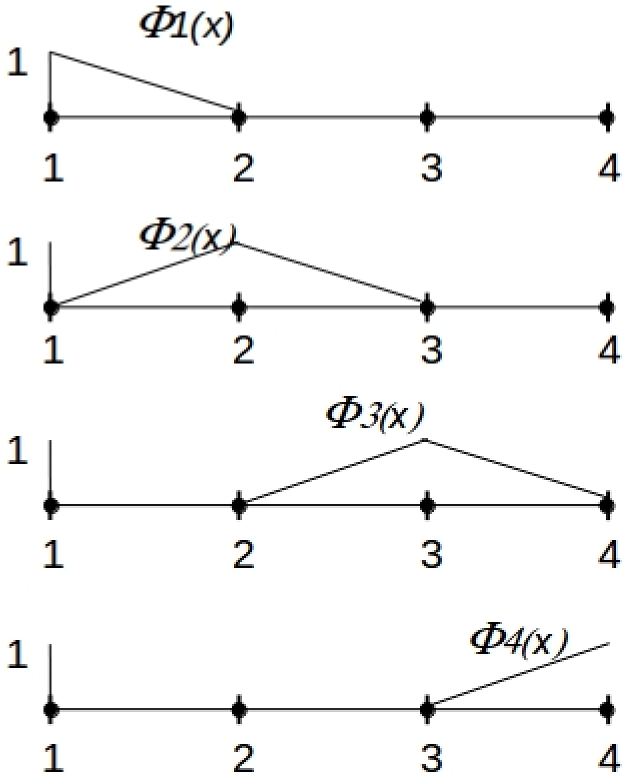
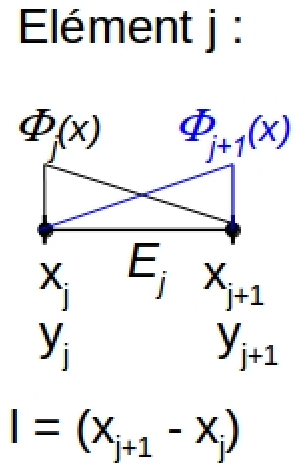
Correction TD-TP modélisation numérique, éléments finis

Exercice 1 : Soient les fonctions d'interpolations (ou de forme) $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ définies sur les éléments 1,2,3





Sur chaque élément E_j, on peut définir la fonction $y = f_j(x)$ comme fonction des valeurs de la fonction aux extrémités de l'élément (y_j, y_{j+1}) pondérée par les fonctions de formes sur l'élément j :

$$f_j(x) = y_j \phi_j + y_{j+1} \phi_{j+1}$$

avec :

$$\phi_j(x) = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad \text{et} \quad \phi_{j+1}(x) = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad .$$

Soit :

$$f_j(x) = y_j \left(\frac{x_{j+1} - x}{l} \right) + y_{j+1} \left(\frac{x - x_j}{l} \right) \text{ , avec } \quad l = x_{j+1} - x_j \quad .$$

On peut vérifier que cette fonction est bien une fonction linéaire de x telle que $f_j(x_j) = y_j$ et $f_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$.

Le programme correspondant aux interpolations linéaires par morceaux est Exo1.m

Exercice 2 :

1. Soit une section de poutre d'épaisseur dx et de section S à l'équilibre entre les efforts internes (la traction exercée par la barre vers le haut en x et la traction exercée vers le bas en x+dx) et son poids (vers le bas). On peut écrire :

$$F(x+dx)-F(x)+\rho g S dx=0$$

On utilise le développement limité de $F(x)$ au voisinage de x :

$$F(x+dx)\sim F(x)+\frac{\partial F}{\partial x}dx$$

(les signe ~ indique que cette expression est une approximation de $F(x+dx)$).

On obtient donc

$$F(x)+\frac{\partial F}{\partial x}dx-F(x)+\rho g S dx=0$$

Soit :

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\rho g S dx=0$$

On simplifie par dx, et on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\rho g S=0$$

On utilise maintenant la relation contraintes – Forces, puis la loi de Hooke pour relier les forces aux déplacements (voir ennoncé), et on en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(SE\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\rho g S=0$$

Que l'on peut simplifier par S. Comme E ne dépend pas de x, on peut écrire l'équation ci-dessus :

$$E\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\rho g=0 \qquad (1)$$

Par la suite, pour simplifier on notera $u_x=u$.

2. Solution analytique :
De l'équation (1) on déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-\rho g}{E}$$

On intègre une première fois par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\rho g}{E}x+B \qquad (2)$$

On intègre une seconde fois par rapport à x :

$$u(x)=\frac{-\rho g}{2E}x^2+Bx+C \qquad (3)$$

On utilise les conditions limites pour déterminer les constantes
En x = 0, $u(0)=0$
De l'équation (3), on déduit $u(0)=C=0$
cas a) Si $F(L)=0$, on a simplement

$$B=\frac{\rho g L}{E}$$

cas b) En x = L, $F(L)=SE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L}=b$

On utilise $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L}$ déduit de l'équation (2) que l'on remplace dans l'équation ci-dessus

$$F(L)=SE\left(-\frac{\rho g}{E}L+B\right)=b$$

d'où

$$B=\left(\frac{b}{SE}+\frac{\rho g L}{E}\right)$$

Finalement :

$$u(x)=\frac{\rho g}{E}\left[-\frac{x^2}{2}+Lx\right] \quad \text{si} \quad F(L)=0 \tag{4}$$

$$u(x)=\frac{1}{E}\left[-\frac{\rho g}{2}x^2+\left(\frac{b}{S}+\rho g L\right)x\right] \quad \text{si} \quad F(L)=b \tag{5}$$

3. Formulation faible

$$\int_0^L v(x)\left(E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho g\right)dx=0$$

On intègre par parties[1] en posant f = v(x) et $g'=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (le terme ρg n'est pas intégré par parties), ce qui donne :

$$\left[E v(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \int_0^L v(x)\rho g\,dx = 0$$

Soit

$$\int_0^L E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx = \left[E v(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_0^L v(x)\rho g\,dx \tag{6}$$

4. On discrétise les solutions recherchées (les déplacements) et on écrit :

$u(x)=\sum_{i=0}^{N} u_i \phi_i(x)$ que les fonctions de formes (ou d'interpolation) correspondent à des interpolations constantes, linaires ou quadratiques.

L'approximation de Galerkine consiste à choisir $v(x)=\phi_j(x)$

Avec la discrétisation et l'approximation de Galerkine, la formulation faible (equation (6)) devient

$$E\int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\sum_{i=0}^{N} u_i\frac{\partial \phi_i}{\partial x}dx = \left[E\phi_j(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_0^L \phi_j(x)\rho g\,dx$$

L'intégrale de la somme, étant égale à la somme des intégrales, on peut écrire

$$E\sum_{i=0}^{N}\int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x}u_i\,dx = \left[E\phi_j(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_0^L \phi_j(x)\rho g\,dx$$

Cette formulation est vrai pour l'ensemble du domaine, mais elle est aussi vrai sur chaque élément.
On considère maintenant ces intégrales sur chaque élément, et on écrit :

$$E\sum_{i=0}^{N} u_i\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x}dx = \left[E\phi_j(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x)\rho g\,dx \tag{7}$$

5. On prend cette fois des fonctions linéaires. Pour 3 éléments, on a 4 points d'interpolations ou 4 u inconnus et 4 fonctions de formes. L'équation (7) s'écrit

$$E\sum_{i=0}^{4} u_i\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_i}{\partial x}dx = \left[E\phi_j(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x)\rho g\,dx$$

---

1 Rappel $\int f g'=[fg]-\int f' g$ où g est la primitive de g'

Comme les fonctions de formes sont nulles sur une partie du domaine, on a les produits suivants :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_i}{dx} = 0 \text{ si } i \neq j, i \neq j+1,$$

et $\phi_i(0)=0$ si $i=2,3,4$ et $\phi_i(L)=0$ si $i=1,2,3$.

On écrit :

- pour l'élément 1 (seules les fonctions de forme ϕ_1 et ϕ_2 sont non nulles, ϕ_2 est nulle en 0 et L $\phi_1(0)=1$ et $\phi_1(L)=0$)

$$E\left(u_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}dx + u_2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx\right) = -E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=0} + \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x)\rho g\, dx$$

$$E\left(u_1\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}dx + u_2\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx\right) = \int_{x_1}^{x_2} \phi_2(x)\rho g\, dx$$

- pour l'élément 2 (seules les fonctions de forme ϕ_2 et ϕ_3 sont non nulles, et elles sont nulles en x= 0 et x = L)

$$E\left(u_2\int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx + u_3\int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx\right) = \int_{x_2}^{x_3} \phi_2(x)\rho g\, dx$$

$$E\left(u_2\int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx + u_3\int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx\right) = \int_{x_2}^{x_3} \phi_3(x)\rho g\, dx$$

- Pour l'élément 3 (seules les fonctions de forme ϕ_3 et ϕ_4 sont non nulles, ϕ_3 est nulle en 0 et L $\phi_4(0)=0$ et $\phi_4(L)=1$)

$$E\left(u_3\int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx + u_4\int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}dx\right) = \int_{x_3}^{x_4} \phi_3(x)\rho g\, dx$$

$$E\left(u_3\int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial\phi_4}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx + u_4\int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial\phi_4}{\partial x}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}dx\right) = E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=L} + \int_{x_3}^{x_4} \phi_4(x)\rho g\, dx$$

D'autre part, on a les résultats d'intégrations suivants

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} = \frac{1}{l} \quad , \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx} = -\frac{1}{l}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_{j+1}}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} = -\frac{1}{l} \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_{j+1}}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx} = \frac{1}{l}$$

et

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j\, dx = \frac{l}{2} \quad , \quad \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_{j+1}\, dx = \frac{l}{2}$$

En utilisant la condition limite en x=L, F(L) = b, on peut écrire

$$F(L) = SE\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=L} = b \quad \text{, d'où} \quad E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=L} = \frac{b}{S}$$

On en déduit, les systèmes suivants :

- sur l'élément 1 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=0} + \frac{\rho g L}{2} \\ \frac{\rho g L}{2} \end{bmatrix}$$

- Sur l'élément 2 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\rho g L}{2} \\ \frac{\rho g L}{2} \end{bmatrix}$$

- Sur l'élément 3 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\rho g L}{2} \\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2} \end{bmatrix}$$

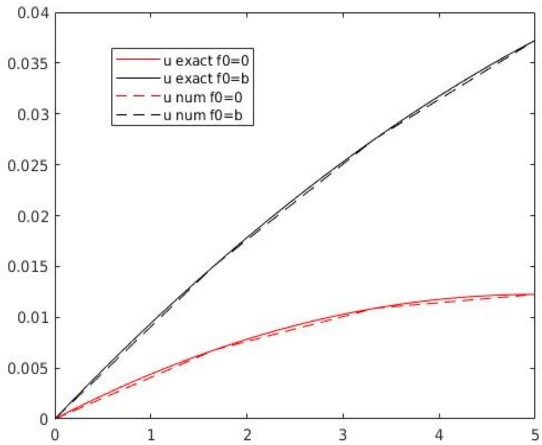
7. Pour constituer le système global de 4 équation, on remplace la 2nd ligne de ce système par la somme de la seconde ligne de l'élément 1 et de la 1ère ligne de l'élément 2. De la même façon, on remplace la 3ème ligne de ce système par la somme de la 2nd ligne de l'élément 2 et de la 1ère ligne de l'élément 3. Ceci revient à ajouter, les matrices de raideur à une matrice globale. Ce qui donne :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}+\frac{\rho g L}{2} \\ \rho g L \\ \rho g L \\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2} \end{bmatrix}$$

On connait $u(0)=u_1=0$, on peut donc réduire le système et éliminer la 1ère colonne et la première ligne. Le système ci dessus se réduit à :

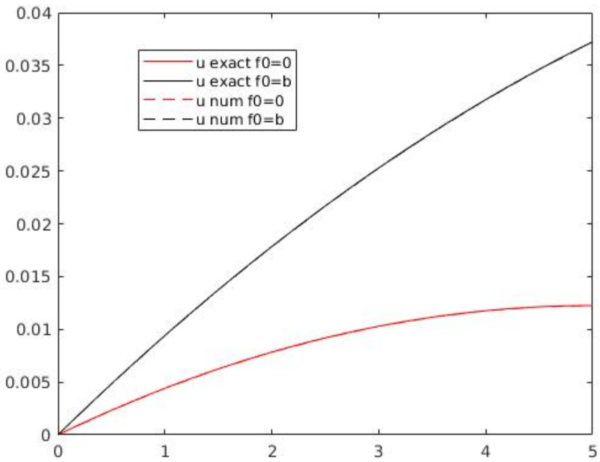
$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \rho g L \\ \rho g L \\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2} \end{bmatrix}$$

8. Le programme Exo2.m montre la résolution pour N = 3 ou 10 éléments au choix.
On obtient donc pour b= 0
u2 = 0.0068, u3 = 0.0109, u_4 = 0.0122 ;
et pour b = 15000 N
u2 = 0.0151, u3 = 0.0276, u_4 = 0.0372 ;
Les erreurs sont négligeables :
Err (b=0) = 2.25e-36



Err (b = 15000) = 1e-36

9. pour 10 éléments



Les erreurs sont elles aussi négligeables.