



# Mapas de Karnaugh

Fundamento de Diseño Digital

Prof. MC. Carlos Pastrana

# Introducción

- ❖ Vimos como representar funciones de conmutación con tablas de verdad, implementándolas con compuertas lógicas.
- ❖ Además mediante el álgebra de Boole, reducimos dichas funciones de conmutación para que puedan emplearse el mínimo número posible de compuertas lógicas.
- ❖ Cuando la función de conmutación depende de muchas entradas, el método para reducir la función mediante teoremas y postulados del álgebra booleana se vuelve tedioso.
- ❖ Además una misma función se puede expresar algebraicamente de distintas maneras.
- ❖ Los métodos que veremos a continuación remedian estas dificultades.

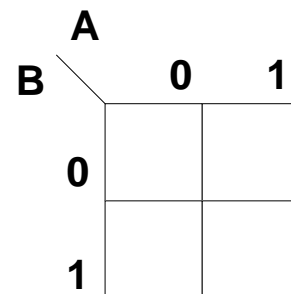
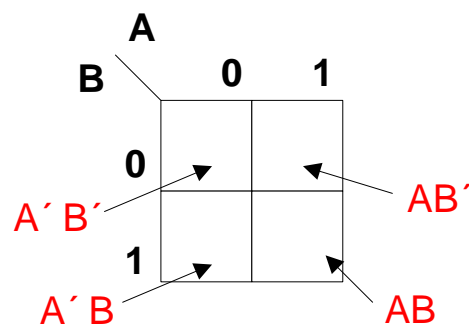
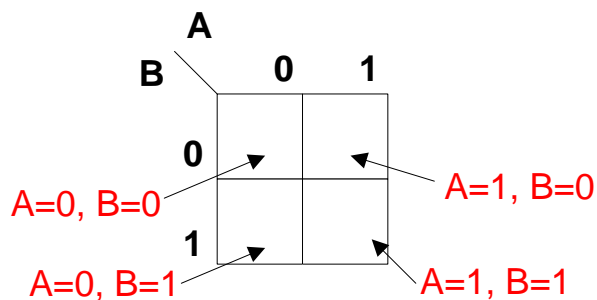
# Mapas de Karnaugh

- ❖ Como una tabla de verdad, el mapa de Karnaugh de una función, especifica el valor de dicha función para todas las combinaciones de valores de las variables independientes (entradas).
- ❖ Es un diagrama en forma de matriz de cuadros, donde cada cuadro corresponde a un minitérmino de la función.
- ❖ Las expresiones simplificadas, que se generan del mapa, siempre están en una de las dos formas estándar: suma de minitérminos o producto de maxitérminos.
- ❖ La expresión más simple no es única.

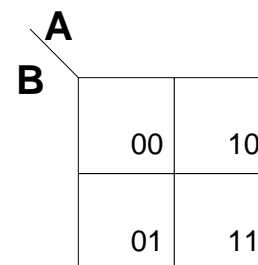
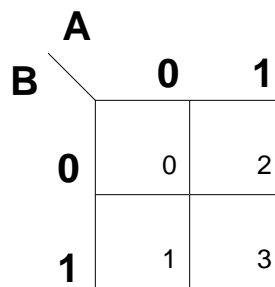
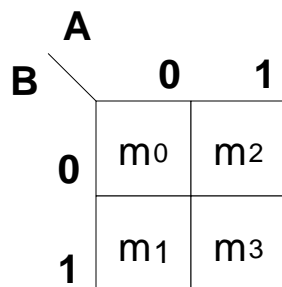
# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- ❖ Para dos variables, existen 4 minitérminos, por lo tanto 4 cuadros en la matriz.

➤ Ejemplo  
A,B: variables de entrada



A	B
0	0
0	1
1	0
1	1



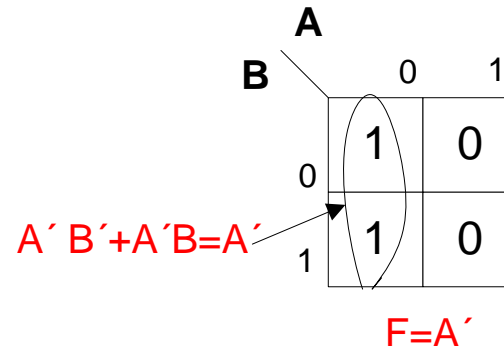
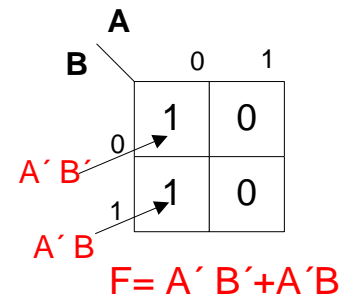
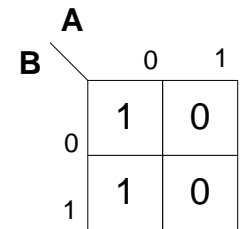
# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Se pueden leer los minitérminos igual que en una tabla de verdad.
- Cada 1 contenido en el mapa corresponde a un término producto de F.
- Un 1 contenido en la celda 00, indica que  $A'B'$  es un término producto de F.
- Los términos productos ubicados en celdas adyacentes, pueden combinarse, dado que solo difieren en una sola variable.
- $A'B'$  y  $A'B$  se combinan para formar  $A'$ .
- Lo anterior se indica mediante un lazo que envuelve a los correspondientes unos sobre el mapa.

## • Ejemplo

Para la siguiente tabla de verdad construya el mapa de K.

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0



# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Para tres variables:

A \ BC	0		1
	00	01	11
00	000	001	010
01	000	001	011
11	100	101	110
10	100	101	110

100 ES ADYACENTE A 110

NOTACION BINARIA

A \ BC	0		1
	00	01	11
00	0	1	3
01	4	5	7
11	2	6	7
10	0	1	3

NOTACION DECIMAL

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

A \ BC	0		1
	00	01	11
00	0	1	0
01	0	0	0
11	1	0	0
10	1	1	0

- Los términos productos situados en celdas adyacentes se pueden combinar utilizando el teorema  $XY' + XY = X$
- Por ejemplo el término producto 001 ( $A'B'C$ ) se puede combinar con tres términos producto como se ve en la fig.
- Las filas superiores e inferiores del mapa también son adyacentes (100 con 110 y 000 con 010)

# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Dada la expansión en términos producto de una función, puede representarse sobre un mapa colocando unos en las celdas que corresponden a los minterminos de la función y ceros en las celdas restantes.

		A	
		0	1
BC	00	0	0
	01	1	1
	11	1	0
	10	0	0

$$F(A,B,C)=\sum(m_1,m_3,m_5)$$

# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Si una función se especifica en forma algebraica, no es necesario expandirla en términos producto antes de representarla sobre un mapa.
- Por ejemplo suponiendo que  $f(a,b,c,d)=abc'+b'c+a'$  construiremos el mapa como se muestra:
- El término  $abc'$  es 1 cuando  $a=1$ , y  $bc=10$ , por lo que colocamos un 1 en la celda que corresponde a la columna  $a=1$  y la fila  $bc=10$
- El término  $b'c$  es 1 cuando  $bc=01$ , por lo que colocamos un 1 en ambas celdas de la fila  $bc=01$  del mapa.
- El término  $a'$  es 1 cuando  $a=0$ , por lo que colocamos un 1 en todas las celdas de la columna  $a=0$  del mapa.

a	0	1
bc		
00	1	0
01	1	1
11	1	0
10	1	1

Nota: dado que hay un 1 en la celda  $abc=001$  no tenemos que colocar un segundo 1 ahí, ya que  $x+x=x$



# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Ejemplo de deducción de una expresión simplificada utilizando un mapa de Karnaugh.

$$F(a,b,c)=a'b'c+a'bc+ab'c$$

a \ bc	a	
	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	0
10	0	0

$$F(a,b,c)=\sum(m_1,m_3,m_5)$$

Inserción de los términos productos (o minitérminos)

a \ bc	a	
	0	1
00	0	0
01	1	1
11	1	0
10	0	0

$$T_1 = a'b'c + a'bc = a'c$$

$$T_2 = a'b'c + ab'c = b'c$$

$$F = a'c + b'c$$

Forma simplificada de F

- Rellenamos el mapa con los términos producto correspondientes.
- Agrupamos mediante los lazos.
- Simplificamos.

$$F(a,b,c)=a'c+b'c$$

# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

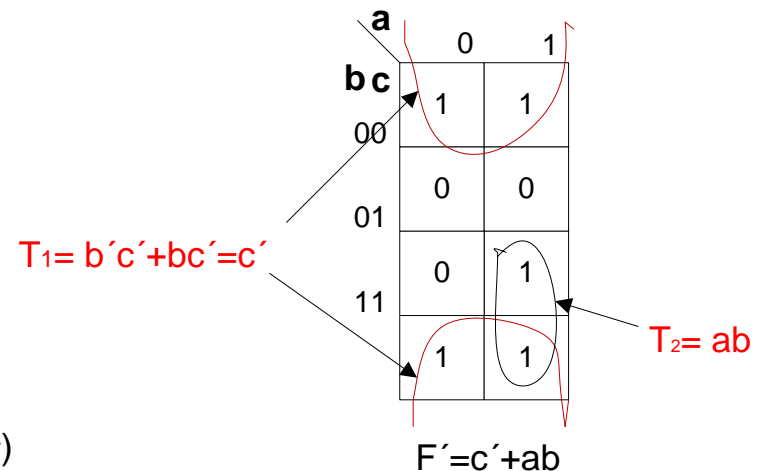
- Si queremos encontrar el complemento de la función mostrada en el ejemplo anterior, simplemente cambiamos en el mapa los 0 por 1 y los 1 por 0.

$$F'(a,b,c) = (a'b'c + a'bc + ab'c)'$$

	<b>a</b>	0	1
<b>bc</b>			
00		1	1
01		0	0
11		0	1
10		1	1

$$F'(a,b,c) = \sum(m_0, m_2, m_4, m_6, m_7)$$

Inserción de los términos  
productos (o minitérminos)



Forma simplificada de  $F'$

- Simplificamos como se explicó.

$$F'(a,b,c) = c' + ab$$

# Mapas de Karnaugh de dos y tres variables

- Si queremos expresar la función  $F$  como un producto de sumas (o productos de maxitérminos), buscamos el complemento de dicha función simplificamos y luego aplicamos el teorema de Morgan, para volver a complementar, y poder expresar  $F$  finalmente como un producto de maxitérminos.
- Para el ejemplo anterior donde  $F(a,b,c)=a'b'c+a'bc+ab'c$  vimos como encontrar  $F'(a,b,c)=c'+ab$
- Ahora aplicando el teorema de Morgán, para volver a complementar:  
$$(F')' = F = c(a' + b')$$
 producto de maxitérminos

# Mapas de Karnaugh de cuatro variables

- Las siguientes figuras muestran la distribución de un mapa K de cuatro variables:

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

- La definición de celdas adyacentes se amplía, no sólo las filas superior e inferior son adyacentes, sino que también lo son la primera y la última columna.

# Ejemplos

A)  $f_7(c,b,a) = \sum (0,1,3,4,5,6,7)$


c \ ba	00	10	11	01
0	0 <sub>0</sub>	2	0 <sub>3</sub>	0 <sub>1</sub>
1	0 <sub>4</sub>	0 <sub>6</sub>	0 <sub>7</sub>	0 <sub>5</sub>

Simplificando por maxterms...

$$f_7(c,b,a) = \overline{c} \cdot \overline{b} \cdot a$$

Pasando  $f_7$  a minterms, se llega al mismo resultado:

$$f_7(c,b,a) = \overline{c} \overline{b} a$$



B)  $f_8(d,c,b,a) = \sum_4 (0,1,4,5,10,11,13,14,15)$

Simplificando por minterms, es...

$$f_8(d,c,b,a) = db + \overline{d}b + dca = (d \oplus b) + dca$$

**PROBLEMA:** *Un circuito produce la siguiente Tabla de Verdad. Usando maxterms, encontrar su salida y simplificar dicha expresión usando el mapa de Karnaugh:*

A	B	C	D	Salida
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

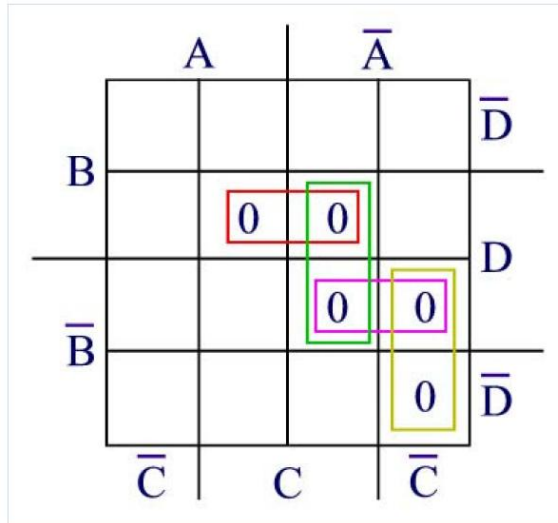
Usando maxterms, la salida del circuito está dada por la siguiente relación:

$$(A + B + C + D) \cdot (\overline{A} + B + C + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D})$$

# Problemas:

Usando maxterms, la salida del circuito está dada por la siguiente relación:

$$(A + B + C + D) \cdot (\bar{A} + B + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$



Del mapa vemos que la expresión de salida simplificada será:

$$\text{Salida} = (B + C + D) \cdot (\bar{A} + C + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + D) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$



**PROBLEMA:** *Se requiere construir un circuito lógico que produzca las siguientes salidas:*

A	B	C	D	Salida
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

*Haciendo uso del mapa de Karnaugh y diseñando alrededor de los minterms, encontrar un circuito minimizado que pueda producir las salidas deseadas.*

**PROBLEMA:** Se requiere construir un circuito lógico que produzca las siguientes salidas:

A	B	C	D	Salida
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1

Lo primero que debemos notar es que aunque se trata de un circuito lógico de cuatro variables, no todas las 16 combinaciones posibles de variables están presentes, tales como las combinaciones **ABCD=1110**, **ABCD=1101**, etc., lo cual podemos tomar como un indicativo de que tales combinaciones no están presentes por el simple hecho de que no serán utilizadas para los propósitos que persigue el circuito lógico que está siendo diseñado. En otras palabras, son combinaciones *redundantes*, las cuales no importa que tomen un valor de "1" ó de "0". Y si son redundantes, las podemos meter dentro del mapa de Karnaugh simbolizadas con una "X", dando a entender con esto que pueden tomar un valor de "1" ó de "0" sin que ello afecte en lo absoluto los requerimientos finales del diseño.

Haciendo uso del mapa de Karnaugh y diseñando alrededor de los minterms, encontrar un circuito minimizado que pueda producir las salidas deseadas.

**PROBLEMA:** *Escribir, mostrando todas las variables Booleanas en forma explícita, las expresiones representadas por la siguiente notación compacta:*

$$(1) F(a,b,c) = \Sigma m(0,2,7)$$

$$(2) F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,3,4,5,7,12,13,15)$$

$$(3) F(A,B,C,D) = \Sigma m(15,11,7,14,10,12,6,4)$$

$$(4) Z = \Sigma m(0,1,2,4,6)$$

$$Z = \Sigma m(000,001,010,100,110)$$

$$Z = \overline{p} \cdot \overline{q} \cdot \overline{r} + \overline{p} \cdot \overline{q} + \overline{p} q \overline{r} + p \overline{q} \cdot \overline{r} + p q \overline{r}$$

# Investigar -- Método de Quine McCluskey

- ❖ Este método proporciona un procedimiento simplificado y sistémico que puede programarse en una computadora.
- ❖ Se utiliza cuando el número de variables es más grande o se tienen que simplificar varias funciones y ya no es aconsejable utilizar mapas de K.

- 
- Gracias por su Atención ;)