Examen

Ejercicio 3

3. En un campo de concentración alemán durante la Segunda Guerra Mundial, el coronel jefe del comité de fugas aliado, tiene que decidir qué plan autoriza a llevar a cabo de entre dos que le han propuesto. Necesita calcular cuál tiene más probabilidad de éxito. Para ello han estado observando el movimiento de los vigilantes del patio del campo durante las últimas 48 horas. La frecuencia con la que pasan por el punto por donde es más fácil escapar es la siguiente:

Número de vigilantes	Número de horas
0	7
1	9
2	6
3	10
4	8
5	5
6	3

Los planes propuestos son:
Plan A: Para tener éxito han de pasar durante 1 hora menos de tres vigilantes.
Plan B: Para tener éxito, durante un mínimo de 30 minutos no puede pasar ningún vigilante.

a) Calcule la probabilidad de éxito de cada uno de los planes y diga cuál es el elegido, suponiendo que los vigilantes aparecen manteniendo una media estable y de forma independiente.
b) Ante la sospecha de un plan de fuga los oficiales alemanes deciden incrementar la vigilancia con un nuevo grupo de soldados. Estos actúan de forma independiente a los que ya había en el campo y su aparición sigue un proceso de Poisson de media 2 vigilantes a la hora. ¿Cómo queda la probabilidad de fuga del mejor plan tras la incorporación de este nuevo grupo de vigilantes?

a) Plan A. : Poisson

→ # needed de vigilants x hora.

X = " # de vigilants x hora" $\sim$ Poisson (λ = 2.625)

$$\lambda = \frac{0\times7 + 1\times9 + 2\times6 + 3\times10 + 4\times8 + 5\times5 + 6\times3}{48} = 2.625.$$

$$\boxed{P(\text{Plan A})} = P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 0.0724 + 0.1902 + 0.2496.$$

$$= \boxed{0.5122}$$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-2.625} \cdot (2.625)^{0}}{0!} = 0.0724.$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-2.625} \cdot (2.625)^{1}}{1!} = 0.1902$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-2.625} \cdot (2.625)^{2}}{2!} = 0.2496.$$

$$T \sim Exp\left(1/\lambda = 1/2.625\right)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \; x \geq 0.$$

↳ "Tiempo entre el paso de 2 vigilantes".

0.5 horas = 30 min.

$$P(T > 0.5)$$

$$\boxed{P(\text{Plan B})} = P(T > 0.5) = 1 - \underbrace{P(T \leq 0.5)}$$

$$= 1 - F_X(0.5)$$

$$= 1 - \left[1 - e^{-2.625 \times 0.5}\right]$$

$$= e^{-2.625 \times 0.5} = \boxed{0.2691}$$

El Plan A tiene mayor Probabilidad.

$$P(A) = 0.5122 > P(B) = 0.2691.$$

b) X_1 : vigilantes originales. $\sim$ Poisson. $(\lambda_1 = 2.625)$

X_2 : vigilantes nuevos. $\sim$ Poisson $(\lambda_2 = 2)$

$$S = X_1 + X_2 \sim \text{Poisson} \left(\lambda_1 + \lambda_2 = 4.625\right).$$

$$P(\text{Pass A}) = P(S < 3) = P(S=0) + P(S=1) + P(S=2) = 0.1599.$$

$$P(S=0) = \frac{e^{-4.625} \cdot (4.625)^0}{0!} = 0.0098$$

$$P(S=1) = \frac{e^{-4.625} \cdot (4.625)^1}{1!} = 0.0453$$

$$P(S=2) = \frac{e^{-4.625} \cdot (4.625)^2}{2!} = 0.1048.$$