

# Lucrare de licență

Coordonator Științific:

Conf. Univ. Dr. Andrei HORVAT-MARC

Absolvent:

Emanuel BÎSCĂ

Baia Mare  
2020

Lucrare de licență

# Aplicații ale Analizei Matematice în Astronomie

Coordonator Științific:

Conf. Univ. Dr. Andrei HORVAT-MARC

Absolvent:

Emanuel BÎSCĂ

Baia Mare  
2020

# Cuprins

Cuprins.....	1
Introducere .....	3
Capitolul 1. Delimitări conceptuale.....	4
1.1. Repere istorice .....	5
1.1.1. Astronomia Greciei Antice .....	5
1.1.2. Nicolaus Copernic. Disputa dintre geocentrism și heliocentrism .....	9
1.1.3. Galileo Galilei și nașterea astronomiei moderne.....	12
1.2. Experimentele lui Galilei .....	14
1.2.1. Manuscrisul 116v .....	15
1.2.2. Manuscrisul 81r.....	20
1.2.3. Concluzii.....	23
Capitolul 2. Elemente de mecanică cerească.....	25
2.1. Discuții preliminare. Legile lui Newton .....	25
2.2. Ecuații ale mișcării.....	26
2.2.1. Soluții ale ecuațiilor mișcării.....	28
2.2.2. Ecuația orbitei. Prima lege a lui Kepler.....	31
2.2.3. Elemente orbitale .....	32
2.2.4. A doua și a treia lege a lui Kepler.....	34
2.3. Problema celor trei corpuri.....	37
2.3.1. Introducere în problemă.....	37
2.3.2. Model matematic .....	39
2.4. Calcule orbitale.....	40
2.4.1. Determinarea orbitei.....	40
2.4.2. Poziția pe orbită .....	41
2.4.3. Viteza de evadare.....	42
2.5. Teorema virialului.....	44

2.6. Aplicații.....	45
Capitolul 3. Perspectiva contemporană.....	50
3.1. Conceptul de tensor metric .....	50
3.2. Ecuațiile de câmp ale lui Einstein .....	53
3.2.1. Introducere în problematică.....	53
3.2.2. Metrica Schwarzschild.....	55
3.3. Consecințe.....	59
3.3.1. Dilatarea temporală gravitațională.....	59
3.3.2. Deplasarea undelor spectrului gravitațional .....	60
Concluzii .....	62
Bibliografie.....	63

# Introducere

Întotdeauna am fost pasionat de lucrurile care necesită o atenție aparte, care sunt dificil de înțeles, pentru că cele mai mari satisfacții vin atunci când obții rezultatul dezirabil după un studiu intens. E foarte greu să egalez sentimentele care provin în urma unui astfel de succes cu orice altceva. Probabil din aceste motive am ales ca temă de licență „Aplicații de analiză matematică în astronomie”, pe care am considerat-o de la început o provocare.

Deși majoritatea matematicii necesare pentru a înțelege informațiile obținute prin observația astronomică provin din fizică, există nevoi speciale care provin din situații care împletesc matematica cu fenomene ale căror detalii fizice poate nu le cunoaștem pe deplin pentru a explica observațiile. Îmi propun să prezint modalități prin care folosim analiza matematică în rezolvarea unor probleme pe care astronomia le impune, astfel încât să demonstrez importanța de necontestat a acesteia. Analiza matematică cunoaște o dezvoltare de proporții astronomice, în parte și pentru că astronomia observațională reprezintă o provocare continuă.

Am decis să îmi organizez lucrarea pe trei capitole, astfel încât informația să fie aranjată cronologic. Din aceasta cauză datele pe care le expun sunt ușor de pus în context și de corelat cu mentalitatea vremii în care își au originile.

Primul capitol prezintă detalii despre primele momente în care oamenii au început să privească cerul, primele experimente pe care le-au întreprins pe Pământ și care au schimbat fundamental modul în care astronomia modernă urma să evolueze. În al doilea capitol, am surprins unele dintre cele mai impresionante modalități prin care analiza matematică deservește astronomia: legile care guvernează mișcările planetelor – o extrapolare a bilelor lui Galilei din primul capitol. Am urmărit nu doar să redactez finalitatea rezultatele pe care Kepler, de exemplu, le-a obținut, ci să ofer spre studiu demonstrații pe larg, pentru a evidenția și mai mult influența analizei matematice în astronomie. Am poziționat ultimul capitol, cel de-al treilea, în era contemporană. Din punct de vedere informațional, acesta cuprinde referințe la relativitatea generală enunțată de Einstein, prin studiul unor ecuații care-i poartă numele. Pentru o mai bună înțelegere a ideilor sale, am discutat și despre un set de soluții, denumite după Karl Schwarzschild cel care le-a studiat. Consecințele care derivă din ecuațiile de câmp ale lui Einstein și pe care le putem observa în Cosmos, sunt extrem de frumos explicate la finalul acestui capitol.

# Capitolul 1.

## Delimitări conceptuale

Oamenii au privit mult timp spre ceruri, căutând să pună sens și ordine universului din jurul lor. Deși mișcarea constelațiilor – tiparele imprimate pe cerul nopții – a fost cel mai ușor de urmărit, alte evenimente cerești, cum ar fi eclipsele și mișcarea planetelor au fost, de asemenea, calculate și prezise.

Progresul pe care aceste observații și calcule l-au atins în zilele noastre, era de neconceput pentru cei care au fost primii pasionați în acest domeniu. Unele idei au avut nevoie de sute de ani pentru a fi universal acceptate ca un adevăr științific, experimentabil, majoritatea dintre ele începând ca o blasfemie de neacceptat. Ar fi un nefericit eșec să credem că știința nu are unde să mai evolueze, după cum se lasă hotărâți unii pseudo-savanți refuzând astfel să mai studieze fenomenele acestea care ne înconjoară. Mult prea puțin am descoperit, dacă ne raportăm la cantitatea de informație care ne este încă inaccesibilă sau la ceea ce nici măcar nu ne putem imagina.

Dar, este aproape evident deja faptul că, matematica este cel mai important instrument utilizat în aceste studii, pentru că toate marile descoperiri astronomice au fost mai întâi demonstrate teoretic, pur matematic, fără a poseda și latura empirică necesară demonstrării lor. De cele mai multe ori, odată cu avansul tehnologic și tehnic, omenirea a câștigat și posibilitatea de a le demonstra prin experimente. Cele de sus fiind spuse, importanța matematicii în rezolvarea întrebărilor puse de astronomi, devine incontestabilă. Orice fenomen poate fi descris și matematic, acest fapt deschizând un portal care să ofere noi întrebări și noi provocări pentru matematicienii de pretutindeni, pasionați de astronomie.

**Matematica** este limbajul universal, care explică, în general, sub formă abstractă starea de existență a obiectelor și evoluția fenomenelor cunoscute din Univers. Azi, matematica se rezumă la investigarea structurilor abstracte definite și construite axiomatic folosind logica formală. Una dintre cele mai importante structuri investigate de către matematică, o constituie astronomia.

**Astronomia** este definită ca fiind știința care studiază mișcările, structura și evoluția corpurilor cerești și a sistemelor din Universul cunoscut. Știința care studiază forma spațială și temporală a evenimentelor și proceselor care au loc în Universul cunoscut și formarea Universului însuși. Etimologic vorbind, *astronomie* provine din cuvintele grecești *astron*, care înseamnă astru și *nomos*, care înseamnă lege.

De obicei se afirmă că astronomia este una din cele mai vechi științe. Din cele mai vechi timpuri a existat o legătură foarte strânsă între matematică și astronomie. Aceste

domenii au emanat în epoca modernă o nouă serie de științe: fizică, astrofizică, chimie, astfel că, azi, nu mai există o graniță clară care să delimiteze aceste domenii.

## 1.1. Repere istorice

### 1.1.1. Astronomia Greciei Antice

Pe măsură ce stelele se mișcă pe cer în fiecare seară, oamenii au privit și s-au întrebat despre locul lor în univers. De-a lungul istoriei, civilizațiile au dezvoltat sisteme unice pentru ordonarea și înțelegerea cerului. Astronomii babilonieni și egipteni au dezvoltat sisteme care au devenit baza astronomiei grecești, în timp ce societățile din America, China și India și-au dezvoltat propriile sisteme independente.

Munca astronomilor greci antici este bogat documentată în colecțiile Bibliotecii Congresului SUA, în mare parte datorită modului în care tradiția greacă a cercetării a fost continuată prin activitatea astronomilor islamici și apoi în astronomia modernă europeană timpurie. Prin această secțiune ofer un tur al unor idei și modele astronomice din Grecia antică, așa cum este ilustrat în articole din colecțiile Bibliotecii Congresului Statelor Unite.

Începând cu secolul V î.Hr., faptul că Pământul este o sferă a fost acceptat pe larg. Acesta este un punct critic, deoarece există o concepție greșită răspândită că popoarele antice credeau că Pământul era plat. Pur și simplu nu a fost cazul.

În secolul V î.Hr., Empedocles și Anaxagoras au oferit argumente pentru natura sferică a Pământului. Experimentul lor a fost unul cât se poate de simplu, în timpul unei eclipse lunare, când Pământul este între Soare și Lună, au identificat umbra Pământului pe Lună. Pe măsură ce umbra Pământului se mișcă pe suprafața vizibilă a Lunii, se observă că este clar rotundă; lucru ce ar sugera că Pământul este o sferă.



Fig.2 Experimentul marinarilor

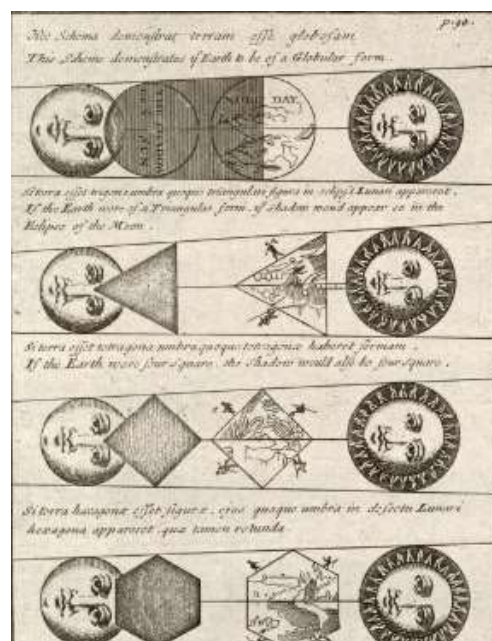


Fig.1 Umbra Pământului reflectată pe Luna în timpul unei eclipse

Având în vedere că oportunitățile de observare a unei eclipse lunare nu apar deseori, există și dovezi ale rotunjimii Pământului în experiențele marinarilor. Când o navă apare la orizont, prima parte a

navei este vizibilă mai întâi. O gamă largă de texte de astronomie de-a lungul timpului folosesc acest lucru ca o modalitate de a ilustra rotunjimea Pământului. După cum sugerează imaginea, aceasta este exact ceea ce s-ar aștepta pe un Pământ sferic. Dacă Pământul ar fi plat, era de așteptat să putem vedea întreaga navă imediat ce a devenit vizibilă.

Eclipsele lunare au permis, de asemenea, o altă înțelegere cheie despre Pământ. În secolul al III-lea î.Hr., Aristarh din Samos a motivat că poate descoperi dimensiunea Pământului pe baza informațiilor disponibile în timpul unei eclipse lunare. Diagrama din dreapta ilustrează o interpretare a operei sale. Cercul mare este Soarele, cercul mediu este Pământul și cel mai mic cerc este Luna. Când Pământul este în mijlocul Soarelui și al Lunii, el provoacă o eclipsă lunară și măsurând dimensiunea umbrei Pământului pe Lună, a furnizat o parte din informațiile de care avea nevoie pentru a-i calcula dimensiunea.

Eratostene a estimat circumferința Pământului în jurul a 240 î.Hr.. A folosit o abordare diferită, măsurând umbrele în Alexandria și Syene pentru a calcula unghiul lor față de Soare. Există o dispută cu privire la acuratețea calculelor sale, întrucât nu știm exact care au fost unitățile de măsură. Cu toate acestea, măsurarea a fost relativ apropiată de dimensiunea reală a Pământului. Grecii aplicau matematica pentru a emite teorii referitoare la natura lumii lor. Ei dețineau o serie de credințe despre natură și lume, dar lucrau, în multe cazuri, pentru a fundamenta aceste credințe printr-o explorare empirică; dovezile obținute pe această cale fiind folosite în raționamentele lor viitoare.

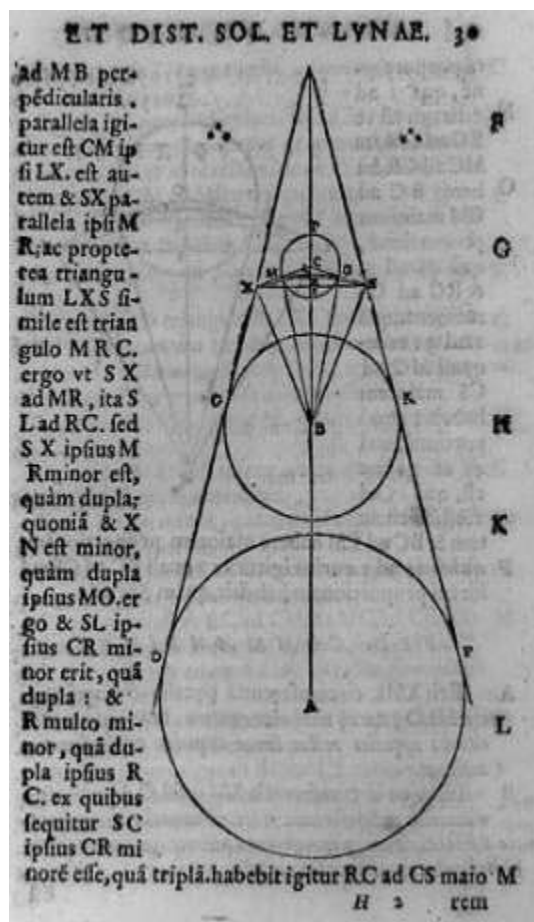


Fig.3 Aproximarea lui Aristarchus privind circumferința Pământului în raport cu cea a lunii și a soarelui



## Elementele și cosmologia lui Aristotel

În tradiția lui Platon și a lui Empedocles înaintea sa, Aristotel a susținut că există patru elemente fundamentale, focul, aerul, apa și pământul. Este dificil pentru noi să înțelegem pe deplin ce înseamnă acest lucru, deoarece astăzi ne gândim la materie în termeni foarte diferiți. În sistemul lui Aristotel nu exista niciun fel de spațiu gol. Tot spațiul a fost umplut cu o oarecare combinație a acestor elemente.



Fig.4 Cele patru elemente ale lui Aristotel

Aristotel a afirmat că putem reduce aceste elemente în două perechi de calități, *fierbinte și rece și umed și uscat*. Din combinarea fiecăreia dintre aceste calități au rezultat elementele. Aceste calități pot fi înlocuite cu opusele lor, care în acest sistem devin modul în care se întâmplă schimbarea pe Pământ. De exemplu, atunci când este încălzită, apa se transformă în aburi care par a fi aer.

În Cosmologia lui Aristotel, fiecare din aceste patru elemente (pământ, apă, foc și aer) avea o greutate. Pământul a fost cel mai greu, apa mai puțin, iar aerul și focul cele mai ușoare. Potrivit lui Aristotel, substanțele mai ușoare s-au îndepărtat de centrul universului, iar celelalte s-au așezat în centru.

### Stelele rătăcitoare și fixe din regiunea cerească

Spre deosebire de cele terestre, regiunea cerească avea o natură fundamental diferită. Privind la cerul nopții, grecii antici au găsit două feluri principale de obiecte cerești; stelele fixe și stelele rătăcitoare. Majoritatea obiectelor vizibile par să se miște exact cu aceeași viteză și se prezintă exact în aceeași amenajare noapte după noapte. Acestea sunt stelele fixe. Par să se miște împreună. În afară de acestea, erau un set de nouă obiecte care s-au comportat diferit, Luna, Soarele și planetele Mercur, Venus, Marte, Saturn și Jupiter care se mișcau fiecare în funcție de un sistem diferit. Pentru greci, acestea erau stelele rătăcitoare.

În acest sistem întregul univers făcea parte dintr-o mare sferă. Această sferă a fost împărțită în două secțiuni, un tărâm celest exterior și unul terestru interior. Linia de împărțire între cele două era orbita lunii. În timp ce pământul era un loc de tranziție și flux, cerurile erau neschimbate. Aristotel a estimat că există o a cincea substanță, chintesența, din care au fost făcute cerurile și că cerurile sunt un loc al mișcării sferice perfecte.

## Cercurile lui Ptolemeu

Claudius Ptolemeu (90 – 168) a creat o mulțime de cunoștințe astronomice din casa lui din Alexandria, Egipt. Beneficiind de sute de ani de observație din vremea lui Hipparchus și Eudoxus, precum și a unui set de date astronomice culese de babilonieni, Ptolemeu a dezvoltat un sistem pentru a prezice mișcarea stelelor care a fost publicată în opera sa astronomică principală, *Almagestum*. Succesul lui Ptolemeu la sintetizarea și perfecționarea ideilor și îmbunătățirile în astronomie au făcut din opera sa una atât de populară încât lucrările anterioare s-au oprit din circulație. Tradus în arabă și latină, *Almagestum* a devenit textul principal de astronomie pentru următorii mii de ani.

În acest sens, cartea lui este un instrument pe care îl putem folosi pentru a prezice locațiile stelelor. În comparație cu astronomia anterioară, lucrarea sa este mult mai concentrată pe a servi ca un instrument util decât pe prezentarea unui sistem pentru descrierea naturii cerurilor. Încercarea de a prezice cu exactitate locul stelelor în timp a dus la crearea unui model mult mai complicat.

Pe vremea lui Ptolemeu, astronomii greci își propuseseră să adauge cercuri pe orbitele circulare ale stelelor rătăcitoare (planetele, Luna și Soarele) pentru a explica mișcarea lor. Aceste cercuri pe cercuri se numesc epicycluri. În tradiția greacă, cerurile erau un loc al mișcării circulare perfecte, așa că modalitatea de a da socoteală perfecțiunii a fost prin adăugarea cercurilor. Aceasta a dus la dezorientarea ilustrațiilor.

The image shows a page from a historical astronomical table, likely from Ptolemy's *Almagest*. The page is titled "Prima" at the top center and "7" at the top right. Below the title, there is a large block of text in Latin, which appears to be a preface or introduction to the table. The table itself is divided into two main sections: "Prima" (First) and "Secunda" (Second). Each section contains columns for "Anni" (Years), "Diebus" (Days), and "Horis" (Hours). The data is presented in a grid format with various numerical values and symbols, likely representing celestial coordinates and movements. The text is written in a historical script, and the table is organized into multiple rows and columns, with some cells containing sub-tables or additional data.

Fig.5 Un tabel astronomic reprezentat în *Almagestum*

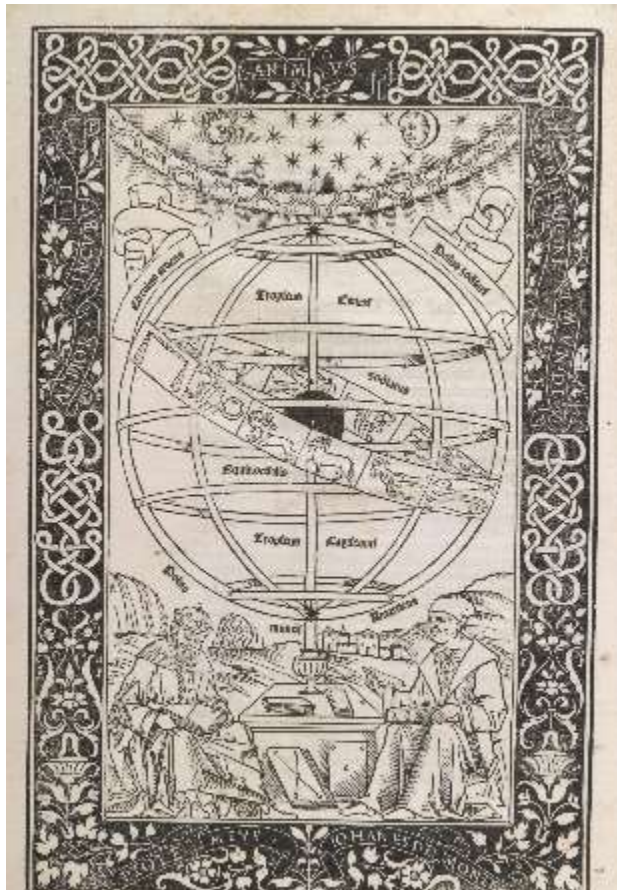


Fig.6 Frontispiciul pentru Epitomul astronomului Regiomontanus

Pentru a scăpa de natura complicată a acestui număr extins de cercuri, Ptolemeu a adăugat o serie de concepte noi. Pentru a descrie cu exactitate mișcarea planetară, el a trebuit să folosească cercuri excentrice. Cu cercul excentric, centrul orbitei planetelor nu ar fi Pământ, ci ar fi în schimb un alt punct. Ptolemeu trebuia apoi să pună epicyclurile pe un alt set de cercuri numite deferente. Deci planetele s-au mutat pe cercuri care se deplasau pe orbitele circulare. Ptolemeu a avut nevoie, de asemenea, de un instrument care a permis planetelor să se deplaseze cu viteze diferite în timp ce se deplasau în jurul acestor cercuri. Modelul rezultat a fost complex, dar a avut o putere de predicție extinsă.

Ptolemeu a reprezentat o tradiție matematică, concentrată pe dezvoltarea de modele matematice cu putere predictivă. Aristotel a fost cunoscut pentru faptul că a prezentat modelul fizic al cerurilor. Ptolemeu era de asemenea interesat să-și desfășoare modelul de ceruri pentru a

descrie realitatea sa fizică. Cu toate acestea, contribuția sa cea mai importantă a fost modelele și datele matematice pe care le-a folosit pentru a prezice mișcarea corpurilor cerești. Multă vreme numele său a fost sinonim cu modelul cerurilor.

### 1.1.2. Nicolaus Copernic. Disputa dintre geocentrism și heliocentrism

#### Geocentrismul

Este curentul conform căruia Pământul se află în centrul lumii (Cosmosului). Astfel era privită lumea în Grecia antică. Soarele și celelalte obiecte observate se considera că se mișcă în jurul Pământului. Dintre susținători ai geocentrismului amintesc pe: Aristotel, Ptolemeu.

#### Progresul dificil din Evul Mediu

Astronomia nu a făcut progrese majore în Europa medievală sfâșiată de conflicte. Nașterea și extinderea islamului după secolul al VII-lea au dus la o înflorire a culturilor arabe și evreiești care au păstrat, tradus și adăugat la multe dintre ideile astronomice ale

grecilor. Multe dintre numele celor mai strălucitoare stele, de exemplu, sunt luate astăzi din arabă, precum termeni astronomici ca „zenit”.

Pe măsură ce cultura europeană a început să iasă din perioada lungă și întunecată a evului mediu, comerțul cu țările arabe a dus la o redescoperire a textelor antice precum *Almagestum* și la o trezire a interesului pentru întrebările astronomice. Această perioadă de renaștere în astronomie a fost întruchipată prin efortul lui Copernic.

Copernic a fost un cleric și om de știință care a jucat un rol principal în apariția științei moderne. Deși nu a putut dovedi că Pământul se învârtă în jurul Soarelui, el a prezentat argumente atât de convingătoare pentru această idee încât a întors valul gândirii cosmologice și a pus bazele pe care Galileo și Kepler au construit atât de eficient în secolul următor.

Poate cel mai important eveniment al Renașterii a fost „deplasarea” Pământului din centrul universului. Această revoluție intelectuală a fost inițiată de un cleric polonez în secolul al XVI-lea, Nicolaus Copernic. Pregătirea sa a fost în drept și medicină, dar principalele sale interese erau astronomia și matematica. Marea sa contribuție la știință a fost o reevaluare critică a teoriilor existente ale mișcării planetare și dezvoltarea unui nou model centrat pe Soare, sau heliocentric, al sistemului solar. Copernic a concluzionat că Pământul este o planetă și că toate planetele înconjoară Soarele. Numai Luna orbitează Pământul.

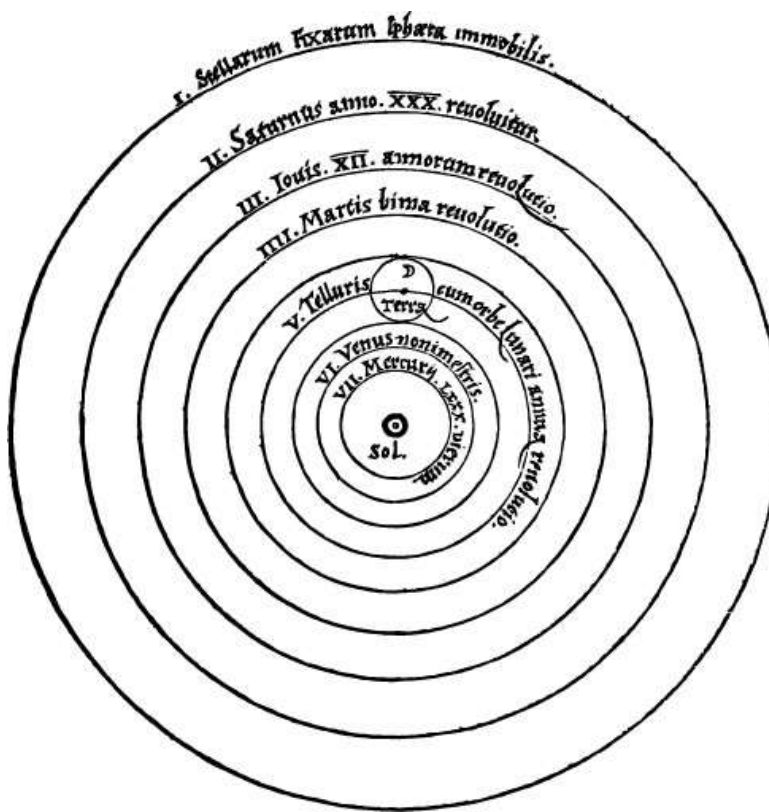


Fig.7 Sistemul lui Copernic

Copernic a descris ideile lui în detaliu în cartea sa *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (*Despre revoluția orbitei cerești*), publicată în 1543, anul morții sale. Până în acest moment, vechiul sistem al lui Ptolemeu avea nevoie de ajustări semnificative pentru a prezice corect pozițiile planetelor. Copernic a dorit să dezvolte o teorie îmbunătățită din

care să calculeze pozițiile planetare, dar, făcând acest lucru, nu a fost lipsit de toate prejudecățile tradiționale.

A început cu mai multe presupuneri care erau comune la vremea sa, cum ar fi ideea că mișcările corpurilor cerești trebuie să fie alcătuite din combinații de mișcări circulare uniforme. Dar nu și-a asumat (așa cum au făcut majoritatea oamenilor) că Pământul trebuie să fie în centrul universului și a prezentat o argumentare a sistemului heliocentric care era elegant și persuasiv. Ideile sale, deși nu au fost acceptate pe scară largă decât după mai bine de un secol după moartea sa, au fost mult discutate între savanți și, în final, au avut o influență profundă pe parcursul istoriei mondiale.

Una dintre obiecțiile ridicate la teoria heliocentrică a fost că, dacă Pământul s-ar muta, cu toții am simți această mișcare. Obiectele solide ar fi smulse de pe suprafață, o minge aruncată de la o înălțime mare nu ar lovi direct pământul de sub el și așa mai departe. Dar o persoană în mișcare nu este neapărat conștientă de această mișcare. Cu toții am avut experiență văzând că un tren, autobuz sau navă alăturată par să se miște, doar pentru a descoperi că noi suntem cei care ne mișcăm.

Cea mai importantă idee din *De Revolutionibus* a lui Copernic este aceea că Pământul este una dintre cele șase (atunci cunoscute) planete care se învârt în jurul Soarelui. Folosind acest concept, el a fost capabil să elaboreze imaginea generală corectă a sistemului solar. El a așezat planetele, pornind cel mai aproape de Soare, în ordinea corectă: Mercur, Venus, Pământ, Marte, Jupiter și Saturn. Mai mult, el a dedus că cu cât este mai apropiată o planetă de Soare, cu atât este mai mare viteza sa orbitală. Prin teoria sa, el a fost capabil să explice mișcările retrograde complexe ale planetelor fără epicicluri și să realizeze o scară aproximativ corectă pentru sistemul solar.

Copernic nu a putut dovedi că Pământul se învârt în jurul Soarelui. De fapt, cu unele ajustări, vechiul sistem al lui Ptolemeu ar fi putut contabiliza, de asemenea, mișcările planetelor pe cer. Copernic a subliniat însă stângăcia cosmologiei lui Ptolemeu și faptul că era și lipsită de frumusețe și simetrie.

**Heliocentrismul** este, așadar, teoria conform căreia Soarele este centrul sistemului solar. Susținători ai heliocentrismului sunt: *Aristarh din Samos* (sec. III î.Hr.), *Nicolaus Copernic* (matematician, astronom, sec. XVI), *Johannes Kepler* (matematician, astronom, precursor al calculului integral, 1571 – 1630), *Giordano Bruno* (teolog, filosof umanist, sec. XVI), *Galileo Galilei* (matematician, astronom-părintele astronomiei observaționale, filosof, 1564 – 1642), *Isaac Newton* (teolog, alchimist, matematician, fizician care a revoluționat știința mai ales în domeniile: optică, matematică, mecanică, 1643 – 1727).

Cele două teorii au stârnit multe controverse de-a lungul istoriei, chiar religioase, astfel că Giordano Bruno a fost ars pe rug de către Inchiziție în anul 1600 pentru convingerile sale că Pământul nu se află în centrul sistemului solar și că lumea este



infinită. Galileo Galilei a susținut heliocentrismul, a construit prima lunetă cu care a observat petele solare și sateliți ai lui Jupiter. Pentru convingerile sale, Galileo Galilei a fost judecat de un tribunal laic și fost excomunicat și condamnat la închisoare pe viață. A retractat și conform procedurii a fost judecat de către un tribunal inchiizitorial. În urma unui proces papal în care a fost găsit suspect vehement de erezie, Galileo a fost pus sub arest la domiciliu.

### **1.1.3. Galileo Galilei și nașterea astronomiei moderne**

Multe dintre conceptele științifice moderne de observare, experimentare și testare a ipotezelor prin măsurători cantitative atente au fost pionierate de un om care a trăit aproape un secol după Copernic. Galileo Galilei, un contemporan al lui Shakespeare, născut la Pisa. Ca și Copernic, a început să se antreneze pentru o carieră medicală, dar a avut puțin interes pentru subiect și a trecut mai târziu la matematică. A ocupat funcții de facultate la Universitatea din Pisa și la Universitatea din Padova și, în cele din urmă, a devenit matematician la curtea Marelui Duce al Toscanei din Florența.

Cele mai mari contribuții ale lui Galileo au fost în domeniul mecanicii, studiului mișcării și acțiunilor forțelor asupra corpurilor. Atunci era familiar pentru toate persoanele, așa cum este acum pentru noi, că dacă ceva este în repaus, tinde să rămână în repaus și necesită o influență exterioară pentru a-l porni în mișcare. Prin urmare, repausul era în general considerat a fi starea naturală a materiei. Galileo a arătat însă că repausul nu este mai natural decât mișcarea.

Cândva în jurul anului 1590, Galileo a adoptat ipoteza lui Copernic a unui sistem solar heliocentric. În Italia romano-catolică, aceasta nu a fost o filosofie prea populară, deoarece autoritățile Bisericii au susținut încă ideile lui Aristotel și Ptolemeu și au avut motive politice și economice puternice pentru a insista că Pământul este centrul creației. Galileo nu numai că a contestat această gândire, dar a avut și îndrăzneala de a scrie în italiană mai degrabă decât în latină, considerată o limbă savantă, și de a preda public aceste subiecte. Pentru el, nu a existat nicio contradicție între autoritatea Bisericii în chestiuni de religie și moralitate și autoritatea naturii (revelată prin experimente) în materie de știință. Din cauza lui Galileo și a opiniilor sale „periculoase”, Biserica a emis, în 1616, un decret de interdicție în care afirma că doctrina lui Copernic era „falsă și absurdă” și nu trebuia reținută sau apărută.

Noile idei ale lui Copernic și Galilei au început o revoluție în concepția noastră despre cosmos. În cele din urmă, a devenit evident că universul este un loc vast și că rolul Pământului în el este relativ lipsit de importanță. Ideea că Pământul se mișcă în jurul Soarelui ca și celelalte planete a ridicat posibilitatea ca acestea să fie chiar ele alte lumi, eventual chiar să sprijine viața. Pe măsură ce Pământul a fost retras din poziția sa în centrul universului, tot așa a fost și umanitatea. Universul, în ciuda a ceea ce ne-am putea dori, nu se învâрте în jurul nostru.

## Galileo, asupra mișcării

Primele eforturi ale lui Galileo pentru a înțelege fenomenul mișcării au fost întreprinse la Pisa (1589 – 1592) și fac obiectul manuscriselor *De motu*. Sunt esențiale explicațiile lui Galileo despre două concepte, unul de bază cu viteza specifică uniformă de cădere și cel auxiliar reprezentat de una dintre forțele exterioare, care ține cont de mișcările non uniforme observate efectiv. Viteza specifică uniformă a obiectului depinde de mediul în care obiectul se deplasează și este determinat – prin hidrostática arhimediană – de diferența dintre densități între obiect și mediu. Odată distribuită, această putere exterioară care acționează asupra corpului considerat, influența ei dispare gradual, iar viteza corpului se schimbă constant până ce forța exterioară este complet disipată și obiectul își asumă viteza constantă naturală specifică mediului în care are loc mișcarea. Gândirea lui Galilei în această perioadă este încă puternic influențată de elemente aristotelice și medievale. Numai spre finalul lucrării *De motu*, Galileo începe să accepte posibilitatea ca accelerația să fie o trăsătură fundamentală a căderii.

În perioada în care a trăit și studiat la Padova (1597 – 1610), înțelegerea lui Galileo despre mișcare este supusă tranziției. Scrisoarea sa din 1604 către Paolo Sarpi oferă mărturii importante: "*the spaces passed in natural motion are in proportion to the squares of the times taken, and consequently that the spaces traversed in equal successive time intervals are to the odd number...*".

Înșelat de interesele sale în astronomie și de cele aflate în conflict cu Biserica, Galileo nu prezintă sinteza finală a teoriei sale despre mișcare până în 1638. *Discorsi* este expunerea unei conversații, lungă de patru zile, dintre *Salviati* care îl reprezintă pe Galileo însuși, *Sagredo* o minte deschisă, susținător al noii științe, și *Simplicio*, aderent al vechiului punct de vedere aristotelian.

Discuția analizează mișcarea obiectelor supuse unei accelerații constante, atât în situația unei căderi libere cât și de-a lungul planelor înclinate. Galileo își deduce concluziile, adesea folosind construcții geometrice. El exprimă relații cantitative între timpul, distanța, viteza și accelerația, în ceea ce privește proporțiile; într-adevăr, el folosește numai proporții între mărimi de același fel, de exemplu distanța la distanță, viteza la viteză, dar nu distanța în timp. În special, el nu are sistemul numerelor reale și notarea zecimală la dispoziția sa și nu e capabil să își formuleze concluziile în termeni de ecuații care implică variabile și constante. (Dezvoltarea acestui sistem era abia la începutul său în acel moment.) În acest context, Galileo ajunge la ideile următoare.

1. Toate corpurile care cad într-un vid fac acest lucru cu accelerație constantă. Pentru corpul căzut din repaus, viteza este proporțională cu timpul scurs. Acest lucru este valabil atât în situația căderii libere cât și pentru bile care rulează pe un plan înclinat.

2. Legea căderii afirma că distanța parcursă de un corp care se deplasează din repaus (din nou, fie în cădere liberă, fie pe un plan înclinat) este proporțional cu pătratul timpului necesar mișcării.
3. Traectoria unui proiectil are formă parabolică.

Galileo consideră două principii ca fiind fundamentale. Unul este principiul inerției și anume acela că un corp se deplasează cu o anumită viteză constantă (viteză și direcție) va continua să se miște cu aceeași viteză, dacă nu acționează o forță exterioară asupra lui<sup>1</sup>. Al doilea este un principiu de suprapunere a mișcărilor și anume acel proiectil mișcarea poate fi conceptualizată ca un compozit independent al unei mișcări cu constantă viteză și o mișcare verticală cu accelerație constantă. Trebuie subliniat că aceste concepte, de bază, ale Galileo (de exemplu, viteza și accelerația) nu au precizia oferită ulterior de analiza matematică. De aceea, principiile sale privind inerția și superpoziția nu au ajuns niciodată la o stare definitivă și generală.

## 1.2. Experimentele lui Galilei

Există un acord general cum că Galilei a ajuns la concluziile sale prin combinarea gândirii predecesorilor, deducerii geometrice și a experimentelor reale pe care le-a întreprins. Contemporanii lui Galilei, Descartes și Mersenne, au fost sceptici cu privire la experimentele sale. A se vedea (Koyre, 1978) și (Settle, 1961). Cu toate acestea, în cea mai mare parte, istoricii au ascultat cu interes cuvintele lui Galilei (așa cum s-a exprimat în a treia zi din *Discorsi*) observând că experimentele construite cu atenție de acesta sunt folosite ca instrument important atât pentru descoperire cât și pentru verificarea ideilor sale fundamentale despre mișcare.

În timp ce subliniază faptul că evoluția progresivă a înțelegerii lui Galileo asupra mișcării trebuie să fi avut cu siguranță un aspect experimental, eseurile scrise încă din 1967 erau încă circumspecte despre natura și impactul acestor experimente. A se vedea (McMullin, 1967) și (Settle, 1967). La începutul anilor '70, când Drake (Drake, 1973) a descoperit documentele de lucru nepublicate ale lui Galileo despre mișcare în *Biblioteca Nazionale Centrale* la Florența, a găsit înregistrări scrise ale experimentelor lui Galileo cu planurile înclinate. Aceste documente de lucru – există 160 de coli sau folii – sunt acum legate ca Volumul 72, sau Codex 72, din manuscrisele Galileo<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Este esențial de precizat că în acest context „inerția” este utilizată pentru a face referire pur și simplu la un principiu de mișcare uniformă și nu de versiunea definitivă a conceptului lui Newton. Pentru Newton, inerția este o proprietate inherentă a masei unui corp care îl determină să reziste la orice schimbare a stării sale de repaus sau mișcare de-a lungul unei linii drepte. Înțelegerea oferită de Galilei inerției este în sensul unui principiu cinematic despre mișcarea unui obiect în condiții ideale.

<sup>2</sup> Site-ul web <http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Galileo-Prototype/index.htm> oferă redări electronice minunate și foarte utile ale Volumului 72, pentru cei interesați de studiul lor.



Îmi propun să discut despre două dintre aceste înregistrări, **81r** și **116v**. Prescurtările r și v reprezintă „recto” și „verso”, adică „fața” și „spatele” foii respective. Fiecare dintre aceste documente oferă dovezi ale unui experiment în care Galileo a așezat un plan înclinat pe o masă, lasă o bilă să se rostogolească în jos și înregistrează date cantitative despre zborul mingii de la marginea mesei la sol. Salviati ne informează în a treia zi a *Discorsi* că Galileo a repetat unele dintre experimentele sale „de o sută de ori”. Astfel, se pare că fiecare măsurătoare înregistrată reprezintă rezultatul unui grup de încercări.

Ce aspecte din ideile sale despre mișcare a pus Galileo la încercare? Cât de precise au fost experimentele lui? Ce concluzii se pot trage în mod legitim și convingător din evidența de care acesta s-a îngrijit? Există într-adevăr convingerea că au avut succes? Cum au influențat experimentele lui, ideile contemporanilor săi? Acestea sunt câteva din întrebările pe care aș vrea să le dezbat în continuare. Ofer o atenție deosebită experimentelor lui Galilei, pentru că asistăm la cea mai simplă dovadă a faptului că erorile unuia pot fi esențiale astfel încât istoria să nu se repete, progresului fiindu-i garantată existența.

### 1.2.1. Manuscrisul 116v

Calcululele acestui document ne spun că Galilei a așezat un plan înclinat pe masă, a fixat un unghi de înclinare și a eliberat o bilă (probabil de bronz) de la înălțimile  $h$ :

300, 600, 800, 828 și 1000

puncte deasupra blatului orizontal. Este posibil ca Galilei să fi folosit un deflector curbat pentru a asigura o tranziție lină a bilei de la planul înclinat la masa orizontală. Schița sa din **175v** arată că el a considerat astfel de deflektori. După o scurtă rulare pe masă, bila a zburat și a aterizat pe sol. Galilei a măsurat distanțele de la punctul de impact al bilei până la baza mesei (chiar punctul perpendicular pe sol cu locul în care a început zborul bilei) și a înregistrat aceste date pe foaia lui ca:

(a) 800, 1172, 1328, 1340 și 1500

*puncte*. Acestea sunt valorile experimentale care corespund diferitelor înălțimi de lansare enumerate mai devreme.

Acum, să analizăm experimentul; considerăm bila în poziția inițială pe planul înclinat. Fie:

- $h$  = înălțimea bilei deasupra mesei și
- $d$  = distanța de la bilă până la finalul planului înclinat.

După eliberarea bilei, fie:

- $t$  = timpul necesar pentru ca bila să coboare până la finalul planului înclinat,

- $v$  = viteza mingii la momentul  $t$  (aceasta este și viteza mingii la începutul căderii sale de pe masă) și
- $R$  = distanța de la punctul de impact al bilei până la punctul de pe sol exact sub punctul de începere al zborului bilei.

Galilei era în măsură să supună la test proporția

$$(i) \quad v \propto t$$

precum și legea pătrată

$$(ii) \quad d \propto t^2$$

Din principiul său asupra inerției, am putea presupune că această componentă orizontală a vitezei este constantă pe toată durata zborului bilei și, prin urmare, egală cu  $v$  – având în vedere vitezele, distanțele și timpul care sunt relativ mici, putem presupune, cu siguranță, că rezistența aerului nu va juca un rol semnificativ. A se vedea (Naylor, 1976).

Relativ la componenta verticală a zborului mingii, știm că timpul căderii bilei proiectate orizontal de la masă la sol este independentă de viteza  $v$  de pornire a acesteia. Deci, de această dată este egal cu timpul  $t_0$  necesar ca o bilă să cadă vertical din repaus de la înălțimea mesei<sup>3</sup>. Putem emite concluzia ca:

$$(iii) \quad R \propto v$$

cu  $t_0$  constanta de proporționalitate. Folosind triunghiuri similare sau asemenea (unghiul de înclinare al planului înclinat este fixat) obținem ușor

$$(iv) \quad h \propto d.$$

După ce am pus proporțiile de mai sus, împreună, se observă

$$(v) \quad h \propto d \propto t^2 \propto v^2 \propto R^2,$$

prin urmare:

$$(vi) \quad R^2 \propto h.$$

Deci, dacă se eliberează mingea de la înălțimile  $h_0$  și  $h$  deasupra mesei, rezultă punctele de impact la distanțele  $R_0$  respectiv  $R$ , de la piciorul mesei, atunci:

$$(vii) \quad \frac{R^2}{R_0^2} = \frac{h}{h_0}.$$

Relația (vii) este cea pe care experimentul 116v își propune să o confirme. Pasul următor este să calculăm relația pentru valorile  $h_0 = 300$  și  $R_0 = 800$ . Astfel, de fapt

---

<sup>3</sup> Aceste observații se bazează pe principiul superpoziției, care în fizică spune că două acțiuni exterioare se adună vectorial.

determinăm, sau cel puțin aproximăm, constantele de proporționalitate care intervin între  $R^2$  și  $h$ , echivalent cu  $R$  și  $\sqrt{h}$ . Ecuația

$$(viii) \quad R = \frac{800}{\sqrt{300}} \sqrt{h}$$

surprinde clar acest fapt.

Rămâne de calculat succesiv  $R$  pentru  $h$  egală cu 600, 800, 828 și 1000 respectiv de comparat rezultatele alese cu măsurătorile pentru  $R$  care au fost furnizate – a se vedea (a) – de experiment. Valorile succesive pentru  $R$  sunt (în *puncte*)

$$(b) \quad —, 1131, 1306, 1330, \text{și } 1460.$$

Unde — se referă la valoarea  $R = 800$  care a fost folosită împreună cu corespondentul său  $h = 300$  pentru obținerea relației (viii).

Pentru a explica mai bine modul de lucru adoptat o să redactez calculele pentru  $h = 600$ , astfel

$$R^2 = \frac{800 \cdot 800 \cdot 600}{300} = 1600 \cdot 800 = 1280000 \Rightarrow R = \sqrt{1280000} \cong 1131.$$

Comparând valorile experimentale (a) cu valorile teoretice (b) înregistrăm diferențele de 41, 22, 10 și 40 de *puncte*. Faptul că valorile teoretice se încadrează în valorile experimentale (de la aproximativ 1 la 4 centimetri) pare contrar așteptării. La urma urmei, valorile experimentale sunt supuse efectelor de retard ale imperfecțiunilor din configurația experimentală a lui Galilei, în timp ce valorile teoretice nu sunt. Explicația este oferită de faptul că teoria lui Galilei, care este conținută în ecuația (viii), depinde de datele folosite în experiment. Vom vedea, în special, că distanța măsurată de 800 de *puncte* (corespunzătoare înălțimii de 300 de *puncte*) se încadrează în marajul prevăzut. Deci, constanta  $\frac{800}{\sqrt{300}}$  este prea mică și, prin urmare, toate valorile calculate de Galilei sunt prea mici.

### Perspectiva analizei matematice

Întrucât Galilei nu a fost capabil să analizeze rezultatele lui cu mai multă acuratețe, o să ofer în continuare niște idei despre cum acest lucru poate fi realizat. Revenind la bila de pe planul înclinat, să presupunem că aceasta este omogenă. Fie  $t = 0$  momentul în care este eliberată. În orice moment  $t \geq 0$ , fie  $f(t)$  forța de frecare ce acționează asupra bilei în timpul rulării (*a priori* depinde de  $t$ ). Aceasta este forța care rotește mingea. Presupunem că nu există nici alunecare (așa cum s-ar manifesta bila pe o suprafață fără fricțiune) și nici o întârziere suplimentară a mișcării în plan (cum ar fi dacă suprafața ar fi denivelată sau lipicioasă). Conexiunea dintre cuplul produs de forța de frecare, accelerarea unghiulară rezultată și indicele de inerție al bilei (această conexiune este

asigurată de analogul rotativ al forței – *rotational analogue of force* = masă  $\times$  accelerație), duce la ecuația:

$$f(t) = \frac{2}{5}ma(t)$$

unde  $m$  reprezintă masa bilei, iar  $a(t)$  este accelerația liniară a acesteia de-a lungul planului înclinat. Prin a doua lege a lui Newton și prin faptul că componenta gravitației în plan este  $F = mg \sin \beta$ , unde  $\beta$  este unghiul de înclinare al planului, obținem

$$ma(t) = F - f(t) = mg \sin \beta - \frac{2}{5}ma(t),$$

ceea ce conduce la

$$a(t) = \frac{5g}{7} \sin \beta.$$

Acest lucru ne informează în continuare, că viteza mingii în partea inferioară a planului înclinat este<sup>4</sup>

$$v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Combinând acest lucru cu una dintre ecuațiile de bază ale mișcării proiectilului și considerând  $y_0$  înălțimea mesei, obținem conexiunea

$$R = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}y_0\sqrt{h}}$$

între înălțimea inițială  $h$  și distanța  $R$  de la punctul de impact al mingii până la piciorul mesei. Odată cu substituția  $y_0 = 828$  această ecuație devine:

$$(ix) \quad R = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}828\sqrt{h}}.$$

Conectând înălțimile inițiale de 300, 600, 800, 828 și 1000 în ecuația (ix) pentru  $h$ , obținem valorile (din nou în *puncte*)

$$(c) \quad 842, 1191, 1376, 1400 \text{ și } 1538$$

pentru distanțele  $R$  corespunzătoare.

Acest model matematic se aplică situației ideale: o bilă perfect rotundă și omogenă; o cale perfect netedă și plană, fără alte înclinări decât înclinația planului; o forță de frecare care rotește mingea fără alunecare, dar nu oferă o impedanță suplimentară și un deflector

---

<sup>4</sup> Alternativ, această ecuație poate fi stabilită folosind legea conservării energiei.

care asigură o tranziție perfect lină de la plan la masă. În plus, pentru a se conforma situației modelului, masa, precum și solul (podeaua) pe care a avut loc impactul bilei trebuie să fie perfect orizontale. Desigur, nu există o asemenea perfecțiune în contextul configurației experimentale a lui Galilei. În concluzie, așteptarea este ca bila să aterizeze sub ținta sa teoretică. O comparație a listelor de numere ( $a$ ) și ( $c$ ) confirmă acest lucru. Știm, desigur, din discuția celei de-a treia zi a *Discorsi*, ca Galilei este conștient de faptul că legile sale fundamentale ale mișcării se aplică doar în situații idealizate și că orice experiment sau situație reală va întâlni impedimente.

O observație foarte importantă face referire la ecuațiile (*viii*) și (*ix*) a căror diferență este indusă de valorile constantei, rezultatul  $\frac{800}{\sqrt{300}} \approx 46,19$  este relativ apropiat de valoarea corectă obținută de noi,

$$2 \cdot \sqrt{\frac{5}{7} \cdot 828} \approx 48,64.$$

Până acum nu am spus nimic despre canalul care ghidează bila de-a lungul planului înclinat. Descrierea unui experiment de plan înclinat în *Discorsi* ne informează că a existat un canal „puțin mai mult de un deget în lățime” tăiat în planul înclinat și că „acesta a fost făcut foarte drept, neted, lustruit și căptușit cu pergament, la fel de neted și șlefuit cât de bine posibil, pe care s-a rulat o bilă dură, netedă, din bronz ...” Faptul că Galileo nu spune nimic specific despre canal prezintă o problemă, deoarece diferite configurații ale secțiunii transversale necesită explicații teoretice diferite.

Fie  $d$  diametrul bilei, să luăm în considerare posibilitățile cele mai probabile. Dacă secțiunea transversală a canalului este un arc circular cu o rază mai mare decât raza  $\frac{d}{2}$  a bilei, atunci în situația ideală, mingea se va rostogoli pe fundul canalului pe toată lungimea sa. Aceasta este o situație pentru care se aplică modelul matematic deja descris. Urmează să presupunem că acest canal este o secțiune dreptunghiulară și considerăm  $w > 0$  lățimea acesteia. Dacă  $d \leq w$ , atunci mingea este susținută de partea inferioară a canalului și se rostogolește în interiorul său. Din nou, modelul deja descris se aplică. Dar dacă  $d > w$  și canalul este suficient de adânc, bila de rulare nu atinge partea inferioară a canalului și este în schimb sprijinită de cele două muchii ale acesteia. În acest caz, dinamica este diferită. Modelul matematic al acestei situații (obținut printr-o analiză similară cu cea de mai sus) asigură relația

$$(x) \quad R = 2 \cdot \sqrt{\frac{y_0}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{d^2}{d^2 - w^2}}} \sqrt{h}.$$

Această ecuație se aplică și unei secțiuni în formă de triunghi isoscel, dacă  $w$  este considerată distanța dintre cele două puncte de contact ale bilei cu canalul. Fie  $y_0 = 828$

(*puncte*) înălțimea mesei, deoarece  $\frac{d^2}{d^2-w^2} > 1$ , valoarea ecuației ( $x$ ) e mai mică decât valoarea ecuației ( $ix$ ), pentru orice  $h > 0$ . În particular, valorile  $R$  pe care ecuația ( $x$ ) le furnizează pentru înălțimile inițiale  $h$  egale cu 300, 600, 800, 828 și 1000 sunt mai mici decât valorile ( $c$ ) furnizate de ecuația ( $ix$ ). Prin urmare, valorile furnizate de ecuația ( $x$ ) vor fi mai apropiate de valorile experimentale ( $a$ ) ale lui Galilei.

## Concluzie

Acum, să comparăm datele experimentale ale lui Galileo cu previziunile teoriei. Din analiza secțiunii transversale a canalului rezultă că diferențele dintre datele experimentale ( $a$ ) și predicțiile ( $c$ ) sunt cele mai mari posibile. Prin urmare, în evaluarea exactității experimentului 116v, aceste diferențe oferă un caz nefavorabil. Diferențele sunt după cum urmează  $-42 = 800 - 842$ ,  $-19 = 1172 - 1191$ ,  $-48 = 1328 - 1376$ ,  $-60 = 1340 - 1400$  și  $-38 = 1500 - 1538$  *puncte*.

În procentaje, aceasta se ridică la  $-5,0\%$ ,  $-1,6\%$ ,  $-3,5\%$ ,  $-4,3\%$  respectiv  $-2,5\%$ . Ce se poate spune despre această discrepanță? Deși planurile înclinate folosite de Galilei par să nu mai existe, știm – a se vedea (Bedini, 1986) de exemplu – că aparatul pe care Galileo l-a folosit în alte investigații a fost bine conceput. Fizicienii Shea și Wolf (Shea, W. R., Wolf, N. S., 1975), luând în considerare multe surse de eroare experimentală posibilă din experimentul 116v, consideră că datele generate de Galilei se încadrează „în limitele acceptabile ale erorii experimentale”. Toate indicațiile sunt că această evaluare este corectă. De exemplu, Naylor (Naylor, 1974) a reconstruit experimentul 116v cu o atenție considerabilă (secțiunea transversală a canalului era un arc circular cu o rază mai mare decât  $\frac{d}{2}$ ) și a obținut informații despre distanță foarte apropiate de ale lui Galilei.

### 1.2.2. Manuscrisul 81r

Există un consens – a se consulta (Naylor, 1976), (Hill, 1988) și (Drake, 1990) – că manuscrisul 81r își concentrează atenția asupra traiectoriilor bilelor care sunt propulsate oblic în spațiu după ce au coborât pe un plan înclinat așezat pe o masă. În contrast cu 116v, bilele cad direct de pe planul înclinat și nu există o deviere orizontală. Fiecare dintre cele trei curbe descrise pe manuscris, corespund unui anumit unghi fix de înclinare a planului și înălțimii fixe de pornire a bilei. În încercările sale repetate, Galilei interceptează zborul bilei cu planuri orizontale plasate la înălțimi diferite și marchează punctele de impact. În mod evident, el pornește așezând planul de interceptare la o distanță de  $53 + 53 + 77\frac{1}{2} + 146 = 3291\frac{1}{2}$  puncte sub planul mesei de lucru și calibrează cele trei traiectorii astfel încât punctele de impact să fie la distanțele orizontale respective de 250,  $250 + 250 = 500$  și  $250 + 250 + 250 = 750$  (*puncte*) de masă.

Știm că Galileo a considerat verificarea legii parabolice ca un obiectiv principal al studiilor sale asupra mișcării. A se vedea (Naylor, 1974) de exemplu. Având în vedere

acest lucru, ar trebui să credem că Galilei a proiectat experimentul 81r – cel puțin în parte semnificativă – pentru a testa ipoteza parabolică și că ar fi considerat experimentul un succes numai dacă ar fi furnizat dovezi solide pentru sau împotriva lui.

Să luăm în considerare cu ce s-a confruntat Galilei. Diagrama de mai jos rezumă esența a ceea ce se întâmplă în cadrul acestui experiment. Acesta arată calea bilei în jos pe planul înclinat de la dreapta la stânga până la marginea planului înclinat în punctul  $O$ . După aceea, bila este în zbor și este arătată în poziția tipică  $B$ . Planul determinat de înclinare și planul orizontal al marginii superioare a mesei este notat (ambele în secțiune transversală) prin  $P$  și  $H$ . Linia  $V$  este verticala prin  $O$ . Distanța de la  $B$  la linia  $V$  este notată cu  $x$  și cea de la  $B$  la  $H$  cu  $y$ .

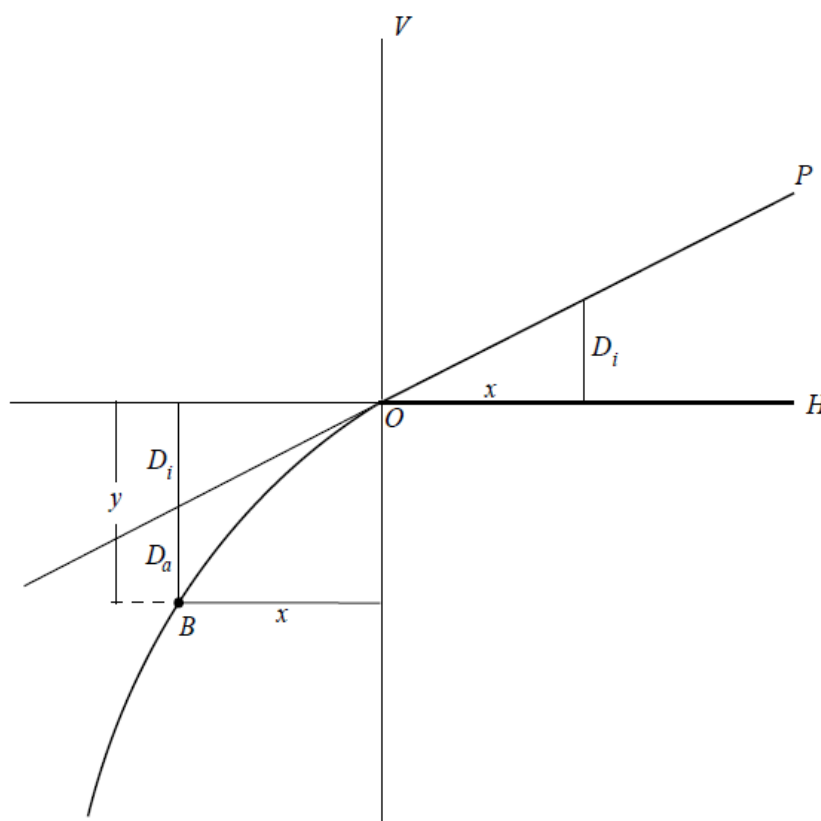


Fig.8 Diagrama experimentului 81r

Întrebarea cu care se confrunta Galilei pentru fiecare dintre cele trei curbe este aceasta: Sunt perechile  $x$  și  $y$  într-o relație care este parabolică sau cel puțin apropiată de una parabolică?

Principiul suprapunerii mișcării<sup>5</sup> ne spune că mișcarea bilei de la  $O$  la poziția sa tipică  $B$  este compusul unei componente inerțiale de-a lungul lui  $P$  și a unei componente accelerate uniform până la  $B$ . Aceste componente au ca rezultat deplasările verticale  $D_i$  și  $D_a$ . Distanța  $D_i$  poate fi obținută prin măsurarea înălțimii până la planul înclinat, din partea superioară a mesei la o distanță de  $x$  unități de la  $O$ . E de observat că  $D_i = c_i x$  unde  $c_i$  este panta planului înclinat.

Dar ce putem spune despre  $D_a$ ? Fie  $t$  timpul scurs al mișcării bilei de la  $O$  la  $B$ . Proporția  $x \propto t$  este o consecință a mișcării inerțiale. Deci  $t^2 \propto x^2$ . Luând în considerare mișcarea accelerată în jos, avem  $D_a \propto x^2$ , Galileo ar fi putut aproxima valoarea corespunzătoare a proporționalității  $c_a$  după metoda din 116v folosind  $D_a = y - D_i$  și primul punct de date pe care le-a notat ( $x = 81$ ,  $y = 53$  pentru curba interioară). De vreme ce știa elementele de bază despre parabolă, i-ar fi rămas de testat dacă perechile de distanțe  $x$  și  $y$ , pe care le-a înregistrat, satisfac ecuația

$$y = D_a + D_i = c_a x^2 + c_i x$$

într-o manieră aproximativă.

Însă Galilei a fost incapabil să ajungă atât de departe cu calculele sale. Tocmai am văzut că o evaluare semnificativă a datelor din 81r se bazează pe principiile suprapunerii și inerției. Principiul suprapunerii izolează, de la zborul bilei, o componentă de mișcare de-a lungul liniei ne-orizontale  $P$  și este exact această mișcare non-orizontală căreia i se aplică principiul inerției. Ideea este însă că Galilei nu a formulat și nu a folosit principiile inerției și suprapunerii, la acest nivel de generalitate. (Koyre, 1978) și (McMullin, 1967).

În a patra zi a *Discorsi* (în 1638), principiile inerției și suprapunerii sunt discutate doar în contextul unei mișcări care este compusă dintr-o mișcare orizontală de viteză constantă și o mișcare pe verticală, care este accelerată. Ulterior, Galileo le folosește pentru a furniza o dovadă a legii parabolice în cazul proiecției *orizontale*. Dar nu prezintă nicio dovadă în cazul *oblic*. Există dovezi convingătoare potrivit cărora eforturile prelungite ale lui Galileo de a atinge traiectoria obișnuit proiectată – problema arterei – nu au reușit.

Să ne întoarcem la *Fig. 9* și să considerăm liniile  $H$  și  $V$  ca fiind axele  $x$  și  $y$  ale unui sistem de coordonate cartezian, cu *punctul* ca unitate de lungime. Deoarece distanțele orizontale și verticale parcurse de bile erau mici, viteza lor era de asemenea mică. Vom presupune deci că rezistența aerului a fost neglijabilă și că traiectoriile observate de Galilei erau parabole precise. În ceea ce privește sistemul de coordonate, fiecare parabolă este dată de o ecuație de forma  $y = -ax^2 + bx$ , unde  $a$  este o constantă pozitivă,  $b$  este

---

<sup>5</sup> În fizică și în teoria sistemelor, principiul superpoziției (sau principiul suprapunerii) exprimă faptul că, pentru orice sistem liniar răspunsul generat la un moment dat și la o anumită poziție de către mai mulți stimuli este egal cu suma răspunsurilor generate de fiecare stimul în parte.



non-negativă și  $x \leq 0$ . Linia planului înclinat  $P$  are ecuația  $y = bx$  și  $ax^2$  și măsoară abaterea verticală a mișcării bilei de la această linie. (Acest lucru este opus analizei anterioară a experimentului 81r). Cu referire la sistemul de coordonate, punctele lui Galilei sunt

$$(-81, -53), (-121, -106), (-170, -183,5), (-250, -329,5).$$

Parabola de forma  $y = -ax^2 + bx$  care se potrivește cel mai bine acestor puncte – în sensul celor mai puțin pătrate – este:

$$(d) \quad y = -0.00351906x^2 + 0.446797x.$$

Dacă grupul de puncte inițiale ar fi căzut pe o parabolă, atunci (d) ar fi aceea parabolă. Coordonatele  $x$  ale punctelor de pe parabola (d) ale căror coordonate  $y$  corespund cu  $-53, -106, -183,5, -329,5$  sunt  $-74,7, -121,4, -173,5, -249,0$ .

Când comparăm aceste numere cu distanțele orizontale pe care experimentul le înregistrează pentru curba interioară, vedem că diferența  $81 - 74,7 = 6,3$  este cea mai mare. Indicația este că cel puțin unele dintre măsurători se abat de la realitatea pe care Galilei o observă cu mai mult de 6 *puncte*. Efectivitatea acestor dimensiuni nu surprinde considerând implicațiile: Galilei ar fi trebuit să stabilească planurile de interceptare perfect pe orizontală la distanțele verticale de  $53, 106 = 53 + 53, 183,5 = 53 + 53 + 77,5$  și  $329,5 = 53 + 53 + 77,5 + 146$  *puncte* sub planul mesei, să localizeze cu precizie punctele de impact ale bilei și să măsoare distanțele de la aceste puncte, la masă. Această analiză se aplică numai măsurătorilor de distanță care implică traiectoria. În contextul 116v, vor exista inexactități suplimentare în raport cu planul înclinat, canalul de dirijare și bila. În special, putem concluziona că inexactitățile experimentale vor fi mult mai mari de 6 *puncte* în fiecare dintre testele din experimentul 116v.

### 1.2.3. Concluzii

E ușor de observat că succesul experimentelor planelor înclinate ale lui Galilei a depins foarte mult de capacitatea acestuia da a-și modela matematic rezultatele experimentelor, lucru la care a eșuat, cunoștințele vremii fiind limitate – tocmai prin insuccesul experimentelor planurilor înclinate a inspirat alți oameni de știință să studieze aceleași fenomene, la un nivel cosmic. Galilei este considerat a fi cel mai puternic catalizator pe care astronomia l-a avut vreodată, pentru ca el a influențat decisiv mințile fizicienilor, ale astronomilor, care au studiat după el.

Experimentele pe care le-am prezentat mai devreme, l-au ajutat atât pe Galilei cât și pe noi să înțelegem mai bine natura stării obiectelor. În fizică, mișcarea este o schimbare în poziție al unui obiect în timp. Mișcarea este descrisă folosind deplasarea, distanța, viteza, accelerația și timpul. Mișcarea unui corp este observată prin atașarea unui cadru de referință de către un observator și prin măsurarea schimbării poziției acelui corp față de acel cadru. Dacă poziția unui corp nu se schimbă în raport cu un anumit cadru de

referință, se spune că acesta se află în repaus, este nemișcat, imobil, staționar sau are o poziție constantă (invariantă). Mișcarea unui obiect nu se poate schimba decât dacă se acționează printr-o forță. Acestea sunt niște rezultate logice care se desprind din fenomenele studiate anterior. Simplitatea experimentelor lui Galilei este evidentă, însă tocmai această simplitate este de invidiat, oferind acces unui număr mare de cercetători spre înțelegerea lor, ducând ideile propuse de Galilei și mai departe, concentrându-le în legi și ecuații care să le explice.

Deoarece nu există un cadru de referință absolut, mișcarea absolută nu poate fi determinată. Astfel, totul din univers poate fi considerat a fi în mișcare. Teoria pe care Galilei a început să o descrie se aplică obiectelor, corpurilor și particulelor din materie, radiației, câmpurilor de radiație și particulelor de radiație și spațiului, curburii și spațiului-timp. Se poate vorbi, de asemenea, despre mișcarea formelor și a limitelor. Deci, termenul de mișcare, în general, semnifică o schimbare continuă a configurației unui sistem fizic. De exemplu, se poate vorbi despre mișcarea unui val sau despre mișcarea unei particule cuantice, unde configurația constă în probabilități de ocupare a unor poziții specifice.

Consider că studiul sistemului nostru solar, al Universului, al legilor care guvernează peste acesta, ar fi fost imposibil fără un om care să studieze mai întâi aceleași fenomene aici, pe Pământ. În continuare îmi propun să discut despre studiul lui Kepler și despre cum acesta a extins munca lui Galilei, fiind primul care a conceput un sistem care a descris corect detaliile mișcării planetelor în jurul Soarelui.

## Capitolul 2.

### Elemente de mecanică cerească

#### 2.1. Discuții preliminare. Legile lui Newton

Sir Isaac Newton (25 decembrie 1642 – 20 martie 1726/27) a fost un matematician englez, fizician, astronom, teolog și autor, care este recunoscut pe scară largă ca fiind unul dintre cei mai influenți oameni de știință din toate timpurile și ca o figură cheie în revoluția științifică.

Legile lui Newton<sup>6</sup> sunt trei legi ale fizicii care dau o relație directă între forțele care acționează asupra unui corp și mișcarea acelui corp. A se vedea (Zimba, 2009). Ele au fost enunțate de Sir Isaac Newton (inspirat și din studiile lui Galilei) în lucrarea sa *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687). Aceste legi sunt baza mecanicii clasice. Newton a contribuit de asemenea la optică și a împărțit creditul cu Gottfried Wilhelm Leibniz pentru dezvoltarea calculului infinitezimal.

Newton însuși a folosit legile sale ale mecanicii clasice pentru a explica multe rezultate privind mișcarea obiectelor fizice. În al treilea volum al lucrării sale, a arătat că aceste legi ale mișcării, combinate cu legea atracției universale, explică legile lui Kepler privind mișcarea planetelor. Exact de aceste rezultate ne vom folosi și noi în continuare.

Aceste principii sunt suficiente pentru a explica toate mișcărilor mecanicii clasice, adică mișcărilor ce se desfășoară cu viteze mult mai mici decât viteza luminii în vid<sup>7</sup>. Dacă vitezele punctelor materiale se apropie de această viteză, atunci mișcărilor lor se supun principiilor relativității restrânse ale lui Einstein.

**Principiul I al mecanicii** sau **Principiul inerției** a fost formulat pentru prima dată de Galilei și este cunoscut sub forma:

*„În absența forțelor externe, o particulă va rămâne în repaus sau se va deplasa de-a lungul unei linii drepte cu viteză constantă.”*

**Principiul al II-lea al mecanicii** sau **Principiul forței** este:

*„Viteza de schimbare a impulsului unei particule este egală cu forța aplicată  $\mathbf{F}$ .”*

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}.$$

deci masa este o măsură a cantității de materie conținută în corp.

---

<sup>6</sup> Sau *Principiile Fundamentale ale mecanicii*.

<sup>7</sup> Valoarea sa exactă este definită ca 299 792 458 metri pe secundă (aproximativ 300 000 km / s).

**Principiul al III-lea sau Principiul acțiunii și reacțiunii** spune că:

*„Dacă particula A exercită o forță  $F$  asupra unei alte particule B, B va exercita o forță egală, dar opusă  $-F$  pe A.”*

Dacă mai multe forțe  $F_1, F_2, \dots$  sunt aplicate asupra unei particule, efectul este egal cu cel provocat de o forță  $F$  care este suma vectorială a forțelor individuale

$$F = F_1 + F_2 + \dots$$

**Legea gravitației sau Legea atracției universale**

*„Dacă masele particulelor A și B sunt  $m_A$  și  $m_B$ , iar distanța dintre ele este  $r$ , forța exercitată asupra lui A de B este îndreptată spre B și are mărimea  $\frac{Gm_A m_B}{r^2}$ , unde  $G$  este o constantă în funcție sistemul de unități ales.”*

Newton nota derivata unei funcții  $f$  prin  $\dot{f}$  și funcția integrală prin  $f'$ . Notățiile corespunzătoare utilizate de Leibniz au fost

$$\frac{df}{dt}$$

și

$$\int f dx.$$

Dintre notațiile lui Newton, doar punctul este încă utilizat, însemnând întotdeauna derivata în raport cu timpul,  $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$ . De exemplu, viteza  $\dot{\mathbf{r}}$  este derivata de timp a lui  $\mathbf{r}$ , accelerația  $\ddot{\mathbf{r}}$  a doua sa derivată etc.

## 2.2. Ecuații ale mișcării

Mecanica cerească, studiul mișcărilor corpurilor cerești, împreună cu astronomia sferică a fost principala ramură a astronomiei până la sfârșitul secolului al XIX-lea, când astrofizica a început să evolueze rapid. Sarcina principală a mecanicii cerești clasice a fost să explice și să prezică mișcările planetelor și ale sateliților lor. Câteva modele empirice, cum ar fi epicleurile lui Kepler, au fost folosite pentru a descrie aceste mișcări. A se vedea (Murschel, 2014). Dar niciunul dintre aceste modele nu au explicat natura mișcării planetelor. Abia în 1680 s-a găsit o explicație simplă pentru toate aceste mișcări – legea lui Newton, a gravitației universale.

Johannes Kepler (27 decembrie 1571 – 15 noiembrie 1630) a fost un astronom, matematician și astrolog german. El este o figură cheie în revoluția științifică din secolul al XVII-lea, mai cunoscută pentru legile mișcării planetare și cărțile sale *Astronomia nova*, *Harmonices Mundi* și *Epitome Astronomiae Copernicanae*. Aceste lucrări au furnizat, de asemenea, unul dintre fundamentele teoriei gravitației universale a lui Newton.

Kepler a fost profesor de matematică la o școală de seminar din Graz, Austria. Mai târziu a devenit asistent al astronomului Tycho Brahe la Praga și, în cele din urmă, matematicianul imperial al împăratului Rudolf al II-lea și al celor doi succesori ai lui Matthias și Ferdinand II. De asemenea, a predat matematica în Linz și a fost consilier al generalului Wallenstein. În plus, a scris lucrări fundamentale în domeniul opticii, a inventat o versiune îmbunătățită a telescopului de refracție<sup>8</sup> și a perfecționat descoperirile lui Galileo Galilei, privind telescopul. El a fost un membru corespondent al *Accademia dei Lincei* din Roma.

În această secțiune vom deduce unele proprietăți de mișcare orbitală. Ne vom concentra doar pe sisteme de două corpuri. De fapt, acesta este cel mai complicat caz care permite o soluție analitică îngrijită. Pentru simplitate, să considerăm corpurile ca fiind Soarele și o planetă, deși ar putea fi la fel de bine o planetă și satelitul ei, sau cele două componente ale unei stele binare.<sup>9</sup>

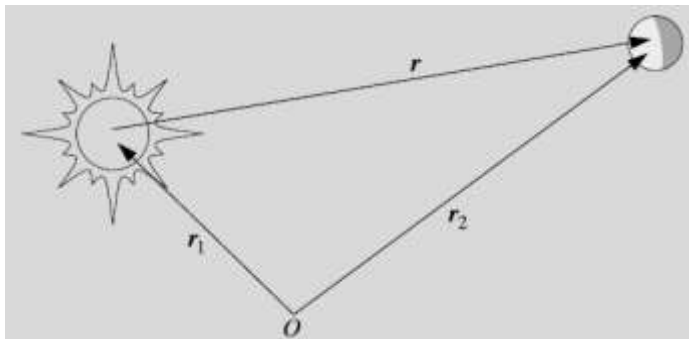


Fig. 9

Masele celor două corpuri să fie  $m_1$  și  $m_2$ , împreună cu vectorii de rază în coordonate inerțiale fixe  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$ . Poziția planetei în raport cu Soarele este notată prin relația  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ . Conform legii gravitației, a lui Newton, planeta simte o atracție gravitațională proporțională cu masele  $m_1$  și  $m_2$  și invers proporțională cu pătratul distanței  $r$ . Deoarece forța este îndreptată către Soare, ea poate fi exprimată ca:

$$(2.1) \quad \mathbf{F} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \cdot \frac{-\mathbf{r}}{r} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

unde  $G$  este constanta gravitațională.

A doua lege a lui Newton ne spune că accelerația  $\ddot{\mathbf{r}}_2$  a planetei este proporțională cu forța aplicată:

$$(2.2) \quad \mathbf{F} = m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2$$

combinând (2.1) și (2.2), obținem ecuația mișcării planetei

$$(2.3) \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

<sup>8</sup> Cunoscut și sub numele de telescop Keplerian.

<sup>9</sup> O stea binară este un sistem solar constând din două stele aflate pe orbită în jurul centrului comun de masă. Steaua mai strălucitoare este denumită stea primară iar cea de-a doua stea secundară sau stea companion.

Deoarece Soarele simte aceeași atracție gravitațională, dar în direcția opusă, putem scrie imediat ecuația mișcării Soarelui

$$(2.4) \quad m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = +Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Ne interesează în principal mișcarea relativă a planetei în jurul Soarelui. Pentru a găsi ecuația orbitei relative, anulăm masele care apar în ambele părți ale ecuațiilor (2.3) și (2.4) și scădem (2.4) din (2.3) pentru a obține

$$(2.5) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

unde am folosit notația

$$(2.6) \quad \mu = G(m_1 + m_2).$$

Soluția din (2.5) oferă acum orbita relativă a planetei. Ecuația implică vectorul de rază și derivata de ordinul doi. În principiu, soluția ar trebui să ofere vectorul de rază în funcție de timp,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Din păcate, lucrurile nu sunt atât de simple în practică; de fapt, nu există nicio modalitate de a exprima vectorul de rază ca funcție a timpului într-o formă convenabilă<sup>10</sup>. Deși există mai multe modalități de a rezolva ecuația mișcării, trebuie să recurgem la manipularea matematică într-o formă sau alta pentru a ne da seama de proprietățile esențiale ale orbitei. În continuare vom studia o posibilă metodă.

### 2.2.1. Soluții ale ecuațiilor mișcării

Ecuația mișcării (2.5) este o ecuație diferențială vectorială de ordinul doi (conține derivate secundare). Prin urmare, avem nevoie de șase constante de integrare sau integrale pentru soluția completă. Soluția este o familie infinită de orbite cu dimensiuni, forme și orientări diferite. O soluție particulară (de exemplu, orbita lui Jupiter) este selectată prin fixarea valorilor celor șase integrale. Mișcarea unei planete este determinată fără echivoc de poziția și viteza ei în orice moment; astfel am putea lua vectorii de poziție și viteză în unele momente ca integrale ale noastre. Deși nu ne spun nimic despre geometria orbitei, ele pot fi utilizate ca valori inițiale atunci când integrăm numeric orbita, folosind un calculator. Un alt set de elemente integrale, elementele orbitale, conține cantități geometrice care descriu orbita într-un mod foarte clar și concret. Un al treilea set posibil implică anumite cantități fizice, pe care le vom face deriva, în continuare. Începem prin a arăta că momentul unghiular rămâne constant. A se consulta (Greiner, 2003). Momentul unghiular al planetei în cadrul heliocentric este

$$(2.7) \quad L = m_2 \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Specialiștii preferă să folosească momentul unghiular împărțit la masa planetei

---

<sup>10</sup> Adică o expresie finită care implică funcții elementare familiare.

$$(2.8) \quad \mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Derivata în raport cu timpul a relației (2.8) este  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}$ . Ultimul termen dispăre ca produs vectorial a doi vectori paraleli. Primul termen conține  $\ddot{\mathbf{r}}$ , care este dat de ecuația mișcării, de unde  $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{r} \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = -\left(-\frac{\mu}{r^3}\right) \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$ . Astfel,  $\mathbf{k}$  este un vector constant independent de timp (așa cum este și  $L$ , desigur). Deoarece vectorul momentului unghiular este întotdeauna perpendicular pe mișcare (rezultă din (2.8)), mișcarea este oricând limitată la planul invariabil perpendicular pe  $\mathbf{k}$ .

Pentru a găsi un alt vector constant, calculăm produsul vectorial  $\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}}$  și obținem

$$\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = -\frac{\mu}{r^3} ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} - (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r}).$$

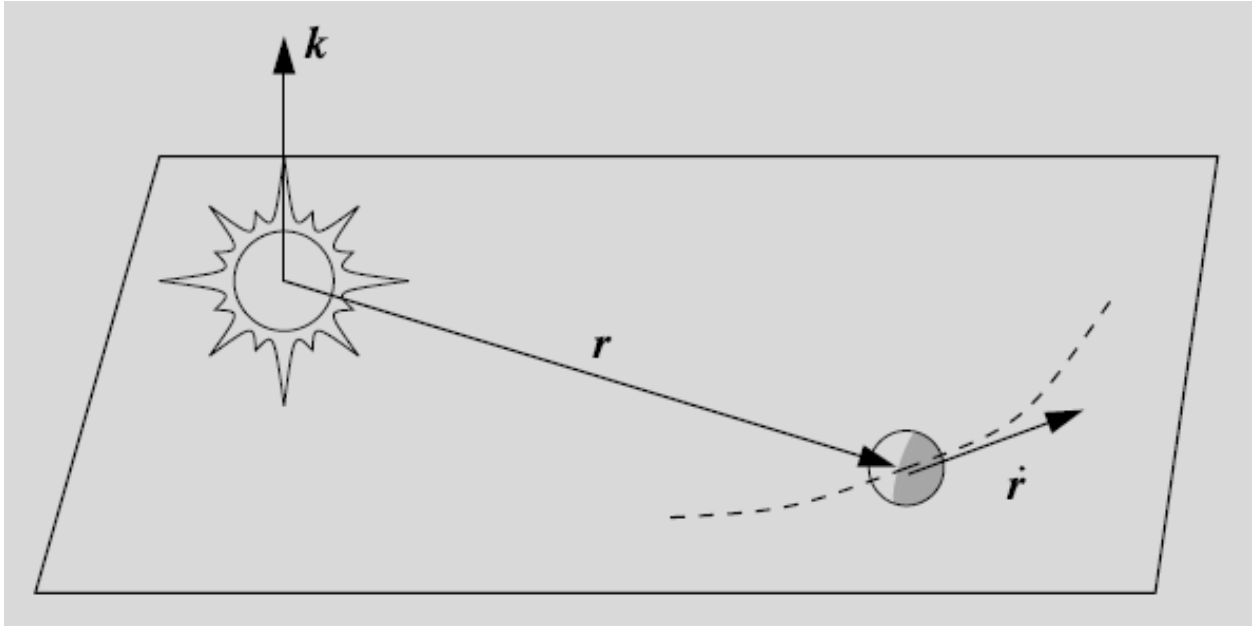


Fig. 10

Derivata în raport cu timpul a distanței  $r$  este egală cu proiecția lui  $\dot{\mathbf{r}}$  în direcția lui  $\mathbf{r}$ ; astfel, folosind proprietățile produsului scalar, obținem

$$\dot{r} = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}\right)$$

ceea ce conduce la

$$(2.9) \quad \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}.$$

Prin urmare,

$$\mathbf{k} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{r\dot{r}}{r^2} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu \mathbf{r}}{r} \right).$$

Produsul vectorial poate fi, de asemenea, exprimat prin  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{k} \times \mathbf{r})$ , deoarece  $\mathbf{k}$  este un vector constant. Prin combinarea ultimelor două ecuații avem  $\frac{d}{dt}(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r}) = 0$  și

$$(2.10) \quad \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r} = \text{const} = -\mu \mathbf{e}.$$

Deoarece  $\mathbf{k}$  este perpendicular pe planul orbital,  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}$  trebuie să se afle în acel plan. Astfel,  $\mathbf{e}$  este o combinație liniară a doi vectori în plan orbital; deci  $\mathbf{e}$  însuși trebuie să fie în planul orbital. Mai târziu vom vedea că  $\mathbf{e}$  indică direcția în care planeta este cea mai apropiată de Soare pe orbita sa. Acest punct se numește periheliu.

O altă componentă constantă este găsită prin efectuarea calculului

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu r \dot{r}}{r^3} = -\frac{\mu \dot{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right).$$

Din moment ce avem  $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right)$ , obținem  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$ , de unde și:

$$(2.11) \quad \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} = \text{const} = h.$$

Aici  $v$  este viteza planetei în raport cu Soarele. Constanta  $h$  se numește integrală energetică; energia totală a planetei este  $m_2 h$ . Nu trebuie să uităm că energia și momentul unghiular depind de cadrul de coordonate utilizat. Aici am folosit un cadru heliocentric, care de fapt este în mișcare accelerată.

Până acum, am găsit doi vectori constanți și un scalar constant. Se pare că avem deja șapte integrale, deci cu una în plus. Dar nu toate aceste constante sunt independente. Vom oferi atenție următoarelor două relații:

$$(2.12) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$$

$$(2.13) \quad \mu^2(e^2 - 1) = 2hk^2$$

unde  $e$  și  $k$  sunt lungimile lui  $\mathbf{e}$  și  $\mathbf{k}$ . Prima ecuație este evidentă din definițiile lui  $\mathbf{e}$  și  $\mathbf{k}$ . Pentru a demonstra (2.13), ridicăm la pătrat ambele părți ale relației (2.10) și obținem

$$\mu^2 e^2 = (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) + \mu^2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + 2(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mu \mathbf{r}}{r}.$$

Întrucât  $\mathbf{k}$  este perpendicular pe  $\dot{\mathbf{r}}$ , lungimea lui  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}$  este  $|\mathbf{k}||\dot{\mathbf{r}}| = kv$  și

$$(\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}}) = k^2 v^2. \text{ Prin urmare, avem } \mu^2 e^2 = k^2 v^2 + \mu^2 + \frac{2\mu}{r} (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}).$$

Ultimul termen conține produsul  $\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}$ , pe care-l putem schimba pentru a obține  $\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}$ . În continuare inversăm ordinea celor doi factori, deoarece produsul vectorial nu este comutativ, trebuie să schimbăm semnul produsului

$$\mu^2(e^2 - 1) = k^2 v^2 - \frac{2\mu}{r} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = k^2 v^2 - \frac{2\mu}{r} k^2 = 2k^2 \left( \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \right) = 2k^2 h.$$



Relațiile (2.12) și (2.13) reduc numărul de integrale independente cu două, așa că mai avem nevoie de una. Constantele pe care le-am obținut până acum descriu dimensiunea, forma și orientarea orbitei, dar nu știm încă unde se află planeta. Pentru a-i repera poziția pe orbită, trebuie să stabilim unde se află planeta la un moment dat  $t = t_0$  sau, alternativ, la ce oră este într-o anumită direcție. Folosim ultima metodă, prin specificarea timpului de trecere la periheliu, *timpul periheliului*  $\tau$ .

### 2.2.2. Ecuația orbitei. Prima lege a lui Kepler

Pentru a găsi forma geometrică a orbitei, derivăm ecuația orbitei. Deoarece  $\mathbf{e}$  este un vector constant care se află în plan orbital, îl alegem ca direcție de referință. Notăm unghiul dintre vectorul de rază  $\mathbf{r}$  și  $\mathbf{e}$  cu  $f$ . Unghiul  $f$  se numește *adevărată anomalie*.<sup>11</sup> Folosind proprietățile produsului scalar obținem  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos f$ . Dar produsul  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$  poate fi evaluat folosind definiția lui  $\mathbf{e}$ :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{\mu} \left( \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{1}{\mu} (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} + \mu r) = -\frac{1}{\mu} (-k^2 + \mu r) = \frac{k^2}{\mu} - r.$$

Echivalând cele două expresii ale lui  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}$  obținem:

$$(2.14) \quad r = \frac{k^2/\mu}{1 + e \cos f}.$$

Aceasta este ecuația generală a unei secțiuni conice în coordonate polare. Magnitudinea lui  $e$  oferă excentricitatea conice:

- $e = 0 \rightarrow$  cerc,
- $0 < e < 1 \rightarrow$  elipsă,
- $e = 1 \rightarrow$  parabolă,
- $e > 1 \rightarrow$  hiperbolă.

Inspectând (2.14), descoperim că  $r$  își atinge valoarea minimă atunci când  $f = 0$ , adică în direcția vectorului  $\mathbf{e}$ . Astfel,  $\mathbf{e}$  indică într-adevăr direcția periheliului. Pornind de la legile lui Newton, am reușit astfel să demonstrăm:

#### Prima lege a lui Kepler:

*„Planeta se mișcă în jurul stelei pe o orbită eliptică, în care steaua reprezintă unul din focare.”*

Fără niciun efort suplimentar, am arătat de asemenea că alte secțiuni conice, cum ar fi parabola și hiperbola, sunt posibile orbite.

---

<sup>11</sup> Nu există nimic fals sau anormal. Unghiurile măsurate din punctul de periheliu sunt numite anomalii pentru a le distinge de longitudinile măsurate în funcție de un alt punct de referință, de obicei echinocțiul vernal.

### 2.2.3. Elemente orbitale

Am derivat un set de integrale convenabile pentru studierea dinamicii mișcării orbitale. Ne orientăm acum spre o altă colecție de constante mai potrivite pentru descrierea geometriei orbitei. Următoarele șase cantități sunt denumite elemente orbitale:

- semiaxa majoră  $a$ ,
- excentricitate  $e$ ,
- înclinația  $i$  (sau  $\iota$ ),
- longitudinea nodului ascendent  $\Omega$ ,
- argumentul periheliului  $\omega$ ,
- timpul periheliului  $\tau$ .

Excentricitatea este obținută ușor ca lungimea vectorului  $\mathbf{e}$ . Din ecuația orbitei (2.14), vedem că parametrul orbitei este  $p = \frac{k^2}{\mu}$ . Dar parametrul unei secțiuni conice este întotdeauna  $a |1 - e^2|$ , de unde rezultă semiaxa majoră, dacă  $e$  și  $k$  sunt cunoscute:

$$(2.15) \quad a = \frac{k^2/\mu}{|1 - e^2|}.$$

Prin aplicarea ecuației (2.13), obținem o relație importantă între dimensiunea orbitei și integrala energetică  $h$ :

$$(2.16) \quad a = \begin{cases} -\mu/2h, & \text{dacă orbita este o elipsă,} \\ \mu/2h, & \text{dacă orbita este o parabolă.} \end{cases}$$

În cazul orbitei eliptice, energia totală și integrala energetică sunt negative. Pentru o orbită hiperbolică,  $h$  este pozitivă; energia cinetică este atât de mare încât particulele pot scăpa din sistem.<sup>12</sup> Parabola, cu  $h = 0$ , este un caz de barieră între orbitele eliptice și hiperbolice. În realitate, orbitele parabolice nu există, deoarece aproape niciun obiect nu poate avea o integrală energetică egală exact cu zero. Cu toate acestea, dacă excentricitatea este foarte apropiată de una<sup>13</sup>, orbita este de obicei considerată parabolică pentru simplificarea calculelor.

Orientarea orbitei este determinată de direcțiile celor doi vectori  $\mathbf{k}$  (considerați perpendicular pe planul orbital) și  $\mathbf{e}$  (îndreptat spre periheliu). Cele trei unghiuri  $i$ ,  $\Omega$  și  $\omega$  conțin aceleași informații. Înclinația  $i$  oferă oblicitatea planului orbital în raport cu un plan de referință fix. Pentru corpurile din sistemul solar, planul de referință este de obicei ecliptica<sup>14</sup>. Pentru obiectele care se mișcă în mod obișnuit, adică în sens invers acelor de

---

<sup>12</sup> Mai corect, să se retragă fără nicio limitare.

<sup>13</sup> Acesta lucru este valabil în cazul multor comete.

<sup>14</sup> Cercul mare al sferei cerești, care rezultă din intersecția acesteia cu un plan paralel cu planul ecliptic. Acesta este planul de mișcare al Pământului în jurul Soarelui și este format de direcția ce unește centrul Soarelui cu centrul de greutate Pământ-Lună și direcția de mișcare a acestui centru în jurul Soarelui.

ceasornic, înclinația este în intervalul  $[0^\circ, 90^\circ]$ . Pentru orbitele retrograde (mișcare în sensul acelor de ceasornic), înclinația este în intervalul  $(90^\circ, 180^\circ]$ . De exemplu, înclinația cometei Halley este de  $162^\circ$ , ceea ce înseamnă că mișcarea este retrogradă și unghiul dintre planul orbital și ecliptica este de  $180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$ . A se vedea (Stephenson, 1994).

Lungimea nodului ascendent,  $\Omega$ , indică locul în care obiectul traversează ecliptica de la sud la nord. Se măsoară în sens invers acelor de ceasornic, din echinocțiul vernal. Elementele orbitale  $i$  și  $\Omega$  determină împreună orientarea planului orbital și acestea corespund direcției  $\mathbf{k}$ , adică reprezintă rapoartele componentelor sale. Argumentul periheliului  $\omega$  dă direcția periheliului, măsurată din nodul ascendent în direcția mișcării. Aceeași informație este conținută în direcția lui  $\mathbf{e}$ . Adesea se folosește un alt unghi, *longitudinea periheliului*  $\varpi$  în loc de  $\omega$ , definit prin:

$$(2.17) \quad \varpi = \Omega + \omega.$$

Acesta este un unghi destul de neobișnuit, deoarece este măsurat parțial de-a lungul eclipticii, parțial de-a lungul planului orbital. Cu toate acestea, este adesea mai practic decât argumentul periheliului, deoarece este bine definit chiar și atunci când înclinația este aproape de zero, caz în care direcția nodului ascendent devine nedeterminată. Am presupus până în acest moment că fiecare planetă formează un sistem separat de două corpuri, cu Soarele. În realitate, planetele interferează între ele, influențând astfel orbitele. Totuși, mișcările lor nu se abat semnificativ față de forma secțiunilor conice amintite și putem folosi elementele orbitale pentru a descrie orbitele. Dar elementele acestea nu mai sunt constante, ele variază lent cu timpul. Mai mult, interpretarea lor geometrică nu mai este la fel de evidentă.

Astfel de elemente sunt *elemente oscilante* care ar descrie orbita dacă toate perturbațiile ar dispărea brusc. Pot fi utilizate pentru a găsi pozițiile și viteza planetelor exact ca și cum elementele ar fi constante. Singura diferență este că trebuie să folosim diferite elemente pentru fiecare moment. Tabelul din Fig. 11 oferă elementele orbitale medii ale planetelor pentru epoca J2000.0, precum și derivatele lor de ordinul I. Pe lângă aceste variații seculare, elementele orbitale suferă de tulburări periodice, care nu sunt incluse în tabel. Astfel, doar aceste poziții pot fi calculate elemente redactate. În locul perioadei de periheliu, tabelul dă longitudinea medie (mijlocie)

$$(2.18) \quad L = M + \omega + \Omega,$$

---

Ecliptica este deci traiectoria anuală aparentă a Soarelui printre constelații. Planul ecliptic este înclinat actualmente cu un unghi de  $23,4^\circ$  față de planul ecuatorului ceresc, acest unghi schimbându-se datorită fenomenelor de precesie și nutație.

de unde putem obține direct anomalia medie<sup>15</sup>  $M$ .

MERCUR	$\alpha = 0,3870983 + 0,00000066T$	$e = 0,20563069 + 0,00002527T$
	$i = 7,00487^\circ - 23,51''T$	$\Omega = 48,33167^\circ - 446,30''T$
	$\varpi = 77,45645^\circ + 573,57''T$	$L = 252,25084^\circ + 4,092338880^\circ t$
VENUS	$\alpha = 0,72333199 + 0,00000092T$	$e = 0,00677323 - 0,00004938T$
	$i = 3,39471^\circ - 2,86''T$	$\Omega = 76,68069^\circ - 996,89''T$
	$\varpi = 131,53298^\circ - 108,80''T$	$L = 181,97973^\circ + 1,60213047^\circ t$
PĂMÂNT + LUNĂ	$\alpha = 1,00000011 - 0,00000005T$	$e = 0,01671022 - 0,00003804T$
	$i = 0,00005^\circ - 49,94''T$	$\Omega = -11,26064^\circ - 18\,228,25''T$
	$\varpi = 102,94719^\circ + 1198,28''T$	$L = 100,46435^\circ + 0,98560910^\circ t$
MARTE	$\alpha = 1,52366231 - 0,00007221T$	$e = 0,09341233 + 0,00011902T$
	$i = 1,85061^\circ - 25,47''T$	$\Omega = 49,57854^\circ - 1020,19''T$
	$\varpi = 336,04084^\circ + 1560,78''T$	$L = 355,45332^\circ + 0,52403304^\circ t$
JUPITER	$\alpha = 5,20336301 + 0,00060737T$	$e = 0,04839266 - 0,00012880T$
	$i = 1,60530^\circ - 4,15''T$	$\Omega = 100,55615^\circ + 1217,17''T$
	$\varpi = 14,75385^\circ + 839,93''T$	$L = 34,40438^\circ + 0,08308676^\circ t$
SATURN	$\alpha = 9,53707032 - 0,00301530T$	$e = 0,05415060 - 0,00036762T$
	$i = 2,48446^\circ + 6,11''T$	$\Omega = 113,71504^\circ - 1591,05''T$
	$\varpi = 92,43194^\circ - 1948,89''T$	$L = 49,94432^\circ + 0,03346063^\circ t$
URANUS	$\alpha = 19,19126393 + 0,00152025T$	$e = 0,04716771 - 0,00019150T$
	$i = 0,76986^\circ - 2,09''T$	$\Omega = 74,22988^\circ + 1681,40''T$
	$\varpi = 170,96424^\circ + 1312,56''T$	$L = 313,23218^\circ + 0,01173129^\circ t$
NEPTUN	$\alpha = 30,06896348 - 0,00125196T$	$e = 0,00858587 + 0,00002541T$
	$i = 1,76917^\circ - 3,64''T$	$\Omega = 131,72169^\circ - 151,25''T$
	$\varpi = 44,97135^\circ - 844,43''T$	$L = 304,88003^\circ + 0,00598106^\circ t$

Fig. 11

## 2.2.4. A doua și a treia lege a lui Kepler

Vectorul de rază al unei planete în coordonate polare este

$$(2.19) \quad \mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r,$$

unde  $\hat{\mathbf{e}}_r$  este un vector unitar paralel cu  $\mathbf{r}$  (Fig. 12).

<sup>15</sup> Anomalia medie este unul dintre cei trei parametri unghiulari descriind mișcarea corpurilor pe orbite eliptice, relativ la poziție și timp pentru ele.

Dacă planeta se mișcă cu viteza unghiulară  $f$ , direcția acestui vector unitar se schimbă la aceeași rată:

$$(2.20) \quad \dot{\hat{e}}_r = f \hat{e}_f,$$

unde  $\hat{e}_f$  este un vector unitar perpendicular cu  $\hat{e}_r$ . Viteza planetei se găsește din derivata în raport cu timpul a ecuației (2.19)

$$(2.21) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r = \dot{r} \hat{e}_r + f \hat{e}_f.$$

Momentul unghiular  $\mathbf{k}$  poate fi acum evaluat folosind (2.19) și (2.21):

$$(2.22) \quad \mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \dot{f} \hat{e}_z,$$

unde  $\hat{e}_z$  este un vector unitar perpendicular pe planul orbital. Magnitudinea lui  $\mathbf{k}$  este

$$(2.23) \quad k = r^2 \dot{f}.$$

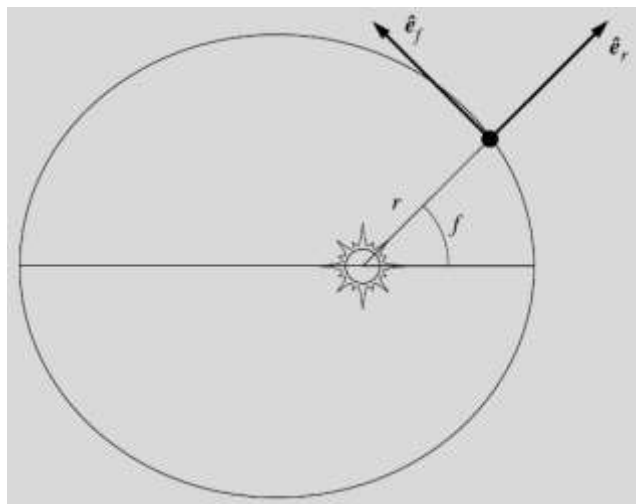


Fig. 12

Viteza de suprafață a unei planete înseamnă zona măturată de vectorul de rază per unitatea de timp. Aceasta este în mod evident derivata în raport cu timpul a unei anumite zone, deci să o notăm  $\dot{A}$ . În ceea ce privește distanța  $r$  și anomalia adevărată  $f$ , viteza de suprafață este

$$(2.24) \quad \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{f}.$$

Comparând acest rezultat cu lungimea lui  $\mathbf{k}$  din (2.23), aflăm că

$$(2.25) \quad \dot{A} = \frac{1}{2} k.$$

Deoarece  $\mathbf{k}$  este constantă și viteza de suprafață trebuie să fie constantă. De aici avem:

### A doua lege a lui Kepler

*„Vectorul de rază care unește planeta cu steaua mătură arii egale în perioade de timp egale.”<sup>16</sup>*

Deoarece distanța Soare-planetă variază, viteza orbitală trebuie să varieze și ea. Din cea de-a doua lege a lui Kepler rezultă că o planetă trebuie să se miște mai repede atunci când este mai apropiată de Soare (aproape de periheliu). Mișcarea este mai lentă atunci când planeta este mai îndepărtată de Soare, la afeliu. Putem scrie (2.25) sub forma

<sup>16</sup> O formulare echivalentă ar fi: Viteza areolară a vectorului de rază e constantă. Viteza areolară este, în fizică, o mărime vectorială care reprezintă aria măturată în unitatea de timp de vectorul de rază al unui punct material aflat în mișcare pe o traiectorie curbilinie.

$$(2.26) \quad dA = \frac{1}{2} k dt,$$

integrând pe o perioadă completă:

$$(2.27) \quad \int_{\text{orbita eliptică}} dA = \frac{1}{2} k \int_0^P dt,$$

unde  $P$  este perioada orbitală; din moment ce aria elipsei este

$$(2.28) \quad \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2},$$

iar  $a$  și  $b$  sunt semi-axa majoră și semi-axa minoră și  $e$  excentricitatea, obținem în continuare

$$(2.29) \quad \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{2} k P.$$

Pentru a găsi lungimea lui  $k$ , substituim integrala energetică  $h$  ca funcție de semi-axa majoră, adică (2.16) în (2.13) pentru a obține

$$(2.30) \quad k = \sqrt{G(m_1 + m_2)a(1 - e^2)}.$$

Când acest lucru este înlocuit în (2.29) avem

$$(2.31) \quad P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Aceasta este forma exactă a celei de-a treia legi a lui Kepler, rezultată din legile lui Newton. Versiunea originală a fost

### A treia lege a lui Kepler:

*„Raportul cuburilor semi-axelor majore ale orbitelor a două planete este egal cu raportul pătratelor perioadelor lor orbitale.”*

Din nefericire, observăm că, în această formă, legea nu este tocmai valabilă, chiar și pentru planetele sistemului solar, deoarece masele proprii influențează perioadele lor orbitale. Totuși, erorile datorate ignorării acestui efect sunt foarte mici.

A treia lege a lui Kepler devine remarcabil de simplă dacă exprimăm distanțele în unități astronomice<sup>17</sup> –  $UA$  – timpul specific în ani siderali<sup>18</sup> și masele în mase solare –  $M_{\odot}$ . Atunci  $G = 4\pi^2$  și

$$(2.32) \quad a^3 = (m_1 + m_2) P^2.$$

<sup>17</sup> O unitate astronomică ( $UA$ ) este distanța medie dintre Pământ și Soare, care este, aproximativ, 150 de milioane de kilometri. Unitățile astronomice sunt de obicei folosite pentru a măsura distanțele în cadrul sistemului nostru solar.

<sup>18</sup> Abrevierea este  $a$ , nu trebuie confundată cu semi-axa majoră, notată cu simbolul oarecum similar  $a$ .

Masele obiectelor ce orbitează în jurul Soarelui pot fi ignorate (cu excepția celor mai mari planete) și avem legea inițială  $P^2 = a^3$ . Aceasta este foarte utilă pentru determinarea distanțelor diferitelor obiecte ale căror perioade au fost observate. Pentru distanțe absolute trebuie să măsurăm cel puțin o distanță în metri pentru a găsi lungimea unei  $UA$ . Anterior, s-a folosit triangularea pentru a măsura paralaxa Soarelui sau a unui corp mic, precum Eros, care se apropie foarte mult de Pământ. În zilele noastre, radio telescoapele sunt folosite ca radar pentru a măsura foarte precis, de exemplu, distanța până la Venus. Deoarece modificările valorii unei  $UA$  au modificat și toate celelalte distanțe, *Uniunea Astronomică Internațională (I.A.U.)* a decis în 1968 să adopte valoarea  $1 UA = 1.496000 \times 10^{11} m$ . Semi-axa majoră a orbitei Pământului era atunci ușor peste o  $UA$ . Dar constantele tind să se schimbe. Deci, după 1984, unitatea astronomică are o nouă valoare

$$1 UA = 1.49597870 \times 10^{11} m.$$

Aceasta corespunde razei unui obiect care are aceeași perioadă orbitală ca Pământul, dar care nu are nicio masă. Deoarece și masa Pământului afectează perioada sa orbitală, semi-axa majoră reală a Pământului trebuie să fie puțin mai mare decât o unitate astronomică. O altă aplicație importantă a celei de-a treia legi a lui Kepler este determinarea maselor. Prin observarea perioadei orbitale a unui satelit natural sau artificial, masa corpului central poate fi obținută imediat. Aceeași metodă este folosită pentru a determina masele unei stele binare. A se consulta (Arnold, 1989).

Deși valorile  $UA$  și  $anul$  sunt cunoscute cu exactitate în SI<sup>19</sup>, constanta gravitațională este cunoscută doar aproximativ. Observațiile astronomice dau produsul  $G(m_1 + m_2)$ , dar nu există nicio modalitate de a face diferența între contribuțiile constantei gravitaționale și cele ale maselor. Constanta gravitațională trebuie măsurată în laborator, iar acest lucru este foarte dificil din cauza slăbiciunii gravitației. Prin urmare, dacă este necesară o precizie mai mare de 2, 3 cifre, iar unitățile SI nu pot fi utilizate. În schimb, trebuie să folosim masa solară ca unitate de masă (sau, ca alt exemplu, masa Pământului, după ce  $Gm_{\oplus}$  a fost determinată din observațiile orbitelor satelitului).

## 2.3. Problema celor trei corpuri

### 2.3.1. Introducere în problematică

Până acum am discutat despre sistemele formate doar din două corpuri. De fapt, acesta, este cel mai complex sistem pentru care se cunoaște o soluție completă. Ecuațiile mișcării se pot însă generaliza cu ușurință. Ca în (2.5) obținem ecuația mișcării pentru corpul  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ :

---

<sup>19</sup> Sistemul internațional de unități.

$$(2.33) \quad \ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_{i=1}^n Gm_i \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3}, i \neq k,$$

unde  $m_i$  este masa corpului  $i$  și  $\mathbf{r}_i$  e vectorul razei sale. În partea dreaptă a ecuației avem acum forța gravitațională totală datorată tuturor celorlalte obiecte, în locul forței unui singur corp. Dacă există mai mult de două corpuri, aceste ecuații nu pot fi rezolvate analitic într-o formă convenabilă. Singurele integrale care pot fi derivate cu ușurință în cazul general sunt energia totală, impulsul total și momentul unghiular total.

Dacă vectorii de rază și viteză ai tuturor corpurilor sunt cunoscuți la un anumit moment dat, pozițiile pot fi calculate numeric din ecuațiile mișcării. De exemplu, pozițiile planetare necesare pentru anuarele astronomice sunt calculate prin integrarea numerică a ecuațiilor.

O altă metodă poate fi aplicată dacă gravitația unui corp domină ca în sistemul solar. Orbitele planetare pot fi apoi calculate ca într-un sistem cu două corpuri, iar efectele altor planete sunt luate în considerare ca mici perturbații.

Problema celor trei corpuri este un caz special, studiat pe scară largă. Este format din două corpuri masive sau primare, care se deplasează pe orbite circulare, unul în jurul celuilalt și un al treilea corp fără masă, care se mișcă în același plan cu cele primare. Acest obiect mic nu deranjează în niciun fel mișcarea celorlalte. Astfel orbitele corpurilor masive sunt cât se poate de simple, iar pozițiile lor sunt ușor de calculat pentru toate momentele. Problema care impune soluționare este găsirea orbitei celui de-al treilea corp. Se dovedește, în final, că nu există o expresie finită pentru această orbită.

Istoric vorbind, prima problemă specifică cu trei corpuri care a fost studiată intens a fost cea care implică Luna, Pământul și Soarele. A se vedea (Aarseth, 2003). Într-un sens modern, extins, o problemă cu trei corpuri este orice problemă de mecanică clasică sau mecanică cuantică ce modelează mișcarea a trei particule.

Matematicianul finlandez *Karl Frithiof Sundman* (1873 – 1949) a reușit să arate că există o soluție și să obțină o extindere în serie a orbitei. Soluția este serie a puterilor  $t^{1/3}$ . Această serie converge pentru toate valorile reale  $t$ , cu excepția cazului în care condițiilor inițiale sunt corespunzătoare momentului unghiular egal cu zero. În practică, ultima restricție este nesemnificativă, deoarece aceste condiții inițiale sunt rare, având *măsura Lebesgue*<sup>20</sup> zero.

Seria converge atât de încet încât nu are niciun folos practic, din punct de vedere astronomic, dar ca rezultat matematic este remarcabil, deoarece mulți matematicieni au

---

<sup>20</sup> În teoria măsurii, o ramură a matematicii, măsura Lebesgue este modalitatea standard de a atribui o măsură subseturilor spațiului euclidian  $n$ -dimensional. Pentru  $n = 1, 2$  sau  $3$ , aceasta coincide cu măsura standard a lungimii, ariei sau volumului.



încercat de mult timp să atace problema fără succes. În anul 1930, *David Belorizsky* a calculat implicațiile matematice dacă seria lui Sundman ar fi folosită pentru interpretarea observațiilor astronomice, iar concluzia lui este că aceste calcule ar necesita, în cel mai favorabil caz, cel puțin  $10^{8\,000\,000}$  de termeni.

### 2.3.2. Model matematic

Enunțul problemei celor trei corpuri poate fi redat în termeni matematici de ecuațiile newtoniene ale mișcării pentru pozițiile vectorului  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  ale celor trei corpuri care interacționează gravitațional, având masele  $m_i$ :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3}.\end{aligned}$$

Acesta este un sistem de 9 ecuații diferențiale de ordinul II. Problema poate fi redactată în mod echivalent și în *formalismul hamiltonian*<sup>21</sup>, caz în care este descrisă de un set de 18 ecuații diferențiale de ordinul I, una pentru fiecare componentă a pozițiilor  $\mathbf{r}_i$  și impulsul  $\boldsymbol{\rho}_i$

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\rho}_i}, \quad \frac{d\boldsymbol{\rho}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i},$$

unde  $\mathcal{H}$  este Hamiltonianul<sup>22</sup>:

$$\mathcal{H} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} - \frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{\boldsymbol{\rho}_1^2}{2m_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}_2^2}{2m_2} + \frac{\boldsymbol{\rho}_3^2}{2m_3}$$

adică, în cazul nostru  $\mathcal{H}$  este energia totală, gravitațională și cinetică, a sistemului.

Soluții în cazuri particulare

Problema celor trei corpuri are câteva soluții speciale, interesante. În 1767, Leonhard Euler a găsit trei familii de soluții periodice în care cele trei mase sunt coliniare în fiecare moment. În 1772, Lagrange a găsit o familie de soluții în care cele trei corpuri formează un triunghi echilateral în fiecare moment. Împreună cu soluțiile coliniare ale lui Euler, aceste soluții formează configurația centrală pentru problema cu trei corpuri. Aceste soluții sunt valabile pentru orice raporturi de masă, iar corpurile se deplasează pe

<sup>21</sup> Mecanica hamiltoniană este o reformulare echivalentă, dar mai abstractă, a teoriei mecanicii clasice. Istoric, a contribuit la formularea mecanicii statistice și a mecanicii cuantice.

<sup>22</sup> Orice funcție  $\mathcal{H}$  netă de valoare reală pe un colector symplectic poate fi utilizată pentru a defini un sistem hamiltonian. Funcția  $\mathcal{H}$  este cunoscută sub numele de *Hamiltonian* sau *funcția de energie*.

elipsele kepleriene. Acestea sunt singurele soluții cunoscute pentru care există formule analitice explicite.

Se poate arăta că în anumite puncte, al treilea corp poate rămâne în repaus, unde corpurile primare sunt considerate plan de referință. Există cinci astfel de puncte, cunoscute sub denumirea de puncte Lagrange  $L_1, \dots, L_5$ . Trei dintre ele sunt pe dreapta determinată de corpurile primare. Aceste puncte sunt instabile, dacă un corp este perturbat, în oricare dintre aceste puncte, acesta va scăpa din orbită. Celelalte două puncte, pe de altă parte, sunt stabile. Aceste puncte împreună cu corpurile primare formează triunghiuri echilaterale. Unii asteroizi au fost observați în jurul

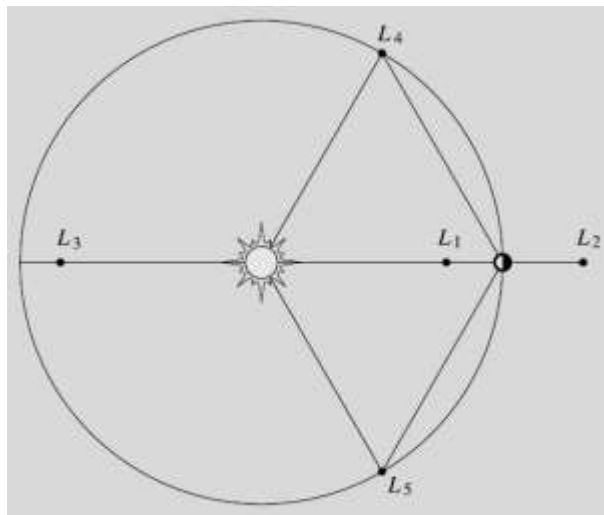


Fig. 13

punctelor Lagrange  $L_4$  și  $L_5$  ale lui Jupiter. Primii dintre ei au fost numiți după eroi ai războiului troian, și astfel aceștia sunt cunoscuți sub numele de *asteroizi troieni*. Ei se deplasează în jurul punctelor Lagrange și pot călători, de fapt, destul de departe de ele, dar nu pot scăpa, din punct de vedere gravitațional. Ulterior, asteroizi troieni similari au fost găsiți și pe orbitele altor planete. A se consulta (Curtis, 2009).

## 2.4. Calcule orbitale

### 2.4.1. Determinarea orbitei

Mecanica cerească are două sarcini foarte practice: determinarea elementelor orbitale din observații și prezicerea pozițiilor corpurilor cerești cu elemente cunoscute. Orbitele planetare sunt deja cunoscute foarte precis, dar comete noi și corpuri mici se găsesc frecvent, determinarea orbitei lor fiind o provocare pentru specialiști.

Primele metode practice de determinare a orbitei au fost dezvoltate de *Johann Karl Friedrich Gauss* (1777 – 1855) la începutul secolului al XIX-lea. Până atunci au fost descoperite primele planete minore și, datorită metodei determinării orbitelor a lui Gauss, au putut fi găsite și observate în orice moment.

Cel puțin trei observații sunt necesare pentru calcularea elementelor orbitale. Direcțiile se măsoară de obicei din fotografiile făcute la câteva nopți diferență una de alta. Folosind aceste direcții, este posibil să găsim pozițiile absolute corespunzătoare (componente ale vectorului de rază). Pentru a putea face acest lucru, avem nevoie de câteva restricții suplimentare asupra orbitei. Trebuie să presupunem că obiectul se mișcă de-a lungul unei secțiuni conice situate într-un plan care trece prin Soare. Când sunt

cunoscuți cei trei vectori de rază, elipsa (sau o altă secțiune conică) care trece prin aceste trei puncte poate fi determinată. În practică, sunt utilizate mai multe observații. Elementele determinate sunt mai precise dacă există mai multe observații și dacă acoperă orbita cât mai complet.

Deși calculele pentru determinarea orbitei nu sunt fundamentate matematic, sunt relativ lungi și laborioase. Mai multe metode pot fi găsite în manualele de mecanică cerească. A se consulta (Battin, 1999).

### 2.4.2. Poziția pe orbită

Deși știm deja totul despre geometria orbitei, încă nu putem găsi planeta la un moment dat, deoarece nu cunoaștem vectorul de rază  $\mathbf{r}$  ca funcție a timpului. Variabila din ecuația orbitei este un unghi, anomalia adevărată  $f$ , măsurată la periheliu. Din cea de-a doua lege a lui Kepler rezultă că  $f$  nu poate crește la un ritm constant cu timpul. Prin urmare, avem nevoie de câteva calcule înainte de a găsi vectorul de rază la un moment dat. Vectorul de rază poate fi exprimat ca:

$$(2.34) \quad \mathbf{r} = a(\cos E - e)\hat{\mathbf{i}} + b \sin E \hat{\mathbf{j}},$$

unde  $\hat{\mathbf{i}}$  și  $\hat{\mathbf{j}}$  sunt vectori de unitate paraleli cu axa majoră, respectiv axa minoră. Unghiul  $E$  este anomalia excentrică. Multe formule de mișcare eliptică devin foarte simple dacă fie timpul, fie anomalia adevărată sunt înlocuite de anomalia excentrică. Ca exemplu, luăm pătratul (2.34) pentru a găsi distanța de la Soare:

$$\begin{aligned} r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \\ &= a^2(\cos E - e)^2 + b^2 \sin^2 E \\ &= a^2[(\cos E - e)^2 + (1 - e^2)(1 - \cos^2 E)] \\ &= a^2(1 - 2e \cos E + e^2 \cos^2 E) \end{aligned}$$

așadar,

$$(2.35) \quad r = a(1 - e \cos E).$$

Următoarea noastră problemă este să găsim o modalitate prin care să calculăm  $E$  la un moment dat. Conform celei de-a doua legi a lui Kepler, viteza de suprafață este constantă. Avem relația

$$(2.36) \quad A = \pi ab \frac{t - \tau}{P},$$

unde  $t - \tau$  este timpul scurs de la periheliu, iar  $P$  este perioada orbitală. Dar aria unei părți dintr-o elipsă se obține prin reducerea zonei corespunzătoare cercului circumscris de raportul axial<sup>23</sup>  $\frac{b}{a}$ .

---

<sup>23</sup> Matematic vorbind, o elipsă este o transformare afină unui cerc.

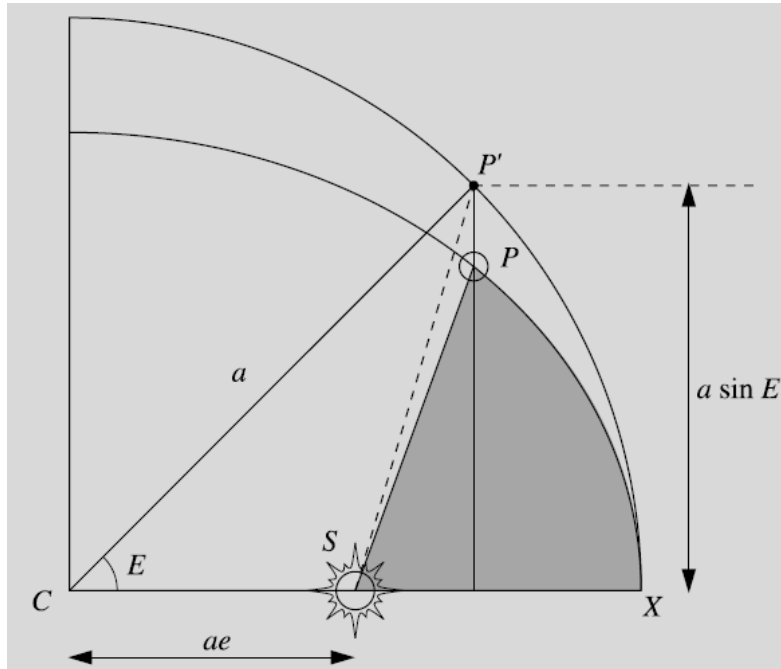


Fig. 14

Aria lui SPX din figura alăturată este:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b}{a} (\mathcal{A}_{SP'X}) = \frac{b}{a} (\mathcal{A}_{CP'S}) \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{1}{2} a \cdot aE - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E \right) \\ &= \frac{1}{2} ab(E - e \sin E). \end{aligned}$$

Egalând aceste două expresii pentru aria  $A$ , obținem celebra ecuație a lui Kepler

$$(2.37) \quad E - e \sin e = M,$$

unde

$$(2.38) \quad M = \frac{2\pi}{p} (t - \tau)$$

este anomalia medie a planetei la momentul  $t$ . Aceasta crește

la o rată constantă cu timpul și indică unde ar fi planeta dacă s-ar muta pe o orbită circulară cu raza  $a$ . Pentru orbitele circulare toate cele trei anomalii  $f$ ,  $E$  și  $M$  sunt întotdeauna egale.

Dacă cunoaștem perioada orbitală și timpul scurs de la periheliu, putem folosi (2.38) pentru a găsi anomalia medie. În continuare, trebuie să obținem anomalia excentrică din ecuația lui Kepler (2.37). În cele din urmă, vectorul de rază este dat de (2.35). Deoarece componentele lui  $\mathbf{r}$  exprimate în termenii adevăratei anomalii sunt  $r \cos f$  și  $r \sin f$ , găsim

$$(2.39) \quad \cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin f = \frac{b \sin E}{r} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

Acestea determină adevărata anomalie, dacă ar fi de interes. Acum știm poziția în plan orbital. Aceasta de obicei trebuie transformată într-un alt cadru de referință. De exemplu, este posibil să dorim cunoașterea longitudinii și a latitudinii ecliptice, care pot fi utilizate ulterior pentru a găsi ascensia dreaptă și declinația sferei. Aceste transformări aparțin tărâmului astronomiei sferice.

### 2.4.3. Viteza de evadare

Dacă un obiect se mișcă destul de repede, acesta poate scăpa de câmpul gravitațional al corpului central (mai precis: câmpul se extinde până la infinit, deci obiectul nu scapă cu adevărat, dar este capabil să se retragă fără nicio limită). Dacă

obiectul care scapă are viteza minimă ce permite evadarea, acesta și-ar pierde toată viteza, la infinit (Fig. 15). Energia sa cinetică este zero, deoarece  $v = 0$ , iar energia potențială este de asemenea zero, deoarece distanța  $r$  este infinită. La distanță infinită, energia totală, precum și integrala energetică  $h$  sunt zero. Legea conservării energiei<sup>24</sup> oferă, apoi:

$$(2.40) \quad \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{R} = 0,$$

unde  $R$  este distanța inițială la care obiectul se deplasează cu viteza  $v$ . Din aceasta putem deduce viteza de evadare:

$$(2.41) \quad v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{R}} = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{R}}.$$

De exemplu, pe suprafața Pământului,  $v_e$  este de aproximativ  $11 \text{ km/s}$  (dacă  $m_2 \ll m_{\oplus}$ ).

*Un proiectil este aruncat orizontal de pe munte pe o planetă fără atmosferă. Dacă viteza inițială este mică, orbita este o elipsă al cărei pericentru<sup>25</sup> se află în interiorul planetei, iar proiectilul va lovi suprafața planetei. Odată cu creșterea vitezei, pericentrul se deplasează în afara planetei. Când viteza inițială este  $v_c$ , orbita este circulară. Dacă viteza crește în continuare, excentricitatea orbitei crește din nou, iar pericentrul se află la înălțimea muntelui. Apocentrul<sup>26</sup> se deplasează mai departe până când orbita devine parabolică, iar viteza inițială este  $v_e$ . La viteze și mai mari, orbita devine hiperbolică.*

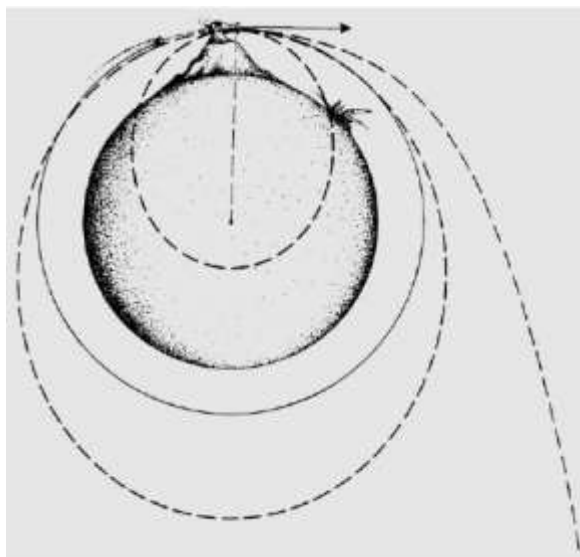


Fig. 15

Viteza de evadare poate fi exprimată și folosind viteza orbitală a unei orbite circulare. Perioada orbitală  $P$  în funcție de raza  $R$  a orbitei și viteza orbitală  $v_c$  este

$$P = \frac{2\pi R}{v_c}.$$

<sup>24</sup> Legea conservării energiei afirmă că energia totală a unui sistem fizic izolat rămâne nemodificată în timp, indiferent de natura proceselor interne ce au loc în sistem.

<sup>25</sup> Punct de pe orbita unui corp ceresc situat la cea mai mică depărtare de corpul ceresc central în raport cu care se face mișcarea.

<sup>26</sup> Punct al orbitei unui corp ceresc unde acesta se află la cea mai mare distanță de corpul central în jurul căruia se mișcă.

Înlocuirea în cea de-a treia lege a lui Kepler oferă:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{v_c^2} = \frac{4\pi^2 R^3}{G(m_1 + m_2)},$$

din aceasta putem afla viteza  $v_c$  într-o orbită circulară de rază  $R$ :

$$(2.42) \quad v_c = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R}}.$$

Comparând acest lucru cu expresia (2.41) a vitezei de evadare, observăm că:

$$(2.43) \quad v_e = \sqrt{2}v_c.$$

## 2.5. Teorema virialului

Dacă un sistem este format din mai mult de două corpuri, ecuațiile mișcării nu pot fi, în general, rezolvate analitic. Având în vedere unele valori inițiale, orbitele pot fi, desigur, găsite prin integrare numerică, dar acest lucru nu ne spune nimic despre proprietățile generale ale orbitelor posibile. Singurele constante de integrare disponibile pentru un sistem arbitrar sunt impulsul total, impulsul unghiular și energia. Pe lângă acestea, este posibil să se obțină, prin derivare, anumite rezultate statistice, cum ar fi teorema virialului. Aceasta se referă numai la medii de timp, dar nu spune nimic despre starea reală a sistemului la un moment specificat. A se vedea (Rose, 1998). Să presupunem că avem un sistem de  $n$  puncte de masă  $m_i$  cu vectori de rază  $\mathbf{r}_i$  și viteze  $\dot{\mathbf{r}}_i$ . Definim o cantitate  $A$  („virialul” sistemului) după cum urmează:

$$(2.44) \quad A = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i.$$

derivând în raport cu timpul, obținem

$$(2.45) \quad \dot{A} = \sum_{i=1}^n (m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i + m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{r}_i).$$

Primul termen este egal cu dublul energiei cinetice a particulei  $i$ , iar al doilea termen conține un factor  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  care, în conformitate cu legile lui Newton, este egal cu forța aplicată particulei  $i$ . Astfel avem

$$(2.46) \quad \dot{A} = 2T + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i,$$

unde  $T$  este energia cinetică totală a sistemului. Dacă  $\langle x \rangle$  indică media timpului a lui  $x$  în intervalul de timp  $[0, \tau]$ , rezultă:

$$(2.47) \quad \langle \dot{A} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \dot{A} dt = \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle.$$

Dacă sistemul rămâne delimitat, adică niciuna dintre particule nu scapă, toate aceste  $\mathbf{r}_i$ -uri, precum și toate vitezele vor rămâne limitate. Într-un astfel de caz,  $A$  nu crește în mod nelimitat, iar integrala ecuației anterioare rămâne finită. Când intervalul de timp devine mai lung ( $\tau \rightarrow \infty$ ),  $\dot{A} \rightarrow 0$  și obținem:

$$(2.48) \quad \langle 2T \rangle + \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \right\rangle = 0.$$

Aceasta este forma generală a teoremei virialului. Dacă forțele sunt datorate doar gravitației reciproce, acestea au expresiile

$$(2.49) \quad \mathbf{F}_i = -Gm_i \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3},$$

unde  $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ . Ultimul termen în teorema virialului este acum

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \mathbf{r}_i = -G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$

unde ultima formă este obținută prin rearanjarea sumei duble, combinând termenii

$$m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot \mathbf{r}_i$$

și

$$m_j m_i \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ji}^3} \cdot \mathbf{r}_j = m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} \cdot (-\mathbf{r}_j).$$

Din moment ce  $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = r_{ij}^2$ , suma se reduce la

$$G \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = U,$$

unde  $U$  este energia potențială a sistemului. Astfel, teorema virialului, devine

$$(2.50) \quad \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle.$$

## 2.6. Aplicații

Pentru a sublinia și mai mult importanța matematicii în rezolvarea problemelor de natura astronomică, în această secțiune propun câteva aplicații practice ale rezultatelor pe care le-am demonstrat până acum.

**I. Să se afle elementele orbitale ale lui Jupiter la data de 23 august 1996.**

Soluționare:

Data după calendarul Iulian este de 2.450.319, deci din (2.17),  $T = -0.0336$ . Substituind acest lucru în expresiile conținute în tabelul din Fig. 12, obținem:

$$a = 5,2033$$

$$e = 0,0484$$

$$i = 1,3053^\circ$$

$$\Omega = 100,5448^\circ$$

$$\varpi = 14,7460^\circ$$

$$L = -67,460^\circ = 292,540^\circ$$

Folosind acestea, putem calcula argumentul periheliului și anomalia medie:

$$\omega = \varpi - \Omega = -85,7988^\circ = 274,201^\circ,$$

$$M = L - \varpi = -82,2060^\circ = 277,794^\circ.$$

**II. Să considerăm un univers gol, două roci de câte 5 kg orbitează reciproc la o distanță de 1 m. Care este perioada orbitală?**

Soluționare:

Perioada este obținută folosind a treia lege a lui Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} = \frac{4\pi^2 1}{6,67 \times 10^{-11} (5 + 5)} s^2 = 5,9 \times 10^{10} s^2,$$

deci

$$P = 243\,000\,s = 2,8 \text{ zile.}$$

**III. Perioada orbitală a satelitului marțian Phobos este de 0,3189 zile și raza orbitei de 9370 km. Care este masa lui Marte?**

Soluționare:

Mai întâi schimbăm în unități de măsură mai adecvate:

$$P = 0,3189 \text{ zile} = 0,0008731 \text{ ani siderali},$$

$$a = 9370 \text{ km} = 6,2634 \times 10^{-5} \text{ UA.}$$

Ecuția (2.32) oferă rezultatul:

$$m_{\text{Marte}} = \frac{a^3}{P^2} = 0,000000322 M_\odot (\approx 0,107 M_\oplus)$$

(este sigur să presupunem că  $m_{\text{Phobos}} \ll m_{\text{Marte}}$ )



**IV. Să se afle formulele pentru longitudinea și latitudinea heliocentrică ale unei planete, având în vedere elementele sale orbitale și adevărata anomalie.**

Soluționare:

Aplicăm formula sinusului, asupra triunghiului sferic ce reiese din ipoteza problemei

$$\frac{\sin \beta}{\sin i} = \frac{\sin(\omega + f)}{\sin(\pi/2)}$$

sau

$$\sin \beta = \sin i \sin(\omega + f).$$

În continuare avem

$$\cos(\pi/2) \sin \beta = -\cos i \sin(\omega + f) \cos(\lambda - \Omega) + \cos(\omega + f) \sin(\lambda - \Omega),$$

de unde

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + f).$$

**V. Să se afle vectorul de rază, longitudinea și latitudinea heliocentrică ale lui Jupiter pe 23 august 1996.**

Soluționare:

Elementele orbitale au fost calculate la prima aplicație:

$$a = 5,2033 \text{ UA}$$

$$e = 0,0484$$

$$i = 1,3053^\circ$$

$$\Omega = 100,5448^\circ$$

$$\omega = 274,2012^\circ$$

$$M = 277.7940^\circ = 4.8484 \text{ rad.}$$

Deoarece anomalia medie a fost obținută direct, nu este necesar să calculăm timpul scurs de la periheliu. Acum trebuie să rezolvăm ecuația lui Kepler. Nu poate fi rezolvată analitic și suntem obligați să folosim o abordare a forței brute (numită și metoda analizei numerice) sub formă de iterație. Pentru iterație, scriem ecuația ca:

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n,$$

unde  $E_n$  este valoarea găsită în iterația a n-a. Anomalia medie este o presupunere rațională inițială,  $E_0$ . Iterația se desfășoară după cum urmează<sup>27</sup>:

$$E_0 = M = 4,8484,$$

$$E_1 = M + e \sin E_0 = 4,8004,$$

---

<sup>27</sup> Aici, toate unghiurile trebuie să fie în radiani, altfel rezultate ar fi nonsensuri.

$$E_2 = M + e \sin E_1 = 4,8002,$$

$$E_3 = M + e \sin E_2 = 4,8002,$$

după ce aproximările succesive nu se mai schimbă, înseamnă că soluția, cu o exactitate de patru zecimale, este

$$E = 4,8002 = 275,0^\circ.$$

Vectorul de rază este

$$r = a(\cos E - e)\hat{i} + a\sqrt{1 - e^2} \sin E \hat{j} = 0,2045\hat{i} - 5,1772\hat{j}$$

iar distanța de la Soare

$$r = a(1 - e \cos E) = 5,1813 \text{ UA}.$$

Semnele componentelor vectorului de rază arată că planeta se află în cadranul IV. Adevărata anomalie este

$$f = \operatorname{arctg} \frac{-5,1772}{0,2045} = 272,3^\circ.$$

Aplicând rezultatele aplicației precedente, găsim latitudinea și longitudinea:

$$\sin \beta = \sin i \sin(\omega + f) = \sin(1,3^\circ) \sin(242,2^\circ + 272,3^\circ) = -0,0026$$

$$\Rightarrow \beta = -0,15^\circ,$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \cos i \operatorname{tg}(\omega + f) = \cos(1,3^\circ) \operatorname{tg}(242,2^\circ + 272,3^\circ) = 0,1139$$

$$\Rightarrow \lambda = \Omega + 186,5^\circ = 100,5^\circ + 186,5^\circ = 287,0^\circ.$$

Trebuie să fim atenți aici, întrucât ecuația pentru  $\operatorname{tg}(\lambda - \Omega)$  admite două soluții. Dacă este necesar, o figură poate fi desenată pentru a decide care soluție este cea corectă.

## VI. Găsiți ascensia dreaptă și declinația sferei, ale lui Jupiter pe 23 august 1996.

Soluționare:

Mai sus am găsit longitudinea și latitudinea,  $\lambda = 287,0^\circ$ ,  $\beta = -0,15^\circ$ . Coordonatele ecliptice corespunzătoare sunt:

$$x = r \cos \lambda \cos \beta = 1,5154 \text{ UA},$$

$$y = r \sin \lambda \cos \beta = -4,9547 \text{ UA},$$

$$z = r \sin \beta = -0,0133 \text{ UA}.$$

Coordonatele ecliptice ale lui Jupiter trebuie transformate în coordonate ecuatoriale, printr-o rotație în jurul axei  $x$  cu un unghi  $\varepsilon$ , numit oblicitatea eclipticii

$$X_J = x = 1,5154 \text{ UA},$$

$$Y_J = y \cos \varepsilon - z \sin \varepsilon = -4,5405 \text{ UA},$$

$$Z_J = y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon = -1,9831 \text{ UA}.$$

Pentru a găsi direcția în raport cu Pământul, trebuie să găsim unde se află Pământul relativ la Jupiter. În principiu, am putea repeta procedura anterioară cu elementele orbitale ale Pământului. Sau, dacă dorim să nu irosim timp, am putea consulta cel mai apropiat *Almanah astronomic*, care listează coordonatele ecuatoriale ale Pământului:

$$\begin{aligned}X_{\oplus} &= 0,8815 \text{ UA}, \\Y_{\oplus} &= -0,4543 \text{ UA}, \\Z_{\oplus} &= -0,1970 \text{ UA}.\end{aligned}$$

Atunci poziția relativă la Pământ este:

$$\begin{aligned}X_0 &= X_J - X_{\oplus} = 0,6339 \text{ UA}, \\Y_0 &= Y_J - Y_{\oplus} = -4,0862 \text{ UA}, \\Z_0 &= Z_J - Z_{\oplus} = -1,7861 \text{ UA}.\end{aligned}$$

Și în final, ascensia dreaptă și declinația sferei sunt

$$\begin{aligned}\alpha &= \arctg(Y_0/X_0) = 278,82^\circ = 18^h 35', \\ \delta &= \arctg \frac{Z_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}} = -23,4^\circ.\end{aligned}$$

Dacă valorile date de *Almanahul astronomic* sunt rotunjite la aceeași precizie, se obține același rezultat. Nu ar trebui să ne așteptăm la o poziție foarte precisă, deoarece am neglijat toate tulburările pe o perioadă scurtă din elementele orbitale ale lui Jupiter.

## VII. Ce este mai ușor, să trimitem o sondă către Soare sau departe de sistemul solar?

Soluționare:

Viteza orbitală a Pământului este de aproximativ 30 km/s. Astfel viteza de evadare din sistemul solar este

$$\sqrt{2} \times 30 \approx 42 \text{ km/s}.$$

O sondă care este trimisă de pe Pământ are deja o viteză egală cu viteza orbitală a Pământului. Prin urmare, este nevoie de o viteză suplimentară de numai 12 km/s. În plus, sonda trebuie să scape de pe Pământ, ceea ce necesită 11 km/s.

Astfel, modificările vitezei totale sunt de aproximativ 23 km/s. Dacă sonda trebuie să ajungă la Soare, trebuie să scape de viteza orbitală a Pământului cu 30 km/s. Tot în acest caz, sonda trebuie mai întâi ridicată de pe Pământ. Astfel, modificarea vitezei totale necesare este de 41 km/s. Acest lucru este aproape imposibil cu tehnologia actuală.

Prin urmare, o sondă care trebuie trimisă la Soare este mai întâi direcționată aproape de o anumită planetă, iar câmpul gravitațional al planetei este utilizat pentru a accelera sonda spre destinația finală.

## Capitolul 3.

### Perspectiva contemporană

#### 3.1. Conceptul de tensor metric

Începem cu definiția distanței în spațiul bidimensional euclidian. Să considerăm două puncte  $A$  și  $B$  în planul  $\mathbb{R}^2$ , putem introduce un sistem cartezian de coordonate și descriem cele două puncte cu coordonatele  $(x_A, y_A)$ , respectiv  $(x_B, y_B)$ . Apoi definim distanța dintre aceste două puncte

$$s = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

De unde observăm câteva lucruri importante:

- Se poate dovedi că distanța este invariabilă în ceea ce privește alegerea sistemului de coordonate, cu condiția ca noul sistem de coordonate să fie de asemenea ortogonal și să aibă aceeași scară unitară. (În continuare vom generaliza această afirmație la toate sistemele de coordonate.)
- Se poate generaliza această definiție în cazul spațiului euclidian  $D$ -dimensional  $\mathbb{R}^D$

$$s^2 = \sum_{\mu=1}^D (x_A^\mu - x_B^\mu)^2,$$

și chiar mai departe în așa-numitele spații pseudo-euclidiene, cum ar fi spațiul Minkowski<sup>28</sup>,  $M_4$

$$s^2 = -(t_A - t_B)^2 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2.$$

- Dacă se desenează o imagine a celor două puncte într-un sistem de coordonate, se poate observa imediat că ingredientul cheie din definiția de mai sus este *Teorema lui Pitagora* – se poate desena un triunghi dreptunghic, unde ipotenuza conectează punctele  $A$  și  $B$ , în timp ce cele două catete sunt paralele cu cele două axe de coordonate.

Dacă punctele  $A$  și  $B$  se află pe o curbă  $C$ , se poate dori calcularea lungimii curbei dintre cele două puncte. A se consulta (Gauss, 1965). Pentru a face acest lucru, de obicei, se utilizează *definiția diferențială* a distanței dintre punctele infinitezimale învecinate  $x^\mu$  și  $x^\mu + dx^\mu$ :

---

<sup>28</sup> Pentru cazul Minkowski folosim următoarea convenție metrică, unde notăm timpul *ordonată zero*, adică:

$$t = x^0, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

$$(3.1) \quad ds^2 = \sum_{\mu=1}^D (dx^\mu)^2$$

pe care o vom integra de-a lungul curbei:

$$s = \int_C ds.$$

Expresia diferențială pentru distanță se numește *element linie* și este fundamentală pentru calcularea lungimilor tuturor obiectelor geometrice.

Să presupunem acum că vrem să introducem noi coordonate, printr-o schimbare de variabilă. În general, noile coordonate se numesc coordonate curbilinii și sunt definite prin

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\nu), \quad \mu', \nu \in \{1, \dots, D\}.$$

Singura condiție impusă funcțiilor  $x^{\mu'}(x^\nu)$  este aceea că acestea să fie inversabile, ceea ce înseamnă că ne putem întoarce la coordonatele originale prin

$$x^\nu = x^\nu(x^{\mu'})$$

condiția necesară și suficientă pentru ca acest lucru să fie adevărat este ca Jacobianul transformării să fie diferit de zero<sup>29</sup>

$$I = \det \left[ \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right] \neq 0.$$

Un exemplu tipic de coordonate curbilinii în trei dimensiuni sunt coordonatele sferice,  $r, \theta$  și  $\varphi$  introduse prin

$$(3.2) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Dacă se diferențiază aceste expresii și se înlocuiesc în *elementul linie* (3.1), se obține următoarea expresie deloc trivială

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Observăm că acest lucru este foarte neobișnuit, întrucât definiția distanței pare să depindă de alegerea punctului în care urmează să fie calculată. În coordonate curbilinii, se obține o expresie complet generală pentru *elementul linie* (3.1)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{\mu=1}^D \sum_{\nu=1}^D g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \text{ (prin convenția de rezumare a lui Einstein)} \\ &= g_{11}(x)(dx^1)^2 + g_{12}(x)dx^1 dx^2 + \dots + g_{DD}(x)(dx^D)^2. \end{aligned}$$

---

<sup>29</sup> Excepție pot face anumite alegeri particulare de coordonate numite *singulare*.

Matricea cu elementele  $g_{\mu\nu}(x)$  se numește *tensor metric*.

Este necesar să precizăm că:

- Tensorul metric poate fi întotdeauna considerat simetric, deoarece diferențialele  $dx^\mu$  și  $dx^\nu$  comută.
- Dacă se pornește de la coordonatele  $x^\mu$  cu metrica  $g_{\mu\nu}(x)$  pe care le transformăm în coordonatele  $x^{\mu'}$  cu metrica  $g_{\mu'\nu'}(x')$ , se poate dovedi că valoarea absolută a Jacobianului transformării este:

$$|I| = \left| \det \left[ \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \right] \right| = \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g'|}},$$

unde  $g = \det g_{\mu\nu}$  și  $g' = \det g_{\mu'\nu'}$ .

- Ca urmare a condiției  $I \neq 0$  și a ecuației de mai sus, se observă că metrica este întotdeauna regulată,

$$\det g_{\mu\nu}(x) \neq 0.$$

- Apoi, din ultima relație deducem că matricea inversă există întotdeauna și este notată  $g^{\mu\nu}(x)$ . Afirmatia potrivit căreia acești doi tensori sunt inverși unul față de celălalt poate fi scrisă în mod convenabil prin

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda \equiv \begin{cases} 1, & \text{dacă } \lambda = \mu \\ 0, & \text{dacă } \lambda \neq \mu \end{cases}$$

unde  $\delta_\mu^\lambda$  se numește simbolul *Kronecker*.

- Din moment ce am pornit de la elementul linie (3.1), rezultă că există întotdeauna o transformare de la orice coordonate curbilinii la carteziane, astfel încât în coordonatele carteziane metrica are forma<sup>30</sup>:

$$[g_{\mu\nu}(x)] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

În acest moment putem face o imensă generalizare, renunțând la proprietatea finală. Astfel:

**Distanța dată prin elementul linie** este

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

unde  $g_{\mu\nu}(x)$  este o funcție complet arbitrară de coordonate  $x^\mu$ , care îndeplinește numai condiția  $\det g_{\mu\nu} \neq 0$ .

---

<sup>30</sup> În spațiul Minkowski are forma  $[g_{\mu\nu}(x)] = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$  și este notat  $\eta_{\mu\nu}$ .

Această definiție a distanței este generalizarea teoremei lui Pitagora pentru spațiile curbate. Renunțarea la proprietatea finală înseamnă că, pornind de la unele coordonate curbilinii, s-ar putea să nu fie posibilă transformarea în coordonate carteziane. A se vedea (Kay, 1988). Deci toate coordonatele posibile ar putea fi curbilinii, ceea ce înseamnă că nu ar putea exista linii drepte într-un astfel de spațiu; un astfel de spațiu se numește *curbat*.

## 3.2. Ecuațiile de câmp ale lui Einstein

### 3.2.1. Introducere în problematică

Expansiunea Universului nu mai este demult timp un secret, ea înseamnă de fapt relația de proporționalitate directă existentă între timp și distanța dintre două puncte date care nu au legătura gravitațională între ele și aparțin universului observabil. Putem afirma că expansiunea este de tip intrinsec, întrucât spațiul suferă schimbări. Deci Universul nu crește devenind ceva mai mare și nu are nevoie de spațiu pentru a exista înafara lui.

Albert Einstein (14 martie 1879 – 18 aprilie 1955) a fost un fizician teoretic de origine germană care a dezvoltat teoria relativității, unul dintre cei doi piloni ai fizicii moderne (alături de mecanica cuantică). Opera lui este cunoscută și pentru influența sa asupra filozofiei științei. El este cel mai cunoscut publicului larg pentru formula sa de echivalență a energiei  $E = mc^2$ , care a fost supranumită *cea mai faimoasă ecuație* din lume. El a primit Premiul Nobel pentru fizică din 1921 *pentru serviciile aduse fizicii teoretice, și mai ales pentru descoperirea legii efectului fotoelectric*, un pas important în dezvoltarea teoriei cuantice.

Fiul unui vânzător care a operat ulterior o fabrică electrochimică, Einstein s-a născut în Imperiul German, dar s-a mutat în Elveția în 1895 și a renunțat la cetățenia germană în 1896. Specializat în fizică și matematică, a primit diploma de profesor universitar de la Politehnica Federală Elvețiană la Zürich în 1900. În anul următor, el a dobândit cetățenia elvețiană, pe care a păstrat-o toată viața. După ce inițial s-a străduit să-și găsească un loc de muncă, din 1902 până în 1909 a fost angajat ca examinator de brevete la Oficiul Elvețian de Brevete din Berna.

Aproape de începutul carierei sale, Einstein a crezut că mecanica newtoniană nu mai este suficientă pentru a reconcilia legile mecanicii clasice cu legile câmpului electromagnetic. Aceasta l-a determinat să-și dezvolte teoria specială a relativității în timpul său la Oficiul Elvețian de Brevete. În 1905, numit *annus mirabilis* (anul miracolului), a publicat patru lucrări de ultimă oră, care au atras atenția lumii academice; prima a subliniat teoria efectului fotoelectric, a doua a explicat mișcarea browniană, a treia lucrare a introdus relativitate specială, iar a patra echivalența masă-energie. În acel an, la 26 de ani, a fost acceptat ca doctorand de către Universitatea din Zürich.

Deși inițial tratate cu scepticism de comunitatea științifică, lucrările lui Einstein au devenit treptat recunoscute ca avansuri științifice semnificative. A fost invitat să predea fizică teoretică la Universitatea din Berna în 1908, iar în anul următor s-a mutat la Universitatea din Zürich, apoi în 1911 la Universitatea „Charles” din Praga, înainte de a se întoarce la Școala Politehnică Federală din Zürich în 1912. În 1914, a fost ales membru al Academiei de Științe din Berlin, unde a rămas 19 ani. Curând după publicarea lucrărilor sale despre relativitate specială, Einstein a început să lucreze pentru a extinde teoria la câmpurile gravitaționale; apoi a publicat o lucrare despre relativitatea generală în 1916, introducând teoria gravitației sale. El a continuat să se ocupe de probleme de mecanică statistică și teorie cuantică, ceea ce a dus la explicațiile sale despre teoria particulelor și mișcarea moleculelor. De asemenea, a investigat proprietățile termice ale luminii și teoria cuantică a radiației, fundament al laserului, care a pus bazele teoriei fotonului luminii.

În 1933, în timp ce Einstein vizita Statele Unite, Adolf Hitler a ajuns la putere. Din cauza fondului său evreiesc, Einstein nu s-a întors în Germania. S-a stabilit în Statele Unite și a devenit cetățean american în 1940. În ajunul celui de-al Doilea Război Mondial, el a trimis o scrisoare către președintele Franklin D. Roosevelt alertându-l cu privire la dezvoltarea potențială a *bombelor extrem de puternice de un tip nou* și recomandând ca SUA să înceapă cercetări similare. Acest lucru a dus în final la Proiectul Manhattan. Einstein a sprijinit Aliații, dar a denunțat, în general, ideea utilizării fisiunii nucleare ca armă. El a semnat Manifestul Russell – Einstein cu filosoful britanic Bertrand Russell, care a evidențiat pericolul armelor nucleare. A fost afiliat la Institutul de Studii Avansate din Princeton, New Jersey, până la moartea sa în 1955.

A publicat peste 300 de lucrări științifice și peste 150 de lucrări non-științifice. Realizările și originalitatea sa intelectuală au făcut ca *Einstein* să fie sinonim cu *geniul*. În anul 1915, Albert Einstein și matematicianul, David Hilbert au formulat aproape simultan ecuațiile – a se vedea (Einstein, 1915) – numite ecuațiile de câmp ale lui Einstein (EFE) și anume:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

unde:

- $R_{\mu\nu}$  este tensorul de curbura Ricci,
- $R$  este curbura scalară,
- $G$  este constanta gravitațională a lui Newton,
- $c$  este viteza luminii în vid,
- $T_{\mu\nu}$  este tensorul de stres energetic,
- $g_{\mu\nu}$  este tensor metric, iar
- $\Lambda$  este constanta cosmologică (universală).



Această formulă reprezintă un sistem de ecuații diferențiale neliniare de gradul al doilea, care rezolvate, cu anumite condiții de frontieră, permit obținerea de soluții particulare, care reprezintă câmpul gravitațional de o simetrie concretă. Există soluții statice, staționare, nestaționare în funcție de dependența sau independența de timp și de forma acestei dependențe, soluții de simetrie plană, sferică, cilindrică etc. Numărul soluțiilor cunoscute până în prezent întrece miile, dar cele mai importante sunt soluția Schwarzschild, soluția Reissner – Nordström, soluția ce prezintă undele gravitaționale și soluția cosmologică Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker, care prezintă Universul.

Ecuațiile lui Einstein conduc la ideea unui Univers aflat în plină expansiune. Încercând să obțină modelul unui Univers staționar, Einstein introdusese, în cadrul celebrelor sale ecuații de câmp, o constantă cosmologică. Ulterior, observațiile lui Edwin Hubble au dovedit contrariul. Einstein recunoaște că a săvârșit o mare eroare și acceptă modelul cosmologic al Universului în expansiune, pe care tot el îl preconizase.

### 3.2.2. Metrica Schwarzschild

Să considerăm ecuațiile de câmp ale lui Einstein scrise în următoarea formă<sup>31</sup>

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

În continuare, precizarea unor observații este esențială,

- Cantitatea  $G_{\mu\nu}$  se numește *tensor Einstein*, în timp ce  $T_{\mu\nu}$  se numește tensor al energiei de stres.
- Tensorul Ricci  $R_{\mu\nu}$  și curbura scalară  $R$  sunt definite prin

$$(3.3) \quad R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\lambda\mu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Tensorul Ricci este simetric.

- Simbolul Christoffel  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  este definit ca

---

<sup>31</sup> Lucrăm într-un sistem natural de unități în care viteza luminii și constanta gravitațională a lui Newton sunt definite ca fiind egale cu 1,

$$c = 299\,792\,458 \frac{m}{s} = 1, \quad \gamma = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \, s^2} = 1.$$

Aceasta înseamnă că am redefinit secunda și kilogramul în funcție de metru, ca:

$$1s \equiv 299\,792\,458 \, m, \quad 1 \, kg \equiv 7,43 \cdot 10^{-28} \, m.$$

Dacă dorim să ne întoarcem din sistemul natural al unităților la sistemul metric internațional SI, trebuie să determinăm care sunt unitățile SI dintr-o anumită cantitate fizică și apoi să o înmulțim cu 1, exprimată în mod adecvat în acele unități folosind formulele de mai sus. Corespondența este unică. De asemenea, precum și în sistemul SI, în sistemul natural al unităților se poate utiliza tehnica analizei dimensionale pentru a verifica calculele – dimensiunile (în metri) din partea stângă a oricărei ecuații trebuie să se potrivească întotdeauna cu partea dreaptă.

$$(3.4) \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Acesta este simetric în raport cu doi indici.

Finalmente, vedem că pe partea stângă a ecuațiilor lui Einstein avem  $G_{\mu\nu}$  care este o funcție a metricii, a derivatelor sale de ordin I și de ordinul al II-lea. În partea dreaptă avem  $T_{\mu\nu}$  care reprezintă materia. Deci, se demonstrează că, în esență, ecuațiile lui Einstein reprezintă un set de 10 ecuații diferențiale parțiale de ordinul doi pentru cele 10 componente ale tensorului metric, cu energia de stres ca termen sursă.

Prin urmare, ecuațiile de câmp ale lui Einstein determină geometria spațiu-timpului (prin furnizarea definiției distanței – teorema lui Pitagora), pe baza conținutului materiei din spațiul respectiv. În plus, mișcarea materiei este determinată de această geometrie. A se consulta (Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M., 1975).

Faptul că mișcarea materiei este determinată de proprietățile geometriei se numește **principiul echivalenței** și este conținut în ecuațiile lui Einstein. Acest lucru nu este evident, îl vom demonstra mai târziu prin câteva exemple. Mai simplu spus, materia dictează geometriei cum să se curbeze, în timp ce geometria dictează materiei cum să se miște. În acest fel, geometria încetează să mai fie doar o „arenă” în care „fizica se întâmplă”, ci devine mai degrabă un participant activ la procesele fizice. Această participare a dinamicii geometriei în procesele fizice se numește **interacțiune gravitațională**.

Acum vom demonstra toate acestea în cel mai simplu caz non-trivial – soluția statică sferică-simetrică a ecuațiilor de câmp ale lui Einstein, numită metrica Schwarzschild sau geometria Schwarzschild. Considerăm spațiu-timpul neted Minkowski împreună cu elementul linie:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

introducem coordonate sferice prin modificarea variabilelor (3.2) și obținem

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Acesta este tot un element linie al spațiu-timpului, numai că este exprimat în coordonate curbilinii. Trebuie să generalizăm acest element linie în așa fel încât să permită curbura, păstrând în același timp cerințele geometriei statice sferice-simetrice. Static înseamnă că metrica nu trebuie să depindă de timp, sferic-simetric înseamnă că nu ar trebui să depindă de unghiurile  $\theta$  și  $\varphi$ , altfel decât prin termenii deja prezenți. Se poate arăta că este suficient să luăm în considerare următoarea generalizare pentru elementul linie

$$ds^2 = -e^{2F(r)} dt^2 + e^{2H(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

unde  $F(r)$  și  $H(r)$  sunt două funcții care trebuie determinate de ecuațiile lui Einstein. Reținem că am ales să le notăm la exponent doar datorită unei comodități de scriere ulterioare.

Deci construim mai întâi partea stângă a ecuațiilor lui Einstein. Citim metrica și inversul tensorului metric din elementul linie

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -e^{2F} & & & \\ & e^{2H} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad [g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -e^{-2F} & & & \\ & e^{-2H} & & \\ & & \frac{1}{r^2} & \\ & & & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Folosim acest lucru pentru a calcula simbolurile Christoffel cu ajutorul relației (3.4). Simbolurile diferite de zero sunt:

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tr} &= F', & \Gamma^r_{tt} &= F' e^{2F-2H}, & \Gamma^r_{rr} &= H', \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r e^{-2H}, & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r \sin^2 \theta e^{-2H}, & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned}$$

Apoi folosind acest lucru construim tensorul Ricci, folosind (3.3). Componentele diferite de zero sunt

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2F-2H} \left( F'' + (F')^2 - F'H' + \frac{2}{r} F' \right), & R_{rr} &= - \left( F'' + (F')^2 - F'H' + \frac{2}{r} H' \right) \\ R_{\theta\theta} &= 1 - e^{-2H} (1 + rF' - rH'), & R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Urmează contractarea tensorului Ricci cu metrica, pentru a obține scalarul Ricci

$$R = -2e^{-2H} \left[ F'' + \left( F' + \frac{2}{r} \right) (F' - H') + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2H}) \right],$$

în sfârșit, punem toate acestea la punct pentru a forma tensorul lui Einstein

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -\frac{1}{r^2} e^{2F-2H} (1 - 2rH' - e^{2H}), & G_{rr} &= \frac{1}{r^2} (1 + 2rF' - e^{2H}), \\ G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2H} \left[ F'' + \left( F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right], & G_{\varphi\varphi} &= G_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Componenta  $G_{tt}$  a tensorului lui Einstein poate fi rescrisă sub forma

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2F} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2H})),$$

formă care va fi convenabilă pentru integrare, ulterior.

În continuare ne concentrăm pe partea dreaptă a ecuației lui Einstein. Ne interesează să modelăm cel mai simplu tensor de energie de stres, și anume unul care reprezintă o bilă statică de rază  $R$  și densitate  $\rho(r)$  cu centrul în  $r = 0$ . Amintind formula generală pentru tensorul de energie de stres al unui element fluid cu densitatea  $\rho$ , presiunea  $p$  și vectorul cu 4 viteze  $u^\mu$ ,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu},$$

dorim să descriem fluidul static ( $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$ ). Deci energia de stres obține forma

$$T_{tt} = \rho u_t u_t + p(u_t u_t + g_{tt}), \quad T_{rr} = pg_{rr}, \quad T_{\theta\theta} = pg_{\theta\theta}, \quad T_{\varphi\varphi} = pg_{\varphi\varphi},$$

în timp ce alte componente dispar. În continuare, vectorul cu 4 viteze trebuie să fie normalizat,  $u_\mu u_\nu g^{\mu\nu} = -1$ , ceea ce înseamnă că  $u_t u_t = -g_{tt} = e^{2F}$ , deci avem

$$T_{tt} = \rho e^{2F}, \quad T_{rr} = p e^{2H}, \quad T_{\theta\theta} = p r^2, \quad T_{\varphi\varphi} = p r^2 \sin^2 \theta.$$

Densitatea și presiunea fluidului pot depinde numai de  $r$  datorită simetriei sferice și trebuie să fie zero, pentru  $r > R$ , adică în afara bilei considerate. În cele din urmă, după înlocuirea tuturor acestor rezultate în ecuațiile de câmp ale lui Einstein,  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ , obținem trei ecuații:

- ecuația  $t - t$

$$\frac{1}{r^2} e^{2F} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2H})) = 8\pi e^{2F} \rho(r),$$

- ecuația  $r - r$

$$\frac{1}{r^2} (1 + 2rF' - e^{2H}) = 8\pi e^{2H} p(r),$$

- ecuația  $\theta - \theta$  și ecuația  $\varphi - \varphi$  care sunt identice

$$r^2 e^{-2H} \left[ F'' + \left( F' + \frac{1}{r} \right) (F' - H') \right] = 8\pi r^2 p(r).$$

Toate celelalte ecuații sunt vacante,  $0 = 0$ , și nu oferă nicio informație.

Mai întâi discutăm despre ecuația  $t - t$ . Printr-o integrare simplă obținem

$$H(r) = -\frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right), \quad \text{unde } m(r) \equiv 4\pi \int r^2 \rho(r) dr.$$

Alegând condiția inițială  $m(0) = 0$ , putem interpreta  $m(r)$  ca masa totală conținută în interiorul razei  $r$ , deoarece aceasta este definită ca o integrală a densității masei  $\rho$  peste volumul unei bile de rază  $r$ .

În continuare discutăm ecuația  $r - r$ . Rezolvând-o pentru  $F$  obținem

$$F(r) = \int \frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2m(r))} dr.$$

Pentru  $r < R$ , integrala este complicată, iar discuția despre ea nu ajută. Cu toate acestea, pentru  $r > R$  avem  $m(r) = M$  (masa totală a bilei) și  $p(r) = 0$  (presiune egală cu zero în vid), astfel încât  $F(r)$  poate fi ușor de integrat. Rezultatul este

$$F(r) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{2M}{r} \right),$$

unde constanta de integrare a fost aleasă astfel încât în limita  $r \rightarrow \infty$ , elementul linie își recuperează forma Minkowski.

În final, discutăm despre ecuația  $\theta - \theta$ . Înlocuind toate rezultatele anterioare (după un calcul obositor) obținem rezultatul

$$p'(r) + F'(r)(\rho(r) + p(r)) = 0.$$

Aceasta este o ecuație diferențială care determină distribuția presiunii radiale a materiei în interiorul bilei. Această distribuție există astfel încât presiunea repulsivă echilibrează atracția gravitațională peste tot, menținând astfel configurația statică a materiei în interiorul mingii.

Acum nu ne va interesa geometria din interiorul bilei, ci doar geometria din exterior (pentru  $r > R$ ). În acest caz, elementul linie are forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

*Aceasta este celebra soluție Schwarzschild a ecuațiilor de câmp ale lui Einstein și definește așa-numita metrică Schwarzschild.*

### 3.3. Consecințe

#### 3.3.1. Dilatarea temporală gravitațională

Să considerăm un observator așezat la suprafața Pământului, având coordonatele  $r_E = R$ ,  $\theta_E = \text{const}$ ,  $\varphi_E = \text{const}$ . Presupunem că observatorul poartă un ceas cu el. El poate construi coordonatele locale Minkowski în imediata lui apropiere, descrise de elementul linie

$$ds^2 = -dr_E^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Întrucât observatorul este în repaus față de propriile coordonate, avem că

$$dx = dy = dz = 0,$$

iar coordonata  $\tau_E$  măsoară timpul corespunzător al acelui observator, adică reprezintă ceea ce se citește pe ceasul său. Având în vedere că elementul linie  $ds$  este invariabil, acesta trebuie să fie același atât în coordonatele locale Minkowski, cât și în coordonatele Schwarzschild, deci (deoarece  $dr_E = d\theta_E = d\varphi_E = 0$ ) obținem

$$d\tau_E = dt \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}.$$

În continuare, fie un alt observator, așezat pe orbita geosincronă<sup>32</sup> la înălțimea  $h > 0$  deasupra solului, adică la coordonatele  $r_o = R + h$ ,  $\theta_o = \text{const}$ ,  $\varphi_o = \text{const}$ . De asemenea, el poartă un ceas cu care măsoară timpul propriu

$$ds^2 = -d\tau_o^2.$$

Echivalând acest lucru cu elementul de linie din soluția Schwarzschild și amintind că  $dr_o = d\theta_o = d\varphi_o = 0$ , obținem relația similară

$$d\tau_o = dt \sqrt{1 - \frac{2M}{R + h}}.$$

Acum presupunem că ambii observatori măsoară timpul unui proces fizic care începe la timpul de coordonare  $t$  și se încheie la timpul de coordonare  $t + dt$ . Deoarece timpul de coordonate precizate este același pentru ambii observatori, folosind formulele de mai sus obținem

$$d\tau_E = d\tau_o \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R + h}}}.$$

Reținem că expresia de sub radical este întotdeauna strict mai mică decât 1, de unde rezultă

$$d\tau_{\text{Pământ}} < d\tau_{\text{Orbită}},$$

adică ceasurile de pe Pământ bifează orele mai lent decât ceasurile de pe orbită. Acest efect se numește **dilatate temporală gravitațională**.

Efectul de dilatare gravitațională a timpului nu poate fi măsurat numai pe Pământ, dar este extrem de important în măsurători de precizie, de exemplu în Sistemul de poziționare globală. Sistemul GPS este prima aplicație industrială din lumea reală a relativității generale.

### 3.3.2. Deplasarea undelor spectrului gravitațional

Să considerăm un atom în repaus la suprafața Soarelui, care suferă o excitare și emite un puls de lumină în acest proces. În cadrul de repaus al atomului este nevoie de

---

<sup>32</sup> O orbită geosincronă este o orbită centrată pe Pământ cu o perioadă orbitală care se potrivește cu rotația Pământului în jurul axei sale, 23 de ore, 56 de minute și 4 secunde (o zi siderală). Pentru un observator de pe suprafața Pământului, un obiect din orbita geosincronă revine exact la aceeași poziție pe cer după o perioadă de o zi siderală.

timpul  $\Delta\tau_S$  pentru a emite o lungime de undă. Deci, având în vedere acest timp corespunzător între două faze egale ale emiterii undei și luând în calcul că viteza luminii este egală cu  $c = 1$  în cadrul de repaus al atomului, lungimea de undă a impulsului luminii este dată prin

$$\lambda_S = c\Delta\tau_S \equiv \Delta\tau_S.$$

Să lăsăm unda să urce radial pe orbită și să considerăm un observator pe Pământ, la o distanță  $D$  de suprafața Soarelui. Observatorul folosește cadrul său de repaus pentru a măsura timpul dintre două faze egale ale unor unde consecutive. Deoarece viteza luminii este din nou  $c = 1$ , el măsoară lungimea de undă ca

$$\lambda_E = c\Delta\tau_E \equiv \Delta\tau_E.$$

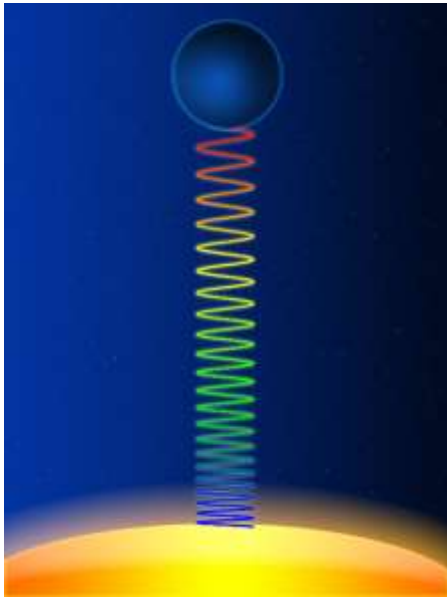


Fig. 16

Dar așa cum am arătat în secțiunea precedentă, intervalul de timp  $\Delta\tau_S$  de la suprafața Soarelui și intervalul de timp  $\Delta\tau_E$  din orbita Soarelui unde se află Pământul sunt legate prin

$$\Delta\tau_S = \Delta\tau_E \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R+D}}},$$

de unde avem

$$\lambda_S = \lambda_E \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{R}}{1 - \frac{2M}{R+D}}}.$$

Vedem astfel că lungimea de undă a impulsului de lumină emis de la suprafața Soarelui este întotdeauna strict mai mică decât lungimea de undă a aceluiași impuls măsurat de un observator pe Pământ

$$\lambda_S < \lambda_E.$$

Așadar, lungimea inițială de undă a impulsului este deplasată spre valori mai mari. Acest efect se numește **redshift gravitațional**<sup>33</sup>. Energia este invers proporțională cu lungimea de undă, ceea ce înseamnă că fotonul observat are mai puțină energie decât a avut atunci când a fost emis. Înțelegem că energia fotonului nu este conservată, datorită interacțiunii cu câmpul gravitațional. În termenii mecanicii newtoniene, fotonul trebuie să urce în „potențialul” gravitațional și pierde energie în acest proces.

<sup>33</sup> Termenul se referă la trecerea lungimii de undă a unui foton la o lungime de undă mai lungă (partea roșie a unui spectru optic) atunci când este observată dintr-un punct cu un potențial gravitațional mai mare.

## Concluzii

Am discutat despre câteva din multitudinea legăturilor pe care le observăm între matematică și astronomie. Am amintit despre câteva nume ale unor savanți care de-a lungul timpului au dus percepția umanității asupra lumii ce o înconjoară de la modelul Pământului plat susținut de elefanți și țestoase, la lupta pentru modelul heliocentric, apoi mai departe la modelul unui univers aflat în expansiune și până la teoria stringurilor, care să explice natura și istoria Universului. De-a lungul timpului matematica a dat răspuns tuturor prolemlor ridicate de studiul Universului, iar în ultima perioadă analiza matematică a devenit mai mult decât un instrument, răspunsul la problemele astronomiei, a devenit știința care „crează” astronomie, care modelează diferite perspective și ipoteze și care ridică ea însăși întrebări la care astronomia trebuie să răspundă. Aceasta este impresia pe care vreau ca lecturarea lucrării mele de licență să o lase asupra celor care o studiază.

Apreciez propria contribuție, la nivelul celor trei capitole ca fiind destul de bogată. Aceasta a constat în cercetarea unor numeroase articole științifice care dezbat subiecte care au legătură cu tematica lucrării mele, pentru a prezenta esențialul problematicii; în studierea profundă a unor concepte de astronomie avansată, astfel încât să fiu capabil să prezint fapte pe care să fiu capabil să le înțeleg; în abordarea insolită a unor idei pentru a oferi o experiență cât mai plăcută și mai plină de rezultate științifice, revelatorii cu privire la împletirea armonioasă existentă între analiza matematică și astronomie.

Una dintre cele mai mari provocări, a fost pentru mine, demonstrarea legilor lui Kepler, în cadrul celui de-al doilea capitol, deoarece nu există o demonstrație trivială, sau general acceptată de specialiști. De aceea mi-am alcătuit propria logică ce urma să-mi permită demonstrarea lor într-un mod original și accesibil. Asta nu înseamnă că restul a fost lipsit de provocări, bineînțeles, fiecare secțiune a venit cu problemele specifice, însă am rămas la fel de motivat să le rezolv. În capitolul al treilea, de exemplu, am fost nevoit să sintetizez informația, dintr-un volum extrem de mare de date și de soluții ale ecuațiilor de câmp ale lui Einstein, astfel încât să ofer o ordine și un sens aparte celor prezentate de mine în cadrul capitolului respectiv.

Sper că am reușit să-i conving și pe cei mai sceptici dintre noi, care încă se îndoiau de infinitatea aplicațiilor pe care analiza matematică o are în astronomie. Îndrăznesc să o numesc infinitate, pentru că e ușor de verificat continuitatea relațională care există în aceste domenii, care până la urma presupun mai multe similarități, decât diferențe fundamentale.



## Bibliografie

- Aarseth, S. J., 2003. *Gravitational n-Body Simulations*. New York: Cambridge University Press.
- Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M., 1975. *Introduction to General Relativity*. New York: McGraw-Hill.
- Arnold, V. I., 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New York: Springer.
- Battin, R., 1999. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. Washington, D.C.: American Institute of Aeronautics & Ast.
- Bedini, S. A., 1986. Galileo and Scientific Instrumentation. *Reinterpreting Galileo*, pp. 127-153.
- Curtis, H. D., 2009. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. New York: Elsevier.
- Drake, S., 1973. Galileo's Experimental Confirmation of Horizontal Inertia. *Isis*, Volumul 64, pp. 291-305.
- Drake, S., 1990. *Galileo: Pioneer Scientist*. University of Toronto Press: Toronto.
- Einstein, A., 1915. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 844-847.
- Gauss, C. F., 1965. *General Investigations of Curved Surfaces*. New York: Raven Press .
- Greiner, W., 2003. *Classical mechanics: point particles and relativity*. New York: Springer.
- Hill, D., 1988. Dissecting Trajectories, Galileo's Early Experiments on Projectile Motion and Law of Free Fall. *Isis*, Volumul 79, pp. 646-668.
- Kay, D., 1988. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Tensor Calculus*. New York: McGraw-Hill.
- Koyre, A., 1978. *Galileo Studies*. New Jersey: Humanities Press.
- McMullin, E., 1967. Galileo: Man of Science. *Galileo: Man of Science*, pp. 3-51.
- Murschel, A., 2014. The Structure and Function of Ptolemy's Physical Hypotheses of Planetary Motion. *Journal for the History of Astronomy*, Volumul 27, pp. 33-61.
- Naylor, R. H., 1974. Galileo and the Problem of Free Fall. *The British Journal for the History of Science*, pp. 105-134.
- Naylor, R. H., 1974. The Evolution of an Experiment: Guidobaldo Del Monte and Galileo's Discorsi Demonstration of the Parabolic Trajectory. *Physis*, Volumul 16, pp. 232-346.

- Naylor, R. H., 1976. Galileo: Real Experiment and Didactic Demonstration. *Isis*, Volumul 67, pp. 398-419.
- Naylor, R. H., 1976. Galileo: the Search for the Parabolic Trajectory. *Annals of Science*, Volumul 33, pp. 153-172.
- Rose, W., 1998. *Advanced Stellar Astrophysics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Settle, T., 1961. An Experiment in the History of Science. *Science*, Volumul 133, pp. 19-23.
- Settle, T., 1967. Galileo's use of experiment as a tool of investigation. *Galileo: Man of Science*, pp. 315-337.
- Shea, W. R., Wolf, N. S., 1975. Stillman Drake and the Archimedean Grandfather of Experimental Science. *Isis*, Volumul 66, pp. 397-400.
- Stephenson, B., 1994. *Kepler's Physical Astronomy*. New Jersey: Princeton University Press.
- Zimba, J., 2009. *Force and Motion: An Illustrated Guide to Newton's Laws*. Baltimore: Johns Hopkins University Press.