Rachunek Prawdopodobieństwa I*

Rozwiązanie zadania domowego nr.1

Konrad Kaczmarczyk

20 marca 2025

Zadanie. Niech A_k będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez k. Wykazać że na $\mathbb{N}$ nie istnieje takie $\mathbf{P}$, że $\mathbf{P}(A_k) = \frac{1}{k}$ dla $k \geq 1$.

Przez sprzeczność oznaczmy że tak nie jest, w takim razie oznaczmy, że p_n to n-ta liczba pierwsza, i mamy :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{p_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \infty$$

jest to fakt z ćwiczeń Analizy I.1, a moim ulubionym dowodem jest ten pana James'a A. Clarkson'a z 1965 :

https://fermatslibrary.com/s/on-the-series-of-prime-reciprocals

skoro tak jest to pierwsze z założeń drugiego lematu Borel-Cantelli jest spełnione, a drugie o niezależności A_{p_n} w naturalny sposób też jest.

Wynika więc z lematu że:

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_{p_n}\right) = 1$$

lecz łatwo zauważyć że żadna liczba x nie może należeć do $\limsup_{n\to\infty} A_{p_n}$ bo istnieje takie N że $\forall_{n\geq N}\ x < p_N < p_n \Rightarrow x \notin A_{p_n}$, więc mamy sprzeczność w postaci:

$$0 = \mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$$

Zadanie. Uzasadnij, że gdy $k \to \infty$ oraz $n - k \to \infty$, to

$$p_{k,n}(\pi k^{\frac{1}{2}}(n-k)^{\frac{1}{2}}) \to 1.$$

Przypomnijmy, że $p_{k,n} = u_k u_{n-k}$ oraz $u_n = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$. Wywnioskuj stąd, że dla $\alpha \in (1/2, 1)$

$$\sum_{n/2<k<\alpha n} p_{k,n} \sim \frac{1}{\pi n} \sum_{n/2<k<\alpha n} \left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nadto

$$\frac{1}{\pi n} \sum_{n/2<k<\alpha n} \left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{-\frac{1}{2}} \sim \pi^{-1} \int_{1/2}^{\alpha} \frac{dx}{(x(1-x))^{\frac{1}{2}}} = 2\pi^{-1} \arcsin \alpha^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Zauważmy że z wzoru Stirlinga wynika że:

$$u_n = 2^{-2n} \binom{2n}{n} = 2^{-2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim 2^{-2n} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2n}}{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

przy $n \to \infty$, więc otrzymujemy oszacowanie na $p_{k,n}$:

$$p_{k,n} = u_k u_{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi (n-k)}} = \pi^{-1} \, (n(n-k))^{-\frac{1}{2}}$$

Z treści zadania mamy znaleźć asymptotykę pewnej sumy, zatem korzystając z wcześniejszego rachunku:

$$\sum_{n/2<k<\alpha n} p_{k,n} = \sum_{n/2<k<\alpha n} u_k u_{n-k} \sim \sum_{n/2<k<\alpha n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} =$$
$$\frac{1}{\pi n} \sum_{n/2<k<\alpha n} \left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Warto zauważyć że ostatnie jest sumą Riemana całki z $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, czyli:

$$\frac{1}{\pi n} \sum_{n/2<k<\alpha n} \left(\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})\right)^{-\frac{1}{2}} \sim \pi^{-1} \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

całkę tę można rozwiązać poprzez podstawienie $x = \sin^2 u$:

$$= \pi^{-1} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\sqrt{\alpha}} 2du = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin\sqrt{\alpha} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}$$

co mieliśmy udowodnić.