

# Examen : Traitement Numérique du Signal

ZZ2 F1-F5 - Année 2010-2011

*Les documents et calculatrices sont autorisés*

## Exercice 1 Equation aux différences du deuxième ordre (8 pts)

Soit le système discret défini par l'équation suivante :

$$y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = x[k]$$

où  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients réels,  $x[k]$  le signal à temps discret d'entrée et  $y[k]$  le signal à temps discret de sortie.

1. Donner la fonction de transfert en  $z$  de ce système, notée  $H(z)$ . (0.5pt)

**Etude de la stabilité :**

2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante concernant la fonction de transfert d'un système discret pour que celui-ci soit stable et causal ? (0.5pt)
3. Calculer les pôles de la fraction rationnelle  $H(z)$  (on fera attention à distinguer 2 cas, selon que les pôles sont réels ou complexes). Tracer dans le plan  $(a_1, a_2)$ , les zones qui correspondent aux pôles dans le cas réel et dans le cas complexe. (1pt)
4. Dans le cas des **pôles réels** :
  - a) Quelle est la condition sur les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  pour avoir un système stable et causal. (1pt)
  - b) Tracer dans le plan  $(a_1, a_2)$  la zone de stabilité associée aux pôles réels. (0.5pt)
5. Dans le cas des **pôles complexes** :
  - a) Quelle est la condition sur les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  pour avoir un système stable et causal. (1pt)
  - b) Tracer dans le plan  $(a_1, a_2)$  la zone de stabilité associée aux pôles complexes. (0.5pt)
6. Tracer dans le plan  $(a_1, a_2)$  la zone de stabilité d'un système régi par une équation aux différences du deuxième ordre. (0.5pt)

**Réponse temporelle et fréquentielle :**

7. Dans le cas où  $H(z)$  possède des pôles réels, donner la réponse impulsionnelle de ce système. (vous utiliserez la méthode de votre choix) (1.5pt)
8. Donner la réponse fréquentielle de ce système du deuxième ordre. (1pt)

## Exercice 2 Analyse spectrale : radar Doppler (6 pts)

Un radar Doppler est un système qui utilise l'effet Doppler de l'écho réfléchi par une cible afin de mesurer sa vitesse radiale. Cet effet représente le décalage de fréquence d'une onde acoustique ou électromagnétique entre son émission et sa réception après l'écho. Cela permet ainsi une mesure directe et extrêmement précise de la composante vitesse de la cible dans l'axe du faisceau. Après démodulation, le signal  $x(t)$  à étudier est une somme d'oscillations (sinusoïdes par exemple). Les fréquences de ces sinusoïdes sont supposées être espacées d'au moins 200Hz, le rapport maximal de leur amplitude est de 50 et l'on échantillonne le signal  $x(t)$  à la fréquence d'échantillonnage de 5kHz pour obtenir le signal discret  $x[n]$ . On souhaite une précision de 10Hz sur l'estimation

des fréquences.

L'analyse spectrale est réalisée à partir d'un échantillon de  $N$  valeurs de  $x[n]$  à l'aide d'une transformée de Fourier discrète modifiée (utilisant une fenêtre d'apodisation) de la forme suivante :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]h[n]e^{-2\pi j \frac{nk}{L}} \text{ pour } k \in 0, \dots, L-1$$

où,  $h[n]$  est une fenêtre de pondération de longueur  $N$ ,  $L$  est le nombre de points de calcul de la TFD avec  $L \geq N$  (*zero padding*).

1. Déterminez en détaillant les différents paramètres :  $N$ ,  $L$  et  $h$  de façon à remplir les critères exigés. (6pts)

Let N.

Fenêtres de pondération	Rectangulaire	Barlett	Hanning	Hamming	Blackman
Atténuation en dB entre lobe principal et secondaire	13	24	31	43	57
Demi-largeur du lobe principal normalisée	$\frac{2}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{4}{N}$	$\frac{6}{N}$

FIGURE 1 – Paramètres des fenêtres d'apodisation

### Exercice 3 Synthèse de filtre (6 pts)

Par la technique de la transformation bilinéaire, on souhaite synthétiser un filtre numérique passe-haut RII, qui présente une fréquence de coupure  $f_c = \frac{f_e}{3}$  et une atténuation dans la bande coupée d'au moins 20dB pour les fréquences inférieures à  $\frac{f_e}{9}$ . Le système fonctionne à la fréquence d'échantillonnage de 18kHz.

1. Tracer le gabarit du filtre analogique équivalent. (1pt)
2. Afin de réaliser cette synthèse on s'aide d'un logiciel de synthèse de filtre numérique. En vous aidant de la figure 2, trouver la fonction de transfert analogique (en  $p$ ) qui respecte ces conditions. On cherchera une solution parmi les filtres de Butterworth. (3pts)
3. Calculer la fonction de transfert en  $z$  du filtre par transformation bilinéaire. (2pt)

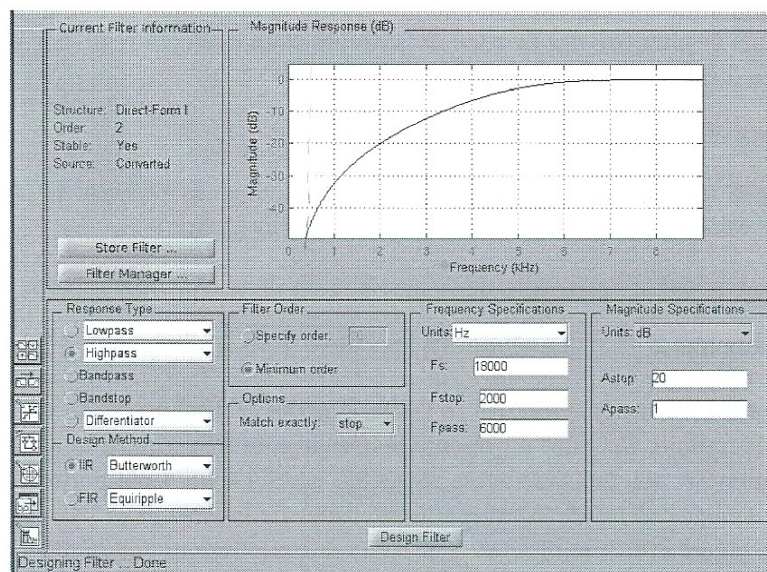


FIGURE 2 – Capture d'écran du logiciel de synthèse