Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas
I ciclo 2021

Proyecto 5
Teoría de Colas

Emmanuel Carballo Vargas B41424
Franciny Marín Sibaja B74459
José Martí Hidalgo Castro B63466

Profesor: Fabián Abarca

Fecha de entrega: 3 de agosto del 2021

1. Teoría de colas M/M/s

1.1. Determinación teórica del número s de servidores necesarios para cumplir el requisito

Para un proceso de vacunación, a un alto número de candidatos a recibir la dosis, se debe de considerar la cantidad de servidores (profesionales en medicina). Según el enunciado, se indica que cada servidor es capaz de atender una cantidad de tiene la capacidad de atender a 0,25 personas/minuto, (parámetro ν) como la tasa de partidas, con una taza llegada $\lambda = 7$ personas por minuto.

Con estos datos se obtiene que con un solo servidor el sistema se inestabiliza (o es simplemente incapaz), por tanto es necesario determinar la cantidad de servidores necesarios para suplir con la cola.

Los sistemas M/M/s son Llamados así porque los procesos de llegada y partida son de tipo cadenas de Markov con s servidores. los parámetros de estos sistemas están descritos por las siguientes formulas:

$$\Omega_i = s\nu \text{ para } i > s \tag{1}$$

Probabilidad de que hayan cero personas en el proceso

$$\Phi_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1} \tag{2}$$

Probabilidad de estado estable

$$\Phi_i = \frac{s^s \rho^i}{s!}\Phi_0 \tag{3}$$

Promedio de personas en la fila

$$L_q = \frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}\Phi_0 \tag{4}$$

$$P(\text{X(t) o menos }) = \sum_{i=0}^{x} \Phi_i \tag{5}$$

De esta manera Φ_i es la probabilidad del estado i, y así, la sumatoria de los estados Φ_i desde el estado $i = 0$ hasta un estado final. Es la probabilidad de que el sistema se encuentre en ese estado final o por debajo.

2. Cantidad de Servidores a solicitud

Del enunciado se obtienen los siguientes datos: - $\lambda = 7$ personas/minuto - $\nu = 0.25$ personas/minuto - El sistema no debe exceder 100 personas en fila durante el 95

De manera que, se logra reconocer que es un proceso **M/M/s**, dado que se requiere que el sistema no exceda 100 personas en fila durante el 95

$$P(\text{101 o más clientes en el sistema}) = \sum_{i=101}^{\infty} (1-\rho)\rho^i = 1 - \sum_{i=0}^{100}(1-\rho)\rho^i = \rho^{100}$$

Ahora, se sabe que $\rho = \lambda/s\nu$, además, se requiere una probabilidad menor o igual al 5

$$
\begin{aligned}
P(101 \text{ o más clientes en el sistema}) = \rho^{100} = \left(\frac{\lambda}{s\nu}\right)^{100} &\leq 0{,}05 \\
\Rightarrow s^{100} \geq \frac{\lambda^{100}}{0{,}05\nu^{100}} &= \frac{7^{100}}{0{,}05 \cdot 0{,}25^{100}} \\
\Rightarrow \quad s \geq \sqrt[100]{\frac{7^{100}}{0{,}05 \cdot 0{,}25^{100}}} \\
\Rightarrow s \geq 28{,}85 \approx 29
\end{aligned}
$$

Por lo que para cumplir el requisito se requieren de al menos 29 servidores.