GAL2 lato 2024

rozwiązania zadań z serii V

Konrad Kaczmarczyk

21 marca 2025

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane jest przekształcenie $\varphi_{r,s} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem

$$\varphi_{(r,s)}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$\left(\frac{r}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + 1, \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1, \frac{s}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_3 + 1\right),$$

gdzie $r, s \in \mathbb{R}$.

a) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{(r,s)}$ jest izometrią?

b) Dany jest równoległościan $R \subseteq \mathbb{R}^3$ o objętości 54. Znaleźć objętość obrazu $\varphi_{(1,-3)}(R)$ tego równoległościanu przy przekształceniu $\varphi_{(1,-3)}$.

c) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{1,s}$ zmienia orientację ale zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów? Odpowiedź uzasadnić.

(a)

$$\varphi_{(r,s)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} r & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ s & 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wystarczy sprawdzić czy $\varphi'_{(r,s)}$ jest izometrią liniową, czyli czy

$$\begin{bmatrix} r & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ s & 2 & -2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} r & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ s & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

i po przeliczeniu mamy, że zachodzi to tylko dla

$$\begin{cases} r = 2 \\ s = 1 \end{cases}$$

i widzimy że wtedy φ' jest izomorfizmem, czyli φ też jest, więc z definicji tylko $\varphi_{(2,1)}$ jest izometrią afiniczną.

(b) Korzystając z faktów udowodnionych na wykładzie wystarczy obliczyć

$$54 \cdot \left|\det\left(\varphi'_{(1,-3)}\right)\right| = 54 \cdot \frac{1}{3} = 18$$

(c) Podobnie jak porzednio wnioskujemy że $\left|\det\left(\varphi_{(1,s)}\right)\right| = 1$ oraz wiemy że przekształcenie ma zmieniać orientacje (np. bazy standardowej), czyli $\det\left(\varphi_{(1,s)}\right) < 0$, mamy więc że

$$\det\left(\varphi'_{(1,s)}\right) = -1 \Rightarrow -\frac{1}{9}(s+6) = -1 \Rightarrow s+6 = 9 \Rightarrow s = 3$$

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Rozważamy $\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Podać wzory na dwa różne $f, g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ samosprzężone oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ takie, że $A = M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = M(g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(b) Opisać wszystkie wektory $v \in \mathbb{R}^2$ takie, że $\mathcal{C} = \{(1,0), v\}$ jest bazą $\mathbb{R}^2$ i $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ dany warunkiem $M(f)_{\mathcal{C}} = A$ jest samosprzężone.

(a) Wystarczy znaleźć macierze podobne do A które dodatkowo są symetryczne (aby przekształcenia które definiują były samosprzężone) dla przykładu mogą to być

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 6 \end{bmatrix}$$

oraz bazy im odpowiadające to

$$\mathcal{A} = \left\{\left(-\frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right), \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}\right)\right\} \qquad \mathcal{B} = \left\{\left(\frac{13}{6}\sqrt{6}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}, 4\right)\right\}$$

(b) Niech $v = (a, b)$ żeby razem z $(1, 0)$ było bazą wystarczy że $b \neq 0$, a żeby endomofizm był samosprzężony wystarczy że

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} = \frac{1}{b}\begin{bmatrix} \cdots & 3+5a-2a^2 \\ 2b^2 & \cdots \end{bmatrix}$$

było symetryczne, czyli $2b^2 = 3 + 5a - 2a^2$. Jest to równanie okręgu,

$$\left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + b^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

i dowolny punkt (poza $a = 3, b = 0$, i $a = -\frac{1}{2}, b = 0$), spełnia warunki.

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dana jest warunkiem

$$G(h, st) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

gdzie $st = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ jest bazą standardową przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ oraz znaleźć sygnaturę macierzy $G(h, st)$.

(b) Czy w przestrzeni $W = \mathrm{lin}(\varepsilon_2, \varepsilon_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ jest niezerowy wektor izotropowy formy h? Czy istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń $Z \subseteq \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów izotropowych formy h? Odpowiedzi uzasadnić.

(a) Znajdowanie bazy prostopadłej jest procesem algorytmicznym,

- Wybieramy wektor prostopadły do już wybranych
- Sprawdzamy czy przypadkiem nie jest izotropowy
- Jesli nie, to dodajemy ten wektor do bazy
- Powtarzamy proces

Zatem zaczynamy: Niech $v_1 = (0, 0, 0, 1)$, sprawdzamy czy nie jest izotropowy (nie jest), i sprawdzamy warunek na prostopadłość z v_1: $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, wybieramy zatem np. $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ (nie jest izotropowy), mamy równanie $x_1 = 0$, i powtarzając do końca mamy bazę $\mathcal{A} = \{(0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0)\}$, i wtedy nasza forma to

$$G(h, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

więc sygnatura A to

$$s(A) = 0$$

(b) Dla W mamy formę:

$$G(h|_W, W) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

więc dla wektora $v = (a, b)$, aby był izotropowy wystarczy

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -a^2 + 2ab - b^2 = 0$$

więc $a = b$, czyli $v := (1, 1)$ jest izotropowy.

Wystarczy więc znaleźć wektor $w \perp v$, który jednocześnie jest izotropowy. Aby spełnić pierwszy warunek wystarczy że $x_3 = 0$, a patrząc na przekątną macierzy $G(h, st)$, narzuca się kandydat $w = \epsilon_1$, który spełnia warunki. Zatem $Z = \mathrm{lin}\left((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\right)$, w której wszystkie wektory są izotropowe, macierz formy h w niej jest zerowa.