AM1.2* lato 2024

Rozwiązanie zadań z serii VII

Konrad Kaczmarczyk

11 June 2024

Zadanie 2

Niech $f \in C^1([0,1])$. Udowodnij, że

$$\left| f(1) - \int_1^0 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Rozwiązanie

Skorzytajmy z rozwiniecia Taylora funkcji:

$$f(x) = f(1) - f'(\xi_x)(1-x) \Rightarrow |f(1) - f(x)| = \left|f'(\xi_x)(1-x)\right| < \max\left|f'(x)\right|(1-x)$$

całkując stronami otrzymujemy

$$\left| f(1) - \int_0^1 f(x)dx \right| = \frac{1}{2} \max\left|f'(x)\right|$$

co kończy dowód.

Zadanie 3

Niech $c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n} x\,dx$.

(a) Uzasadnij, że $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

(b) Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin^{2n}(\pi x)}{c_n(x+1/2)^2}\,dx.$$

Rozwiązanie

Rozważmy całkę:

$$\int_0^\pi \sin^{2n}(x)\,dx$$

Dla dowolnego δ, możemy ją rozbić jako, i ustalmy że $c_n = \sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2} \pm \delta\right)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^{2n}(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \sin^{2n}(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}(x)\,dx$$

$$< \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) c_n + 2\delta + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \pi c_n + \delta(2 - c_n) < \pi c_n + 2\delta$$

Przy ustalonym δ, możemy wybrać takie N, że dla każdego $n \geq N$ zachodzi że $\pi c_n = \varepsilon - 2\delta$, dla dowolnego ε (które wybieramy przed δ aby wyrażenie było dodatnie), zatem mamy że całka może być dowolnie mała, czyli

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2n}(x)\, dx \to 0$$

Zadanie 4

Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $b \leq 0$ będą takie, że $1 + ax + bx^2 \geq 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n\, dx = \begin{cases} -\frac{1}{a} & \text{jeśli } a < 0, \\ +\infty & \text{jeśli } a \geq 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Niech $a < 0$, pokażemy że wtedy mamy że $|a + 1| < 1$, czyli wystarczy udowodnić że $a > -2$, przez sprzeznosć powiedzmy że tak nie jest, czyli $0 < b \cdot 1^2 + a \cdot 1 + 1 \leq b - 1 < 0$, co jest sprzeczne.

Policzmy teraz całkę dla $b = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 (1 + ax)^{2n} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \int_1^{a+1} u^n du = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{a} \cdot ((1 + a)^{n+1} - 1) = -\frac{1}{a}$$

I teraz dla $b \neq 0$, możemy zapisać

$$n \int_0^1 (1 + ax^n)^n\, dx - n \int_0^1 (1 + ax + bx^2)^n\, dx$$

$$= n \int_0^1 -bx^2 \left((1 + ax)^{n-1} + (1 + ax)^{n-2}(1 + ax + bx^2) + \cdots + (1 + ax + bx^2)^{n-1}\right) dx$$

$$= -n \int_0^1 bx^2 w(x)\, dx = -nb \int_0^{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}} x^2 w(x) dx - nb \int_{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}}^1 x^2 w(x) dx$$

Każdy z składników wielomianu $w(x)$ jest mniejszy od 1 zatem cały wielomian możemy oszacować przez n i mamy

$$-nb \int_0^{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}} x^2 w(x) dx < -bn^2 \int_0^{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}} x^2 dx = \frac{-b}{3} n^{-\frac{\varepsilon}{3}} \to 0$$

a drugi z czynników całki możemy oszacować tylko przez

$$-nb \int_{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}}^1 x^2 w(x) dx < -nb \int_{n^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}}^1 n(1+ax)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left((1 + a)^{n+1} - (1 + an^{-\frac{2}{3}-\varepsilon})^{n+1}\right) \to 0$$

czyli mamy że całka jest z tresci zadania jest zbieżna do $\frac{1}{a}$ dla $a < 0$.

Dla $a = 0$, możemy zauważyć że $\frac{1}{a} = \infty$, a dla $a > 0$, zauważmy że funkcja jest rosnąca w 0, i całka nie jest zbieżna w zerze.

Zadanie 5

Niech $a \notin \mathbb{Z}$ i niech $f, g : [-\pi, \pi)$ będą zadane wzorami $f(x) = \sin(ax)$ oraz $g(x) = \cos(ax)$.

(a) Wyznacz współczynniki Fouriera funkcji f i g.

(b) Dla jakich punktów z przedziału $[-\pi, \pi]$ szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny do funkcji f? Czy szereg Fouriera funkcji f jest zbieżny jednostajnie na $(-\pi, \pi)$? Czy jest zbieżny niemal jednostajnie na $(-\pi, \pi)$?

(c) Korzystając z punktu (a) i z tożsamości Parsevala wykaż, że dla $t/\pi \notin \mathbb{Z}$ prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - n\pi)^2}.$$

Rozwiązanie

Weźmy funkcje $k(x) = g(x) + i \cdot f(x) = \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$, teraz c_n to

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iax} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(a-n)} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(a-n)} \left(e^{i\pi(a-n) - e^{-i\pi(a-n)}}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi(a-n)} \sin(\pi(a-n))$$

więc współczynniki przy $\sin(mx)$ w f to

$$b_m^f = \frac{\sin(\pi(a-m))}{\pi(a-m)} - \frac{\sin(\pi(a+m))}{\pi(a+m)}$$

a współczynniki przy $\cos(mx)$ w g to

$$a_m^g = \frac{\sin(\pi(a-m))}{\pi(a-m)} - \frac{\sin(\pi(a+m))}{\pi(a+m)}$$

Wiemy że f, ma skończoną wariancje na swoim okresie, czyli z kryterium Jordana-Dirichleta, jej szereg foureiera i ciągłośći mamy że zbiega do f w każdym z puntów $x \in (-\pi, \pi)$. W pozostałych punktach (czyli $-\pi$, π), nie mamy zbieżnosci gdyż następuje tam *przesok*, ale funkcja jest równa $\pm\sin(ax) \neq 0$, bo $a \notin \mathbb{Z}$.

Zatem mamy że funkcja na pewno nie jest jednostajnie zbieżna, natomiast z tw. Jordana-Dirichleta, mamy zbieżnność jednostajną na dowolnym $(a, b) \in (-\pi, \pi)$

Zastowujmy tożsamosć Persevala:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |k(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 dx = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(a-n)^2}\sin^2(\pi a)$$

i dzieląc przez $\sin^2(a\pi)$, i podstawiajac $x = \pi a$ mamy

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - n\pi)}$$