Variable Aleatoria

Ejercicio 7

Variable Aleatoria

Un gran almacén guarda cajas que contienen piezas de distinto tipo. La proporción X de piezas de tipo A en una caja se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = kx(1-x) \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

a) Calcular el valor de k.
b) Calcular la media y varianza de X.
c) Si se toman 10 cajas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas contenga una proporción de piezas de tipo A igual o superior al 75%?

Equivale a decir que todas tienen una proporción ..... inferior al 75%.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_0^1 k \cdot x \cdot (1-x) \cdot dx = k \int_0^1 (x - x^2)\,dx = k\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1$$

$$1 = k\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right)\right) = k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{k}{6} \Rightarrow k = 6$$

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x(6x)(1-x)\,dx.$

$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^1$

$= 6\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \cancel{6} \cdot \frac{1}{\cancel{12}_2} = \frac{1}{2}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$Var(X) = 3/10 \,.\; - (1/2)^2 = \frac{1}{20}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\, dx$$

$$= 6 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4)\, dx = 6 \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big]_0^1 = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{20}_{\,10}} = 3/10$$

c) A_i = "La caja i tiene una proporción de piezas de tipo 1 menor que 75% (0.75)".

$i = \overline{1,10}$

$$P(A_i) = P(X < 0.75) = \int_0^{0.75} 6x(1-x)\,dx.$$

$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{0.75} = 6\left(\frac{0.75^2}{2} - \frac{0.75^3}{3}\right)$$

$$= \frac{27}{32} = 0.8438$$

por independencia de los A_i.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_{10}) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_{10})$$

$$= (0.8438)^{10} = 0.1829$$