Variable Aleatoria

Ejercicio 1)

Imaginemos que tenemos dos monedas y las lanzamos al aire a la vez. Si llamamos "C" al resultado de obtener una cara en una moneda, y "K" al resultado de obtener cruz:

a) ¿Cómo definirías el espacio de todos los posibles resultados que podemos obtener?
b) Si definimos una variable aleatoria X = "Número de caras al lanzar dos monedas al aire", ¿qué valores numéricos tomaría esa variable?
c) ¿Qué probabilidad le asignarías a cada uno de los valores de la variable X. Representa esas probabilidades con un diagrama de barras.

Ejercicio 2)

Sean los siguientes ejemplos de variables aleatorias, clasifica cada una en Discreta o Continua:

a) Número de piezas defectuosas que aparecen en un proceso de fabricación.
b) Número de llamadas telefónicas que se reciben en una centralita durante un período de tiempo.
c) Número de depósitos efectuados al día en una entidad bancaria.
d) Tiempo en minutos que dedica un alumno a hacer un examen con duración máxima de dos horas.
e) Cantidad de agua caída al día en un determinado punto geográfico.

Ejercicio 3)

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1x & , 0 < x < \sqrt{20} \\ 0 & , en\ el\ resto \end{cases}$$

Se pide:

a) Comprobar que es una función de densidad.
b) Obtener la probabilidad de que X tome valores entre 1 y 3.
c) Obtener la función de distribución $F(x)$.

Ejercicio 4)

La siguiente tabla recoge la función de distribución de la v.a. X cuya función de probabilidad es:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}1x & x=1,2,3,4\\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

x_i	$F(x_i)$
$[-\infty,1)$	0
$[1,2)$	0,1
$[2,3)$	0,3
$[3,4)$	0,6
$[4,+\infty)$	1,0

Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(X=3)$
b) $P(X=2.5)$
c) $P(X\leq 2.5)$
d) $P(X<3)$
e) $P(X\geq 2)$
f) $P(2<X\leq 4)$
g) $P(2<X<4)$

Ejercicio 5)

Dada la v.a. discreta X cuya función de probabilidad viene definida por:

$$P(X=x)=kx \qquad ,x=1,2,3,4,5$$

a) Calcular el valor de la constante k.
b) Calcular $P(X>2)$.
c) Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.
d) Calcular $E(Y)$ si $Y=2X+5$.

Ejercicio 6)

Dada la v.a. continua X cuya función de densidad viene definida por:

$$f(x)=\begin{cases}k(1-x^2) & ,0<x<1\\ 0 & ,en\ el\ resto\end{cases}$$

a) Obtener el valor de k.
b) Calcular $P(X<0.3)$.
c) Obtener la media y varianza de X.
d) Obtener la media y varianza de $Y=3X-1$.
e) Obtener la media y varianza de $H=3X^2$.

Ejercicio 7)

Un gran almacén guarda cajas que contienen piezas de distinto tipo. La proporción X de piezas de tipo A en una caja se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = kx(1-x) \quad \text{con } \; 0 \leq x \leq 1$$

a) Calcular el valor de k.
b) Calcular la media y varianza de X.
c) Si se toman 10 cajas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas contenga una proporción de piezas de tipo A igual o superior al 75%?

Ejercicio 8)

Demostrar la desigualdad de Markov (también conocida como desigualdad de Chebyshev):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$$

Donde X es una v.a. positiva, es decir, $P(X > 0) = 1$.

Ejercicio 9)

La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x(2-x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula la función de densidad de la variable producción.
b) Calcula la media y varianza de la producción.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea inferior a 500 unidades? ¿Y la de que sea superior a 250 unidades).
d) Si el beneficio (en miles de euros) de la máquina viene dado, en función de la producción, por $B = 9X - 2$, calcule el valor esperado del beneficio.

Ejercicio 10)

La v.a. continua X representa las marcas (distancias medidas en decámetros) obtenidas por un lanzador, y tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{x^2}{9} & ,0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ,en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de k.
b) Encontrar la probabilidad de que la distancia conseguida por el lanzador sea mayor a 2 decámetros.
c) Encontrar la probabilidad de que la marca sea superior a 2.5 decámetros si se sabe que es superior a 2 decámetros.
d) Encontrar la distancia media esperada.

Tareas

1*

Una v.a. X puede tomar los valores 30, 40, 50 y 60 con probabilidades 0.4, 0.2, 0.1 y 0.3, respectivamente.

a) Represente en una tabla la función de probabilidad $P(X = x)$ y la función de distribución $F(X) = P(X \leq x)$.
b) Determine las siguientes probabilidades:

$$P(X \leq 25)$$
$$P(X \geq 60)$$
$$P(X < 40)$$
$$P(X > 40)$$
$$P(30 \leq X \leq 60)$$
$$P(30 \leq X < 60)$$
$$P(30 < X \leq 60)$$
$$P(30 < X < 60)$$

c) Calcule la esperanza y la varianza de X.

2*

Complete la ley de probabilidad siguiente, sabiendo que su esperanza matemática es igual a 1.8:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.2	a	b	0.3

3*

Hallar la función de distribución de la v.a. continua X que tiene por función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ 0 & ,en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Calcular las siguientes probabilidades:

$$P(x < 0.5)$$
$$P(x < 0.2)$$
$$P(0.2 < x < 0.5)$$
$$P(x \geq 0.5)$$
$$P(x \geq 0.2)$$
$$P(0.1 \leq x \leq 0.8)$$

RESUMEN TEÓRICO Y FÓRMULAS:

Una variable aleatoria X es una función real, que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio.

Variables Aleatorias Discretas:
Si X es una v.a. discreta con recorrido $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, su distribución de probabilidad puede escribirse como:
$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$

La función de probabilidad (o función de cuantía o de masa de probabilidad) proporciona la cantidad de probabilidad que corresponde a cada valor de la v.a. discreta X. Las dos propiedades que debe cumplir una función real de variable real para ser función de probabilidad son:

(1) $f(x_i) \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$
(2) $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$

La primera condición establece simplemente que las probabilidades no pueden ser negativas. La segunda condición nos dice que la suma de toda la masa de probabilidad debe ser igual a la unidad.

Una función de probabilidad puede expresarse de tres maneras distintas: una tabla en la que se recoja valor vs probabilidad, una expresión matemática de la función $f(x)$, o una gráfica llamada Diagrama de Barras.

Variables Aleatorias Continuas:
En el caso de una v.a. continua, la distribución de probabilidad no puede darse para valores puntuales ya que ésta toma un número infinito no numerable de valores para un subconjunto de la recta real.

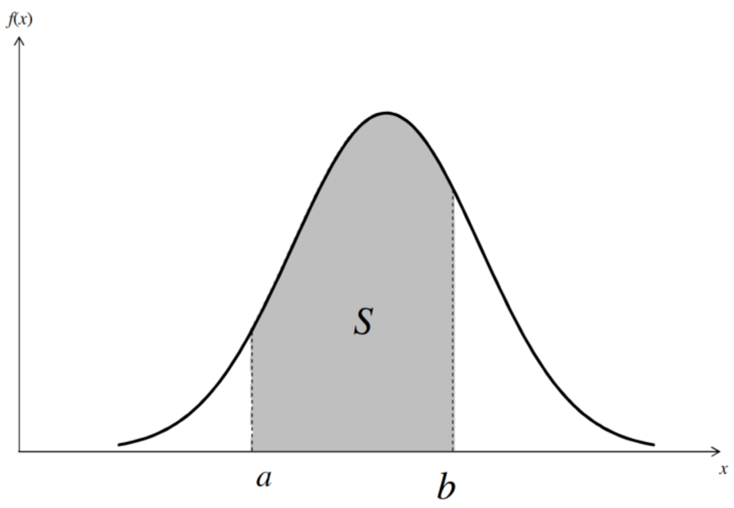
Los valores hay que agruparlos en intervalos *exhaustivos y mutuamente excluyentes*. A cada intervalo se le asignará una probabilidad y su representación gráfica será un **Histograma**. El área de cada rectángulo que tiene por base un intervalo concreto será la probabilidad de que la variable tome valores en ese intervalo. Si hacemos una línea continua sobre el perfil de ese histograma, a esa línea (bajo la cual se encierra toda la masa de probabilidad), se le llama **función de densidad** de una v.a. continua. La función de densidad no proporciona directamente probabilidades, sino densidades de probabilidad, y el área bajo esa función es igual a la unidad. Propiedades:

(1) $f(x) \geq 0 \quad ,-\infty < x < +\infty$ *(implica que la densidad de probabilidad es positiva)*

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ *(implica que el área bajo la curva y por encima del eje de abscisas es igual a la unidad)*

Obtención a partir de la $f(x)$ de la probabilidad de que X tome valores dentro de un determinado intervalo $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = S$$



<u>IMPORTANTE:</u> La probabilidad de que una v.a. continua tome un valor concreto es siempre cero:

$$P(X = x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x)dx = 0$$

Por tanto, para este tipo de variables, se cumplen las siguientes igualdades:

$$P(X < a) = P(X \leq a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Función de Distribución:

Para una v.a. X (discreta o continua) la función de distribución, $F(X)$ es la función que da la probabilidad acumulada hasta el punto x:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

<u>Propiedades:</u>

a) $F(-\infty) = 0$
b) $F(+\infty) = 1$
c) Es una función monótona no decreciente.
d) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

- **Si X es una v.a. discreta:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- **Si X es una v.a. continua:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

[En el integrando se utiliza t en lugar de x para que no haya confusión con el límite superior de integración.]

Cuando lo que se quiere es calcular la probabilidad de que una variable tome valores dentro de un intervalo, entonces haremos uso de integrales definidas ya que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La función de densidad de una v.a. continua se puede hallar derivando la función de distribución:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Propiedades y características de Variables Aleatorias:

1. Cualquier función de una v.a. es otra v.a. que "hereda" las propiedades probabilísticas de la variable original.
2. Esperanza Matemática o Valor Esperado:
   - Discreta:
   $$E(X) = \sum_{x} xf(x) = \mu$$
   - Continua:
   $$E(X) = \int_{x} xf(x)dx = \mu$$
   - Propiedades del Valor Esperado:
     - Si a es una constante: $E(a) = a$
     - $E(a + X) = a + E(X)$
     - $E(bX) = bE(X)$
     - $E(a + bX) = a + bE(X)$
     - Si $a \leq X \leq b$, entonces $a \leq E(X) \leq b$
     - Si X e Y son dos v.a.: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

3. Varianza, desviación típica y coeficiente de variación:

- Fórmula en base al valor esperado:
  $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, donde $\mu = E(X)$.

- Propiedades de la varianza:
  - Si a es una constante: $Var(a) = 0$
  - $Var(a + X) = Var(X)$
  - $Var(bX) = b^2 Var(X)$
  - $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$
  - $Var(-X) = Var(X)$

- Desviación típica:
  - $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$

- Coeficiente de variación:
  - $CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$

4. Tipificación de una variable aleatoria:
   Sea X una v.a. cualquiera con esperanza igual a μ_X y varianza igual a σ_X^2, diremos que Z es la variable tipificada de X si es igual a:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

   Propiedades de Z:
   a) $E(Z) = 0$
   b) $Var(X) = 1$