# Отчёт по теме 5.1

## Грабовский А. С. группа 1191б

## Вариант 1

## Математический маятник

## Модель без учета сопротивления среды

### Постановка проблемы (словесно-смысловая формулировка)

Рассматриваем маятник, состоящий из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нити (или на невесомом стержне) длиной L, причем эта материальная точка качается из стороны в сторону, как показано на рисунке 1.

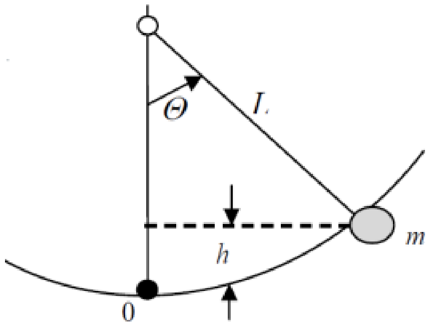



Рисунок 1 - Математический маятник

Будем полагать, что сила трения в оси пренебрежимо мала, сопротивление движению отсутствует.

Математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания: она не учитывает распределение массы. Однако реальный физический маятник при малых амплитудах колеблется так же, как математический с приведённой длиной.

Предполагая, что в начальный момент времени t=0 известны положение маятника и его начальная скорость, требуется определить положение и скорость маятника в произвольный момент времени t>0.

**Математическая модель:**

Положение маятника однозначно определяется углом $\Theta$.

Чтобы получить дифференциальное уравнение колебаний материальной точки массой m, запишем закон сохранения механической энергии, согласно которому сумма кинетической и потенциальной энергии тела постоянна. Выберем в качестве начала отсчета самую низкую точку О, через которую проходит при движении материальная точка. Расстояние от положения равновесия до материальной точки массой m вдоль дуги s=L$\Theta$.

Следовательно, скорость движения материальной точки равна:

$$V = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\Theta}{dt}$$

Откуда кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Потенциальная энергия V равна произведению mg на высоту h и, следовательно:

$$V = mgL(1 - cos\theta)$$

Поскольку сумма T и V равна постоянной C (закон сохранения энергии), получаем:

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - cos\theta) = C$$

Продифференцируем обе части этого равенства по t, получим:

$$mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgL$$

Отсюда, после деления на $mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, получаем уравнение колебания маятника:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

Добавим начальные условия, угол отклонения и скорость в момент t=0, получаем математическую модель колебания маятника без учета сопротивления среды:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{L}sin\theta=0$$

$$\theta(0)=\theta_0,\frac{d\theta}{dt}(0)=v_0(1)$$

Для получения точного решения обычно рассматривают малые отклонения маятника $\Theta \ll 1$. Тогда синус можно разложить по формуле Тейлора и оставить первое слагаемое:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0-\text{уравнениемалыхколебаний}$$

$$\theta(0)=\theta_0$$

$$\dot{\theta}(0)=v_0(2)$$

**Компьютерная модель:**

Модель представлена на рисунке 2:

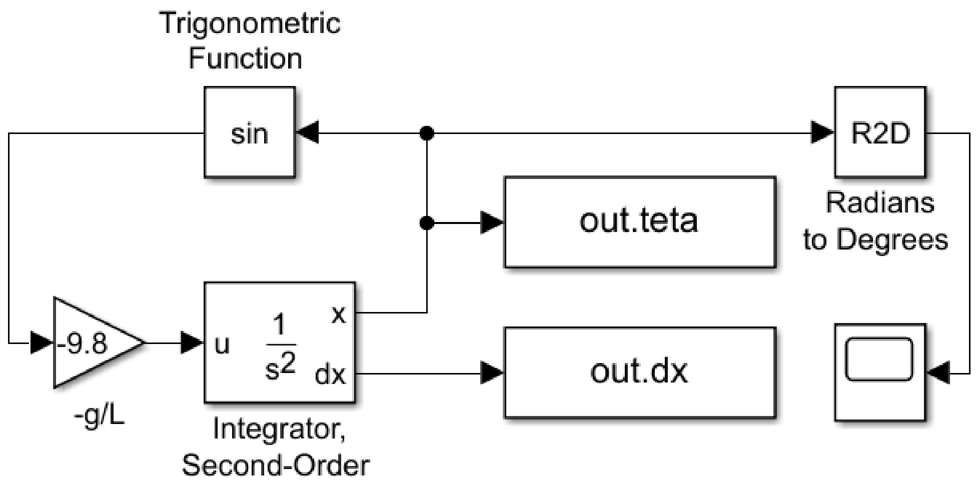



Рисунок 2 - Компьютерная модель

Начальный сигнал формируется в блоке «Integrator, Second-Order». Блок производит интегрирование второго порядка входного сигнала:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

где u – является входным сигналом. Блок является динамической системой с двумя непрерывными состояниями: x и $\frac{dx}{dt}$.

Далее сигнал x попадает в блок «Trigonometric Function», который находит синус входа, полученный сигнал передаётся в блок «Gain», где умножается на -9.8, что соответствует -g/L в уравнении математической модели. После чего сигнал приходит на вход блока «Integrator, Second-Order».

Также сигнал x проходит через блок «Radians to Degrees», который переводит радианы в градусы, после чего попадает в блок «scope» для визуализации.

**Планирование эксперимента**

n = 1

1) Построить графики решений (интегральные кривые) для модели (1) и для модели (2) для:
   a) $v_0 = 0$
   b) $\theta_0 = \frac{n*\pi}{100}, \frac{3*n*\pi}{100}, \frac{5*n*\pi}{100}$

   Сравнить решения, для этого постройте графики разностей

2) Определить стационарные решения (особые точки) и исследовать на устойчивость. Как называется этот тип особой точки?
3) Построить фазовые траектории для:
   a) $v_0 = 0$
   b) $\theta_0 = \pi\left(1 - \frac{n}{100}\right), \frac{-\pi*n}{100}, \pi\left(1 - \frac{4*n}{100}\right)$

4) Дополнительное задание. Подобрать начальные условия так, чтобы фазовый портрет качественно выглядел, как на рис. 3. Пояснить.

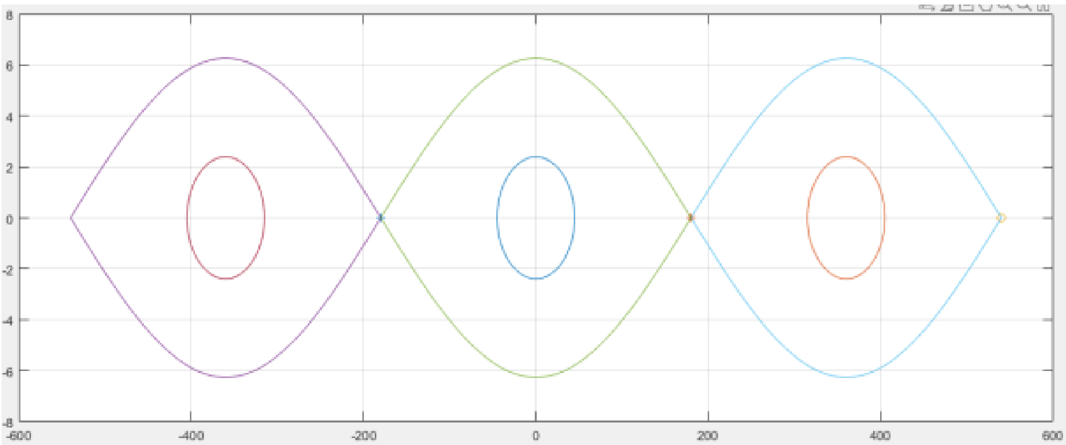
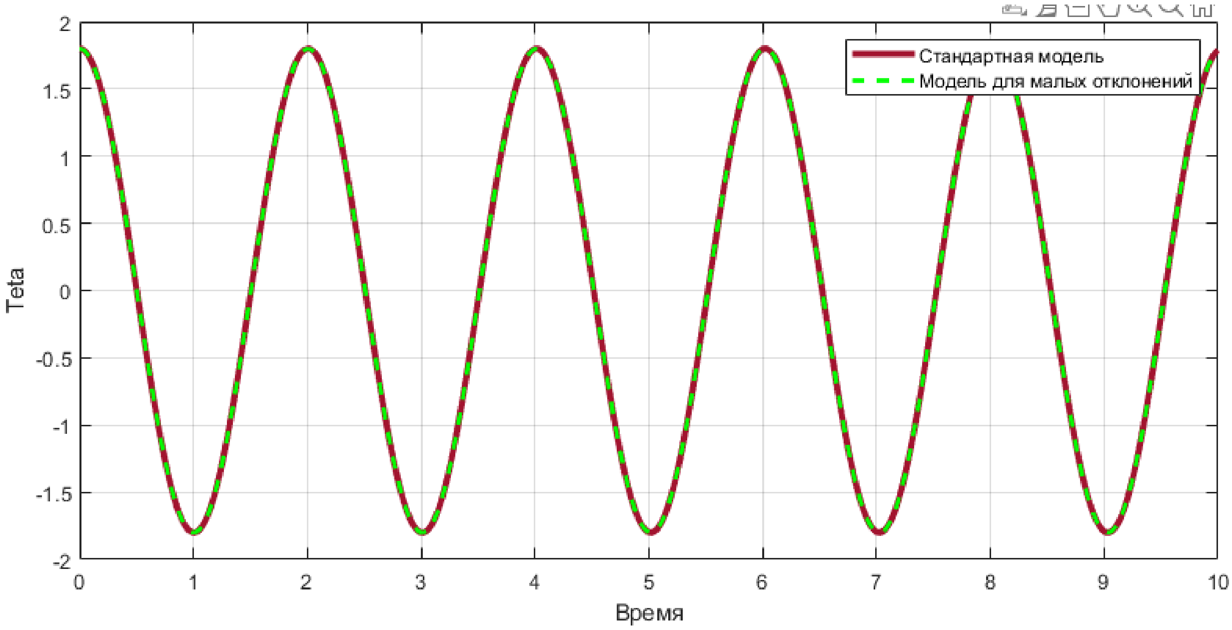



Рисунок 3 - Фазовый портрет маятника, в случае нескольких оборотов

**Эксперимент**

1. При $\theta_0 = \frac{n*\pi}{100}$ :




Интегральные кривые

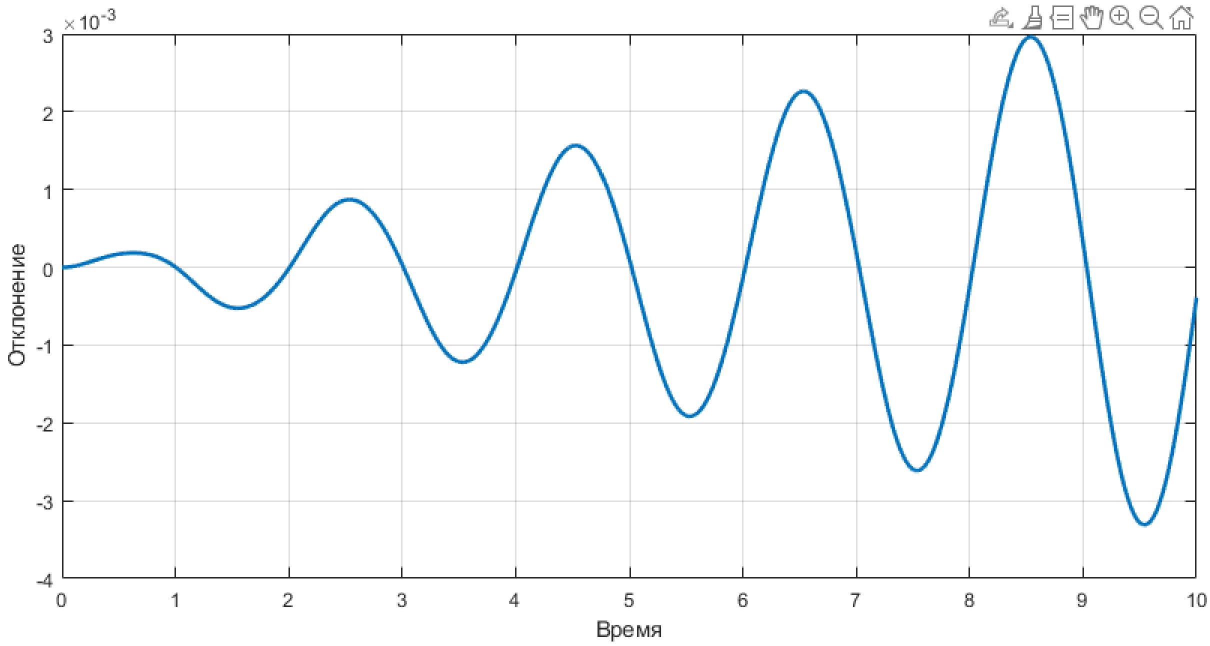
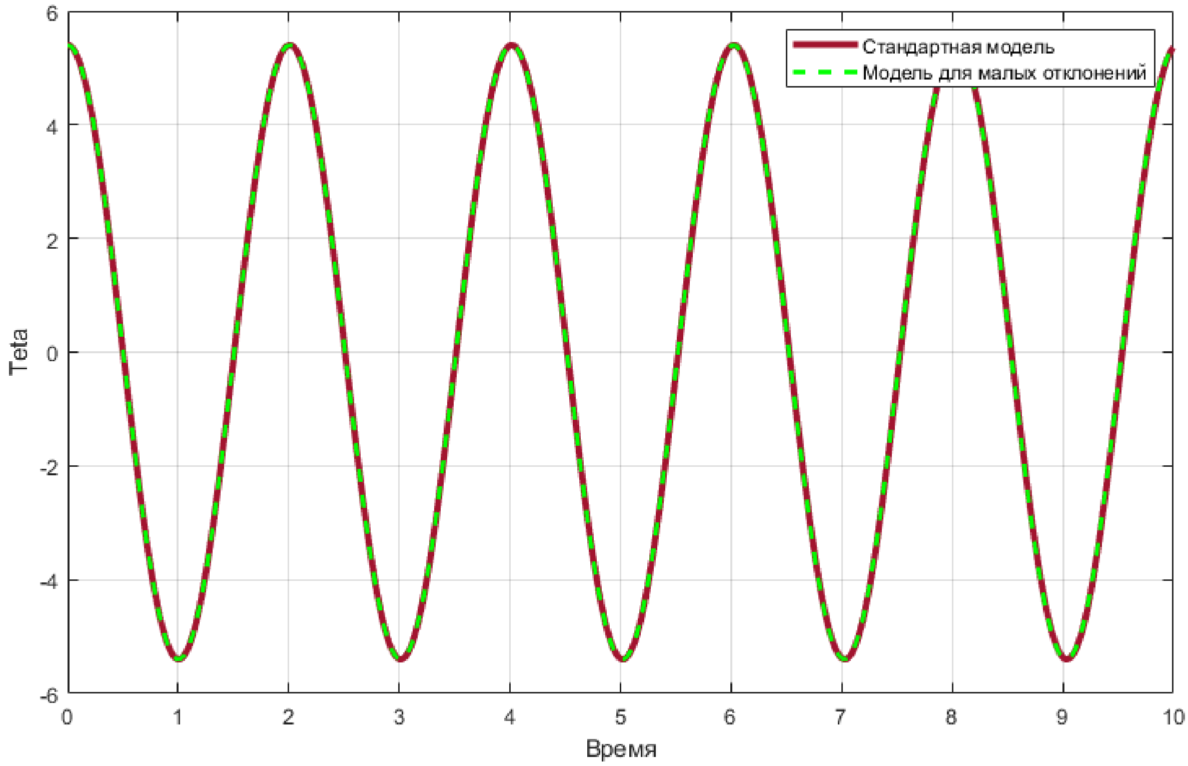



График разностей

При $\theta_0 = \frac{3*n*\pi}{100}$:




Интегральные кривые

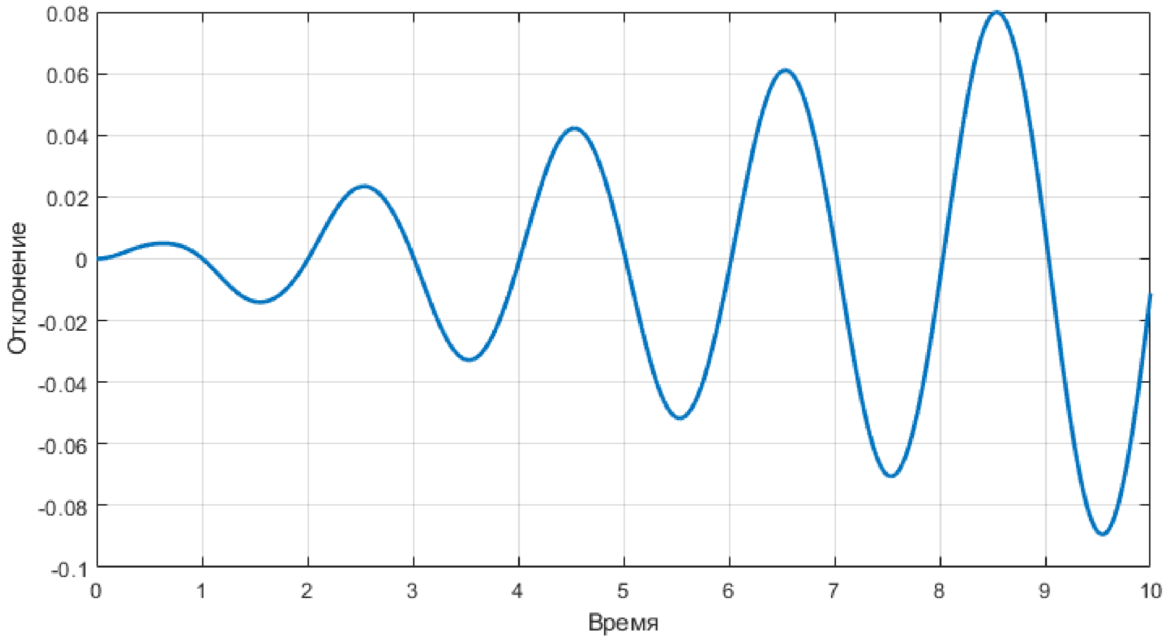
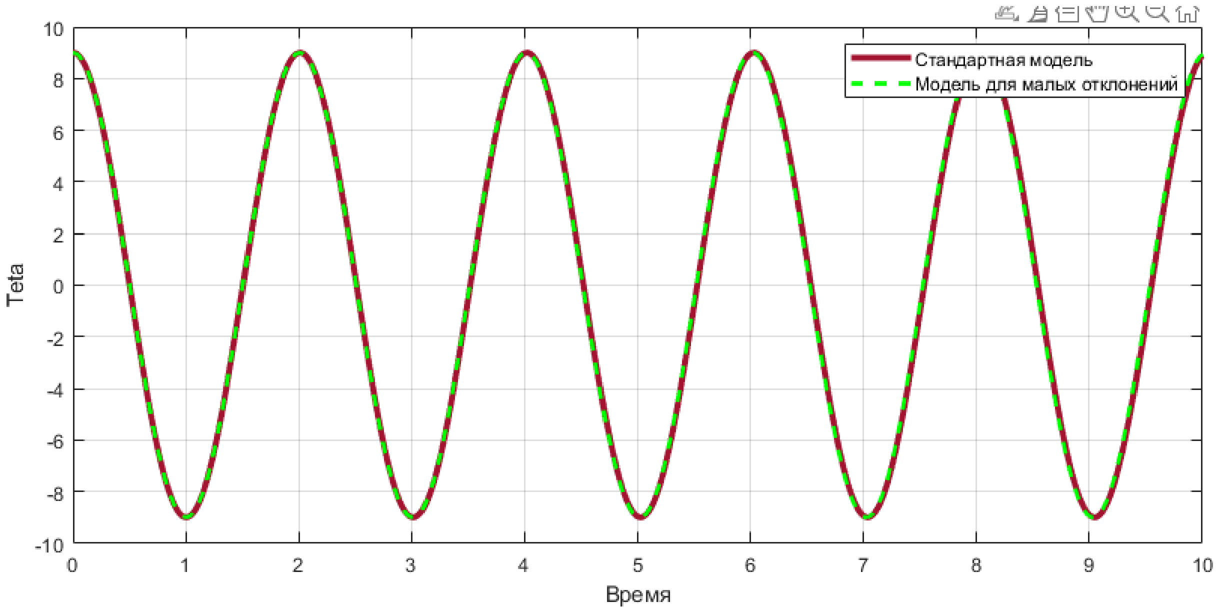



График разностей

При $\theta_0 = \frac{5*n*\pi}{100}$:




Интегральные кривые

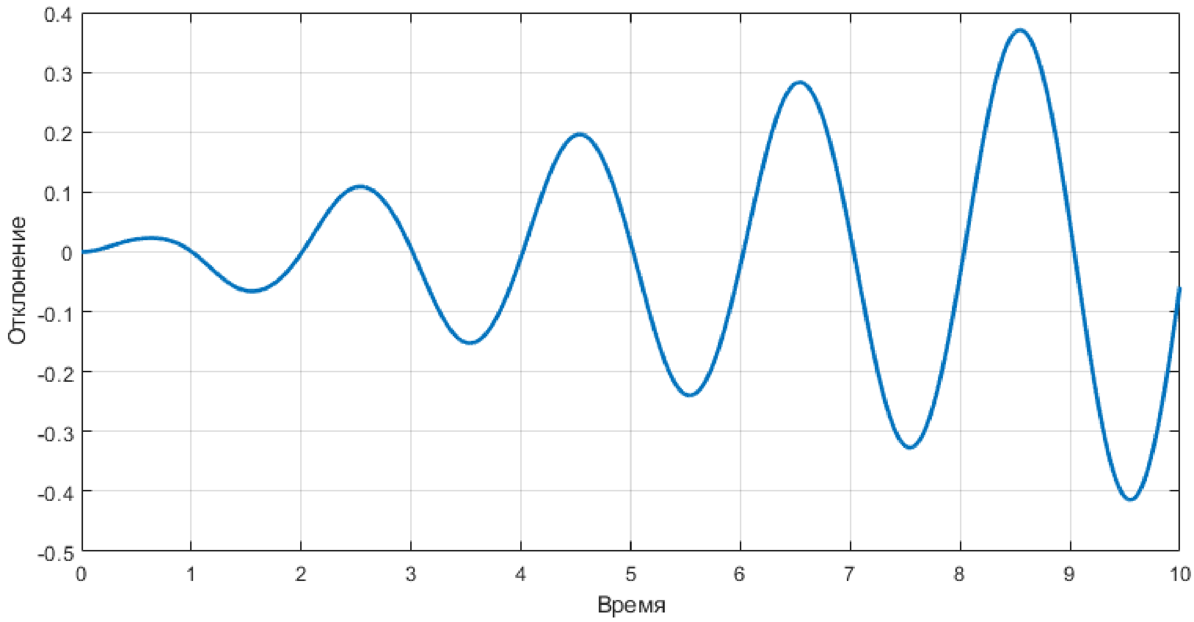
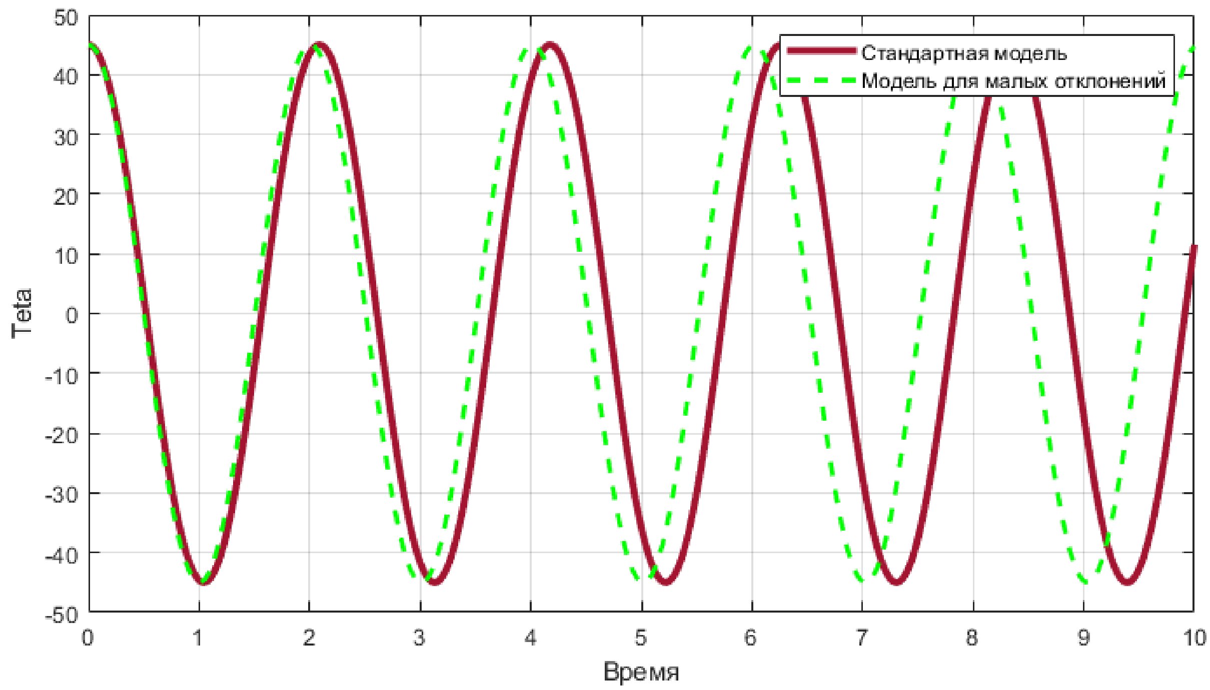



График разностей

При $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$:




Интегральные кривые

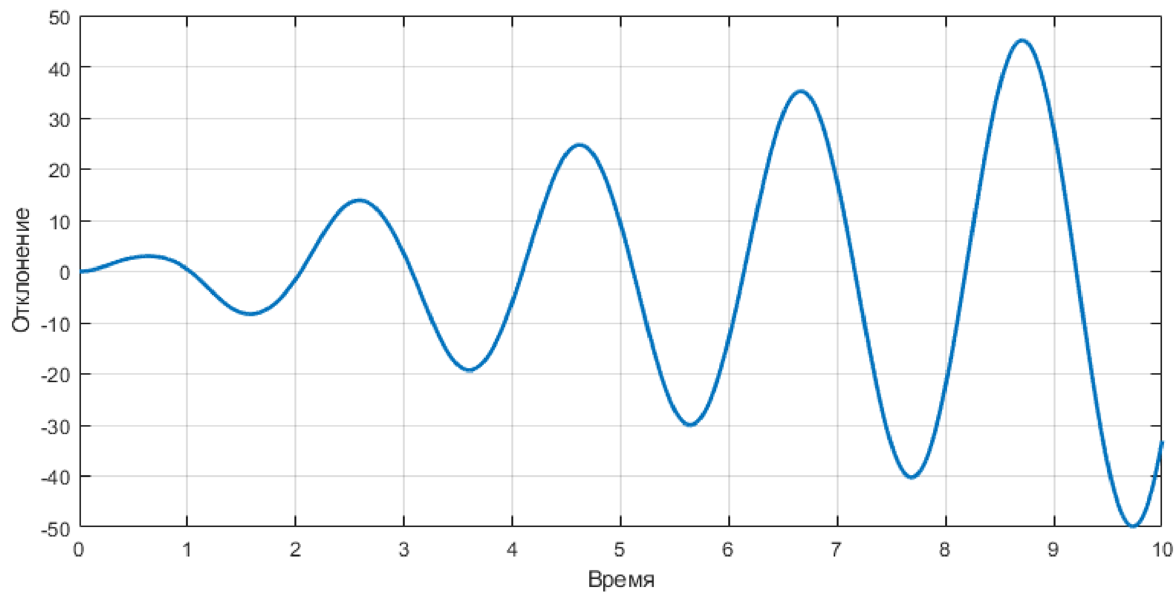
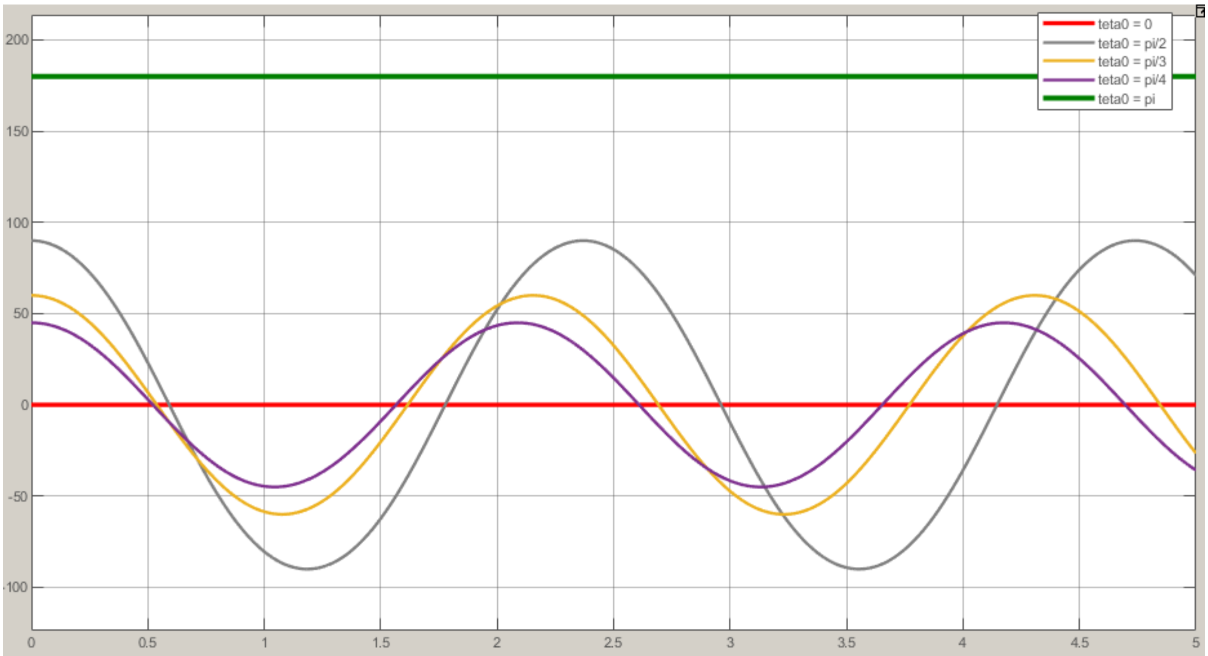



График разностей

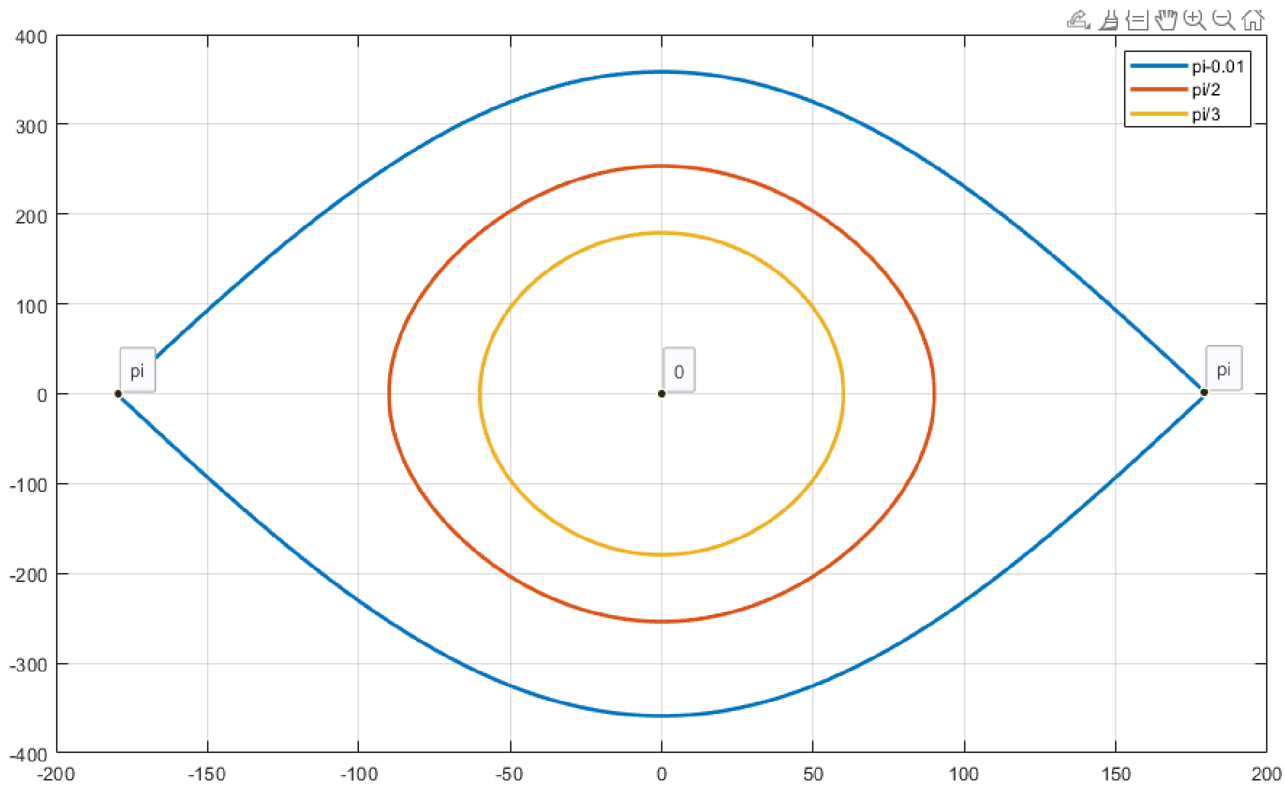
При использовании модели для малых колебаний происходит накопление ошибки с течением времени. Ошибка при малых колебаниях несущественна, но с увеличением угла $\theta_0$ происходит значительное увеличение отклонения.

2. Существует два стационарных решения $\theta_0=0$ и $\theta_0=\pi$:



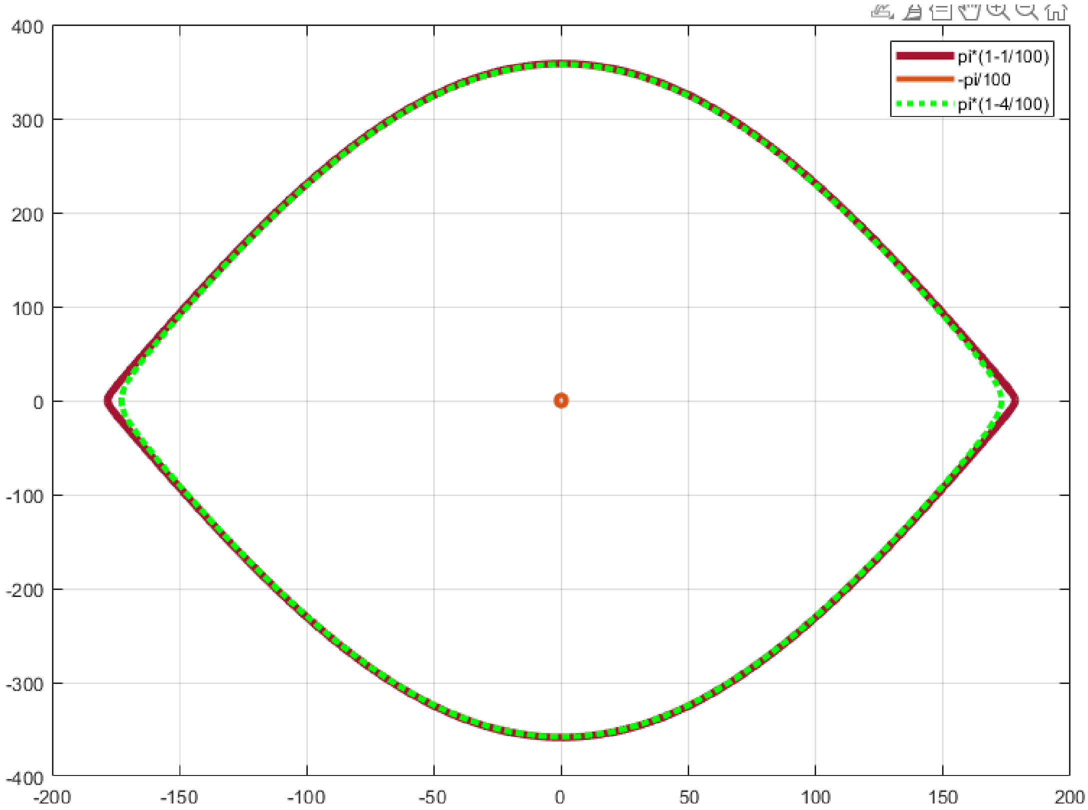

Интегральные кривые

Стационарное решение $\theta_0 = 0$ называется центром, возмущения обращаются вокруг этой точки, это решение является устойчивым. Стационарное решение $\theta_0 = \pi$ называется седлом, в этой точки система находится в покое, но при любом возмущении выходит из этого состояния, это решение неустойчиво:

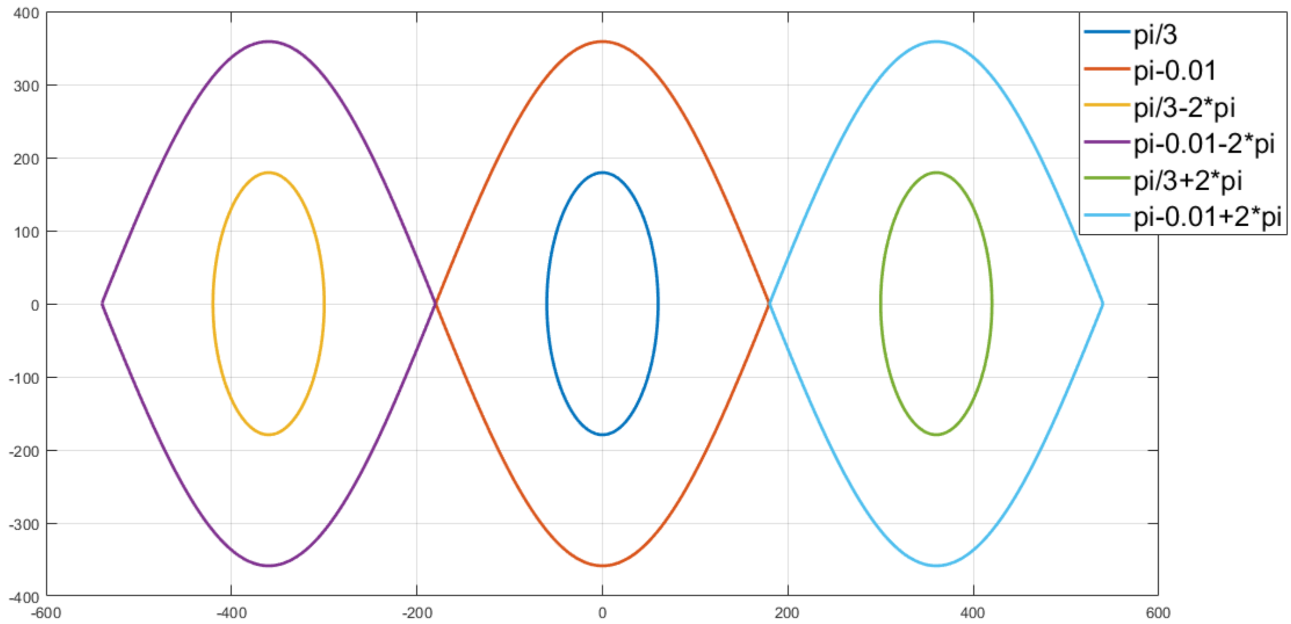



Фазовые траектории

3. Построены следующие фазовые траектории:




4. Дополнительное задание:




Линия pi/3 обращается вокруг устойчивого стационарного решения $\theta_0 = 0$, линия pi-0.01 является возмущением неустойчивого стационарного решения $\theta_0 = pi$. Остальные линии аналогичны, но со смещением влево на один полный оборот (-2pi)/ вправо (+2*pi).

**Используема литература:**


1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Математический_маятник
2. https://docs.exponenta.ru/
3. https://eluniver.ugrasu.ru/mod/folder/view.php?id=133214