Examen Parcial Corregido

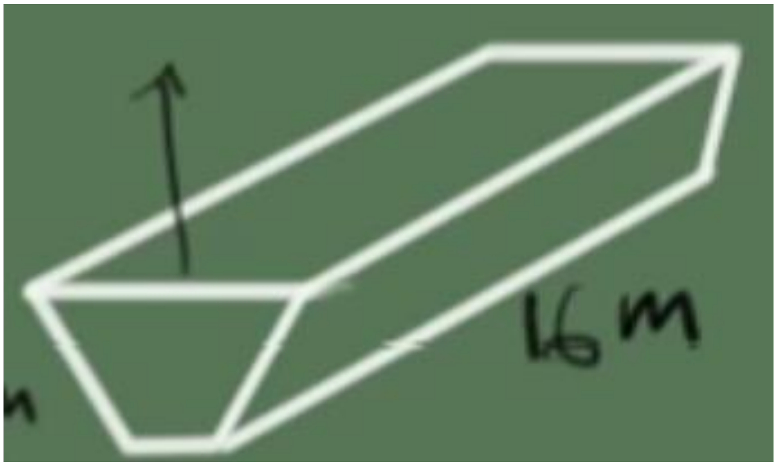
Cálculo Aplicado

1CV9

Alfredo Rangel Guzmán

Examen del primer parcial:

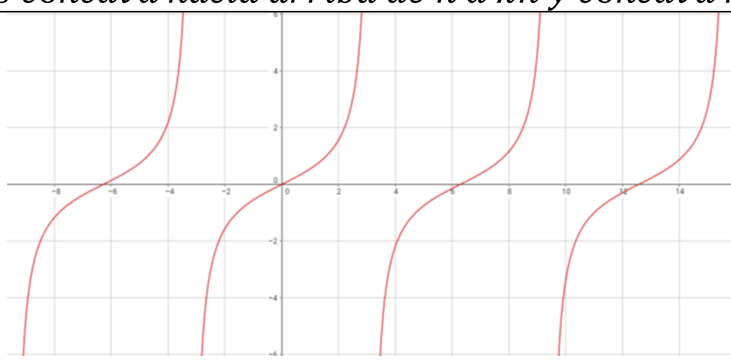
1. Un canal de agua tiene 10m de longitud y una sección transversal en forma de trapecio isósceles con 30 cm de ancho en la parte inferior, 80cm de ancho en la parte superior y una altura de 50cm. Si el canal se llena con agua a razón de $0.2m^3/min$. ¿Qué tan rápido está aumentado el nivel del agua cuando esta se encuentra a 30 cm de profundidad?



$\frac{dv}{dt} = 0.2\frac{m^3}{min}\ ;\ \frac{dh}{dt} = ¿?\, cuando\ h = 0.3m$
$V = \frac{(b+B)h}{2}$
$Vt = \frac{(0.3+0.9)}{2}(h)(L)$
$\frac{dV}{dt} = (0.6)\left(\frac{dh}{dt}\right)(10)$
$0.2\frac{m^3}{min} = 6m^2\left(\frac{dh}{dt}\right)$
$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{30}\frac{m^3}{min}$

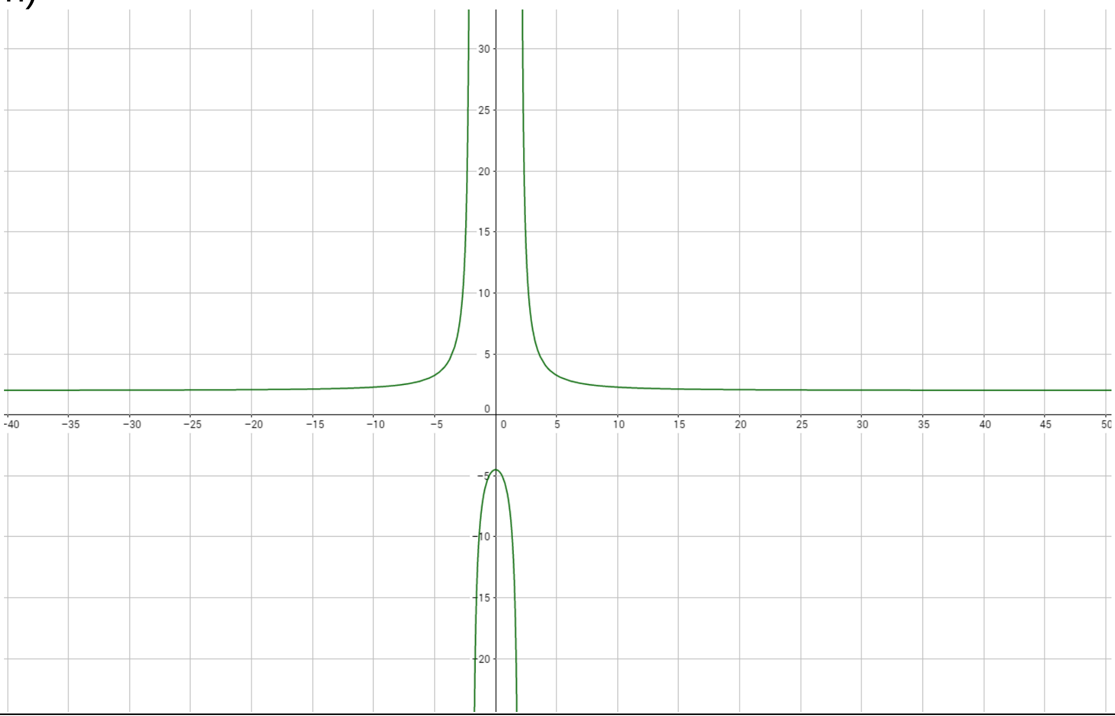
2. Analizar la curva $y = \frac{senx}{1+cosx}$ calculando
   a) Dominio
   b) Intersección con los ejes
   c) Simetría
   d) Asíntotas

e) Intervalos donde la función es creciente o decreciente
f) Valores máximos y mínimos locales
g) Concavidad y puntos de inflexión
h) Trazar la gráfica

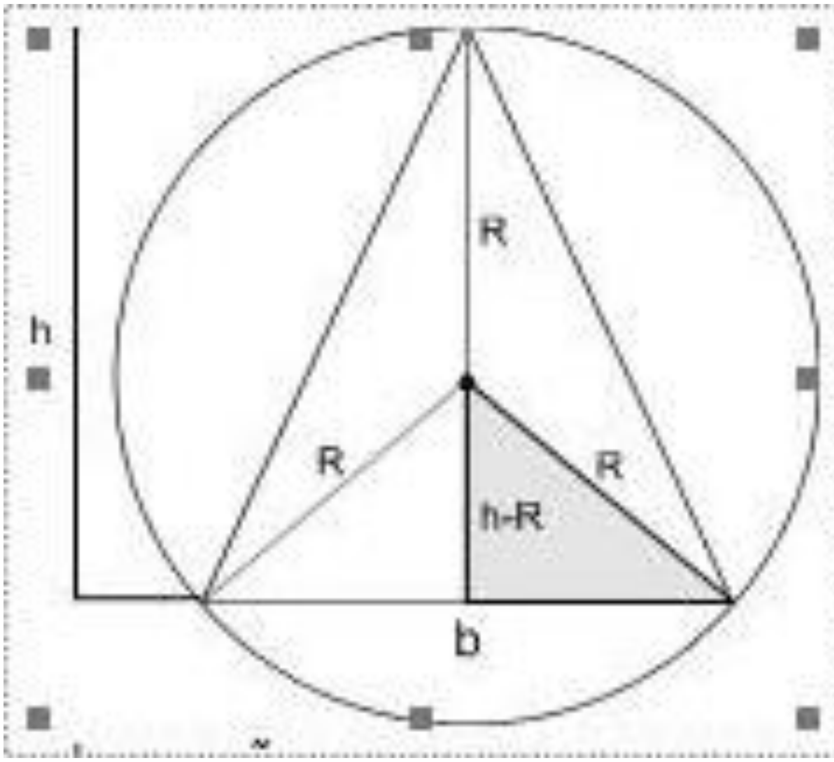
a)$f(x) = \frac{senx}{1+cosx}$; $f´(x) = \frac{1}{1+cosx}$
b)$Df = \{x \in R \| \|x \neq (2n+1)\pi\}$
c)$Es\ simetrica\ con\ respecto\ al\ eje\ X$
d)$Tiene\ asíntota\ en\ \ (2n+1)\pi$
e)$Siempre\ es\ creciente$.
f)$No\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos$
g) $es\ cóncava\ hacia\ arriba\ de\ n\ a\ \pi n\ y\ cóncava\ hacia\ abajo\ de\ \pi n\ a\ 2\pi n$
h) 

3. Analizar la curva $f(x) = \frac{2(x^2+9)}{x^2-4}$ calculando
    a) Dominio
    b) Intersección con los ejes
    c) Simetría
    d) Asíntotas
    e) Intervalos donde la función es creciente o decreciente
    f) Valores máximos y mínimos locales
    g) Concavidad y puntos de inflexión
    h) Trazar la gráfica

$f(x) = \frac{2(x^2+9)}{x^2-4}$; $f'(x) =$
a)$Df = \{x \in R \| \|x \neq \pm 2\}$
b)$Intersecta\ con\ el\ eje\ y\ en\ y = -\frac{9}{2}\ y\ no\ intersecta\ con\ el\ eje\ x$

c) $f(1) = -\frac{20}{3}$; $f(-1) = -\frac{20}{3}$ *La función es simétrica*
d) *Tiene una* $A.H.$ *en* $y = 0$ *y una* $A.V.$ *en* $x = \pm 2$
e) *Es creciente de* $(-\infty, -2)$ *y* $(-2,0)$ *pero decreciente de* $(0,2)$ *y* $(2, \infty)$
f) *Tiene un máximo en* $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$
g) *Es concava hacia arriba en todos los puntos, así que no tiene* $P.I.$
h) 

4. Calcule las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio R.

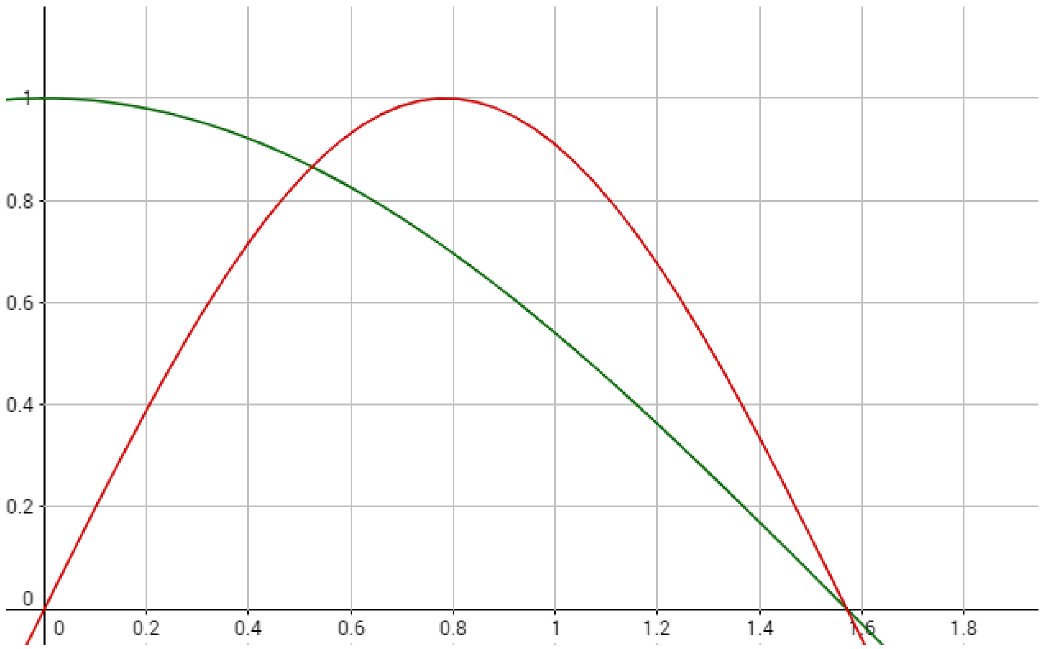


$$A = \frac{b\ \ h}{2}$$
$$(h-R)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = R^2$$
$$h^2 - 2hR + R^2 + \frac{b^2}{4} = R^2$$
$$b^2 = 8Rh - 4h^2$$
$$A = \frac{(8Rh - 4h^2)^{\frac{1}{2}}\ \ h}{2} - \frac{(8Rh^3 - 4h^4)^{\frac{1}{2}}}{2}$$
$$\frac{dA}{dh} = \frac{24Rh^3 - 16h^2}{4\sqrt{8Rh^3 - 4h^4}} - \frac{2h^3(3R - 2h)}{\sqrt{8Rh^3 - 4h^4}}$$
$$h = \frac{3R}{2}\ ; b = \sqrt{3}R$$

Examen del segundo parcial:

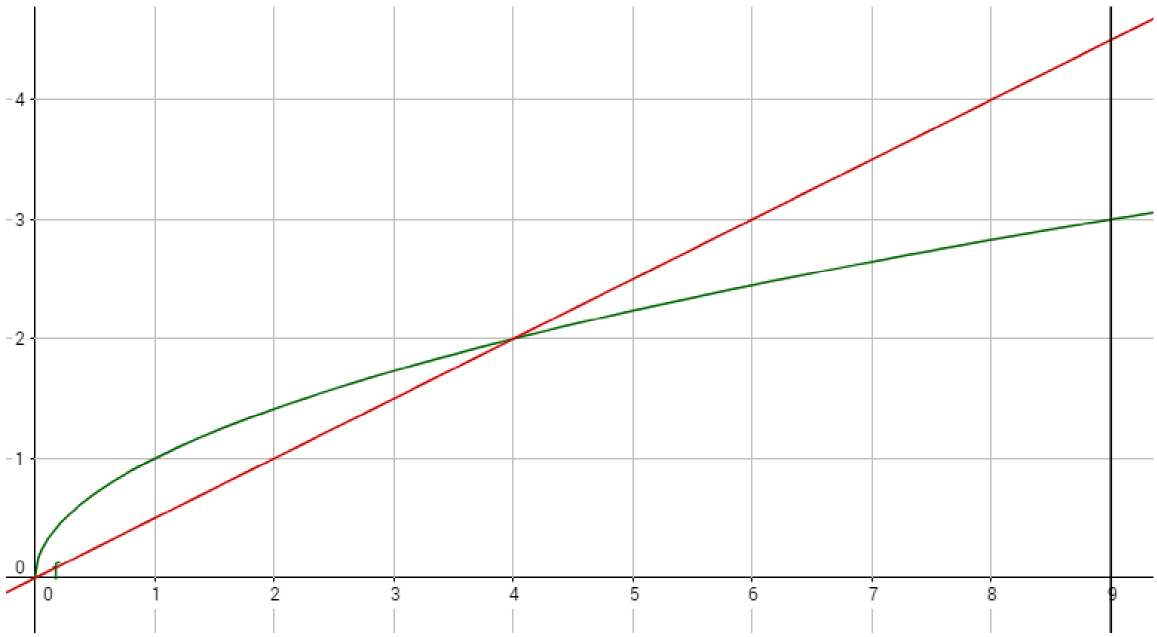
1.-Trace cada una de las regiones encerradas por las curvas y su área.

a) $y = cosx\ ;\ y = sen2x\ ; x = 0\ ; x = \frac{\pi}{2}$



$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (cosx - sen2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sen2x - cosx)dx$
$A = [senx + \frac{1}{2}cos2x]_0^{\frac{\pi}{6}} + [-\frac{1}{2}cos2x - senx]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$
$A = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right] + [\left(\frac{1}{2} + 1\right) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})]$
$A = [1 - \frac{1}{2}]$
$A = \frac{1}{2}u^2$

b)$y = \sqrt{x}\,;\, y = \frac{1}{2}x\,;\, x = 9$



$A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_4^9 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x}\right) dx$
$A = [\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2]_0^4 - [\frac{x^2}{4} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_4^9$
$A = \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(4)^2\right] + \left[\frac{(9)^2}{4} - \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{(4)^2}{4} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right)\right]$
$A = \left[\frac{32}{3} - 4\right] + \left[\left(\frac{27}{4} - \frac{54}{3}\right) - \left(4 - \frac{32}{3}\right)\right]$
$A = \frac{121}{12} - 8$
$A = \frac{59}{12}u^2$

2.- La región R encerradas por las curvas $y = x$ y $y = x^2$gira alrededor de la recta $x = -1$.

Calcule el volumen del sólido resultante.

$A(y) = \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2$
$V = \int_0^1 A(y)dy$
$V = \int_0^1 A(y)dy$

$V=\pi\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{y}\right)^2-(1+y)^2\right]dy$
$V=\pi\int_0^1\left(2\sqrt{y}-y-y^2\right)dy$
$V=\pi[\frac{4y^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}]_0^1$
$V=\frac{\pi}{2}\,u^3$

3.- Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativo.

$$a)\ y=x^2\ ;x=y^2\ Alrededor\ de\ y=1.$$

$$b)\ x=y^2\ ;x=1-y^2\ Alrededor\ de\ x=3.$$

4.- Encuentre el límite, utilice la regla de L'Hospital donde sea apropiado, si no aplica la regla L´Hospital, explique por qué.

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$
Aplicando L´Hospital $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$

Volviendo a aplicar L´Hospital $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2}$
Aplicando el límite $\to \frac{e^0}{2}$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$$b)\lim_{x\to\infty} xsen\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

Ordenamos el límite para aplicar L´Hospital $\lim_{x\to\infty}\frac{sen\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$
Aplicando L´Hospital $\lim_{x\to}\frac{-\frac{\pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$
$\lim_{x\to\infty}\pi\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$\pi\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$
$\pi cos\pi\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$
$\lim_{x\to\infty} xsen\left(\frac{\pi}{x}\right)=\pi$

$$c)\ \lim_{x\to 0+}(cosx)^{\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x\to 0+} e^{ln}((cosx)^{\frac{1}{x^2}})$
$e^{\lim_{x\to 0+}\frac{\ln cosx}{x^2}}$
Reordenamos para poder aplicar L´Hospital $\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{-senx}{cosx}}{2x}$
$\lim_{x\to 0+}-\frac{senx}{2x\,cosx}$
$e^{\frac{1}{2}}\left(\lim_{x\to 0+}\frac{1}{cosx}\right)\left(\lim_{x\to 0+}\frac{senx}{x}\right)$
$e^{\frac{1}{2}}(1)\left(\lim_{x\to 0+}\frac{cosx}{1}\right)$

$e^{\frac{1}{2}}(1)$
$\lim_{x\to 0+} (cosx)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$$d)\ \lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}}$$

$\lim_{x\to 0+} e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)}$
$e^{\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\ln x}$
$e^{\lim_{x\to 0+} \sqrt{xln^2x}}$
$e^{\sqrt{\lim_{x\to 0+} xln^2x}}$
$e^{\sqrt{\lim_{x\to 0+} \frac{ln^2x}{\frac{1}{x}}}}$
$Aplicando\ L'Hospital\ tenemos\ e^{\sqrt{\lim_{x\to 0+} -2x\ln x}}$
$e^{\sqrt{-2\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}}$
$e^{\sqrt{-2\lim_{x\to 0+} -x}}$
$e^{\sqrt{-2(0)}}$
$e^0 = 1$
$\lim_{x\to 0+} x^{\sqrt{x}} = 1$

5.-Determine si cada una de las siguientes integrales converge o diverge. Evalúe las que son convergentes.

$$a)\ \int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$$

$a)\ \int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$
$\lim_{t\to -2+} \int_{t}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

$$\lim_{t\to -2+} \int_{t}^{14} (x+2)^{-\frac{1}{4}}\, dx$$
$$\lim_{t\to -2+} \left[\frac{4}{3}\, u^{\frac{3}{4}}\right]_{t}^{14}$$
$$\lim_{t\to -2+} \left[\frac{4}{3}(14)^{\frac{3}{4}} - \frac{9}{3}(t)^{\frac{3}{4}}\right]$$
$$\left[\frac{4}{3}(14)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}(-2)^{\frac{3}{4}}\right]$$
$$\color{red}{La\ integral\ converge\ a\ \frac{32}{3}}$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$$ Se divide la integral en dos partes, desde menos infinito hasta 0 y desde 0 hasta infinito.
$$\lim$$

6.- Determine la longitud exacta de las siguientes curvas.

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3) \qquad\qquad 1 \le y \le 9$$

$$x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + \sqrt{y} \quad ; \quad x' = \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt{y}}$$
$$L = \int_{1}^{9} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\, dy$$
$$L = \int_{1}^{9} \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4y}}\, dy$$
$$L = \int_{1}^{9} \frac{1}{2} \sqrt{2 + y + \frac{1}{y}}\, dy$$

$L = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} \sqrt{\frac{2y + y^2 + 1}{y}}\, dy$
$L = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} \sqrt{\frac{(y+1)^2}{y}}\, dy$
$L = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} \frac{(y+1)}{\sqrt{y}}\, dy \quad ; u = \sqrt{y}\; du = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$
$L = (2)\left(\frac{1}{2}\right) \int_{1}^{9} (u^2 + 1) du$
$L = [\frac{u^3}{3} + u]_1^9$
$L = [\frac{(y)^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{y}]\,_1^9$
$L = \left[\left(\frac{(9)^{\frac{3}{2}}}{3} + \sqrt{9}\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right)\right]$
$L = \left[9 + 3 - 1 + \frac{1}{3}\right]$
$L = \frac{32}{3} u$