

Tarea Computacional 2

El problema del Vendedor Viajero y su solución mediante Python con PuLP

Integrantes: Roberto Felipe Artigues Escobar
Emilio Juan Meza Quiroz

Profesora: Rosa Medina

Fecha de entrega: 10 de Noviembre de 2023
Concepción, Chile

1. Contexto del Problema

En el año 2150, la humanidad ha establecido colonias en diversos sistemas estelares. La empresa Courier Cósmico S.A. se enfrenta al desafío de optimizar las rutas de sus naves espaciales para el abastecimiento de estas colonias. El costo de viajar entre colonias es asimétrico debido a factores como las diferencias gravitacionales, corrientes espaciales y eventos cósmicos. Este problema se conoce como el "Problema del Viajante Espacial" (PVE).

El objetivo es diseñar una ruta que permita a una nave visitar cada colonia una sola vez y regresar a la base terrestre de la manera más eficiente posible. La nave debe llevar suministros vitales, realizar mantenimientos y transportar pasajeros, todo esto bajo la restricción de minimizar los costos totales que incluyen consumo de combustible, tiempo, peajes espaciales y maniobras de asistencia gravitatoria.

Modelación del problema

En el contexto de la Optimización de Rutas Espaciales Intercoloniales (OREI), consideramos el conjunto de colonias interstelares que deben ser visitadas exactamente una vez por una nave espacial, que parte y regresa a la base terrestre. El costo c_{ij} representa el consumo de combustible, tiempo, peajes espaciales y maniobras gravitatorias entre la colonia i y la colonia j , y no es simétrico debido a las diferentes condiciones espaciales.

Formulación de Dantzig-Fulkerson-Johnson (DFJ)

Función Objetivo:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad \text{para toda colonia } j \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad \text{para toda colonia } i \quad (3)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \text{para cualquier subconjunto } S \text{ de colonias, con } S \neq \emptyset \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{si la nave viaja de } i \text{ a } j \quad (5)$$

Formulación de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)

Incluye todas las restricciones de la formulación DFJ y añade:

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2, \quad \text{para } i, j = 2, \dots, n \quad (6)$$

Donde u_i es una variable continua que representa el orden de visita a la colonia i en la ruta, ayudando a prevenir subrutas dentro del recorrido.

Formulación de Gillett-Gomory (GG)

Incluye todas las restricciones de la formulación DFJ y añade:

$$\sum_{j=1}^n g_{ij} - \sum_{j=2}^n g_{ji} = 1, \quad \text{para toda colonia } i \text{ excepto la base terrestre} \quad (7)$$

$$0 \leq g_{ij} \leq (n - 1)x_{ij}, \quad \text{si hay flujo de la nave entre } i \text{ y } j \quad (8)$$

donde g_{ij} son variables de flujo que representan el número de naves entre las colonias i y j

j , asegurando la conservación del flujo y la no formación de subrutas.

2. Situación Propuesta

En una galaxia muy, muy lejana, el Gran Moff Tarkin se enfrenta al desafío de mantener el control del Imperio Galáctico. Su misión es optimizar los recursos imperiales para maximizar el control sobre la galaxia mientras se minimiza cualquier forma de insurrección rebelde. Con un enfoque multifacético que abarca desde la fuerza militar hasta la diplomacia, Tarkin debe tomar decisiones que afectarán el destino del Imperio.

3. Variables de Decisión

Las siguientes variables de decisión se consideran en el modelo:

- x_1 = Número de Destrucción Estelares construidos
- x_2 = Número de Stormtroopers entrenados
- x_3 = Número de cazas TIE fabricados
- x_4 = Número de planetas bajo vigilancia directa
- x_5 = Cantidad de recursos asignados para espionaje
- x_6 = Cantidad de recursos asignados para propaganda
- x_7 = Número de alianzas con cárteles de comercio
- x_8 = Número de Jedi capturados
- x_9 = Número de misiones diplomáticas realizadas
- x_{10} = Número de Ewoks reclutados como mascotas para la moral

4. Función Objetivo y justificación

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 + x_7 + 5x_8 + x_9 - 3x_{10}$$

La función objetivo busca maximizar el control imperial sobre la galaxia, y los coeficientes asignados a cada variable reflejan su importancia relativa en esta tarea. A continuación, se detallan las razones para la elección de cada coeficiente:

- **Destructores Estelares** (x_1): Coeficiente 3
Vital para el control de sistemas estelares; representa el poderío militar del Imperio.
- **Stormtroopers** (x_2): Coeficiente 2
Importantes para la fuerza terrestre pero no tan críticos como los Destructores Estelares.
- **Cazas TIE** (x_3): Coeficiente 1
Útiles pero fácilmente producibles y menos críticos.
- **Planetas bajo vigilancia** (x_4): Coeficiente 4
Cruciales para prevenir rebeliones y mantener el orden.
- **Espionaje** (x_5): Coeficiente -1
Útil pero potencialmente dañino si se descubre.
- **Propaganda** (x_6): Coeficiente 2
Ayuda a mantener la moral alta y el apoyo público.
- **Alianzas con cárteles** (x_7): Coeficiente 1
Útiles pero menos confiables que los recursos internos.
- **Jedi capturados** (x_8): Coeficiente 5
Un golpe significativo para la Rebelión y un gran logro para el Imperio.
- **Misiones diplomáticas** (x_9): Coeficiente 1
Útiles pero no garantizan lealtad a largo plazo.
- **Ewoks** (x_{10}): Coeficiente -3
Potencial fuente de rebelión; se manejan con cuidado.

5. Restricciones y Justificación

Las restricciones del modelo se enumeran a continuación:

$$x_1 + x_3 \leq 100 \quad (1)$$

$$x_2 \geq 500 \quad (2)$$

$$x_5 + x_6 \leq 50 \quad (3)$$

$$x_4 + x_9 \leq 10 \quad (4)$$

$$x_{10} \leq \frac{x_2}{10} \quad (5)$$

$$x_8 \leq 50 \quad (6)$$

$$x_7 \leq 50 \quad (7)$$

$$x_2 \leq (x_1 + x_3) \times 10 \quad (8)$$

A continuación, se detallan las justificaciones para cada una de las restricciones:

1. Capacidad de producción militar: Esta restricción se debe a limitaciones en las fábricas de Kuat Drive Yards y Sienar Fleet Systems, que solo pueden producir 100 unidades de naves grandes y cazas TIE en total.
2. Mínimo de Stormtroopers para mantener el orden: De acuerdo con análisis históricos de conflictos internos, se ha determinado que al menos 500 Stormtroopers son necesarios para mantener la paz y el orden en los territorios del Imperio.
3. Presupuesto para espionaje y propaganda: El Senado Imperial ha asignado un máximo de 50 millones de créditos galácticos para estas actividades.
4. Límite de operaciones planetarias: Debido a la escasez de líderes competentes y diplomáticos capacitados, el Imperio solo puede manejar 10 operaciones planetarias a la vez.
5. No más Ewoks que una décima parte de Stormtroopers: Los Ewoks son difíciles de manejar y requieren una supervisión constante. Por lo tanto, el número de Ewoks no debe superar una décima parte del número de Stormtroopers para evitar problemas de manejo.
6. Número Máximo de Jedi Capturados: Solo hay 50 bases en el Imperio capaces de albergar y contener a un Jedi.
7. Número Máximo de Alianzas con Cáteles: Hay un número limitado de bases planetarias que pueden gestionar alianzas con cáteles de comercio.
8. Relación entre Stormtroopers y Naves: Cada nave (Destructor Estelar o caza TIE) requiere un cierto número de Stormtroopers para operar eficazmente.

6. Resultados y Discusión

6.1. Resultados Excel

Los resultados obtenidos a través del solver de Excel ofrecen un valor objetivo de $Z = 2800$.

Variable	Coeficiente	Valor
x_1	3	100
x_2	2	1000
x_3	1	0
x_4	4	50
x_5	-1	0
x_6	2	50
x_7	1	50
x_8	5	10
x_9	1	100
x_{10}	-3	0

Tabla 1: Resultados obtenidos con Excel

6.2. Resultados AMPL

El modelo se resolvió con éxito utilizando el solver CPLEX, alcanzando una solución óptima con un valor objetivo de $Z = 2740$.

Variable	Coeficiente	Valor
x_1	3	100
x_2	2	1000
x_3	1	0
x_4	4	10
x_5	-1	0
x_6	2	50
x_7	1	50
x_8	5	50
x_9	1	0
x_{10}	-3	0

Tabla 2: Resultados obtenidos con AMPL

A pesar de las diferencias en los resultados, ambos modelos sugieren un fuerte enfoque en la construcción de Destructores Estelares y el entrenamiento de Stormtroopers. Sin embargo,

el modelo de Excel asigna más recursos a operaciones de vigilancia planetaria y misiones diplomáticas, lo que podría indicar diferencias en la implementación o en los parámetros del solver.