VARIANCE REDUCTION APPLIED TO MACHINE LEARNING FOR PRICING BERMUDAN/AMERICAN OPTIONS IN HIGH DIMENSION

December 2022

Imrane ALIOUA, Emmanuel GNABEYEU MBIADA

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

1
INTRODUCTION

Dans cet article, nous proposons une méthode efficace pour calculer le prix d'options américaines avec plusieurs actifs, basée sur les éléments suivants : l'apprentissage automatique, les simulations de Monte Carlo et la technique de réduction de la variance. Plus précisément, les options que nous considérons sont écrites sur un panier d'actifs, chacun d'entre eux suivant une dynamique de Black-Scholes.
Nous implémentons ici un algorithme de programmation dynamique retrograde (proposé par R. Bellman qui procède de facon retrograde comme dans la construction de l'enveloppe de snell) qui considère un nombre fini de dates d'exercice uniformément distribuées. A ces dates, la valeur de l'option est calculée comme le maximum entre la valeur d'exercice et la valeur de continuation, qui est obtenue au moyen de la technique de régression du processus gaussien et de Monte Carlo.
Nous trouverons ensuite par des tests numériques que cette méthode donne de bons résultats pour les paniers de faible dimension, mais elle n'est pas précise pour les paniers de très haute dimension (problème de la malédiction de la dimension).
Afin d'améliorer la gamme de dimensions, nous utilisons le prix de l'option européenne comme **variable de contrôle**, ce qui nous permet de traiter de très grands paniers, de réduire la variance du prix et rends la méthode plus stable. Nous testons par la suite la rapidité et la fiabilité de l'algorithme proposé.

2
PROBLEM DEFINITION, METHODOLOGY AND THEORETICAL ANALYSIS

2.1 Task Definition

Dans cet article, nous considérons l'un des problèmes encore ouverts dans le domaine de la finance computationnelle : l'évaluation et la couverture des options américaines en haute dimension. D'un point de vue pratique, l'évaluation numérique efficace des options américaines qui ont pour sous-jacent un panier de d'actifs est très difficile à cause de ce qu'on appelle la "malédiction de la dimensionn", qui empêche l'application directe des schémas numériques standards tels que les différences finies ou les méthodes arborescentes. Plus précisément, cette malédiction de la dimensionn signifie que le coût de calcul et les besoins en mémoire augmentent de manière exponentielle avec la dimension du problème.

2.2 Presentation of the Method

L'article met en oeuvre tout d'abord une version de l'algorithme de Ludkovski appelée **GPR Monte Carlo (GPR-MC)**. Dans un tel algorithme, à chaque étape temporelle, on utilise un ensemble de simulations de Monte Carlo (qui représentent les valeurs possibles du sous-jacent) ainsi qu'un processus de régression gaussien (GPR) pour approximer la valeur de continuation en ces points. Le prix de l'option est alors obtenu comme le maximum entre la valeur de continuation et la valeur intrinsèque de l'option donnée par la function de payoff Ψ donnée par l'équation (1)

Le GPR-MC fonctionne très bien pour des paniers jusqu'en dimension 5, mais il ne fonctionne pas pour paniers de grande dimension.

L'article propose donc un nouvel algorithme appelé **GPR Monte Carlo Control Variate (GPR-MC-CV)** qui considère le prix de l'option européen associé comme une variable de contrôle, réduisant ainsi la variance de l'estimateur du prix. En outre, afin de calculer les prix européens, l'article suggère d'utiliser une formule semi-analytique, appelée formule **GPR-EI** 2.3.2(Exact Integration) , introduite par le meme auteur dans un autre article, qui s'avère efficace lorsque de nombreux calculs répétés des prix européens doivent être effectués, ou alternativement, simulations Quasi-Monte Carlo.

2.3 Theoretical justification and guarantees

Soit $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ le processus stochastique représentant le panier(des prix) de d actifs évoluant de façon aléatoire selon le modèle de Black-Scholes multidimensionel de gain donné par la fonction Ψ :

Sous la mésure neutre au risque, $dS_t^i = (r - \eta_i)S_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i$, i = 1, . . . , d, avec $S_0 = (s_{0,1}, ..., s_{0,d}) \in \mathbb{R}_+^d$ le vecteur de prix initial, r le taux d'intérêt constant, $\eta = (\eta_1, ..., \eta_d)$ le vecteur constant des taux de dividendes, $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_d)$ le vecteur constant de volatilité, W un mouvement brownien de dimension d correlé et ρ_{ij} le coefficient de corrélation entre W_t^i et W_t^j. Posons Γ donnée par $\Gamma_{ij} = \rho_{ij}$, la matrice de corrélation et Σ definie comme la racine carrée (decomposition de Cholesky) de Γ

2.3.1 • GPR Monte Carlo

On approxime le prix d'un option américaine de maturité T à partir du prix d'une option Bermudan du même panier d'actifs. Pour N le nombre de pas de temps et $t_n = n\Delta t = n\frac{T}{N}$, $n \in \{1, .., N\}$ une discrétisation de temps d'exercices, si x représente le vecteur des prix des sous-jacents, alors le prix de l'option Bermudan v^{BM} est donné par :

$$v^{BM}(t_n, x) = max(\Psi(x), \mathbb{E}_{t_n,x}[e^{rt} v^{BM}(t_{n+1}, S_{t_{n+1}})]) \tag{1}$$

Ainsi, en connaissant v^{BM} à l'instant t_{n+1} on peut par une approche rétrograde approximer sa valeur à l'instant t_n grâce à la formule précedente en approchant l'espérance au moyen de la méthode de Monte Carlo. Pour ce faire, nous considérons un ensemble X^n de P points dont les coordonnées représentent certaines valeurs possibles pour les sous-jacents au temps t_n et pour chaque $x^{n,p} \in X^n$, on simule $\widetilde{X}^{n,p} = \{\widetilde{x}^{n,p,m} = (\widetilde{x}_1^{n,p,m}, ..., \widetilde{x}_d^{n,p,m}), m = 1, ..., M\} \subset \mathbb{R}^d$ l'ensemble des valeurs possibles de $S_{t_{n+1}}$:

Alors, le prix de l'option peut être approximé à t_n pour chaque $x^{n,p} \in X^n$ par :

$$\hat{v}^{BM}(t_n, x^{n,p}) = max(\Psi(x^{n,p}), \frac{e^{-rt}}{M} \sum_{m=1}^{M} v^{BM}(t_{n+1}, \widetilde{x}^{n,p,m}))$$

Comme v^{BM} n'est à priori pas connu(sauf au temps T où il est égale à Ψ), on va approcher ,cette function par $v_n^{BM,GPR}$ par la technique GPR entrainé sur l'ensemble $(X^n, \hat{v}^{BM})$

2.3.2 • Machine Learning Exact Integration for European options

Afin d'améliorer l'approche GPR-MC, nous utilisons le prix des options européennes comme variable de contrôle. Ici, nous proposons de calculer un tel prix au moyen de la formule GPR-EI. Ce calcul est basé sur deux étapes. Tout d'abord, le payoff est approximé au moyen de la GPR. Ensuite, le prix européen est calculé comme étant l'espérance actualisée du cash flow final.

Considérons un ensemble $Z = \{z^q, q = 1, ..., Q\}$ constitué de Q points dans R^d répartis quasi aléatoirement selon la loi du vecteur $(\sigma_1 W_1^1, ..., \sigma_d W_d^d)^T$.
En particulier, on défini : $z_i^q = \sqrt{T}\sigma_i(\Sigma * h^p)_i$ où h^q est le q-ème point de la sequence de Halton dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $u : Z \to R$ la fonction définie par : $u(z) := \Psi((S_0 exp((r\eta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + z))$ (Payoff de l'option européenne)

L'idée principale est d'approximer u en entrainant un GPR sur l'ensemble Z comme prédicteurs et $u(z_i^q)$ comme sortie, dans l'optique d'obetenir $u^{GPR}(z)$

Ainsi pour tout z, $u^{GPR}(z) = \sum_{q=1}^{Q} k_{SE}(z_q, z)\omega_q$ où k_{SE} est le noyau de la regression gaussienne(Squared Exponential kernel) et ω_q les poids de l'approximation.

2.3.3 • GPR Monte Carlo Control Variate

Présentons la méthode **GPR Monte Carlo Control Variate (GPR-MC-CV)** proposée par l'article. La technique du control variate est couramment utilisée pour réduire la variance des estimateurs de Monte Carlo, mais elle peut également apporter sa contribution dans le domaine du pricing d'options américaines. Nous utilisons le prix européen comme variante de contrôle pour le prix américain. L'algorithme GPR-MC-CV utilise un procédé Backward pour connaître le prix de l'option bermudian initial.

Considérons une option américaine et une option européenne ayant la même fonction de paiement Ψ et la même échéance T, et désignons par v^{AM} , v^{EU} leurs prix respectifs. Pour un temps fixe t et des actions sous-jacentes x, nous définissons l'écart de prix américain-européen comme suit : $v(t,x) = v^{AM}(t,x) - v^{EU}(t,x)$, alors v(T, x) = 0.

Il est simple de voir que $v(t,x) = sup_{\in \mathbb{T}_{t,T}} \mathbb{E}_{t,x}[e^{-r(-t)}\hat{\Psi}(,S)]$ où $T_{t,T}$, représente l'ensemble de tous les temps d'arrêt prenant des valeurs dans $[t,T]$ et $\hat{\Psi}$ est défini par $\hat{\Psi}(t,x) = \Psi(x) - v^{EU}(t,x)$, où $v^{EU}(t,x)$ est calculé en se basant sur le point précédent (GPR-EI).

Alors, le prix de l'option peut être approximé de la meme facon que dans la méthode GPR-MC en remplacant Ψ par $\hat{\Psi}$, c'est-à-dire à t_n pour chaque $x^{n,p} \in X^n$ on a :

$$\hat{v}^{BM}(t_n, x^{n,p}) = max(\hat{\Psi}(x^{n,p}), \frac{e^{-rt}}{M} \sum_{m=1}^{M} v^{BM}(t_{n+1}, \widetilde{x}^{n,p,m}))$$

Et v^{BM} approximé en $v_n^{BM,GPR}$ par la technique GPR entrainé sur l'ensemble $(X^n, \hat{v}^{BM})$

3 EXPERIMENTAL EVALUATION

3.1 Methodology

L'étape de preprocessing est particulièrement longue, pour P = 250, d = 2, M = 10^3, la durée d'obtention de x et xtilde nécessite déjà quelques secondes. Les simulations ont été effectuées avec l'appareil : Intel(R) Core(TM) i7-10510U CPU @ 1.80GHz 2.30 GHz Méemoire vive 16,0 Go, Système d'exploitation 64 bits, processeur x64 Windows 10.

Nous avons décidé de conserver les ensembles X^N comme variables globales et de réaliser les tirages aléatoires en une seule fois plutôt que d'effectuer plusieurs tirages à une seule reprise, cela permet de réduire le temps de calcul.

On cherche principalement à accélérer la vitesse d'exécution et réduire la variance. Si l'on se réfère aux méthodes de Monte Carlo habituelles, nous n'aurions pas pu utiliser d'échantillonage d'importance (Importance Sampling) car il aurait fallu déterminer une distribution biaisée qui favorise les valeurs importantes, et ces distributions sont particulièrement difficiles à pressentir en grande dimension.

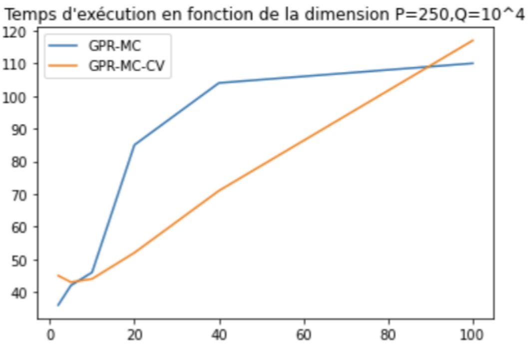

Figure 1 – Temps d'exécution en fonction de la dimension dans le cas du Geometric basket Put option

3.2 Results

Nous avons fait une simulation dans le Notebook, pour le cas particulier K=110, d=3 et $S_i = 100$ en utilisant les deux methodes GPR-MC et GPR-MC-CV sur le cas particulier du panier arithmétique d'options Put.

— Geometric and Arithmetic Basket Put Options : $\Psi(S_T) = (K - \prod_{i=1}^{d} S_T^i)_+$ et $\Psi(S_T) = (K - \sum_{i=1}^{d} S_T^i)_+$ respectivement : Lorsque des paniers plus grands sont considérés, disons d 40, les prix obtenus avec le GPR-MC sont moins précis et moins stables lorsqu'on change le nombre de points P et le nombre M de simulations de Monte Carlo. Les temps de traitement informatique de la méthode GPR-MC-CV sont un peu plus élevés que ceux de la méthode GPR-MC car il faut calculer les prix européens.

3.3 Discussion

Dans cet article, nous avons proposé une nouvelle approche pour évaluer les options américaines sur des paniers d'actifs, chacun d'entre eux suivant une dynamique de Black-Scholes. La méthode utilise une technique d'apprentissage automatique, une méthode de Monte Carlo et une technique de réduction de la variance qui exploite le prix de l'option européenne comme variable de contrôle. Les prix européens sont calculés au moyen d'une formule semi-analytique ou de simulations Quasi-Monte Carlo. Les résultats numériques montrent que la méthode est fiable et rapide pour des paniers comprenant jusqu'à 100 actifs. L'utilisation d'une variable de contrôle améliore la précision de l'algorithme et réduit la variance des prix estimés. De plus, l'algorithme est partiellement parallélisable et le temps de calcul peut donc être réduit de manière significative. L'apprentissage automatique semble être un outil très prometteur pour l'évaluation des options américaines en haute dimension, en surmontant le problème de la malédiction de la dimension.