



Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Concepción del Uruguay
Ingeniería en Sistemas de Información

ANÁLISIS NUMÉRICO

Trabajo Final - 2024

Profesor

Omar Faure
Gastón Maximiliano Quiroga

Alumnos

Emmanuel Davezac
Mauricio Nahuel Salto

Índice

1. Introducción.....	3
3. PROBLEMAS A VALORES DE BORDE UNIDIMENSIONALES.....	4
1. Explique que significan las condiciones de borde (3).....	5
2. Resuelva la ecuación (4) utilizando el Método de Diferencias Finitas, para diferentes tamaños de paso. 5	5
3. Escriba la formulación variacional de este problema.....	10
4. Resuelva utilizando el Método de Galerkin para diferentes tamaños de paso, con funciones lineales a trozos.....	11
5. Compare los resultados entre los diferentes métodos y la solución analítica.....	17
4. PROBLEMA BIDIMENSIONAL.....	21
1. Plantee la formulación variacional de este problema.....	22
2. Realice una triangulación sobre el dominio Ω detallando lo siguiente:	24
(a) Tabla con las coordenadas nodales (nodos):.....	24
Generalizando el problema.....	25
(b) Tabla con las conectividades elementales (elementos):.....	26
Generalizando.....	28
(c) Resuelva el problema utilizando los Métodos de Diferencias Finitas (utilizando diferentes tamaños de malla) y Elementos Finitos (utilizando diferentes tamaños de paso).....	28
Recordemos la solución analítica.....	36
(e) Verifique que los errores satisfacen las estimaciones teóricas.....	38
(f) Resuelva el problema (9) numéricamente para la región de la figura (4), donde el objeto es un círculo de radio $r = 1/6$ en el centro del dominio.....	39
Conclusión.....	42
Repositorio con el código fuente.....	42

1. Introducción.

Este trabajo final se enfoca en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) específicas, fundamentales en diversas áreas. Abordaremos tanto la ecuación de Poisson como su caso particular, la ecuación de Laplace , utilizando dos de los métodos numéricos más relevantes: el Método de Diferencias Finitas (MDF) y el Método de Elementos Finitos (MEF).

Las EDPs como las de Poisson y Laplace modelan fenómenos estacionales, como la distribución de potencial electrostático, la conducción de calor en estado estacionario o el flujo de fluidos irrationales. Dado que las soluciones analíticas suelen ser complejas o inviables para geometrías o condiciones de borde no triviales, los métodos numéricos se vuelven herramientas esenciales.

El objetivo principal de este trabajo es aplicar y comparar el MDF y el MEF para resolver problemas de valores de borde tanto en una como en dos dimensiones. Se analizará la implementación de cada método, se presentarán los resultados numéricos obtenidos para diferentes discretizaciones y se compararon con las soluciones analíticas disponibles, evaluando la precisión y la convergencia de cada enfoque.

3. PROBLEMAS A VALORES DE BORDE UNIDIMENSIONALES

Definición del Problema:

Considérese el caso de dos placas infinitas paralelas que se encuentran en posición normal al eje x , separadas a una distancia d . Una de ellas es mantenida a un potencial fijo $V = V_0$ mientras que la segunda es mantenida a un potencial $V = 0$. La región entre ambas placas está formada por un medio no magnético con constante dieléctrica ϵ_r y una densidad de carga eléctrica uniforme $p_0 = -\rho_0$.

Obtenganse las expresiones para el potencial eléctrico y el campo eléctrico en la región comprendida entre las placas.

Solución analítica:

La distribución del potencial en cualquier punto entre las dos placas está gobernada por la Ecuación de Poisson.

$$\nabla(\epsilon_r \nabla V) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad (2)$$

sujeto a las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} V(0) &= V_0, \\ V(d) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Para un medio simple (homogéneo, isotrópico), la ecuación de Poisson en una dimensión puede escribirse más convenientemente como:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (4)$$

donde p_0 fue reemplazado por ρ_0 . Integrando esta última ecuación dos veces, se obtiene

$$V(x) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_r \epsilon_0} x^2 + c_1 x + c_0, \quad (5)$$

donde c_1 y c_0 son constantes a determinar conocidas como Condiciones de Esenciales o de Dirichlet. Entonces, imponiendo las dos condiciones (3) la solución analítica toma la forma:

$$V(x) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_r \epsilon_0} x^2 - \left(\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{V_0}{d} \right) x + V_0. \quad (6)$$

La expresión para el campo eléctrico se obtiene tomando el gradiente negativo del potencial eléctrico

$$\vec{E}(x) = -\nabla V = -\hat{a}_x \frac{dV(x)}{dx}, \quad (7)$$

de lo cual resulta

$$\vec{E}(x) = \hat{a}_x \left[\frac{V_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{2\epsilon_r \epsilon_0} - \frac{\rho_0 x}{\epsilon_r \epsilon_0} \right], \quad (8)$$

lo que indica que el campo eléctrico es una función de x . También es importante tener en cuenta aquí el potencial eléctrico de este problema a valores de borde particular, es una función cuadrática de x , mientras que el campo eléctrico es una función lineal de x .

1. Explique que significan las condiciones de borde (3).

$$\begin{aligned} V(0) &= V_0, \\ V(d) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Las condiciones de borde (3) en el problema unidimensional del potencial eléctrico entre dos placas paralelas son:

- $V(0) = V_0$: Esta condición significa que la primera placa ($x=0$) tiene un valor fijo $V=V_0$.
- $V(d) = 0$: Esta condición significa que la segunda placa ($x=d$) tiene un valor $V=0$.

Estas condiciones fijan el valor del potencial eléctrico en los bordes de la región.

2. Resuelva la ecuación (4) utilizando el Método de Diferencias Finitas, para diferentes tamaños de paso.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (4)$$

Al utilizar el método de diferencias finitas primero se debe discretizar el dominio de la problemática. El dominio original es el intervalo $[0,d]$.

Para discretizar este intervalo dividimos el intervalo en una cantidad n de subintervalos de tamaño h .

A la longitud “ h ” de los subintervalos se lo conoce como tamaño de paso y se lo calcula $h = \frac{d-0}{n} = \frac{d}{n}$

Cada valor de x se corresponderá con un subintervalo $x_i = 0 + i \cdot h = i \cdot h$ con $i=0,1,\dots,n$.

Una vez discretizado el dominio podemos aplicar el método de diferencias finitas.

partimos de la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) \approx \frac{\frac{du}{dx}(x+\frac{h}{2}) - \frac{du}{dx}(x-\frac{h}{2})}{h} \approx \\ &\frac{V(x+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - V(x+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h} - \frac{V(x-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}) - V(x-\frac{h}{2}-\frac{h}{2})}{h} = \\ &\frac{\frac{V(x+h)-V(x)}{h} - \frac{V(x)-V(x-h)}{h}}{h} = \frac{V(x+h)-2V(x)+V(x-h)}{h^2} = \\ \frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{V(x+h)-2V(x)+V(x-h)}{h^2} + \epsilon(h^2) \end{aligned}$$

La expresión anterior en el punto x_i se puede interpretar como :

$$\frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2}, \text{ reemplazamos en (4)}$$

$$\frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}, \text{ multiplicamos m.a.m } h^2 \text{ obtenemos}$$

$$V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} h^2 \text{ para } n=1, 2, \dots, n-1$$

Aplicamos la condiciones de borde

$$\begin{aligned} V(0) &= V_0, \\ V(d) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

quedándonos que

- $V_1 = V_0$
- $V_n = 0$

En base a esto armamos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\rho_0 h^2}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones lineales

Todos los valores en el sistema de ecuaciones anterior son constantes a las que tenemos que asignarles valor porque no están explícitamente en las consignas.

Establecemos los siguientes valores

- $d = 1 \text{ [m]}$
- $V_0 = 1 \text{ [V]}$
- $\rho_0 = 1$
- $\epsilon_r = 1$
- $\epsilon_0 = 1$
- $\frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = 1$

Vamos a resolver teniendo en cuenta tres tamaños de paso 0.25 (25 cm), 0.125 (12,5 cm) y 0.01 (1 cm).

Resolución para $h=0.25$

En este escenario tendríamos que

- $N=4$
- $\frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} h^2 = 0.625$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones

$$V_0 = 1 \quad \text{Condición de borde}$$

$$V_0 - 2V_1 + V_2 = -2V_1 + V_2 = 0.625$$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 = 0.625$$

$$V_2 - 2V_3 + V_4 = V_2 - 2V_3 = 0.625$$

$$V_4 = 0 \quad \text{Condición de borde}$$

Tenemos las incógnitas v1,v2 y v3, despejamos las incógnitas mediante el siguiente programa para Octave

```
% PARÁMETROS DEL PROBLEMA
V0 = 1; % Potencial en x=0 (CONDICION DE BORDE)
d = 1; % Distancia total (PUNTO FINAL DEL INTERVALO [0,d])
p0 = 1; % Densidad de carga
er = 1 % Constante dieléctrica relativa
e0 = 1 % Constante dieléctrica de vacío
h = 0.25; % Tamaño de paso
N = d / h; % Número de subintervalos
C = p0 / (er * e0);
K = C * h^2;

% MATRIZ A (COEFICIENTES)
n = N - 1;
A = zeros(n, n);
for i = 1:n
    A(i,i) = -2;
    if i > 1
        A(i, i-1) = 1;
    end
    if i < n
        A(i, i+1) = 1;
    end
end

% VECTOR B (TERMINOS INDEPENDIENTES)
b = K * ones(n, 1);
b(1) = b(1) - V0; % Condición de borde en V0

% RESOLVEMOS EL SISTEMA
V = A \ b;

% Mostramos los resultados
fprintf('Resultados usando el metodo de diferencias finitas con N=%d y h=%.3f \n', n, h);
fprintf('V0 (x=0) = %.6f\n', V0);
for i = 1:n
    xi = i * h;
    fprintf('V%d (x=%.3f) = %.6f\n', i, xi, V(i));
end
fprintf('V%d (x=1) = 0', n+1);

% Graficamos la solución
xi = [0: h: d];
Y = [V0; V; 0]';
close all;

% GRAFICA SOL NUMERICA
figure (1)

plot(xi, Y, 'LineStyle', '-', 'Color', 'b', 'Marker', 'o', 'MarkerFaceColor', 'r', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 2);
titulo= sprintf('Solución por el metodo de diferencias Finitas ( con tamaño de paso h = %.3f)', h);
```

```

title(titulo);
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
grid on;

% GRAFICA SOL ANALITICA

Y_analitica = (p0 / (e0 * er)) * xi.^2/2 + (( - p0 / (e0 * er)) * d/2 - V0/d) * xi + V0;
plot(xi,Y_analitica,'r');
title('Solución analítica');
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
grid on;

% GRAFICA ERROR ABSOLUTO ENTRE SOLUCIONES

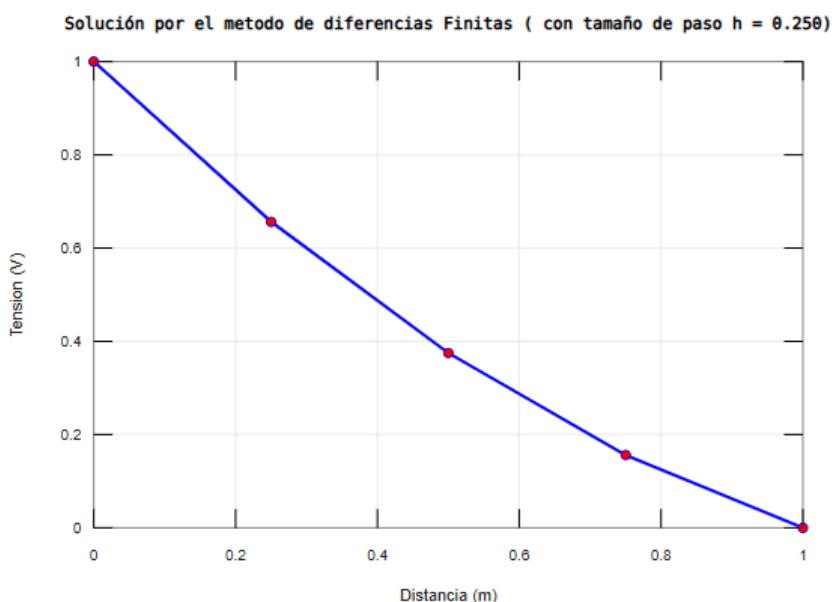
error=abs(Y-Y_analitica)
plot(xi,error,'b');
title('Error absoluto entre la solucion numerica y analitica');
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
grid on;

```

Con el programa anterior obtuvimos

$V_0 (x=0) = 1.000000$
 $V_1 (x=0.250) = 0.656250$
 $V_2 (x=0.500) = 0.375000$
 $V_3 (x=0.750) = 0.156250$
 $V_4 (x=1) = 0$

Visualicemos la curva definida por estos puntos



Resolvemos para $h=0.125$

Nos da que

- $N=8$

- $Kh^2=0.015625$

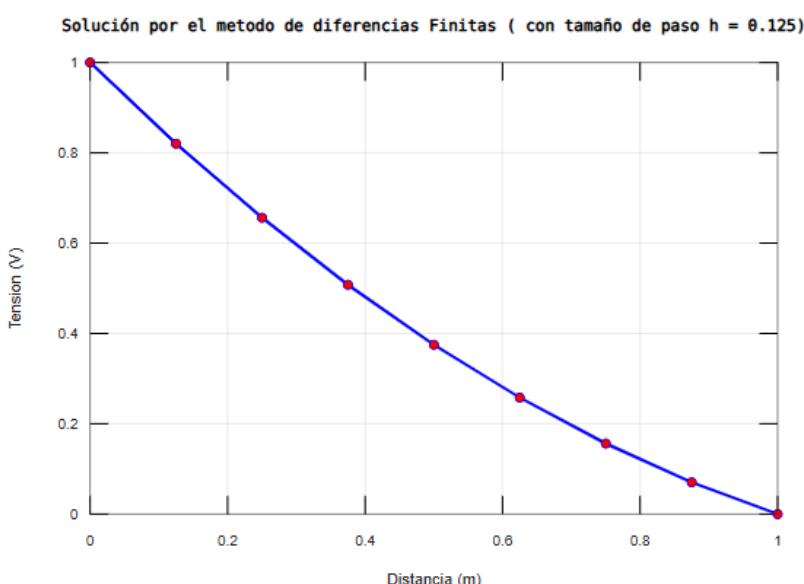
Reemplazando en el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} V_0 &= 1 && \text{Condición de borde} \\ V_0 - 2V_1 + V_2 &= 0.015625 \\ V_1 - 2V_2 + V_3 &= 0.015625 \\ V_2 - 2V_3 + V_4 &= 0.015625 \\ V_3 - 2V_4 + V_5 &= 0.015625 \\ V_4 - 2V_5 + V_6 &= 0.015625 \\ V_5 - 2V_6 + V_7 &= 0.015625 \\ V_6 - 2V_7 + V_8 &= 0.015625 \\ V_8 &= 0 && \text{Condición de borde} \end{aligned}$$

Usando el mismo programa que para que caso anterior obtuvimos

$$\begin{aligned} V_0(x=0) &= 1.000000 \\ V_1(x=0.125) &= 0.820312 \\ V_2(x=0.250) &= 0.656250 \\ V_3(x=0.375) &= 0.507812 \\ V_4(x=0.500) &= 0.375000 \\ V_5(x=0.625) &= 0.257812 \\ V_6(x=0.750) &= 0.156250 \\ V_7(x=0.875) &= 0.070312 \\ V_8(x=1) &= 0 \end{aligned}$$

Visualicemos la curva definida por estos puntos



Resolvemos para $h=0.01$

Nos da que

- $N=100$
- $Kh^2=0.0001$

Reemplazando en el sistema de ecuaciones

$$V_0 = 1 \quad \text{Condición de borde}$$

$$V_0 - 2V_1 + V_2 = 0.0001$$

$$V_1 - 2V_2 + V_3 = 0.0001$$

.

.

.

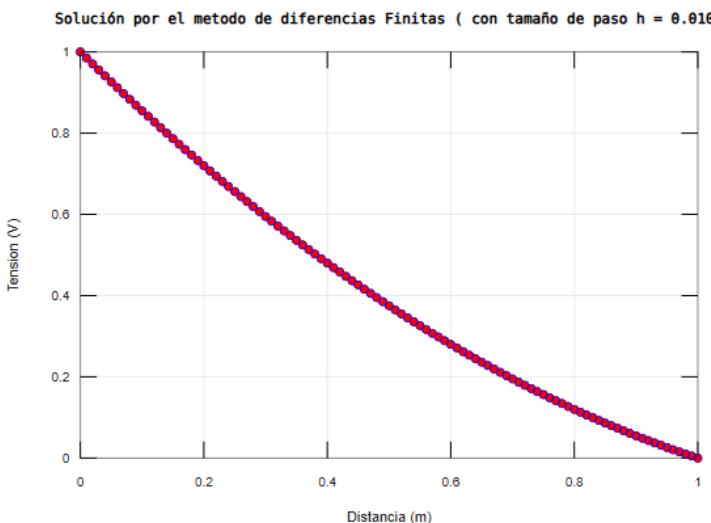
$$V_{97} - 2V_{98} + V_{99} = 0.0001$$

$$V_{98} - 2V_{99} + V_{100} = 0.0001$$

$$V_{100} = 0 \quad \text{Condición de borde}$$

No escribo el vector solución porque quedaría muy largo, pero también lo calculamos con el mismo programa.

Visualicemos la curva definida por estos puntos



3. Escriba la formulación variacional de este problema.

Recordemos que la formulación variacional es expresar el problema a través de integrales finitas.

Partimos del problema diferencial

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}, \text{ con } 0 < x < d$$

con las condiciones de borde: $V(0) = V_0$, $V(d) = 0$

Plantemos una función de prueba $w(x)$ que se ajusta a las condiciones de borde del problema, lo que quiere decir que

- $w(0)=0$
- $w(d)=0$

Una vez planteadla la función de prueba, procedemos a multiplicar multiplicamos ambos miembros del problema diferencial la misma

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0}; \quad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} \cdot w(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot w(x)$$

Ahora introducimos la integral integrando ambos miembros de la expresión respecto a x de con 0 y d como límites inferior y superior, respectivamente.

$$\int_0^d \frac{d^2V}{dx^2} \cdot w(x) dx = \int_0^d \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot w(x) dx \quad (1)$$

Integramos por partes el miembro izquierdo

$$\int_0^d \frac{d^2V}{dx^2} \cdot w(x) dx = (\frac{dV}{dx} w(x))|_0^d - \int_0^d \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

Por las condiciones de borde se anula el término $(\frac{dV}{dx} w(x))|_0^d$, ya que $w(0)=w(d)=0$ y nos queda

$$\int_0^d \frac{d^2V}{dx^2} \cdot w(x) dx = - \int_0^d \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx$$

reemplazamos en (1)

$$- \int_0^d \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx = \int_0^d \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot w(x) dx$$

Plantemos el problema variacional

Buscamos $V(x)$ tal que

$$\int_0^d \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx = - \int_0^d \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot w(x) dx, \text{ para toda } w(x) \text{ tal que } w(0)=w(d)=0$$

4. Resuelva utilizando el Método de Galerkin para diferentes tamaños de paso, con funciones lineales a trozos.

Partimos del problema variacional

$$\int_0^d \frac{dV}{dx} \frac{dw}{dx} dx = - \int_0^d \frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} \cdot w(x) dx, \text{ para toda } w(x) \text{ tal que } w(0)=w(d)=0$$

Dividimos el intervalo $[0,d]$ en N subintervalos de longitud $h=d/N$, donde h es el tamaño de paso.

Cada intervalo se denominará: $\Delta x_i ; i=1,2,3,\dots,n$

Se reemplazará a la función V por la función de ponderación ϕ , la cual se define como

$$\varphi_\ell(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \ell \\ 0, & \text{si } k \neq \ell, \end{cases} \quad k, \ell = 1, 2, 3, \dots, M,$$

Esto quiere decir la la función sólo tomará valor 1 en el punto x_i , y se multiplicará por los valores $\alpha_i = v_{(i)}$ (valores de v en cada punto de la discretización).

Quedando entonces

$$(w', \phi_i') = (f_i, \phi_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Para encontrar w' el Método busca acercar su valor por medio de una serie de productos de la forma:

$$w'_{(x)} \approx \alpha_1 \phi'_1 + \alpha_2 \phi'_2 + \dots + \alpha_n \phi'_n$$

$$w'_{(x)} \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i$$

por lo tanto

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \phi'_j, \phi'_i \right) = (f, \phi_i)$$

Planteamos la matriz

$$a_{ij} = (\phi'_j, \phi'_i); b_i = (f, \phi_i)$$

Desarrollamos las matrices

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n} = b_1$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_n a_{2n} = b_2$$

...

$$\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \dots + \alpha_n a_{nn} = b_n$$

Estamos en presencia de un sistema de la forma $A\alpha = b$

Donde

- A : matriz de rigidez
- b : vector de cargas .

Definimos ϕ a trozos como

$$\phi =$$

$$\begin{cases} 0 & ; si \quad x < x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & ; si \quad x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & ; si \quad x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & ; si \quad x > x_{i+1} \end{cases}$$

Derivamos ϕ y obtenemos

$$\phi' =$$

$$\begin{cases} 0 & ; si \quad x < x_{i-1} \\ \frac{1}{h} & ; si \quad x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} & ; si \quad x_i < x \leq x_{i+1} \\ 0 & ; si \quad x > x_{i+1} \end{cases}$$

Reemplazamos y obtenemos

$$a_{ii} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dividimos la integral

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{xi} \phi' i_{(x)} \phi' i_{(x)} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi' i_{(x)} \phi' i_{(x)} dx$$

reemplazamos el valor de ϕ' usando la definición de ϕ'

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{xi} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) dx$$

$$a_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{xi} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx$$

Integramos

$$a_{ii} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2}{h}$$

Debido a que una parte de la integral se anula simétricamente

$$a_{i(i\pm 1)} = -\frac{1}{h}$$

La matriz de rigidez nos quedaría

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \dots & 0 & | \\ -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & \dots & 0 & | \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & | \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & | \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & | \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} & | \end{vmatrix}$$

Armamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\rho_0 h}{\epsilon_r \epsilon_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución del sistema de ecuaciones lineales

Todos los valores en el sistema de ecuaciones anterior son constantes a las que tenemos que asignarles valor porque no están explícitamente en las consignas.

Establecemos los siguientes valores

- $d = 1[m]$
- $V_0 = 1 [V]$
- $\rho_0 = 1$
- $\epsilon_r = 1$
- $\epsilon_0 = 1$
- $\frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = 1$

Vamos a resolver teniendo en cuenta tres tamaños de paso 0.25 (25 cm), 0.125 (12,5 cm) y 0.01 (1 cm)

Resolución para $h= 0.25$

En este escenario tendríamos que

- $N=4$
- $\frac{\rho_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0} h=0.25$

Reemplazamos estos valores en el sistema de ecuaciones anterior y lo resolvemos mediante el siguiente programa

```
% Parámetros del problema
V0 = 1; % Potencial en x=0 (CONDICION DE BORDE)
d = 1; % Distancia total (PUNTO FINAL DEL INTERVALO [0,d])
p0 = 1; % Densidad de carga
er = 1 % Constante dieléctrica relativa
e0 = 1 % Constante dieléctrica de vacío
h = 0.25; % Tamaño de paso
N = d / h; % Número de subintervalos
C = p0 / (er * e0);

% Coordenadas nodales
x = linspace(0, d, N+1)';

% Construcción de la matriz de rigidez K y el vector de carga F
K = zeros(N+1, N+1);
F = zeros(N+1, 1);

for i = 2:N
    K(i, i-1) = -1 / h;
    K(i, i) = 2 / h ;
    K(i, i+1) = -1 / h ;
    F(i) = -C * h;
end

% Condiciones de borde
K(1, :) = 0;
K(1, 1) = 1;
F(1) = V0;

K(N+1, :) = 0;
K(N+1, N+1) = 1;
F(N+1) = 0;

% RESOLVEMOS EL SISTEMA K * V = F
V = K \ F;

% Mostramos los resultados
fprintf('Resultados usando el metodo de diferencias finitas con N=%d y h=%.3f\n', N, h);
fprintf('V1 (x=0) = %.6f\n', V(1));
for i = 1:N
    xi = i * h;
    fprintf('V%d (x=%.3f) = %.6f\n', i+1, xi, V(i));
```

```
end
```

% GRAFICA SOL NUMERICA

```
figure;
plot(x,V,'LineStyle', '-','Color', 'b','Marker', 'o','MarkerFaceColor', 'r','LineWidth', 2,'MarkerSize', 2);
hold on;
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
titulo= sprintf('Solución por el metodo de diferencias Finitas ( con tamaño de paso h = %.3f', h);
title(titulo);
legend('show');
grid on;
hold off;
```

% GRAFICA SOL ANALITICA

```
Y_analitica = (p0 / (e0 * er)) * x.^2/2 + (( - p0 / (e0 * er)) * d/2 - V0/d) * x + V0;
plot(x,Y_analitica,'r');
title('Solución analítica');
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
grid on;
```

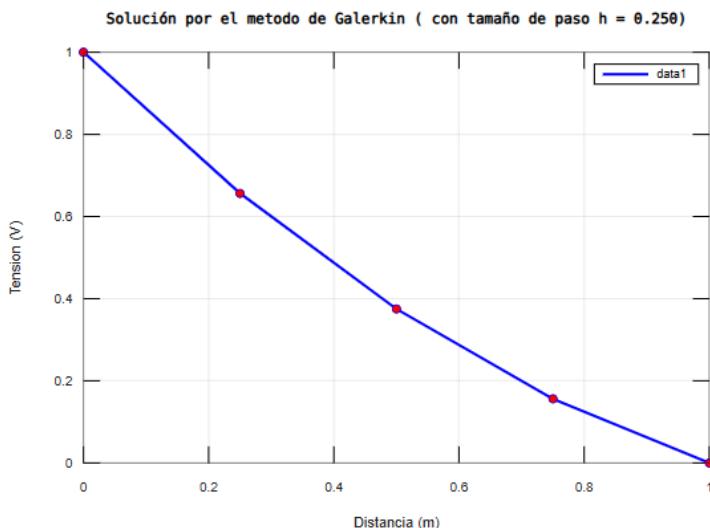
% GRAFICA ERROR ABSOLUTO ENTRE SOLUCIONES

```
error=abs(V'-Y_analitica')
plot(x,error,'b');
title('Error absoluto entre la solucion numerica y analitica');
xlabel('Distancia (m)')
ylabel('Tension (V)')
grid on;
```

Con el programa anterior obtuvimos

V1 (x=0) = 1.000000
V2 (x=0.250) = 1.000000
V3 (x=0.500) = 0.656250
V4 (x=0.750) = 0.375000
V5 (x=1.000) = 0.156250

Visualicemos la curva definida por estos puntos



Resolvemos para h=0.125

Nos da que

- N=8
- $\frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} h = 0.125$

Reemplazamos estos valores en el sistema de ecuaciones anterior y lo resolvemos mediante el mismo programa que en el caso anterior

Usando el mismo programa que para que caso anterior obtuvimos

$$V_1 (x=0) = 1.000000$$

$$V_2 (x=0.125) = 1.000000$$

$$V_3 (x=0.250) = 0.820312$$

$$V_4 (x=0.375) = 0.656250$$

$$V_5 (x=0.500) = 0.507812$$

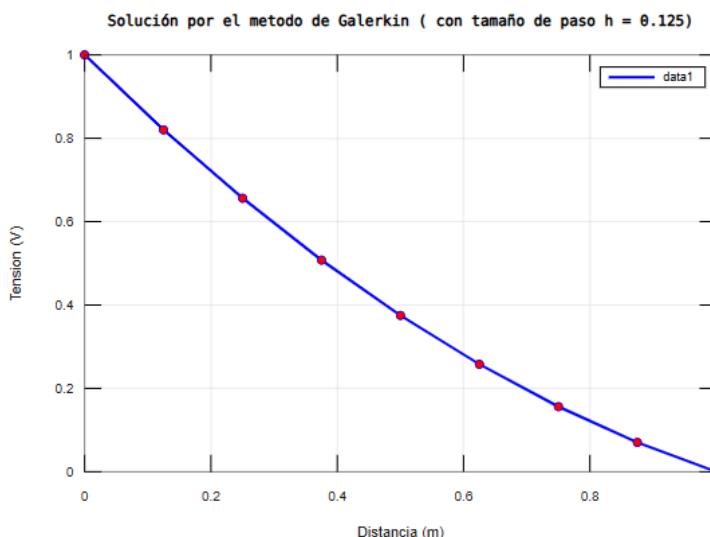
$$V_6 (x=0.625) = 0.375000$$

$$V_7 (x=0.750) = 0.257812$$

$$V_8 (x=0.875) = 0.156250$$

$$V_9 (x=1.000) = 0.070312$$

Visualicemos la curva definida por estos puntos



Resolvemos para $h=0.01$

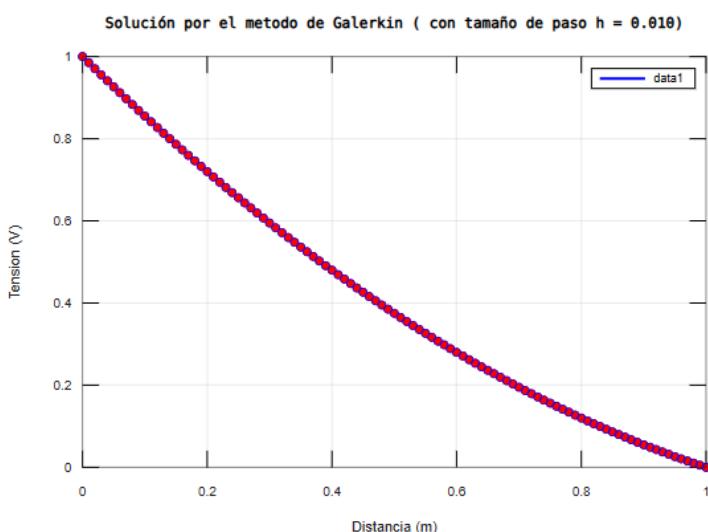
Nos da que

- $N=100$
- $\frac{\rho_0}{\epsilon_r \epsilon_0} h=0.01$

Reemplazamos estos valores en el sistema de ecuaciones anterior y lo resolvemos mediante el mismo programa que en el caso anterior

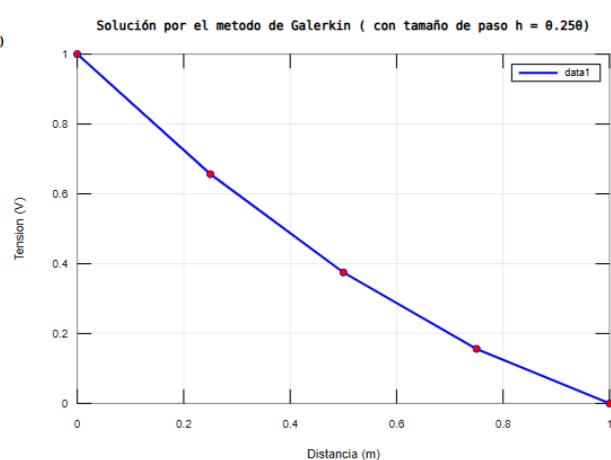
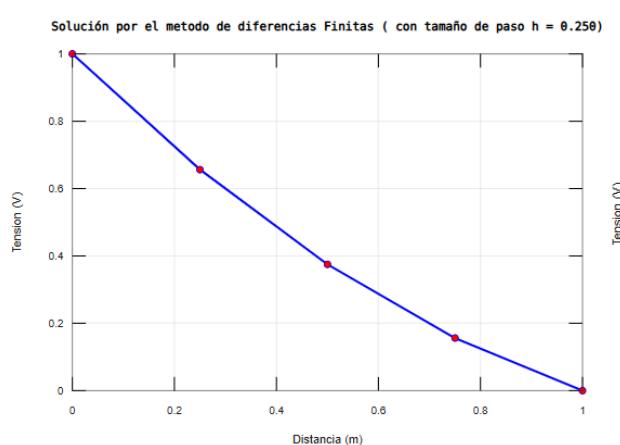
No escribo el vector solución porque quedaría muy largo, pero también lo calculamos con el mismo programa.

Visualicemos la curva definida por estos puntos

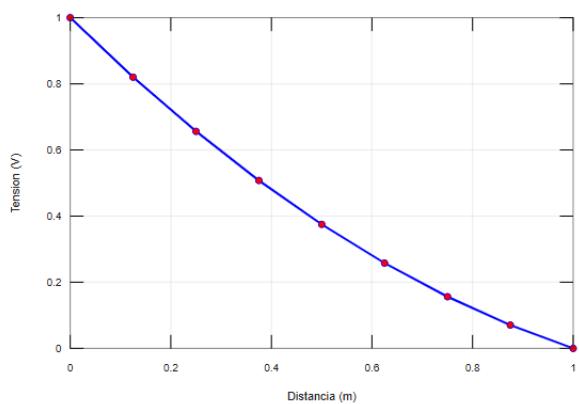


5. Compare los resultados entre los diferentes métodos y la solución analítica.

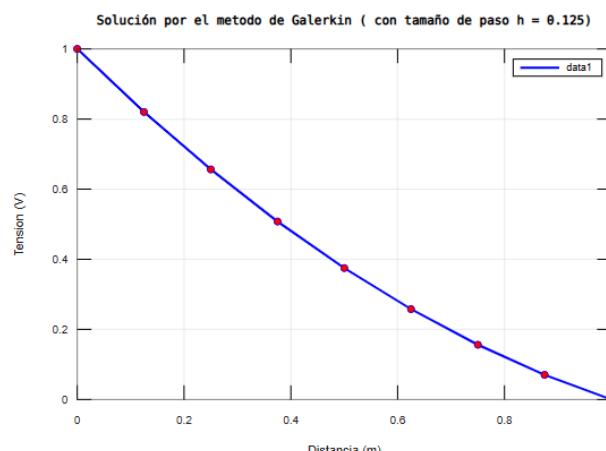
Soluciones numéricas



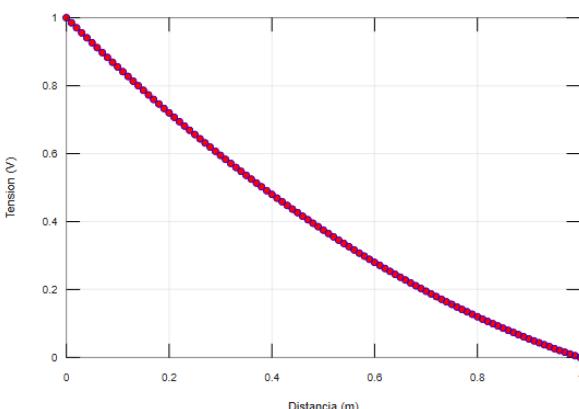
Solución por el metodo de diferencias Finitas (con tamaño de paso h = 0.125)



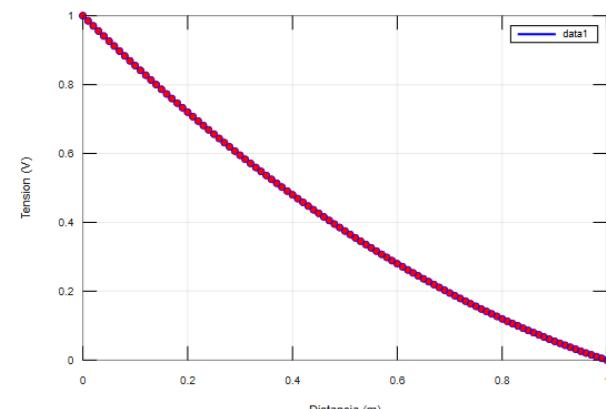
Solución por el metodo de Galerkin (con tamaño de paso h = 0.125)



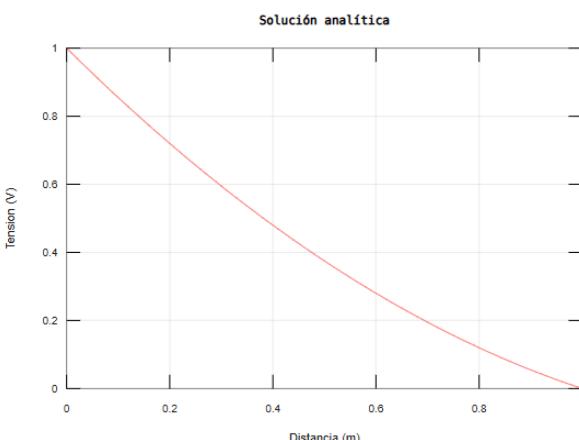
Solución por el metodo de diferencias Finitas (con tamaño de paso h = 0.010)



Solución por el metodo de Galerkin (con tamaño de paso h = 0.010)



Solución analitica

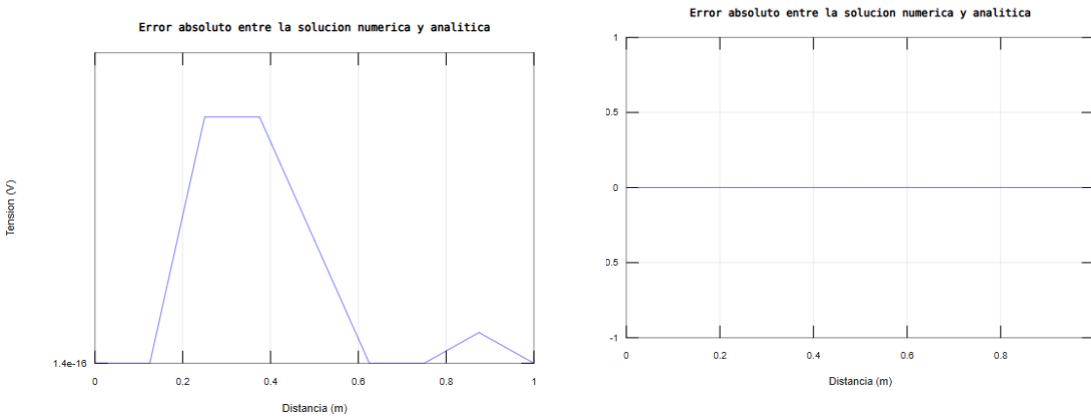


Error absoluto entre las soluciones numéricas y la analitica

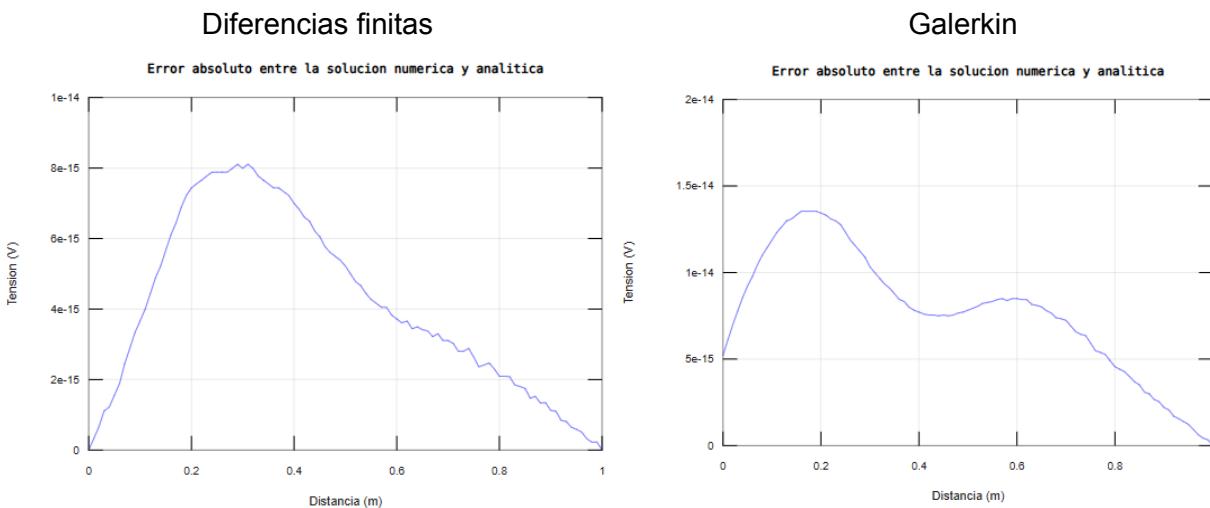
Para $h=0.125$

Diferencias finitas

Galerkin



Para $h=0.01$



Conclusiones

Al comparar las distintas soluciones numéricas entre sí y con la solución analítica vemos que mientras disminuimos el tamaño de paso la gráfica se va suavizando cada vez más y como consecuencia pareciéndose más a la solución analítica.

Podemos observar que las gráficas de ambas soluciones numéricas con $h=0.01$ siguen teniendo un grado de error respecto a la solución analítica pero es tan pequeño que son prácticamente igual a la de la solución analítica.

a pesar que partimos de problemas distintos y usamos métodos numéricos distintos con ambos métodos se llega al mismo resultado.

El error absoluto de ambas soluciones numéricas respecto a la analítica es relativamente pequeño, por lo que se podría utilizar aproximar la solución del problema utilizando solución numérica en lugar de la analítica.

Por más pequeño que sea el tamaño de paso nunca va a ser igual que la solución analítica, ya que es la más exacta, pero no siempre contamos con la solución analítica.

Estos métodos están pensados para ser aplicados en ocasiones dónde la solución analítica no se alcanzó o no sea alcanzable

El Método de Diferencias finitas es considerablemente más simple de entender y usar que el método de Galerkin, ya que en el segundo método debido al uso de funciones continuas a trozos y la formulación variacional se requiere de un mayor grado de razonamiento.

4. PROBLEMA BIDIMENSIONAL

Considere una caja rectangular de longitud infinita con paredes metálicas como se muestra en la Figura 2. Las paredes verticales e inferior se mantienen a un potencial eléctrico nulo mientras que la pared superior, que se separa por pequeños huecos de las paredes laterales verticales, tiene un potencial eléctrico fijo igual a V_0 . La región dentro de la caja está libre de carga. Se desea resolver la ecuación de Laplace con el conjunto de condiciones de frontera dado, a fin de encontrar y representar

Gráficamente la distribución de potencial eléctrico en el interior de la caja.

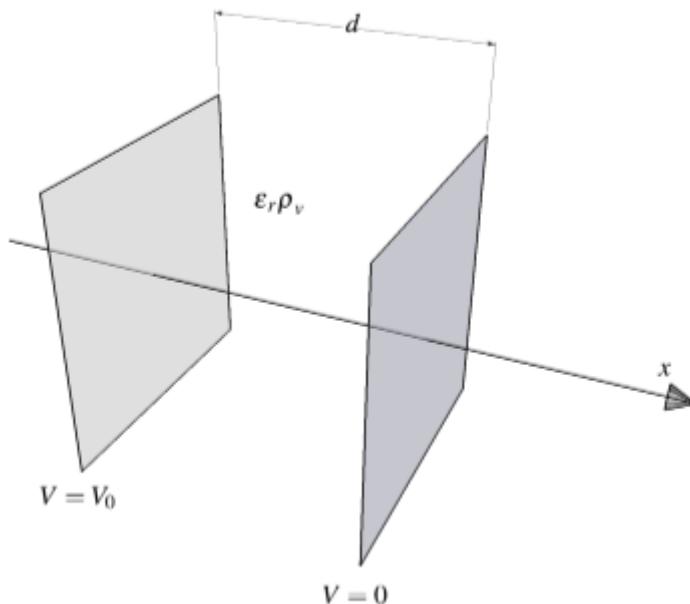


Figura 1: Geometría del Problema a Valores de Borde electrostático

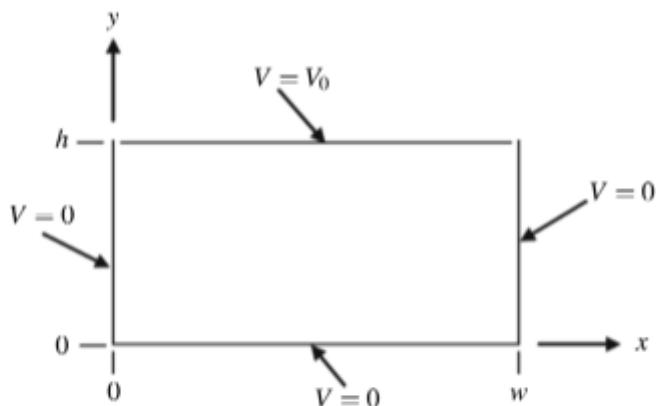


Figura 2: Caja rectangular de longitud infinita con paredes metálicas.

La ecuación de Laplace para V en dos dimensiones está dada por:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0, \quad (9)$$

Y las condiciones de borde de este problema son:

$$\begin{cases} V(x,0) = 0, \\ V(x,h) = V_0, \\ V(0,y) = 0, \\ V(w,y) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Este problema se puede resolver de manera analítica utilizando el Método de Separación de Variables. La solución en forma de potencial eléctrico como función de x e y en el interior de la caja está dada por:

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{w} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{w}}{(2k-1) \sinh \frac{(2k-1)\pi h}{w}} \quad (11)$$

Un gráfico con las curvas de nivel de la distribución de potencial eléctrico basado en la expresión cerrada (11) se representa en la Figura 3. Las dimensiones de la caja son de $1m \times 1m$, y el potencial impuesto en la superficie superior de la caja es constantemente igual a 1.

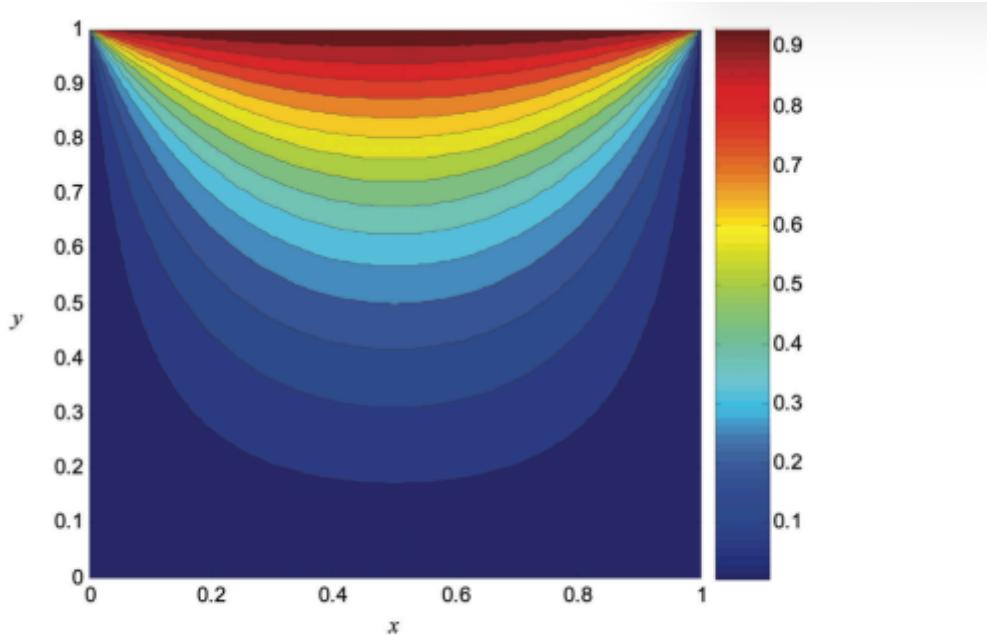


Figura 3: Curvas de nivel de la distribución de potencial eléctrico (Solución analítica).

1. Plantee la formulación variacional de este problema.

El dominio es el rectángulo $[0, w] \times [0, h]$, tal que $0 \leq x \leq w$, $0 \leq y \leq h$.

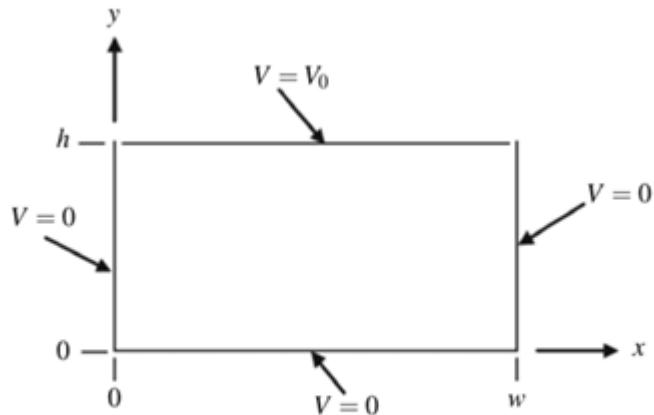


Figura 14: Caja rectangular de longitud infinita con paredes metálicas.

Tenemos las condiciones de borde:

$$V_{(x,0)} = 0$$

$$V_{(x,h)} = V_0$$

$$V_{(0,y)} = 0$$

$$V_{(w,y)} = 0$$

Plantemos una función de prueba la cual tiene en cuenta las condiciones de borde:

$u_{(x,y)}$: función de prueba

$$V_{(x,0)} = 0, \text{ entonces, } u_{(x,0)} = 0$$

$$V_{(x,h)} = V_0, \text{ entonces, } u_{(x,h)} = V_0$$

$$V_{(0,y)} = 0, \text{ entonces, } u_{(0,y)} = 0$$

$$V_{(w,y)} = 0, \text{ entonces, } u_{(w,y)} = 0$$

Partimos de la ecuación de Laplace (9)

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

Multiplicamos miembro a miembro por la función definida anteriormente

$$u_{(x,y)} \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) = u_{(x,y)}(0)$$

$$u_{(x,y)} \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} \right) = 0$$

Integramos ambos miembros de la ecuación sobre el dominio Ω .

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} 0 d\Omega$$

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0$$

Separamos los términos x e y en dos integrales.

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0$$

Aplicaremos integración por partes a cada uno de los términos de la ecuación.

(Donde al integrar por partes en un dominio, se forma una integral de borde)

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} d\Omega + \oint_{\Gamma} u \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x \right) d\Gamma \quad \text{Para el término x}$$

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} d\Omega + \oint_{\Gamma} u \left(\frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma \quad \text{Para el término y}$$

(Donde Γ es el perímetro de dominio, y n_x n_y son las componentes del vector normal al borde).

Sumando ambas expresiones nos queda:

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega + \oint_{\Gamma} u \left(\frac{\partial V}{\partial x} n_x + \frac{\partial V}{\partial y} n_y \right) d\Gamma = 0$$

(Donde aquí aplicamos las condiciones de borde, como lo definimos al principio. Se puede decir que $u=0$ en todo el contorno donde V es conocido, lo cual hace que la integral de borde se anule).

Dáandonos como resultado:

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad \text{Multiplicando por } (-1) \text{ para quitar el signo negativo de la integral.}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega = 0$$

Esta expresión obtenida (en paréntesis) es exactamente el producto escalar de los gradientes (∇u y ∇V). Permitiendo llegar así a la expresión :

$$\int_{\Omega} \nabla u * \nabla V d\Omega = 0$$

2. Realice una triangulación sobre el dominio Ω detallando lo siguiente:

(a) Tabla con las coordenadas nodales (nodos):

Similar a la discretización del dominio realizado en el problema unidimensional, en este problema discretizaremos el dominio (Ω) utilizando triangulación para poder utilizar métodos numéricos.

Lo que haremos será dividir la caja en una cantidad finita de triángulos.

Definimos una cantidad de nodos a partir de los cuales vamos a formar los triángulos porque van a ser los vértices de los mismos y por ende van a determinar su área. La cantidad de nodos es directamente proporcional a la cantidad de triángulos e inversamente al área de los mismos.

A mayor cantidad de nodos, más precisa será la aproximación. Similar a la cantidad de intervalos en el problema lineal.

Donde también se determinará la extensión tanto en dirección x como la dirección en y . Siendo :

Anchura del dominio (w): es la extensión en x . $x \in [0, w]$.

Altura del dominio (h): es la extensión en y . $y \in [0, h]$.

Con un ejemplo claro :

Supongamos que el dominio es el rectángulo determinado por $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$.

Para discretizar este dominio, vamos a formar una malla regular utilizando un paso constante de $h = 0.25$ en ambas direcciones.

Esto nos va a definir tanto las coordenadas en x , como las coordenadas en y .

Eje x : $\{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$ $N_x = 5$ Nodos

Eje y : $\{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$ $N_y = 5$ Nodos

Al realizar el producto cartesiano de ambos conjuntos, vamos a obtener una malla compuesta por $N_x.N_y$ Nodos. Es decir 25. Lo cual obtendremos la siguiente tabla de coordenadas nodales.

Nodo	Coordenada x	Coordenada y
N_1	0	0
N_2	0.25	0
N_3	0.5	0

N_4	0.75	0
N_5	1	0
N_6	0	0.25
N_7	0.25	0.25
N_8	0.5	0.25
N_9	0.75	0.25
N_{10}	1	0.25
N_{11}	0	0.5
N_{12}	0.25	0.5
N_{13}	0.5	0.5
N_{14}	0.75	0.5
N_{15}	1	0.5
N_{16}	0	0.75
N_{17}	0.25	0.75
N_{18}	0.5	0.75
N_{19}	0.75	0.75
N_{20}	1	0.75
N_{21}	0	1
N_{22}	0.25	1
N_{23}	0.5	1
N_{24}	0.75	1
N_{25}	1	1

Generalizando el problema.

Sea Ω el rectángulo tal que $0 \leq x \leq w$, $0 \leq y \leq h$, m es la cantidad de nodos horizontalmente y n la cantidad de nodos verticalmente.

sea $i = 1, \dots, n$ la "fila" del nodo, $j = 1, \dots, m$ la "columna" del nodo.

Sea el nodo $N_{i,j} = N_{(m)*(i-1) + j} = N_k$ con $k = 1, \dots, mxn$.

el mismo tendrá las coordenadas $\left(\frac{(i-1)\cdot w}{m-1}, \frac{(j-1)\cdot h}{n-1}\right)$

(b) Tabla con las conectividades elementales (elementos):

Utilizaremos la tabla de coordenadas nodales anterior para formar los triángulos.

Formaremos ternas (tupla de tres nodos) que representan cada triángulo, necesitamos completar toda la malla con los triángulos.

Como tenemos 25 nodos podemos formar 16 cuadrados y como cada cuadrado está formado por 2 triángulos nos da como resultado que la malla está formada por 32 triángulos que surgen de trazar una linea diagonal en cada cuadrado.

Expresemos los triángulos.

Los triángulos debajo de la diagonal tienen como vértices los nodos (N_i, N_{i+1}, N_{i+5}) con $i = 1, \dots, 19$.

Los triángulos encima de la diagonal tienen como vértices los nodos (N_i, N_{i+5}, N_{i+4}) con $i = 2, \dots, 20$.

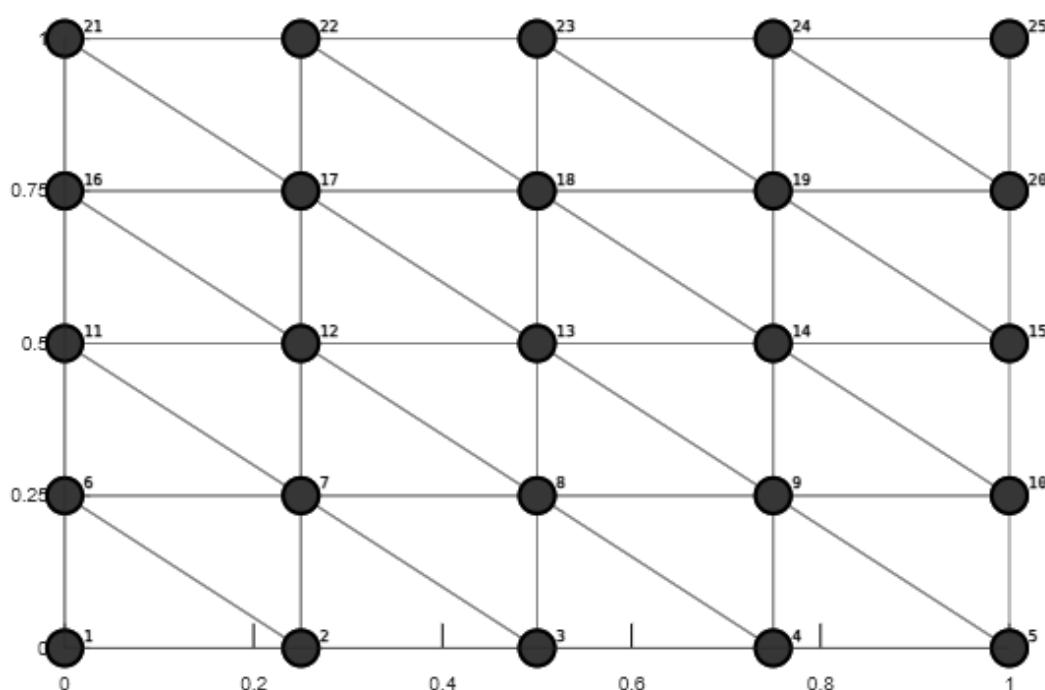
Si quisiéramos usar los mismos índices para que sea más fácil de entender nos quedaría:

Los triángulos debajo de la diagonal tienen como vértices los nodos (N_i, N_{i+1}, N_{i+5})

Los triángulos encima de la diagonal tienen como vértices los nodos $(N_{i+1}, N_{i+6}, N_{i+5})$

con $i = 1, \dots, 19$.

Imagen de la malla



Elemento	Nodo 1	Nodo 2	Nodo 3
E_1	N1	N2	N6
E_2	N2	N7	N6
E_3	N2	N3	N7
E_4	N3	N8	N7

E_5	N3	N4	N8
E_6	N4	N9	N8
E_7	N4	N5	N9
E_8	N5	N10	N9
E_9	N6	N7	N11
E_{10}	N7	N12	N11
E_{11}	N7	N8	12
E_{12}	N8	N13	N12
E_{13}	N8	N9	N13
E_{14}	N9	N14	N13
E_{15}	N9	N10	N14
E_{16}	N10	N15	N14
E_{17}	N11	N12	N16
E_{18}	N12	N17	N16
E_{19}	N12	N13	N17
E_{20}	N13	N18	N17
E_{21}	N13	N14	N18
E_{22}	N14	N19	N18
E_{23}	N14	N15	N19
E_{24}	N15	N20	N19
E_{25}	N16	N17	N21
E_{26}	N17	N22	N21
E_{27}	N17	N18	N22
E_{28}	N18	N23	N22
E_{29}	N18	N19	N23
E_{30}	N19	N24	N23

E_{32}	N19	N20	N24
E_{32}	N20	N25	N44

Generalizando

Sea Ω el rectángulo tal que $0 \leq x \leq w$, $0 \leq y \leq h$, m es la cantidad de nodos horizontalmente y n la cantidad de nodos verticalmente.

sea $i = 1, \dots, n$ la "fila" del nodo y $j = 1, \dots, m$ la "columna" del nodo.

Sea el nodo $N_{i,j} = N_{(m)*(i-1) + j} = N_k$ con $k = 1, \dots, mxn$

Los triángulos debajo de la diagonal tienen como vértices los nodos (N_k, N_{k+1}, N_{k+m})

Los triángulos encima de la diagonal tienen como vértices los nodos $(N_{k+1}, N_{k+m+1}, N_{k+m})$

con $k=1, \dots, m(n-1)$.

(c) Resuelva el problema utilizando los Métodos de Diferencias Finitas (utilizando diferentes tamaños de malla) y Elementos Finitos (utilizando diferentes tamaños de paso).

Método de Diferencias Finitas (MDF).

Primeramente lo que se hará será dividir el dominio $[0, w] \times [0, h]$, en una malla establecida de $(n + 1) \times (n + 1)$ nodos. Luego se tomará el mismo tamaño de paso h para ambas direcciones, para así simplificar y facilitar nuestros cálculos. ($h_x = h_y = h$). Por lo que vamos a tener un conjunto de nodo (i, j) donde $i, j = 1, 2, \dots, n + 1$, que incluyen los bordes.

A partir de esto, vamos a tomar la ecuación de Laplace, y la vamos a aproximar.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Luego con diferencias finitas aproximamos la segunda derivada. Dando resultado a :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2}$$

Reemplazando en la ecuación de Laplace.

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0$$

Simplificando

$$\frac{V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1}}{h^2} = 0$$

Por lo tanto viendo nuestra ecuación, sabemos que debe ser igual a cero.

Por la división establecida, el denominador (h^2) no podrá valer cero. Por lo que si o si nuestro numerador debe ser 0.

$$V_{i-1,j} - 2V_{i,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j} + V_{i,j+1} = 0$$

$$-4V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i+1,j} + V_{i,j-1} + V_{i,j+1} = 0$$

Simplificando.

Con condiciones de borde :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{(x,0)} = 0 \\ V_{(x,h)} = V_0 \\ V_{(0,y)} = 0 \\ V_{(w,y)} = 0 \end{array} \right.$$

Estas condiciones de borde y el conjunto de todas las ecuaciones discretizadas se convierten en un formato matricial de manera que el sistema lineal queda como:

$$\bar{A}\bar{V}=\bar{b}$$

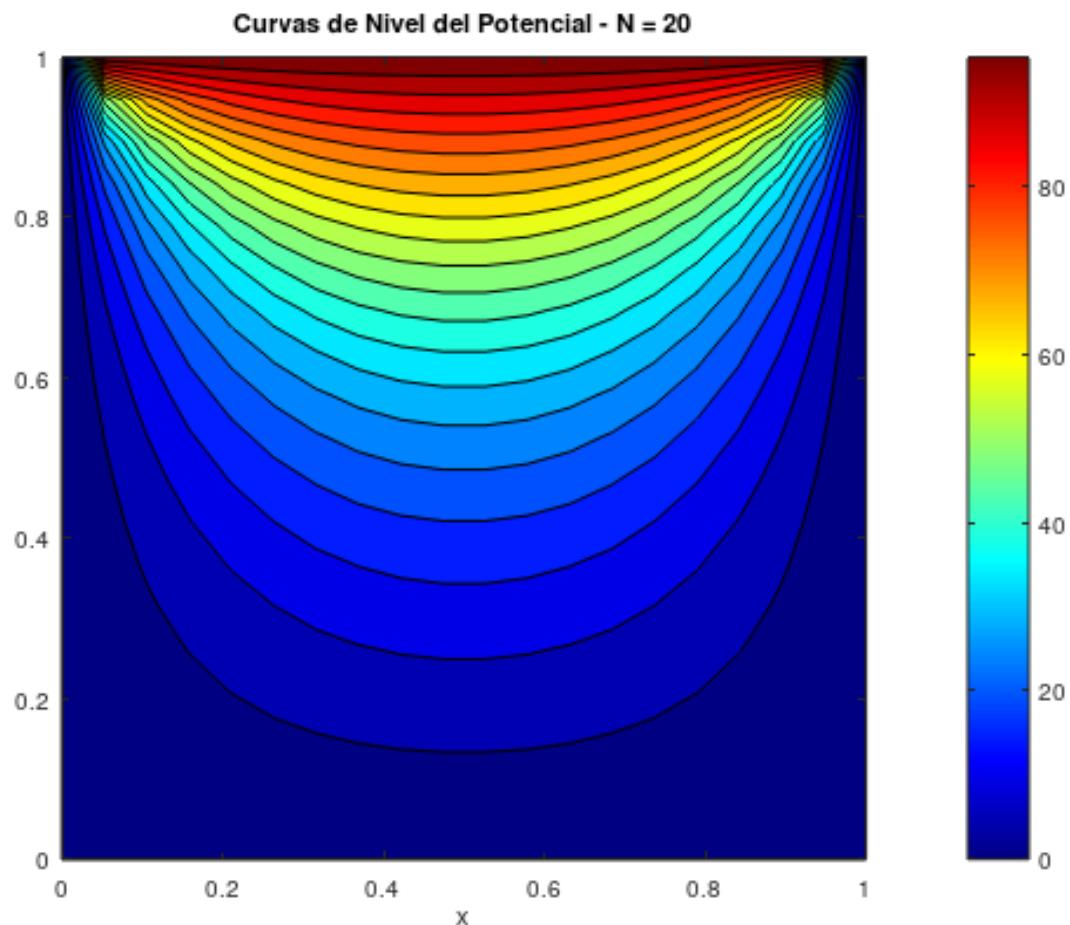
Donde V será en vector columna que contenga los valores de potencial desconocidos en todos los nodos.

Donde A es una matriz dispersa que representa la ecuación discretizada de cada nodo.

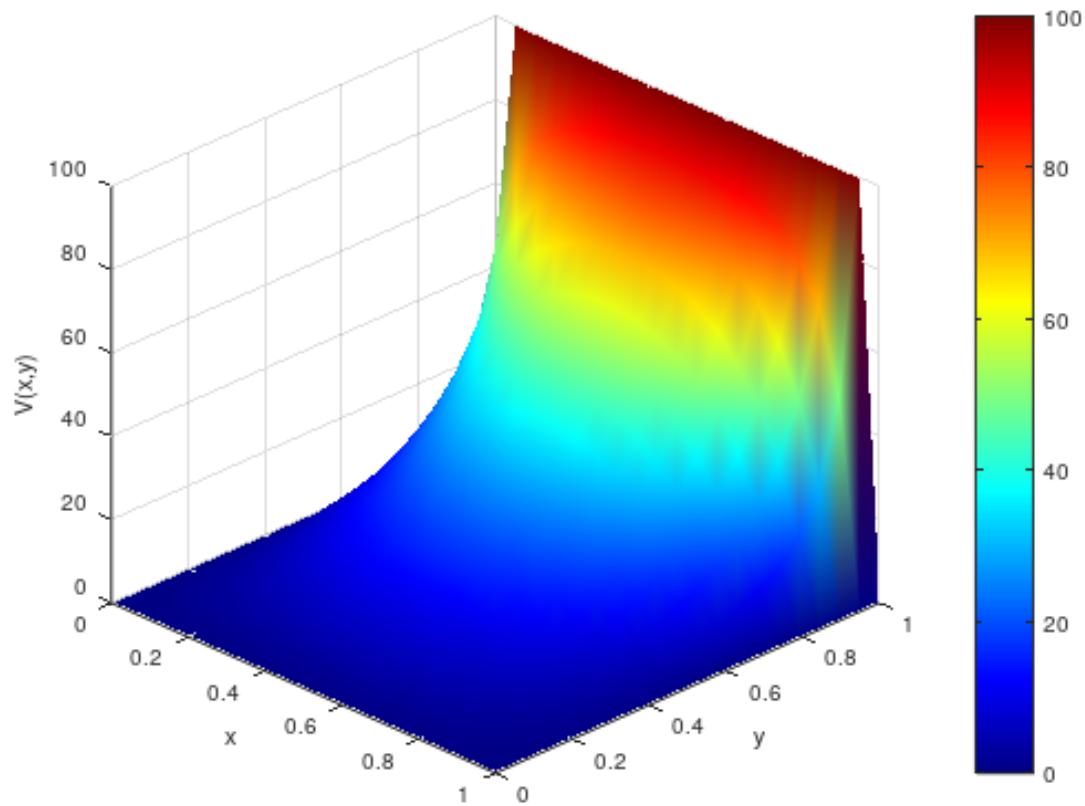
Y donde B es el vector que recoge los valores conocidos que influyen en nuestro sistema, incorporando las condiciones de borde.

Prueba para varios tamaños de paso:

$h=0.05$ ($N=20$)

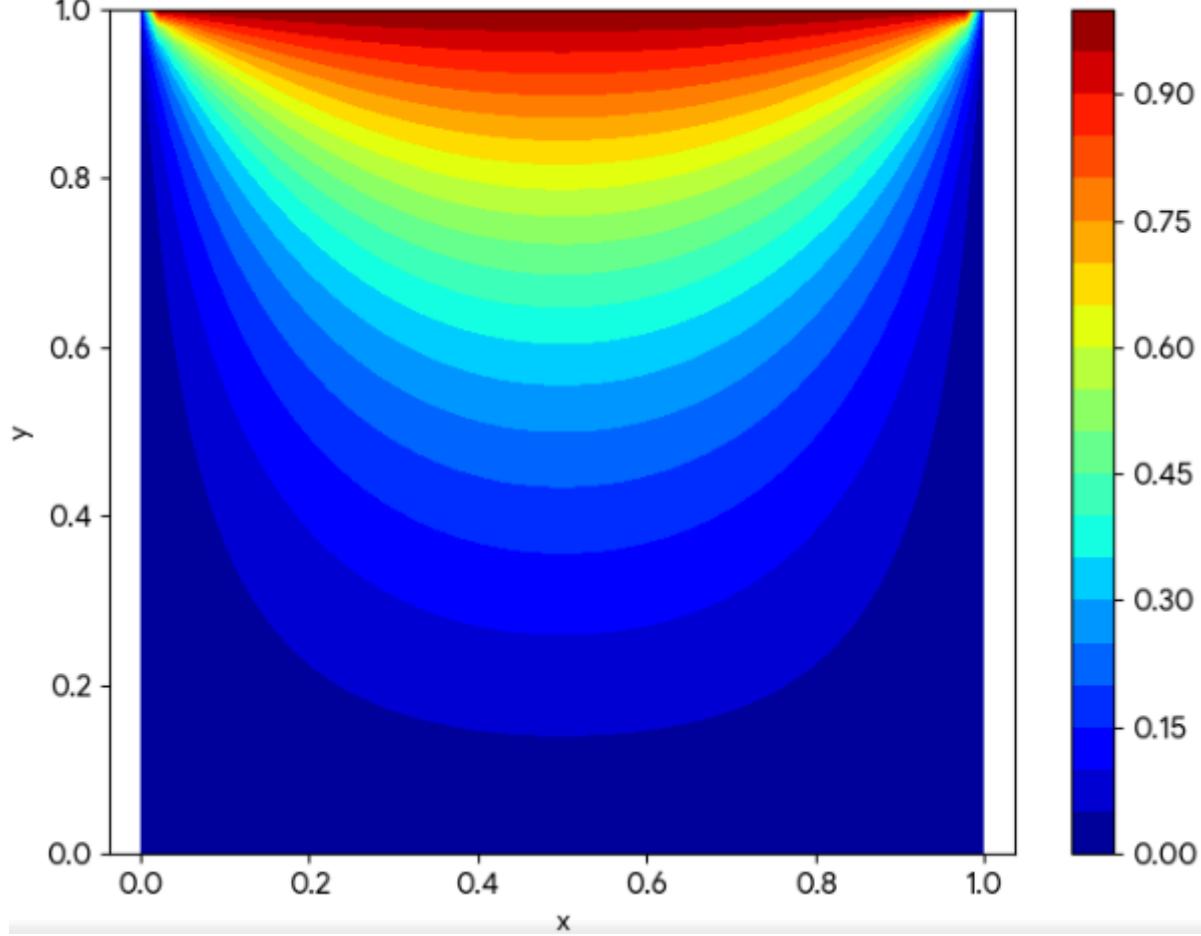


Distribución del Potencial Eléctrico (MDF) - N = 20

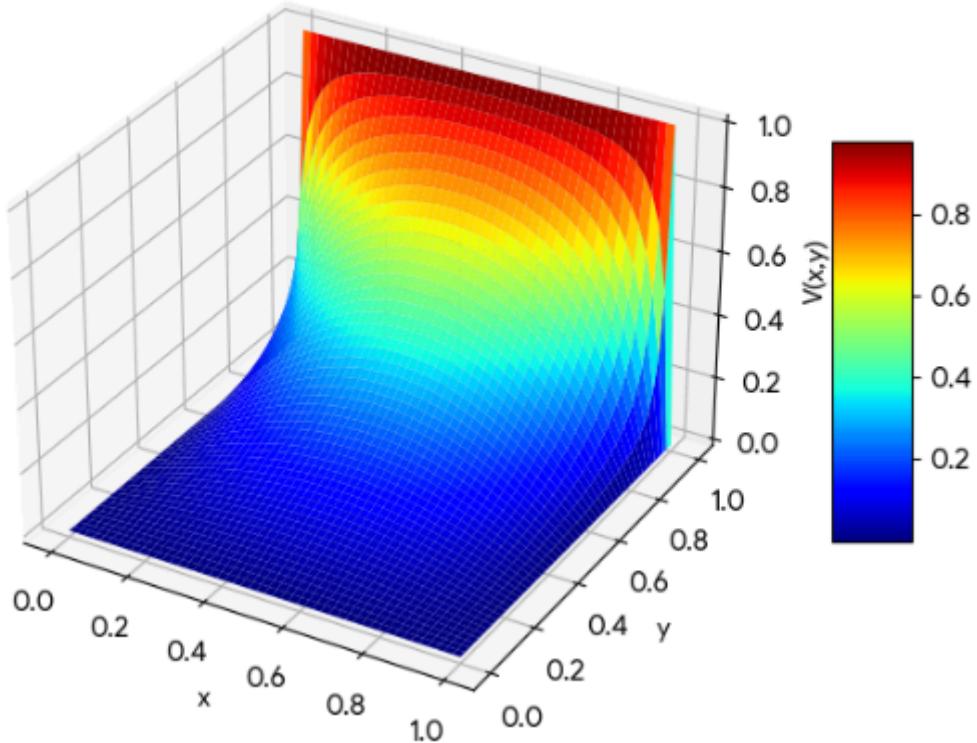


$h=0.05$ (N=20)

Curvas de Nivel del Potencial - N=50



Distribución del Potencial Eléctrico (MDF) - N=50



Método de Elementos Finitos

Discretizamos el dominio Ω mediante una triangulación del rectángulo $[0, w] \times [0, h]$. Esto lo hacemos completando el dominio con triángulos no superpuestos.

Aproximamos la función V mediante una combinación lineal de funciones N_i con $i=1,\dots,n$ (cantidad de nodos) definidas en los vértices del triángulo.

$$V(x, y) \approx \sum_{i=1}^n V(N_i) N_i$$

donde $V(N_i)$ es el valor de V en el Nodo N_i .

Las funciones de forma N_i toman valor 1 en el nodo i del triángulo y 0 en los otros dos.

Ahora reemplazamos V en la formulación variacional por la aproximación anterior.

Recordemos la formulación variacional

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla V d\Omega \text{ reemplazemos } V$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla \left(\sum_{i=1}^n V(N_i) N_i \right) d\Omega \text{ distribuimos el gradiente}$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n V(N_i) \nabla N_i \right) d\Omega \text{ como } V(N_i) \text{ es constante}$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_j \cdot V(N_i) \left(\sum_{i=1}^n \nabla N_i \right) d\Omega \text{ reorganizamos la integral}$$

$$\sum_{i=1}^n V(N_i) \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega \text{ reorganizamos la integral}$$

$$\sum_{i=1}^n V(N_i) \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = 0$$

Por lo que la matriz de rigidez se define como

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$$

Descomponemos la integral global(de todo el dominio) en integrales locales (integrales de los triángulo) ya que el dominio está discretizado

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega$$

ya que ∇N_i , ∇N_j son constantes (las funciones Ni son lineales al ser triángulos) la integral local se reduce a

$$K_{ij}^e = (\nabla N_i \cdot \nabla N_j) \cdot A_e$$

siendo

- K_{ij}^e la matriz de rigidez elemental
- A_e el área del triángulo
- Ω^e area del triangulo e
- n es la cantidad de triángulos o elementos de la discretización.

Para un triángulo cuyo vértices son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3)

Se definen las funciones N_i que toman valor 1 en el nodo i del triángulo y 0 en los otros dos se definen como

$$N_i(x, y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A_e}$$

Siendo

- $a_i = x_j y_k - x_k y_j$
- $b_i = y_j - y_k$ la pendiente de la función respecto al eje x
- $c_i = x_j - x_k$ la pendiente de la función respecto al eje y

El área del triángulo se calcula

$$A = \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2}$$

La matriz de rigidez local para un elemento se calcula integrando los gradientes de las funciones de forma en el área del elemento

$$K_{i,j}^e = \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

Para el triángulo anterior, las derivadas de las funciones de forma se calculan

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = b_i$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = b_j$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = c_i$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = c_j$$

Reemplazamos en $K_{i,j}^e$

$$K_{i,j}^e = \int_{\Omega_e} (b_i b_j + c_i c_j) d\Omega$$

como b_i, b_j, c_i, c_j dentro de cada triángulo simplificando la integral nos queda

$$K_{i,j}^e = (b_i b_j + c_i c_j) \int_{\Omega_e} d\Omega$$

Como $\int_{\Omega_e} d\Omega$ es el área del triángulo

$$K_{i,j}^e = (b_i b_j + c_i c_j) A$$

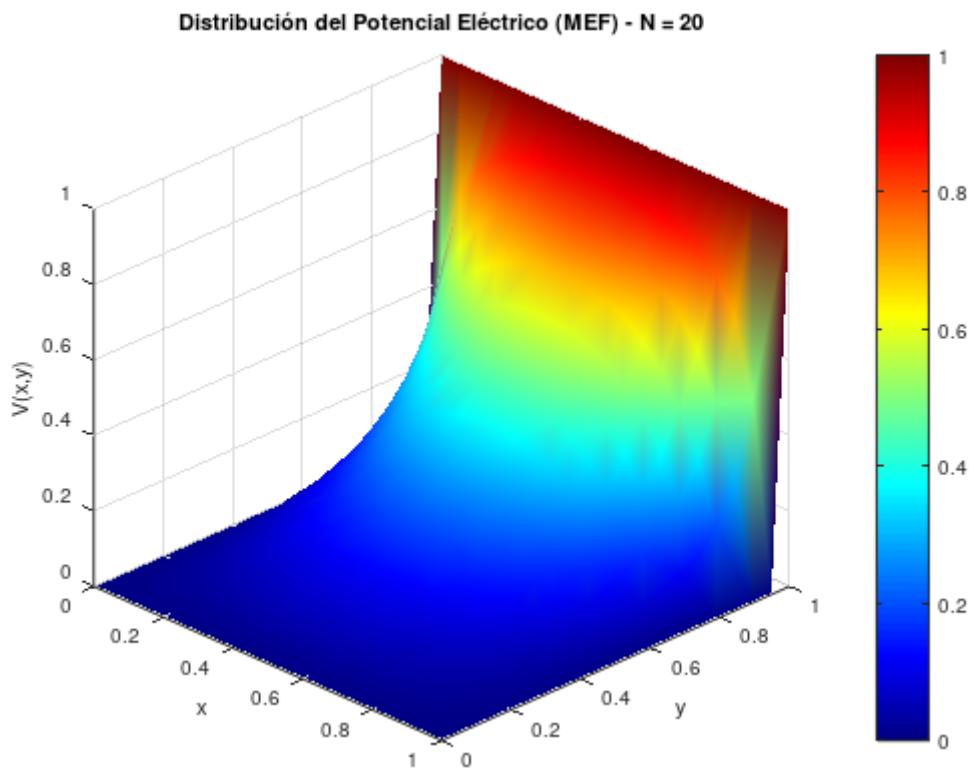
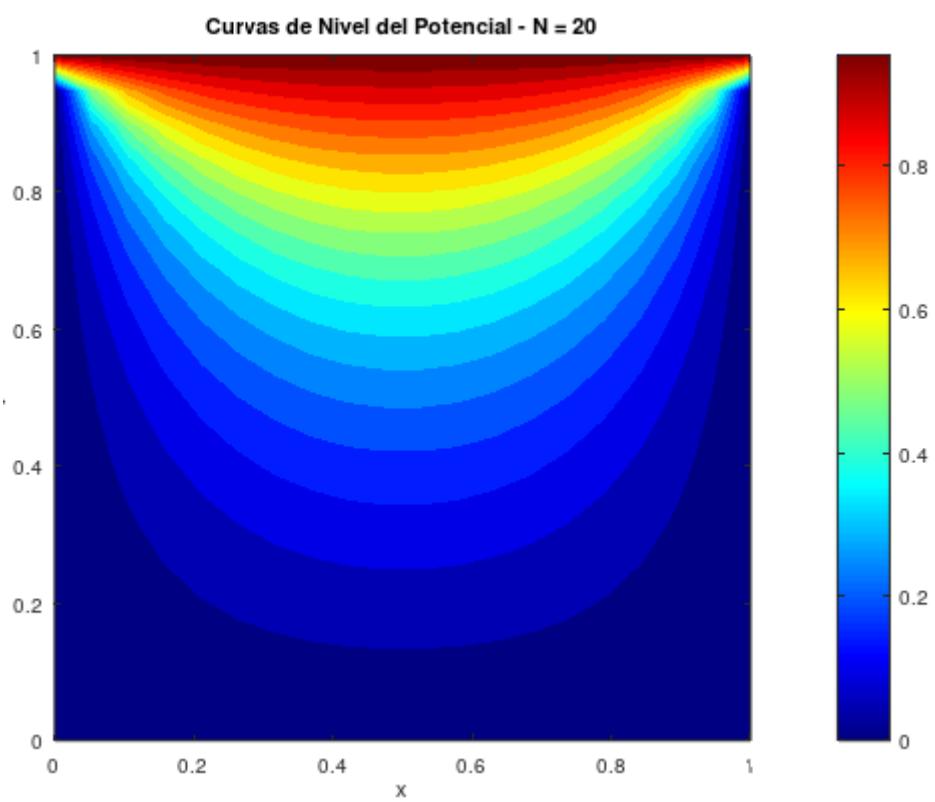
Desarrollemos la matriz

$$K_{i,j}^e = \begin{vmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{vmatrix} A$$

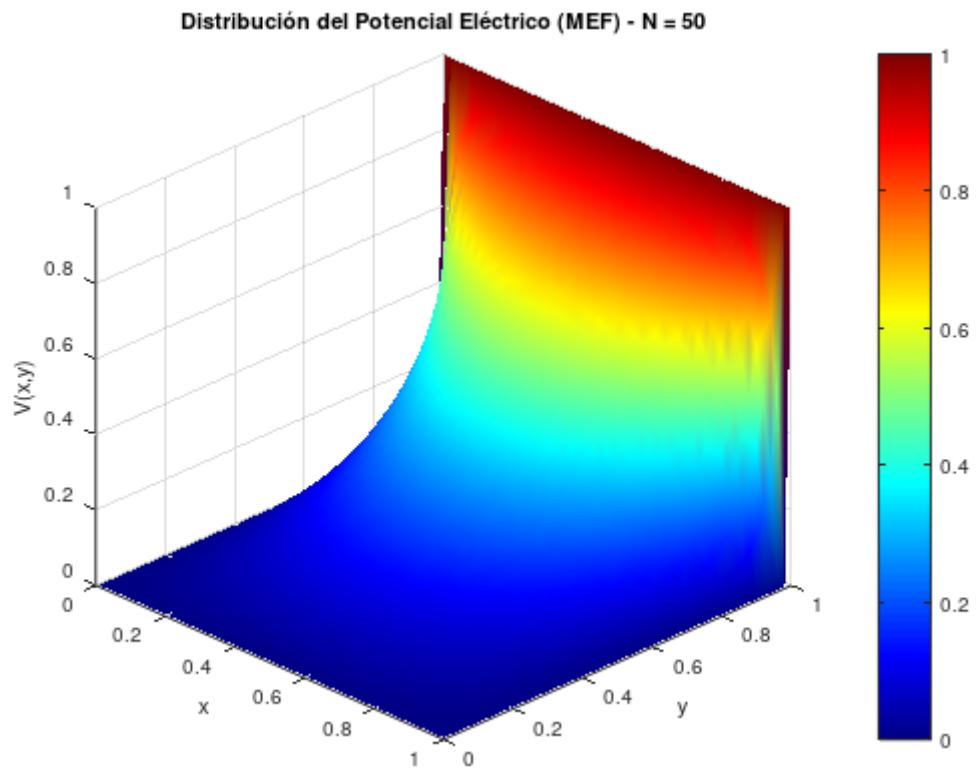
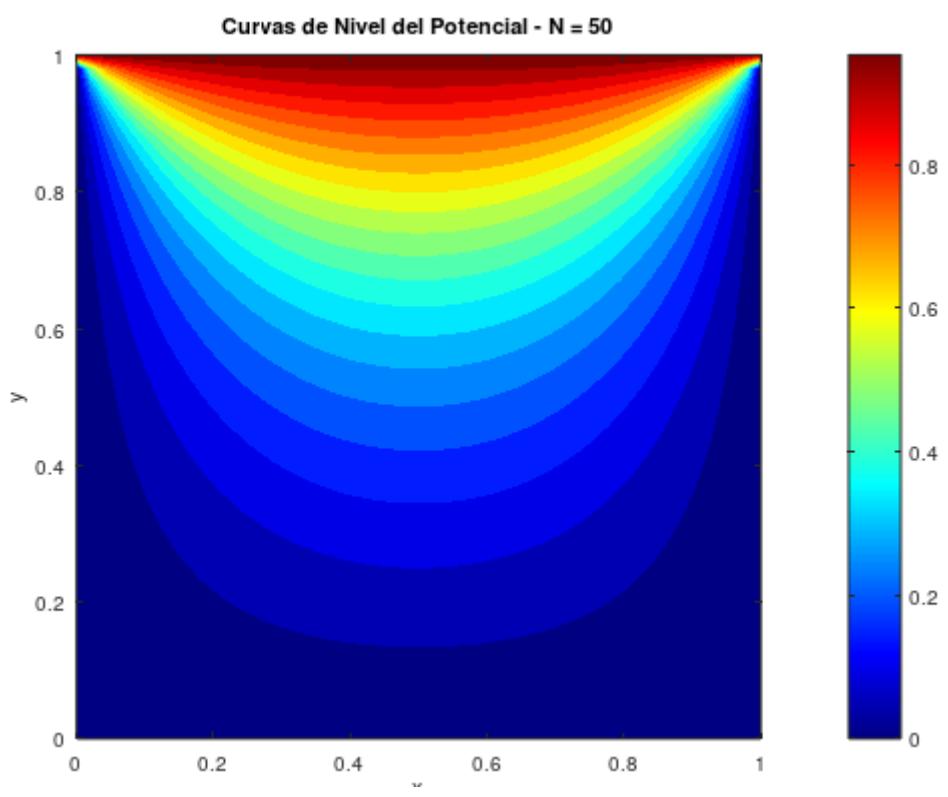
Ahora calculando la matriz global iterando sobre cada elemento calculando su matriz de rigidez local y sumamos las contribuciones de K_e a las posiciones correspondientes en K. y la matriz de rigidez global quedaría

$$K(i,j) = k(i,j) + K_{i,j}^e \text{ con } i,j=1,\dots,n.$$

**Prueba para varios tamaños de paso:
 $h=0.05$ ($N=20$)**



h=0.02 (N=50)

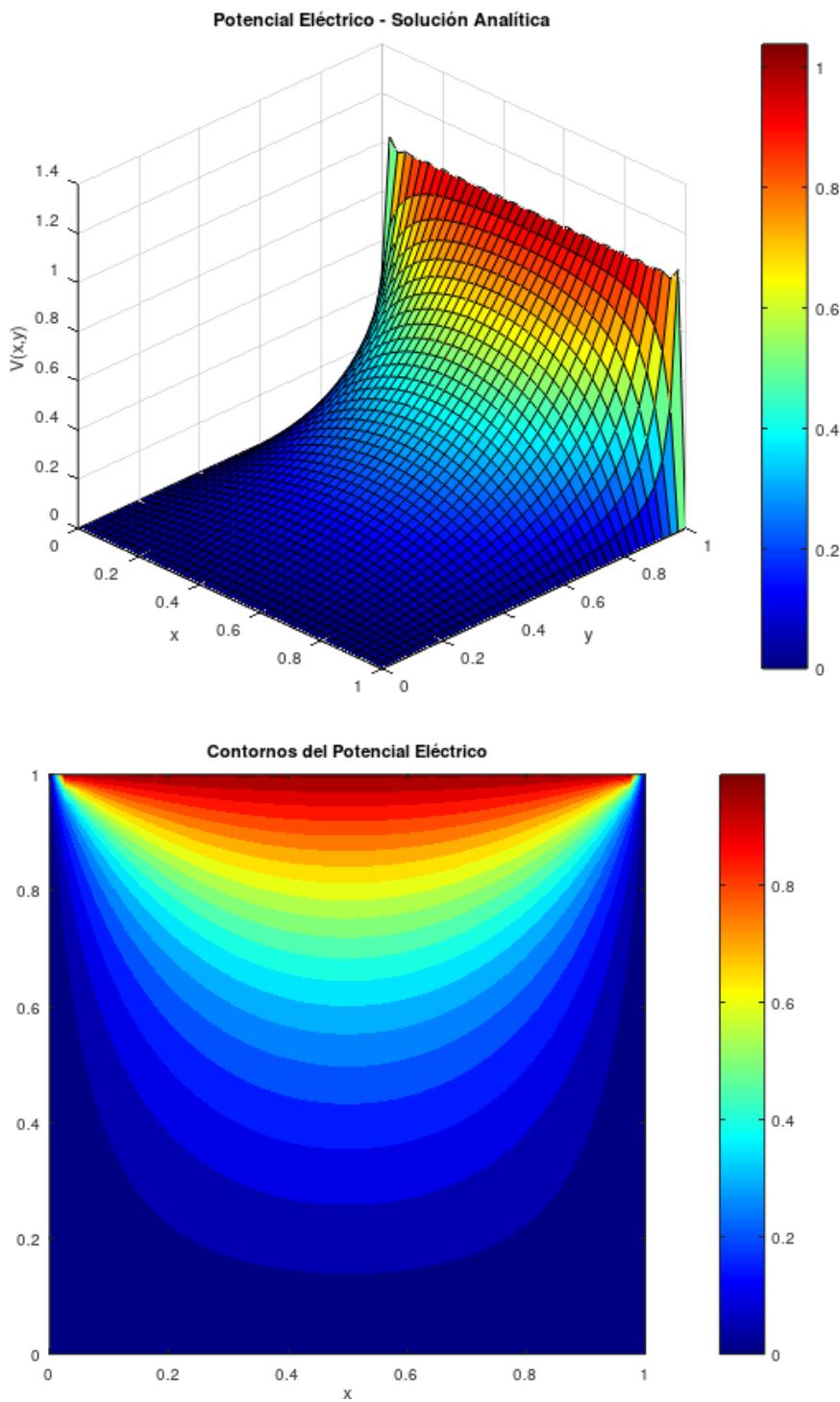


(d) Compare las soluciones numéricas obtenidas en el punto anterior con la solución analítica dada en (11).

Recordemos la solución analítica

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{w} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{w}}{(2k-1) \sinh \frac{(2k-1)\pi h}{w}}$$

A partir de esta obtenemos las siguientes gráficas



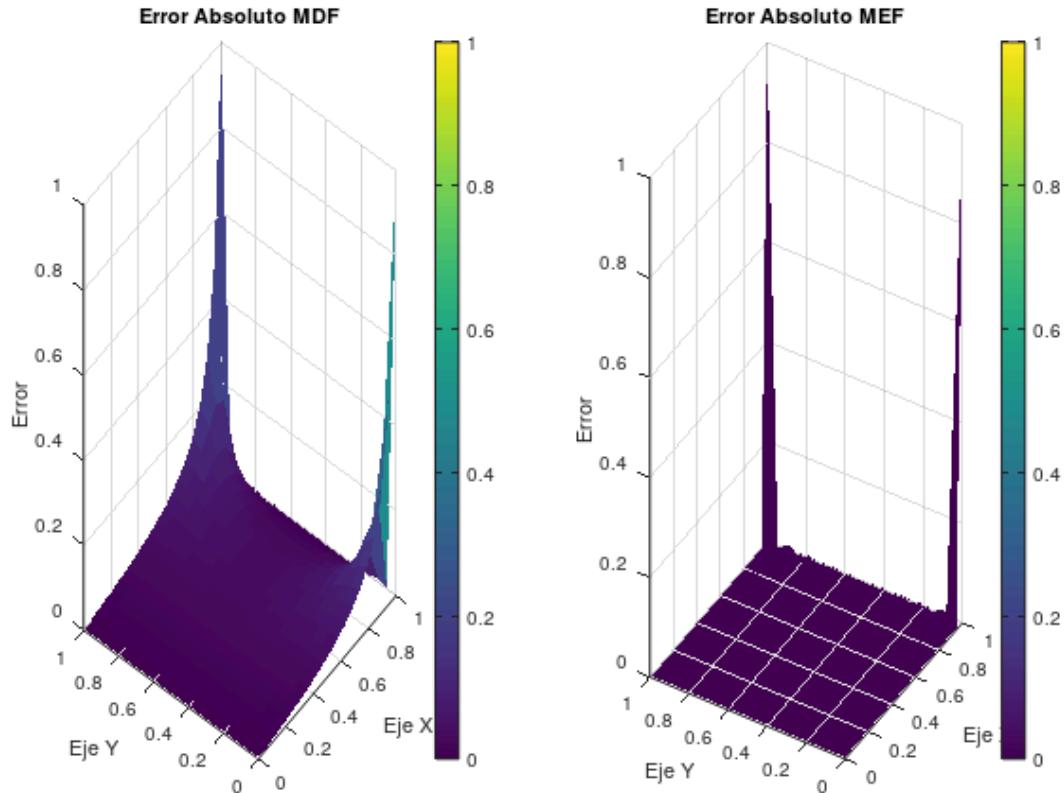
Comparación de Errores para N = 20

Método de Diferencias Finitas (MDF):

- Error Máximo Absoluto: 1.000000
- Error Medio (RMSE): 0.0448505286

Método de Elementos Finitos (MEF):

- Error Máximo Absoluto: 1.000000
- Error Medio (RMSE): 0.0056191667



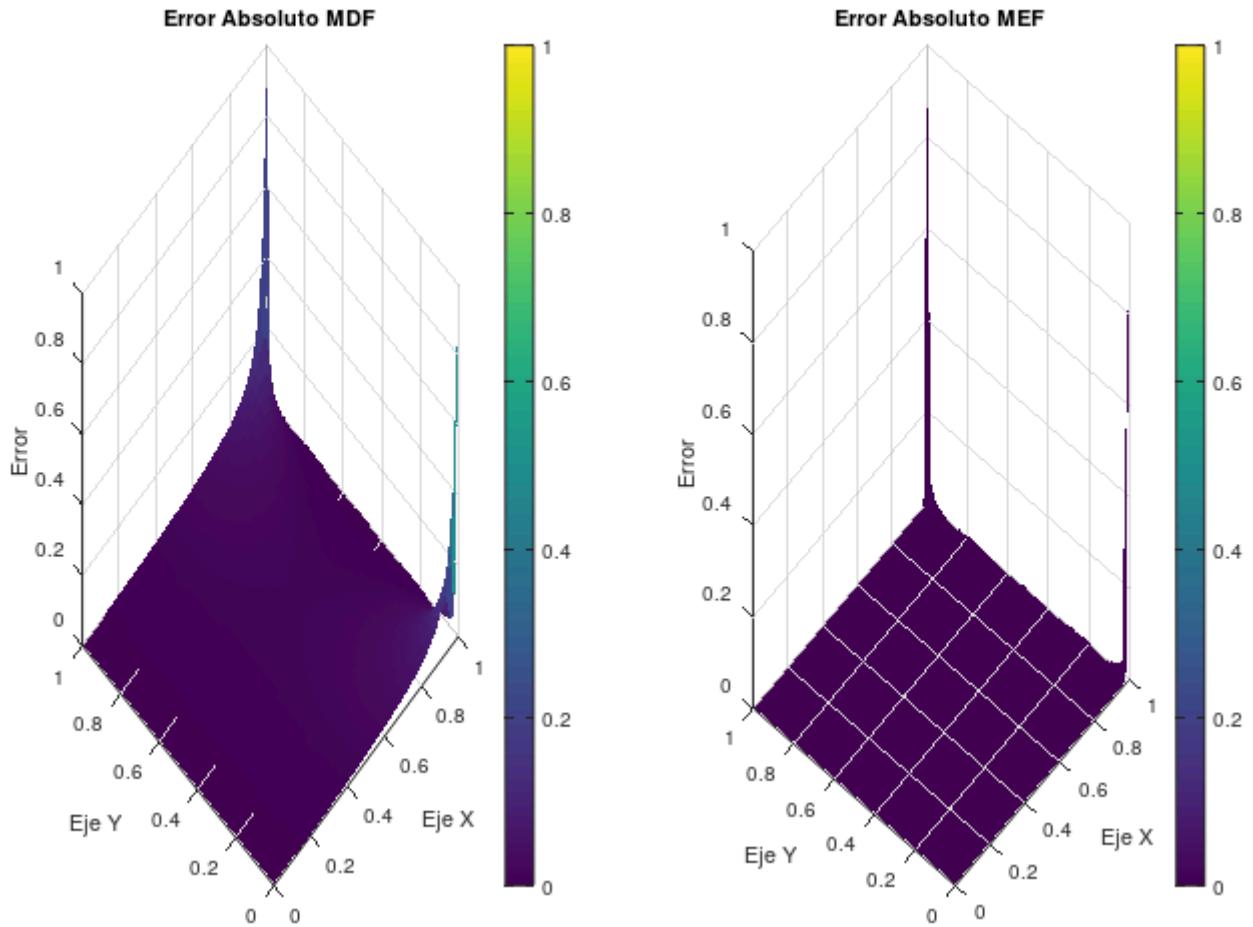
Comparación de Errores para N = 50

Método de Diferencias Finitas (MDF):

- Error Máximo Absoluto: 1.000000
- Error Medio (RMSE): 0.0177314777

Método de Elementos Finitos (MEF):

- Error Máximo Absoluto: 1.000000
- Error Medio (RMSE): 0.0010293616



Al aumentar la cantidad de nodos ambos métodos reducen su error significativamente, pero en ambos casos podemos observar la superioridad de elementos finitos, ya que el error promedio en ambos casos es menor en este.

Aun así, el error máximo sigue siendo 1 en ambos casos, lo que sugiere que existen puntos específicos con discrepancias notables respecto a la solución analítica.

Estos puntos son las esquinas superiores, donde la parte superior de la caja (con V_0) se encuentra con las paredes laterales (con $V = 0$), este cambio abrupto en el valor de potencial no es suave lo que produce que el error de aproximación sea más grande.

(e) Verifique que los errores satisfacen las estimaciones teóricas.

El ratio es una medida utilizada para comparar dos cantidades relativas.

El ratio se refiere a la relación entre el error obtenido en una malla (gruesa) y el error obtenido en una malla con más puntos (fina), lo que proporciona una idea de cómo mejora la precisión del método al aumentar la resolución de la malla.

$$ratio = \frac{\text{Error malla gruesa}}{\text{Error malla fina}}$$

Recordemos los errores promedios anteriormente

N	Diferencias Finitas	Elementos
20	0.0448505286	0.0056191667
50	0.0177314777	0.0010293616

El problema de Laplace con elementos lineales tiene un orden teórico $O(h^2)$.

Si el error se reduce aproximadamente por un factor de 4, esto indica que el error sigue una ley de $O(h^2)$

Ratio para Diferencia finitas

$$ratio_{MDF} = \frac{0.0448505286}{0.0177314777} = 2.5294$$

El ratio de reducción del error para diferencias finitas no alcanzan el valor de 4, pero está relativamente cerca. Las desviaciones pueden ser por redondo y por el error máximo en los bordes del lado superior. Esto sugiere que el error numérico se comporta aproximadamente como $O(h^2)$.

Ratio para Elementos finitos

$$ratio_{MDF} = \frac{0.0056191667}{0.0010293616} = 5.4589$$

El ratio de reducción del error es mayor que 4, lo que podría indicar que la aproximación mejora más rápidamente de lo esperado.

El ratio mayor de MEF nos indica que este es más eficiente en términos de convergencia.

Por lo que podemos concluir que ambos métodos satisfacen las estimaciones teóricas y que el método de elementos finitos es más eficiente.

(f) Resuelva el problema (9) numéricamente para la región de la figura (4), donde el objeto es un círculo de radio $r = 1/6$ en el centro del dominio.

Partiendo nuevamente de la ecuación de laplace para V en dos dimensiones.

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

Con las siguientes condiciones de bordes ya conocidas :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{(x,0)} = 0 \\ V_{(x,h)} = V_0 \\ V_{(0,y)} = 0 \\ V_{(w,y)} = 0 \end{array} \right.$$

Donde usaremos la ayuda sugerida en la consigna, considerando en la frontera del círculo la condición de Neumann, i.e. $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$. Donde η es la dirección normal a la curva del objeto circular.

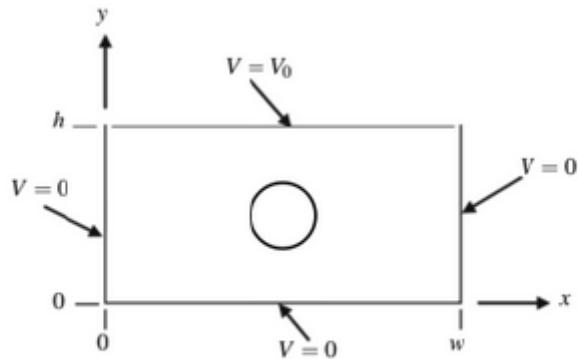


Figura (4): Caja rectangular con un objeto oscuro en el centro.

Dado que la geometría del dominio incluye un nuevo borde curvo en este caso(el círculo), el método de diferencias finitas(MDF) con una malla rectangular estándar no seria el mas adecuado, ya que aproximar la curva con “escalones” rectangulares tendremos errores significativos.

Por lo tanto, la estrategia óptima que se utilizará es el método de elementos finitos, ya que nos permite:

- Discretizar el comunito utilizando mallas de elementos triangulares(Más adecuado para el borde del círculo).
- Ajustar la malla para que los nodos coincidan con la frontera circular, permitiendo que se represente fielmente la geometría.
- Además de poder incorporar naturalmente la condición de Neumann ya que simplemente implica que hay términos de borde adicionales en la integral del contorno sobre el círculo.

A partir de acá, voy a partir de la formulación variacional como hicimos antes. Para luego incluir el nuevo borde curvo(el círculo).

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0$$

Luego debemos aplicar la integración por partes como hicimos antes también, pero considerando la condición de Neumann en la frontera del círculo, nos quedaría algo tal que:

$$a(V, u) = \int_{\Omega} \nabla u * \nabla V d\Omega - \oint_{\Gamma} u \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right) ds = 0$$

Dado que en $\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0$ en Γ (La frontera del círculo), el término de borde desaparece, quedando:

$$a(V, u) = \int_{\Omega} \nabla u * \nabla V d\Omega = 0$$

Procedemos a realizar la discretización del dominio Ω . A diferencia del caso anterior, tenemos la presencia del cuerpo circular en el centro, que introduce esa frontera interior curvilínea. Esto requiere la utilización de una malla no estructurada compuesta por elementos finitos triangulares como se propuso al principio.

La generación de la malla se realiza de manera en que los nodos se ubiquen estratégicamente sobre la frontera del círculo, permitiendo que la triangulación se adapte fielmente a ese contorno curvo, mientras se mantienen también las restricciones de bordes ya establecidas en las dimensiones del rectángulo.

Vamos a llevar a cabo el cálculo de las funciones de forma lineales N_i y sus respectivos gradientes ΔN_i . Aunque su formulación analítica es idéntica a la utilizada previamente, la implementación numérica debe considerar que, debido a la irregularidad de la malla, por lo que, el área de los elementos triangulares variará en la mayor parte del dominio.

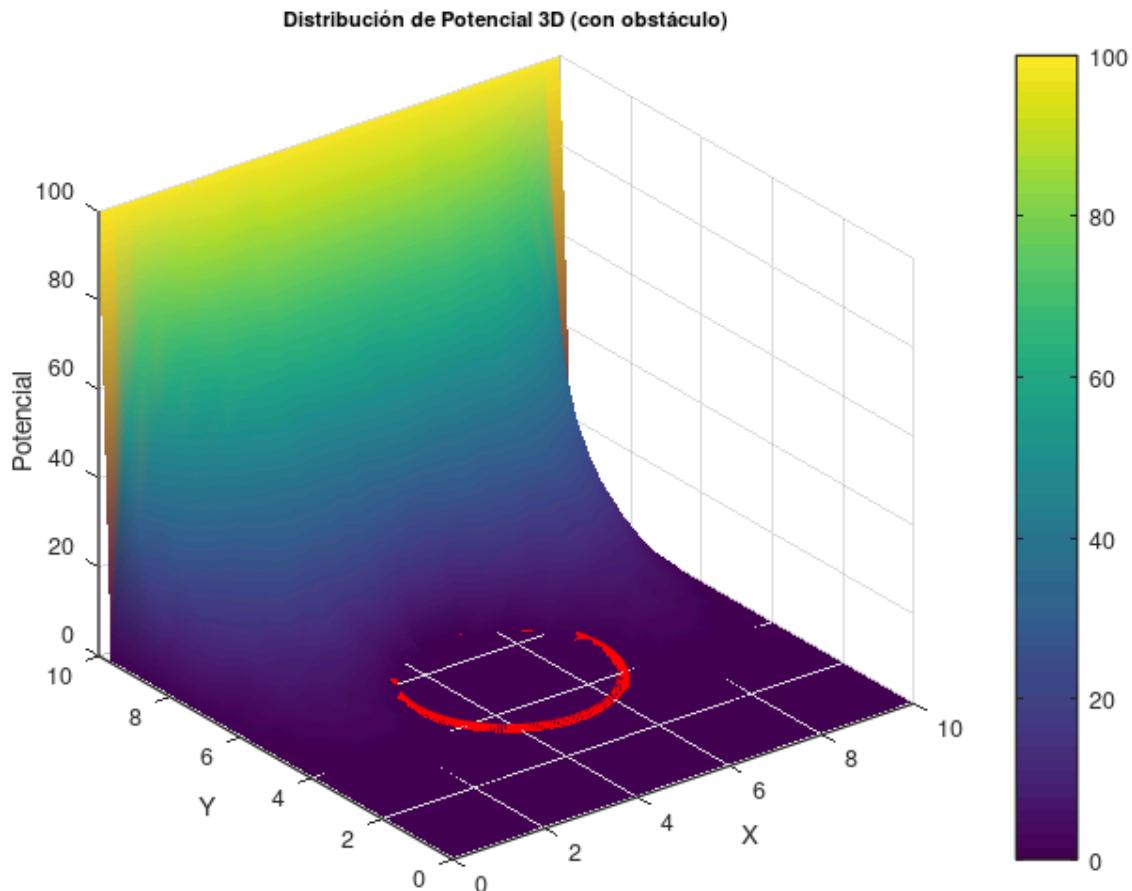
Para la construcción de la matriz de rigidez local K^e de un elemento triangular con vértices en (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , Se emplea la misma expresión derivada de la formulación variacional. Sin embargo, es fundamental destacar que el término de área A es específico y distinto para cada elemento e , debiendo ser calculado individualmente antes del ensamblaje global.

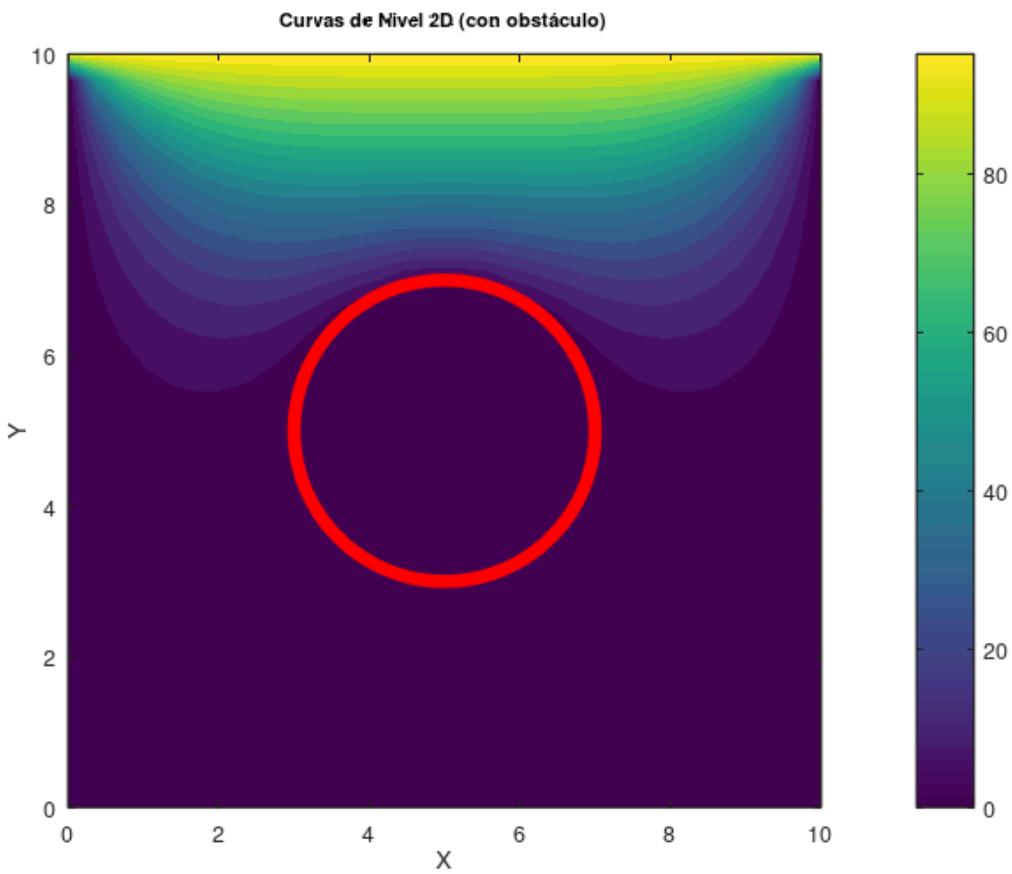
$$K_{i,j}^e = \frac{1}{4A} (b_i b_j + c_i c_j)$$

Una vez construida la matriz de rigidez local de cada elemento, necesitamos construir la matriz de rigidez global, simplemente al igual que la misma manera de antes, sumaremos las contribuciones de todas las matrices locales, dando como resultado :

$$K(I,J) = \sum k_{e_{ij}}$$

Interpretando este problema con su respectivo código subido a github, las gráficas correspondientes quedarían formadas de la siguiente manera :





Conclusión

En problemas unidimensionales, ambos métodos producen resultados muy parecidos, por lo que se podría usar cualquiera de los dos, siendo más fácil la implementación del método de diferencias finitas.

En problemas bidimensionales, el método de elementos finitos ha demostrado una mayor precisión, mayor tasa de convergencia y flexibilidad en la resolución de dominios con geometrías irregulares. Por lo que es importante la geometría el problema a la hora de elegir qué método usar.

El Método de Diferencias Finitas es un método efectivo para la discretizar dominios regulares, proporcionando soluciones precisas con un esfuerzo computacional relativamente bajo.

Sin embargo, su aplicación se ve limitada en dominios complejos o con geometrías irregulares, donde la flexibilidad del método de elementos finitos resulta más adecuada.

En dominios más complejos su precisión se ve afectada.

El Método de Elementos Finitos es un método efectivo para manejar dominios complejos y condiciones de contorno variadas, ofreciendo una mayor precisión en la aproximación de soluciones. La formulación variacional y las funciones de forma permiten una representación más adaptable del problema, pero tiene más esfuerzo computacional y la implementación es más compleja que el otro método.

Repositorio con el código fuente

<https://github.com/EmmaDavezac/PROYECTO-FINAL-2024-ANALISIS-NUMERICO-FRCU.git>