Ficha 06

Grafos – Implementación Encadenada

1.) Introducción.

Un grafo con *n* nodos podría tener un máximo de n^2 arcos (si no se admiten arcos paralelos, es decir, varios arcos que conecten el mismo par de nodos). En general decimos que un grafo es *denso* si su número de arcos *m* es $O(n^2)$. Y decimos que el grafo es *disperso* (o *poco denso*) si su número de arcos *m* es $O(n)$.

Hemos visto la forma de implementar un grafo en forma matricial y hemos puesto de relieve que esa forma de implementación resulta en general sencilla de implementar e intuir, pero es poco adaptable a necesidades eventuales de expandir el grafo si se requiere agregar vértices y arcos no previstos, además de ocupar memoria en forma ineficiente para la representación de los arcos si el grafo es poco denso, ya que la implementación matricial emplea una matriz con tantos casilleros como arcos podría tener el grafo en el peor caso y por lo tanto el espacio de memoria usado es $O(n^2)$. Esto podría ser conveniente si el grafo es denso, pero es claramente una desventaja si el grafo es disperso o muy disperso, ya que la matriz de adyacencias del grafo ocupa demasiado espacio en representar arcos que no existen. Por este motivo, en muchas aplicaciones se busca implementar grafos mediante alguna técnica que favorezca el uso eficiente de la memoria y en ese sentido hay varias maneras posibles de hacerlo usando *listas* en lugar de una matriz.

Cuando el grafo es poco denso o se requiere mayor flexibilidad para agregar vértices y/o arcos, incluyendo la posibilidad de gestionar eventuales arcos paralelos (que serían difíciles de representar en la implementación matricial), entonces se recomienda usar una implementación basada en listas ligadas, que puede asumir distintas formas y estrategias, y que se conoce en general como *implementación de grafos por listas de adyacencia*, o bien, *implementación de grafos por listas multiencadenadas*, o también (más simple…) *implementación encadenada de grafos*.

Es obvio que la forma de implementación del grafo puede afectar al rendimiento de un algoritmo dado: por caso, si en la implementación matricial se requiriese procesar todos los arcos de un grafo de *n* vértices, ese proceso tendría como mínimo un tiempo de $O(n^2)$ (ya que la matriz de adyacencia representa todos los posibles arcos, existan o no en el grafo). Sin embargo, en la implementación encadenada se suele tener una lista separada conteniendo sólo a los arcos que existen en el grafo, y por lo tanto, si el grafo es poco denso y el número de arcos *m* es $O(n)$, entonces el mismo proceso tendría un tiempo de $O(n)$ para visitar todos los arcos.

2.) Implementación de grafos por listas de adyacencia.

Como dijimos, se pueden pensar muchas estrategias basadas en listas ligadas para implementar un grafo. Desde aquí sugerimos un planteo que permita con cierta comodidad acceder tanto a los vértices como a los arcos del grafo, mediante recorridos de tiempo lineal. Los elementos a usar son[1]:

[1] La fuente esencial en la que está basada la implementación de grafos que sigue en esta sección, es el material del curso "*Design and Analysis of Algorithms II*" – Stanford University (a cargo de *Tim Roughgarden*, Associate Professor): https://www.coursera.org/courses.

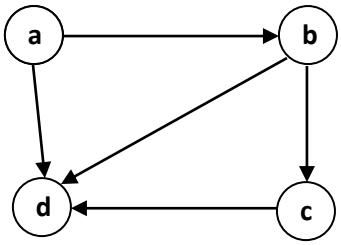
a. Una lista que contenga a todos los vértices (por ejemplo, una *LinkedList* o una *ArrayList*).

b. Una segunda lista que contenga a todos los arcos.

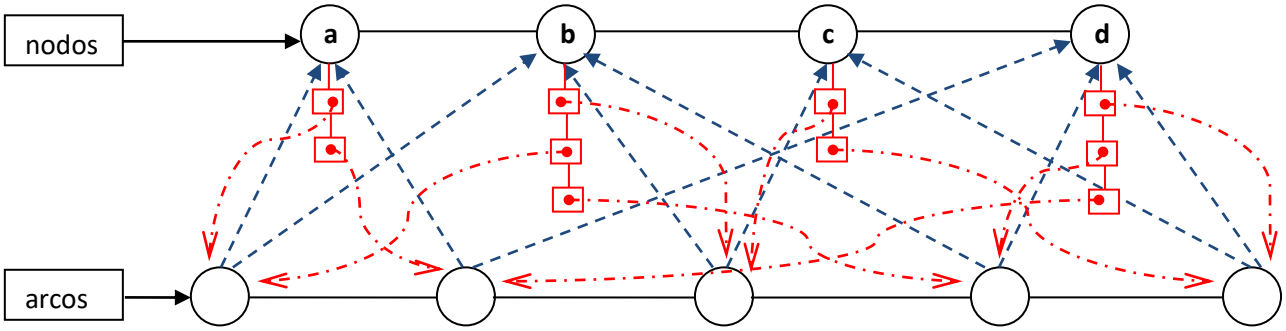
c. Sea *Arc* la clase que representa a los arcos del grafo. Cada objeto de la clase *Arc* contendrá referencias o punteros a los dos vértices unidos por ese arco, además del peso del arco, que por razones de sencillez, se supone único y entero.

d. Sea *Node* la clase que representa a los vértices del grafo. Cada objeto de la clase *Node*, contendrá a su vez una lista con referencias o punteros a cada uno de los arcos que tienen a ese nodo como inicial o final (es decir: la lista de arcos de un vértice debe apuntar a todo arco que entre o salga de ese nodo si el grafo es dirigido, o a todo arco que sea incidente al vértice si el grafo es no dirigido).

A modo de ejemplo, mostramos el siguiente grafo dirigido sencillo:



Con los elementos sugeridos más arriba, el grafo de la figura anterior podría implementarse como muestra esta otra figura:



Si bien la gráfica mostrada es un tanto intimidante, en la práctica simplemente requiere definir correctamente las clases *Node* y *Arc*, y usar estructuras de listas como las ya provistas por Java en el paquete *java.util* (como las citadas *LinkedList* y *ArrayList*).

Es simple ver que con esta implementación, el *espacio de memoria* a emplear para representar un grafo con *n* vértices y *m* arcos, será $O(n + m)$ que si el grafo es poco denso resulta preferible comparado con el $O(n^2)$ que insume la implementación matricial.

Uno de los problemas a resolver, es que el grafo podría ser dirigido o no dirigido y eso impacta visiblemente en la forma en que luego se comparan dos arcos para saber si son iguales o no. Si el grafo es dirigido, los arcos *X* e *Y* serán iguales sólo si sus pesos son iguales y además se cumple que:

```
X.inicio == Y.inicio && X.fin == Y.fin
```

donde se asume que *inicio* y *fin* son los vértices de partida y de llegada del arco, respectivamente. Pero si el grafo es no dirigido, entonces los arcos *X* e *Y* serán iguales en la misma situación anterior, o bien si los nodos inicial y final de cada arco coinciden en forma cruzada. En otras palabras, para hacer el test de igualdad entre dos arcos en un grafo no dirigido, debe controlarse que coincidan los pesos y además sea cierta la siguiente condición general:

```
(X.inicio == Y.inicio && X.fin == Y.fin) || (X.inicio == Y.fin && X.fin == Y.inicio)
```

El manejo de esta doble lógica para el test de igualdad en el modelo *Grafos [implementación encadenada]* que acompaña a la ficha, se resolvió mediante una jerarquía de clases para representar a los arcos, aplicando una variante liviana del *patrón Strategy*: la clase *Arc* se define *abstracta*, y contiene las referencias a los vértices inicial y final del arco, además del peso:

```
public abstract class Arc <T> implements Comparable< Arc<T> >
{
    protected Node<T> init;
    protected Node<T> end;
    protected int weight;

    public Arc(Node <T> in, Node <T> en)
    {
        this(in, en, 0);
    }

    public Arc(Node in, Node en, int w)
    {
        if(in == null) { throw new NullPointerException( "Error:..." ); }
        if(en == null) { throw new NullPointerException( "Error:..." ); }
        init = in;
        end = en;
        weight = w;
    }

    public int compareTo(Arc<T> o)
    {
        return this.weight - o.weight;
    }

    public Node <T> getInit()
    {
        return init;
    }

    public Node <T> getEnd()
    {
        return end;
    }

    public int getWeight()
    {
        return weight;
```

```
    }

    public void setInit(Node <T> in)
    {
        if( in != null ) { init = in; }
    }

    public void setEnd(Node <T> en)
    {
        if( en != null ) { end = en; }
    }

    public void setWeight(int w)
    {
        weight = w;
    }

    public boolean isSelfLoop()
    {
        return (init.equals(end));
    }

    public int hashCode()
    {
        int hash = 7;
        hash = 53 * hash + Objects.hashCode(this.init);
        hash = 53 * hash + Objects.hashCode(this.end);
        hash = 53 * hash + this.weight;
        return hash;
    }

    public String toString()
    {
        return "("+init.getValue()+", "+end.getValue()+"[" + weight + "])";
    }
}
```

La clase *Arc* no provee ningún método abstracto, pero la idea es que las derivadas se encarguen de redefinir convenientemente el método *equals()* que se hereda desde *Object* (y del cual la clase *Arc* no realiza ninguna implementación). Las derivadas propuestas para *Arc* son dos: *UndirectedArc* y *DirectedArc*, cada una para modelar arcos no dirigidos y arcos dirigidos respectivamente. Ambas subclases son simples ya que ninguna agrega nuevos atributos, y sólo el método *equals()* requiere algo de trabajo:

```
public class UndirectedArc<T> extends Arc<T>
{
    public UndirectedArc(Node<T> in, Node<T> en)
    {
        super(in, en);
    }

    public UndirectedArc(Node in, Node en, int w)
    {
        super(in, en, w);
    }

    public boolean equals(Object x)
    {
```

```
        if(x == null) { return false; }
        if( ! (x instanceof Arc) ) { return false; }

        Arc <T> p = null;
        try
        {
            p = (Arc <T>) x;
        }
        catch(ClassCastException e)
        {
            return false;
        }

        if(this.weight != p.weight) { return false; }
        boolean p1 = p.init.equals(this.init) && p.end.equals(this.end);
        boolean p2 = p.init.equals(this.end) && p.end.equals(this.init);
        return p1 || p2;
    }
}

public class DirectedArc<T> extends Arc<T>
{
    public DirectedArc(Node<T> in, Node<T> en)
    {
        super(in, en);
    }

    public DirectedArc(Node in, Node en, int w)
    {
        super(in, en, w);
    }

    public boolean equals(Object x)
    {
        if(x == null) { return false; }
        if( ! (x instanceof Arc) ) { return false; }

        Arc <T> p = null;
        try
        {
            p = (Arc <T>) x;
        }
        catch(ClassCastException e)
        {
            return false;
        }

        if(this.weight != p.weight) { return false; }
        return (p.init.equals(this.init) && p.end.equals(this.end));
    }
}
```

Note que todas estas clases usan generics para hacer control de homogeneidad (la clase parametrizada *T* indica la clase de los objetos que se podrán almacenar en cada vértice, y al no imponer en ella ninguna restricción de herencia o implementación, entonces cualquier objeto de cualquier clase podrá almacenarse en un vértice del grafo).

Además, observe que la clase *Arc* implementa la interface *Comparable* de forma de hacer que el método *compareTo()* compare los pesos de los arcos. Esto será particularmente útil en algoritmos que requieran (por ejemplo) buscar el arco de menor peso (*algoritmo de Prim*, usando un heap, para el árbol de expansión mínimo) u ordenar por pesos el conjunto de arcos (*algoritmo de Kruskal* también para el árbol de expansión mínimo). Sin embargo, el método *compareTo()* así planteado no es consistente con el método *equals()*: el primero sólo controla los pesos e indicará que dos arcos son iguales si sus pesos coinciden, pero *equals()* no sólo controla los pesos sino también los vértices de partida y llegada. Por lo tanto, tenga cuidado: si requiere hacer control de igualdad estricta para (por ejemplo) validar que un arco ya exista en el grafo y evitar agregar uno igual, entonces debe usar *equals()* para ese test de igualdad. Sólo use la versión que hemos provisto aquí de *compareTo()* cuando necesite establecer una relación de orden (por menor o por mayor) entre dos arcos.

Los vértices del grafo se representan como objetos de la clase *Node*, que contiene un atributo *value* para almacenar el objeto propio de ese vértice, y una lista conteniendo referencias a los arcos incidentes a cada nodo (tanto los que entran como los que salen de ese nodo):

```
public class Node <T>
{
    private T value;
    private LinkedList < Arc <T> > arcs;

    public Node(T x)
    {
        this(x, null);
    }

    public Node(T x, LinkedList <Arc <T> > a)
    {
        if(x == null) { throw new NullPointerException("Error:…"); }

        value = x;
        if(a == null) { a = new LinkedList <> (); }
        arcs = a;
    }

    public T getValue()
    {
        return value;
    }

    public LinkedList < Arc <T> > getArcs()
    {
        return arcs;
    }

    public void setValue(T x)
    {
        if(x != null) { value = x; }
    }

    public void setArcs(LinkedList < Arc <T> > a)
    {
        if(a != null) { arcs = a; }
    }

    public boolean equals(Object x)
```

```
    {
        if(x == null) { return false; }
        if(! (x instanceof Node)) { return false; }
        return ((Node<T>) x).value.equals(this.value);
    }

    public int hashCode()
    {
        return value.hashCode();
    }

    public String toString()
    {
        return value.toString();
    }
}
```

En cuanto al propio grafo, aquí también hemos recurrido a una jerarquía de clases con una variante liviana del *patrón State* para modelar con más precisión la diferencia entre grafos dirigidos y no dirigidos: ambos casos pueden tomarse como distintos estados definitivos en los que puede estar un grafo, y la diferencia sutil entre ambos estados es la clase de arcos deben crearse para armar cada grafo: los grafos dirigidos deberán crear arcos de la clase *DirectedArc* mientras que los grafos no dirigidos deberán crear arcos del tipo *UndirectedArc*. En ese sentido, la clase *Graph* es abstracta pero brinda casi todo el comportamiento que sus derivadas necesitarán, incluyendo numerosos métodos sobrecargados para agregar vértices y arcos al grafo:

```
public abstract class Graph <T> implements Cloneable
{
    protected LinkedList < Node <T> > vertices;
    protected LinkedList < Arc <T> > edges;

    // un flag para recordar si el grafo acepta o no arcos paralelos...
    protected boolean allow_parallel_arcs;

    public Graph()
    {
        this(null, null, false);
    }

    public Graph(boolean p)
    {
        this(null, null, p);
    }

    public Graph(LinkedList< Node <T> > v, LinkedList< Arc <T> > a)
    {
        this(v, a, false);
    }

    public Graph(LinkedList<Node <T>> v, LinkedList<Arc <T>> a, boolean p)
    {
        if(v == null) { v = new LinkedList<> (); }
        this.vertices = v;

        if(a == null) { a = new LinkedList<> (); }
        this.edges = a;

        this.allow_parallel_arcs = p;
```

```
}

public boolean add(T n)
{
    if(n == null) { return false; }

    Node<T> nt = new Node<>(n);
    return this.add(nt);
}

public boolean add(Node<T> v)
{
    if(v == null) { return false; }

    if(vertices.contains(v)) { return false; }
    return vertices.add(v);
}

public boolean add(Arc <T> a)
{
    // si el arco es null, salir con false...
    if(a == null) { return false; }

    // si el nodo inicial es null, salir con false...
    Node <T> in = a.getInit();
    if(in == null) { return false; }

    int idxin = vertices.indexOf(in);
    if(idxin == -1) { return false; }

    // si el nodo final es null, salir con false...
    Node <T> en = a.getEnd();
    if(en == null) { return false; }

    int idxen = vertices.indexOf(en);
    if(idxen == -1) { return false; }

    // acceder a las listas de arcos de los vértices inicial y final...
    Node <T> ni = vertices.get(idxin);
    LinkedList < Arc <T> > lni = ni.getArcs();

    Node <T> ne = vertices.get(idxen);
    LinkedList < Arc <T> > lne = ne.getArcs();

    if(this.allow_parallel_arcs || ! this.edges.contains(a))
    {
        lni.add(a);
        lne.add(a);
        this.edges.add(a);
        return true;
    }

    return false;
}

public boolean addArc(T n1, T n2)
{
    if(n1 == null || n2 == null) { return false; }
    return addArc(new Node<>(n1), new Node<>(n2), 0, false);
```

```
}

public boolean addArc( Node <T> in, Node <T> en )
{
    return addArc( in, en, 0, false );
}

public boolean addArc(T n1, T n2, int w)
{
    if(n1 == null || n2 == null) { return false; }
    return addArc(new Node<>(n1), new Node<>(n2), w, false);
}

public boolean addArc( Node <T> in, Node <T> en, int w )
{
    return this.addArc( in, en, w, false );
}

public boolean addArc( T n1, T n2, boolean create )
{
    if(n1 == null || n2 == null) { return false; }
    return addArc(new Node<>(n1), new Node<>(n2), 0, create);
}

public boolean addArc( Node <T> in, Node <T> en, boolean create )
{
    return this.addArc(in, en, 0, create);
}

public boolean addArc(T n1, T n2, int w, boolean create)
{
    if(n1 == null || n2 == null) { return false; }
    return addArc(new Node<>(n1), new Node<>(n2), w, create);
}

public boolean addArc(Node <T> in, Node <T> en, int w, boolean create)
{
    // si alguno de los vértices de entrada es null, salir con false...
    if( in == null || en == null ) { return false; }

    int idxin = vertices.indexOf(in);
    if( idxin == -1 && create == false) { return false; }

    int idxen = vertices.indexOf(en);
    if( idxen == -1 && create == false ) { return false; }

    if(idxin == -1) {this.add(in);}
    else {in = this.vertices.get(idxin);}

    if(idxen == -1) {this.add(en);}
    else {en = this.vertices.get(idxen);}

    Arc <T> arc = createArc(in, en, w);
    return this.add(arc);
}

public boolean allow_Parallel_Arcs()
{
    return this.allow_parallel_arcs;
```

```
}

public Object clone() throws CloneNotSupportedException
{
    Graph copy = (Graph) super.clone();

    copy.vertices = new LinkedList <> ();
    for(Node v : this.vertices)
    {
        copy.vertices.add(new Node(v.getValue()));
    }

    copy.edges = new LinkedList<> ();
    for(Arc a : this.edges)
    {
        Node <T> in = new Node(a.getInit().getValue());
        Node <T> en = new Node(a.getEnd().getValue());
        int w = a.getWeight();
        copy.addArc(in, en, w, false);
    }

    return copy;
}

public int countEdges()
{
    return edges.size();
}

public int countNodes()
{
    return vertices.size();
}

public abstract Arc <T> createArc(Node <T> in, Node <T> en, int w);

public Arc <T> getRandomArc()
{
    int m = this.countEdges();
    if(m == 0) { return null; }
    int ri = (int)(Math.random() * m);
    return edges.get(ri);
}

public int grade(int k)
{
    if( k < 0 || k >= vertices.size() ) { return -1; }
    return vertices.get(k).getArcs().size();
}

public String toString()
{
    StringBuilder res = new StringBuilder("[");
    for(int i = 0; i < vertices.size(); i++)
    {
        Node n = vertices.get(i);
        res.append("\n\t").append(n.getValue()).append(":\t[ ");
        LinkedList < Arc <T> > a = n.getArcs();
        for(int j = 0; j < a.size(); j++)
```

```
            {
                Arc <T> e = a.get(j);
                T vi = e.getInit().getValue();
                T ve = e.getEnd().getValue();
                int w = e.getWeight();
                if(!ve.equals(n.getValue())) { res.append(ve); }
                else { res.append(vi); }
                res.append("[").append(w).append("] ");
            }
            res.append("]");
        }
        res.append("\n]");
        return res.toString();
    }
}
```

La clase contiene un atributo para la lista de vértices y otro para la lista de arcos, como se indicó más arriba. Además, la clase provee un atributo booleano *allow_parallel_arcs* que será usado como un indicador para marcar si el grafo aceptará o no arcos paralelos.

El único método abstracto que provee la clase *Graph* es ***createArc()***, que se deja para las clases derivadas y su única función es crear un arco del tipo que sea correcto para el grafo. Existen otros métodos que oportunamente serán útiles, tales como *clone()* [que crea y retorna una copia clonada del grafo], *getRandomArc()* [que selecciona y retorna aleatoriamente un arco del grafo, sin removerlo], *grade()* [que calcula y retorna el grado de un vértice, o sea, la cantidad de arcos que inciden en ese vértice] y *countEdges()* y *countNodes()* [que respectivamente retornan la cantidad de arcos y la cantidad de vértices del grafo]. El método *toString()* retorna una cadena con una representación adecuada del contenido del grafo.

Esencialmente, todos los métodos que agregan un arco al grafo terminan invocando a la siguiente sobrecarga del método *addArc()*:

```
    public boolean addArc(Node <T> in, Node <T> en, int w, boolean create)
    {
        if( in == null || en == null ) { return false; }

        int idxin = vertices.indexOf(in);
        if( idxin == -1 && create == false) { return false; }

        int idxen = vertices.indexOf(en);
        if( idxen == -1 && create == false ) { return false; }

        if(idxin == -1) {this.add(in);}
        else {in = this.vertices.get(idxin);}

        if(idxen == -1) {this.add(en);}
        else {en = this.vertices.get(idxen);}

        Arc <T> arc = createArc(in, en, w);
        return this.add(arc);
    }
```

Este método toma como parámetro los dos vértices a unir por el arco, el peso del arco y un flag para indicar si los vértices deben crearse en caso de no existir previamente. Al comenzar, realiza controles para verificar que los vértices de entrada no sean *null* o no estén ya ingresados al grafo. Si todo va bien,

la anteúltima línea del método invoca al método *createArc()* para que se cree el arco del tipo que corresponda, y ese arco será finalmente agregado al grafo por el método *add(Arc)* que también está en la clase:

```
public boolean add(Arc <T> a)
{
    if(a == null) { return false; }
    Node <T> in = a.getInit();
    if(in == null) { return false; }

    int idxin = vertices.indexOf(in);
    if(idxin == -1) { return false; }

    Node <T> en = a.getEnd();
    if(en == null) { return false; }

    int idxen = vertices.indexOf(en);
    if(idxen == -1) { return false; }

    Node <T> ni = vertices.get(idxin);
    LinkedList < Arc <T> > lni = ni.getArcs();

    Node <T> ne = vertices.get(idxen);
    LinkedList < Arc <T> > lne = ne.getArcs();

    if(this.allow_parallel_arcs || ! this.edges.contains(a))
    {
        lni.add(a);
        lne.add(a);
        this.edges.add(a);
        return true;
    }

    return false;
}
```

Este método toma el arco que se propone para agregar al grafo, y lo agrega si se cumplen ciertas condiciones: si el grafo permite arcos paralelos, lo agregará incluso si ya había un arco igual en el grafo, pero si el grafo no admite arcos paralelos, lo agregará sólo si ese arco no existía ya en la lista de arcos del grafo.

Las clases derivadas de *Graph* son dos: *DirectedGraph* y *UndirectedGraph*. Ambas son clases concretas y su implementación resulta directa:

```
public class DirectedGraph<T> extends Graph<T>
{
    public DirectedGraph()
    {
    }

    public DirectedGraph(boolean p)
    {
        super(p);
    }

    public DirectedGraph(LinkedList< Node<T> > v, LinkedList< Arc<T> > a)
    {
```

```
        super(v, a);
    }

    public DirectedGraph(LinkedList<Node<T>> v, LinkedList<Arc<T>> a, boolean p)
    {
        super(v, a, p);
    }

    public Arc<T> createArc(Node <T> in, Node <T> en, int w)
    {
        return new DirectedArc(in, en, w);
    }

    public String toString()
    {
        StringBuilder res = new StringBuilder("[");
        for(int i = 0; i < vertices.size(); i++)
        {
            Node n = vertices.get(i);
            res.append("\n\t").append(n.getValue()).append(":\t[ ");
            LinkedList < Arc <T> > a = n.getArcs();
            for(int j = 0; j < a.size(); j++)
            {
                Arc <T> e = a.get(j);
                T vi = e.getInit().getValue();
                T ve = e.getEnd().getValue();
                int w = e.getWeight();
                if(vi.equals(n.getValue()))
                {
                    res.append(ve);
                    res.append("[").append(w).append("] ");
                    //res.append(" ");
                }
            }
            res.append("]");
        }
        res.append("\n]");
        return res.toString();
    }
}

public class UndirectedGraph<T> extends Graph<T>
{
    public UndirectedGraph()
    {
    }

    public UndirectedGraph(boolean p)
    {
        super(p);
    }


    public UndirectedGraph(LinkedList< Node<T> > v, LinkedList< Arc<T> > a)
    {
        super(v, a);
    }

    public UndirectedGraph(LinkedList<Node<T>> v, LinkedList<Arc<T>> a, boolean p)
    {
        super(v, a, p);
    }

    public Arc<T> createArc(Node <T> in, Node <T> en, int w)
    {
        return new UndirectedArc(in, en, w);
```

```
    }
}
```

En ninguna de ambas clases se agrega atributo alguno, y ambas implementan el método *createArc()* de forma de retornar un arco dirigido o un arco no dirigido según sea la clase que representa al grafo. Sólo la clase *DirectedGraph* realiza algo más, como es redefinir el método *toString()* para armar la cadena de salida en forma más acorde al hecho de que los arcos del grafo son dirigidos.

Finalmente, la clase *Principal* incluida en el modelo muestra un método *main()* para testear en forma simple las clases aquí presentadas:

```
public class Principal
{
    public static void main(String args[])
    {
        UndirectedGraph <String> ug1 = new UndirectedGraph<>();
        ug1.add("a");
        ug1.add("b");
        ug1.add("c");
        ug1.add("d");
        ug1.addArc("a", "b", 2);
        ug1.addArc("a", "b", 2);  // paralelo: no debe permitirlo...
        ug1.addArc("b", "c", 3);
        ug1.addArc("b", "d", 1);
        ug1.addArc("d", "c", 4);
        System.out.println("Grafo 1 (no dirigido - sin arcos paralelos: ");
        System.out.println(ug1);
        System.out.println();

        UndirectedGraph <String> ug2 = new UndirectedGraph<>(true);
        ug2.add("a");
        ug2.add("b");
        ug2.add("c");
        ug2.add("d");
        ug2.addArc("a", "b", 2);
        ug2.addArc("a", "b", 2);  // paralelo: debe permitirlo...
        ug2.addArc("b", "c", 3);
        ug2.addArc("b", "d", 1);
        ug2.addArc("d", "c", 4);
        System.out.println("Grafo 2 (no dirigido - con arcos paralelos: ");
        System.out.println(ug2);
        System.out.println();

        DirectedGraph <String> dg1 = new DirectedGraph<>();
        dg1.add("a");
        dg1.add("b");
        dg1.add("c");
        dg1.add("d");
        dg1.addArc("a", "b", 2);
        dg1.addArc("a", "b", 2);  // paralelo: no debe permitirlo...
        dg1.addArc("c", "b", 3);
        dg1.addArc("b", "d", 1);
        dg1.addArc("d", "c", 4);
        System.out.println("Grafo 3 (dirigido - sin arcos paralelos: ");
        System.out.println(dg1);
        System.out.println();

        DirectedGraph <String> dg2 = new DirectedGraph<>(true);
        dg2.add("a");
        dg2.add("b");
        dg2.add("c");
        dg2.add("d");
        dg2.addArc("a", "b", 2);
        dg2.addArc("a", "b", 2);  // paralelo: debe permitirlo...
```

```
        dg2.addArc("c", "b", 3);
        dg2.addArc("b", "d", 1);
        dg2.addArc("d", "c", 4);
        System.out.println("Grafo 4 (dirigido - con arcos paralelos: ");
        System.out.println(dg2);

        DirectedGraph <String> dg3 = null;
        try
        {
            dg3 = (DirectedGraph<String>)dg2.clone();
        }
        catch(CloneNotSupportedException e)
        {
        }
        System.out.println("Grafo 5 (dirigido - con arcos paralelos [clonado]: ");
        System.out.println(dg3);
    }
}
```

En el modelo *DLC-Grafos-Encadenada* que acompaña a esta ficha se muestra una implementación detallada de las ideas discutidas aquí. Dejamos el análisis profundo del código fuente para los alumnos, así como cualquier eventual agregado o modificación.