Algoritmul simplex dual

! Pe foaie la examen !

Fie pb (1) $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$

rang $A = m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Pas 0: Fie B o bază dual admisibilă, calc $\bar{x}^B$, $\bar{z}^B$, $z_j^B - c_j$ $\forall j = \overline{1,n}$

Pas 1: (criteriul de optim)

Notăm cu $B_- = \{ i \in B \;/\; \bar{z}_i^B < 0 \}$

Dacă $B_- = \emptyset \Rightarrow (\bar{x}^B, 0)$ – sol. optimă STOP

Pas 2: Dacă $\exists\, i \in B_-$ a.î. $y_{ij}^B \ge 0$ $\forall j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ pb (1) nu are soluții admisibile STOP

Pas 3: (schimbarea bazei)

Alegem $r \in B_-$ și apoi $k \in R$ cu criteriul de ieșire din bază, respectiv cu criteriul de intrare în bază $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{B} = B \cup \{k\} \setminus \{r\}$

Calculăm $\bar{x}^{\tilde{B}}, \bar{z}^{\tilde{B}}, z_j^{\tilde{B}} - c_j$, $j = \overline{1,n}$. Mergem la pasul 1

(1) $\inf c^T x$, $Ax = b$, $x \ge 0$	(2) $\sup c^T x$, $Ax = b$, $x \ge 0$

B bază dual admisibilă

$z_j^B - c_j \le 0 \quad \forall j = \overline{1,n} \longrightarrow z_j^B - c_j \ge 0 \quad \forall j = \overline{1,n}$

Criteriul de ieșire din bază

$r \in B_-$ a.î.

$\bar{x}_r^B = \min_{i \in B_-} \bar{x}_i^B \longrightarrow$ la fel

Criteriul de intrare în bază

$k \in R$ a.î.

$\frac{z_r^B - c_r}{y_{rk}^B} = \min_{j \in R} \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B} \longrightarrow \frac{z_k^B - c_r}{y_{rk}^B} = \max_{j \in R} \frac{z_j^B - c_j}{y_{rj}^B}$

Determinarea unei baze dual admisibile pt pb (1)

Fie B o bază formată cu m coloane independente ale matricei A

Fie $R_+ = \{ j \in R \mid z_j^B - c_j > 0 \}$

Adăugăm restricția $x_0 + \sum_{j \in R_+} x_j = M$, unde $M \ge 0$ f. mare

sau putem adăuga restricția $x_0 + \sum_{j \in R} x_j = M$

$A = (B \quad R)$

Fie pb (1') $\begin{cases} \inf c_1^T x_1 \\ A_1 x_1 = b_1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$ unde $x_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^T \\ 0 & B & R \end{pmatrix}$ (poz. lui x_0)

$e^T = (1 \; 1 \; 1 \; \ldots \; 1)$

$b_1 = \begin{pmatrix} M \\ b \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

Var de bază pt pb (1'): x_0, x_i, $i \in B$

Baza pt (1') va fi $B' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $(B')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

~~Rezolvăm (1'):~~ $\Rightarrow$ obținem o bază B_2' dual admisibilă, eliminând x_0 din baza B' și adăugând în bază B' var x_k, unde k e ales astfel:

$$z_k^B - c_k = \max_{j \in R} (z_j^B - c_j)$$

În baza B_2'

$$z_j^{B_2'} - c_j = (z_j^{B_2'} - c_j) - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{max} \cdot \frac{1}{1} \leq 0 \quad j \in R$$

pivotul

$$z_0^{B_2'} - c_0 = 0 - \underbrace{(z_k^B - c_k)}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow B_2' \text{ este dual admisibilă.}$$

Rezolvăm pb (1'):

Cazuri:

1) pb (1') nu are soluții admisibile $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ pb (1) nu are soluții admisibile

2) pb (1') are sol optimă

2.1) x_0 este var. de bază (v.B)
restricția $\sum_{j \in R} x_j \leq M$ e inactiv (putem să o eliminăm)

2.2) x_0 nu este var de bază (v.B)
$x_0 = 0$

Dacă var. de bază nu depind de M e OK.
Dacă depind de M $\Rightarrow$

Răspuns: a) Dacă funcț. obiectiv depinde de M, a.î. pt că M poate fi oricât de mare $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ pb (1) are optim infinit

b) Dacă func obiectiv nu depinde de M, a.t. scădem toate variabile de o constantă până când ~~var dacă 0~~ cea mai mică ajunge 0

Subiecte de ex

1) Forme de pb de optimizare liniară ⟶ Aplicații

Def și notații
- sol. admisibilă
- sol. de bază
- sol. optimă
- bază primal / dual admisibilă

notații: $\bar{x}^B$, x^B, y_j, $z_j^B - c_j$

2) Vectori

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x^T = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$$

- Ce înseamnă coloane (vector) independente și bază formată cu col. unei matrici.

3)
- pct extremal
- vârf
- soluție de bază

} definiții, exemple (aplicații)

4) Lema substituției - enunț

5) Lema lui Farcaș - aplicații (într-un exemplu) - def de curs - enunț

și teoremele care sunt consecințe

6) Soluții degenerate - exemple

Restul cursurilor - enunțuri de teoreme
(ex: th. alg simplex primal (dual), th. duală a egalității, th. fundament. a ... etc.)

Examen 3p x subiect.
1 pct oficiu
+ 1p seminar

1) subiect teoretic cu mai multe subpuncte (aprox 6 subpct) 3p

2) Pb cu alg simplex < primal / dual (sau) 3p

3) Pb cu teorema slabă a ecarturilor complementare 3p