Probabilidades

Ejercicio 1)

Sabiendo que $P(A \cap B) = 0.6$ y que $P(A \cap B^C) = 0.2$, se pide calcular la probabilidad de A.

Ejercicio 2)

Sean 2 sucesos A y B de los que se sabe que la probabilidad de B es el doble que la de A, que la probabilidad de su unión es el doble que la de su intersección, y que la probabilidad de su intersección es de 0.1. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de A.
b) ¿Qué suceso es más probable que ocurra sabiendo que ya ha ocurrido el otro?

Ejercicio 3)

Dados los sucesos A y B tales que $P(A) > 0$ y $P(B|A) > 0$. Demuéstrese que:

$$P(B|A) > 1 - \frac{P(B^C)}{P(A)}$$

Ejercicio 4)

Demuestre que si A, B, C son sucesos mutuamente independientes, entonces los sucesos $A \cup B$ y C son también independientes.

Ejercicio 5)

Se dan tres sucesos aleatorios A, B, C, independientes dos a dos, los cuales, sin embargo, no pueden ocurrir simultáneamente. Suponiendo que todos ellos tienen igual probabilidad p, calcular el valor de p que hace máxima la probabilidad de ocurrencia de al menos uno de los sucesos.

Ejercicio 6)

En un sorteo de lotería observamos la cifra en que termina el billete premiado.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?
b) Escribe los sucesos A=menor que 5; B=par.
c) Halla los sucesos $A \cup B, A \cap B$, A^C, B^C, $A^C \cap B^C$.

Ejercicio 7)

Escribimos cada una de las letras de la palabra PREMIO en una ficha y las ponemos en una bolsa. Extraemos una letra al azar.

a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?
b) Escribe el suceso “obtener vocal” y calcula su probabilidad.
c) Si la palabra elegida fuera SUERTE, ¿cómo responderías a los apartados a) y b)?

Ejercicio 8)

El juego del dominó consta de 28 fichas. Sacamos una al azar y anotamos la suma (x) de las puntuaciones.

a) ¿Cuál es el espacio muestral? Di la probabilidad de cada uno de los 13 casos que pueden darse.
b) Describe los sucesos:
   A: x es un número primo.
   B: x es mayor que 4.
   $A \cup B$
   $A \cap B$
   A^C
c) Calcula las probabilidades de los sucesos descritos en el apartado b).

Ejercicio 9)

En la lotería primitiva se extraen bolas numeradas del 1 al 49. Calcula la probabilidad de que la primera bola extraída:

a) Sea un número de una sola cifra.
b) Sea un número múltiplo de 7.
c) Sea un número mayor que 25.

Ejercicio 10)

En una bolsa hay bolas de colores, pero no sabemos cuántas ni qué colores tienen. En 1000 extracciones (devolviendo la bola cada vez) hemos obtenido bola blanca en 411 ocasiones, bola negra en 190, bola verde en 179 y bola azul en 220.
Al hacer una nueva extracción, di qué probabilidad asignarías a:

a) Sacar bola blanca.
b) No sacar bola blanca.
c) Sacar bola verde o azul.
d) No sacar bola negra ni azul.

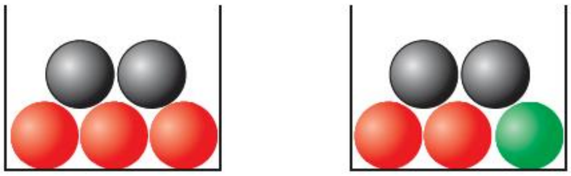
Si en la bolsa hay 22 bolas, ¿cuántas estimas que habrá de cada uno de los colores?

Ejercicio 11)

Lanzamos tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres puntuaciones sean menores que 5?

Ejercicio 12)

Sacamos una bola de cada urna. Calcula:



a) La probabilidad de que ambas sean rojas.
b) La probabilidad de que ambas sean negras.
c) La probabilidad de que alguna sea verde.

Ejercicio 13)

En un centro escolar hay 1000 alumnos y alumnas repartidos así:

	CHICOS	CHICAS
USAN GAFAS	147	135
NO USAN GAFAS	368	350

Llamamos: A: chicas, O: chicos, G: tiene gafas, G^C: no tiene gafas. Calcula:

a) $P(A), P(O), P(G), P(G^C)$
b) Describe los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades:
   $A\ y\ G, O\ y\ G^C, A|G, G|A, G|O$.

Ejercicio 14)

En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres (H) y 100 mujeres (M). Los fumadores (F) son 40 hombres y 35 mujeres.

a) Haz con los datos una tabla de contingencia.
b) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume: $P(H\ y\ F^C)$
c) Calcula también: $P(M\ y\ F), P(M|F), P(F|M)$.

Ejercicio 15)

Tenemos tres cartulinas. La primera tiene una cara roja (R) y otra cara azul (A); la segunda una cara A y otra verde (V), y la tercera, V y R. Las dejamos caer sobre una mesa. ¿Qué es más probable, que dos de ellas sean del mismo color o que sean de colores diferentes?

Ejercicio 16)

En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Ejercicio 17)

El 1% de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 97% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad?
b) Si sabemos que ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

Ejercicio 18)

En un club deportivo, el 52% de los socios son hombres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica la natación, así como el 60% de las mujeres. Si elegimos un socio al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique la natación?
b) Sabiendo que practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Ejercicio 19)

Un médico ha observado que el 40% de sus pacientes fuma y de estos, el 75% son hombres. Entre los que no fuman, el 60% son mujeres. Calcula la probabilidad de:

a) Un paciente no fumador sea hombre.
b) Un paciente sea hombre fumador.
c) Un paciente sea mujer.
d) Sabiendo que el paciente ha sido hombre, ¿qué probabilidad hay de que sea fumador?

Ejercicio 20)

Una librería tiene tres estanterías: superior, central e inferior. En la estantería superior hay 3 novelas y 7 cuentos. En la estantería central hay 8 novelas y 6 cuentos. En la estantería inferior hay 5 novelas y 9 cuentos. Se escoge un estante al azar y se saca de él un libro. Si resulta que es una novela, ¿cuál es la probabilidad de que se haya sacado del estante central?

Ejercicio 21)

Se ha realizado una encuesta entre los estudiantes de grado del MIT (Massachusetts Institute of Technology) para conocer sus preferencias tecnológicas. El 35% de los entrevistados tienen un iPhone y un IPad, el 80% tienen al menos uno de estos dispositivos y el 60% no tiene iPad. Se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Disponga de iPhone y no de iPad.
b) Tenga un iPad pero no un IPhone.
c) Tenga únicamente uno de los dos dispositivos.
d) No disponga de ninguno de los dos dispositivos.

Ejercicio 22)

Una pareja que espera un hijo está preocupada porque un test practicado al feto ha dado positivo a una enfermedad muy rara que solo la padecen uno de cada 10000 individuos. Sin embargo, el test es bastante seguro: de acuerdo con el laboratorio acierta el 99 por ciento de los casos, tanto para los bebés con la enfermedad como para los sanos. Cuál es la probabilidad de que el feto tenga la enfermedad teniendo en cuenta que el resultado del test ha sido positivo?

Ejercicio 23)

Un concursante debe elegir entre tres puertas, detrás de una de las cuales se encuentra un magnífico regalo. Hecha la elección, el presentador que sabe donde se encuentra el premio le abre una de las dos puertas no escogidas donde (lógicamente) no está el premio y a continuación le da al concursante la posibilidad de cambiar la puerta elegida. ¿Qué debe hacer el concursante?

Ejercicio 24)

El 42% de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que un 24% de las mujeres y un 16% de los hombres están en el paro. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en esta país esté en el paro?

Ejercicio 25)

En una fábrica se embalan (en cajas) galletas en 4 cadenas de montaje; A1, A2, A3 y A4. El 35% de la producción total se embala en la cadena A1 y el 20%, 24% y 21% en A2, A3 y A4 respectivamente. Los datos indican que no se embalan correctamente un porcentaje pequeño de las cajas; el 1% de A1, el 3% de A2, el 2.5% de A3 y el 2% de A4. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar de la producción total sea defectuosa?

FÓRMULAS:

Sea el espacio muestral Ω formado por dos sucesos $\Omega = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$:

- A^C: es el complemento de A, es decir, el conjunto $\Omega - A$
- La probabilidad del complemento de A es uno menos la probabilidad de A:
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$
- En otros términos la probabilidad de A puede escribirse como:
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$
- La fórmula para la probabilidad de la unión:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- A y B son incompatibles (o disjuntos) si: $P(A \cap B) = 0$
- La probabilidad del conjunto vacío es cero: $P(\emptyset) = 0$
- La fórmula de la probabilidad condicional:
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
Significa: Probabilidad de que ocurra A, si ocurre B. O también probabilidad de que ocurra A, sabiendo que ha sucedido B.
- A y B son independientes si la probabilidad de la intersección es igual al producto de las probabilidades de cada uno: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Otra forma de demostrar independencia, si se cumple: $P(A|B) = P(A)$ o $P(B|A) = P(B)$
- Si A y B son independientes, sus complementos también lo son.
- Leyes de Morgan:
$$(i):\ P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$$
$$(ii):\ P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B)$$

Significan:

(i) “La probabilidad de la unión de los complementos es la probabilidad del complemento de la intersección.”

(ii) “La probabilidad de la intersección de los complementos es la probabilidad del complemento de la unión.”

- Probabilidad de que ocurra “al menos un” suceso de los dos = Probabilidad de que ocurra “A o B” = $P(A \cup B)$
- Probabilidad de que ocurra “simultáneamente” o “ambos” sucesos A y B = Probabilidad de que ocurra “A y B” = $P(A \cap B)$
- Probabilidad de que ocurra A y no B = Probabilidad de que ocurra sólo A = $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
- Probabilidad de que ocurra “sólo uno de los dos” = $P(A \cap B^C) + P(A^C \cap B)$
- Ley de la multiplicación (sale de reescribir la fórmula de la condicionada):

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Ley de la probabilidad total:

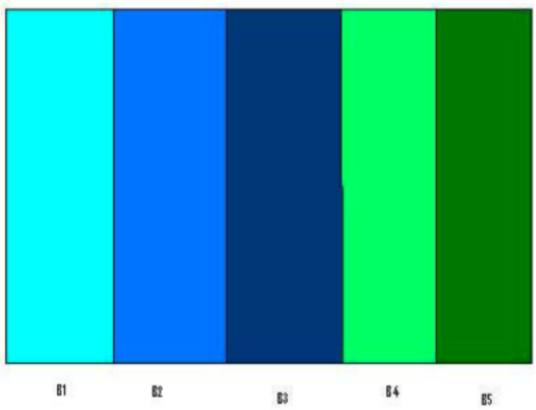
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$Y\ por\ la\ ley\ de\ multiplicación:$$

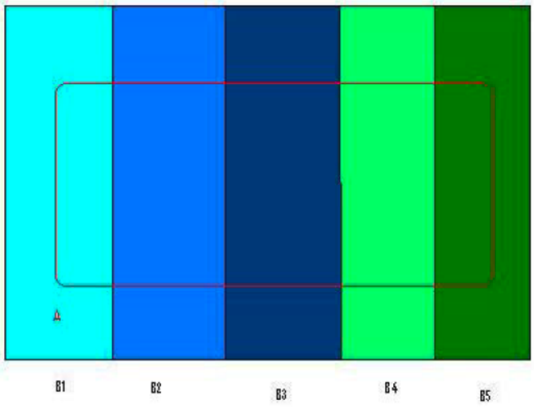
$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^C)P(B^C)$$

- Particiones:

Se dice que una serie de sucesos, $B_1, \ldots, B_k$ forman una partición del espacio muestral si todos los sucesos son incompatibles, y luego $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $1 \leq i \neq j \leq k$ y si además $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \Omega$. Una partición es una división del espacio muestral en distintos bloques:



- Generalización de la ley de la probabilidad total: Supongamos que los sucesos $B_1, \ldots, B_k$ forman una partición del espacio muestral. Entonces, para un suceso A, tenemos:



Como $A = \bigcup_{i=1}^{k} A \cap B_i$, se cumple que:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)$$

- Teorema de Bayes:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$$

Donde H es nuestra hipótesis y E nuestra evidencia.

Usando la probabilidad total en el denominador, queda:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^C)P(H^C)}$$