TP - Numérisation de l'équation de la conduction thermique

Méthode explicite

Enoncé :

On considère une tige cylindrique, solide, orientée horizontalement, de longueur L=1 m à la température T_0 = 20°C uniforme au sein de la tige en début d'expérience.

A l'instant initial t=0, sa face gauche (x = 0) est chauffée à la température : $T(x=0, t) = T_0 + \beta * t$ jusqu'à l'instant t_{fin} avec β=0,1 K/s et t_{fin} = 60 s. La température de la face gauche est ensuite maintenue constante à $T_0 + \beta * t_{fin}$.

La température de la face droite est toujours maintenue à 20°C.

Les pertes de chaleur vers l'extérieur sont exclues.

On divise toute la longueur de 0 à L en segments égaux de longueur Δx et le temps d'intégration en intervalles égaux de durée Δt.

On désigne par $T_{i,k}$ (ou $T(x_i,t_k)$) la température au point d'abscisse $x_i = i\,\Delta x$ et au temps $t_k = k\,\Delta t$.

L'équation de la conduction thermique est la suivante : $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

avec $a = \frac{\lambda}{\rho \times c_v}$ le coefficient de diffusivité thermique.

Pour le cuivre, a=114.10^{-6} m^2/s et pour le verre a=0,58.10^{-6} m^2/s

Questions :

a) A l'aide de la méthode des différences finies, discrétiser l'équation de la conductivité thermique en utilisant une approximation forward à l'ordre 1 en temps et centrée à l'ordre 2 en espace. L'équation obtenue doit permettre de calculer la température au pas de temps suivant.

b) Montrer que si on impose $(\Delta x)^2 = 2\,\lambda\,\Delta t / (\rho\, c_v)$, l'équation de la question a) devient :

$$T_{i,k+1} = (T_{i+1,k} + T_{i-1,k}) / 2$$

c) A l'aide de MATLAB ou Python, créer une fonction réalisant cette intégration numérique ayant comme entrée la diffusivité thermique et comme sortie l'évolution de la température le long de la tige au cours du temps. Pour ce faire, la tige sera découpée en 100 tranches. Arrêter l'intégration lorsque la stationnarité est atteinte.

d) Appliquer la fonction précédente pour deux matériaux différents : le cuivre et le verre.

i. Comparer la différence de temps mis entre les deux matériaux pour atteindre la stationnarité. Cela vous semble-il logique ?
ii. A l'aide d'un graphique température en fonction de la position sur la tige, comparer la température le long de la tige pour les deux matériaux lorsque la stationnarité est atteinte.
iii. A l'aide d'un graphique température en fonction du temps écoulé, comparer l'évolution de la température au cours du temps du milieu de la tige pour les deux matériaux.
iv. Tracer pour chaque matériau, l'évolution de la température en fonction de la position sur la tige et du temps (commande MATLAB pcolor).

e) A partir de l'algorithme obtenu à la question a), reprendre les questions c) et d) avec un pas de temps de 5 secondes puis avec un pas de temps de 0,3 seconde. Commenter les résultats obtenus.