Analiza I.2*

Rozwiązanie zadań z serii I

Konrad Kaczmarczyk

13 March 2024

Zadanie 0.1. Znajdź jakąkolwiek prostą, która w jednym punkcie jest prostopadła, a w drugim styczna do wykresu funkcji $y = 2x^3 - 2x^2 - x + 3$. Ile jest takich prostych?

Wiemy że jest to wykres funkcji $y = x^3$ zatem spróbujmy przesunąć punkt symetrii naszej krzywej do $(0, 0)$, zatem wyznaczmy wektor przesunięcia z pomocą wektora.

$$0 = y' = 6x^2 - 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{12} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{10}}{6}$$

Więc przesuwamy o wektor $(-\frac{1}{3}, -\frac{68}{27})$, i nasza krzywa redukuje się do postaci $y = 2x^3 - \frac{5}{3}x$ Następnie możemy zauważyć że funkcja jest wypukła na przedziale $(0, \infty)$, i wklęsła na przedziale $(-\infty, 0)$, gdyż:

$$f''(x) = 12x = \begin{cases} > 0 & x > 0 \\ < 0 & x < 0 \end{cases}$$

zatem jeżeli funkcja jest styczna na jednym z tych przedziałów, i przecina prostopadle wykres, to następuje to na drugim z przedziałów. Rozpatrzmy więc przypadki gdy prosta jest styczna na przedziale $(-\infty, 0)$, i oznaczmy przez x_0, punkt stycznosci, i przez x_1 punkt prostopadłego przecięcia, zatem mamy warunki:

$$f'(x_1) \cdot f'(x_0) = -1$$
$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_1)} (x - x_1) + f(x_1)$$

Gdzie drugie wyrażenie po skróceniu daje nam:

$$\left(6x_0^2 - \frac{5}{3}\right) \cdot (x_1 - x_0) = 2(x_1 - x_0) \cdot \left(x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2\right) - \frac{5}{3}(x_1 - x_0)$$
$$4x_0^2 = 2x_1 x_0 + 2x_1^2$$
$$a^2 + a - 2 = 0 \qquad a = \frac{x_1}{x_0}$$
$$a = 1 \vee a = -2$$

Przyjmując że $x_1 \neq x_0$, mamy więc że $x_1 = -2x_0$, wystarczy rozwiązać równanie:

$$\left(6x_0^2 - \frac{5}{3}\right) \cdot \left(24x_0^2 - \frac{5}{3}\right) = -1$$

$$144x_0^4 - 50x_0^2 + \frac{34}{9} = 0$$

Które ma cztery rozwiązania i niech przykładowym jest $x_0 = \frac{1}{3}$, $x_1 = -\frac{2}{3}$, więc znajdujemy rozwiązanie $y = -x - \frac{4}{27}$, i przesuwając wektor mamy przykładową prostą $y = -x + \frac{73}{27}$

Zadanie 0.2. Wyznacz granice

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$, gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną w punkcie a.

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) + f(\frac{x}{2}) + \cdots + f(\frac{x}{k})\right)$, gdzie f jest różniczkowalna, $f(0) = 0$, i $k \in \mathbb{N}$ jest ustalone.

(a) Zauważmy że:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{f(a+\frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n} = e^{a_n b_n}$$

Ostatni fakt pojawił się na ćwiczeniach w pierwszym semestrze. Wyznaczmy:

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a)}{f(a)} = \frac{1}{f(a)}\lim_{m\to 0}\frac{f(a+m) - f(a)}{m} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Więc wynikiem jest $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$

(b) Odnotujmy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{x}{n})}{x} = \frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(\frac{x}{n}) - f(0)}{\frac{x}{n}} = \frac{1}{n}\lim_{y\to 0}\frac{f(y) - f(0)}{y} = \frac{f'(0)}{n}$$

więc korzystając w własnosci arytmetycznych granic:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{k}\right)\right) = f'(0) + \frac{f'(0)}{2} + \cdot + \frac{f'(0)}{k} = f'(0)H_k$$

Zadanie 0.3. Uzasadnij, że równanie

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\ln\left(x - \sqrt{2}\right) + \left(x + \sqrt{2}\right)\ln\left(x + \sqrt{2}\right) = 2x$$

ma dokładnie 2 rozwiązania.

zauważmy że równoważne jest równanie

$$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(\ln\left(x - \sqrt{2}\right) - 1\right) + \left(x + \sqrt{2}\right)\left(\ln\left(x + \sqrt{2}\right) - 1\right) = 0$$

Następnie możemy wziąść pochodną wyrażenia po lewej:

$$\left(\left(x - \sqrt{2}\right)\left(\ln\left(x - \sqrt{2}\right) - 1\right) + \left(x + \sqrt{2}\right)\left(\ln\left(x + \sqrt{2}\right) - 1\right)\right)' = \ln\left(x^2 - 2\right)$$

Łatwo zatem zauważyć że nasza funkcja ma dwa miejsca zerowe, bo pochodna zeruje się gdy funkcja jest ujemna i na początku przedziału jest dodatnia.

Zadanie 0.4. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a ponadto dla pewnych $a < b$ zachodzi $f'(a) = f'(b)$. Udowodnij, że istnieje $x \in (a, b)$ takie, że

$$f(x) - f(a) = f'(x)(x - a)$$

Zadanie 0.5. Funkcja ciągła $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na przedziale otwartym (a, b) i istnieje granica $A := \lim_{x\to a^+} f'(x)$. Udowodnij, że $f'_+(a) = A$.

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Korzystając z definicji A mamy, że istnieje $\delta > 0$, że dla każdego $0 < h < \delta$,

$$\left|f'(a + h) - A\right| < \varepsilon$$

Przeliczmy teraz:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Dla naszego ε, ustalamy to samo $delta$, i korzystając z twierdzenia Lagrange'a mamy że:

$$\left|\frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} - A\right| = \left|f'(\xi) - A\right| < \varepsilon \qquad \xi \in (a, a + h)$$

korzystając z poprzedniego faktu, zatem $f'_+(a) = A$.