Examen 1

1. En un servicio de atención al cliente se han tomado los tiempos medios de atención, X, de 45 empleados, resultando un tiempo medio de $5.5\ minutos$, con una varianza de $4.24\ minutos^2$.
   a. Calcule el coeficiente de variación e interprételo.
   b. Se quiere estudiar la relación de esta variable con los meses que estos empleados llevan trabajando en la empresa (Y), de la cual se sabe que tiene una media de $4.27\ meses$, con una varianza de $4.93\ meses^2$. Si $s_{XY} = 3.66$, calcule el coeficiente de correlación lineal entre X e Y. ¿Qué podría decirse de esta relación lineal?
   c. Escriba la recta de regresión de Y sobre X.

SOLUCIONES:

a) Sabemos que:
$\bar{x} = 5.5$
$s_X^2 = 4.24$
$s_X = \sqrt{s_X^2} = \sqrt{4.24} = 2.06$

La fórmula del Coeficiente de Variación es:

$$CV = \frac{s_X}{|\bar{x}|} = \frac{2.06}{5.5} = 0.37$$

En porcentaje sería un 37% que es un valor bajo, por lo tanto, la media se puede considerar representativa.

b) Nos dan la siguiente información adicional:
$\bar{y} = 4.27$
$s_Y^2 = 4.93$
$s_Y = \sqrt{s_Y^2} = \sqrt{4.93} = 2.22$

El coeficiente de correlación lineal de Pearson tiene la siguiente fórmula:

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{3.66}{2.06 * 2.22} = 0.8$$

Es un valor alto (teniendo en cuenta que siempre va a estar entre -1 y 1), así que parece que existe una relación lineal positiva (o directa) y bastante fuerte entre las dos variables.

c) La ecuación de la recta de regresión es:

$$\hat{y} = a + bx$$

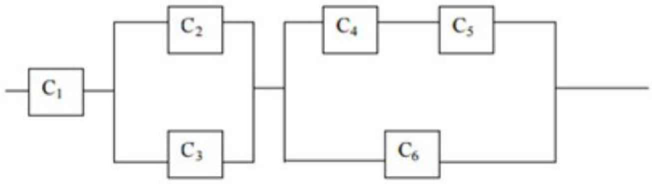
Donde los coeficientes se calculan como:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{3.66}{4.24} = 0.86$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 4.27 - 0.86 * 5.5 = -0.46$$

Entonces la ecuación queda:
$$\hat{y} = -0.46 + 0.86x$$

2. La disposición de los componentes electrónicos de un determinado sistema viene dada la siguiente figura:



Los componentes funcionan de manera independiente y las probabilidades de que funcionen cada uno de ellos, tiene los siguientes valores:

$$P(C_1) = P(C_4) = P(C_5) = 0.9$$
$$P(C_2) = P(C_3) = P(C_6) = 0.85$$

a. Calcular la probabilidad de que el circuito funcione.
b. Calcular la probabilidad de que el circuito funcione sabiendo que la componente C_5 ha funcionado.
c. Calcular la probabilidad de que la componente C_5 funcione si sabemos que el circuito ha funcionado.

SOLUCIONES:

a) Sea C_i el suceso: la componente i-ésima funciona.
Denotemos como S que el sistema funciona.
El sistema funciona si funciona C_1 y funciona también los dos sistemas más pequeños que están conectados a C_1 en serie, el formado por 2-3 y el formado por 4-5-6. Dentro de sí mismos, estos dos sistemas pequeños, están formados por un circuito en paralelo, y en el último caso también encontramos una parte conectada en serie (componentes 4 y 5). Entonces podemos expresar el funcionamiento del sistema completo de la siguiente forma, teniendo en cuenta que un sistema "en serie" funciona si funcionan todos sus elementos, y un sistema "en paralelo" funciona si al menos uno de los elementos funciona. Además cada vez que hablemos de "y" vamos a usar intersección, y cuando hablemos de "al menos 1" vamos a usar la unión.

Entonces, el sistema completo funciona si:
$$S = C_1 \cap (C_2 \cup C_3) \cap [(C_4 \cap C_5) \cup C_6]$$

La probabilidad de que el sistema funcione es:
$$P(S) = P(C_1 \cap (C_2 \cup C_3) \cap [(C_4 \cap C_5) \cup C_6])$$

Cada vez que tengamos intersecciones, se pueden transformar en productos porque tenemos independencia:

$$P(S) = P(C_1) \cdot P(C_2 \cup C_3) \cdot P\big((C_4 \cap C_5) \cup C_6\big)$$

Vamos a hallar las dos últimas probabilidades por separado y luego las añadimos a la fórmula para hallar $P(S)$.

$P(C_2 \cup C_3) = P(C_2) + P(C_3) - P(C_2 \cap C_3) = 0.85 * 2 - 0.85^2 = 0.9775$

$P\big((C_4 \cap C_5) \cup C_6\big) = P(C_4 \cap C_5) + P(C_6) - P(C_4 \cap C_5 \cap C_6) = 0.9^2 + 0.85 - 0.9^2 * 0.85 = 0.9715$

Entonces la probabilidad de funcionamiento del sistema completo es:

$$P(S) = 0.9 * 0.9775 * 0.9715 = 0.8547$$

3. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F_X(x)$:
   a. Escribe cómo se calcula $P(X > 1)$ en función de $F_X(x)$.
   b. Escribe la probabilidad del apartado anterior en función de la función de densidad $f_X(x)$.

SOLUCIONES:

a) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F_X(1)$
b) $P(X > 1) = \int_1^{\infty} f_X(x)dx$

4. El manager de un parque eólico situado en Ciudad Real quiere realizar un análisis de confiabilidad. Durante un determinado período, la tasa media de fallos de un generador eólico es de 1 fallo por cada 6 meses de operación. Asumiremos que los fallos ocurren según un proceso de Poisson.
   a. Para un generador eólico, ¿cuál es la probabilidad de que no se observen fallos durante el primer año de operación?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo transcurrido entre dos fallos consecutivos sea menor de dos años?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya fallos durante los tres primeros años de operación si sabemos que no ha habido fallos durante los dos primeros años de operación?
   d. Considera un grupo de 4 turbinas eólicas independientes, con las mismas características técnicas que las presentadas arriba. ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo una de estas turbinas no falle durante el primer año de operación?

SOLUCIONES:

a) Sea X el número de fallos por año, entonces $X \sim Poisson(\lambda)$, donde $\lambda = 2$ fallos por año. Entonces:

$$P(X=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 0.135$$

b) Sea T el tiempo (en años) transcurrido entre dos fallos consecutivos, $T \sim Exp(\lambda = 2)$. Entonces:

$$P(T < 2) = F(2) = 1 - e^{-2\times 2} = 0.9817$$

c) Nos piden una probabilidad condicional, porque nos dicen que ya se sabe que no ha habido fallos durante los dos primeros años de operación:

$$P(T > 3|T > 2) = \frac{P\big((T > 3) \cap (T > 2)\big)}{P(T > 2)} = \frac{P(T > 3)}{P(T > 2)}$$

Entonces tenemos que hallar:

$$P(T > 3) = 1 - P(T < 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-2\times 3}) = 0.002478$$

Y ahora usando el inciso anterior:

$$P(T > 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - 0.9817 = 0.0183$$

Y luego sustituir en:

$$P(T > 3|T > 2) = \frac{P(T > 3)}{P(T > 2)} = \frac{0.002478}{0.0183} = 0.135$$

Otra forma que podríamos haber usado para resolverlo, es aplicando la propiedad de "pérdida de memoria" de la distribución exponencial, en la que si me dicen que los dos primeros años no ha habido fallos, y me hablan luego de los 3 primeros años, eso sería equivalente a calcular la probabilidad de que no halla fallos en el primer año de funcionamiento:

$$P(T > 3|T > 2) = P(T > 1) = 1 - P(T < 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-2*1}) = 0.135$$

d) Sea Y el número de turbinas que no fallan durante el primer año de operación:

$$Y \sim Binomial(n = 4, p = 0.135)$$

Entonces:

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$$

Calculemos las dos probabilidades de arriba:

$P(Y=0)=\binom{4}{0}0.135^0(1-0.135)^{4-0}=\frac{4!}{0!(4-0)!}1*0.865^4=0.5598$

Arriba hemos usado que $0!=1$

$P(Y=1)=\binom{4}{1}0.135^1(1-0.135)^{4-1}=\frac{4!}{1!(4-1)!}0.135*0.865^3=4*0.135*0.6472=0.3495$

Entonces la probabilidad final que nos interesa sería:

$$P(Y\leq 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=0.5598+0.3495=0.9093$$