Complejidad Computacional
Tarea 3

Emmanuel Cruz Hernández

Índice

1. ¿Son compatibles las definiciones dadas por Garey Johnson sobre P y NP con las dadas por Wilf? Explique con precisión.

Para el caso de las definiciones sobre P, sí son compatibles. Antes que nada, recordemos las definiciones de ambos autores. La definición de Garey Johnson dice que la clase P corresponde a todos los lenguajes para los que existe una Máquina de Turing determinista que reconoce un lenguaje en tiempo polinomial. La definición dada por Wilf nos dice que un problema P pertenece a la clase P, es aque para los que existe un algoritmo A y un número c tal que para cada ejemplar I del problema P el algoritmo A produce una solución en tiempo O(B^c) donde B es la cantidad de bits en la cadena de entrada al algoritmo.

Si analizamos ambas definiciones, podemos observar que sí son compatibles, ya que ambos autores en el fondo reducen estos problemas a un conjunto de problemas de decisión. Esto por el límite de tiempos que le dan, tanto a la máquina de Turing, como al algoritmo A para las definiciones de Garey Johnson y Wilf, respectivamente. Básicamente con la Máquina de Turing se dice si un lenguaje es es reconocido en tiempo polinomial y con el algoritmo A, se dice si una entrada es un ejemplar de un problema P en tiempo O(B^c), que básicamente se puede ver como tiempo polinomial. Por lo tanto, ambas definiciones son compatibles.

Recordemos las definiciones de los problemas NP de ambos autores. Garey Johnson dicen que un problema NP se puede ver en términos de un algoritmo no determinista que consta de dos partes: fase adivinadora y fase verificadora. Así que los problemas NP son problemas de decisión que son resueltos con algoritmos no determinista polinomiales. La definición dada por Wilf, dice que un problema es NP si existe un algoritmo A que para cada ejemplar que pertenece al problema, la respuesta del algoritmo A es sí si tiene un certificado asociado. Además Wilf menciona que un problema que está en la clase NP, es un problema de decisión en el que se responde con una respuesta afirmativa si una entrada al algoritmo A cumple con un ejemplar que soluciona el problema, entonces no se pide una solución, sino más bien, la verificación de si un ejemplar es solución o no. En conclusión, ambas definiciones son compatibles, ya que ambas se basan en el no determinismo y en los algoritmos no determinista polinomiales.

2. Defina con sus propias palabras el concepto de certificado.

Un certificado es una cinta finita de entradas para una máquina de turing que reconoce un lenguaje. En mis propias palabras, entiendo que un certificado es como un arreglo en el que hay entradas disponibles para poder reconocer un lenguaje con las transiciones definidas para que la máquina de turing pueda reconocer si una entrada pertenece a un lenguaje o no, usando las entradas de la cinta.

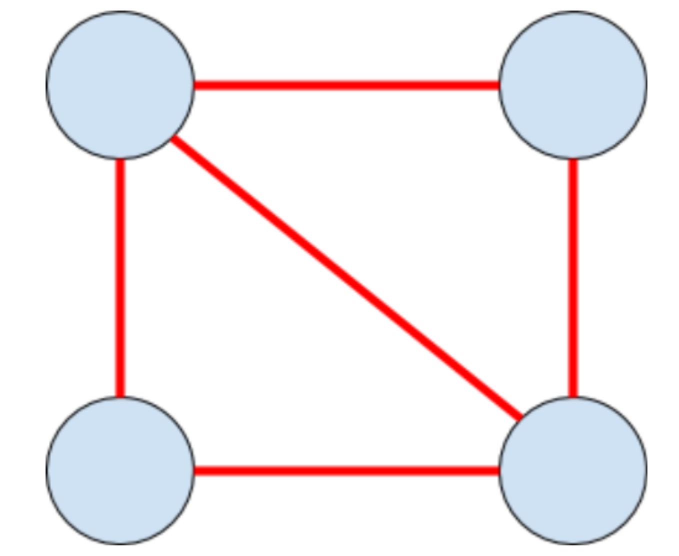
3. Indique las diferencias y similitudes entre certificado y la forma cómo generamos en clase una propuesta de solución en la fase adivinadora usando la primitiva nd-choice.

Un certificado, como se mencionó anteriormente, es una cinta de la máquina de Turing y se basa en transiciones. Un certificado nos ayuda a saber si una entrada pertenece o no a un lenguaje. Dicho lo anterior, una similitud de un certificado con la primitiva nd-choice es que ambos siguen un camino o una ruta no determinista para dar una respuesta, esto es, que ambos nos dan una secuencia de pasos que en conjunto forman un camino para llegar a estados de aceptación. La diferencia entre ambas, es que nd-choice se basa de un conjunto de opciones para dar una respuesta, pero un certificado más bien se basa en transiciones para llegar a estados de aceptación con ayuda de una máquina de Turing.

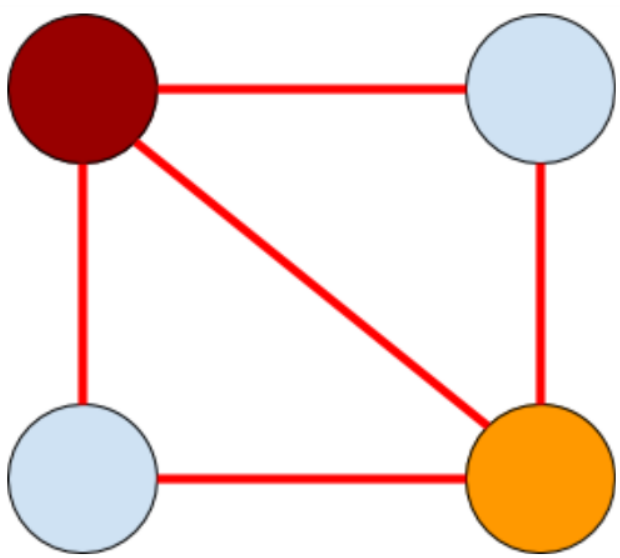
4. Considere el Ejemplo presentado por el autor Wilf, en la Sección 5.3, p.113.

4.1. Indique cuál es la gráfica G del ejemplo.

Según la descripción dada en el libro, la gráfica consta de 4 vértices y 5 aristas.



4.2. Dar una 3-coloración para la gráfica G, e ilustre la transformación



Asignamos números a los colores.

- Marrón = 1
- Azul = 2
- Naranja = 3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(1) &:= \{\mathrm{x}_{1,1}, \mathrm{x}_{1,2}, \mathrm{x}_{1,3}\} \\
\mathrm{T}(1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{1,2}\} \\
\mathrm{U}(1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{1,3}\} \\
\mathrm{V}(1) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{1,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(2) &:= \{\mathrm{x}_{2,1}, \mathrm{x}_{2,2}, \mathrm{x}_{2,3}\} \\
\mathrm{T}(2) &:= \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{2,2}\} \\
\mathrm{U}(2) &:= \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{2,3}\} \\
\mathrm{V}(2) &:= \{\overline{x}_{2,2}, \overline{x}_{2,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(3) &:= \{\mathrm{x}_{3,1}, \mathrm{x}_{3,2}, \mathrm{x}_{3,3}\} \\
\mathrm{T}(3) &:= \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{3,2}\} \\
\mathrm{U}(3) &:= \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{3,3}\} \\
\mathrm{V}(3) &:= \{\overline{x}_{3,2}, \overline{x}_{3,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(4) &:= \{\mathrm{x}_{4,1}, \mathrm{x}_{4,2}, \mathrm{x}_{4,3}\} \\
\mathrm{T}(4) &:= \{\overline{x}_{4,1}, \overline{x}_{4,2}\} \\
\mathrm{U}(4) &:= \{\overline{x}_{4,1}, \overline{x}_{4,3}\} \\
\mathrm{V}(4) &:= \{\overline{x}_{4,2}, \overline{x}_{4,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_1, 1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{2,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_1, 2) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{2,2}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_1, 3) &:= \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{2,3}\}
\end{aligned}
$$

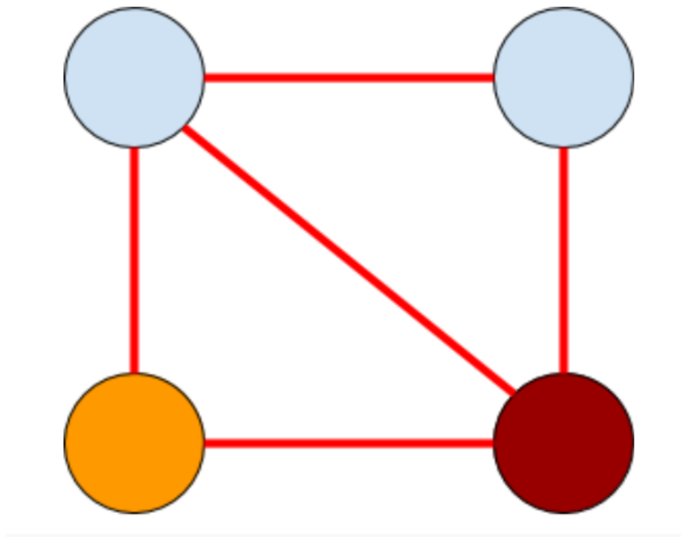
$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_2, 1) &:= \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{4,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_2, 2) &:= \{\overline{x}_{2,2}, \overline{x}_{4,2}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_2, 3) &:= \{\overline{x}_{2,3}, \overline{x}_{4,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_3, 1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{3,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_3, 2) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{3,2}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_3, 3) &:= \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{3,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_4, 1) &:= \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{4,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_4, 2) &:= \{\overline{x}_{3,2}, \overline{x}_{4,2}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_4, 3) &:= \{\overline{x}_{3,3}, \overline{x}_{4,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_5, 1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{4,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_5, 2) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{4,2}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_5, 3) &:= \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{4,3}\}
\end{aligned}
$$

4.3. Dar una coloración “mala” para G, e ilustre la transformación



Asignamos números a los colores.

- Marrón = 1
- Azul = 2
- Naranja = 3

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(1) &:= \{\mathrm{x}_{1,1}, \mathrm{x}_{1,2}, \mathrm{x}_{1,3}\} \\
\mathrm{T}(1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{1,2}\} \\
\mathrm{U}(1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{1,3}\} \\
\mathrm{V}(1) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{1,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(2) &:= \{\mathrm{x}_{2,1}, \mathrm{x}_{2,2}, \mathrm{x}_{2,3}\} \\
\mathrm{T}(2) &:= \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{2,2}\} \\
\mathrm{U}(2) &:= \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{2,3}\} \\
\mathrm{V}(2) &:= \{\overline{x}_{2,2}, \overline{x}_{2,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(3) &:= \{\mathrm{x}_{3,1}, \mathrm{x}_{3,2}, \mathrm{x}_{3,3}\} \\
\mathrm{T}(3) &:= \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{3,2}\} \\
\mathrm{U}(3) &:= \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{3,3}\} \\
\mathrm{V}(3) &:= \{\overline{x}_{3,2}, \overline{x}_{3,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}(4) &:= \{\mathrm{x}_{4,1}, \mathrm{x}_{4,2}, \mathrm{x}_{4,3}\} \\
\mathrm{T}(4) &:= \{\overline{x}_{4,1}, \overline{x}_{4,2}\} \\
\mathrm{U}(4) &:= \{\overline{x}_{4,1}, \overline{x}_{4,3}\} \\
\mathrm{V}(4) &:= \{\overline{x}_{4,2}, \overline{x}_{4,3}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(\mathrm{e}_1, 1) &:= \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{2,1}\} \\
\mathrm{D}(\mathrm{e}_1, 2) &:= \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{2,2}\}
\end{aligned}
$$

$D(e_1, 3) := \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{2,3}\}$

$D(e_2, 1) := \{\overline{x}_{2,1}, \overline{x}_{4,1}\}$
$D(e_2, 2) := \{\overline{x}_{2,2}, \overline{x}_{4,2}\}$
$D(e_2, 3) := \{\overline{x}_{2,3}, \overline{x}_{4,3}\}$

$D(e_3, 1) := \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{3,1}\}$
$D(e_3, 2) := \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{3,2}\}$
$D(e_3, 3) := \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{3,3}\}$

$D(e_4, 1) := \{\overline{x}_{3,1}, \overline{x}_{4,1}\}$
$D(e_4, 2) := \{\overline{x}_{3,2}, \overline{x}_{4,2}\}$
$D(e_4, 3) := \{\overline{x}_{3,3}, \overline{x}_{4,3}\}$

$D(e_5, 1) := \{\overline{x}_{1,1}, \overline{x}_{4,1}\}$
$D(e_5, 2) := \{\overline{x}_{1,2}, \overline{x}_{4,2}\}$
$D(e_5, 3) := \{\overline{x}_{1,3}, \overline{x}_{4,3}\}$

La asignación es la misma, sin embargo, algunas cláusulas no se cumplen, es decir, algunas cláusulas D son falsas, ya que tienen el mismo color y de esta forma no se cumple ni la satisfacibilidad ni la coloración.

5. En la página 114 del libro, casi al final, el autor (Wilf) hace un par de preguntas: "Is it true ...? ... why?" Conteste el why? Justifique su respuesta.

En la cinta sólo es válido ir moviendo de entrada sólo en los vecinos derecho e izquierdo. Esto es, no se pueden dar más de dos saltos, siempre se va recorriendo la cinta una entrada a la derecha o una entrada a la izquierda de la casilla actual. Dicho lo anterior, la respuesta a la pregunta es no, ya que según lo descrito, la cinta se movería o daría saltos de más de los vecinos próximos a la posición de la entrada actual de la cinta.

6. En la p. 115 del libro, como a la mitad, el autor pide al lector describir tres conjuntos de cláusulas... ¡Descríbalos! y justifique su respuesta.

- La entrada actual de una cinta está en una sola casilla: Dado un paso i y un par (j, k) la cláusula $\overline{T}_{i,j}$, $\overline{T}_{i,k}$ es una cláusula verdadera.
- La máquina está en el estado 0. La entrada actual está en la entrada 1. La entrada se encuentra en la entrada desde 1 a n y el certificado C(x) está en las entradas 0, -1, ..., -P(n).
  - Tenemos 3 cláusulas $Q_{0,0}$, $T_{0,1}$ y $S_{0,j}$,x_j . Cada cláusula para 1<=j<=n.
  - Y una cláusula $S_{0,k}$,c_k para cada k, tal que $-P(n) \leq k \leq 0$.
- La máquina está en el estádo q_y en el paso P(n). La cláusula es $Q_{P(n)}$,Y por la definición de $Q_{i,j}$.

7. Justifique que en efecto la transformación presentada por Wilf es polinomial.

Lo primero que se hace es presentar la cantidad de variables para construir las cláusulas y además se menciona que la máquina de Turing usará una cinta que no pasará más de P(n) entradas de la cinta. Entonces, con esta observación se puede limitar a que el cálculo de la aceptación de una entrada tomará tiempo P(n). También se usan índices para poder recorrer la cinta. Uno de estos índices corresponde a las entradas de la cinta, que sabemos es de tamaño P(n); otro de los índices recorre el alfabeto del lenguaje que además debe ser finito; y el último índice corresponde a los estados de la máquina de Turing, que también es finito. Dicho lo anterior, como ningún índice toma más de tiempo O(P(n)), que es polinomial entonces la transformación que se muestra en el libro es polinomial.

8. Considere el siguiente algoritmo para determinar si una gráfica tiene un clan de tamaño k. Primero, genere todos los subconjuntos de vértices que contengan exactamente k vértices. Hay O(nk) de tales subconjuntos. Entonces, verificar si alguna de las subgráficas inducidas por estos subconjuntos es completa. ¿Este algoritmo tiene desempeño computacional polinomial? Justifique. Piense que si sí lo es, entonces implica que P = NP.

No es polinomial. Del libro podemos saber que existen O(nk) subconjuntos y para poder saber cuales son todos estos subconjuntos se deben obtener todos los subconjuntos posibles formados con todos los vértices. En particular, esto se puede ver cómo encontrar todas las combinaciones posibles de vértices de todos los tamaños posibles para formar los subconjuntos. Una vez formados los subconjuntos, nos interesa en particular saber cuales son aquellos de tamaño K.

Obtener el conjunto potencial de un conjunto de vértices nos cuesta tiempo (2n) y obtener todos aquellos subconjuntos de tamaño K nos cuesta O(n), donde n es el tamaño del conjunto potencia.