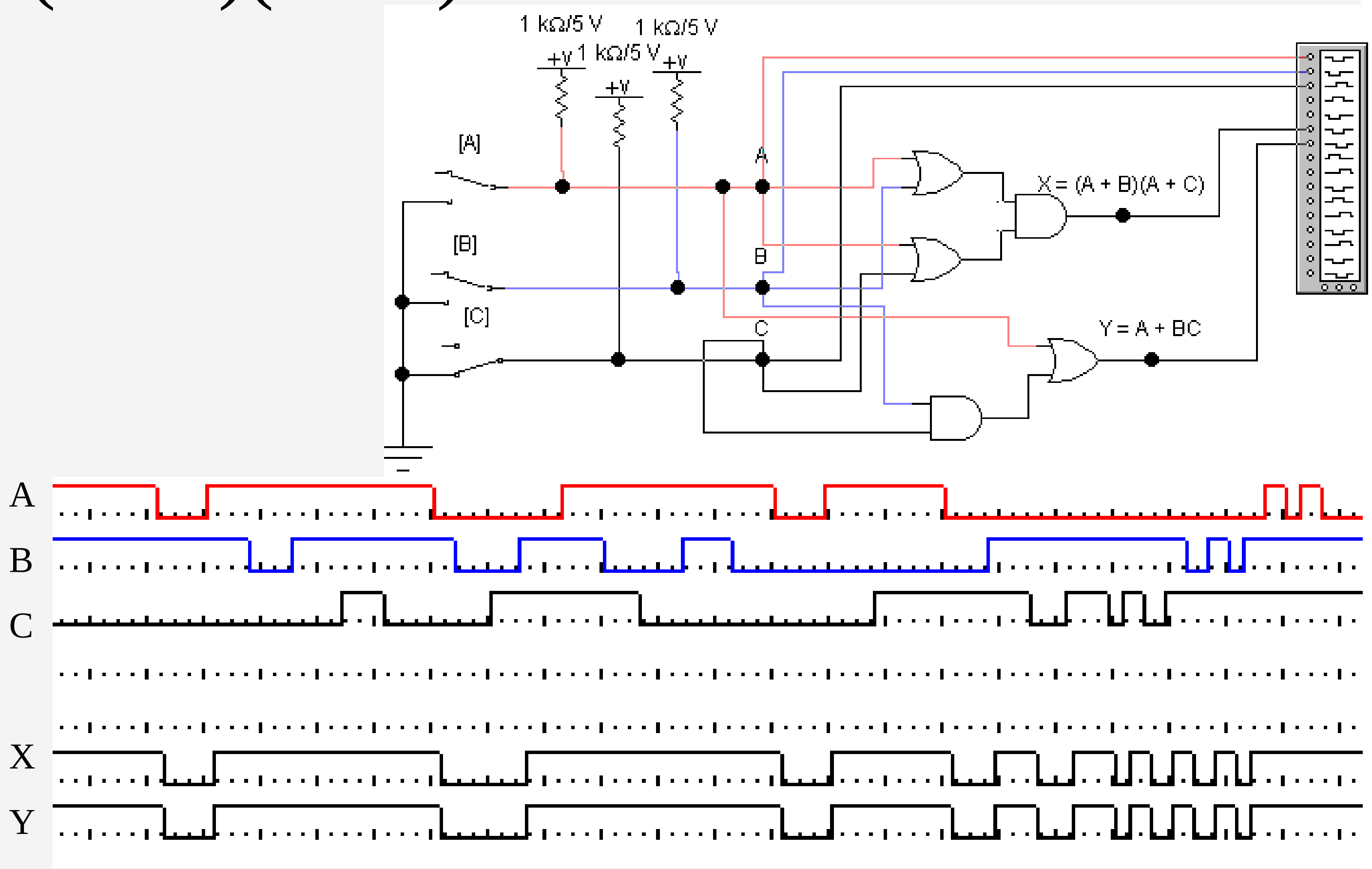




X=Y

Axioma: Propiedad distributiva II

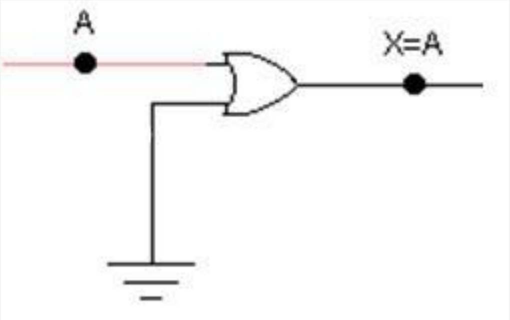
$$A+BC = (A+B)(A+C)$$

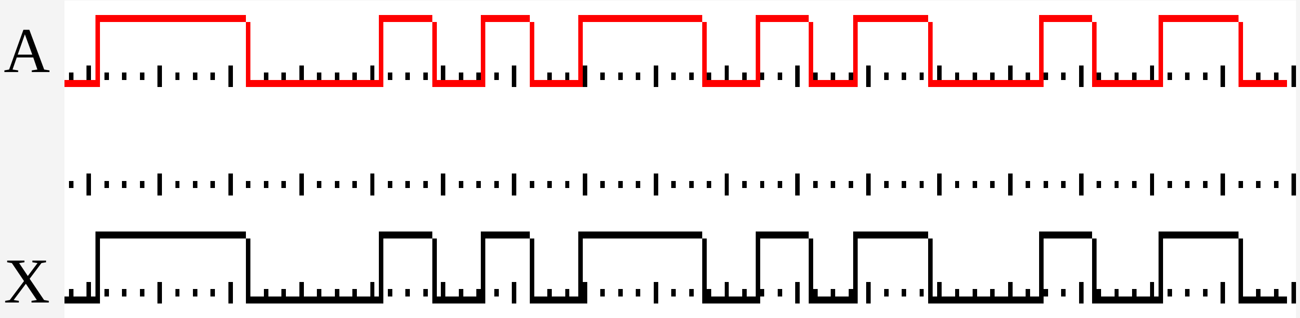


Axioma: Elemento identidad (0 para +)

A+0=A

Hacer una operación OR con 0 no cambia nada.



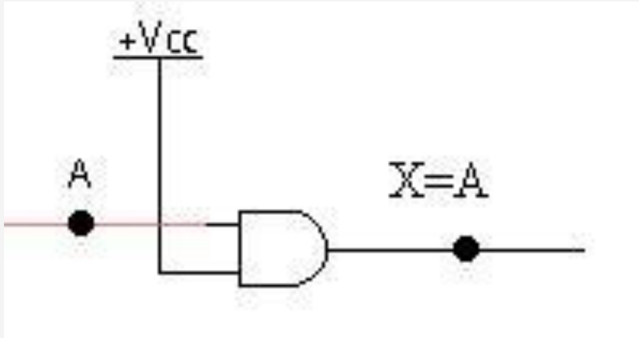


X=A

Axioma: Elemento identidad (1 para •)

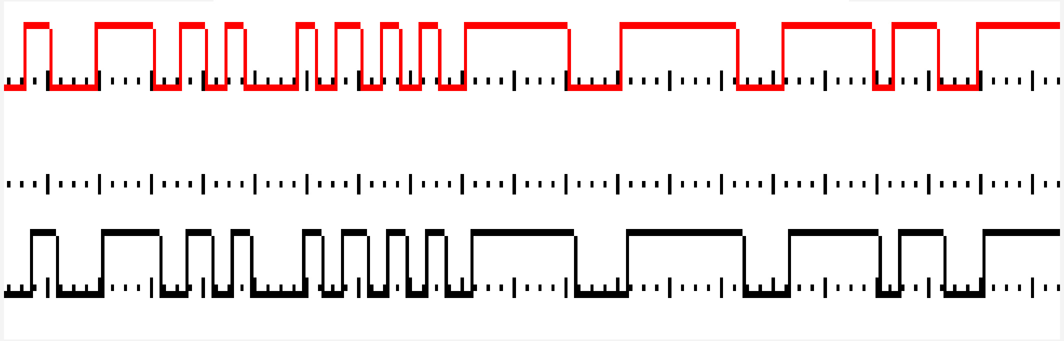
A·1=A

Hacer una operación AND con 1 no cambia nada



A

X

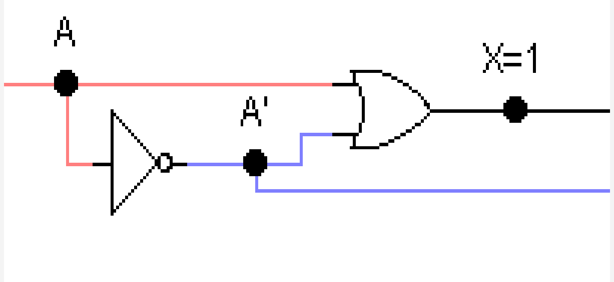


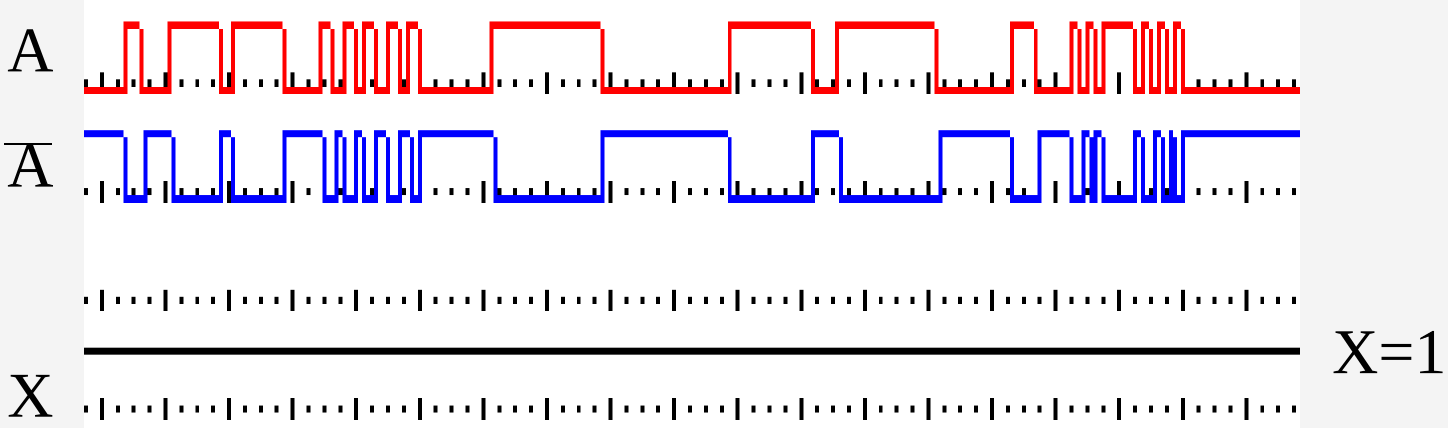
X=A

Axioma: Elemento complemento

$$\mathbf{A+\overline{A}=1}$$

O bien A o $\overline{A}$ serán 1, luego la salida será 1

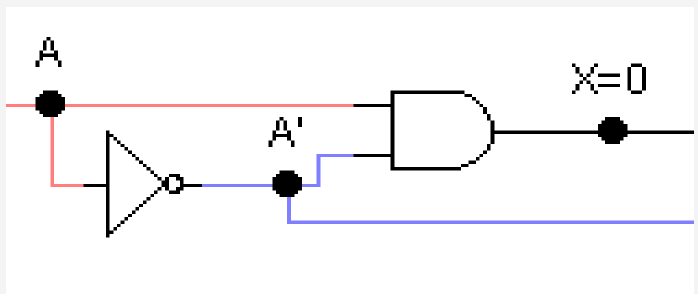


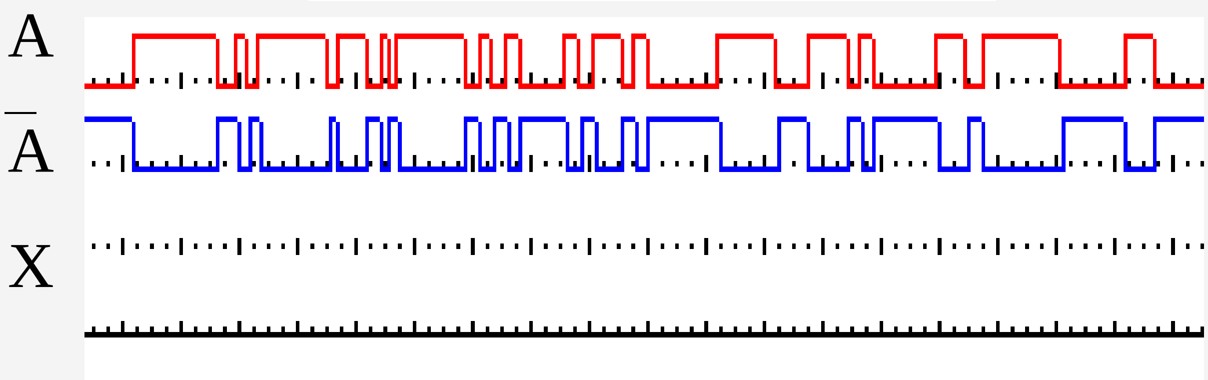


Axioma: Elemento complemento

$$\mathbf{A\cdot\overline{A}=0}$$

Bien A o $\overline{A}$ son 0 luego la salida será 0.

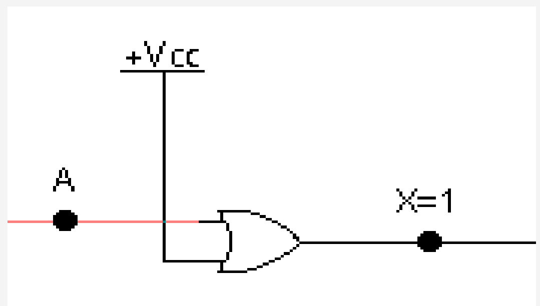


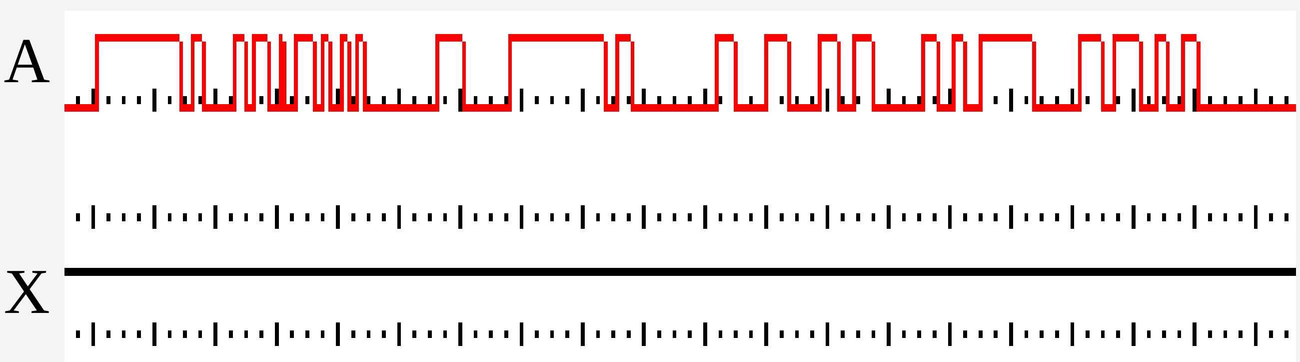


X=0

Teorema: A+1=1 (T. Complementación)

Hacer una operación OR con 1 da siempre 1.

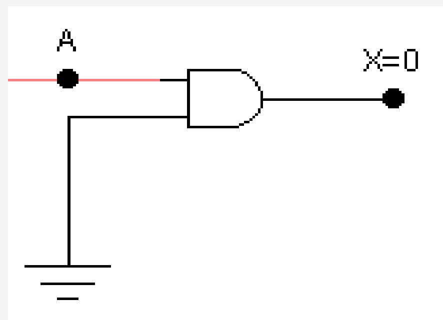




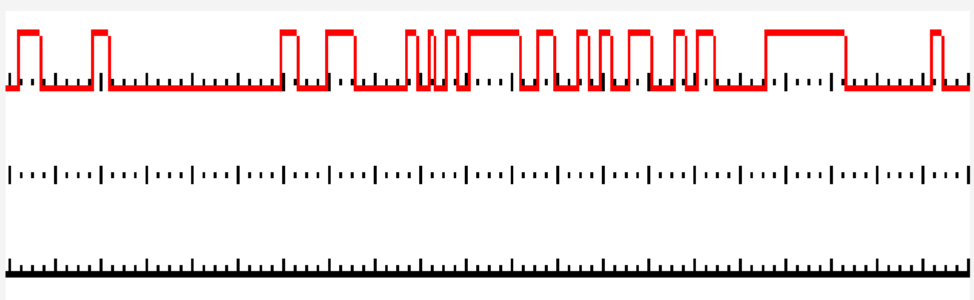
X=1

Teorema: A•0=0 (T. Complementación)

Hacer una operación AND con 0 siempre da 0



A

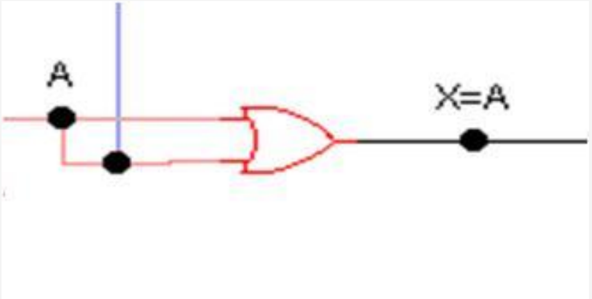


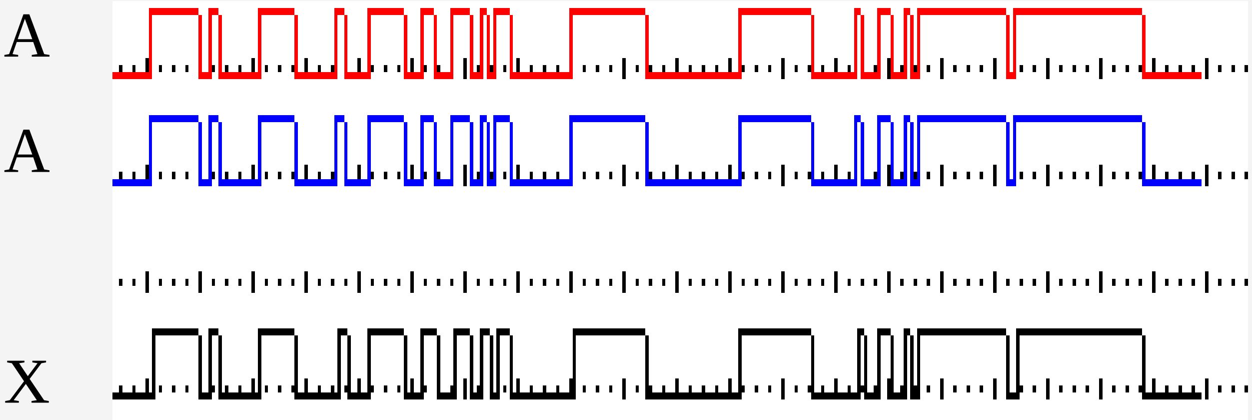
X

X=0

Teorema: A+A = A (T. Idempotencia)

Hacer una operación OR consigo mismo da el mismo resultado

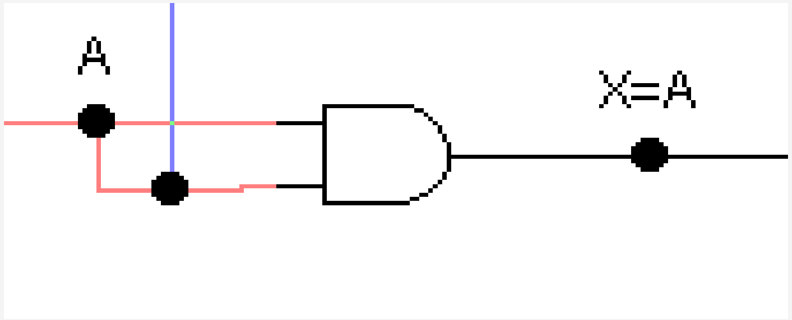


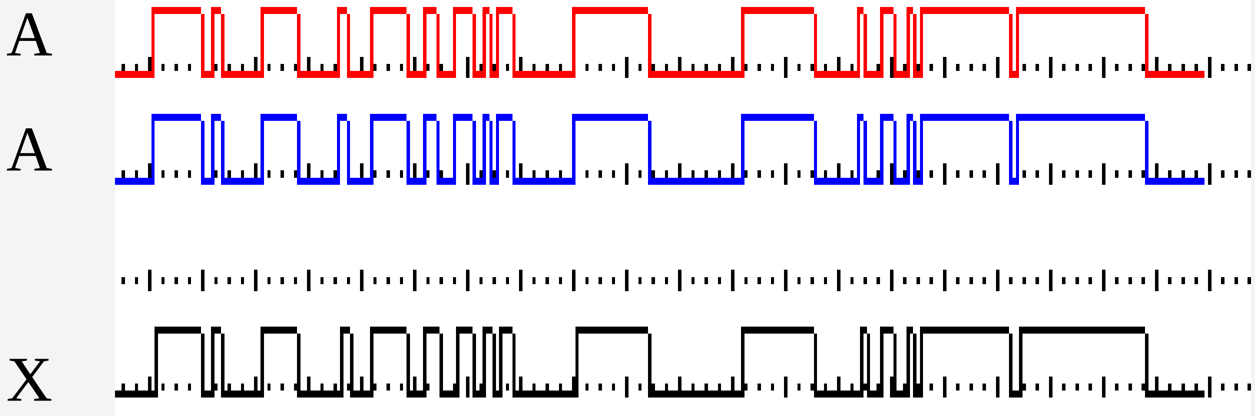


A=A

Teorema: A•A = A (T. Idempotencia)

Hacer una operación AND consigo mismo da el mismo resultado

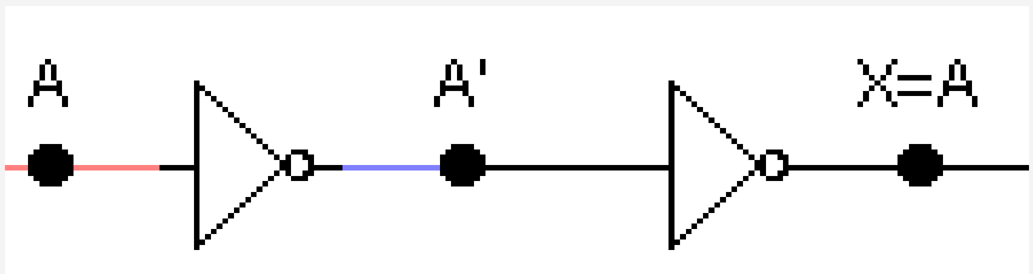




A=A

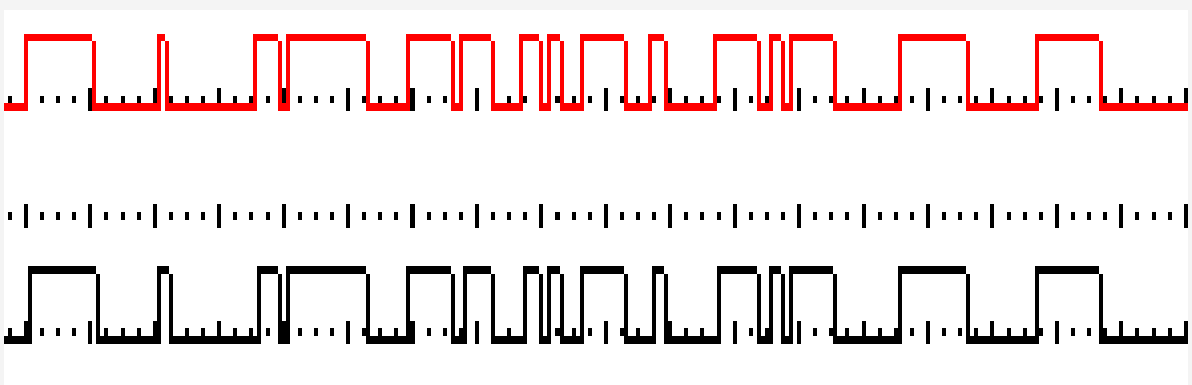
Teorema: $\overline{\overline{A}} = A$ (T. Involución)

Si negamos algo dos veces volvemos al principio



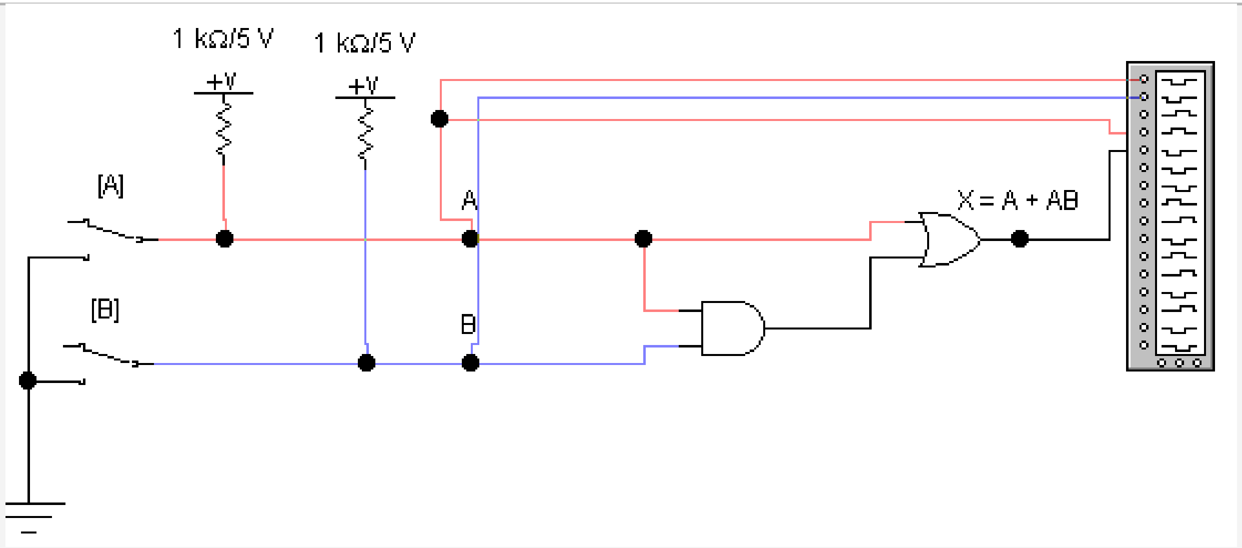
A

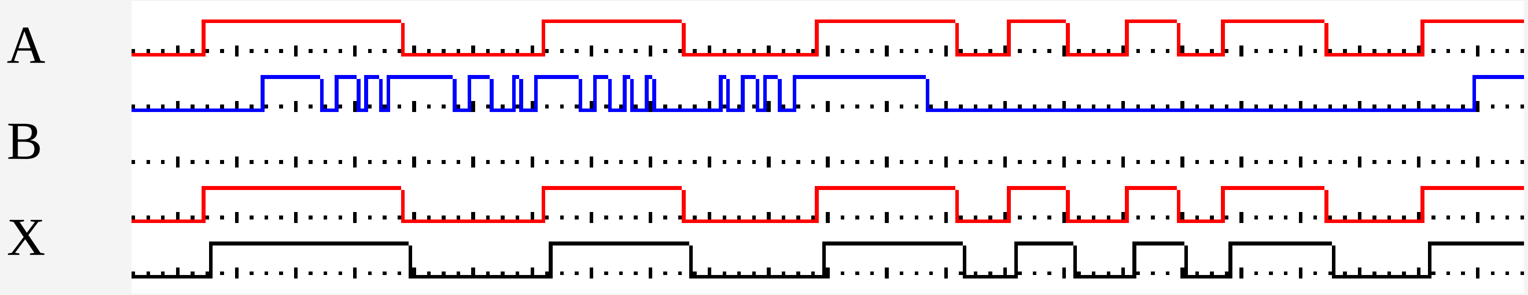
X



X=A

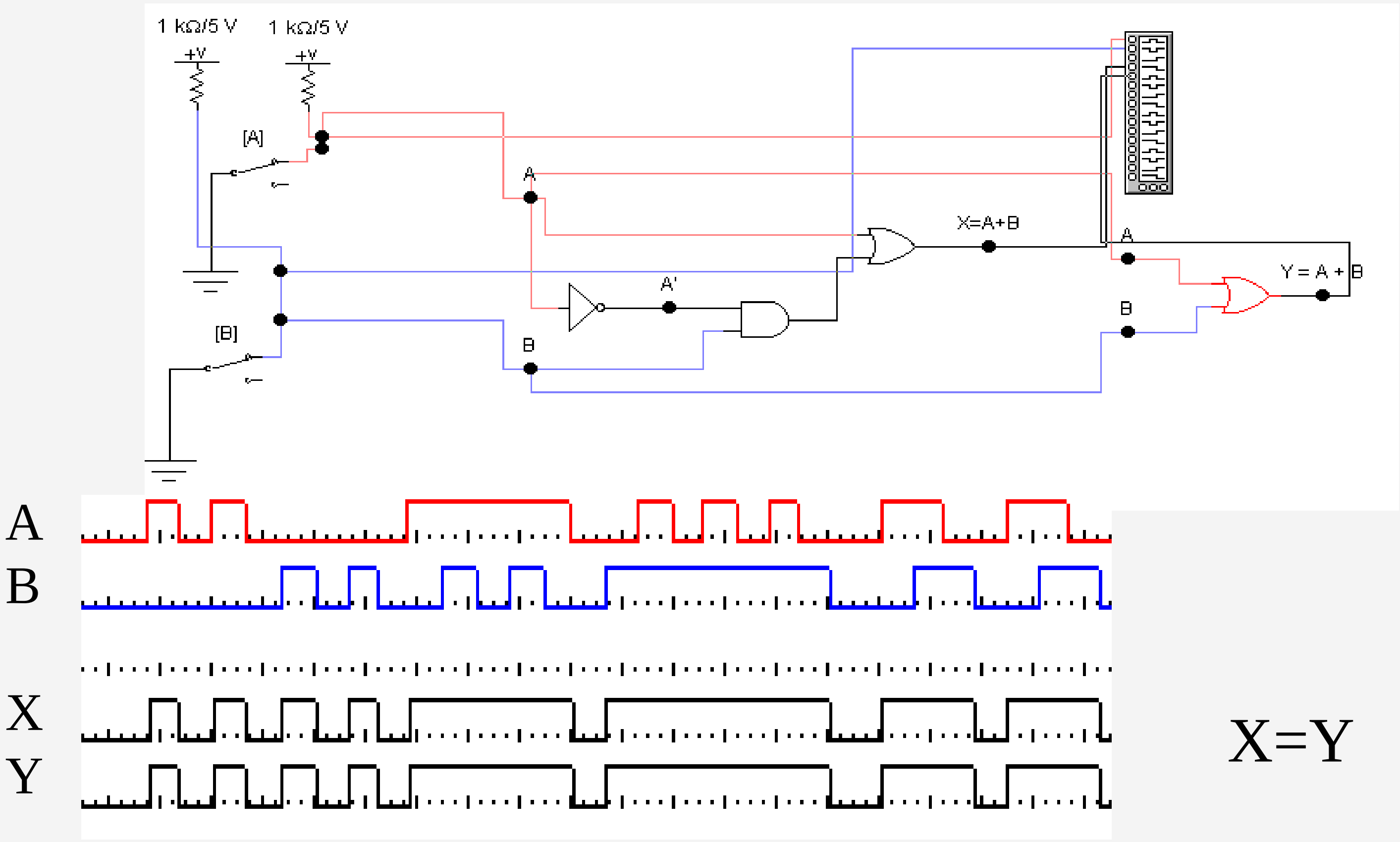
Teorema: A + AB = A (T. Absorción I)





Teorema $A + \overline{A}B = A + B$ (T. Absorción II)

Si A es 1 la salida es 1 Si A es 0 la salida es B



X=Y

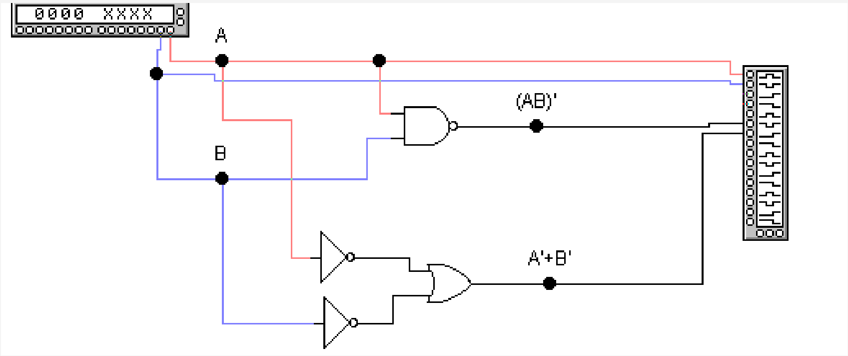
Leyes de De Morgan (2 variables)

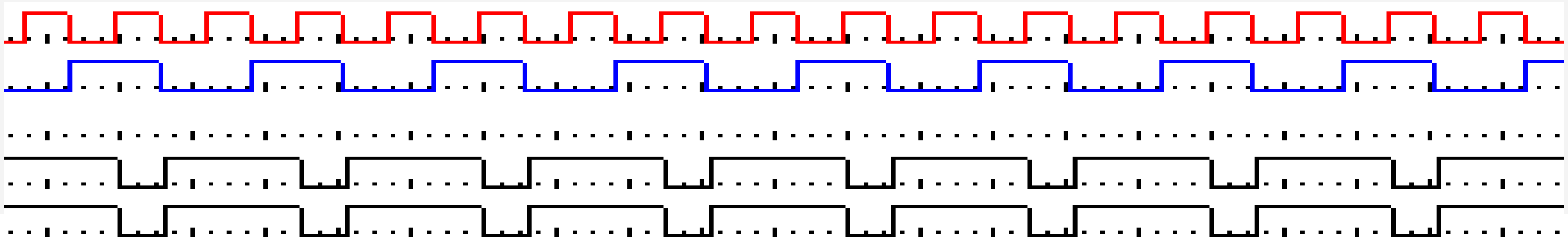
De Morgan ayuda a simplificar circuitos digitales usando NORs y NANDs.

$$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

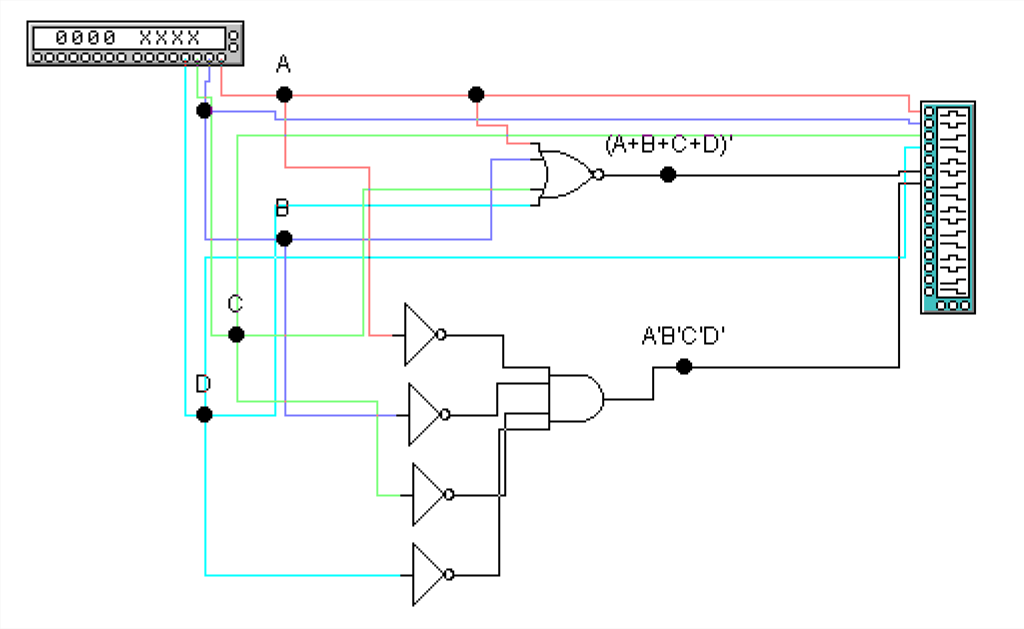
Igual para n variables

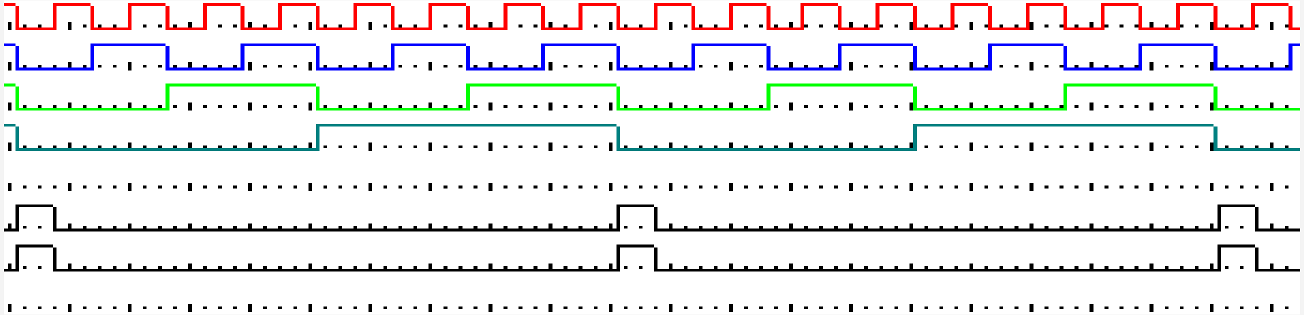




Leyes de De Morgan (más de 2 variables)

$$\overline{A + B + C + D} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{D}$$

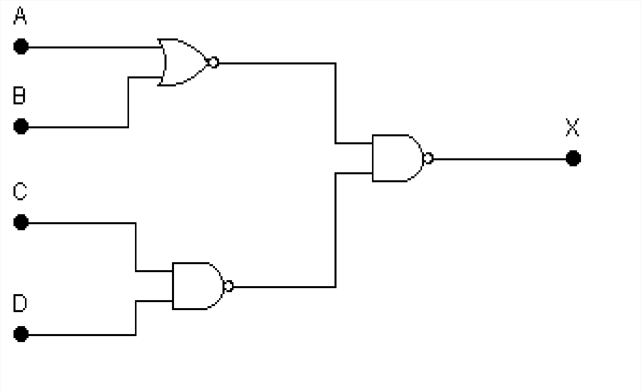


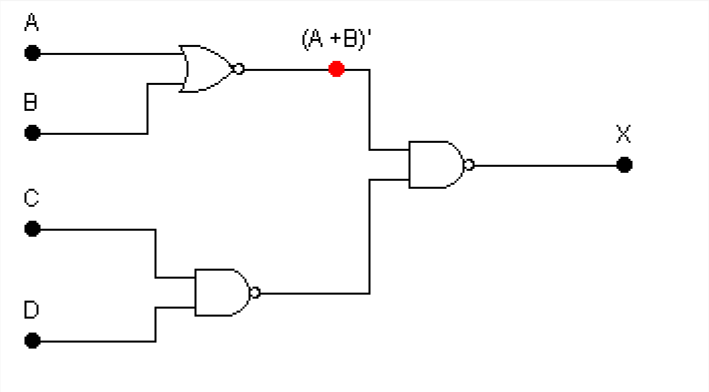


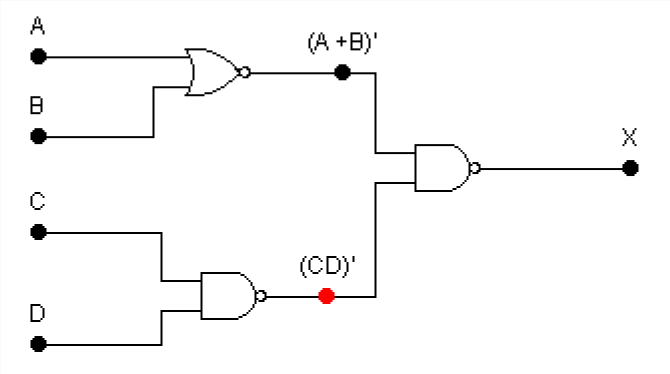
Análisis Booleano de Funciones Lógicas

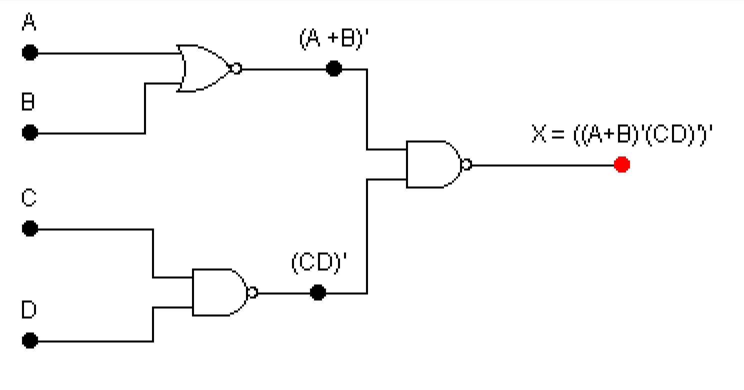
- El propósito de este apartado es obtener expresiones booleanas simplificadas a partir de un circuito
- Se examina puerta a puerta a partir de sus entradas
- Se simplifica usando las leyes y propiedades booleanas.

Cálculo de la expresión algebraica de salida (ejemplo 1)

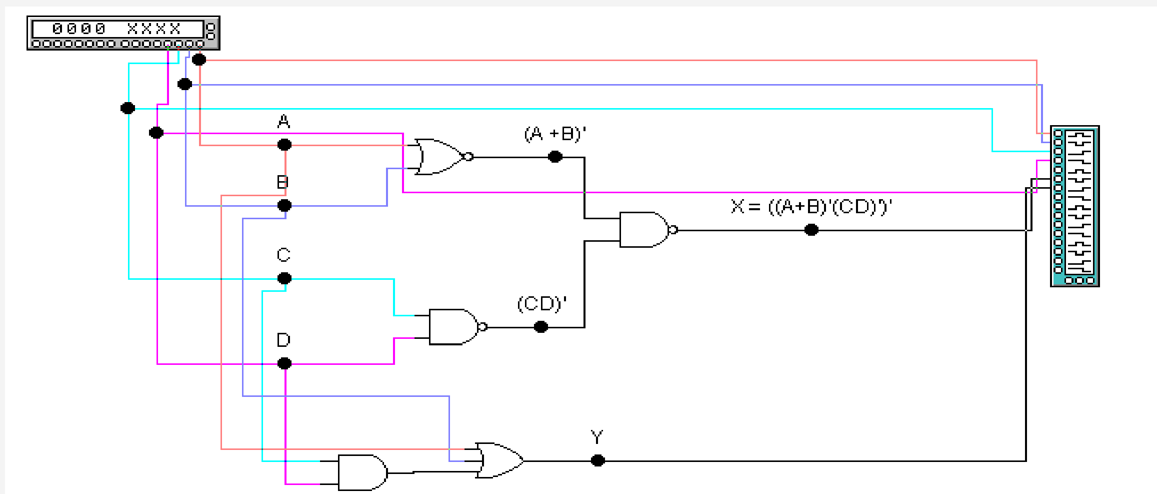


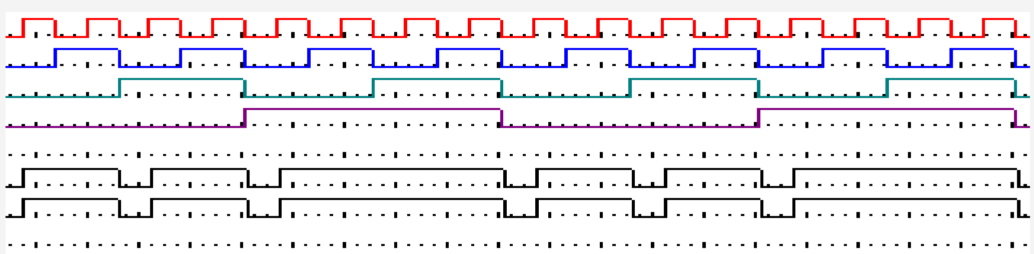






$$\overline{\overline{(A + B)}\ \overline{(CD)}} = \overline{\overline{(A + B)}} + \overline{\overline{(CD)}} = A + B + CD$$





X e Y son iguales

Cálculo de la expresión algebraica de salida (ejemplo 2)

$$X = \overline{\overline{\overline{(A+B)}\;C} + \overline{\overline{CD} + B}}$$

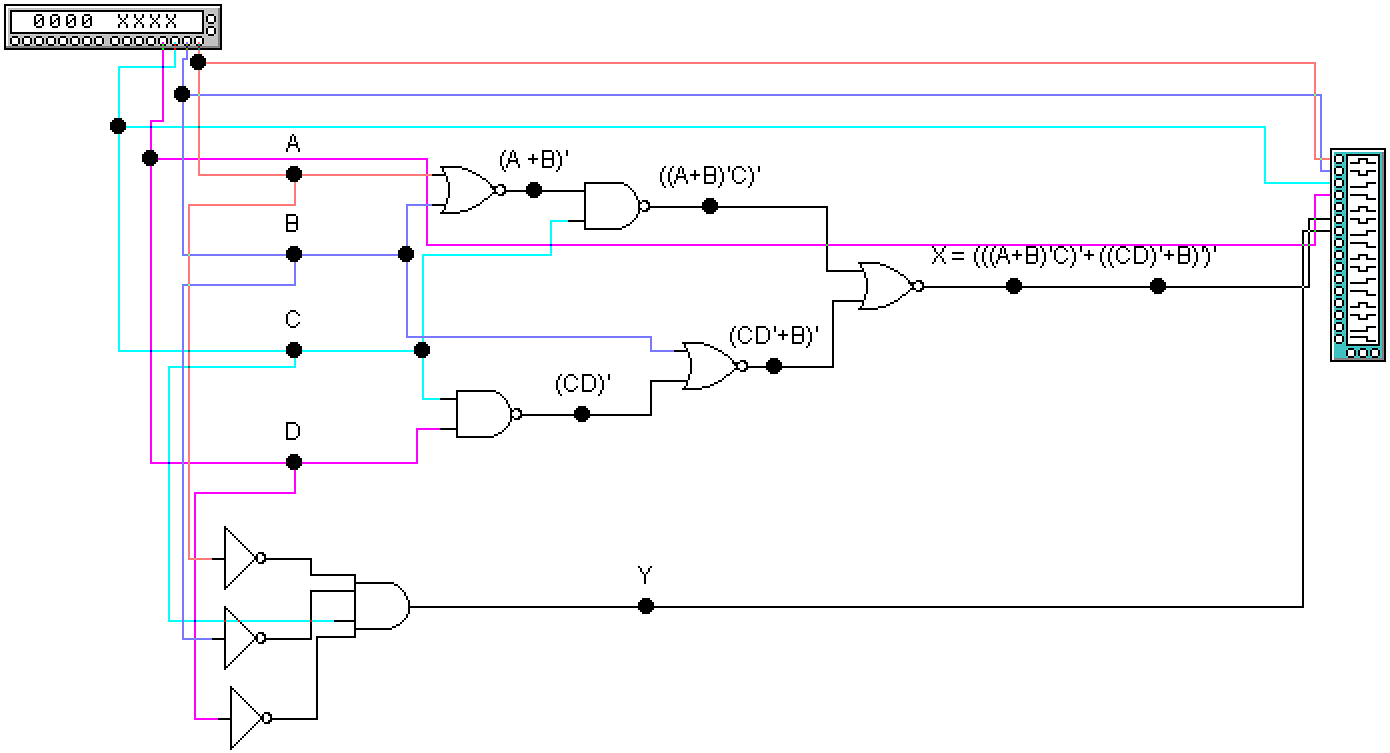
$$= \overline{\overline{\overline{(A+B)}\;C}} \cdot \overline{\overline{\overline{CD} + B}}$$

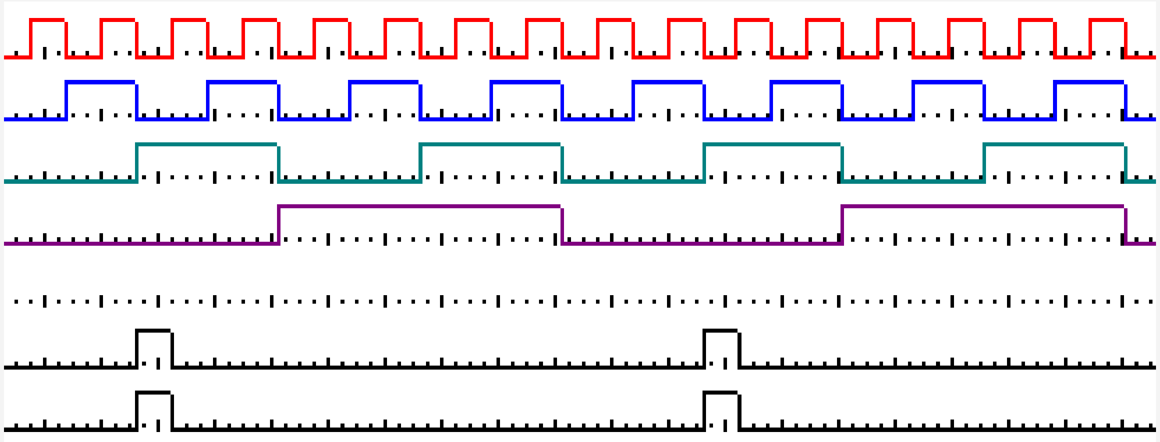
$$= \overline{(A+B)}\;C \cdot (\overline{CD} + B)$$

$$= \overline{A}\;\overline{B}\;C \cdot (\overline{C} + \overline{D} + B)$$

$$= \cancel{\overline{A}\;\overline{B}\;C\;\overline{C}} + \overline{A}\;\overline{B}\;C\;\overline{D} + \cancel{\overline{A}\;\overline{B}\;C\;B}$$

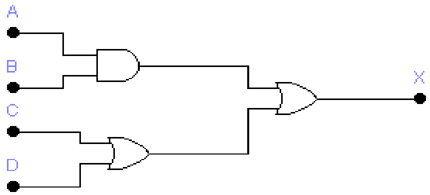
$$= \overline{A}\;\overline{B}\;C\;\overline{D}$$



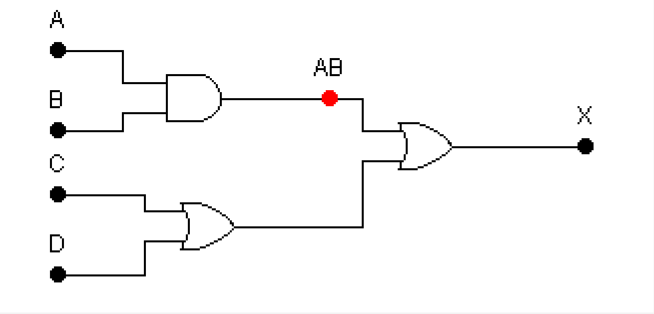


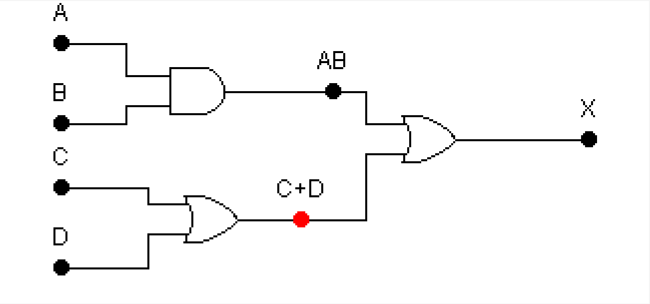
Los circuitos son iguales

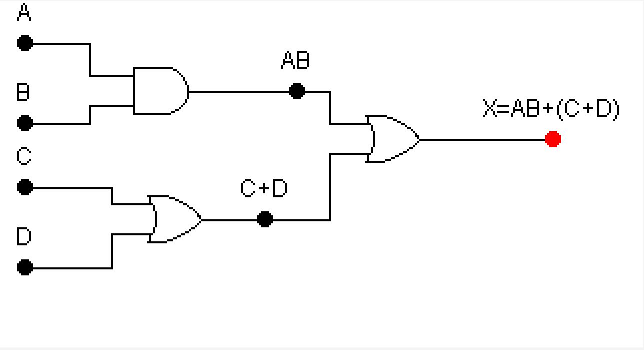
Ejemplo 3



Puerta a puerta a partir de sus entradas



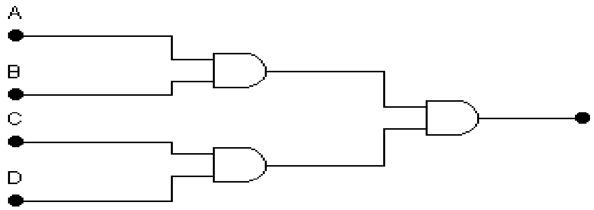


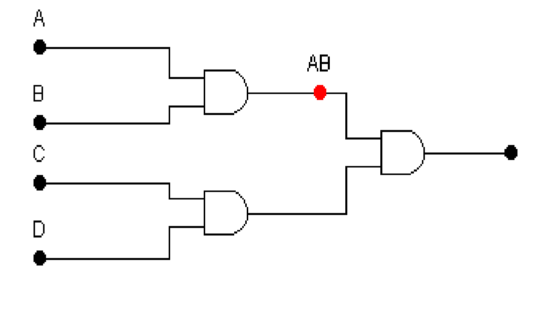


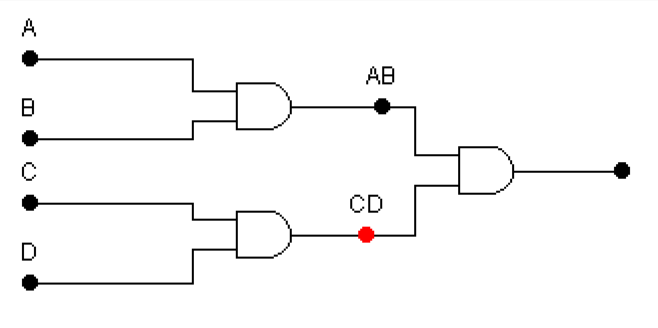
X= AB+(C+D)

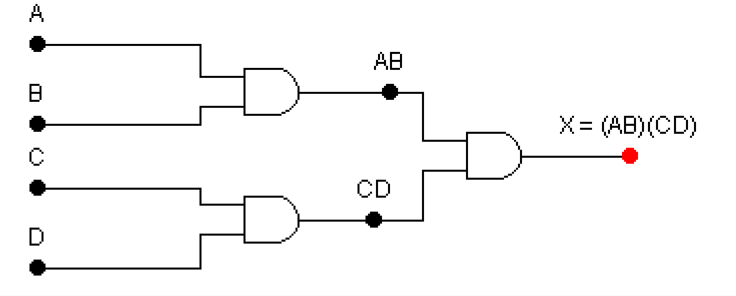
X= AB + C+ D

Ejemplo 4





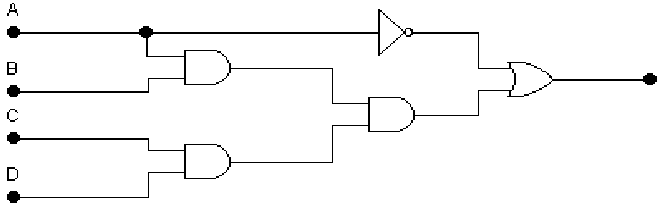


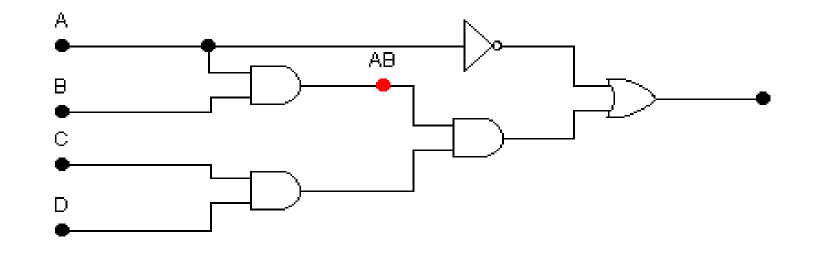


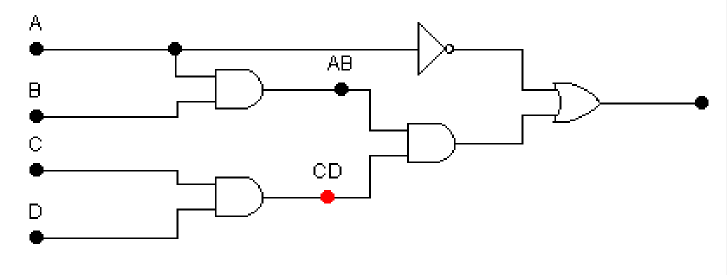
$$X = (AB)(CD)$$

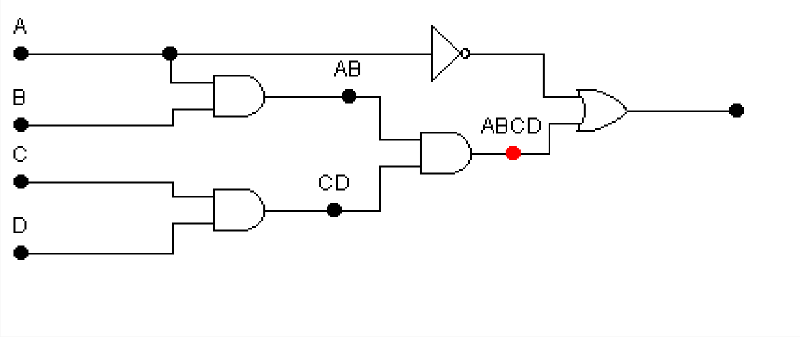
$$X = ABCD$$

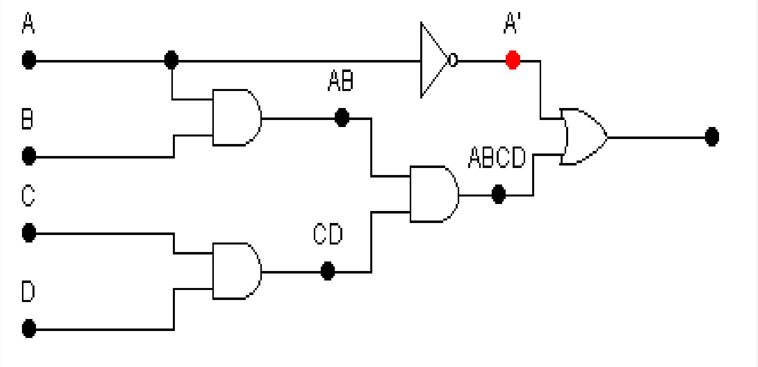
Ejemplo 5







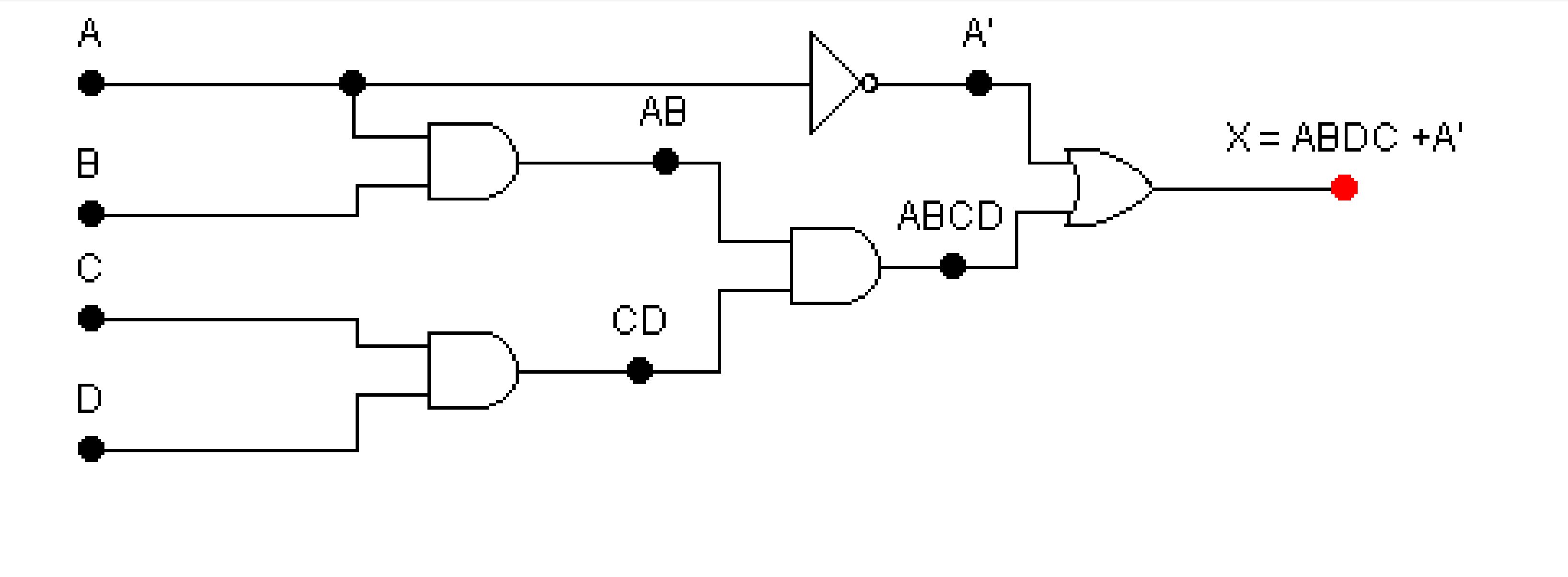




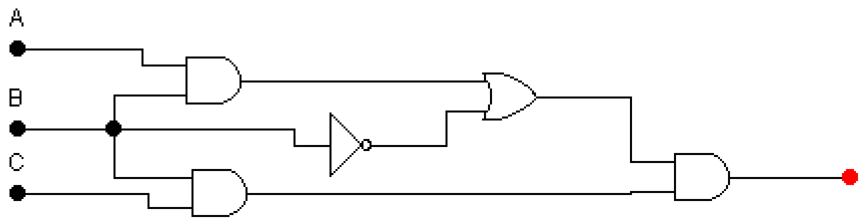
$$X = ABCD + \overline{A}$$

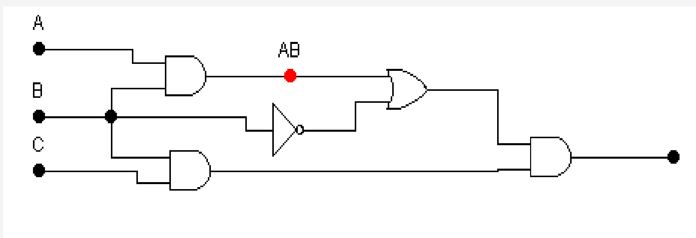
Simplificando:

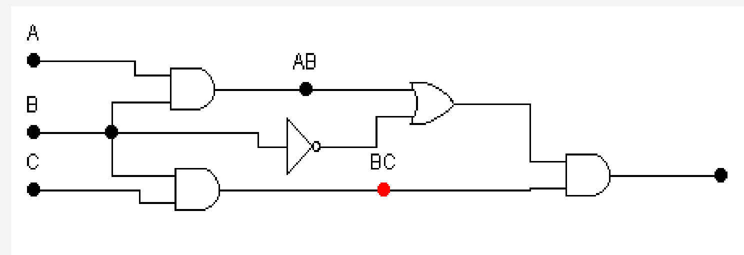
$$X = \overline{A} + BCD$$

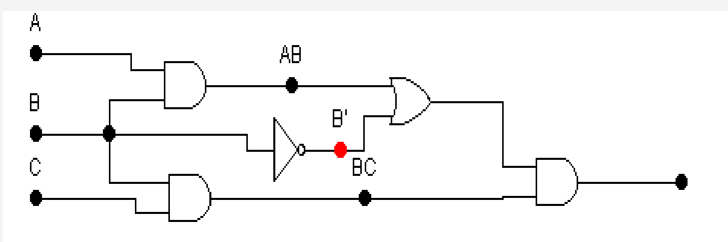


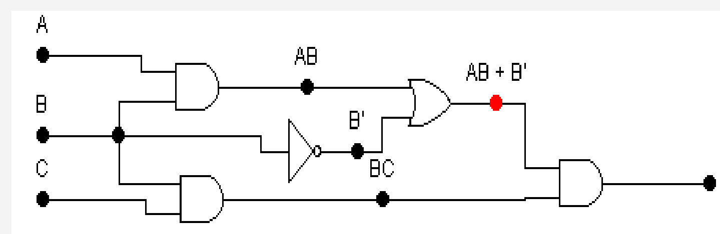
Ejemplo 6

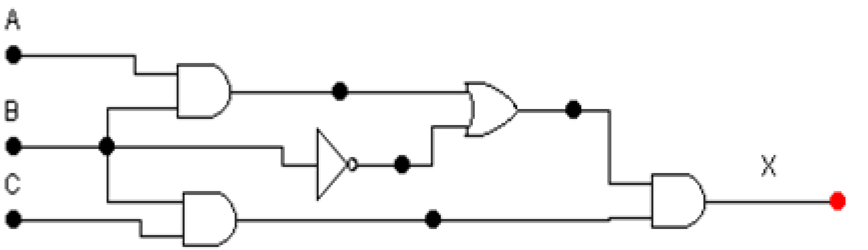






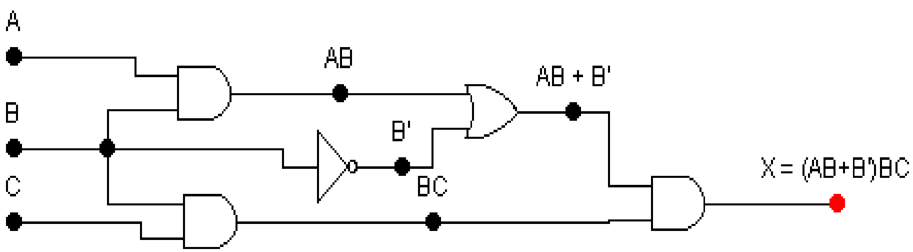






$$X = (AB+\overline{B})BC$$

Usando la propiedad distributiva:



$$X = (AB+\overline{B})BC$$

Usando la propiedad distributiva:

$$X = ABBC + \overline{B}BC$$

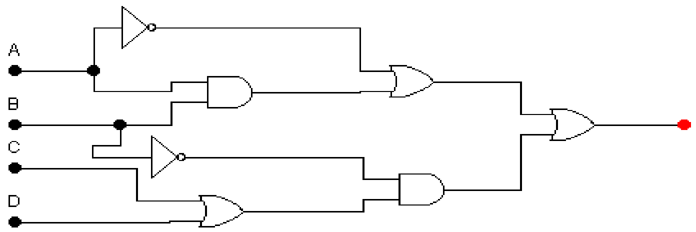
$$X = ABC + \overline{B}BC$$

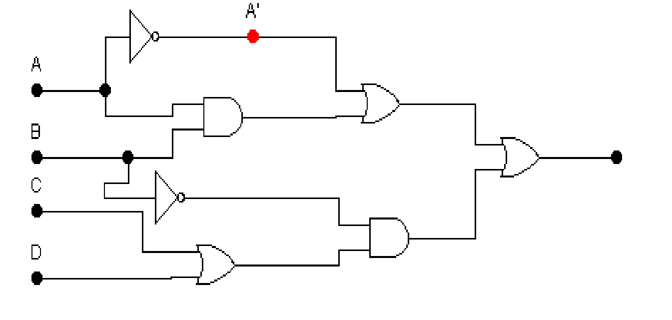
$$X = ABC + 0 \bullet C$$

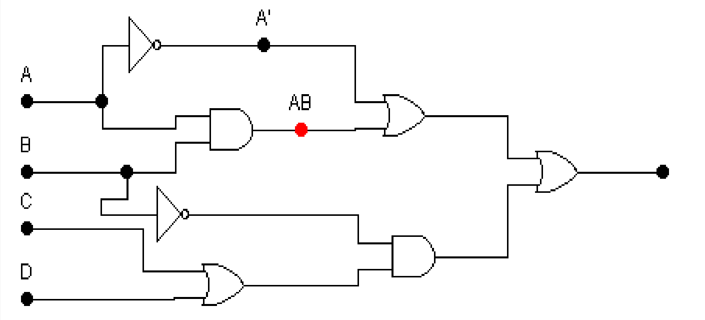
$$X = ABC + 0$$

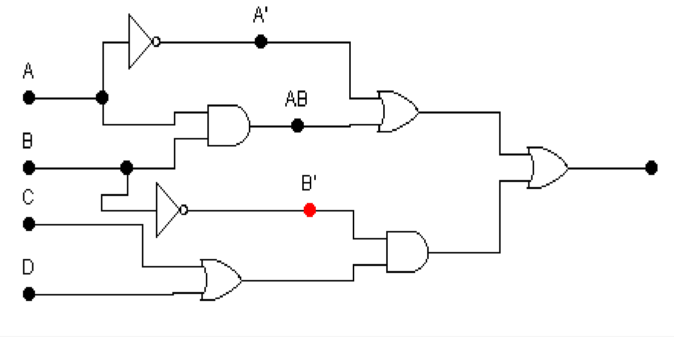
$$X = ABC$$

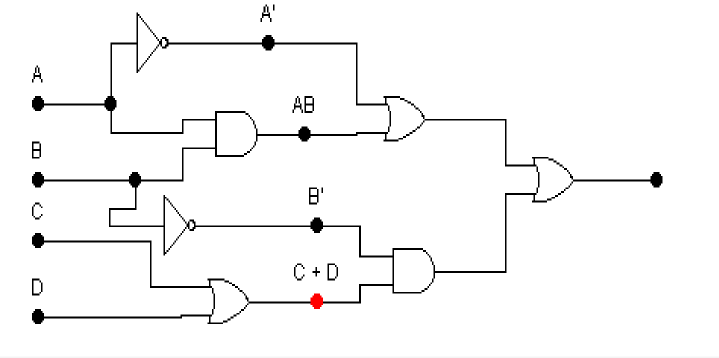
Ejemplo 7

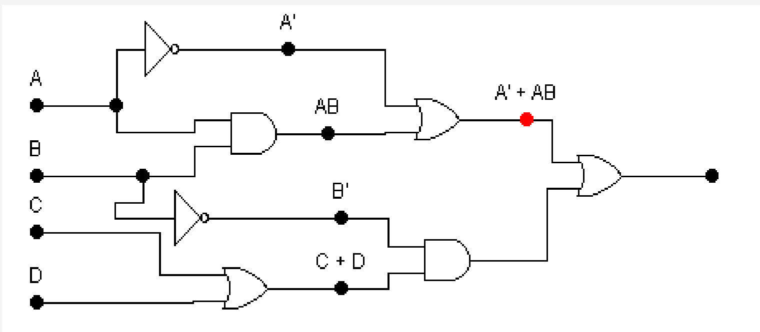


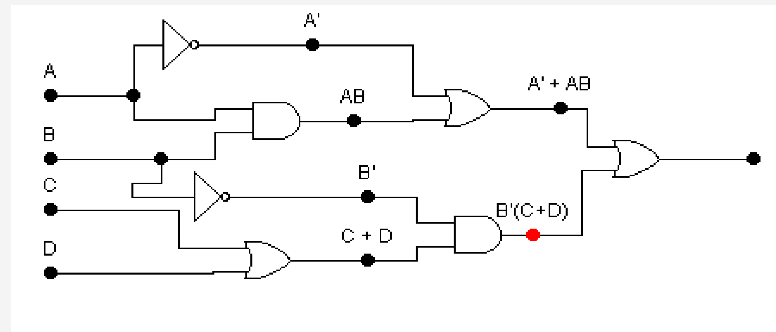


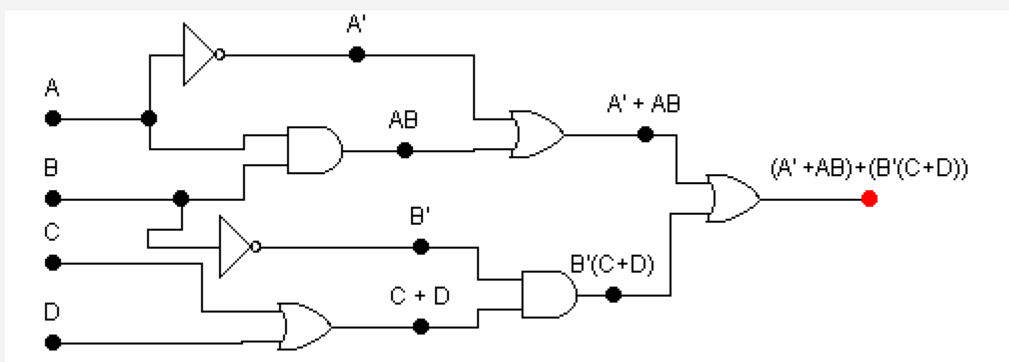







A'
A
AB
A' + AB
B
B'
C
C + D
D


A'
A
AB
A' + AB
B
B'
C
B'(C+D)
C + D
D


A'
A
AB
A' + AB
B
(A' +AB)+(B'(C+D))
C
B'
B'(C+D)
C + D
D

$$X = (\overline{A} + AB) + (B(\overline{C} + D))$$

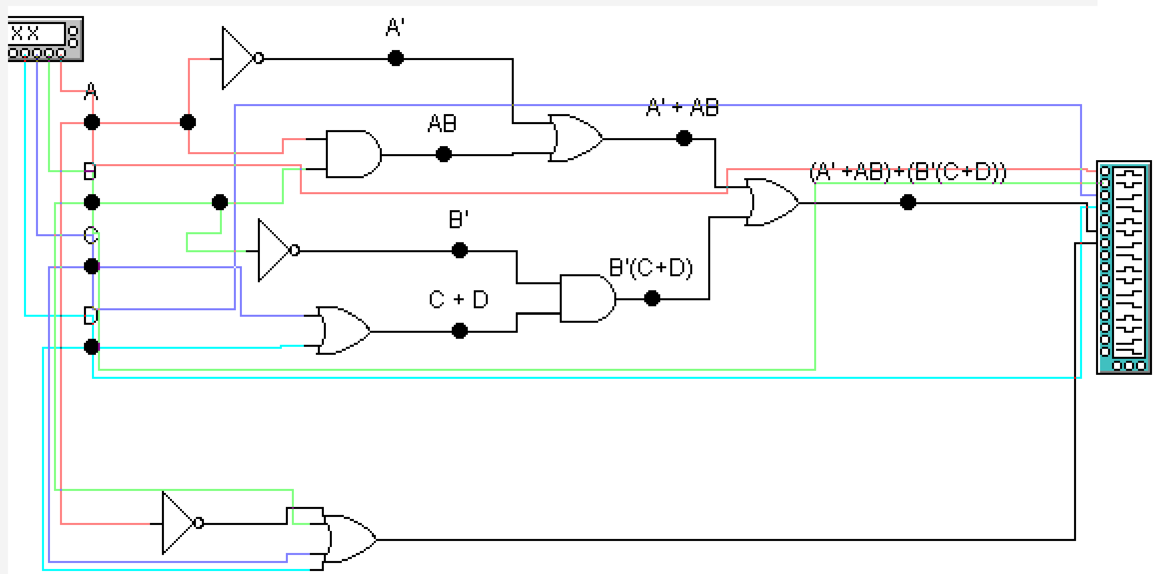
$$X = (\overline{A} + B) + (\overline{B}(C + D))$$

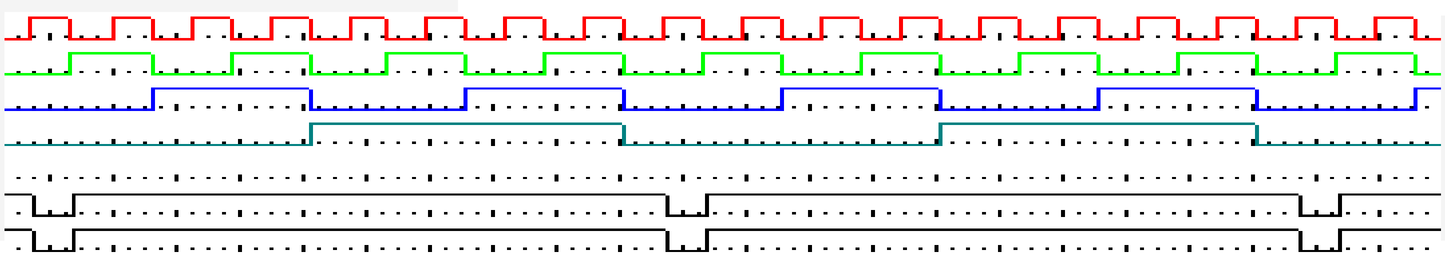
$$X = (\overline{A} + B) + (\overline{B}C + \overline{B}D)$$

$$X = \overline{A} + B + \overline{B}C + \overline{B}D$$

$$X = \overline{A} + B + C + \overline{B}D$$

$$X = \overline{A} + B + C + D$$





Expresiones booleanas desde tablas de verdad

- Un **minterm** (o **minitérmino**) es una expresión algebraica booleana de *n* variables booleanas (ej: bits) que solamente se evalúa como verdadera (1) para una única combinación de esas variables.

La notación es la siguiente: $\Sigma m(x_1,\, x_n)$

x_1	x_2	Coincidencia
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

esto es

$\Sigma m(0,\, 3)$

ya que la primera fila (0) y la última (3) tiene como valor 1 del minterm.

Expresiones booleanas desde tablas de verdad

- Es aquella constituida exclusivamente por términos canónicos productos (minterminos) sumados que
- aparecen una sola vez.
- Por ejemplo $F(X,Y,Z) = \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z + X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z} + X\cdot\overline{Y}\cdot Z + X\cdot Y\cdot\overline{Z} + X\cdot Y\cdot Z$
- De esta forma, la función:

$$F(X,Y,Z) = \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z + X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z} + X\cdot\overline{Y}\cdot Z + X\cdot Y\cdot\overline{Z} + X\cdot Y\cdot Z$$

Se puede expresar como: F(X,YZ) = Σm(1,4,5,6,7) que quiere decir la sumatoria de los min términos 1,4,5,6,7.

X	Y	Z	$F = X + \overline{Y}\cdot Z$	Mintermino
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\leftarrow \overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z = m_1$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\leftarrow X\cdot\overline{Y}\cdot\overline{Z} = m_4$
1	0	1	1	$\leftarrow X\cdot\overline{Y}\cdot Z = m_5$
1	1	0	1	$\leftarrow X\cdot Y\cdot\overline{Z} = m_6$
1	1	1	1	$\leftarrow X\cdot Y\cdot Z = m_7$

Expresiones booleanas desde tablas de verdad

Suma de productos

$Y = A \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{C} \cdot D$ o directamente

$Y = A\overline{B}C + B\overline{C}D + A\overline{C}D$

Producto de sumas

$Y = (A+B+C) \cdot (D+C) \cdot (E+F)$

Sumas de Productos (SP)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Sea una función F(ABCD) que sólo es 1 para los casos:
`0011, 1011, 1110, 1111`

Cuando ABCD=0011, únicamente la expresión producto $\overline{A}\,\overline{B}CD$ es 1.

Cuando ABCD=1011, únicamente la expresión producto $A\overline{B}CD$ es 1

…y así sucesivamente… resultando que

$F= \overline{A}\,\overline{B}CD + A\overline{B}CD + ABC\overline{D} + ABCD \Rightarrow$ F es suma de productos

Productos de Sumas (PS) Maxiterminos

- Es aquella constituida exclusivamente por términos canónicos sumas (maxterminos) multiplicados que aparecen una sola vez.

Por ejemplo: $F(X,Y,Z) = (X + Y + Z) \cdot (X + Y' + Z) \cdot (X + Y' + Z')$

se puede expresar como:

$F(X,YZ) = \Pi_M(0,2,3)$ que quiere decir el producto de los maxterminos 0,2,3.

X	Y	Z	$F = X + \overline{Y} \cdot Z$	Maxtermino
0	0	0	0	$\leftarrow X + Y + Z = M_0$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$\leftarrow X + \overline{Y} + Z = M_2$
0	1	1	0	$\leftarrow X + \overline{Y} + \overline{Z} = M_3$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Productos de Sumas (PS)

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Sea una función F(ABCD) que sólo es 0 para los casos:
`0010, 0100, 0111, 1010, 1101`

Cuando ABCD=0010, sólo la suma $A+B+\overline{C}+D$ es 0.

Cuando ABCD=0100, sólo la suma $A+\overline{B}+C+D$ es 0, …

…y así sucesivamente…

La función F es 0 (o bien $\overline{F}$ es 1)

cuando ABCD=0010

<u>o</u> cuando ABCD=0100

<u>o</u> cuando ABCD=0111

<u>o</u> cuando ABCD=1010

<u>o</u> cuando ABCD=1101

y en ningún otro caso más.

$$\overline{F}=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BCD+A\overline{B}C\overline{D}+AB\overline{C}D$$

De Morgan

$$F=(A+B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+C+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})$$

$\Rightarrow$ F es producto de sumas

X	Y	Z	$F = X + \overline{Y} \cdot Z$	Maxtermino
0	0	0	0	$\leftarrow X + Y + Z = M_0$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$\leftarrow X + \overline{Y} + Z = M_2$
0	1	1	0	$\leftarrow X + \overline{Y} + \overline{Z} = M_3$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

X	Y	Z	$F = X + \overline{Y} \cdot Z$	Mintermino
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\leftarrow \overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z = m_1$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\leftarrow X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} = m_4$
1	0	1	1	$\leftarrow X \cdot \overline{Y} \cdot Z = m_5$
1	1	0	1	$\leftarrow X \cdot Y \cdot \overline{Z} = m_6$
1	1	1	1	$\leftarrow X \cdot Y \cdot Z = m_7$

Valor decimal	X Y Z	Mintermino	Maxtermino
0	0 0 0	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} = m_0$	$X + Y + Z = M_0$
1	0 0 1	$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot Z = m_1$	$X + Y + \overline{Z} = M_1$
2	0 1 0	$\overline{X} \cdot Y \cdot \overline{Z} = m_2$	$X + \overline{Y} + Z = M_2$
3	0 1 1	$\overline{X} \cdot Y \cdot Z = m_3$	$X + \overline{Y} + \overline{Z} = M_3$
4	1 0 0	$X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} = m_4$	$\overline{X} + Y + Z = M_4$
5	1 0 1	$X \cdot \overline{Y} \cdot Z = m_5$	$\overline{X} + Y + \overline{Z} = M_5$
6	1 1 0	$X \cdot Y \cdot \overline{Z} = m_6$	$\overline{X} + \overline{Y} + Z = M_6$
7	1 1 1	$X \cdot Y \cdot Z = m_7$	$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = M_7$

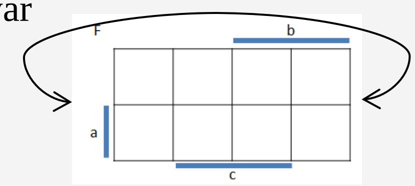
Minimización de funciones lógicas

Mapa de Karnaugh

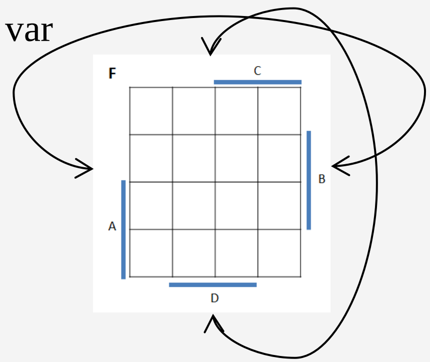
- Se usa para minimizar el número de puertas requeridas en un circuito digital. Es adecuado en vez de usar leyes y propiedades cuando el circuito es grande y/o la función es de entre 3 a 6 variables

- Un MK contiene en la misma tabla de verdad de la función pero dispuesta en dos dimensiones.

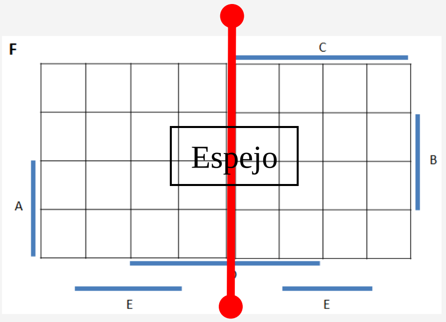
3 var



4 var



5 var



- Celdas adyacentes: En direcciones ⟺ ⇕ y, dependiendo del tamaño del MK, la adyacencia puede existir doblando el mapa sobre sí mismo o mediante reflexión en ejes verticales y horizontales

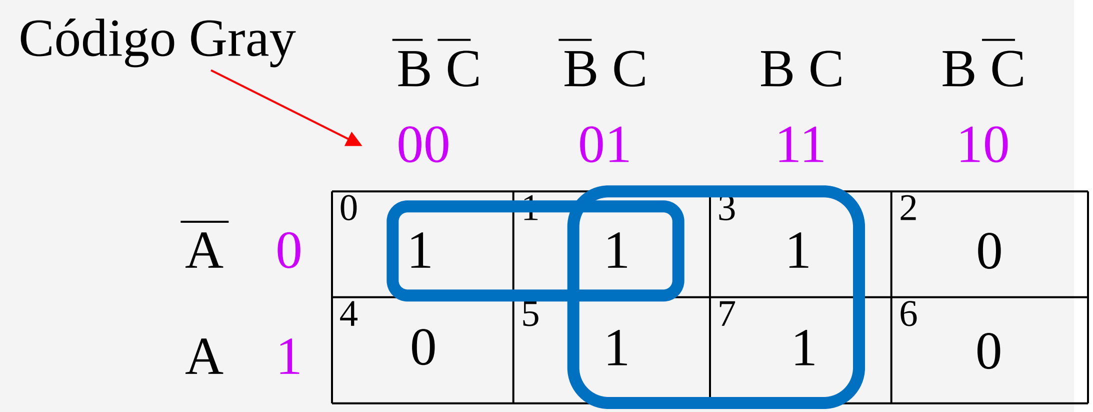
- Emplea un código Gray, que se caracteriza porque entre los códigos consecutivos de celdas adyacentes se diferencian en 1 bit.

SIMPLIFICACIÓN POR KARNAUGH

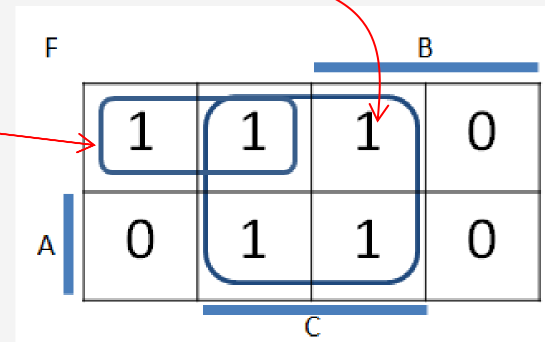
- 1) Realizar agrupaciones de 1's, con sus adyacentes, lo mayor posibles, pero siempre en cantidades <u>potencias de 2</u>.
- 2) No dejar ningún 1 sin agrupar. Puede ocurrir que un 1 pertenezca a más de una agrupación. No se pueden coger agrupaciones totalmente contenidas en otras.
- 3) Por cada agrupación de 1's resulta un producto de variables. Cuanto más 1's se agrupen, más sencilla resultará la expresión de esa agrupación.
- 4) En cada agrupación, cada una de las variables puede aparecer en alguno de los siguientes casos:
- a) Si siempre vale 1 -----> Se pone afirmada.
- b) Si siempre vale 0 -----> Se pone negada.
- c) Si cambia de valor (50% de los casos un valor y el otro 50% otro valor) -----> No se pone.
- 5) La expresión de la función booleana será la suma lógica de todos los productos que hayan salido (expresión como Suma de Productos)

Mapas de Karnaugh de 3 variables

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



$F = C + \bar{A}\bar{B}$



- Una celda a 1 implica a 3 variables
- Dos celdas adyacentes a 1 implican a 2 variables
- Cuatro celdas adyacentes a 1 implican a 1 variable
- Ocho celdas adyacentes a 1 constituyen función de valor 1

Mapa de Karnaugh de 4 variables

Código Gray

	$\bar{C}\bar{D}$ 00	$\bar{C}D$ 01	CD 11	$C\bar{D}$ 10
$\bar{A}\bar{B}$ 00				
$\bar{A}B$ 01				
AB 11				
$A\bar{B}$ 10				

F

			C	
	0	1	3	2
B	4	5	7	6
A, B	12	13	15	14
A	8	9	11	10
		D	D	

- Una celda a 1 implica a 4 variables
- Dos celdas adyacentes a 1 implican a 3 variables
- Cuatro celdas adyacentes a 1 implican a 2 variables
- Ocho celdas adyacentes a 1 implican a 1 variable
- Dieciséis celdas adyacentes a 1 constituyen función de valor 1

Ejemplo 1.

$$X = \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D + \bar{A}\,B\,C\,D + A\,\bar{B}\,C\,D + A\,B\,C\,D +$$
$$A\,B\,\bar{C}\,D + \bar{A}\,B\,C\,\bar{D}$$

Código Gray 00 01 11 10

	$\bar{C}\,\bar{D}$ 00	$\bar{C}\,D$ 01	$C\,D$ 11	$C\,\bar{D}$ 10
$\bar{A}\,\bar{B}$ 00			1	
$\bar{A}\,B$ 01			1	1
$A\,B$ 11		1	1	
$A\,\bar{B}$ 10			1	

Intentar con reducciones booleanas

$$X = ABD + \bar{A}BC + CD$$

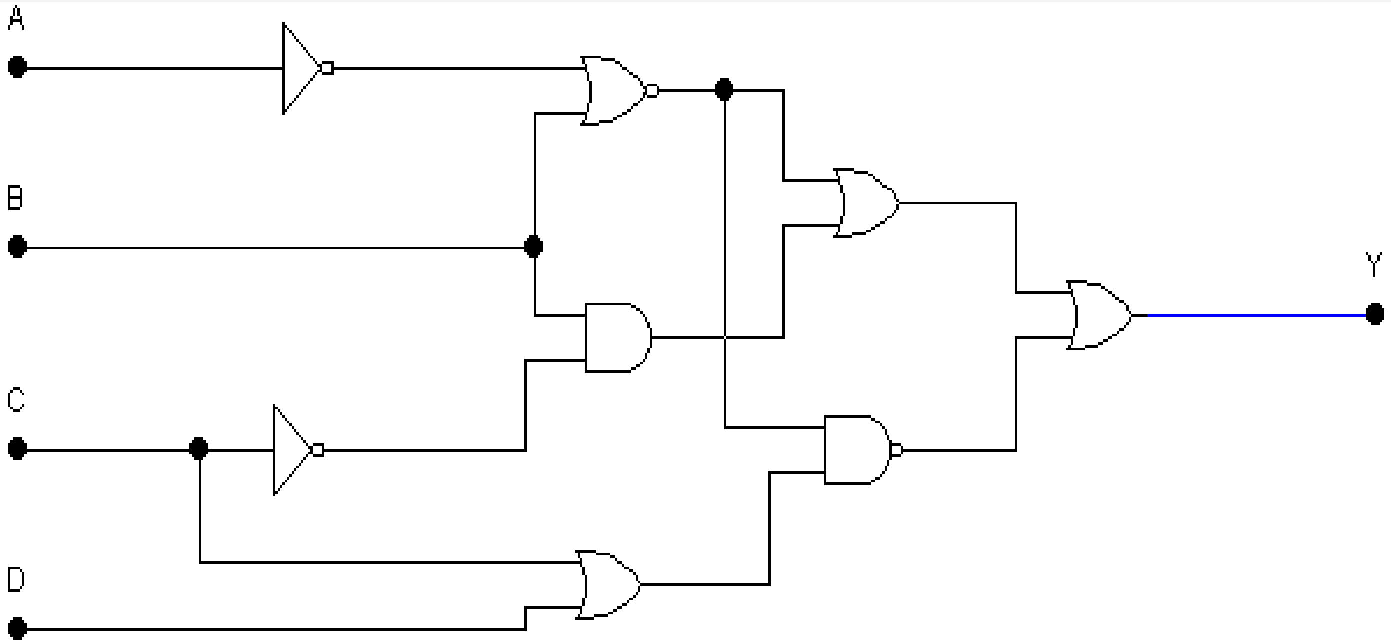
Ejemplo 2.

$$Z = \overline{B}\,\overline{C}\,D + B\,\overline{C}\,D + \overline{C}\,\overline{D} + B\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$$

	$\overline{C}\,\overline{D}$ 00	$\overline{C}\,D$ 01	$C\,D$ 11	$C\,\overline{D}$ 10
$\overline{A}\,\overline{B}$ 00	1	1	1	1
$\overline{A}\,B$ 01	1	1		1
$A\,B$ 11	1	1		1
$A\,\overline{B}$ 10	1	1		

$$X = \overline{C} + \overline{A}\,\overline{B} + B\,\overline{D}$$

Ejemplo 3. Dado un circuito encontrar otro más sencillo usando Mapas de Karnaugh



Primero lo pasamos a Suma de Productos..!

Mini términos

$$Y = \overline{\overline{A} + B} + B\,\overline{C} + \overline{(\overline{\overline{A} + B})\,(C + D)}$$

$$Y = \overline{\overline{A}}\;\overline{B} + B\,\overline{C} + \overline{\overline{\overline{A}}\;\overline{B}\,(C + D)}$$

$$Y = A\,\overline{B} + B\,\overline{C} + \overline{A\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,D}$$

$$Y = A\,\overline{B} + B\,\overline{C} + \overline{A\,\overline{B}\,C}\;\;\overline{A\,\overline{B}\,D}$$

$$Y = A\,\overline{B} + B\,\overline{C} + (\overline{A} + B + \overline{C})\,(\overline{A} + B + \overline{D})$$

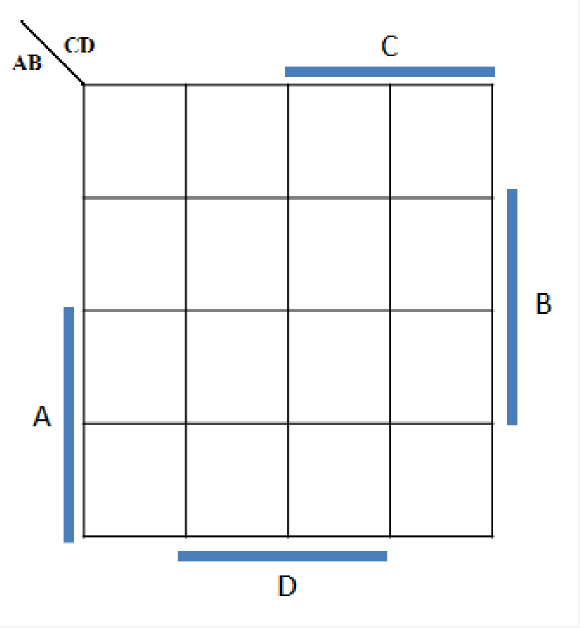
$$Y = A\,\overline{B} + \mathbf{B\,\overline{C}} + \mathbf{\overline{A} + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{D} + \overline{A}B + B + B\overline{D}} + \mathbf{\overline{A}\,\overline{C}} + \mathbf{B\overline{C}} + \overline{C}\,\overline{D}$$

Sacando factor común $\overline{A}$ (en rojo) y B (en azul), queda

$$Y = A\,\overline{B} + \mathbf{\overline{A}\,(1+\ldots)} + \mathbf{B(1+\ldots)} + \overline{C}\,\overline{D} = \overline{A} + \mathbf{\overline{B} + B} + \overline{C}\;\overline{D} = 1$$

Representación por MAPA de Karnaugh

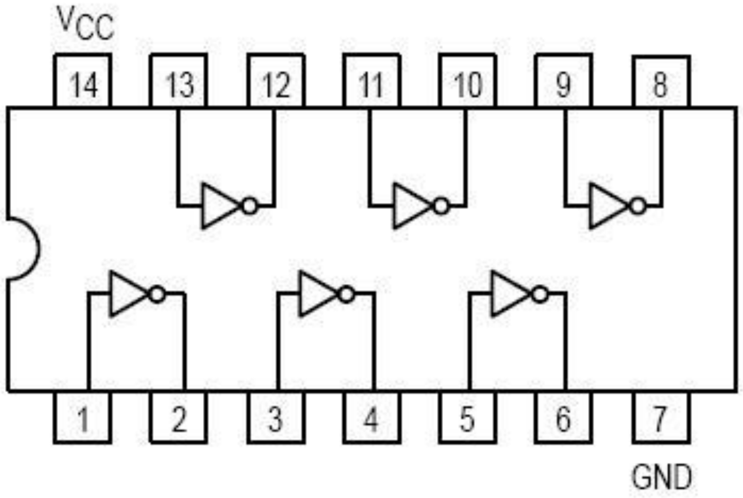
	$\bar{C}\,\bar{D}$ 00	$\bar{C}\,D$ 01	$C\,D$ 11	$C\,\bar{D}$ 10
$\bar{A}\,\bar{B}$ 00	1	1	1	1
$\bar{A}\,B$ 01	1	1	1	1
$A\,B$ 11	1	1	1	1
$A\,\bar{B}$ 10	1	1	1	1



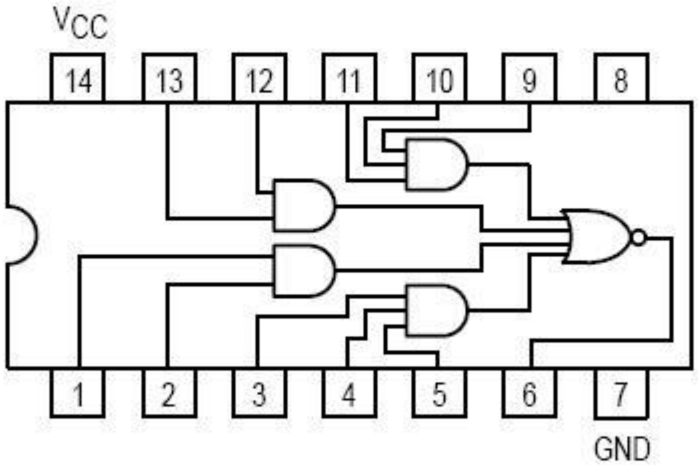
$Z = 1$

Patillaje de los circuitos 7404 y 7454

7404



7454



…Gracias por su Atención…

Final del Tema