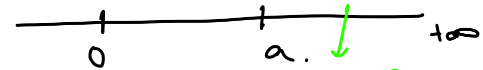
Variable Aleatoria

Ejercicio 8

Variable Aleatoria



$x\in[a,+\infty]$
$\Downarrow$
$*$ $x\ge a.$

Demostrar la desigualdad de Markov (también conocida como desigualdad de Chebyshev):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$$

Donde X es una v.a. positiva, es decir, $P(X > 0) = 1$.

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot dx. = \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx. = \int_{0}^{a} x\, f(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} x\, f(x)\, dx.$$

$$E(x) \geq \int_{a}^{+\infty} x\, f(x)\, dx. \overset{*}{\geq} \int_{a}^{+\infty} a\cdot f(x)\, dx. = a\cdot \underbrace{\int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx.}_{=\,P(X\geq a)}$$

$$E(x) \geq a\cdot P(X\geq a) \longrightarrow \boxed{P(X\geq a) \leq \frac{E(x)}{a.}}$$

Si llamamos $\mu = E(X)$, $a = k \cdot \mu$.

$$P(X \geq k\mu) \leq \frac{1}{k\cancel{\mu}} \cdot \cancel{\mu} = \frac{1}{k}.$$

$$P(X \geq k\mu) \leq \frac{1}{k}.$$

Si X es v.a. con media μ y varianza σ^2

$Y = (X-\mu)^2$, $a = k^2$.

$$P((X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\boxed{P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.}$$

Desigualdad de Chebyshev.