

Équation de Riccati et modèle de Heston

Elie Attal, Loris Domeneghetti, Emmanuel Gnabeyeu Mbiada

Mars 2023

Contents

1	Introduction	3
1.1	Modèle classique de Heston	3
1.2	Exemple : Pricing rapide par les techniques d'inversion de Fourier dans le modèle CIR	3
1.3	Exemple : Pricing rapide par les techniques d'inversion de Fourier dans le modèle classique de Heston	3
2	Théorie	5
2.1	Dimension 1	5
2.1.1	Une solution explicite avec coefficients constants	5
2.1.2	Existence et unicité avec coefficients dépendants du temps	8
2.2	Dimension n	10
2.2.1	<i>Ordered Exponential</i>	10
2.2.2	Matrice de Metzler	10
2.2.3	Quelques résultats	11
2.2.4	Retour au problème	13
2.3	Riccati-Volterra ou dimension infinie	16
2.3.1	Noyau, produit, résolvante	16
2.3.2	Cas réel	17
2.3.3	Cas complexe	19
2.3.4	Pourquoi une telle relation entre noyau et résolvante ? . .	20
3	Etude numérique	21
3.1	Méthode de Runge-Kutta	21
3.2	Schémas basés sur la variation de la constante	21
3.3	Comparaison des schémas numériques	22
3.3.1	Test sur une fonction particulière	22
3.3.2	Ordre et vitesse de convergence	28
3.4	Simulation du processus de diffusion	30
3.4.1	Modèle de Heston	30
3.4.2	Affine volterra : Rough Heston	31
3.5	Pricing	34
3.5.1	Transformation de Fourier inverse	34
3.5.2	Pricing par Monte-Carlo du processus de diffusion de Heston	35
3.5.3	Schémas de différence finie (FD) pour l'évaluation des options dans le modèle de Heston	35
3.6	Tests et comparaison des méthodes de pricing développées . . .	36
3.6.1	Tests avec différents benchmarks	36
3.6.2	Comparaison des différentes méthodes de pricing	37
3.6.3	Valeurs extrêmes : Heston paramétrique	38
4	Bibliographie	40

1 Introduction

1.1 Modèle classique de Heston

Heston a proposé un modèle de volatilité stochastique avec une solution pour le prix d'une option d'achat européenne lorsque les actifs sous-jacents sont corrélés avec un processus stochastique de volatilité latente. Examinons le ci-dessous.

Considérons au temps t l'actif au comptant $S(t)$ qui obéit à un processus de diffusion :

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dW_1(t) \quad (1)$$

la volatilité étant traitée comme un processus stochastique latent de Feller tel que proposé par Cox, Ingersoll et Ross (CIR)

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \sigma\sqrt{v(t)}dW_2(t) \quad (2)$$

où $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont tous deux des processus de Wiener standard avec un coefficient de corrélation donné par $\rho > 0$: $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$.

1.2 Exemple : Pricing rapide par les techniques d'inversion de Fourier dans le modèle CIR

Pour un bond zéro-coupon, on peut modéliser le taux d'intérêt instantané r_t par le modèle CIR, c'est-à-dire $r_t = v_t$, et alors, parce que, $\mathbb{E}[e^{u \int_t^T v_s ds} | F_t] = \exp(\varphi(T-t) + \psi(T-t)v_t)$, où ψ est solution d'une **équation de Riccati**, le prix du bond est donné après transformation inverse de Fourier-Laplace par $P(t, T) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} \times 1 | F_t]$.

1.3 Exemple : Pricing rapide par les techniques d'inversion de Fourier dans le modèle classique de Heston

Étant donné que la volatilité dépend du temps, la fixation du prix à l'aide du modèle de Heston peut être effectuée en utilisant la simulation de Monte-Carlo et les différents schémas numériques pour les processus à temps continu, solution d'une EDS particulière. Cela prend du temps en haute dimension, et nous cherchons à trouver une formule d'évaluation proche de celle du modèle de Black-Scholes.

En raison de la structure similaire au modèle de Black-Scholes, Heston suggère que la solution soit de la forme:

$$C(S, v, t) = SP_1 - KP(t, T)P_2 \quad (3)$$

où le premier terme est la valeur actuelle de l'actif sous-jacent, et le second terme est la valeur actuelle du prix d'exercice.

Si l'on connaît la fonction caractéristique du prix logarithmique (transformée de Fourier) ϕ_T , les termes P_1, P_2 sont définis via la transformée de Fourier inverse.

Nous considérons la fonction caractéristique du logarithme du prix $X_t = \log(S_t)$ (ou $\log(\frac{S_t}{S_0})$ selon notre préférence) comme $\phi_t(u, T)$, elle est alors donnée par : $\phi_t(u, T) = \mathbb{E}[e^{iuX_t}]$.

Nous pouvons montrer qu'il existe g, α, ψ tels que :

$$\phi_t(u, T) = \exp(g(u, t) + \alpha\psi)$$

Dans une telle formulation, ψ est la solution unique d'une équation de Riccati.
Plus généralement ,

$$\mathbb{E} [e^{iu \log S_T} | \mathcal{F}_t] = e^{iu \log S_t + \phi(T-t) + \psi(T-t)V_t}$$

pour $u \in \mathbb{R}$ où (ϕ, ψ) sont donnés sous forme d'EDO.

(ϕ, ψ) résolvent le système d'EDO de Riccati suivant:

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \kappa\theta\psi, \quad \phi(0) = 0, \\ \dot{\psi} &= -\frac{1}{2}(u^2 + iu) + (i\rho\sigma u - \kappa)\psi + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2, \quad \psi(0) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Nous retrouverons notamment ces termes particuliers dans l'équation de Riccati lors de notre résolution numérique en dimension 1.

Ainsi, au sein du modèle de Heston l'équation de Riccati joue un rôle essentiel. Nous nous proposons donc de l'étudier sous différentes formes, en généralisant la méthode de variation de la constante. D'abord, nous expliciterons des solutions en dimension 1 avec coefficients constants avant de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas dépendant du temps. Ensuite, nous nous intéresserons à une forme multidimensionnelle de l'équation de Riccati, ainsi qu'à une version fractionnaire (Riccati-Volterra) intervenant notamment lorsque l'on utilise des modèles de volatilité rugueuse. Enfin, nous comparerons différentes méthodes numériques de résolution de l'équation de Riccati 1D, certaines utilisant la variation de la constante, avant d'appliquer cela à du pricing d'options.

2 Théorie

2.1 Dimension 1

2.1.1 Une solution explicite avec coefficients constants

Nous cherchons à étudier l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\Psi' = a\Psi^2 + b\Psi + c \quad \text{sur } [0; T] \text{ avec } \Psi(0) = u_0 \quad (5)$$

Tout d'abord, si Ψ est à valeur dans \mathbb{C} alors la fonction :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\longrightarrow ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

est C^∞ car polynomiale. Notamment elle est C^1 donc localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz : il existe donc une unique solution maximale $\tilde{\Psi}$ maximale sur un intervalle $[0; t_{max}]$ avec $t_{max} \leq T$. Notons que Ψ est obligatoirement C^∞ sur son intervalle de définition car F l'est.

Nous allons tenter d'expliquer cette solution, commençons de manière un peu plus heuristique :

Nous étudions d'abord le cas où $c = 0$, nous considérons de plus que Ψ ne s'annule pas :

$$\Psi' = a\Psi^2 + b\Psi \quad (6)$$

$$\frac{\Psi'}{\Psi} = a\Psi + b \quad (7)$$

Ψ est C^∞ donc nous pouvons dériver une deuxième fois (nous considérons que Ψ' ne s'annule pas) :

$$\Psi'' = 2a\Psi'\Psi + b\Psi' \quad (8)$$

$$\frac{\Psi''}{\Psi'} = 2a\Psi + b \quad (9)$$

$$= 2\frac{\Psi'}{\Psi} - b \quad (10)$$

Ce qui nous donne alors la relation :

$$d\ln(\Psi') = 2d\ln(\Psi) - b \quad (11)$$

Que nous pouvons intégrer entre 0 et t pour $0 \leq t < t_{max}$ (si $u_0 \neq 0$):

$$\ln\left(\frac{\Psi'(t)}{\Psi'(0)}\right) = 2 \ln\left(\frac{\Psi(t)}{\Psi(0)}\right) - bt \quad (12)$$

$$\ln\left(\frac{\Psi'(t)}{au_0^2 + bu_0}\right) = 2 \ln\left(\frac{\Psi(t)}{u_0}\right) - bt \quad (13)$$

$$\Psi'(t) = \frac{au_0^2 + bu_0}{u_0^2} e^{-bt} \Psi^2(t) \quad (14)$$

$$\Psi'(t) = \left(a + \frac{b}{u_0}\right) e^{-bt} \Psi^2(t) \quad (15)$$

Ce que l'on peut réinjecter dans l'équation initiale pour obtenir :

$$\left(a + \frac{b}{u_0}\right) e^{-bt} \Psi^2(t) = a\Psi^2(t) + b\Psi(t) \quad (16)$$

$$\left(a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}\right) \Psi(t) = b \quad (17)$$

$$\Psi(t) = \frac{b}{a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}} \quad (18)$$

Vérifions que cette formule fonctionne :

Tout d'abord, nous avons bien $\Psi(0) = u_0$. Puis :

$$\Psi'(t) = -b \frac{-bae^{-bt} - \frac{b^2}{u_0} e^{-bt}}{\left[a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}\right]^2} \quad (19)$$

$$= b^2 \frac{ae^{-bt} + \frac{b}{u_0} e^{-bt} - a + a}{\left[a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}\right]^2} \quad (20)$$

$$= \frac{b^2}{a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}} + \frac{ab^2}{\left[a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt}\right]^2} \quad (21)$$

$$= b\Psi(t) + a\Psi^2(t) \quad (22)$$

Nous avons donc bien trouvé la solution à (6). Si $u_0 = 0$ il est clair que $\Psi = 0$ est la solution.

Dans le cas où $u_0 \neq 0$, pour que la solution reste bornée sur $[0; t_{max}]$ il faut :

$$a(e^{-bt} - 1) + \frac{b}{u_0} e^{-bt} \neq 0, \quad \forall t \in [0; t_{max}]$$

Soit (si $a \neq 0$, dans le cas contraire F est globalement lipschitzienne donc nous avons l'existence et l'unicité d'une solution sur $[0; T]$):

$$e^{bt} \neq 1 + \frac{b}{au_0}, \quad \forall t \in [0; t_{max}]$$

Et si $b = 0$: La solution est alors $\Psi(t) = -\frac{1}{a(t - \frac{1}{au_0})}$ qui reste bornée si et seulement si :

$$\frac{1}{au_0} \notin [0; t_{max}]$$

Rajoutons maintenant la constante c et tentons de trouver une solution à (1) sous la forme :

$$\tilde{\Psi} = \Psi + \lambda$$

Où Ψ vérifie une équation de la forme :

$$\Psi' = \alpha\Psi^2 + \beta\Psi$$

(1) nous donne donc :

$$\Psi' = a\Psi^2 + 2a\lambda\Psi + a\lambda^2 + b\Psi + b\lambda + c \quad (23)$$

$$= a\Psi^2 + (2a\lambda + b)\Psi + a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (24)$$

Nous voyons donc que nous devons prendre λ racine du polynôme $aX^2 + bX + c$, $\alpha = a$ et $\beta = 2a\lambda + b$.

De plus, si on veut $\tilde{\Psi}(0) = u_0$ il faut $\Psi(0) = u_0 - \lambda$.

Pour Conclure : Réunissons tout ce que nous venons de trouver pour les solutions de l'équation (5) : Soit λ une racine du polynôme $aX^2 + bX + c$, si $u_0 = \lambda$ on prend la seconde racine dans le cas où le discriminant est non nul, s'il est nul il existe une unique solution sur $[0; T]$ qui est la fonction constante égale à λ . Dans la suite nous traitons donc le cas $\Delta \neq 0$.

- Si $a = 0$:

- Si $b = 0$: il existe une unique solution sur $[0; T]$:

$$\tilde{\Psi}(t) = ct + u_0, \quad \forall t \in [0; T]$$

- $b \neq 0$: il existe une unique solution sur $[0; T]$:

$$\tilde{\Psi}(t) = (u_0 + \frac{c}{b})e^{bt} - \frac{c}{b}, \quad \forall t \in [0; T]$$

- Si $a \neq 0$:

- Si $b = 0$: il existe une unique solution sur $[0; T]$ si et seulement si :

$$\frac{1}{a(u_0 - \lambda)} \notin [0; T]$$

Qui est :

$$\tilde{\Psi}(t) = -\frac{1}{a(t - \frac{1}{a(u_0 - \lambda)})} + \lambda, \quad \forall t \in [0; T]$$

– Si $b \neq 0$: il existe une unique solution sur $[0; T]$ si et seulement si :

$$e^{(2a\lambda+b)t} \neq 1 + \frac{2a\lambda + b}{a(u_0 - \lambda)}, \quad \forall t \in [0; t_{max}]$$

Qui est :

$$\tilde{\Psi}(t) = \frac{2a\lambda + b}{a(e^{-(2a\lambda+b)t} - 1) + \frac{2a\lambda + b}{u_0 - \lambda} e^{-(2a\lambda+b)t}} + \lambda, \quad \forall t \in [0; T]$$

2.1.2 Existence et unicité avec coefficients dépendants du temps

Nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution Ψ de partie réelle négative à l'équation :

$$\Psi'(t) = a(t)\Psi^2(t) + b(t)\Psi(t) + c(t) \quad \text{sur } [0; T] \text{ avec } \Psi(0) = u_0 \quad (25)$$

Sous les contraintes suivantes :

- $a \in \mathcal{C}^0([0; T], \mathbb{R}_*^+)$.
- $u_0 \in \mathbb{R}^-$.
- $b, c \in \mathcal{C}^0([0; T], \mathbb{C})$.
- $b_r = \Re(b) \geq 0$.
- $\frac{b_i^2}{4a} + c_r \leq 0$.

De la même manière que précédemment, la fonction :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, x) &\longrightarrow a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \end{aligned}$$

est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable donc nous avons l'existence d'une unique solution maximale Ψ sur un intervalle $[0; t_{max}]$. Il ne rest plus qu'à montrer que cette solution ne diverge pas en t_{max} et que sa partie réelle est négative. Pour cela nous allons utiliser la formule de variation de la constante.

Prenons d'abord la partie réelle de l'équation (25) :

$$\Psi'_r(t) = a(t)\Psi_r^2(t) - a(t)\Psi_i^2(t) + b_r(t)\Psi_r(t) - b_i\Psi_i(t) + c_r(t) \quad (26)$$

Ce que nous réécrivons :

$$\Psi'_r(t) = (a(t)\Psi_r(t) + b_r(t))\Psi_r(t) + d(t) \quad (27)$$

Où :

$$d(t) = -a(t)\Psi_i^2(t) - b_i(t)\Psi_i(t) + c_r(t) \quad (28)$$

$$= -a(t) \left(\Psi_i(t) + \frac{b_i(t)}{2a(t)} \right)^2 + \frac{b_i^2(t)}{4a(t)} + c_r(t) \quad (29)$$

Ainsi $d \leq 0$ d'après nos suppositions.

Nous pouvons ensuite appliquer la formule de variation de la constante :

$$\Psi_r(t) = e^{\int_0^t [a(s)\Psi_r(s) + b_r(s)]ds} u_0 + \int_0^t e^{\int_s^t [a(u)\Psi_r(u) + b_r(u)]du} d(s) ds \quad (30)$$

Ainsi nous avons bien, comme voulu, $\Psi_r \leq 0$.

Montrons maintenant que cette solution est ne diverge pas et est donc prolongeable sur $[0; T]$. Pour cela, nous appliquons de nouveau la variation de la constante mais dans l'équation (25) réécrite de la sorte :

$$\Psi'(t) = (a(t)\Psi(t) + b(t))\Psi(t) + c(t) \quad (31)$$

Ce qui nous donne :

$$\Psi(t) = e^{\int_0^t [a(s)\Psi(s) + b(s)]ds} u_0 + \int_0^t e^{\int_s^t [a(u)\Psi(u) + b(u)]du} c(s) ds \quad (32)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq |e^{\int_0^t [a(s)\Psi(s) + b(s)]ds}| |u_0| + \int_0^t |e^{\int_s^t [a(u)\Psi(u) + b(u)]du}| |c(s)| ds \\ &\leq e^{\int_0^t [a(s)\Psi_r(s) + b_r(s)]ds} |u_0| + \int_0^t e^{\int_s^t [a(u)\Psi_r(u) + b_r(u)]du} |c(s)| ds \\ &\leq e^{\int_0^t b_r(s) ds} |u_0| + \int_0^t e^{\int_s^t b_r(u) du} |c(s)| ds \\ &\leq \left(\sup_{(t,s) \in [0;T]^2} e^{\int_s^t b_r(u) du} \right) (|u_0| + \int_0^T |c(s)| ds) \end{aligned}$$

Notre solution est donc bien bornée par une constante ne dépendant pas d'elle-même ni de t_{max} . Nous avons bien l'existence et l'unicité sur l'intervalle entier $[0; T]$.

2.2 Dimension n

Nous nous intéressons désormais au problème suivant :

$$\Psi'_i = a_i \Psi_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} \Psi_j + c_i \quad \text{sur } [0; T] \text{ avec } \Psi_i(0) = u_0^i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (33)$$

Que nous pouvons réécrire de manière vectorielle :

$$\Psi' = d(a)d(\Psi)\Psi + B\Psi + c \quad \text{sur } [0; T] \text{ avec } \Psi(0) = u_0 \quad (34)$$

Où nous notons, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $d(x)$ la matrice $n \times n$ diagonale avec $(d(x))_{ii} = x_i$.

2.2.1 Ordered Exponential

Nous avons pour la suite besoin d'introduire un outil important. Lorsque l'on cherche à résoudre le système différentiel matriciel :

$$\begin{cases} M'(t) &= A(t)M(t) \\ M(0) &= I_n \end{cases} \quad (35)$$

Où M et A sont des matrices, on est confronté à un problème si l'on a pas $A(t)A(s) = A(s)A(t)$ pour tout s et t dans l'intervalle de résolution. Ainsi la solution n'est pas $M(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$ comme dans le cas où A est constante au cours du temps. Nous devons introduire un nouvel objet, l'exponentiel ordonné défini par :

$$OE[A](t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A(t_n)\Delta t} \cdots e^{A(t_0)\Delta t}) = \prod e^{A(s)ds} \quad (36)$$

Où $t_i = \frac{it}{n}$ par exemple (il faut une subdivision de $[0; t]$).

Alors le résultat important est que $OE[A]$ est l'unique solution au problème (23) sur l'intervalle de résolution.

Notons que si la condition :

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \forall (t, s) \in [0; T]^2$$

est vérifiée, l'exponentiel ordonné correspond bien à l'exponentiel de la primitive de A comme dans le cas 1D : $e^{\int_0^t A(s)ds}$.

2.2.2 Matrice de Metzler

Les matrices de Metzler vont être nécessaires pour la suite. Une matrice A est dite de Metzler si tous ses coefficients non-diagonaux sont positifs :

$$A_{ij} \geq 0, \quad \forall i \neq j$$

La propriété qui nous intéresse ici est la suivante : si A est de Metzler alors e^A est à coefficients positifs.

Proof. Comme A est de Metzler nous pouvons écrire $A = B - \lambda I_n$ où B est à coefficients positifs et $\lambda \geq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} e^A &= e^{B-\lambda I_n} \\ &= e^B e^{-\lambda I_n} \quad B \text{ et } I_n \text{ commutent} \\ &= e^B (e^{-\lambda} I_n) \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^B \end{aligned}$$

Qui est donc une matrice à coefficients positifs car B l'est donc e^B l'est trivialement. \square

2.2.3 Quelques résultats

Nous allons maintenant montrer quelques résultats concernant l'exponentiel ordonné qui nous seront utiles pour la suite.

- **Résultat 1 :** Si $A(t)$ est de Metzler pour tout t , alors $OE[A](t)$ est à coefficients positifs pour tout t .

Proof. Cela vient du fait que $e^{A(t_i)\Delta t}$ est à coefficients positifs comme $A(t_i)$ est de Metzler et que $\Delta t > 0$. Le produit de matrices à coefficients positifs est à coefficients positifs. On peut donc passer à la limite selon la définition (36) pour obtenir le résultat. \square

- **Résultat 2 :** $OE[A](t)$ est toujours inversible et son inverse vérifie :

$$\begin{cases} (OE[A](t)^{-1})' &= -OE[A](t)^{-1}A(t) \\ OE[A](0)^{-1} &= I_n \end{cases} \quad (37)$$

Ainsi que :

$$(OE[A](t))^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-A(t_0)\Delta t} \dots e^{-A(t_n)\Delta t}) \quad (38)$$

Proof. Posons $Y(t) := OE[A](t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_0)\Delta t})$ et $\tilde{Y}(t) := \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-A(t_0)\Delta t} \dots e^{-A(t_n)\Delta t})$ Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_0)\Delta t} e^{-A(t_0)\Delta t} \dots e^{-A(t_n)\Delta t} = I$$

Les exponentiels s'annulant deux à deux. Nous pouvons ensuite passer à la limite en n ce qui nous donne :

$$Y(t)\tilde{Y}(t) = I$$

De la même manière on obtient bien $\tilde{Y}(t)Y(t) = I$. Ainsi, $Y(t)$ est bien inversible, son inverse est $\tilde{Y}(t)$ qui vérifie bien (38).

Ensuite :

$$\begin{aligned}(Y\tilde{Y})'(t) &= Y'(t)\tilde{Y}(t) + Y(t)\tilde{Y}'(t) \\ &= A(t)Y(t)\tilde{Y}(t) + Y(t)\tilde{Y}'(t) \\ &= A(t) + Y(t)\tilde{Y}'(t)\end{aligned}$$

Or $(Y\tilde{Y})(t) = I$ pour tout t par définition donc $(Y\tilde{Y})'(t) = 0$. On multiplie ensuite l'égalité par $\tilde{Y}(t)$ à gauche ce qui nous donne :

$$\tilde{Y}'(t) = -\tilde{Y}(t)A(t)$$

Et on a facilement :

$$\tilde{Y}(0) = (Y(0))^{-1} = I^{-1} = I$$

Donc l'inverse de $Y(t)$ vérifie bien (37). \square

- **Résultat 3 :** (Ce résultat est spécifique mais apparaîtra tel quel dans notre problème) si $A(u)$ est de Metzler pour tout u et on a $s \leq t$ alors la matrice $OE[A](t)(OE[A](s))^{-1}$ est à coefficients positifs.

Proof. On modifie légèrement notre subdivision $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ en rajoutant un point. Il existe un indice i_0 tel que $t_{i_0} < s < t_{i_0+1}$ (si s est déjà un élément de la subdivision on ne change rien). On rajoute donc le point s dans la subdivision, entre t_{i_0} et t_{i_0+1} . Alors la limite n'est pas modifiée, c'est-à-dire que l'on a toujours :

- $OE[A](t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_{i_0+1})\Delta t} e^{A(s)\Delta t} e^{A(t_{i_0})\Delta t} \dots e^{A(t_0)\Delta t})$
- $(OE[A](s))^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-A(t_0)\Delta t} \dots e^{-A(t_{i_0})\Delta t} e^{-A(s)\Delta t})$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned}OE[A](t)(OE[A](s))^{-1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_{i_0+1})\Delta t} e^{A(s)\Delta t} e^{A(t_{i_0})\Delta t} \dots \\ &\quad \dots e^{A(t_0)\Delta t} e^{-A(t_0)\Delta t} \dots e^{-A(t_{i_0})\Delta t} e^{-A(s)\Delta t}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_{i_0+1})\Delta t})\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une limite d'un produit de matrice à coefficients positifs (les $A(u)$ sont de Metzler) qui est bien à coefficients positifs. \square

- **Résultat 4 (variation de la constante pour l'exponentiel ordonné)** : Nous allons montrer que l'on peut utiliser une méthode de variation de la constante avec l'exponentiel ordonné. Nous cherchons à résoudre l'équation différentielle vectorielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) + b(t) \\ y(0) &= u_0 \end{cases} \quad (39)$$

Premièrement, il est important de noter que l'unique solution à l'équation vectorielle :

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t) \\ y(0) &= u_0 \end{cases} \quad (40)$$

est $y(t) := OE[A](t)u_0$.

Pour l'équation (39), nous effectuons une variation de la constante en posant $\tilde{y}(t) := OE[A](t)u(t)$. Nous devons donc vérifier :

$$OE[A]'(t)u(t) + OE[A](t)u'(t) = A(t)OE[A](t)u(t) + b(t)$$

Par l'équation vérifiée par $OE[A]$ cela nous donne donc :

$$OE[A](t)u'(t) = b(t)$$

Soit :

$$u(t) = \int_0^t (OE[A](s))^{-1}b(s)ds + u(0)$$

Puis :

$$\tilde{y}(t) = OE[A](t)u(0) + \int_0^t OE[A](t)(OE[A](s))^{-1}b(s)ds$$

Donc notre solution est finalement (en regardant la valeur de $u(0)$ pour avoir la bonne condition initiale):

$$\tilde{y}(t) = OE[A](t)u_0 + \int_0^t OE[A](t)(OE[A](s))^{-1}b(s)ds \quad (41)$$

2.2.4 Retour au problème

Revenons au problème en dimension n , avec $a(t) \in \mathbf{R}_+^n$, $B(t)$ de Metzler pour tout $t \leq T$, $c(t) \in \mathbf{R}_-^n$ et $u_0 \in \mathbf{R}_-^n$:

$$\Psi' = d(a)d(\Psi)\Psi + B\Psi + c \text{ sur } [0;T] \text{ avec } \Psi(0) = u_0 \quad (42)$$

Où nous notons, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $d(x)$ la matrice $n \times n$ diagonale avec $(d(x))_{ii} = x_i$.

Réécrivons (42) sous la forme :

$$\begin{cases} \Psi' &= A\Psi + c \\ \Psi(0) &= u_0 \end{cases} \quad (43)$$

Où $A = d(a)d(\Psi) + B$.

Comme dans (2.1), on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et prendre Ψ l'unique solution maximale de (43) définie sur $[0, t_{max}]$. La démarche est de borner Ψ sur cet intervalle, et ainsi pouvoir la prolonger sur $[0, T]$.

Montrons d'abord que $\Psi \leq 0$.

Par le résultat 4 de (2.2.3), on peut écrire :

$$\Psi(t) = OE[A](t)u_0 + \int_0^t OE[A](t)(OE[A](s))^{-1}c(s)ds \quad (44)$$

Or, A est de Metzler pour tout $t \in [0, t_{max}[$ puisque B l'est.

Par le résultat 1 de (2.2.3), on a que $OE[A](t)$ est à coefficients positifs, et donc que $OE[A](t)u_0 \leq 0$.

De plus, par le résultat 3, on a aussi que $OE[A](t)(OE[A](s))^{-1}c(s) \leq 0$ pour tous $s \leq t \in [0, t_{max}[$.

Finalement, on a bien $\Psi \leq 0$.

Montrons maintenant que Ψ est minorée.

Fixons un $t_i \in [0, t_{max}[$ et comparons les fonctions solutions des deux systèmes suivants, avec $0 \geq u_1 \geq u_2$:

$$\begin{cases} y'_1(t) &= A(t_i)y_1(t) \\ y_1(0) &= u_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'_2(t) &= B(t_i)y_2(t) \\ y_2(0) &= u_2 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} (y_1 - y_2)'(s) &= A(t_i)(y_1 - y_2)(s) + d(a(t_i))d(\Psi(t_i))y_2(s) \\ (y_1 - y_2)(0) &= u_1 - u_2 \end{cases} \quad (45)$$

Par la variation de la constante, on peut écrire :

$$(y_1 - y_2)(s) = e^{A(t_i)s}(u_1 - u_2) + \int_0^s e^{A(t_i)(s-u)}d(a(t_i))d(\Psi(t_i))y_2(u)du \quad (46)$$

Puisque $A(t_i)$ est de Metzler et que $u_1 \geq u_2$, on a que $e^{A(t_i)s}(u_1 - u_2) \geq 0$.

De plus, on a $y_2(u) \leq 0$ car $u_2 \leq 0$ et $B(t_i)$ est de Metzler. Comme $\Psi(t_i) \leq 0$ et $a(t_i) \geq 0$, on a :

$$\forall u \leq s, e^{A(t_i)(s-u)}d(a(t_i))d(\Psi(t_i))y_2(u) \geq 0$$

Donc $y_1(s) \geq y_2(s)$.

Finalement :

$$\forall s, t_i \in [0, T], \forall u_2 \leq u_1 \leq 0, e^{A(t_i)s}u_1 \geq e^{B(t_i)s}u_2. \quad (47)$$

En particulier, pour toute subdivision de $[0, t_{max}[$ (t_0, t_1, \dots, t_N), on a :

$$e^{A(t_0)\Delta t}u_0 \geq e^{B(t_0)\Delta t}u_0$$

L'équation (47) donne alors aussi que: $e^{A(t_1)\Delta t}e^{A(t_0)\Delta t}u_0 \geq e^{B(t_1)\Delta t}e^{B(t_0)\Delta t}u_0$. Ainsi, de proche en proche, on obtient:

$$e^{A(t_N)\Delta t} \dots e^{A(t_1)\Delta t}e^{A(t_0)\Delta t}u_0 \geq e^{B(t_N)\Delta t} \dots e^{B(t_1)\Delta t}e^{B(t_0)\Delta t}u_0$$

D'où, en passant à la limite, on trouve:

$$\forall t < t_{max}, \text{ } OE[A](t)u_0 \geq OE[B](t)u_0 \quad (48)$$

De plus, en reprenant les notations du résultat 3 de (2.2.3), (47) donne aussi que :

$$e^{A(t_n)\Delta t} \dots e^{A(t_{i_0+1})\Delta t}c(s) \geq e^{B(t_n)\Delta t} \dots e^{B(t_{i_0+1})\Delta t}c(s)$$

Ce qui donne:

$$\forall s \leq t < t_{max}, \text{ } OE[A](t)OE[A](s)^{-1}c(s) \geq OE[B](t)OE[B](s)^{-1}c(s) \quad (49)$$

On a donc:

$$\forall t < t_{max}, \Psi(t) \geq OE[B](t)u_0 + \int_0^t OE[B](s)OE[B](s)^{-1}c(s)ds$$

D'où la minoration:

$$\Psi \geq \inf_{t \in [0, t_{max}[} \left(OE[B](t)u_0 + \int_0^t OE[B](s)OE[B](s)^{-1}c(s)ds \right) \quad (50)$$

On a donc montré que Ψ était bornée sur $[0, t_{max}[$. D'où l'existence d'une solution globale de (42) définie sur $[0, T]$.

2.3 Riccati-Volterra ou dimension infinie

On cherche désormais à étudier l'équation intégrale :

$$\Psi(t) = \int_0^t K(t,s) [a(s)\Psi^2(s) + b(s)\Psi(s) + c(s)] ds \quad \text{sur } [0;T] \quad (51)$$

Où K est mesurable sur $[0;T]^2$ à valeurs complexes tel que $K(t,s) = 0$ si $s > t$ (nous appelons cela un noyau de type Volterra).

Que nous pouvons réécrire :

$$\Psi(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)\Psi(s)ds + \int_0^t K(t,s)c(s)ds \quad (52)$$

Où $f(s) = a(s)\Psi(s) + b(s)$.

Ou encore :

$$\Psi(t) = \int_0^t \tilde{K}(t,s)\Psi(s)ds + \int_0^t K(t,s)c(s)ds \quad (53)$$

Avec $\tilde{K}(t,s) = K(t,s)f(s)$.

2.3.1 Noyau, produit, résolvante

Les fonctions $K : [0;T]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ utilisées comme au-dessus sont appelées des noyaux "de convolution" s'il se mettent sous la forme $K(t,s) = H(t-s)$ et "de non-convolution" dans le cas contraire. Ils s'utilisent à l'aide d'un produit de convolution redéfini de la sorte :

- Si $H : [0;T]^2 \rightarrow \mathbb{C} : (K * H)(t,s) = \int_s^t K(t,u)H(u,s)du$
- Si $g : [0;T] \rightarrow \mathbb{C} : (K * g)(t) = \int_0^t K(t,s)g(s)ds$

Ce produit est évidemment distributif, mais montrons aussi qu'il est associatif dans un cas particulier qui nous servira par la suite :

Si $H : [0;T]^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $K : [0;T]^2 \rightarrow \mathbb{C}$ et $f : [0;T] \rightarrow \mathbb{C}$, alors $H * (K * f) = (H * K) * f$ ce que nous notons $H * K * f$.

Proof. Soit t dans $[0;T]$:

$$\begin{aligned} H * (K * f)(t) &= \int_0^t H(t,s)(K * f)(s)ds \\ &= \int_0^t H(t,s) \int_0^s K(s,u)f(u)duds \\ &= \int_0^t \int_u^t H(t,s)K(s,u)f(u)dsdu \\ &= \int_0^t (H * K)(t,u)f(u)du \\ &= (H * K) * f(t) \end{aligned}$$

□

Un objet essentiel dans l'étude des équations du type (53) est la résolvante d'un noyau. Nous la définissons comme suit :
S'il existe $R : [0; T]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant sur $[0; T]^2$:

$$R * K = K * R = K - R \quad (54)$$

Alors R est appelée résolvante de K sur $[0; T]$. Cet objet nous permet d'avoir l'équivalent d'une méthode de variation de la constante sur les équations du type (53), en effet si nous avons l'équation :

$$X = K * X + F$$

Alors, si $-K$ admet une résolvante R , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} X - R * X &= K * X + F - R * K * X - R * F \\ &= K * X + F - K * X - R * X - R * F \\ &= F - R * X - R * F \end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en :

$$X = F - R * F \quad (55)$$

Ce X est de même facilement solution de l'équation de départ, il s'agit donc bien de l'unique solution.

2.3.2 Cas réel

Nous revenons à notre équation (51) dans le cas réel et nous faisons les suppositions suivantes :

- K est une fonction positive réelle vérifiant :

$$\forall s \leq u \leq v \leq t \in [0; T], \quad K(t, u)K(v, s) \leq K(t, s)K(v, u) \quad (56)$$

- $a, b \in L^\infty([0; T], \mathbb{R}_*^+)$.
- $c \in L^\infty([0; T], \mathbb{R}_*^-)$.
- Il existe une unique solution Ψ sur un intervalle maximal $[0; t_{max}]$.
- $f = a\Psi + b$ est non nulle presque partout sur $[0; T]$.
- $-\tilde{K}$ admet une résolvante \tilde{R} sur $[0; T]$ qui vérifie :

$$\forall (t, s) \in [0; T]^2, \quad -\frac{\tilde{R}(t, s)}{f(s)} \geq 0 \quad (57)$$

Nous cherchons alors à borner notre solution Ψ jusqu'en T pour la prolonger et montrer son existence et unicité sur tout l'intervalle. Premièrement, nous pouvons écrire notre variation de la constante, comme nous avons :

$$\Psi = \tilde{K} * \Psi + K * c \quad (58)$$

Alors :

$$\Psi = K * c - \tilde{R} * K * c \quad (59)$$

Nous remarquons ici que notre fonction F (voir démonstration variation de la constante) est d'une forme particulière ($K * c$) que nous pouvons exploiter :

$$\Psi(t) = ((K - \tilde{R} * K) * c)(t) \quad (60)$$

$$= \int_0^t (K - \tilde{R} * K)(t, s)c(s)ds \quad (61)$$

$$= \int_0^t \left[K(t, s) - \int_s^t \tilde{R}(t, u)K(u, s)du \right] c(s)ds \quad (62)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{f(s)}(\tilde{K} - \tilde{R} * \tilde{K})(t, s)c(s)ds \quad (63)$$

$$= \int_0^t -\frac{\tilde{R}(t, s)}{f(s)}c(s)ds \quad (64)$$

Ainsi, avec les suppositions que nous avons faites, nous pouvons affirmer que $\Psi \leq 0$.

Nous allons désormais tenter de minorer Ψ . Nous définissons $\hat{\Psi}$ comme la solution de l'équation :

$$\hat{\Psi}(t) = \int_0^t K(t, s)(b(s)\hat{\Psi}(s) + c(s))ds \quad (65)$$

Que nous pouvons réécrire :

$$\hat{\Psi} = \hat{K} * \hat{\Psi} + K * c \quad (66)$$

Où $\hat{K}(t, s) = K(t, s)b(s)$.

De sorte que, si $-\hat{K}$ admet une résolvante \hat{R} sur $[0; T]$ (il semble plutôt clair que si $-\hat{K}$ en admet une, alors $-\hat{K}$ aussi) alors nous avons une expression explicite de $\hat{\Psi}$ (cette fois-ci la résolvante utilisée ne dépend pas de la fonction $\hat{\Psi}$) par la variation de la constante :

$$\hat{\Psi}(t) = \int_0^t -\frac{\hat{R}(t, s)}{b(s)}c(s)ds \quad (67)$$

Posons enfin $\Phi = \Psi - \hat{\Psi}$, cette fonction vérifie alors :

$$\Phi(t) = \int_0^t K(t, s)b(s)\Phi(s)ds + \int_0^t K(t, s)a(s)\Psi^2(s)ds \quad (68)$$

Soit :

$$\Phi = \hat{K} * \Phi + K * (a\Psi^2) \quad (69)$$

Nous pouvons donc utiliser la variation de la constante pour obtenir :

$$\Phi(t) = \int_0^t -\frac{\hat{R}(t, s)}{b(s)}a(s)\Psi^2(s)ds \quad (70)$$

Ainsi $\Phi \geq 0$ d'après nos suppositions (voir aussi 2.3.4.). Ce qui nous donne enfin :

$$\Psi(t) \geq \int_0^t -\frac{\hat{R}(t,s)}{b(s)} c(s) ds \quad (71)$$

Nous avons donc encadré Ψ sur $[0; t_{max}]$ de sorte qu'il ne diverge pas en t_{max} . Nous pouvons finalement prolonger son existence et unicité à l'intervalle entier $[0; T]$.

2.3.3 Cas complexe

Nous nous penchons désormais sur le cas complexe avec les suppositions suivantes :

- K est une fonction positive réelle vérifiant :

$$\forall s \leq u \leq v \leq t \in [0; T], \quad K(t, u)K(v, s) \leq K(t, s)K(v, u) \quad (72)$$

- $a \in L^\infty([0; T], \mathbb{R}_*^+)$.
- $b \in L^\infty([0; T], \mathbb{C})$ avec $b_r(t) = \Re(b(t)) > 0$.
- $c \in L^\infty([0; T], \mathbb{C})$.
- $\frac{\Im(b(t))^2}{4a(t)} + \Re(c(t)) \leq 0$.
- Il existe une unique solution Ψ sur un intervalle maximal $[0; t_{max}]$.
- $f = a\Psi_r + b_r = a\Re(\Psi) + \Re(b)$ est non nulle presque partout sur $[0; T]$.
- $-\tilde{K}(\cdot, \cdot) = -K(\cdot, \cdot)(a(\cdot)\Psi_r(\cdot) + b_r(\cdot)) = -K(\cdot, \cdot)f(\cdot)$ admet une résolvante \tilde{R} sur $[0; T]$ qui vérifie :

$$\forall (t, s) \in [0; T]^2, \quad -\frac{\tilde{R}(t, s)}{f(s)} \geq 0 \quad (73)$$

Nous y allons ici montrer que notre solution Ψ garde une partie réelle négative sur son intervalle de définition (à l'image de la démonstration en dimension 1). On prend la partie réelle sur l'équation (51) :

$$\Psi_r(t) = \int_0^t K(t, s) [a(s)\Psi_r^2(s) - a(s)\Psi_i^2(s) + b_r(s)\Psi_r(s) - b_i\Psi_i(s) + c_r(s)] ds \quad (74)$$

Que nous séparons de la manière suivante :

$$\Psi_r(t) = \int_0^t \tilde{K}(t, s)\Psi_r(s)ds + \int_0^t K(t, s)d(s)ds \quad (75)$$

Où ici $\tilde{K}(t, s) = K(t, s)f(s) = K(t, s)(a(s)\Psi_r(s) + b_r(s))$ et :

$$d(s) = -a(s)\Psi_i^2(s) - b_i\Psi_i(s) + c_r(s) \quad (76)$$

$$= -a(s) \left(\Psi_i(s) + \frac{b_i(s)}{2a(s)} \right)^2 + \frac{b_i^2(s)}{4a(s)} + c_r(s) \quad (77)$$

Ainsi $d \leq 0$ d'après nos suppositions.

Comme $\Psi_r = \tilde{K} * \Psi_r + K * d$ nous pouvons appliquer notre variation de la constante :

$$\Psi_r(t) = \int_0^t -\frac{\tilde{R}(t, s)}{f(s)} d(s) ds \quad (78)$$

Nous avons donc bien (voir suppositions) $\Psi_r \leq 0$.

2.3.4 Pourquoi une telle relation entre noyau et résolvante ?

Nous avons précédemment fait les suppositions (57) et (73) qui peuvent au premier abord paraître étranges. Aussi nous ne nous sommes pas servis des propriétés (56) et (72). En effet, le théorème 8.6 de Gripenberg nous donne le fait que sous (56)/(72) la résolvante est négative (changement de signe par rapport à sa définition de la résolvante mais démonstration identique). Ainsi, le noyau \tilde{K} du cas réel vérifie lui aussi bien ces propriétés ($b > 0$) d'où le fait que nous avons affirmé que Φ était positive.

De même, nous avons de bonnes chances d'estimer que la propriété suivante est vraie :

Si K vérifie (44) et que \tilde{R} est la résolvante de $-\tilde{K} = -Kf$, alors :

$$-\tilde{R}(\cdot, s) \text{ est du même signe que } f(s) \text{ pour tout } s \in [0; T] \quad (79)$$

D'où nos suppositions (45) et (61). Pour se donner une idée, voici des expressions explicites de résolvantes dans certains cas calculables :

- Si $K = c$ une constante (positive), alors :

$$\tilde{R}(t, s) = -cf(s)e^{-c \int_s^t f(u)du} \quad (80)$$

Ce qui vérifie bien la propriété voulue.

- Si K se décompose sous la forme $K(t, s) = k_1(t)k_2(s)$ (K est toujours positif ici), alors :

$$\tilde{R}(t, s) = -k_1(t)k_2(s)f(s)e^{-\int_s^t k_1(u)k_2(u)f(u)du} \quad (81)$$

Ce qui vérifie de nouveau bien la propriété.

3 Etude numérique

Revenons à l'équation de Riccati en dimension en 1 pour comparer différents schémas numériques :

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= f(t, \psi(t)) = a(t)\psi^2(t) + b(t)\psi(t) + c(t), \quad \psi(0) = u_0 \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a(t), b(t), c(t) &\in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{82}$$

Pour une fonction g quelconque, on écrit $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$. On a alors que $\psi_1(t)$ et $\psi_2(t)$ sont solution du système d'EDO:

$$\begin{cases} \psi'_1(t) = a_1(t)(\psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)) - 2a_2(t)\psi_1(t)\psi_2(t) + (b_1(t)\psi_1(t) - b_2(t)\psi_2(t)) + c_1(t), \\ \psi'_2(t) = a_2(t)(\psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)) + 2a_1(t)\psi_1(t)\psi_2(t) + (b_1(t)\psi_2(t) + b_2(t)\psi_1(t)) + c_2(t) \end{cases}$$

Dans la suite, nous allons examiner le cas (voir annexe pour plus de détails):

$$T = 2 \quad \text{et} \quad a(t) = \frac{\nu^2}{2}\epsilon^{2H-1}, \quad b(t) = i\rho\nu\tau\epsilon^{H-\frac{1}{2}}\zeta(t) - \frac{1}{\epsilon}, \quad c(t) = -\frac{\tau^2 + i\tau}{2}\zeta(t)$$

De plus, pour simplifier, nous prendrons, $\zeta(t) = 1$.

Notre objectif est d'étudier la solvabilité numérique de l'équation différentielle de Riccati sur l'intervalle $[0, T]$, que nous discrétisons d'abord comme suit :

$$[0, T] = \bigcup_{i=0}^{n-1} [t_i, t_{i+1}]$$

3.1 Méthode de Runge-Kutta

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4 pour approximer la fonction dépendant du temps ψ qui utilise la mise à jour :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Avec

$$\begin{cases} h = t_{i+1} - t_i \\ k_1 = f(t_i, y_i), \\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1), \\ k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2), \\ k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3) \end{cases} \tag{83}$$

3.2 Schémas basés sur la variation de la constante

En utilisant, la formulation de la variation de la constante et la discrétisation sur $[0, T]$, nous pouvons écrire :

$$\psi(t) = e^{\int_0^t (a(u)\psi(u) + b(u))du} u_0 + \int_0^t e^{\int_s^t (a(u)\psi(u) + b(u))du} c(s)ds = e^{\int_0^t \tilde{\psi}(u)du} u_0 + \int_0^t e^{\int_s^t \tilde{\psi}(u)du} c(s)ds$$

Et $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$:

$$\psi(t_{i+1}) = \psi(t_i) e^{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{\psi}(u) du} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{\int_s^{t_{i+1}} \tilde{\psi}(u) du} c(s) ds$$

Définissons les différents schémas suivants :

1. Variation constante et approximation gauche (CV 0 ordre LD) :

$$\text{Sur } [t_i, t_{i+1}] \quad \tilde{\psi}(u) = \tilde{\psi}(t_i) \quad (84)$$

2. Variation constante et développement limité au 1er ordre (CV 1er ordre LD) :

$$\text{Sur } [t_i, t_{i+1}] \quad \tilde{\psi}(u) = \frac{\tilde{\psi}(t_{i+1}) - \tilde{\psi}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (u - t_i) + \tilde{\psi}(t_i) \quad (85)$$

où $\tilde{\psi}(t_{i+1}) = a(t_{i+1})\psi(t_{i+1}) + b(t_{i+1})$

avec :

$$\psi(t_{i+1}) = \psi(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\psi'(t_i) = \psi(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, \psi(t_i)) \quad (86)$$

3. Variation constante et 2eme ordre développement limité (CV 2e ordre LD) :

$$\text{Sur } [t_i, t_{i+1}] \quad \tilde{\psi}(u) = \frac{\tilde{\psi}(t_{i+1}) - \tilde{\psi}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (u - t_i) + \tilde{\psi}(t_i) \quad (87)$$

où $\tilde{\psi}(t_{i+1}) = a(t_{i+1})\psi(t_{i+1}) + b(t_{i+1})$

avec :

$$\psi(t_{i+1}) = \psi(t_i) + (t_{i+1} - t_i)\psi'(t_i) = \psi(t_i) + (t_{i+1} - t_i)f(t_i, \psi(t_i)) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}f'(t_i, \psi(t_i)) \quad (88)$$

4. CV Predictor-corrector:

$$\text{Sur } [t_i, t_{i+1}] \quad \tilde{\psi}(u) = \frac{\tilde{\psi}(t_{i+1}) - \tilde{\psi}(t_i)}{t_{i+1} - t_i} (u - t_i) + \tilde{\psi}(t_i) \quad (89)$$

avec $\psi(t_{i+1})$ obtenu grâce à 1.

5. CV Predictor-corrector avec interpolation à 3 points:

Sur $[t_i, t_{i+1}], \psi(u)$ est l'interpolation de Lagrange de $\{(t_i, \psi(t_i)); (\frac{t_i+t_{i+1}}{2}, \psi(\frac{t_i+t_{i+1}}{2})); (t_{i+1}, \psi(t_{i+1}))\}$, où $\psi(\frac{t_i+t_{i+1}}{2})$ et $\psi(t_{i+1})$ sont approximés en utilisant le point 1.

3.3 Comparaison des schémas numériques

3.3.1 Test sur une fonction particulière

Dans cette partie, nous considérons une équation avec $H = 0.4, \epsilon = \frac{1}{52}, \rho = -0.8, \nu = 0.3, \tau = 50$.

La solution exacte est connue et l'allure de la courbe obtenue via cette approche analytique est la suivante:

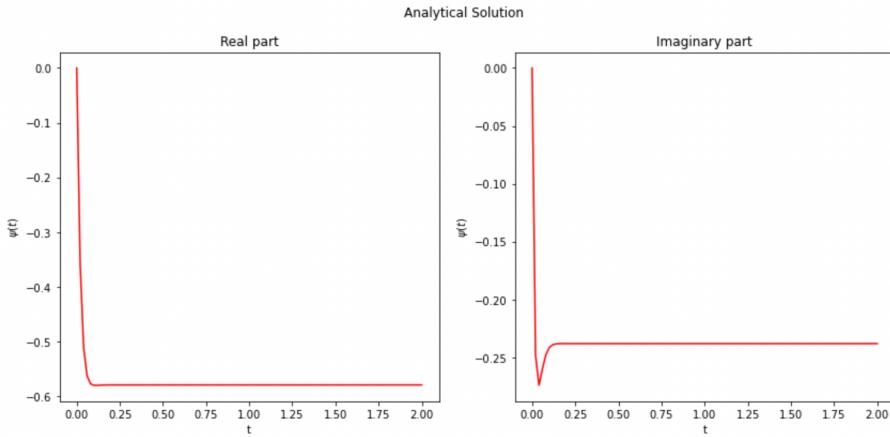


Figure 1: Solution Exacte

Dans la suite, nous développons les schémas numériques sus-évoqués pour la résolution de l'EDO.

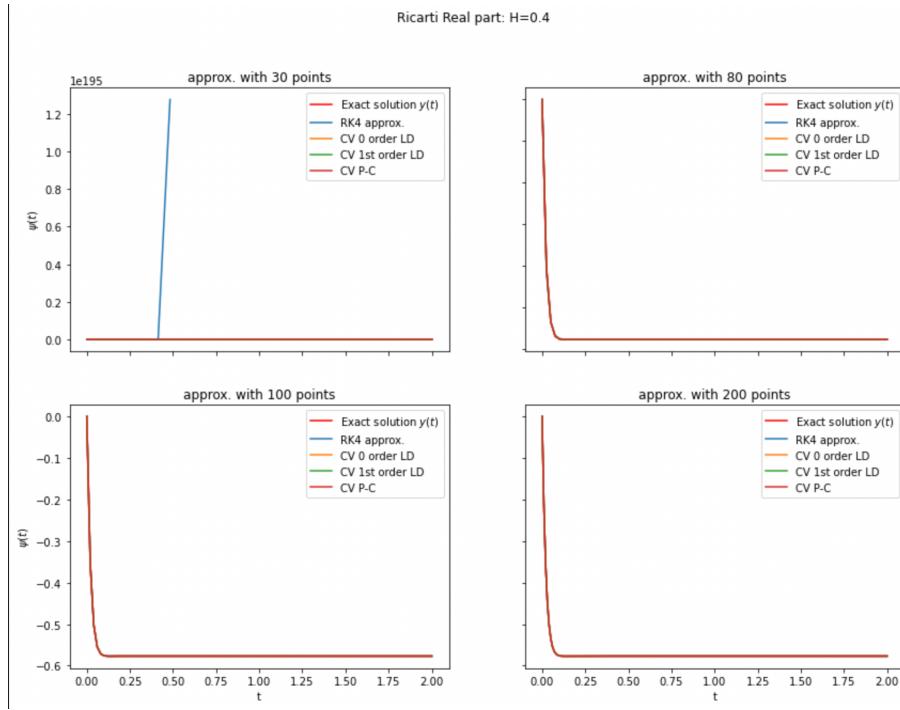


Figure 2: Solution numérique Partie Réelle vs Solution Exacte

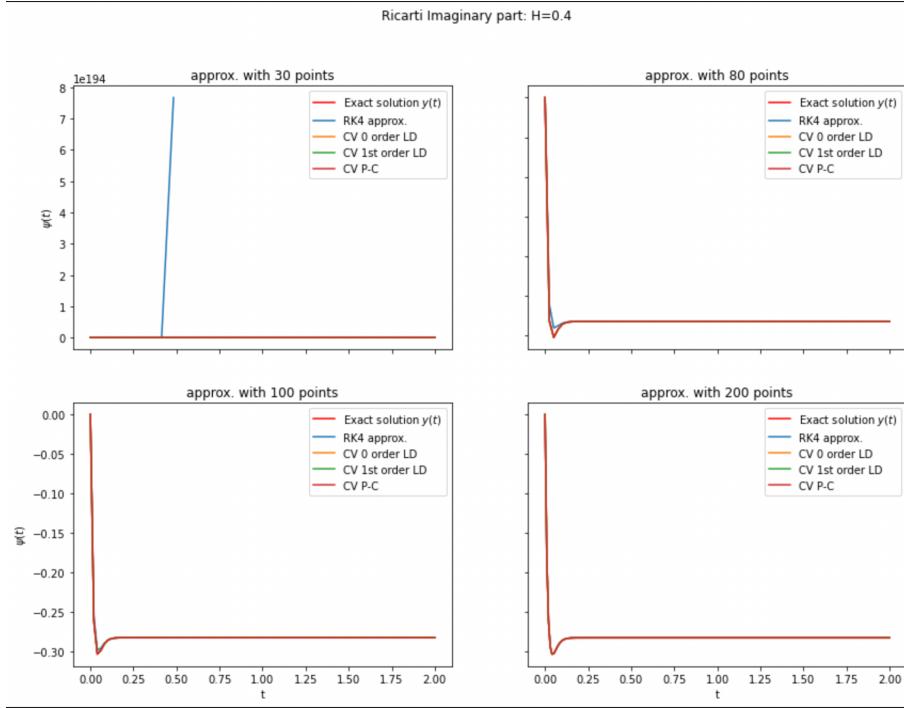


Figure 3: Solution numérique Partie Imaginaire vs Solution Exacte

Commentaires Nous constatons que la méthode RK4 ne converge pas vers la solution exacte jusqu'à 30 points de discréétisation, contrairement à l'approche variation de la constante. Il faut un pas de temps très faible, c'est-à-dire un nombre de discréétisation très élevé (de l'ordre de $n=80$) pour que RK4 converge.

Ceci est d'autant plus visible pour certaines valeurs de H . En diminuant la valeur de H , la méthode RK4 nécessite que le pas de discréétisation tende vers 0 plus rapidement pour se rapprocher de la solution exacte (voir ci-après pour $H=0.05$). Par contre, la variation de la constante est plus efficace et converge vers la solution exacte pour un pas h très petit ($h=0.05$).

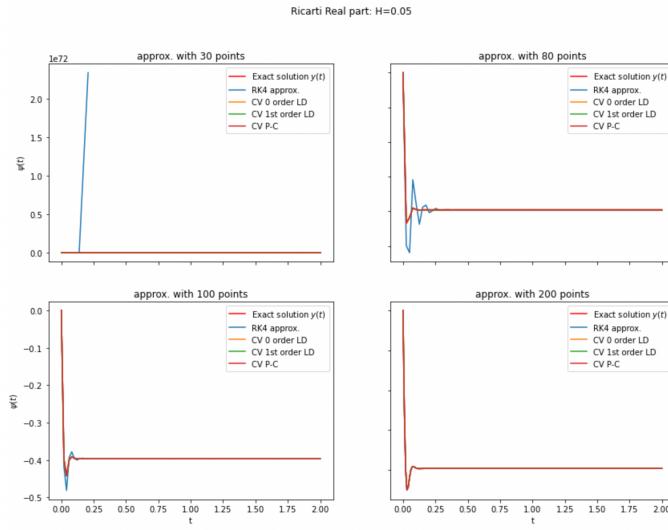


Figure 4: Solution numérique Partie Réelle vs Solution Exacte

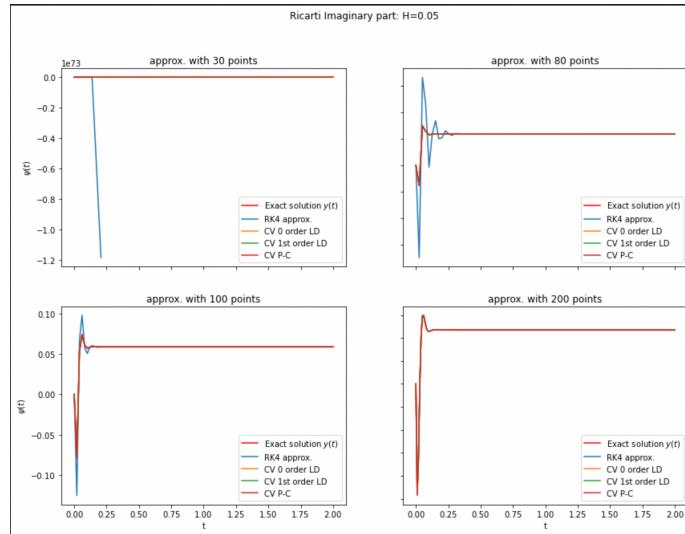


Figure 5: Solution numérique Partie Imaginaire vs Solution Exacte

Nous faisons varier la valeur de H dans la suite:

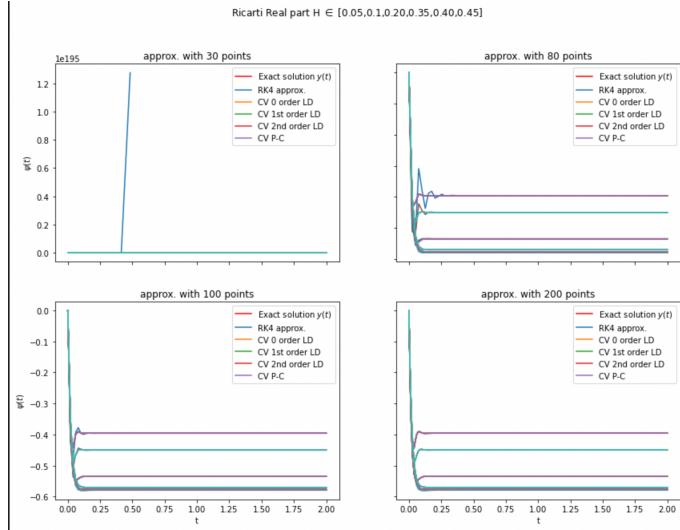


Figure 6: Partie réelle

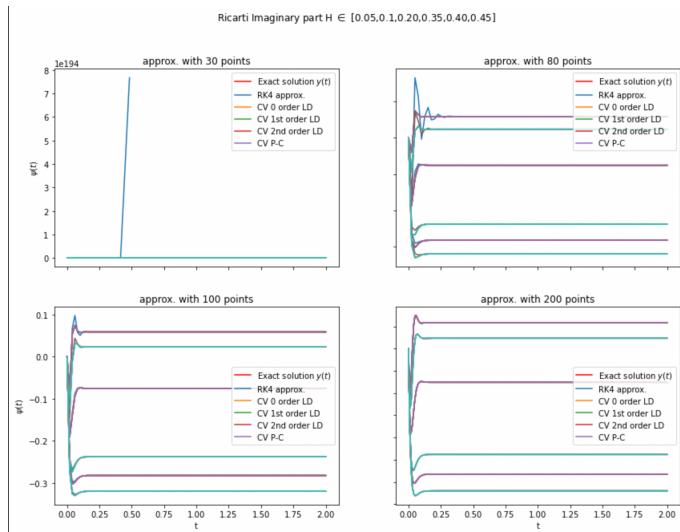


Figure 7: Partie imaginaire

Nous constatons qu'au voisinage de zéro il y a instabilité notamment de RK4 pour tout H. Pour visualiser ceci, nous allons construire la courbe de $\psi(\frac{1}{10})$ en fonction de τ .

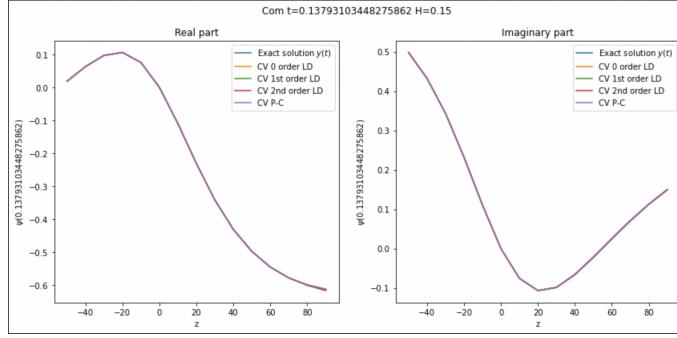


Figure 8: Partie réelle

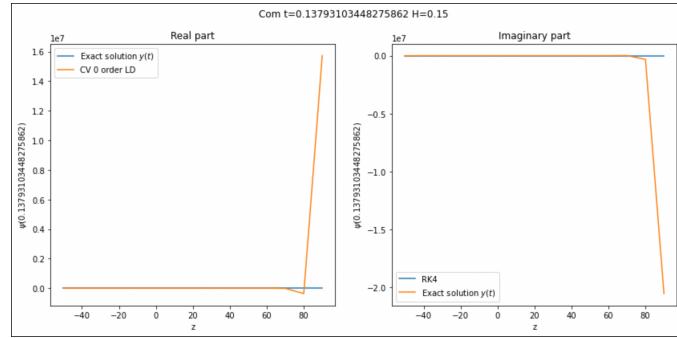


Figure 9: Partie imaginaire

Remarque: Pour les valeurs négatives de H il y a explosion de RK4, mais plutôt une stabilité de proche en proche des méthodes utilisant la formulation de la variation de la constante (cf figures ci-après).

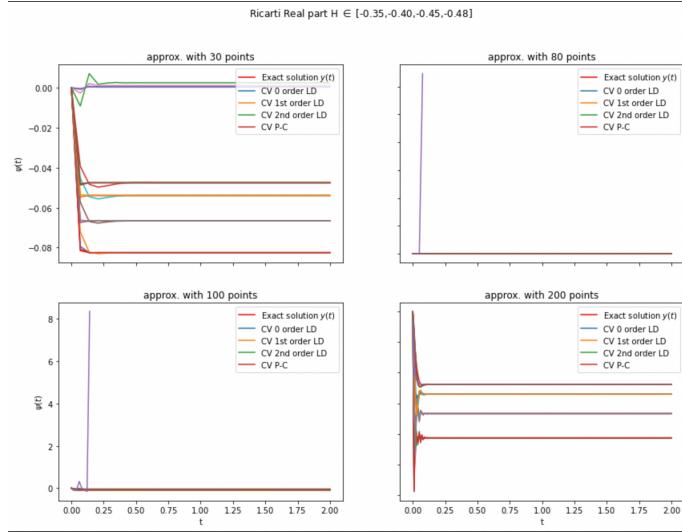


Figure 10: H négatif et Variation de la constante

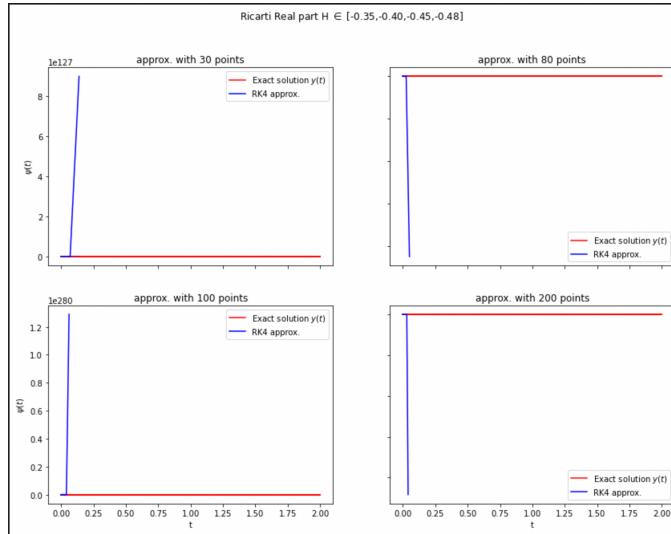


Figure 11: H négatif et RK4

3.3.2 Ordre et vitesse de convergence

Pour afficher l'ordre de convergence, nous utilisons une échelle logarithmique, c'est-à-dire que nous représentons $\ln(h)$ sur l'axe des x et $\ln(\text{err})$ sur l'axe des ordonnées. En effet, si $\text{err} = Ch^p$ alors $\ln(\text{err}) = \ln(C) + p\ln(h)$. En échelle logarithmique, p est donc la pente de la droite $\ln(\text{err})$.

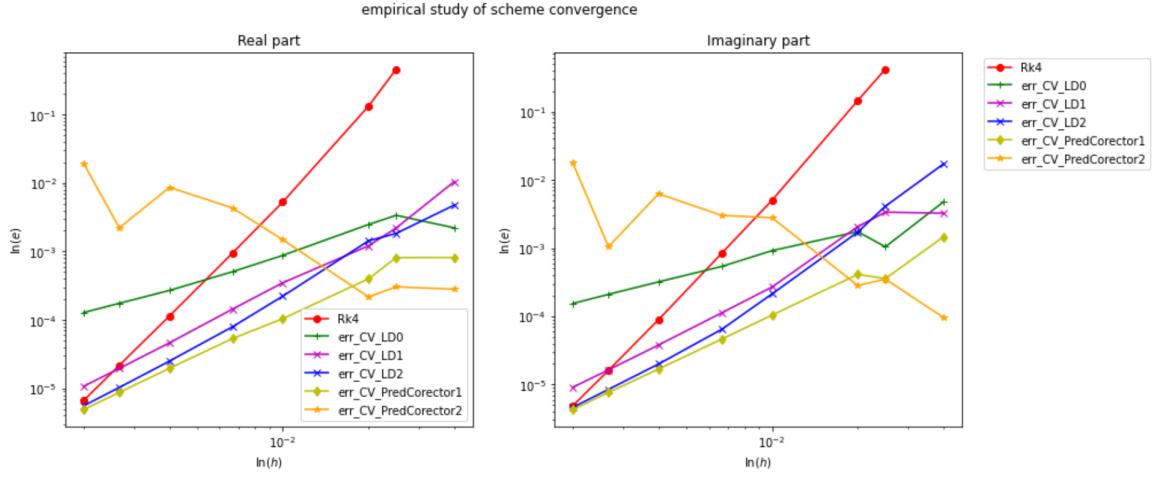


Figure 12: Vitesse de convergence des schémas

Pour estimer l'ordre de convergence, nous devons estimer la pente de la droite qui relie l'erreur à l'étape k à l'erreur à l'étape k+1 en échelle logarithmique. Nous estimons la pente globale de cette droite par la méthode des moindres carrés.

	Real Part	Imaginary Part
Runge-Kutta	4.370806	4.504869
Constant Variation and 0st order LD	1.127652	1.009465
Constant Variation and 1st order LD	2.200225	2.166097
Constant Variation and 2nd order LD	2.315525	2.758156
Predictor corrector scheme1	1.822330	1.886286
Predictor corrector scheme2	-1.395299	-1.376133

Table 1: Ordre de convergence

Résumé En utilisant la variation de la constante, nous avons une stabilité pour tout H à partir d'un certain nombre de discréétisation temporelles (à partir de 10), cependant la convergence de RK4 dépend de la valeur de H et du nombre d'itérations/discréétisations.

3.4 Simulation du processus de diffusion

3.4.1 Modèle de Heston

Définissons le modèle de diffusion ponctuelle suivant, que nous appelons modèle de Heston réversible :

$$\begin{cases} dS_t^\epsilon = \mu S_t^\epsilon dt + S_t^\epsilon \sqrt{V_t^\epsilon} (\rho dW_t + \bar{\rho} dW_t^\perp) \\ dV_t^\epsilon = (\epsilon^{H-\frac{1}{2}} \theta - \epsilon^{-1} (V_t^\epsilon - V_0)) dt + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} \sigma \sqrt{V_t^\epsilon} dW_t \end{cases} \quad (90)$$

$$d < W, W^\perp >_t = \rho dt \text{ and } \bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$$

Nous allons ensuite rester dans le monde "risk-neutral" (c'est-à-dire prendre $\mu = r$, le taux d'intérêt domestique).

Ceci peut être écrit de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^2 \end{cases} \quad (91)$$

$$d < W^1, W^2 >_t = \rho dt$$

Méthode1: Méthode Euler Maruyama pour simuler v et s :

- specification du modèle:

$$f(v) = \sqrt{v}, \quad \gamma(v) = \sigma \sqrt{v}, \quad b(v) = \kappa(\theta - v),$$

pour des paramètres positifs (θ, κ, σ).

- simulation de Monte-Carlo et schéma d'Euler explicite/ progressif sur V et $X := \log S$: On obtient :

$$\begin{aligned} V_{t+\Delta t} &\approx V_t + b(V_t) \Delta t + \gamma(V_t) \sqrt{\Delta t} Z_t \\ X_{t+\Delta t} &\approx X_t + (r - \frac{1}{2} f^2(V_t)) \Delta t + f(V_t) \sqrt{\Delta t} (\rho Z_t + \sqrt{1 - \rho^2} Z_t^\perp) \end{aligned} \quad (92)$$

où Z_t, Z_t^\perp sont des gaussiennes standard indépendantes.

On utilise généralement une discréétisation uniforme de $[0, T]$: $t_i = iT/n$ pour n points, c'est-à-dire $\Delta t = T/n$.

- Pour une simulation, on obtient un échantillon de trajectoire d'une approximation $S_T^n(\omega) \approx S_T(\omega)$.

Méthode2: Génération de chemins avec changement de variable et Euler Maruyama :

De manière équivalente, en fixant $X_t = \log(S_t)$ et $Y_t = \log(v_t)$, nous avons :

$$\begin{cases} dX_t = \left(\mu - \frac{1}{2} e^{Y_t} \right) dt + e^{Y_t/2} dW_t^1 \\ dY_t = e^{-Y_t} \left[\kappa(\theta - e^{Y_t}) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma e^{-Y_t/2} dW_t^2 \end{cases} \quad (93)$$

où $(W^1, W^2)_t$ est un vecteur gaussien centré de la matrice de corrélation $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

On se place dans le cadre données par les paramètres suivants:

- $S_0 = 100$, le prix initial de l'actif
- $K = 100$, le strike
- $v_0 = 0.1$, la variance initiale
- $\lambda = 0.575$, la prime de risque de la variance
- $\rho = -0.5711$, la corrélation entre la variance et l'actif risqué
- $\kappa = 1.5768$, le coefficient de réversion moyenne
- $\sigma = 0.5751$, la volatilité de la variance
- $\theta = 0.0398$, la moyenne à long terme

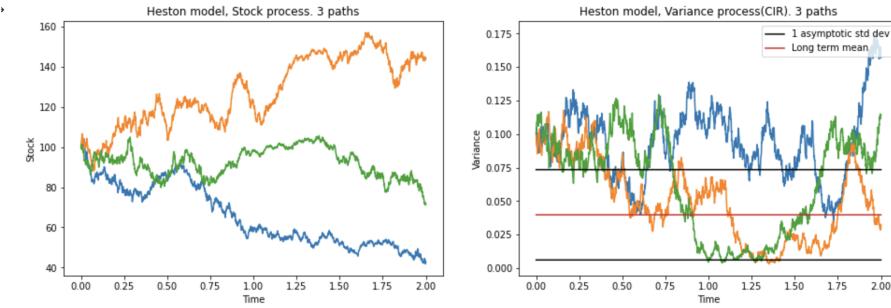


Figure 13: Quelques trajectoires

3.4.2 Affine volterra : Rough Heston

Sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, nous définissons un modèle de Heston généralisé par:

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + S_t \sqrt{V_t} dW_t \\ V_t = V_0 + \int_0^t K(t, s) \kappa(\theta - V_s) ds + \int_0^t K(t, s) \sigma \sqrt{V_s} dB_s \end{cases} \quad (94)$$

V_t est une **équation stochastique de Volterra**, $B = \rho W + \sqrt{1 - \rho^2} W^\perp$ où (W, W^\perp) est un mouvement brownien bidimensionnel adapté.

Rough Heston:

$$K(t, s) = k(t - s) \quad \text{where} \quad k(t) = \frac{t^{H-1/2}}{\Gamma(H + 1/2)}$$

(C'est la limite des processus de Hawkes presque instables N (Fukasawa & Rosenbaum (2016)) avec l'intensité λ_t suivante)

$$\lambda_t = \mu + \int_0^t \phi(t - s) dN_s,$$

$K(t, s)$ est un noyau fractionnaire c'est-à-dire

$$K(t, s) = k(t - s) = \frac{(t - s)^{H-1/2}}{\Gamma(H + 1/2)} \mathbb{I}_{s \leq t} \quad H \in (0, 1/2)$$

$\frac{\sigma}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t - s)^{H-1/2} dB_s$ est appelé un processus fractionnaire de **Riemann-Liouville**.

Nous pouvons alors écrire la volatilité affine de Volterra comme suit :

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} [\kappa(\theta - V_s) ds + \sigma \sqrt{V_s} dB_s], \quad \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$

Simulation du processus fractionnaire de Riemann-Liouville Pour le mouvement brownien fractionnaire, la fonction de covariance est connue sous une forme fermée, de sorte que

$$\Sigma_{ij} = \int_0^{t_i \wedge t_j} K(t_i, s) K(t_j, s) ds = \frac{1}{2} (t_i^{2H} + t_j^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Comme il s'agit d'un processus gaussien, pour une discrétisation, $0 := t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, on a un vecteur gaussien que l'on simule en utilisant la décomposition de Cholesky sur Σ :

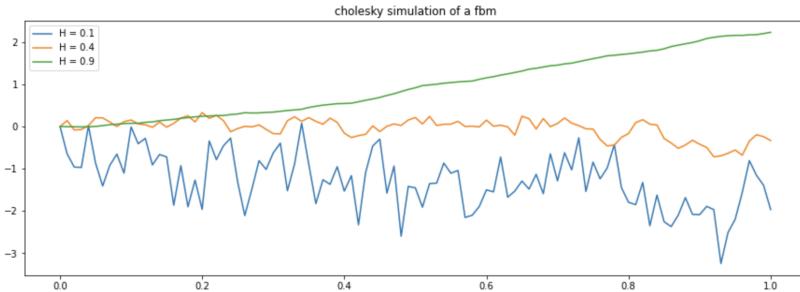


Figure 14: Simulations de mouvement brownien fractionnaire

Rough Heston Le schéma numérique utilisé pour simuler le modèle "Rough Heston" avec la volatilité affine de Volterra est une **extension du schéma d'Euler-Maruyama**. Ce schéma discrétise les équations différentielles stochastiques qui régissent la dynamique du modèle et les simule de manière itérative sur une grille de temps discrète.

Les équations discrétisées sont :

$$S_{i+1} = S_i \exp((r - \frac{1}{2}v_{i+1/2})\Delta t + \sqrt{v_{i+1/2}}\Delta W_{i+1})$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{\kappa}{\Gamma(H+1/2)}(\theta - v_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{H1/2} ds + \frac{\sigma}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \sqrt{v_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{H\frac{1}{2}} dB_s \quad (95)$$

où et $v_{i+1/2} = \frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$,

Δt est le pas de temps,

$\Delta W_i = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ est l'incrément du processus de Wiener,

S_i et v_i sont le prix de l'action et la volatilité au temps t_i , et r , κ , θ , η , H sont les paramètres du modèle.

Le terme intégral dans l'équation pour v_{i+1} ne peut pas être évalué sous forme proche, il est donc généralement approximé en utilisant des méthodes numériques. Dans ce cas, nous utilisons la règle trapézoïdale pour approximer l'intégrale :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (t_{i+1} - s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \approx \frac{1}{2}((t_{i+1} - t_i)^{H-\frac{1}{2}} \Delta B_{i+1} + (t_{i+1} - t_i)^{H-\frac{1}{2}} \Delta B_i).$$

avec $\Delta B_i = \sqrt{\Delta t} Z_i$

où Z_i sont des variables aléatoires normales standard indépendantes. Ce schéma est une simple extension du schéma standard d'Euler-Maruyama pour **tenir compte du comportement non-markovien du processus de volatilité**.

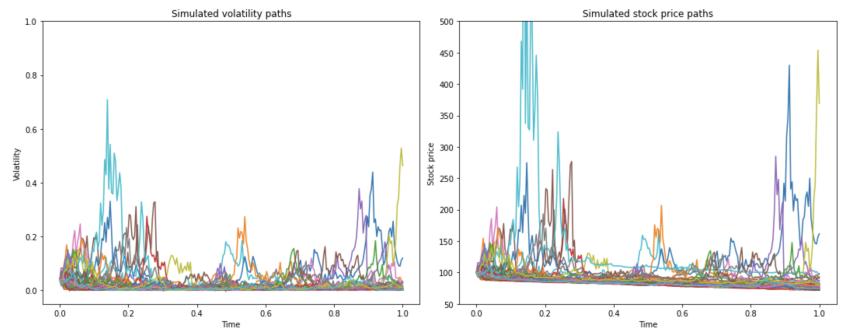


Figure 15: Simulations de processus Rough Heston

3.5 Pricing

3.5.1 Transformation de Fourier inverse

Dans cette partie, nous supposerons que nous sommes dans un modèle où la fonction caractéristique du logarithme des prix est connue explicitement et nous utiliserons des techniques d'inversion de Fourier pour calculer les prix des options.

$$\varphi_T(z) = \mathbb{E}[e^{izX_T}], \quad z \in \mathbb{R}$$

Objectif : calculer

$$e^{-rT} \mathbb{E}[G(X_T)] = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} G(x) q_T(x) dx \quad (96)$$

où q_T désigne la densité de la variable aléatoire X_T et G est un certain gain.

Exemple: Pour une option Call, le payoff est donné par: $G(x) = (S_0 e^x - K)^+$. et

$$C_0(k) = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)^+] = e^{-rT} S_0 \mathbb{E}[(e^{X_T} - e^k)^+],$$

avec $k = \log \frac{K}{S_0}$.

Intuition: en supposant que $\varphi_T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ utiliser l'inversion de Fourier pour calculer numériquement la densité

$$q_T(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re(e^{-izx} \varphi_T(z)) dz \quad (97)$$

et l'injecter dans l'équation de prix, puis discréétiser l'intégrale.

Théorème: Prix de l'option

Le prix d'une option Call de strike K et maturité T est donnée par:

$$C(S_0, K, v_0, T) = SP_1 - Ke^{-rT} P_2 \quad \text{avec} \quad P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re\left[\frac{e^{-iz \ln K} \varphi_j(X_0, K, v_0, T; z)}{iz}\right] dz, j \in \{1, 2\}$$

où $\varphi_1 = \varphi_T(z)$, et $\varphi_2 = \frac{\varphi_T(z-i)}{\varphi_T(-i)}$

Revenons au calcul direct :

$$C(0, S, T, K) = \mathbb{E} [e^{-rT} e^{x_T} \mathbb{I}\{x_T > k\}] - Ke^{-rT} \mathbb{P}(x_T > k)$$

où $k = \ln K$

$P_2 = \mathbb{P}(x_T > k) = 1 - F_T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re\left(\frac{e^{-ixz} \varphi_T(z)}{iz}\right) dz$ par la formule d'inversion de Gil-Pelaez (1951).

Pour déterminer le premier terme P_2 , nous introduisons une nouvelle mesure \mathbb{Q} telle que $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{S_T}{S_0}$.

$$\mathbb{E} [e^{-rT} e^{x_T} \mathbb{I}\{x_T > k\}] = S_0 \mathbb{Q}(x_T > k)$$

Nous devons déterminer les changements dans les caractéristiques du processus sous la nouvelle mesure. Ce qui nous intéresse ici, c'est donc de déterminer la forme de la fonction caractéristique de $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ sous \mathbb{Q} à $t = T$.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{iux_T}) = \int_{x \in R} e^{iux_T} d\mathbb{Q}(x) = \frac{\mathbb{E}(e^{x_T} e^{iux_T})}{\mathbb{E}(e^{x_T})} = \frac{\varphi_T(u-i)}{\varphi_T(-i)}$$

Implémentation: Fusion des deux intégrales P_1 et P_2 en une seule expression afin que le calcul ne nécessite qu'une seule intégrale.

$$C(S_0, K, v_0, T) = \frac{1}{2}(S_0 - Ke^{-rT}) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re[S_0 \frac{\varphi_T(z-i)}{iz\varphi_T(-i)} - Ke^{-rT} \frac{\varphi_T(z)}{iz}] dz$$

3.5.2 Pricing par Monte-Carlo du processus de diffusion de Heston

- Générer des chemins aléatoires/échantillons
- Calculer le gain final
- Prendre la moyenne sur la simulation

En utilisant une discrétisation uniforme de $[0, T]$: $t_i = iT/n$ pour n points, c'est-à-dire $\Delta t = T/n$.

- Pour une simulation, on obtient un échantillon de trajectoire d'une approximation $S_T^n(\omega) \approx S_T(\omega)$, pour laquelle on calcule $g(S_T^n(\omega^m))$. Nous répétons M fois et obtenons

$$C_0 \approx \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{m=1}^M g(S_T^n(\omega^m)).$$

3.5.3 Schémas de différence finie (FD) pour l'évaluation des options dans le modèle de Heston

L'EDP vérifiée par le prix est donnée par : (équation différentielle partielle de Garman)

$$rC = \partial_t C + \frac{1}{2}f^2(v)s^2\partial_{SS}C + rs\partial_S C + \mu(v)\partial_v C + \rho f(v)\gamma(v)s\partial_{SV}C + \frac{1}{2}\gamma^2(v)\partial_{VV}C,$$

Sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ $C(T, s, v) = g(s)$

Où $f(v) = \sqrt{v}$, $\gamma(v) = \sigma\sqrt{v}$, $b(v) = \kappa(\theta - v)$ and $\mu(v) = \kappa(\theta - v) - \lambda v$

C'est encore :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{S^2 v}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + [\kappa(\theta - v) - \lambda v] \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\sigma^2 v}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} + \rho \sigma S v \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial v} = rC$$

Discréteriser l'EDP pour obtenir le prix C (différence finie). Cela peut être très lent, instable par rapport aux paramètres (et à la dimension).

- La discréétisation FD du problème de valeur initiale limite pour l'EDP de Heston donne un problème de valeur initiale pour un grand système d'équations différentielles ordinaires (EDO), $U'(t) = AU(t) + b(t)$ $(0 \leq t \leq T)$, $U(0) = U_0$.

- Schéma de Crank-Nicolson ou trapézoïdale :

Ce schéma est défini en choisissant comme second membre la moyenne des seconds membres respectifs des schémas explicite et implicite,

Considérons l'EDO $U'(t) = F(t, U(t))$ $(0 \leq t \leq T)$, $U(0) = U_0$.

Cette méthode définit des approximations U_n des valeurs de la solution exacte $U(t_n)$ de l'EDO ci-dessus successivement pour $n = 1, 2, 3, \dots$ par :

$$U_n = U_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta t F(t_{n-1}, U_{n-1}) + \frac{1}{2}\Delta t F(t_n, U_n).$$

Dans notre cas, nous avons $F(t, w) = Aw + b(t)$ pour $0 \leq t \leq T, w \in \mathbb{R}^m$, Chaque étape nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires impliquant la matrice $(I - \frac{1}{2}\Delta t A)$.

3.6 Tests et comparaison des méthodes de pricing développées

3.6.1 Tests avec différents benchmarks

Afin de tester nos algorithmes d'évaluation pour les options d'achat (les prix des options de vente peuvent être déduits en utilisant la Parité Call-Puts), nous avons utilisé les différents benchmarks proposés dans *A Novel Pricing Method For European Options Based On Fourier-Cosine Series Expansions*.

Dans leur mise en œuvre, ils choisissent le modèle de Heston et prix des options d'achat avec les paramètres suivants :

$S_0 = 100, K = 100, r = 0, q = 0, \kappa = 1,5768, \lambda = 0,5751, \sigma = 0,3, \theta = 0,0398, V_0 = 0,0175, \rho = -0,5711$.

- Méthodes COS et Carr-Madan pour les Options Call sous le modèle de Heston avec $T = 1$, paramètres tels que mentionnés précédemment ; Valeur de référence = 5.785155450 .
- Méthodes COS et Carr-Madan pour les Options Call sous le modèle de Heston avec $T = 10$, paramètres comme ceux mentionnés précédemment ; Valeur de référence = 22.318945791

Nous avons répertorié les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous.

T	CharFunction	MC	PDE	Benchmark
1	5.780806	5.828789±0.11	6.350888	5.785155
10	22.262832	19.068438±0.47	23.417249	22.318946

Table 2: Comparaison du prix du call par rapport au benchmark

3.6.2 Comparaison des différentes méthodes de pricing

Nous créons une grille de strike K et de Maturité T et calculons les prix des options Call par les différentes méthodes développées et en évaluant les temps d'exécution.

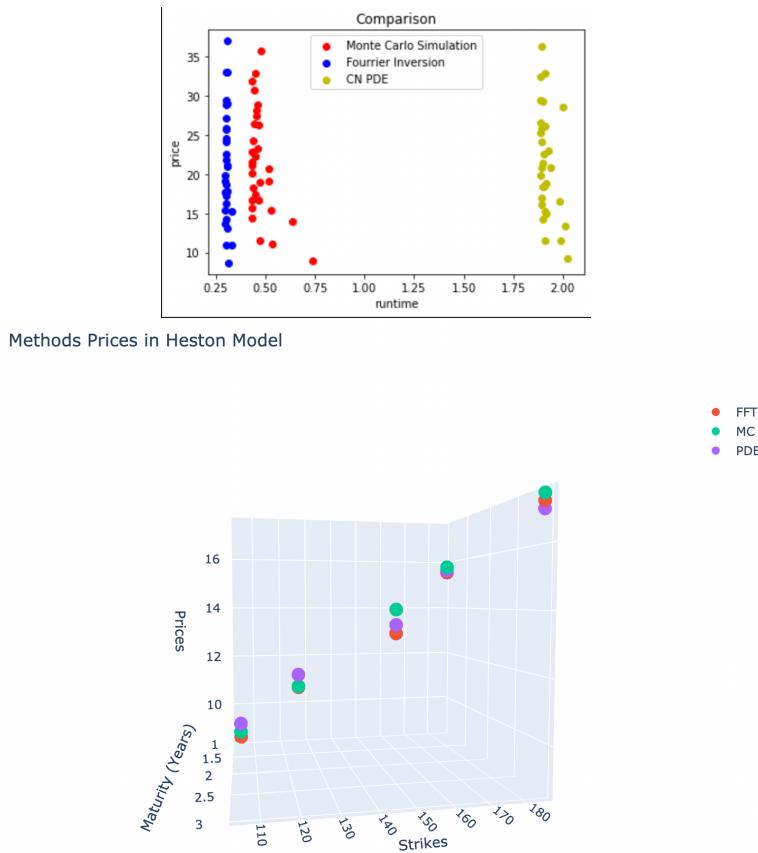


Figure 16: Prix vs temps de calcul (à gauche) et Prix vs Maturité/strike(à droite)

	CharFunctionIFT	Monte_Carlo	Garman's_PDE
mean_runtime(seconds)	0.327162	0.552612	2.227127

Table 3: Temps moyens de calcul

Résumé :

- Les méthodes de Fourier sont les plus rapides.
- La méthode de résolution numérique de l'EDP est très lente, instable par rapport à la dimension ou à la taille de la discréétisation :
- La méthode de Monte Carlo est instable par rapport aux paramètres utilisés pour la simulation.

La méthode FFT est très rapide et présente une faible erreur.

Nous créons par la suite une grille de strike et calculons le prix des options Call avec différentes méthodes et déduisons par méthode de recherche des racines (Newton-Raphson ou bisection), la volatilité implicite, c'est-à-dire la volatilité du modèle Black scholes (BS) classique, pour laquelle le prix BS est égal au prix donné par notre modèle. Les résultats sont les suivants:

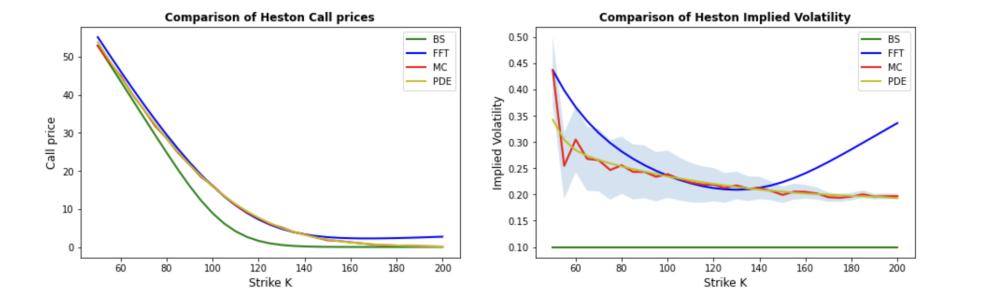


Figure 17: Prix vs strike (à gauche) et Smile de la volatilité implicite (à droite)

Nous observons que le modèle de Heston résolu en utilisant la transformée de Fourier Inverse produit une **smile de volatilité**.

3.6.3 Valeurs extrêmes : Heston paramétrique

Rappelons le modèle de diffusion spot suivant, que nous appelons modèle de Heston réversible :

$$\begin{cases} dS_t^\epsilon = rS_t^\epsilon dt + S_t^\epsilon \sqrt{V_t^\epsilon} (\rho dW_t + \bar{\rho} dW_t^\perp) \\ dV_t^\epsilon = (\epsilon^{H-\frac{1}{2}} \theta - \epsilon^{-1} (V_t^\epsilon - V_0)) dt + \epsilon^{H-\frac{1}{2}} \sigma \sqrt{V_t^\epsilon} dW_t \end{cases} \quad (98)$$

$d < W, W^\perp >_t = \rho dt$ and $\bar{\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}$

Avec les paramètres suivants :

- $S_0 = 100$, le prix initial de l'actif
- $K = 100$, le strike
- $v_0 = 0.1$, la variance initiale
- $\lambda = 0.575$, la prime de risque de la variance
- $\rho = -0.5711$, la corrélation entre la variance et l'actif risqué
- $H = 0.15$, la constante de Hurst
- $\sigma = 0.5751$, la volatilité de la variance
- $\theta = 0.0398$, la moyenne à long terme
- $\epsilon = 10^{-4}$

La simulation de chemin aléatoires ou échantillons de ce processus de diffusion paramétrique via le schéma mentionné dans la section 3.4.1 donne la courbe suivante:

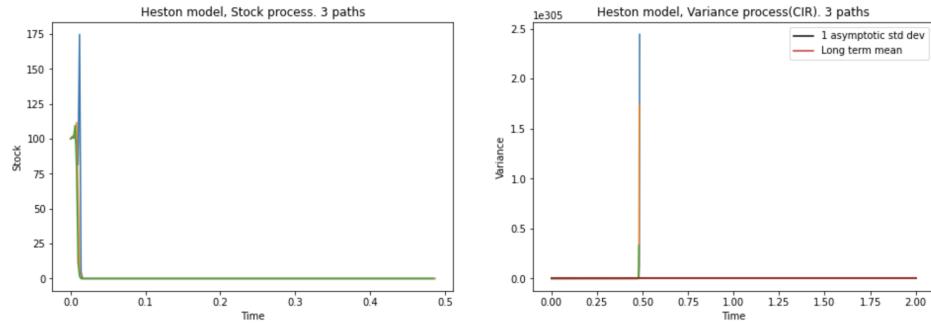


Figure 18: Simulation du prix de l'action (à gauche) et Simulation de la volatilité (à droite)

Commentaires : Explosion du schéma d'Euler pour les valeurs extrêmes: cet exemple, nous montre les limites du schéma numérique d'Euler, soit de l'approche de pricing via Monte Carlo. Il convient de garder l'approche PDE et l'inversion de la fonction caractéristique.

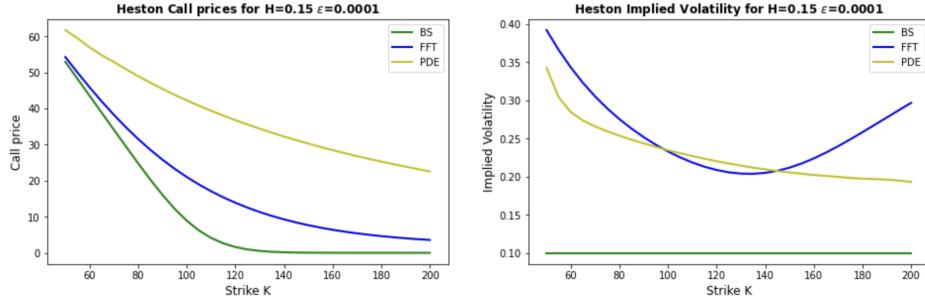


Figure 19: Comparaison des différentes méthodes numériques

Commentaires : L'approche PDE étant aussi une approche numérique, on observe des grands écarts sur le prix et la volatilité implicite, comparativement à la méthode par inversion de la fonction caractéristique. On note donc l'intérêt d'une approche de pricing par formule pseudo-explicite(Inverson de la fonction caractéristique) dans le modèle de Heston généralisé.

Lorsque nous voulons calculer le prix d'un grand nombre d'options d'échéance donnée, l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform) est la plus efficace pour réduire le coût et le temps de calcul.

4 Bibliographie

- E. ABI JABER, M. LARSSON, S. PULIDO, *Affine Volterra processes*, arxiv.org/pdf/1708.08796.pdf
- G. GRIPENBERG, S-O. LONDEN, O. STAFFANS, *Volterra integral and functional equations*
- K.J. IN'T HOUT, S. FOULON, *ADI finite difference schemes for option pricing in the Heston model with correlation*, arxiv.org/abs/0811.3427
- F. FANG, C.W. OSTERLEE, *A Novel Pricing Method For European Options Based On Fourier-Cosine Series Expansions*, faculty.baruch.cuny.edu/lwu/890/FanOosterlee2008.pdf