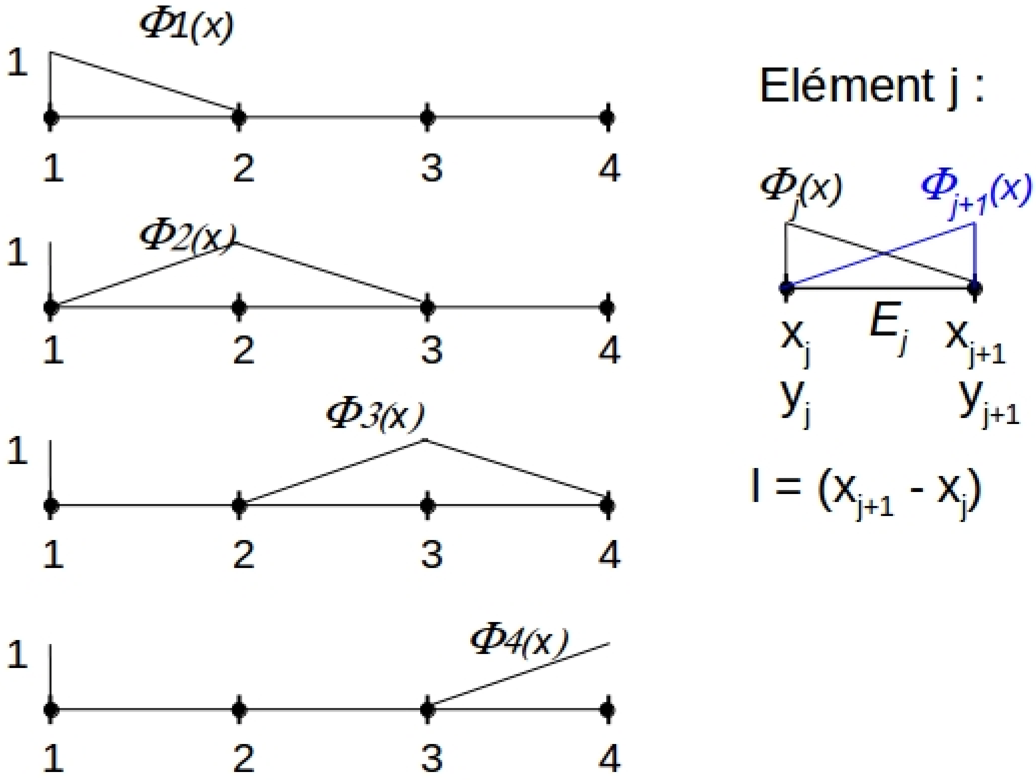
Correction TD-TP modélisation numérique, éléments finis

Exercice 1 : Soient les fonctions d'interpolations (ou de forme) $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ définies sur les éléments 1,2,3 (NB je reprseénte 3 éléments mais c'est la même logique pour 5 éléments).



Sur chaque élément E_j, on peut définir la fonction $y=f_j(x)$ comme fonction des valeurs de la fonction aux extrémités de l'élément (y_j, y_{j+1}) pondérée par les fonctions de formes sur l'élément j :

$$f_j(x)=y_j\phi_j+y_{j+1}\phi_{j+1}$$

avec :

$$\phi_j(x)=\frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} \quad \text{et} \quad \phi_{j+1}(x)=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j} \quad .$$

Soit :

$$f_j(x)=y_j\left(\frac{x_{j+1}-x}{l}\right)+y_{j+1}\left(\frac{x-x_j}{l}\right) \text{ , avec } \quad l=x_{j+1}-x_j \quad .$$

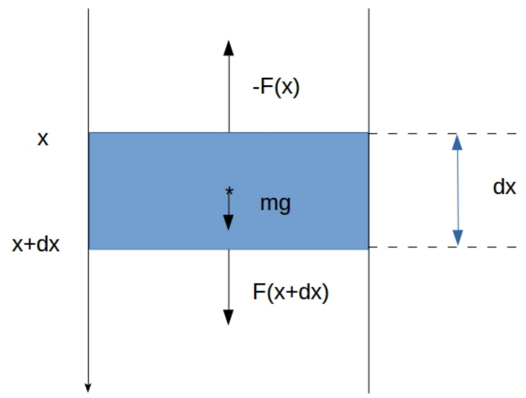
On vérifie que cette fonction est bien une fonction linéaire de x telle que $f_j(x_j)=y_j$ et $f_j(x_{j+1})=y_{j+1}$.

Le programme correspondant aux interpolations linéaires par morceaux est Exo1.m

Pour NbEl = 5 éléments, l'erreur est de 8.4, pour 10 éléments, elle est de 2.1

Exercice 2 :

1. Soit une section de poutre d'épaisseur dx et de section S à l'équilibre entre les efforts internes (la traction exercée par la barre vers le haut en x et la traction exercée vers le bas en x+dx) et son poids (vers le bas).



A l'équilibre, les forces appliquées sur la barre et le poids s'annulent :
$\sum F=0$, soit $F(x+dx)-F(x)+m\,g=0$
On a donc :

$$F(x+dx)-F(x)+\rho\,g\,S\,dx=0$$

On utilise le développement limité de $F(x)$ au voisinage de x :

$$F(x+dx)\sim F(x)+\frac{\partial F}{\partial x}dx$$

(les signe ~ indique que cette expression est une approximation de $F(x+dx)$).

On obtient donc

$$F(x)+\frac{\partial F}{\partial x}dx-F(x)+\rho\,g\,S\,dx=0$$

Soit :

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\rho\,g\,S\,dx=0$$

On simplifie par dx, et on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\rho\,g\,S=0$$

On utilise maintenant la relation Forces déplacements (voir énoncé), et on en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(SE\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\rho\,g\,S=0$$

Que l'on peut simplifier par S. Comme *E* ne dépend pas de *x*, on aboutit à l'équation ci-dessus :

$$\boxed{E\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\rho\,g=0} \qquad (1)$$

Par la suite, pour simplifier on notera $u_x=u$.

2. Solution analytique :
De l'équation (1) on déduit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-\rho\,g}{E}$$

On intègre une première fois par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-\rho g}{E}x+B \qquad (2)$$

On intègre une seconde fois par rapport à x :

$$u(x)=\frac{-\rho g}{2E}x^2+Bx+C \qquad (3)$$

On utilise les conditions limites pour déterminer les constantes
En x = 0, $u(0)=0$
De l'équation (3), on déduit $u(0)=C=0$
cas a) Si $F(L)=0$, on a simplement

$B=\frac{\rho g L}{E}$

cas b) En x = L, $F(L)=SE\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L}=b$

On utilise $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L}$ déduit de l'équation (2) que l'on remplace dans l'équation ci-dessus

$F(L)=SE\left(-\frac{\rho g}{E}L+B\right)=b$

d'où

$B=\left(\frac{b}{SE}+\frac{\rho g L}{E}\right)$

Finalement :

$$u(x)=\frac{\rho g}{E}\left[-\frac{x^2}{2}+Lx\right] \quad \text{si} \quad F(L)=0 \qquad (4)$$

$$u(x)=\frac{1}{E}\left[-\frac{\rho g}{2}x^2+\left(\frac{b}{S}+\rho g L\right)x\right] \quad \text{si} \quad F(L)=b \qquad (5)$$

3. Formulation faible

$\int_0^L v(x)\left(E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho g\right)dx=0$

On intègre par parties[1] en posant f = v(x) et $g'=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (le terme ρg n'est pas intégré par parties), ce qui donne :

$$\left[Ev(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L - \int_0^L E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \int_0^L v(x)\rho g\,dx = 0$$

Soit

$$\int_0^L E\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}dx = \left[Ev(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + \int_0^L v(x)\rho g\,dx \qquad (6)$$

4. On discrétise les solutions recherchées (les déplacements) en fonction des valeurs des déplacements aux sommets des éléments u_i et on écrit :

$u(x)=\sum_{i=0}^{N}u_i\phi_i(x)$ où les fonctions de formes (ou d'interpolation) peuvent correspondent à des interpolations constantes, linaires ou quadratiques. Ici, on étudie le cas linéaire avec 3 éléments, le nombre de points d'interpolation est donc N = 4.

1 Rappel $\int fg'=[fg]-\int f'g$ où g est la primitive de g'

On peut écrire $\frac{\partial u(x)}{\partial x}=\sum_{i=0}^{4} u_i \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}$ ou $\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=0}^{4} u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x}$

Avec cette discrétisation, l'équation (6) devient :

$$\int_0^L E \frac{\partial v}{\partial x} \sum_{i=0}^{4} u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, v(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \;+\; \int_0^L v(x) \rho g\, dx \quad .$$

L'intégrale de la somme étant égale à la somme des intégrales, et les u_i étant des constantes on obtient :

$$E \sum_{i=0}^{4} u_i \int_0^L \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, v(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \;+\; \int_0^L v(x) \rho g\, dx$$

5. L'approximation de Galerkine consiste à choisir $v(x)=\phi_j(x)$

Avec la discrétisation et l'approximation de Galerkine, on obtient

$$E \sum_{i=0}^{N} u_i \int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, \phi_j(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \;+\; \int_0^L \phi_j(x) \rho g\, dx$$

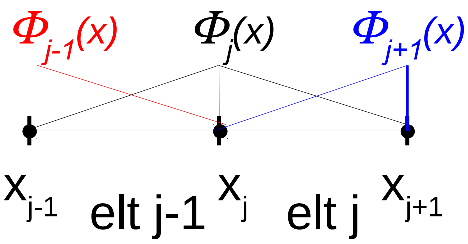
L'intégrale de la somme, étant égale à la somme des intégrales, on peut écrire

$$E \sum_{i=0}^{N} \int_0^L \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} u_i\, dx \;=\; \left[E\, \phi_j(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L \;+\; \int_0^L \phi_j(x) \rho g\, dx$$

Cette formulation est vrai pour l'ensemble du domaine, mais elle est aussi vrai sur chaque élément. On considère maintenant ces intégrales sur chaque élément, et on écrit :

$$E \sum_{i=0}^{N} u_i \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, \phi_j(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \;+\; \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi_j(x) \rho g\, dx \qquad (7)$$

6. On prend cette fois des fonctions linéaires. Pour 3 éléments, on a 4 points d'interpolations, 4 u_i inconnues et 4 fonctions de formes. L'équation (7) a des termes non nulle sur l'élément j-1 ($x \in [x_{j-1}, x_j]$) et l'élément j ($x \in [x_j, x_{j+1}]$).



On a donc :

pour l'élément j-1 $\quad E \sum_{i=0}^{4} u_i \int_{x_{j_1}}^{x_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, \phi_j(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} \;+\; \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j(x) \rho g\, dx$

pour l'élement j $\quad E \sum_{i=0}^{4} u_i \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} dx \;=\; \left[E\, \phi_j(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x_j}^{x_{j+1}} \;+\; \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j(x) \rho g\, dx$

D'autre part, on a les produits suivants : $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} = 0 \text{ si } i \neq j, i \neq j+1,$

et $\qquad \phi_i(xi)=1 \text{si } i=1,2,3,4\,,\ \phi_i(x_{i+1})=0 \text{ si } i=1,2,3\ ,\phi_i(x_{i-1})=0 \text{ si } i=2,3,4$.

On écrit les expressions ci-dessus élément par élément:

- pour l'élément 1, seules les fonctions de forme ϕ_1 et ϕ_2 sont non nulles,
  $\phi_1(x_1=0)=1$ et $\phi_1(x_2)=0$, et $\phi_2(x_1=0)=0$ et $\phi_2(x_2)=1$

pour ϕ_1 $\quad E\left(u_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx + u_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} dx \right) \;=\; -E \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_1=0} \;+\; \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x) \rho g\, dx$

pour ϕ_2 $$E\left(u_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx+u_2\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx\right)=E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\phi_2(x)\rho g\,dx$$

- pour l'élément 2, seules les fonctions de forme ϕ_2 et ϕ_3 sont non nulles,
  $\phi_2(x_2)=1$ et $\phi_2(x_3)=0$ et $\phi_3(x_2)=0$ et $\phi_3(x_3)=1$

pour ϕ_2 $$E\left(u_2\int_{x_2}^{x_3}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx+u_3\int_{x_2}^{x_3}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx\right)=-E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_2}+\int_{x_2}^{x_3}\phi_2(x)\rho g\,dx$$

pour ϕ_3 $$E\left(u_2\int_{x_2}^{x_3}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_2}{\partial x}dx+u_3\int_{x_2}^{x_3}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx\right)=E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_3}+\int_{x_2}^{x_3}\phi_3(x)\rho g\,dx$$

- Pour l'élément 3, seules les fonctions de forme ϕ_3 et ϕ_4 sont non nulles,
  $\phi_3(x_3)=1$ et $\phi_3(x_3)=0$ et $\phi_4(x_3)=0$ et $\phi_4(x_4)=1$

pour ϕ_3 $$E\left(u_3\int_{x_3}^{x_4}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx+u_4\int_{x_3}^{x_4}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}dx\right)=-E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_4=L}+\int_{x_3}^{x_4}\phi_3(x)\rho g\,dx$$

pour ϕ_4 $$E\left(u_3\int_{x_3}^{x_4}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}\frac{\partial\phi_3}{\partial x}dx+u_4\int_{x_3}^{x_4}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}\frac{\partial\phi_4}{\partial x}dx\right)=E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_4=L}+\int_{x_3}^{x_4}\phi_4(x)\rho g\,dx$$

D'autre part, on a les résultats d'intégrations suivants

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}=\frac{1}{l}\quad,\quad\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}=-\frac{1}{l}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}=-\frac{1}{l}\qquad\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}=\frac{1}{l}$$

et

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}}\phi_j\,dx=\frac{l}{2}\quad,\quad\int_{x_j}^{x_{j+1}}\phi_{j+1}\,dx=\frac{l}{2}$$

En utilisant la condition limite en x=L, F(L) = b, on peut écrire

$$F(L)=SE\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=L}=b\quad\text{, d'où}\quad E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=L}=\frac{b}{S}$$

On en déduit, les systèmes suivants :

- sur l'élément 1 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=0}+\frac{\rho g L}{2}\\ +E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_2}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}$$

- Sur l'élément 2 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_2}+\frac{\rho g L}{2}\\ +E\frac{\partial u}{\partial x}\Big]_{x=x_3}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}$$

- Sur l'élément 3 :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\ u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[-E\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_3}+\frac{\rho g L}{2}\\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}$$

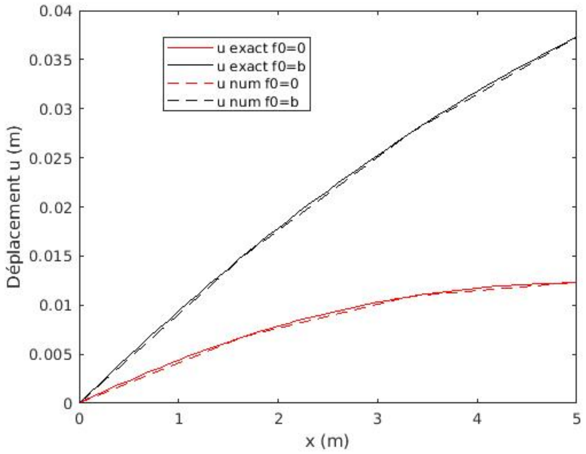
7. Pour constituer le système global de 4 équation, on écrit chaque sous système en fonction du vecteur $(u_{1,}u_{2,}u_{3,}u_4)^T$. certains termes de droite se somment, d'autres s'éliminent

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0}+\frac{\rho g L}{2}\\ \rho g L\\ \rho g L\\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}$$

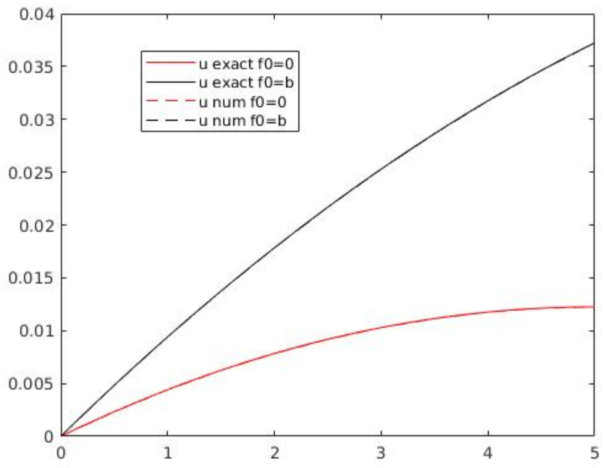
On connaît $u(0)=u_1=0$, on peut donc « réduire » le système et éliminer la 1ère colonne et la première ligne. Le système ci-dessus se réduit à :

$$\frac{E}{L}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho g L+\frac{E}{L}u_1\\ \rho g L\\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho g L\\ \rho g L\\ \frac{b}{S}+\frac{\rho g L}{2}\end{bmatrix}$$

8-9. Le programme Exo2.m montre la résolution pour N = 3 ou 10 éléments au choix.
On obtient donc pour b= 0
u2 = 0.0068, u3 = 0.0109, u_4 = 0.0122 ;
et pour b = 15000 N
u2 = 0.0151, u3 = 0.0276, u_4 = 0.0372 ;



10. pour 10 éléments



Plus le nombre d'éléments augmente, plus la solution numérique est proche de la solution analytique