Algoritmo

El método iterativo de Gauss-Siedel nos ayuda a poder resolver sistemas de ecuaciones de $n \times n$, este método consiste de los siguientes pasos:

- Primero se considera el sistema de ecuaciones de $n \times n$ que queramos resolver, el cual de forma general puede tener la siguiente forma:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n
\end{gathered}
$$

  donde los a_{ij} son los coeficientes de cada incógnita x_j a conocer respecto a cada una de las ecuaciones, y las b_i son los resultados a los cuales esta igualada cada una de las ecuaciones (cabe recordar que al fin de cuentas como el tamaño del sistema de ecuaciones es de $n \times n$ entonces el tamaño de i será igual al de j) .

- Posteriormente en cada una de las ecuaciones (teniendo en cuenta que ninguno de los elementos de la diagonal sean cero) se despeja la correspondiente incógnita, esto quiere decir que por ejemplo de la primer ecuación:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

  se va a despejar la incógnita x_1, quedando la primer ecuación de la siguiente forma:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - ... - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

  y la segunda ecuación como:

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - ... - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

  y así sucesivamente con todas las incógnitas a conocer de nuestro sistema de ecuaciones hasta llegar a la última:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - ... - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

- Posteriormente se propone una solución inicial para cada una de los de las incógnitas x_j, y con estos valores se calculan las primeras aproximaciones de las variables x_j despejadas en cada una de las ecuaciones.
- Para encontrar el valor de las siguientes aproximaciones de las incógnitas x_j despejadas en cada una de las ecuaciones se sigue el siguiente procedimiento, se toman los valores obtenidos en la aproximación anterior y se consideran como la nueva solución inicial para las incógnitas x_j y se repite este procedimiento de forma sucesiva dependiendo del número de iteraciones que se deseen calcular.

Ejemplo

Consideremos que queremos resolver el siguiente sistema de ecuaciones de 3×3, para una aproximación de tres iteraciones:

$$5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1$$
$$-3x_1 + 9x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 - x_2 - 7x_3 = 3$$

- Entonces primero despejamos en cada ecuación una de la incógnitas, obteniendo lo siguiente:

$$x_1 = \frac{-1 + 2x_2 - 3x_3}{5}$$
$$x_2 = \frac{2 + 3x_1 - x_3}{9}$$
$$x_3 = \frac{-3 + 2x_1 - x_2}{7}$$

- Ahora consideremos que la solución inicial propuesta es la siguiente:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 0$$

- sustituyendo estos valores en las incógnitas despejadas obtenemos la primer aproximación:

$$x_1^0 = \frac{-1 + 2(0) - 3(0)}{5} = \frac{-1}{5} = -0.200$$
$$x_2^0 = \frac{2 + 3(0) - (0)}{9} = \frac{2}{9} = 0.222$$
$$x_3^0 = \frac{-3 + 2(0) - (0)}{7} = \frac{-3}{7} = -0.428$$

Por lo tanto a primer aproximación los resultados de cada incógnita son los siguientes:

$$\boxed{x_1 = -0.200,\ x_2 = 0.222,\ x_3 = -0.428}$$

- Para la segunda aproximación se toma entonces como solución inicial los valores obtenidos para las incógnitas en la primer aproximación y calculamos los nuevos valores. Esto quiere decir que la solución inicial será la siguiente:

$$x_1 = -0.200$$

$$x_2 = 0.222$$

$$x_3 = -0.428$$

y sustituyendo estos valores en las incógnitas despejadas tenemos:

$$x_1^1 = \frac{-1+2(0.222)-3(-0.428)}{5} = \frac{91}{625} = 0.1456$$
$$x_2^1 = \frac{2+3(-0.200)-(-0.428)}{9} = \frac{457}{2250} = 0.2031$$
$$x_3^1 = \frac{-3+2(-0.200)-(0.222)}{7} = \frac{-1811}{3500} = -0.5174$$

Por lo tanto a segunda aproximación los resultados de cada incógnita son los siguientes:

$$\boxed{x_1 = 0.1456,\ x_2 = 0.2031,\ x_3 = -0.5174}$$

- Finalmente, para la encontrar los valores de las incógnitas para una tercer aproximación, tenemos que la solución inicial que se tiene que considerar es:

$$x_1 = 0.1456$$

$$x_2 = 0.2031$$

$$x_3 = -0.5174$$

y sustituyendo estos valores en las incógnitas despejadas tenemos que:

$$x_1^2 = \frac{-1+2(0.2031)-3(-0.5174)}{5} = \frac{599}{3125} = 0.1916$$
$$x_2^2 = \frac{2+3(0.1456)-(-0.5174)}{9} = 0.3282$$
$$x_3^2 = \frac{-3+2(0.1456)-(0.2031)}{7} = -0.4159$$

Para concluir, se tiene que para la tercer aproximación los resultados de cada incógnita son los siguientes:

$$\boxed{x_1 = 0.1916,\ x_2 = 0.3282,\ x_3 = -0.4159}$$