



**DIE
TI. NA** UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA ELETTRICA
E TECNOLOGIE DELL'INFORMAZIONE
SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE

**ELABORATO DI COMPLEMENTI DI CONTROLLI
INGEGNERIA DELL'AUTOMAZIONE E ROBOTICA**

**Analisi e Controllo di un
Sistema Multivariabile**

Chiar.mo Prof.

Pironti Alfredo

Patellaro Emmanuel

P38000239

Anno Accademico 2023/2024

INDICE

1	INTRODUZIONE.....	1
2	ANALISI DEL SISTEMA.....	1
2.1	MODELLO FISICO-MATEMATICO DEL SISTEMA.....	2
2.2	MODELLO I-S-U.....	3
2.3	PARAMETRI.....	4
2.4	OBIETTIVI DEL CONTROLLO.....	5
3	ANALISI PRELIMINARE.....	6
4	CONTROLLO CON ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI & OSSERVATORE & AZIONE INTEGRALE.....	9
4.1	SISTEMA AUMENTATO CON AZIONE INTEGRALE.....	10
4.2	SODDISFACIMENTO DELLE SPECIFICHE.....	12
4.3	OSSERVATORE.....	13
4.4	RISULTATI.....	13
5	CONTROLLO OTTIMO LQ.....	16
5.1	CONTROLLO.....	17
5.2	RISULTATI.....	18
6	CONTROLLO OTTIMO LQG.....	21
6.1	FILTRO DI KALMAN.....	21
6.2	CONTROLLO.....	22
6.3	RISULTATI.....	24
6.3.1	OSSERVATORE.....	25
6.3.2	FILTRO DI KALMAN.....	26
7	MIXED SENSITIVITY DESIGN.....	28
7.1	CONTROLLO.....	29
7.2	RISULTATI.....	32
7.3	DIFFERENZE TRA CONTROLLO H_∞ E CONTROLLO LQ.....	33
8	ALTRI RISULTATI.....	35
8.1	ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI.....	35
8.2	CONTROLLO OTTIMO LQ E LQG.....	36

1 INTRODUZIONE

L'obiettivo di questo elaborato è quello di presentare lo sviluppo di varie metodologie di controllo studiate durante il corso di Complementi Di Controlli [CC]. Nello specifico tali metodologie sono relative a sistemi MIMO (Multiple-Input & Multiple-Output).

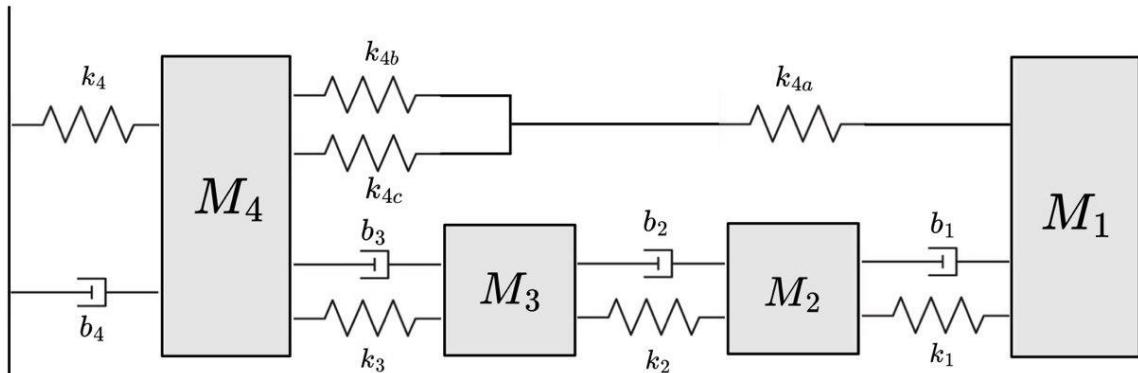
Le principali tecniche a cui è stato fatto riferimento sono:

- *Assegnamento Autovalori*
- *Controllo ottimo*
 - *Linear Quadratic Control (LQ)*
 - *Linear Quadratic Gaussian Control (LQG)*
- *Mixed Sensitivity Design*

Tutto ciò verrà svolto in ambiente MATLAB con l'ausilio di Simulink.

2 ANALISI DEL SISTEMA

Il sistema preso in esame è il seguente:



Come è possibile notare dalla figura, il sistema è composto da quattro masse, le quali sono collegate tra loro attraverso diverse molle e diversi smorzatori.

Nella seguente trattazione si è supposto che gli spostamenti delle singole masse abbiano verso positivo verso destra e verso negativo verso sinistra, in maniera tale da rendere più agevole lo sviluppo del sistema.

Le molle k_{4b} e k_{4c} sono collegate in parallelo, il quale, a sua volta, è collegato in serie con la molla k_{4a} . Possiamo dunque considerare un'unica costante elastica k_{eq} che è possibile calcolare in questo modo¹: $k_{eq} = \frac{k_{4a}(k_{4b}+k_{4c})}{k_{4a}+k_{4b}+k_{4c}}$

Inoltre, la molla k_1 e lo smorzatore b_1 collegano le masse 1 e 2; la molla k_2 e lo smorzatore b_2 collegano le masse 2 e 3; la molla k_3 e lo smorzatore b_3 collegano le masse 3 e 4; la molla k_4 e lo smorzatore b_4 collegano le masse 4 ad un vincolo fisso; la molla k_{eq} collega le masse 1 e 4.

Infine, gli ingressi di controllo sono le forze che possono essere applicate su ognuna delle masse. Nello specifico, sono state utilizzate le forze F_2 e F_4 (il pedice mi indica a quale massa ognuna di queste forze è applicata).

2.1 MODELLO FISICO-MATEMATICO DEL SISTEMA

Il modello del sistema in esame è molto semplice da ricavare. Con gli opportuni calcoli e ragionamenti si arriva alla seguente conclusione:

$$m_1\ddot{s}_1 = -k_{eq}(s_1 - s_4) - k_1(s_1 - s_2) - b_1(\dot{s}_1 - \dot{s}_2)$$

$$m_2\ddot{s}_2 = -k_2(s_2 - s_3) - k_1(s_2 - s_1) - b_1(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - b_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_3) + F_2$$

$$m_3\ddot{s}_3 = -k_3(s_3 - s_4) - k_2(s_3 - s_2) - b_3(\dot{s}_3 - \dot{s}_4) - b_2(\dot{s}_3 - \dot{s}_2)$$

$$m_4\ddot{s}_4 = -k_4s_4 - b_4\dot{s}_4 - k_{eq}(s_4 - s_1) - k_3(s_4 - s_3) - b_3(\dot{s}_4 - \dot{s}_3) + F_4$$

¹ $k_{par} = k_{4b} + k_{4c}$ $k_{eq} = (\frac{1}{k_{par}} + \frac{1}{k_{4a}})^{-1}$

2.2 MODELLO I-S-U

Per costruire il *modello I-S-U* del sistema in esame, occorre associare ad ogni grandezza utile ai fini della descrizione di questo, una *variabile di stato*.

Variabile di stato	Grandezza fisica
x_1	s_1
x_2	s_2
x_3	s_3
x_4	s_4
x_5	\dot{s}_1
x_6	\dot{s}_2
x_7	\dot{s}_3
x_8	\dot{s}_4

Fatto ciò, si può identificare anche il *vettore degli ingressi* ponendo $u_1 = F_2$ e $u_2 = F_4$.

Ottengo dunque, sostituendo tali variabili all'interno delle equazioni prima trovate, il seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_5 \\ \dot{x}_2 = x_6 \\ \dot{x}_3 = x_7 \\ \dot{x}_4 = x_8 \\ \dot{x}_5 = -\frac{k_{eq} + k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_2 + \frac{k_{eq}}{m_1}x_4 - \frac{b_1}{m_1}x_5 + \frac{b_1}{m_1}x_6 \\ \dot{x}_6 = \frac{k_1}{m_2}x_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_3 + \frac{b_1}{m_2}x_5 - \frac{b_1 + b_2}{m_2}x_6 + \frac{b_2}{m_2}x_7 + \frac{u_1}{m_2} \\ \dot{x}_7 = \frac{k_2}{m_3}x_2 - \frac{k_3 + k_2}{m_3}x_3 + \frac{k_3}{m_3}x_4 + \frac{b_2}{m_3}x_6 - \frac{b_2 + b_3}{m_3}x_7 + \frac{b_3}{m_3}x_8 \\ \dot{x}_8 = \frac{k_{eq}}{m_4}x_1 + \frac{k_3}{m_4}x_3 - \frac{k_4 + k_{eq} + k_3}{m_4}x_4 + \frac{b_3}{m_4}x_7 - \frac{b_3 + b_4}{m_4}x_8 + \frac{u_2}{m_4} \end{array} \right.$$

2.3 PARAMETRI

Vengono ora assegnati i *valori* ad ogni grandezza fisica all'interno del modello

Massa	[<i>Kg</i>]
m_1	5.0
m_2	2.0
m_3	1.0
m_4	4.0

Smorzatori	[<i>N · s/m</i>]
b_1	0.47
b_2	0.35
b_3	0.41
b_4	0.23

Costanti Elastiche	[<i>N/m</i>]
k_1	4.3
k_2	5.2
k_3	2.5
k_4	5.1
k_{4a}	4.9
k_{4b}	2.3
k_{4c}	6.2

2.4 OBIETTIVI DEL CONTROLLO

Prima di partire con l'implementazione del controllo, vengono ora definiti gli obiettivi di questo e i risultati che si vogliono ottenere.

- *Spostamento* della massa 1 e della massa 3 rispettivamente di 2 m e 2.5 m applicando le forze F_2 e F_4 sulle rispettive masse
- *Sovraelongazione* inferiore al 20%
- *Tempo di assestamento all'1%* ($\varepsilon_1 = 1$) non superiore ai 15 secondi

Per semplicità si trascureranno gli effetti dell'*attrito*.

3 ANALISI PRELIMINARE

```
%Masce
m1 = 5.0;
m2 = 2.0;
m3 = 1.0;
m4 = 4.0;

%Smorzatori
b1 = 0.47;
b2 = 0.35;
b3 = 0.41;
b4 = 0.23;

%Costanti Elastiche
k1 = 4.3;
k2 = 5.2;
k3 = 2.5;
k4 = 5.1;
k4a = 4.9;
k4b = 2.3;
k4c = 6.2;
keq = (k4a*(k4b+k4c))/(k4a+k4b+k4c);

%Modello Fisico-Matematico
A = [0 0 0 0 1 0 0 0;
      0 0 0 0 0 1 0 0;
      0 0 0 0 0 0 1 0;
      0 0 0 0 0 0 0 1;
      -(keq+k1)/m1 k1/m1 0 keq/m1 -b1/m1 b1/m1 0 0;
      k1/m2 -(k1+k2)/m2 k2/m2 0 b1/m2 -(b1+b2)/m2 b2/m2 0;
      0 k2/m3 -(k3+k2)/m3 k3/m3 0 b2/m3 -(b2+b3)/m3 b3/m3;
      keq/m4 0 k3/m4 -(k4+keq+k3)/m4 0 0 b3/m4 -(b3+b4)/m4];

B = [zeros(5,2);
      1/m2 0;
      0 0;
      0 1/m4];

C = [1 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0 0 0];

D = zeros(2,2);

%Definizione del sistema
sys = ss(A,B,C,D);
```

```

sys =
A =
    x1      x2      x3      x4      x5      x6      x7      x8
x1      0       0       0       0       1       0       0       0
x2      0       0       0       0       0       1       0       0
x3      0       0       0       0       0       0       1       0
x4      0       0       0       0       0       0       0       1
x5     -1.482   0.86     0     0.6216  -0.094   0.094     0     0
x6      2.15   -4.75    2.6      0     0.235   -0.41    0.175     0
x7      0       5.2    -7.7    2.5      0     0.35   -0.76    0.41
x8     0.7771     0     0.625  -2.677     0       0   0.1025  -0.16

B =
    u1      u2
x1      0       0
x2      0       0
x3      0       0
x4      0       0
x5      0       0
x6     0.5      0
x7      0       0
x8      0       1

C =
    x1  x2  x3  x4  x5  x6  x7  x8
y1     1  0  0  0  0  0  0  0
y2     0  0  1  0  0  0  0  0

D =
    u1      u2
y1     0       0
y2     0       0

```

Innanzitutto, prima di addentrarmi nel controllo, verifico la stabilità del sistema a ciclo aperto.
A tale fine calcolo gli autovalori del sistema:

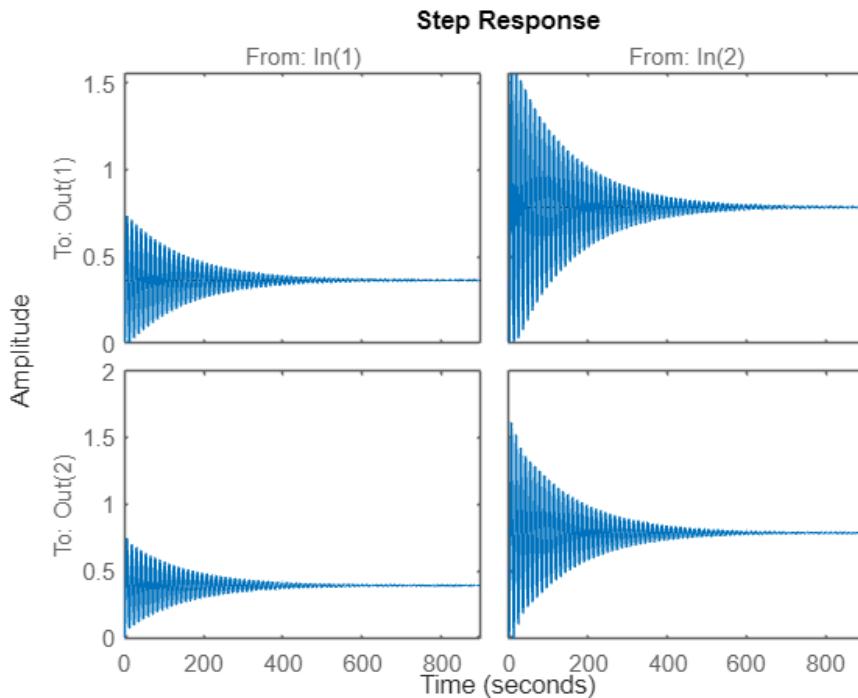
```
%Verifica delle caratteristiche del sistema a ciclo aperto
eig(A)
```

```
ans = 8×1 complex
-0.4604 + 3.1910i
-0.4604 - 3.1910i
-0.0067 + 0.5295i
-0.0067 - 0.5295i
-0.1929 + 1.7758i
-0.1929 - 1.7758i
-0.0520 + 1.6518i
-0.0520 - 1.6518i
```

Come posso notare, il sistema a ciclo aperto ha tutti autovalori a parte reale negativa.

Verificato ciò posso ora plottare la risposta a gradino del sistema in Open Loop:

```
step(sys);
```



A sinistra è rappresentata l’evoluzione delle due uscite dovuta all’applicazione di un *gradino unitario* sul primo ingresso mentre a destra l’evoluzione dovuta alla stessa applicazione ma sul secondo ingresso (ovvero le due forze prese in esame ai fini del controllo finale).

Un’importante caratteristica da verificare, prima di progettare un controllore per tale sistema, è la *controllabilità* e l’*osservabilità* del sistema stesso, andando a calcolare il rango delle rispettive *matrici di controllabilità* M_c e di *osservabilità* M_o .

```
Mc = ctrb(A,B);
```

```
rank(Mc)
```

```
ans = 8
```

```
Mo = obsv(A,C);
```

```
rank(Mo)
```

```
ans = 8
```

In entrambi i casi noto che il *rango* delle matrici è proprio pari all’ordine del sistema il quale, proprio per questo motivo, è *completamente controllabile* e *completamente osservabile*.

La coppia (A, B) è completamente controllabile

La coppia (A, C) è completamente osservabile

4 CONTROLLO CON ALLOCAZIONE DEGLI AUTOVALORI & OSSERVATORE & AZIONE INTEGRALE

Il primo controllo trattato in tale elaborato è quello dell'*Allocazione degli Autovalori*. Dato che, in molte applicazioni, lo stato di un sistema non è sempre accessibile, viene progettato anche un *Osservatore*. Infine, per rendere l'errore a regime nullo, viene aggiunta anche un'*Azione Integrale*. Un altro modo per soddisfare quest'ultimo punto e quello della *Compensazione*. Tale metodologia è poco robusta in quanto l'impianto sul quale viene costruito il controllore e sul quale vengono fatte tutte le simulazioni, non è mai uguale a quello reale (si parla in questi casi di *incertezza*).

L'obiettivo di questa tecnica di controllo è quello di progettare una *legge di controllo in retroazione di stato* tale da posizionare gli autovalori del sistema a ciclo chiuso in dei punti desiderati nel piano complesso (tali per cui ottengo un determinato comportamento rispettando le specifiche introdotte nei capitoli precedenti).

Ci sono tre possibili tecniche di assegnamento degli autovalori per *sistemi di ordine elevato* (come quello in esame)

1. Approssimazione ad un polo dominante
2. Approssimazione a due poli dominanti
3. Metodo ITAE

Nell'esempio che seguirà si è scelto di applicare il secondo metodo, assegnando *due poli dominanti* e i restanti poli molto più a sinistra rispetto all'asse immaginario in maniera tale che non inficino sui due poli prima citati. In questo modo non faccio altro che ricondurre il comportamento del sistema a ciclo chiuso a quello di un *sistema del secondo ordine*.

4.1 SISTEMA AUMENTATO CON AZIONE INTEGRALE

Costruisco innanzitutto il *sistema aumentato*, aggiungendo due variabili integrali al sistema iniziale, aumentando in questo modo l'ordine del sistema di un numero pari proprio al numero di variabili aggiunte. Il sistema aumentato avrà la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$u = -[k_r \quad k_i] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix}$$

```
A_aug = [A zeros(8,2); -C zeros(2,2)];
B_aug = [B; zeros(2,2)];
C_aug = [C zeros(2,2)];
D_aug = D;
sys_aug = ss(A_aug,B_aug,C_aug,D_aug)
```

```
sys_aug =
A =
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10
x1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
x2 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
x3 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
x4 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
x5 -1.482 0.86 0 0.6216 -0.094 0.094 0 0 0 0
x6 2.15 -4.75 2.6 0 0.235 -0.41 0.175 0 0 0
x7 0 5.2 -7.7 2.5 0 0.35 -0.76 0.41 0 0
x8 0.7771 0 0.625 -2.677 0 0 0.1025 -0.16 0 0
x9 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
x10 0 0 -1 0 0 0 0 0 0 0
```



```
B =
u1 u2
x1 0 0
x2 0 0
x3 0 0
x4 0 0
x5 0 0
x6 0.5 0
x7 0 0
x8 0 1
x9 0 0
x10 0 0
```



```
C =
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7 x8 x9 x10
y1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
y2 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
```

```
D =
    u1   u2
y1    0   0
y2    0   0
```

Continuous-time state-space model.

Model Properties

```
B =
    u1   u2
x1    0   0
x2    0   0
x3    0   0
x4    0   0
x5    0   0
x6    0.5 0
x7    0   0
x8    0   1
x9    0   0
x10   0   0
```

```
C =
    x1   x2   x3   x4   x5   x6   x7   x8   x9   x10
y1    1    0    0    0    0    0    0    0   0    0
y2    0    0    1    0    0    0    0    0   0    0
```

```
D =
    u1   u2
y1    0   0
y2    0   0
```

Devo a questo punto verificare nuovamente la completa *controllabilità* e la completa *osservabilità* del nuovo impianto, avendo aggiunto dei *poli nell'origine* dovuti all'azione integrale. Devo, in altre parole, verificare che la coppia $(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix})$ sia *completamente controllabile*.

```
rank(ctrb(A_aug,B_aug))
ans = 10
```

Tale condizione è verificata.

L'*azione integrale* mi permette di avere *errore a regime nullo*. Si può, infatti, intuitivamente dimostrare ciò. Se il sistema a ciclo chiuso è *asintoticamente stabile*, allora la risposta a segnali limitati deve essere anch'essa limitata e, dunque, la risposta a regime ad un segnale di ingresso costante (quale è il gradino) deve rimanere *costante* in ogni punto del ciclo. In definitiva, si può concludere che: *l'ingresso agli integratori deve essere nullo altrimenti, in uscita ad essi, si avrebbe una rampa*.

Altra condizione importante da verificare è che: $n^o \text{ingressi} \geq n^o \text{uscite}$. Questo è necessario ai fini della buona riuscita del controllo in quanto, qualora avessi un numero di uscite maggiore al numero di ingressi possibili, avrei che la matrice k_i è una matrice con un numero di righe più piccolo del numero di colonne (dunque $\mathcal{N}([H_1 \ H_2]) \neq 0$). In questo caso specifico potrebbe capitare che l'uscita *diverga* senza avere divergenza dell'ingresso in quanto, tale divergenza, potrebbe avvenire lungo direzioni che entrano nel *nullo della matrice* in esame. Questo non accade nel caso contrario essendo la matrice k_i di *rango pieno*.

4.2 SODDISFACIMENTO DELLE SPECIFICHE

Non resta altro che trovare i parametri grazie ai quali posso soddisfare le specifiche sopra scritte. Le formule utilizzate sono le seguenti:

$$s\% = 100 \cdot e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

$$T_{a1} = \frac{4.6}{\zeta * \omega_n}$$

```

PO = 20;
Ta_1 = 15;

%zita = abs(log(PO/100))/sqrt(pi^2+log(PO/100)^2);
zita = 0.5;
%w_n = 4.6/(zita*Ta_1);
w_n=0.7;

Re = -(zita*w_n);
Imm = w_n*sqrt(1-zita^2);

lam1 = Re + 1j*Imm;
lam2 = lam1';

%Si pongono gli altri poli molto più distanti da quelli dominanti (almeno
%una decade dopo)

```

```
lam3 = 10*real(lam1);
lamba_d = [lam1; lam2; lam3; lam3-1; lam3-2; lam3-3; lam3-4; lam3-5; lam3-6;
lam3-7];
```

Fatto ciò posso assegnare gli autovalori desiderati a ciclo chiuso con retroazione di stato. La K desiderata è calcolata in questo modo:

```
K = place(A_aug, B_aug, lamba_d);
Ki = K(:,9:10)
Kr = K(:,1:8)
```

4.3 OSSERVATORE

Per i motivi prima citati, si progetti ora un *osservatore*, grazie al quale è possibile ricavare lo stato del mio sistema a partire dagli ingressi di controllo e dalle uscite.

Attenzione: l'osservatore va progettato NON dall'impianto aumentato ma da quello *iniziale* in quanto x_i è accessibile. Per la progettazione di un osservatore è necessario dimensionare la matrice L che può essere ricavata come fatto per K . Infatti, essendo il *problema dell'osservabilità duale a quello della controllabilità*, posso fare gli stessi ragionamenti fatti prima, facendo riferimento però al *sistema duale*. Infatti, se la coppia (A, C) è *completamente osservabile*, allora posso assegnare ad arbitrio gli autovalori di $(A^T + C^T L^T)$ e quindi, di conseguenza, quelli di $(A + LC)$. *I poli dell'osservatore vanno posti lontano dai poli dominanti del sistema in quanto questi non devono disturbare la dinamica del sistema stesso.*

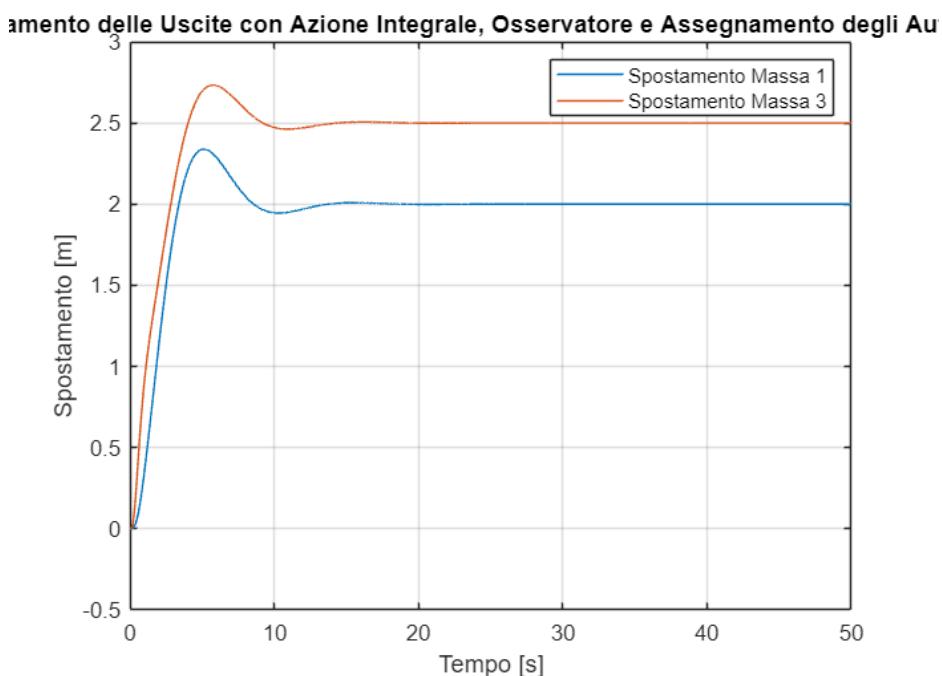
```
lambda_obs = [-2; -3; -4; -5; -9; -10; -11; -12];
L = place(A',C',lambda_obs)';
%Costruiamo le matrici dell'osservatore
A_obs = (A-L*C);
B_obs = [B-L*D L];
C_obs = eye(8);
D_obs = zeros(8,4);
```

È possibile progettare retroazione e osservatore in maniera *INDIPENDENTE* in quanto, quanto si va a considerare lo schema *retroazione di stato+osservatore* e vado a ricavare la *matrice dinamica* degli stati $\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$, si ottiene $\widetilde{A}_c = \begin{bmatrix} A + BF & -BF \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}$ e dunque $\sigma(\widetilde{A}_c) = \sigma(A + BF) \cup \sigma(A + LC)$, essendo \widetilde{A}_c triangolare alta.

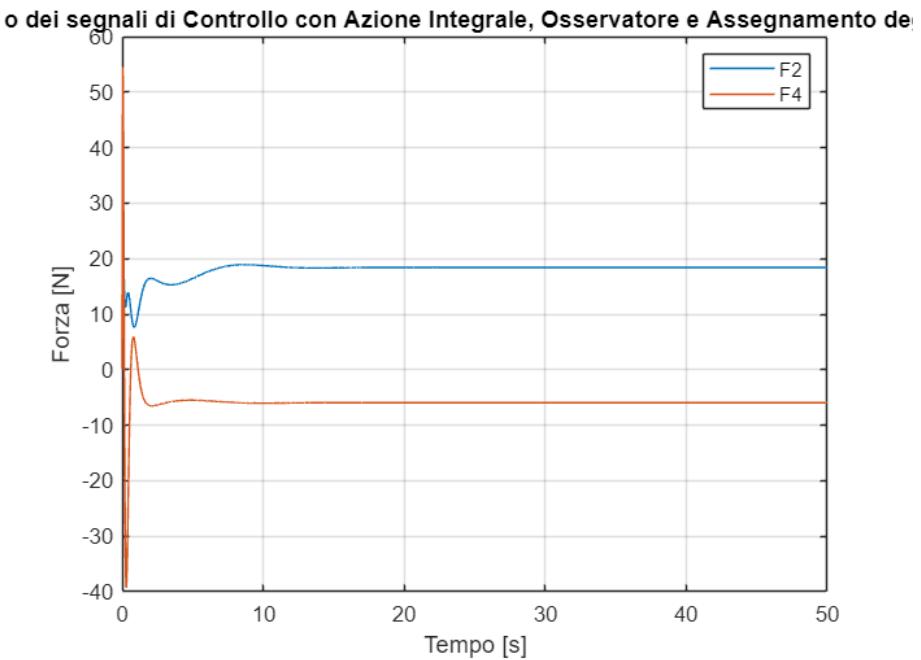
4.4 RISULTATI

Posso ora plottare i risultati e verificare se il controllore è stato progettato correttamente.

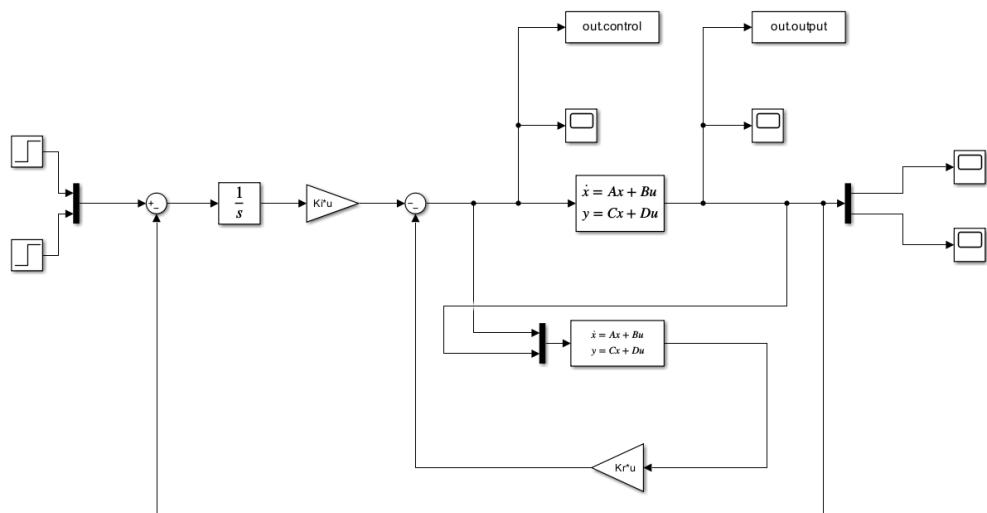
```
plot(out.output.time, out.output.signals.values)
title("Andamento delle Uscite con Azione Integrale, Osservatore e Assegnamento degli Autovalori");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Spostamento [m]");
legend("Spostamento Massa 1","Spostamento Massa 3");
grid;
```



```
plot(out.control.time, out.control.signals.values)
title("Andamento dei segnali di Controllo con Azione Integrale, Osservatore e Assegnamento degli Autovalori");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Forza [N]");
legend("F2","F4");
grid;
```



Lo schema Simulink utilizzato ai fini di tale simulazione è il seguente:



5 CONTROLLO OTTIMO LQ

Il *controllo ottimo LQ* (*Linear Quadratic Control*) affronta il problema di determinare la sequenza ottima degli ingressi u^* che *minimizzi* una determinata *funzione obiettivo* $J(x_0, u)$. In altri termini posso dire che:

$$u^* = \arg \min_u \{J(x_0, u)\}$$

dove u^* è l'*argomento del problema di ottimizzazione*. Quello a cui si fa riferimento in tale elaborato è il *controllo ottimo su orizzonte infinito* in quanto, ingegneristicamente parlando, è quello di maggior interesse in quanto si è quasi sempre interessati a controllare sistemi pensati e ideati per durare nel tempo per molti anni. Ovviamente nella realtà non esistono impianti tali da durare per un *tempo infinito* ma si considera infinito un *tempo estremamente lungo*, facendo riferimento alle *costanti di tempo* del sistema (ad esempio, se un sistema ha costanti di tempo che si esauriscono in 2 ms, dopo 1 s è come se fosse già passato un tempo infinito). Nel caso TC come quello in esame, preso il *sistema LTI*:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

posso supporre di avere la *funzione di costo* formata da *forme quadratiche di stato e ingresso*, ovvero:

$$J(x_0, u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

con $Q \geq 0$ e $R > 0$ in maniera tale da avere la sicurezza dell'*esistenza del minimo*. Tali matrici *pesano rispettivamente le variabili di stato e l'ingresso di controllo*. È possibile scegliere $Q = C^T C$ in maniera tale da pesare solo le variabili di stato relative alla posizione delle due masse da controllare.

Queste due matrici vengono scelte con una metodologia *Trial & Error*, ovvero si cerca il giusto *compromesso* tra questi due valori in modo tale da ottenere la *risposta* desiderata rispettando i *requisiti* precedentemente indicati. In particolare, un valore di Q grande accoppiato con un valore di R piccolo permette di avere un *sistema veloce* in quanto c'è la possibilità di avere *ingressi di controllo elevati*. Una R grande e una Q piccola invece danno un *sistema più lento* rispetto a quello precedente ma un'*ampiezza di controllo ridotta* (in molte applicazioni risulta utile in quanto ho attuatori che possono, ad esempio, esercitare forze limitate).

Per un primo approccio è possibile considerare le *matrici di peso* tutte *unitarie* e vedere come evolve il sistema, per poi, con le opportune considerazioni, variare l'una rispetto all'altra sino ad ottenere il risultato finale più consono alle specifiche in esame.

5.1 CONTROLLO

Verrà ora mostrato il codice e in seguito i risultati ottenuti sia con le matrici unitarie che con le matrici opportunamente scelte in seguito a *vari tentativi*.

```
%Qp = 1;  
Qp = 100;  
Q = Qp*(C_aug')*C_aug;
```

Ovviamente, avendo anche qui un'*azione integrale* (per gli stessi motivi descritti al capitolo precedente), risulta necessario aggiungere un peso anche per quest'ultima.

```

Q = Q+blkdiag(zeros(8),eye(2,2));
%Q(10,10) = 1;
%Q(9,9) = 1;
Q(10,10) = 20;
Q(9,9) = 20;
Q

```

```
%Rp = 1;  
Rp = 0.1;  
R = Rp*eye(2,2)
```

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anche per il *controllo ottimo LQ* ottengo una *retroazione statica dello stato* che è possibile calcolare semplicemente in questo modo:

```
[F,P,CLP] = lqr(sys_aug,Q,R);
```

Dove K è la *matrice di retroazione*, P è la soluzione dell'*equazione algebrica di Riccati* $A^T P + PA + Q - (PB + S)R^{-1}(PB + S)^T = 0$ e CLP sono i *poli a ciclo chiuso del sistema retroazionato*. Ricordo che l'*equazione algebrica di Riccati* ammette una soluzione $P^+ \geq 0$ se

(A, B) è stabilizzabile e (A, C) è rilevabile. Tale soluzione è unica e la matrice dinamica a ciclo chiuso $A - BR^{-1}(B^T P^+ + S^T)$ è asintoticamente stabile.

```
Fi = F(:,9:10);
Fr = F(:,1:8);
```

Sulla base di quanto detto poc'anzi verifichiamo se la soluzione dell'equazione algebrica di Riccati è effettivamente una matrice semidefinita positiva.

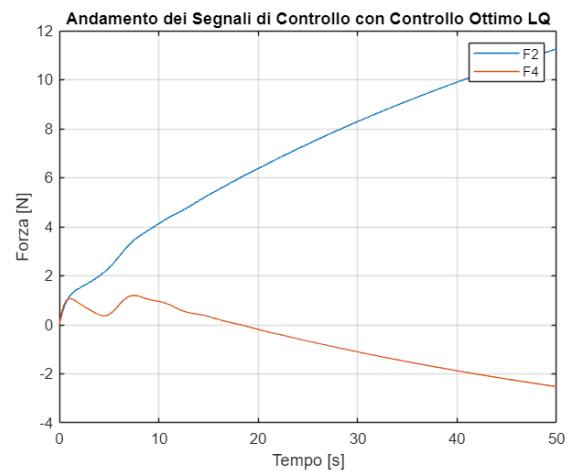
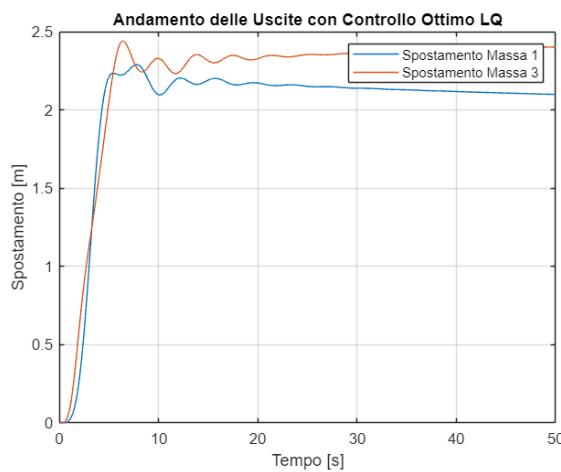
```
eig(P)
```

```
ans = 10×1
103 ×
0.0011
0.0022
0.0050
0.0058
0.1506
0.2470
0.4342
0.6432
1.0261
2.4192
```

Noto che, essendo tutti gli autovalori positivi, lo è.

5.2 RISULTATI

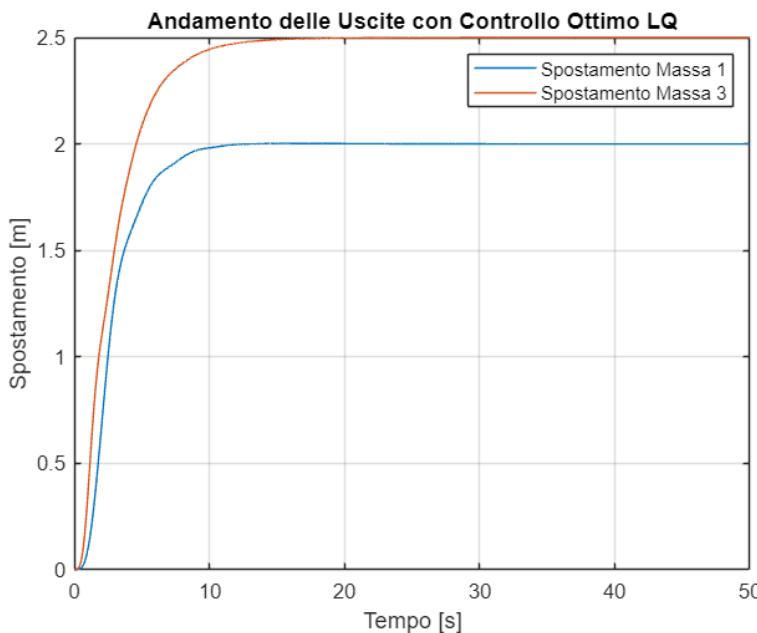
Vengono ora mostrati i risultati ottenuti con le scelte attuate secondo i ragionamenti mostrati nel paragrafo precedente. Come già accennato, è stato simulato l'impianto con questo controllore innanzitutto con l'ipotesi di matrici di peso unitarie. I risultati ottenuti, come si può ben immaginare, non sono soddisfacenti e non rispettano le specifiche.



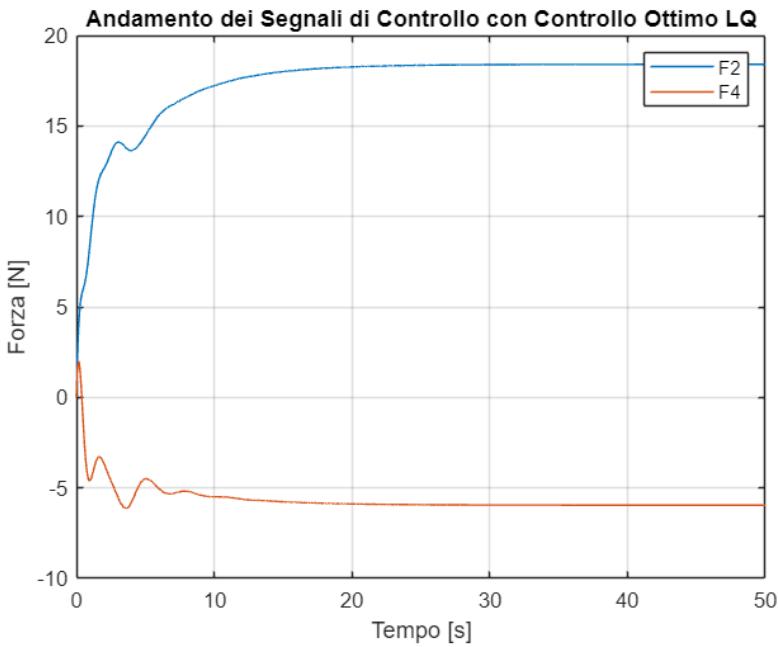
Ho *tempi di assestamento molto elevati* (entrambe le masse dopo un tempo pari a 50 s non sono ancora arrivate alle posizioni desiderate, mentre gli *ingressi di controllo* sono *molti lenti ad aumentare in modulo* (plausibile in quanto anche per questo motivo le masse molto lentamente tendono ai valori di regime).

Per mitigare a questo problema sono stati impostati i *pesi delle matrici*. La scelta è stata quella di *aumentare il peso della matrice Q* (in particolare la parte relativa alle variabili di stato del sistema non aumentato, ma anche quella relativa alle variabili dell'azione integrale) e di *diminuire il peso della matrice R* in maniera tale da avere un *sistema veloce* grazie agli *ingressi di controllo maggiori* rispetto all'esempio riportato prima. Ovviamente sono state scelte tali matrici anche in maniera tale da ottenere un valore delle forze esercitate sul sistema plausibili per il sistema stesso. I valori assegnati, come riportato nel codice, sono: $Q = 100$, $Q(10,10) = Q(9,9) = 20$, $R = 0.1$. Vengono ora mostrati i risultati definitivi.

```
plot(out.outputLQ.time, out.outputLQ.signals.values)
title("Andamento delle Uscite con Controllo Ottimo LQ");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Spostamento [m]");
legend("Spostamento Massa 1","Spostamento Massa 3");
grid;
```

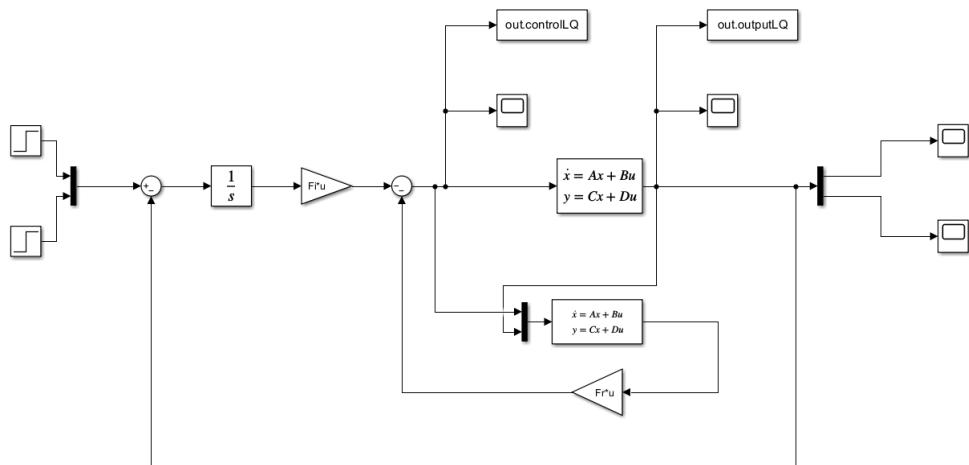


```
plot(out.controlLQ.time, out.controlLQ.signals.values)
title("Andamento dei Segnali di Controllo con Controllo Ottimo LQ");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Forza [N]");
legend("F2","F4");
grid;
```



Dai due grafici mostrati è possibile notare che le *specifiche* sono *notevolmente rispettate* e per di più, cosa sempre ben accetta per un sistema dinamico, *non si ha sovraelongazione*. Inoltre, è possibile notare anche un *netto miglioramento* per quanto riguarda le uscite di controllo, in quanto sono presenti molti *meno picchi* rispetto al controllo mostrato nel capitolo precedente e *le forze si alzano gradualmente*, a differenza di prima dove le due forze raggiungevano quasi istantaneamente il picco di 40/50 N per poi assestarsi col tempo. I *risultati* ottenuti sono, dunque, *del tutto soddisfacenti*.

Lo *schema Simulink* utilizzato ai fini di tale simulazione è il seguente:



6 CONTROLLO OTTIMO LQG

Prima di introdurre tale controllo, apriamo una breve parentesi riguardante il *Filtro di Kalman*.

6.1 FILTRO DI KALMAN

Il *filtro di Kalman* non è altro che un *osservatore ottimo in ambiente aleatorio e stocastico*. È necessario introdurre tale filtro in quanto *non si vuole perdere l'ottimalità* della strategia di controllo. Al fine di evidenziare tale necessità, nell'esempio che verrà riportato in questo capitolo, verranno confrontati i risultati ottenuti dallo stesso controllo prima con l'ausilio di un normale *osservatore* (come quello utilizzato nei capitoli precedenti) e poi col suddetto *filtro*. Un'ipotesi importante da fare è quella di considerare i segnali come *rumori bianchi gaussiani* ovvero che rispettano queste caratteristiche:

- *Distribuzione di probabilità gaussiana con media nulla* $\rightarrow \bar{x} = 0$
- $$g_{Gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$
- *Varianza finita* $\rightarrow \sigma^2 < +\infty$
 - *Componenti indipendenti tra loro* \rightarrow Autocorrelazione impulsiva $R_x(\tau) = \eta\delta(\tau)$

L'equazione del *filtro di Kalman* è:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(t)(y - C\hat{x}) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

Notiamo che la matrice $L(t)$ è *tempo variante*.

Con gli opportuni calcoli e ragionamenti (non riportati in questa trattazione), si arriva a tale risultato:

$$L^*(t) = \arg \min_{L(t)} \text{tr}(\tilde{P}) = \tilde{P}C^T\tilde{R}^{-1}$$

dove \tilde{R} è la *matrice di covarianza del segnale rumoroso* v_y e \tilde{P} è la *matrice di covarianza dell'errore, soluzione dell'equazione di Riccati* relativa al problema sopra descritto. Tale equazione di Riccati è simile a quella ottenuta nello studio del *controllo ottimo* ma espressa sul *sistema duale* e con una *condizione iniziale* e non terminale.

È possibile semplificare il problema in maniera tale da ottenere un *filtro di Kalman stazionario*, ovvero *a regime*. Tale filtro si ottiene sostituendo ad L il suo *valore di regime* \bar{L} in questo modo:

$$\bar{L} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P}(t) C^T \tilde{R}^{-1}$$

ottenendo così un'*equazione algebrica di Riccati* mostrata nel paragrafo successivo.

6.2 CONTROLLO

Il *problema LQG (Linear Quadratic Gaussina)* consiste nel voler trovare la *legge di controllo* che minimizzi la *funzione di costo* come visto per il controllo precedente. Prendendo come inizio di tale progetto quello del capitolo 5, posso affermare che alla *matrice di retroazione* prima trovata e definita, si associa il *filtro di Kalman* introdotto nel paragrafo 6.1. Il controllore si ottiene risolvendo *due equazioni di Riccati*:

- Una relativa al *controllo LQ*:

$$\bar{F} = R^{-1} B \bar{P}$$

Dove $\bar{P} \geq 0$ risulta soluzione della ARE:

$$A^T \bar{P} + \bar{P} A + Q - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} = 0$$

- Una relativa al *filtro di Kalman*:

$$\bar{L} = \bar{\Sigma} C \tilde{R}^{-1}$$

Dove $\bar{\Sigma} \geq 0$ risulta soluzione della ARE:

$$A \bar{\Sigma} + \bar{\Sigma} A^T + \tilde{Q} + \bar{\Sigma} C^T \tilde{R}^{-1} C \bar{\Sigma} = 0$$

Ai fini di mostrare come si comporta l'impianto in presenza di disturbi, sono stati inseriti dei *disturbi in ingresso e in uscita all'impianto* (con le ipotesi fatte prima) e, nello specifico, vengono assegnate delle *matrici di covarianza* \tilde{Q} e \tilde{R} a tali disturbi.

Il *sistema* a cui si fa riferimento è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v_x \\ y = Cx + v_y \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

con *funzione di costo*:

$$J = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E \left[\int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \right]$$

Le ipotesi fatte sono:

1. $Q = H^T H \geq 0$
2. (A, H) rilevabile
3. (A, B) stabilizzabile
4. $R > 0$
5. $E[v_x v_x^T] = \tilde{Q} = MM^T \geq 0$
6. $E[v_y v_y^T] = \tilde{R} > 0$
7. (A, M) stabilizzabile
8. (A, C) rilevabile

In particolare, le condizioni 1 e 2 garantiscono la *soluzione su orizzonte infinito del problema LQ* vista in precedenza e le condizioni 7 e 8 consentono di utilizzare il *filtro di Kalman a regime*.

Per le considerazioni fatte, il *controllo LQG prevede di risolvere separatamente i problemi di controllo ottimo LQ e del filtro di Kalman* (progetto F indipendentemente da L) (F è già stato progettato e ampiamente discusso nel capitolo precedente) (mi preoccupo dunque, in questo capitolo, solo dalla *progettazione* di L). Ecco il codice:

```

Qnoise = 1e-6*10;
Rnoise = 1e-8*2.5;
Rt = eye(2)*Rnoise;      %Covarianza del Disturbo in Uscita
Qt = eye(8)*Qnoise;      %Covarianza del Disturbo in Ingresso

%Considero il sistema duale
[L_k,P_Kal,p_Kal]=lqr(A',C',Qt,Rt);
L_k=L_k';
L_k

L_k = 8x2
20.9586    0.4987
4.2398    14.4746
0.4987    22.2541
2.3855    12.4868
19.7565    10.8587
4.9336    -7.3704
10.6895    47.7464
-8.9518   -16.1349

%Filtro di Kalman
A_Kal = (A-L_k*C);
B_Kal = [B-L_k*D L_k];
C_Kal = eye(8);
D_Kal = zeros(8,4);

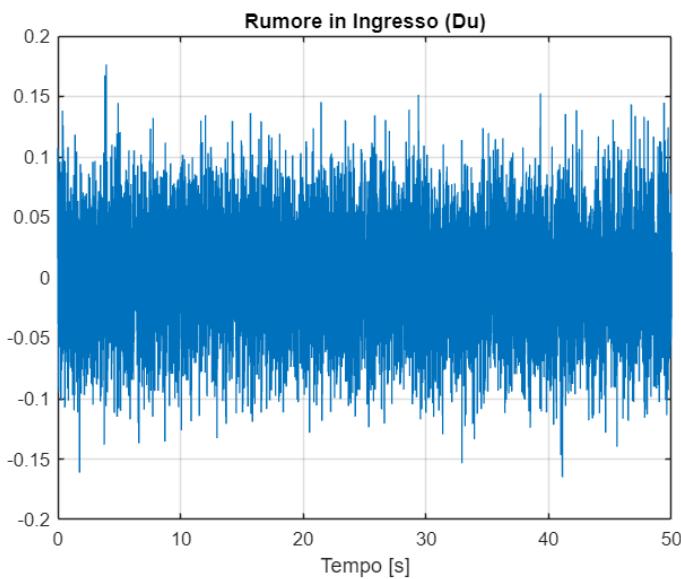
```

6.3 RISULTATI

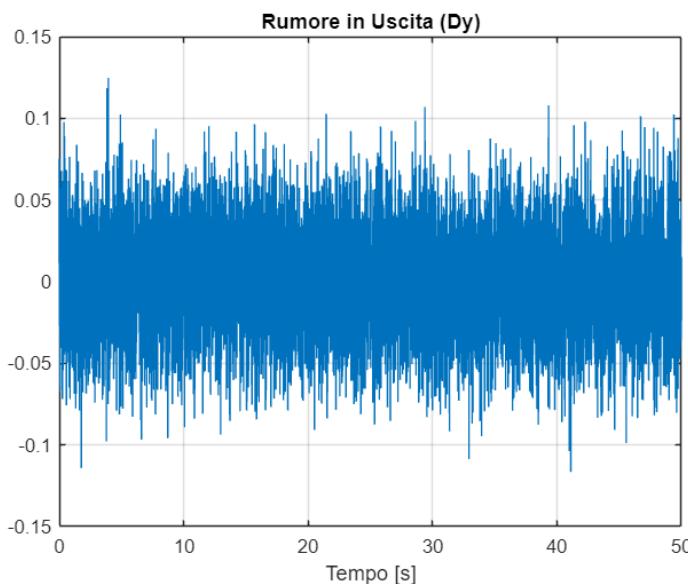
Come accennato nel paragrafo 6.1, vengono ora mostrati prima i *risultati con un normale osservatore*, per poi mostrare quelli *notevolmente superiori* ottenuti con il *filtro di Kalman*.

Prima di fare ciò mostriamo i *rumori in ingresso e in uscita all'impianto*:

```
plot(out.Du.time, out.Du.signals.values)
title("Rumore in Ingresso (Du)");
xlabel("Tempo [s]");
grid;
```

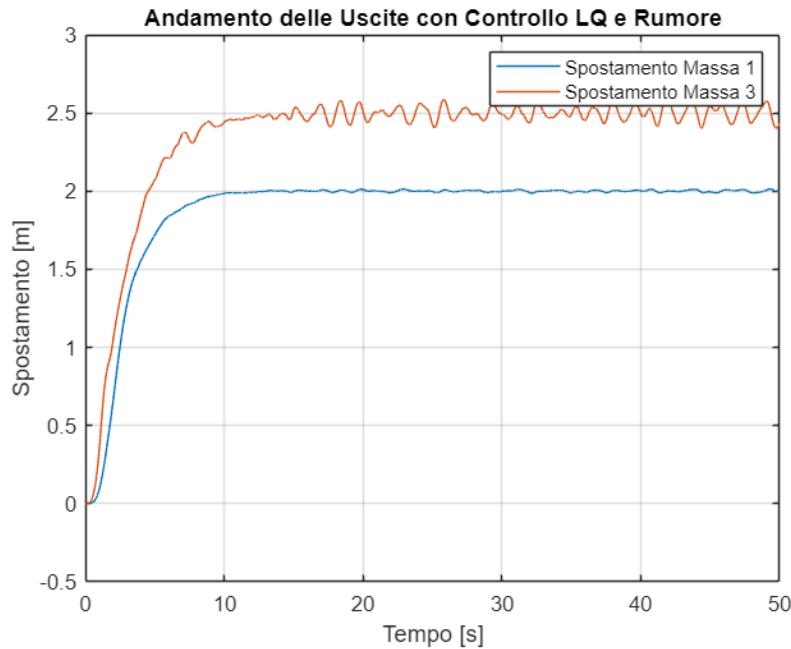


```
plot(out.Dy.time, out.Dy.signals.values)
title("Rumore in Uscita (Dy)");
xlabel("Tempo [s]");
grid;
```

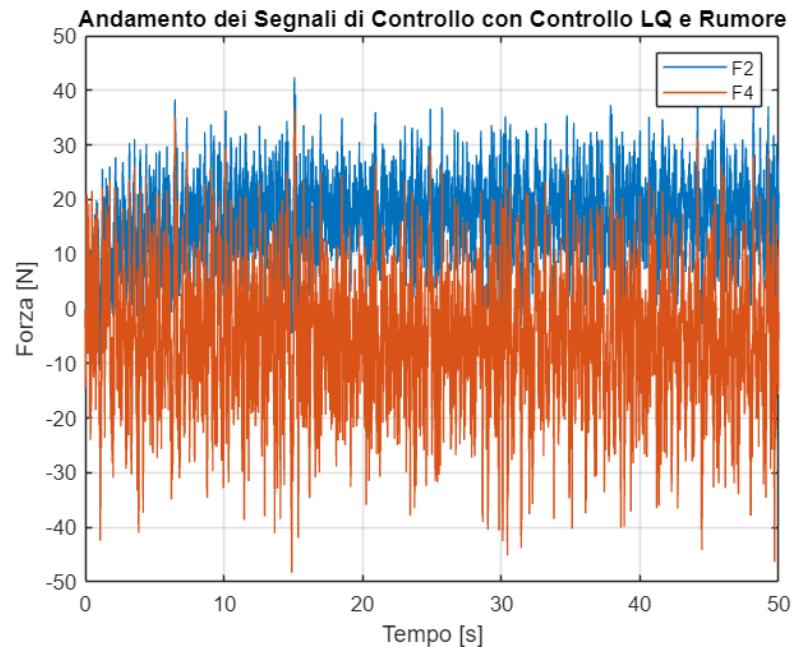


6.3.1 OSSERVATORE

```
plot(out.outputLQ_NOISE.time, out.outputLQ_NOISE.signals.values)
title("Andamento delle Uscite con Controllo LQ e Rumore");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Spostamento [m]");
legend("Spostamento Massa 1","Spostamento Massa 3");
grid;
```

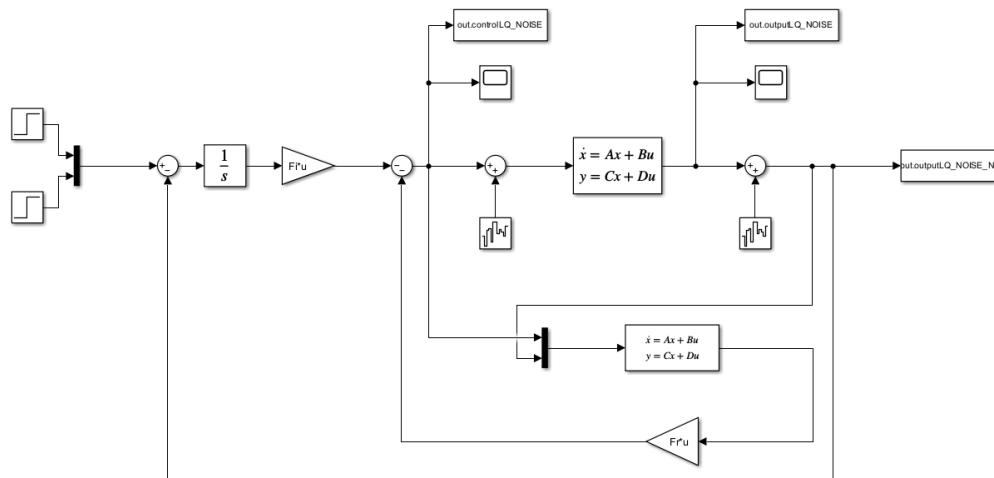


```
plot(out.controlLQ_NOISE.time, out.controlLQ_NOISE.signals.values)
title("Andamento dei Segnali di Controllo con Controllo LQ e Rumore");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Forza [N]");
legend("F2","F4");
grid;
```



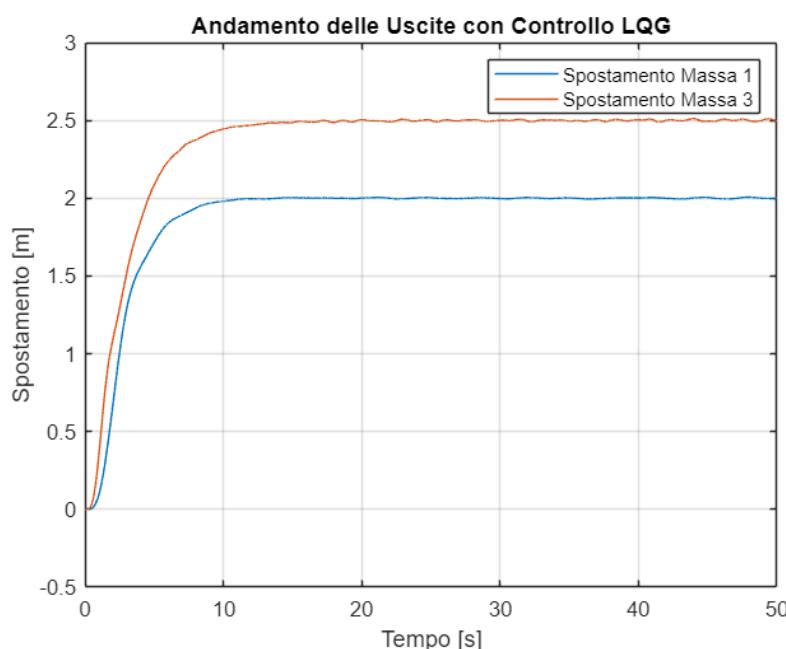
Come detto, i risultati ottenuti con tale schema non sono per nulla soddisfacenti. Possiamo notarlo soprattutto dall'andamento dei *segnali di controllo* (ovvero delle due forze) che sono *molto affetti dal rumore* inserito nel sistema in esame. Questo causa il segnale “*sporco*” mostrato nella figura precedente, soprattutto per la massa 3.

Lo *schema Simulink* utilizzato ai fini di tale simulazione è il seguente:

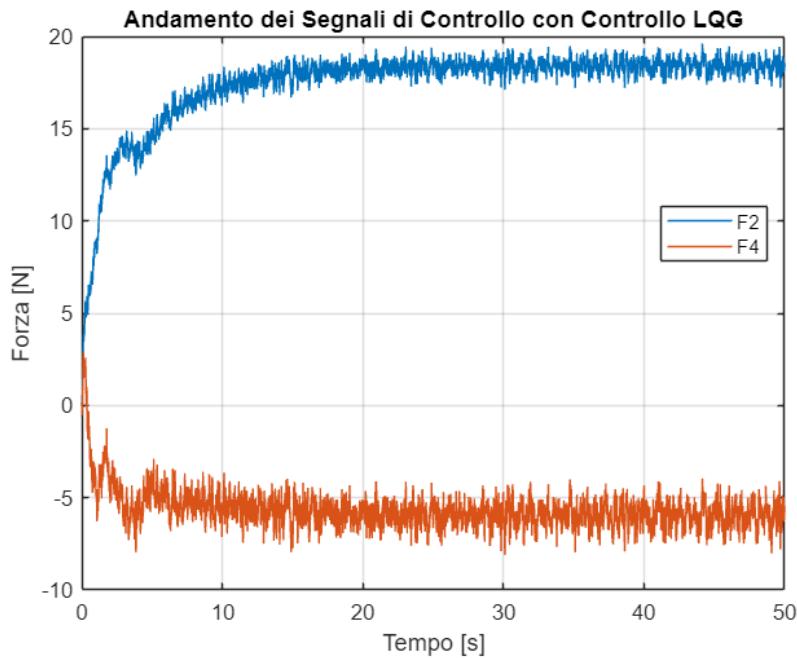


6.3.2 FILTRO DI KALMAN

```
plot(out.outputLQG_KAL.time, out.outputLQG_KAL.signals.values)
title("Andamento delle Uscite con Controllo LQG");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Spostamento [m]");
legend("Spostamento Massa 1", "Spostamento Massa 3");
grid;
```

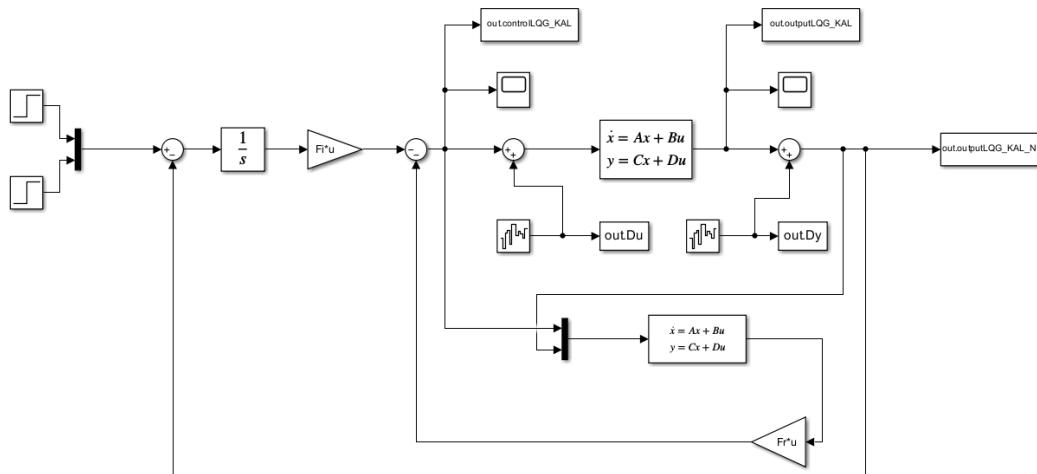


```
plot(out.controlLQG_KAL.time, out.controlLQG_KAL.signals.values)
title("Andamento dei Segnali di Controllo con Controllo LQG");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Forza [N]");
legend("F2","F4",'Location','best');
grid;
```



Dai seguenti grafici noto come, *nonostante il rumore* (ovviamente presente sui segnali di controllo ma nettamente filtrato dal *Filtro di Kalman* rispetto al caso precedente), *l'uscita all'impianto è perfetta e paragonabile a quella del controllo LQ senza rumore*.

Lo *schema Simulink* utilizzato ai fini di tale simulazione è il seguente:



7 MIXED SENSITIVITY DESIGN (CONTROLLO H_∞)

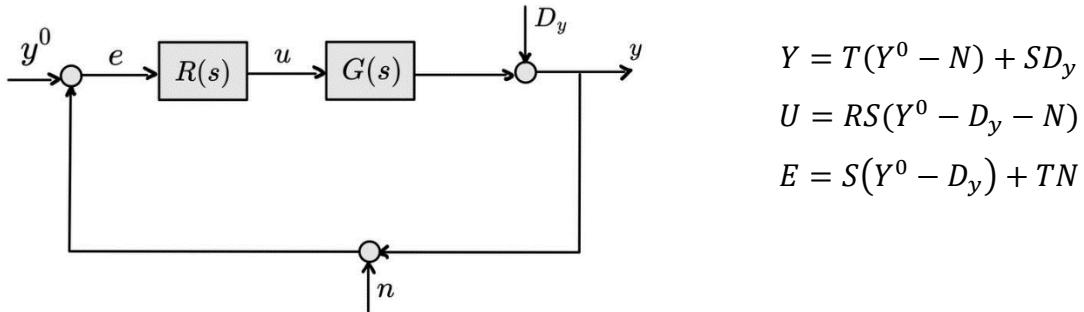
Il *controllo ottimo H_∞* è un controllo che si pone l'obiettivo di individuare il *regolatore $R(s)$* tale per cui ottengo:

$$\|G_{zw}\| < \gamma$$

dove $G_{zw}(s) = \begin{bmatrix} W_s(s)S(s) \\ W_k(s)R(s)S(s) \\ W_t(s)T(s) \end{bmatrix}$ con $S = (I + L)^{-1}$ = funzione di sensitività e

$T = (I + L)^{-1}$ = funzione di sensitività complementare. Ricordo che $S + T = I$.

Preso un normale sistema:



noto subito che la *sensitività* lega i *disturbi in uscita al processo all'uscita del processo stesso*; lega *riferimento, disturbi in uscita e rumore di misura all'ingresso di controllo*; lega *riferimento e disturbi in uscita all'errore di tracking*. Invece, la *sensitività complementare* lega *riferimento e rumore di misura all'uscita e il rumore di misura all'errore di tracking*. In base alle specifiche, e in base a cosa voglio avere in uscita, devo ragionare per *ogni fattore* delle equazioni sopra scritte. Infatti, l'*obiettivo* del controllo è quello di:

- Rendere S piccola nella banda dei riferimenti e dei disturbi (alle *basse frequenze*)
- Rendere T piccola nella banda del rumore di misura (alle *alte frequenze*)

Essendo, come possiamo intuire dai nomi e dalla relazione sopra scritta tra questi due termini, occorre trovare il giusto *compromesso* scegliendo una S piccola e una T grande nella banda dove è necessario seguire bene il *riferimento* e reiettare bene il *disturbo in uscita*, e viceversa quando voglio reiettare bene il *rumore di misura*. Inoltre, occorre rendere piccolo il prodotto RS per limitare l'*azione di controllo*. A tal fine sono associate ad ognuna di queste grandezze, come notiamo dalla $G_{zw}(s)$, delle *matrici di peso*. Ricordo inoltre che:

Se $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ allora avrò che:

$$\|W_s(s)S(s)\|_\infty < \gamma, \quad \|W_k(s)R(s)S(s)\|_\infty < \gamma, \quad \|W_t(s)T(s)\|_\infty < \gamma$$

Come scelgo le *matrici di peso*? Sulla base dei ragionamenti appena fatti posso dire che:

- W_s la scelgo *diagonale* con gli elementi sulla diagonale nella forma

$$W_{sii}(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{s}{\omega_2} + 1}{\frac{s}{\omega_1} + 1} \quad \alpha \ll 1$$

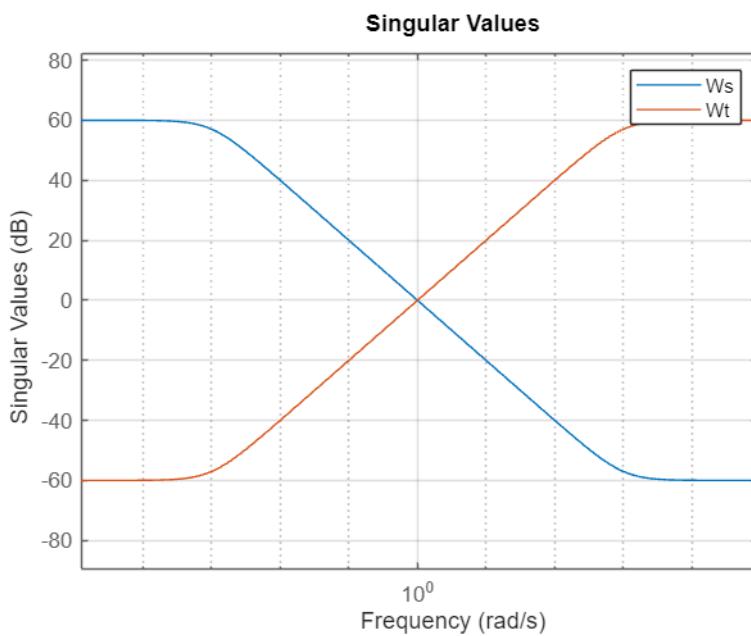
in modo tale da conferire un *guadagno in bassa frequenza elevato* per poi iniziare a decrescere dalla frequenza ω_1 fino ad arrivare al *guadagno di alta frequenza* dopo ω_2 .

- W_t , come posso ben immaginare, avrà stessa forma analitica di W_s ma comportamento *complementare*.
- W_k , invece, la scelgo come W_δ in presenza di *incertezze additive* o, negli altri casi, la posso scegliere come una *matrice diagonale costante* e tarata in base ai parametri specifici di quel controllo, pesando in questo modo proprio l'azione di controllo su *tutta la banda* (equivalente alla matrice R del controllo LQ).

7.1 CONTROLLO

Passo ora al codice:

```
G = zpk(minreal(tf(sys),1e-5));
Ws = zpk(makeweight(1000,[1 1],1/1000)*eye(2));
Wt = zpk(makeweight(1/1000,[1 1],1000)*eye(2));
Wk = 25*eye(2);
sigma(Ws,Wt)
legend("Ws","Wt");
grid;
```



```
Ws
```

```
Ws =
```

```
From input 1 to output...
```

```
0.001 (s+1000)
```

```
1: -----
```

```
(s+0.001)
```

```
2: 0
```

```
From input 2 to output...
```

```
1: 0
```

```
0.001 (s+1000)
```

```
2: -----
```

```
(s+0.001)
```

```
Wt
```

```
Wt =
```

```
From input 1 to output...
```

```
1000 (s+0.001)
```

```
1: -----
```

```
(s+1000)
```

```
2: 0
```

```
From input 2 to output...
```

```
1: 0
```

```
1000 (s+0.001)
```

```
2: -----
```

```
(s+1000)
```

```
Wk
```

```
Wk = 2x2
 25   0
 0   25
```

Noto come le tre matrici rispecchino i *requisiti* descritti nel paragrafo precedente.

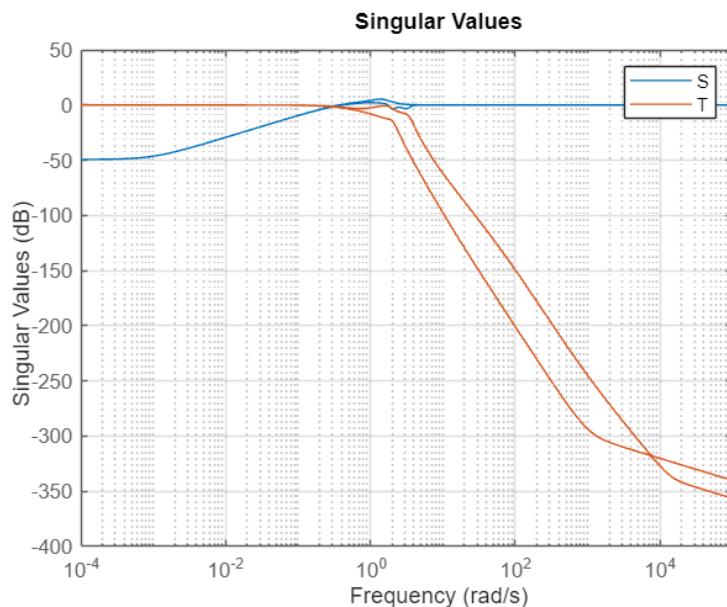
Fatto ciò e scelte le *matrici di peso*, è possibile ora progettare il *regolatore* $R(s)$ in questo modo:

```
[R,CL,gamma] = mixsyn(G,Ws,Wt,Wk);
[Ar,Br,Cr,Dr] = ssdata(R);
```

Un'ulteriore verifica possibile è quella di studiare i σ -*PLOT* delle matrici di *sensitività* e di *sensitività complementare*:

```
L = sys*R;
I = eye(2);
S = minreal(inv(I+L));
T = minreal(L*S);

sigma(S,T)
legend("S","T");
grid;
```

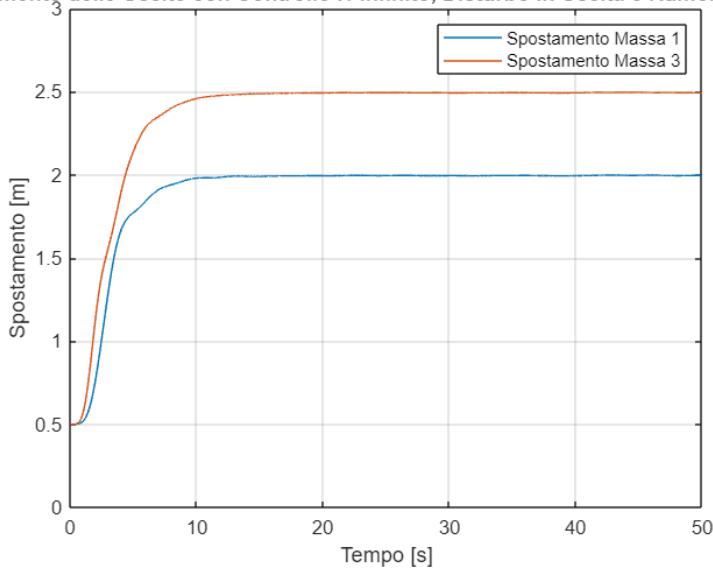


Anche in questo caso sono rispettati i ragionamenti evidenziati nel paragrafo precedente.

7.2 RISULTATI

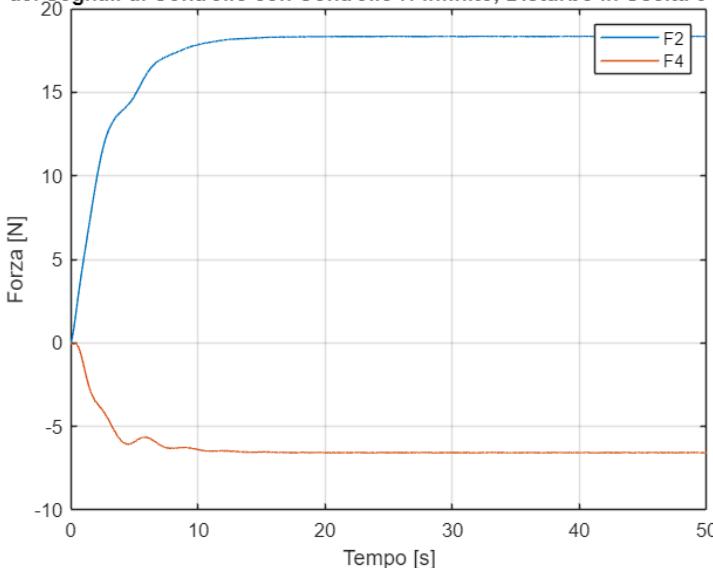
```
plot(out.outputH.time, out.outputH.signals.values)
title("Andamento delle Uscite con Controllo H-infinito, Disturbo in Uscita e
Rumore di Misura");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Spostamento [m]");
legend("Spostamento Massa 1","Spostamento Massa 3");
grid;
```

Andamento delle Uscite con Controllo H-infinito, Disturbo in Uscita e Rumore di M



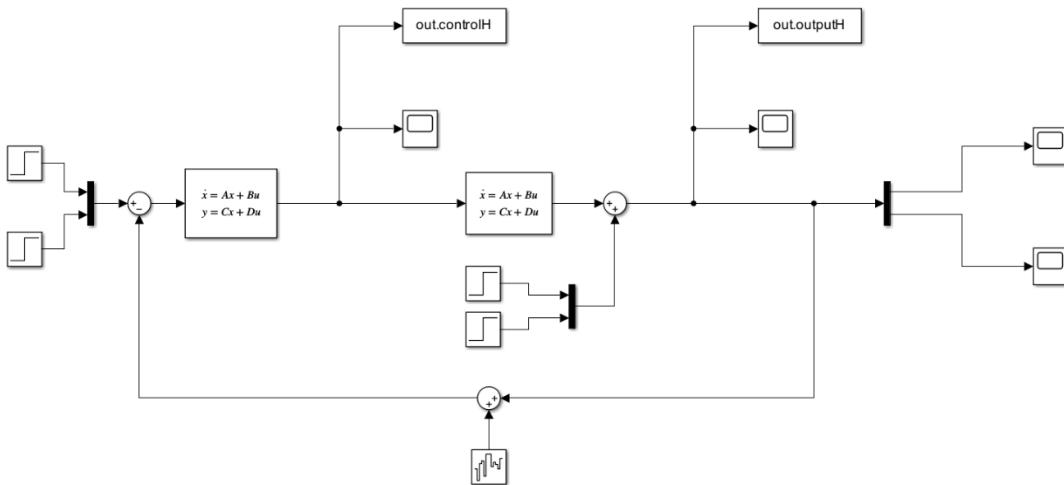
```
plot(out.controlH.time, out.controlH.signals.values)
title("Andamento dei Segnali di Controllo con Controllo H-Infinito, Disturbo
in Uscita e Rumore di Misura");
xlabel("Tempo [s]");
ylabel("Forza [N]");
legend("F2","F4");
grid;
```

Andamento dei Segnali di Controllo con Controllo H-Infinito, Disturbo in Uscita e Rumor



Dai risultati ottenuti noto che, nonostante il disturbo in uscita e il rumore di misura, le specifiche sono egregiamente rispettate e per di più, i picchi sui segnali di controllo sono quasi completamente spariti e migliori addirittura di quelli ottenuti col controllo ottimo LQ anche se, tutto sommato, sia il controllo che le uscite si equivalgono.

Lo schema Simulink utilizzato ai fini di tale simulazione è il seguente:



7.3 DIFFERENZE TRA CONTROLLO H_∞ E CONTROLLO LQ

È importante evidenziare alcune *differenze* tra il *controllo ottimo H_∞* (descritto in questo capitolo) e il *controllo ottimo LQ* (descritto nel capitolo 5). La differenza principale tra questi due controlli è che il *controllo LQ minimizza un indice di qualità* e il sistema è *perturbato* rispetto ad uno stato nullo per la presenza di uno *stato iniziale*. Tale controllo va molto bene per andare a controllare quei sistemi in cui i disturbi che agiscono sull'impianto possono essere ricondotti ad una *condizione iniziale* (ovvero dei *disturbi che agiscono transitoriamente*). Esso agisce mediante un *trade-off* tra *prestazione*, con il termine $x^T Q x$, e *ampiezza della legge di controllo*, attraverso il termine $u^T R u$.

Con la legge del *controllo ottimo H_∞* , invece, non ‘*combatto*’, contro la *condizione iniziale* (la quale ritengo *nulla*) ma vado a reiettare l’azione di un *disturbo* (segnalet ad energia finita) (in linea teorica un gradino non andrebbe bene ma, nel caso in esame, viene interrotto dopo un certo periodo e, dunque, è come se stessi considerando una *finestra rettangolare*; questo va bene in quanto non devo mai fare effettivamente un controllo tra 0 e $+\infty$). A differenza di LQ, però, tale controllo non ha una *robustezza intrinseca* ma deve introdurla il progettista mediante le opportune operazioni.

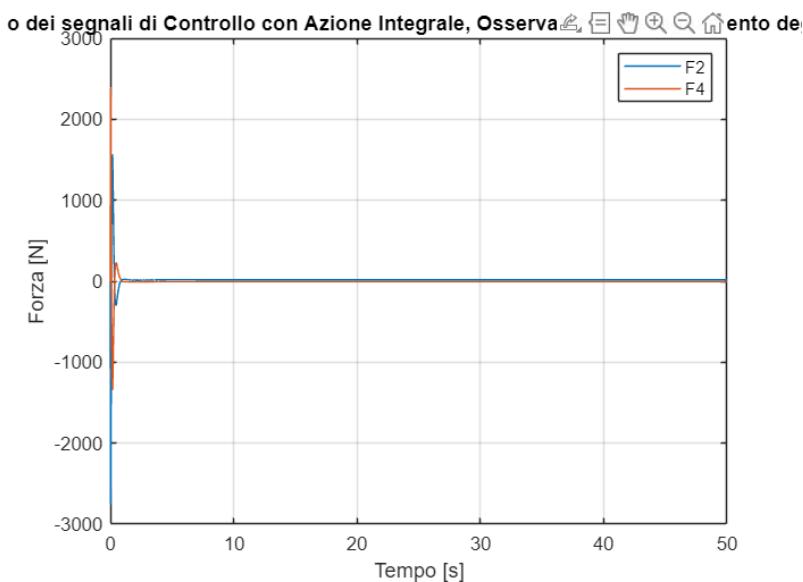
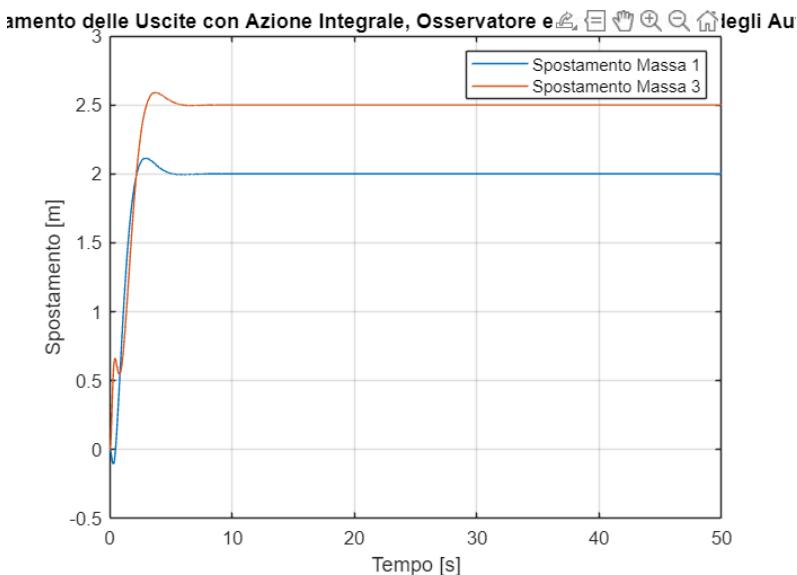
Considerando il termine γ prima introdotto, è possibile affermare che, più questo è grande, più il controllo assume la forma del *controllo ottimo LQ* mentre, più questo valore è piccolo, più sono vicino al *controllo ottimo H_∞* (il quale non è minimizzante ma mi garantisce che la norma di G_{zw} sia minore di γ).

8 ALTRI RISULTATI

Nei capitoli precedenti sono state mostrate *varie tecniche di controllo* ed è molto semplice, grazie ai risultati ottenuti, verificarne le *differenze*. In questo capitolo sono mostrate *altre simulazioni*, fatte sullo stesso sistema ma con *specifiche più stringenti*. Nello specifico è stato abbassato il *tempo di assestamento all'1%* da 15 s a 5 s. Verranno mostrate solo le parti di codice che sono state modificate rispetto a quelle mostrate nei capitoli precedenti.

8.1 ASSEGNAZIONAMENTO DEGLI AUTOVALORI

```
Ta_1 = 5;
zita = 0.7;
w_n = 1.5
```



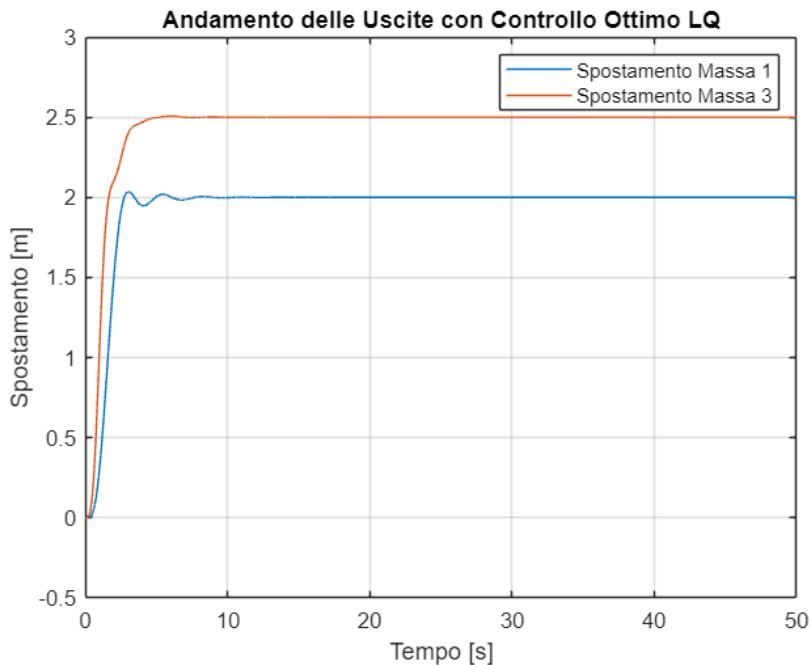
Noto, comunque, delle buone prestazioni per quanto riguarda lo spostamento delle due masse, tranne per una leggera *sottoelongazione* presente nei primi istanti della simulazione. Il peggioramento lo noto però per la *legge di controllo*, ovvero le forze applicate sulle altre due masse. Esse assumono, nei primi istanti di simulazione, *valori molto elevati*, i quali potrebbero non essere supportati dagli attuatori che si hanno a disposizione, o, addirittura, potrebbero recare danni alle masse in esame essendo esse non molto elevate (parliamo di pochi *Kg*).

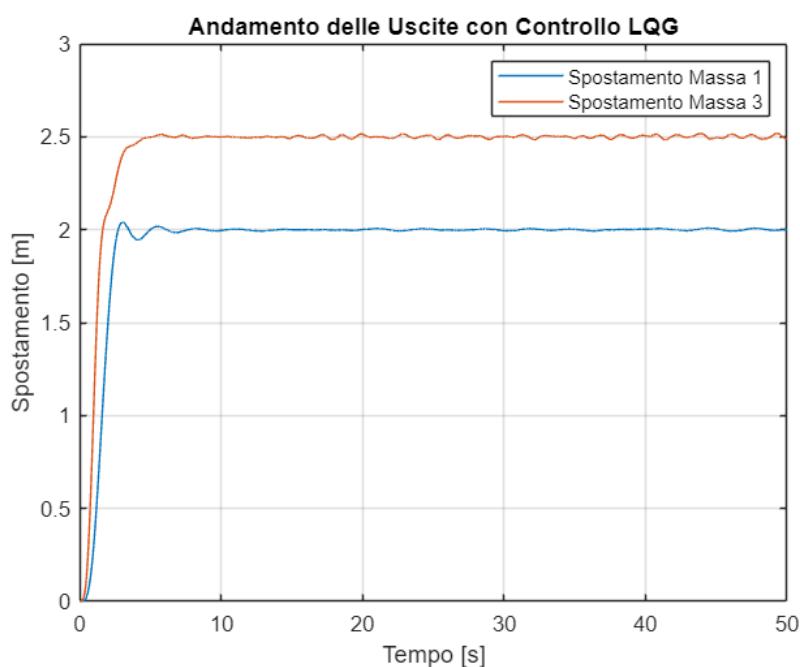
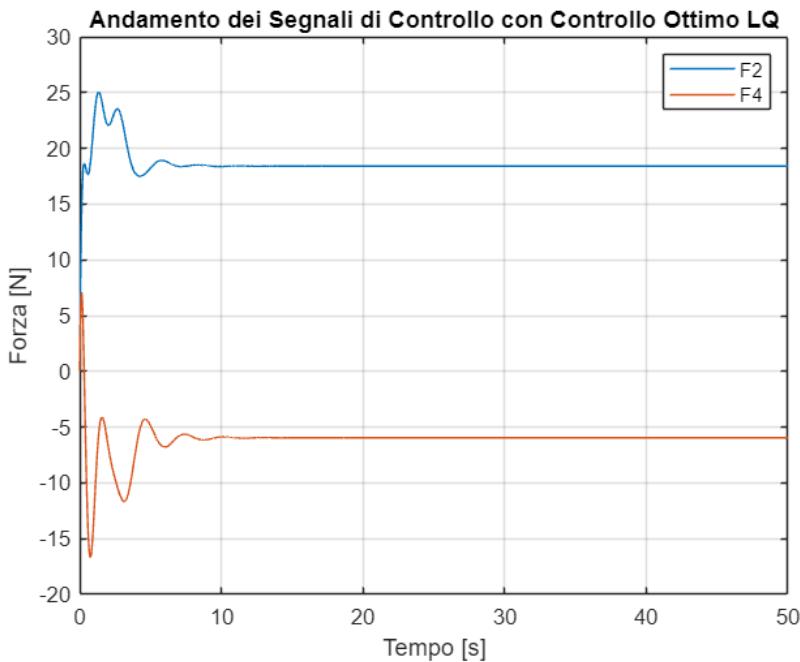
8.2 CONTROLLO OTTIMO LQ E LQG

```

Qp = 200;
Q = Qp*(C_aug')*C_aug;
Q = Q+blkdiag(zeros(8),eye(2,2));
Q(10,10) = 400;
Q(9,9) = 400;

```





Come è facilmente intuibile da tali grafici, le *uscite* hanno andamenti *molto simili* a quelle presentate in precedenza, nonostante i *requisiti più stringenti*. È bastato *modificare i valori delle matrici di peso* (in particolar modo quelli relativi all'*azione integrale* in maniera tale da rendere il *sistema più veloce*). Ma il vero vantaggio e punto di forza del *controllo ottimo LQ* è quello riguardante le *uscite di controllo*. Esse sono *drasticamente inferiori* rispetto allo stesso caso visualizzato nel paragrafo precedente con il metodo *dell'assegnamento degli autovalori*. Tale nuova simulazione è stata effettuata proprio per evidenziare tale particolarità e la reale *potenza del controllo ottimo* rispetto ad altri controlli.