Variable Aleatoria

Ejercicio 9.

Variable Aleatoria

La función de distribución asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x(2-x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Calcula la función de densidad de la variable producción.
b) Calcula la media y varianza de la producción.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea inferior a 500 unidades? ¿Y la de que sea superior a 250 unidades). 0.5 0.25
d) Si el beneficio (en miles de euros) de la máquina viene dado, en función de la producción, por $B = 9X - 2$, calcule el valor esperado del beneficio.

a) La función de densidad $f(x)$ es la derivada de la Func. Distrib. $F(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d\,(x\overset{2x-x^2}{(2-x)})}{dx} = 2-2x.$$

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x\,(2-2x)\, dx = \left(\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - \frac{2x^3}{3} \right)_0^1$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 1/6 - (1/3)^2 = \boxed{1/18}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 (2-2x)\, dx.$$

$$= \left(\frac{2x^3}{3} - \cancel{2} \frac{x^4}{\cancel{4}_2} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

c) $P(X < 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} f(x)\,dx = \int_{0}^{0.5} (2-2x)\,dx.$

$$= \left(2x - x^2\right)_0^{0.5} = \boxed{0.75}$$

otra vía $= \int_{0.25}^{1} (2-2x)\,dx.$ ✓

$$P(X > 0.25) = 1 - P(X \leq 0.25) = 1 - \int_0^{0.25} (2-2x)\,dx.$$

$$= 1 - \left(2x - x^2\right)_0^{0.25} = \boxed{0.5625}$$

d) $B = 9X - 2$.

$E(B) = E(9X - 2) = 9 \cdot E(X) - 2 = \cancel{9}^{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} - 2 = 1$.

$E(B) = 1$.

$\downarrow$

Beneficio esperado de 1000 €.