Отчёт по теме 3.3

Грабовский А.С. группа 1191б

Вариант 1

Модели динамики биологических популяций

Модели динамики популяций с учетом вылова

(«жесткая» модель)

Словесно-смысловое описание

Модель отображает динамику популяций основываясь на нескольких параметрах, рождаемости особей, убыль популяции в виду недостаточности ресурсов, убыль ввиду вылова популяции.

Цель работы: оценить устойчивость стационарных решений при различных уровнях вылова.

Математическая модель:

Математическая модель имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx)x - h$$

$$x(0) = x_0$$

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h$$

Где:

- a – рождаемость
- b – смертность
- h – вылов

Для дальнейшей работы перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = kx\left(M - x\right) - h$$

Где:

- k = b
- M = a/b

Принимая теперь, что h>0, решаем квадратное уравнение $-kx^2 + kMx - h = 0$ и находим две точки равновесия, при условии 4h<= kM^2:

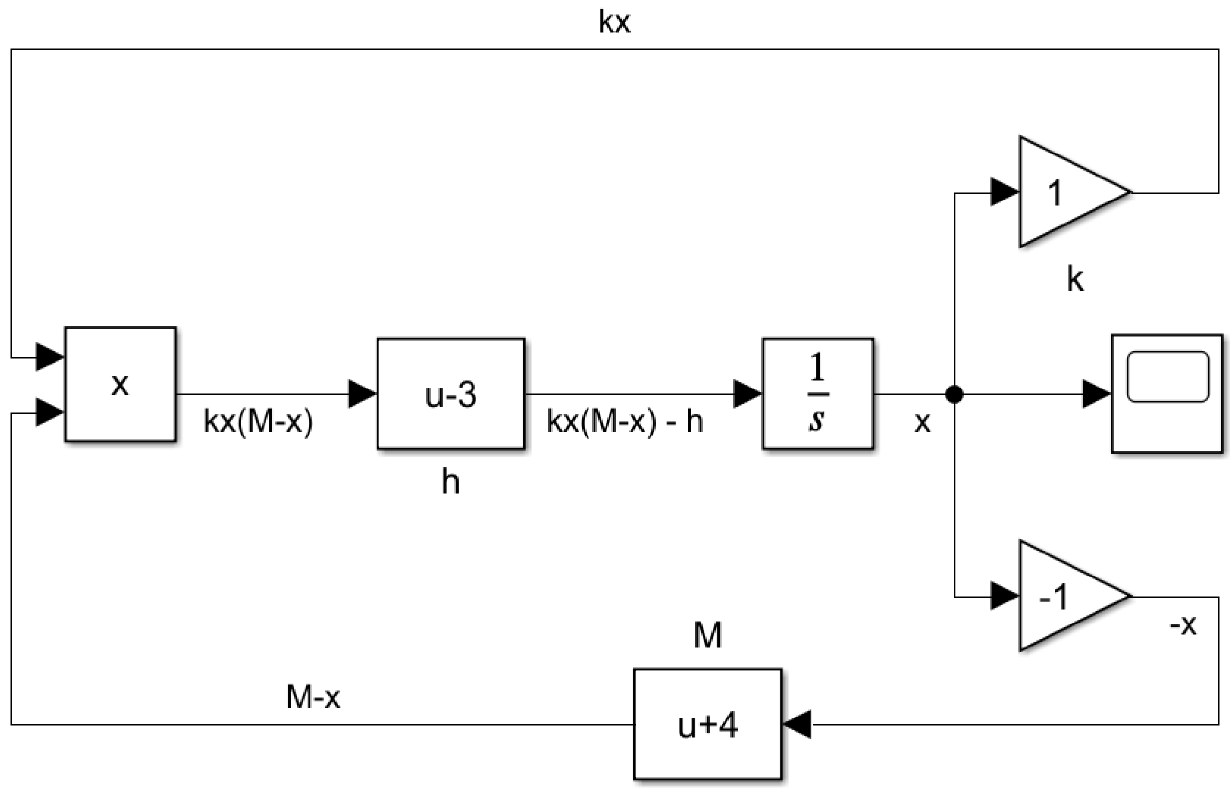
$$x_{1,2} = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k} = \frac{1}{2}(M \pm \sqrt{M^2 - 4h/k})$$

$$x_1 = \frac{1}{2} * \left(4 + \sqrt{16 - 4 * 3}\right) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{2} * \left(4 - \sqrt{16 - 4 * 3}\right) = 1$$

Компьютерная модель:

Модель имеет следующий вид:



Блок интегратор генерирует интегральный сигнал (равный x), исходящий по трём путям:

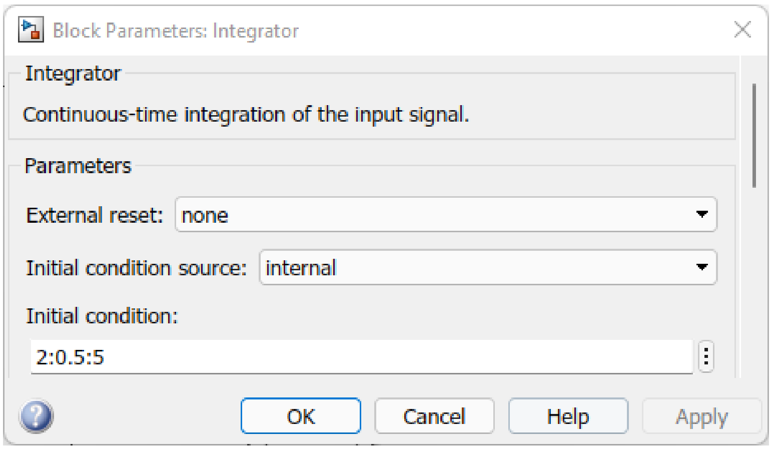
1. На блок Scope, с целью визуализации сигнала
2. Сигнал проходит через блок Gain, умножаясь на единицу (соответствует k)
3. Сигнал проходит через блок Gain, умножаясь на -1 (тем самым преобразуя x в -x), далее проходит через блок Bias, прибавляя к сигналу 4 (соответствует M)
4. Сигнал, полученный в пунктах 2 и 3, перемножается в блоке Product, после чего в блоке Bias от него вычитается 3 (соответствует h)

Планирование эксперимента:

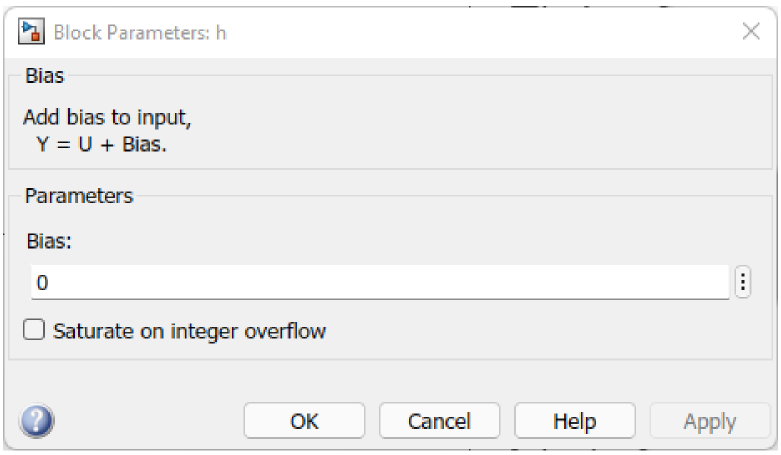
1. Оценка количества рыб в водоёме без вылова
2. Определить устойчивость стационарных решений x=3 и x=1
3. Определить устойчивость при максимальном уровне вылова (h = 4)
4. Определить устойчивость при уровне вылова h>4

Эксперимент 1:

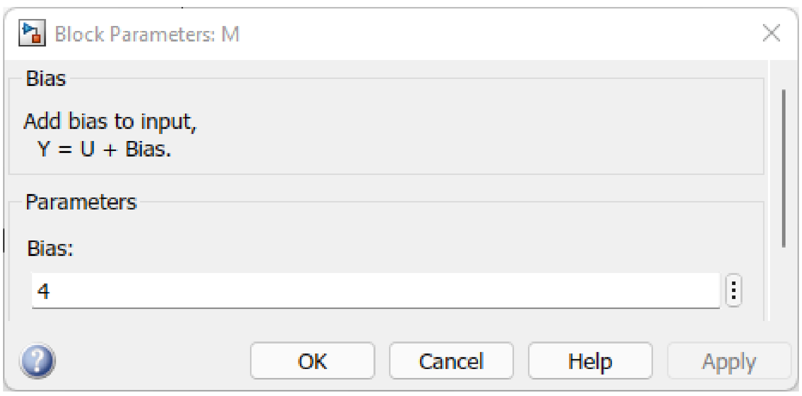
- Задаём x:



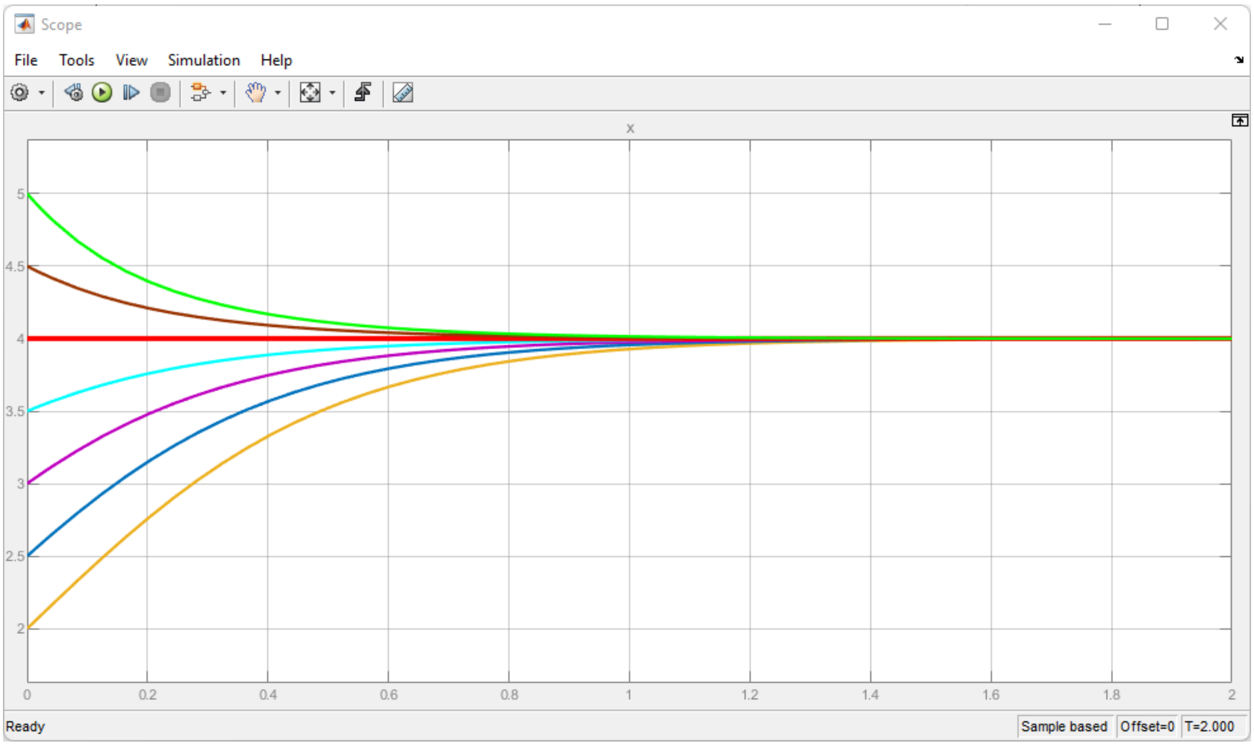
- h приравниваем 0, вылов отсутствует:



- M = 4



Результат:



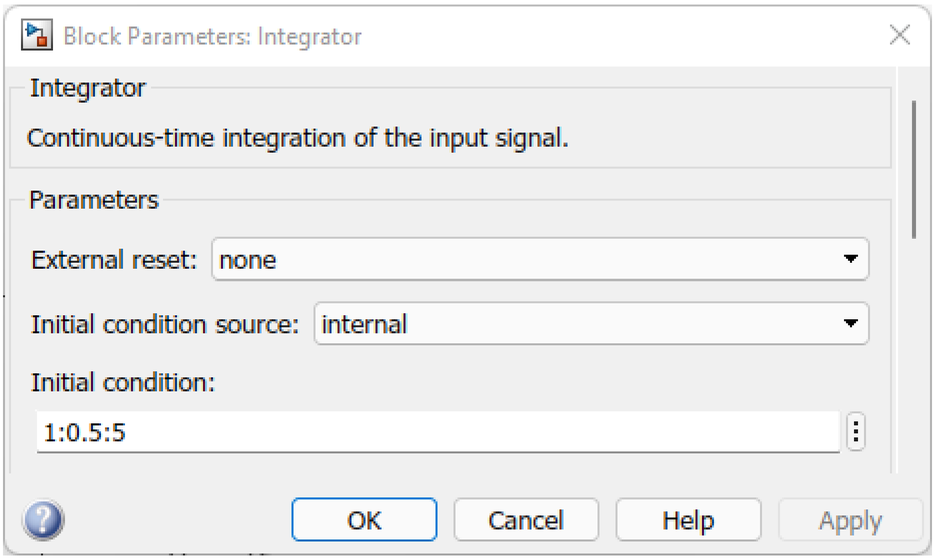
Вывод:

x = 4 – устойчивое (с течением времени возмущения стремятся к этому значению), стационарное решение.

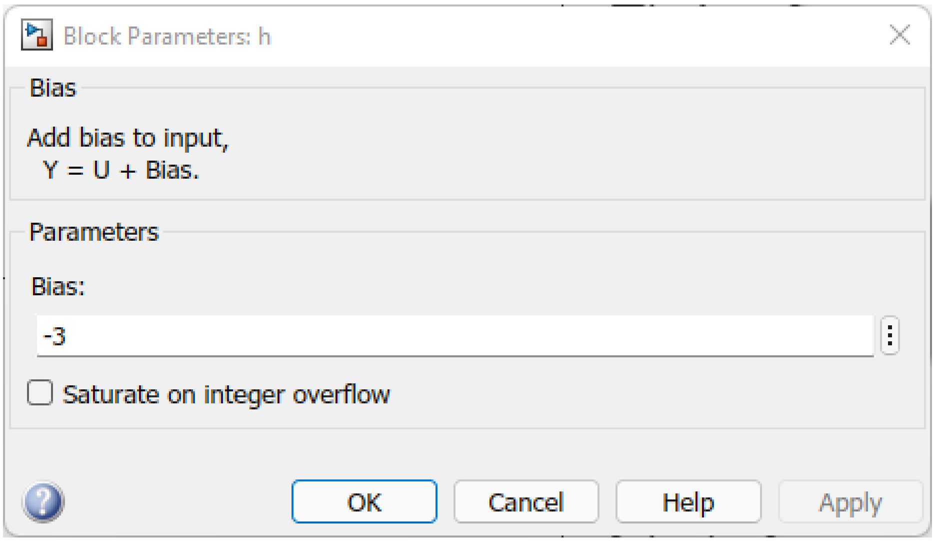
Следовательно, без вылова, популяция равняется 4, поскольку это состояние устойчиво оно не зависит от начальной популяции.

Эксперимент 2:

- Задаём x:

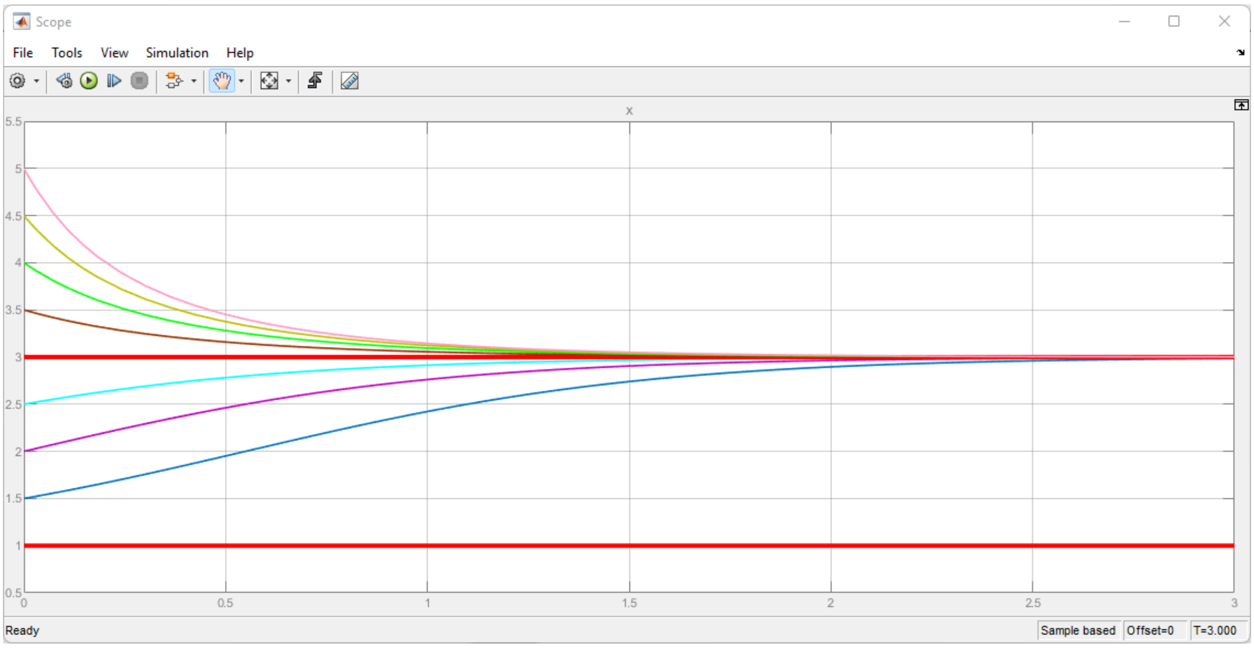


- h приравниваем 3:

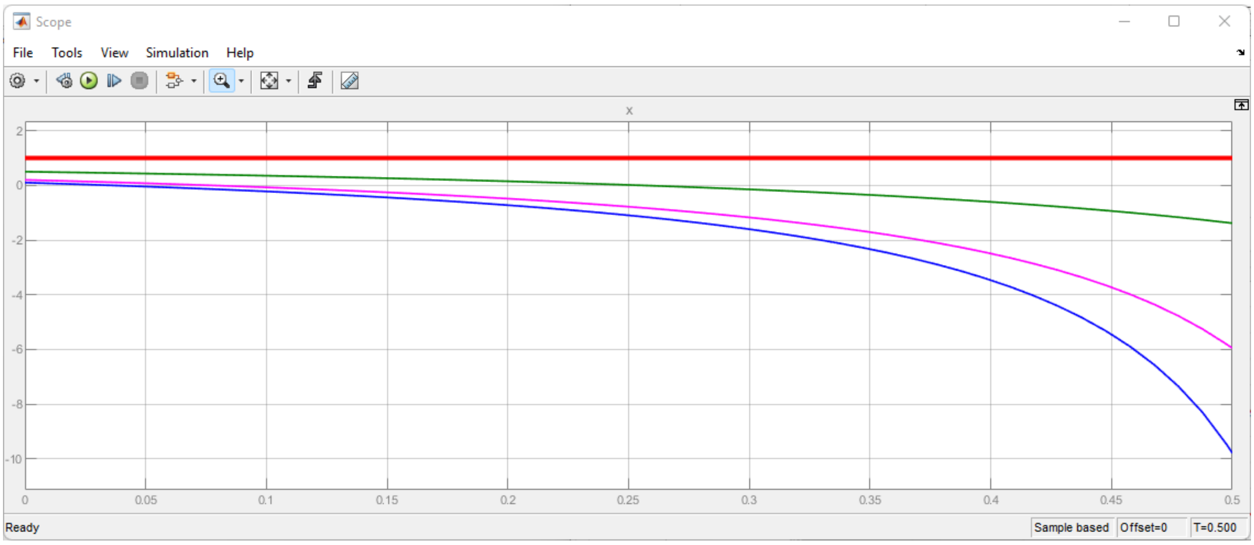


Результат:

Для x>1:



Для x<1:



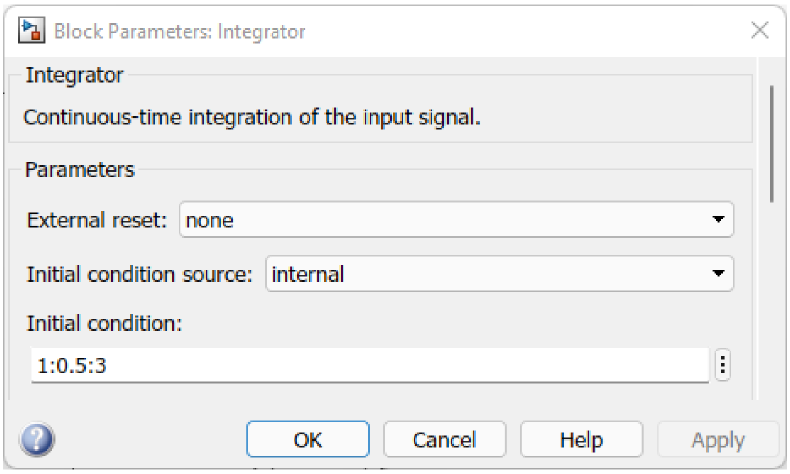
Вывод:

Получаем два стационарных решения, x=3 и x = 1.

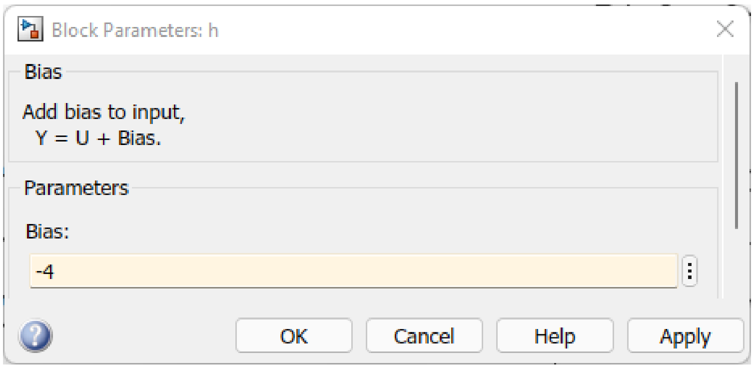
Решение x = 1 неустойчиво, x=3 - устойчиво, численность популяции больше 3 или находящейся в диапазоне от 1 до 3 стремится к этому значению.

Эксперимент 3:

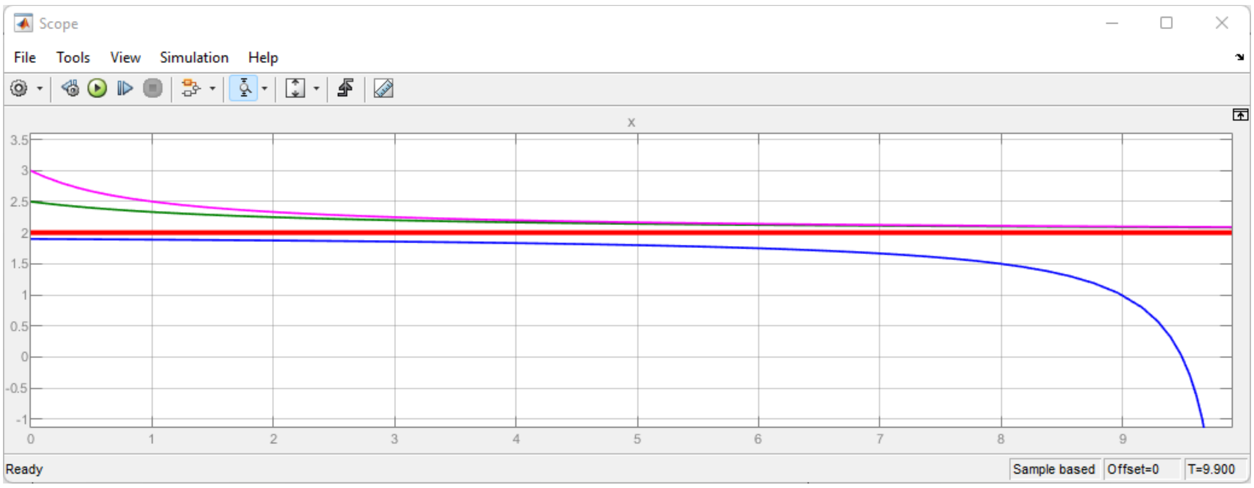
- Задаём x:



- h приравниваем 4:



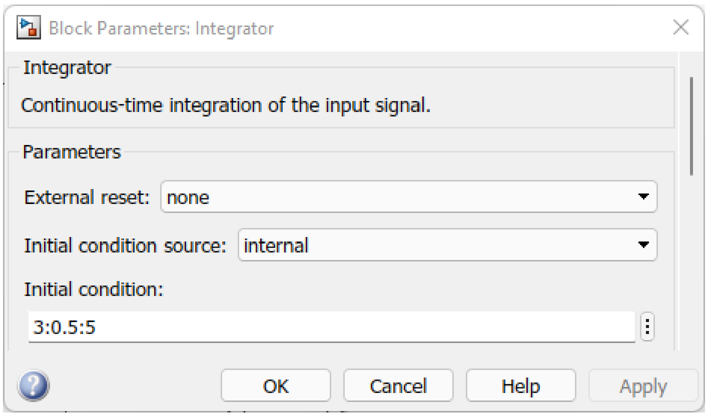
Результат:



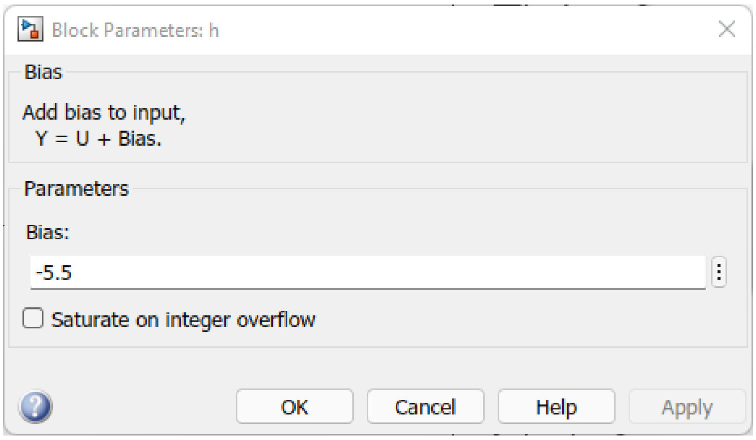
Вывод: существует одно стационарное решение x=2. Оно не является устойчивым и неустойчивым, так как большие значения стремятся к 2, однако при меньших значениях популяции она вымирает.

Эксперимент 4:

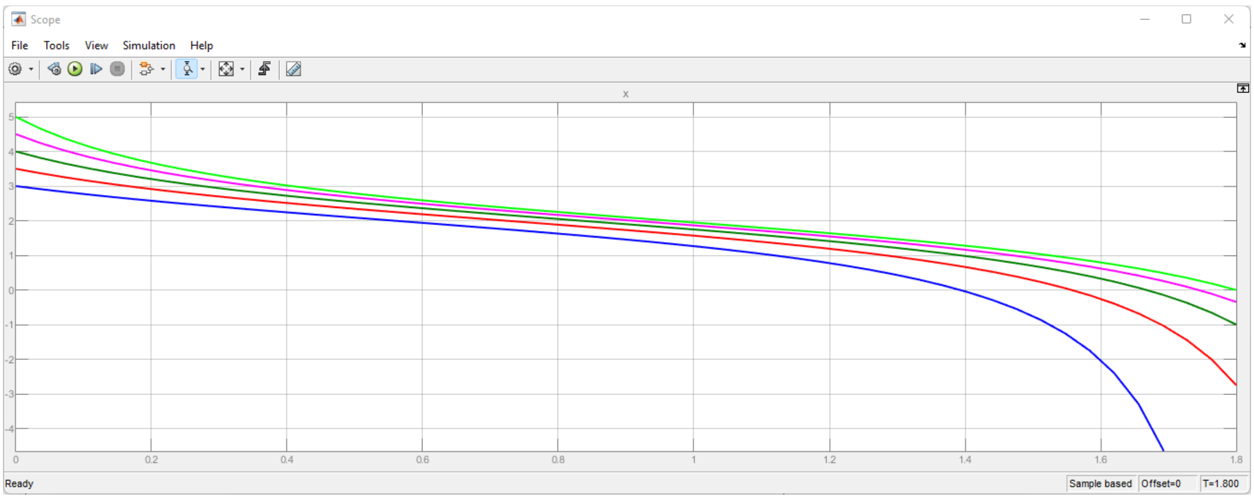
- Задаём x:



- Задаём h больше 4:



Результат:



Вывод: при вылове больше нормы (в данном случае больше 4) нет стационарных решений, популяция, вне зависимости от начального количества, вымирает.

Используема литература:

1. https://eluniver.ugrasu.ru/pluginfile.php/535501/mod_resource/content/5/Тема%203v.pdf
2. https://docs.exponenta.ru/matlab/index.html