Variable Aleatoria

Ejercicio 10.

Variable Aleatoria

La v.a. continua X representa las marcas (distancias medidas en decámetros) obtenidas por un lanzador, y tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{x^2}{9} & ,0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ,en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de k.
b) Encontrar la probabilidad de que la distancia conseguida por el lanzador sea mayor a 2 decámetros.
c) Encontrar la probabilidad de que la marca sea superior a 2.5 decámetros si se sabe que es superior a 2 decámetros.
d) Encontrar la distancia media esperada.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

$$1 = \int_0^3 k \cdot \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{k}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = \frac{k}{9}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$1 = \frac{k}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} = k \Rightarrow k = 1$$

b) $P(X>2)$

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \int_2^3 x^2/9\,dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\Big]_2^3 = \frac{1}{9}\left(9 - \frac{8}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

$$1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx.$$

$$= 1 - \int_0^2 x^2/9\,dx.$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^2 = 1 - \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{3} = \frac{19}{27}$$

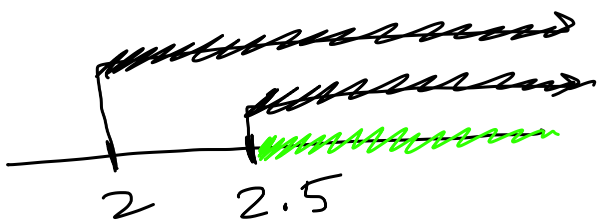
c) $P(X>2.5 \mid X>2) = \dfrac{P((X>2.5)\cap(X>2))}{P(X>2)}.$

$$= \frac{P(X>2.5)}{P(X>2)} = \frac{0.42}{19/27} = 0.6$$

$$P(X>2.5) = 1 - P(X<2.5) = 1 - \int_0^{2.5} x^2/9 \, dx = 1 - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\Big]_0^{2.5}$$

$$= 1 - \frac{(2.5)^3}{9\cdot 3} = 1 - 0.58$$

$$= 0.42$$



d) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9} \cdot dx = \frac{1}{9} \left. \frac{x^4}{4} \right]_0^3.$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$$