Analiza I.2*

Rozwiązanie zadań z serii II

Konrad Kaczmarczyk

26 March 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Udowodnij, ze dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\cos(x) < \frac{\sin^2(x)}{x^2}$$

Znamy wzór Talora dla funkcji cosinus i $x_0 = 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + R_4(0)$$

Korzystamy z postaci Lagrange'a dla funkcji reszty i mamy

$$R_4(0) = \frac{\cos^{(5)}(\xi)}{5!}x^4 = -\frac{\cos(x)}{120}x^4 < 0$$

Zatem mamy nierównosć

$$\cos(x) < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

Możemy zapisać teraz nierównosć:

$$P = \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)}{x^2} > 1 - \frac{1}{3}x^2 > 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 > \cos(x)$$

po drodze skorzystalismy z nierównosci $\frac{1}{6}x^2 > \frac{1}{24}x^4$, która działa dla warunków zadania.

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Niech $a, b > 0, a \neq b$. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{ab} \leq \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} \leq \frac{a+b}{2}$$

Będziemy korzystać z lematu o biegaczach. Ustalamy a, b, wybierzmy trzy funkcje:

$$g(x) = \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} \cdot \frac{1}{2}x^2 + ax$$
$$f(x) = e^{x+\ln(a)} - a$$

$$d(x) = \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{\ln(b) - \ln(a)}{2} x \right) + \sqrt{ab} \cdot x$$

Od razu mamy też ich pochodne:

$$g'(x) = \frac{b-a}{\ln(b) - \ln(a)} x + a$$
$$f'(x) = e^{x + \ln(a)}$$
$$d'(x) = \sqrt{ab} \cdot \left(x - \frac{\ln(b) - \ln(a)}{2} \right) + \sqrt{ab}$$

Łatwo sprawdzić że $f(0) = g(0) > d(0)$ Zauważmy też geometrycznie że, funkcja g przeciana f w dwóch punktach (dokładnie w 0, i $\ln(b) - \ln(a)$), i faktu że f jest wypukła wynika że na tym przedziale $g' > f'$. Możemy równierz zauważyć że funkcja d' została tak wybrana żeby być styczną do f' w punkcie $\frac{\ln(b)-\ln(a)}{2}$, i znowu z wypukłosci mamy że $f' > d'$, łącząc możemy skorzystać z lematu o biegaczach, i dla punktu $x_1 = \ln(b) - \ln(a)$ mamy:

$$g(x_1) \geq f(x_1) \geq d(x_1)$$

co po podstawieniu daje nam:

$$\frac{a+b}{2} \cdot (\ln(b) - \ln(a)) \geq b - a \geq \sqrt{ab} \cdot (\ln(b) - \ln(a))$$

Wystarczy podzielić i mamy tezę.

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ jest wypukła i rosnąca oraz $f(0) = 0, f(1) = 1$. Udowodnij, że

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) \leq x^2 \qquad x \in [0,1]$$

Zapiszmy warunek wypukłosci dla $x_0 = x, x_1 = 0$:

$$f(t \cdot f(x)) \leq t \cdot f(x) \qquad t \in [0,1]$$

Warto jescze zauważyć że funkcja jest "na", co wynika że jest wypukła i osiąga krańce przedziału, zatem możemy zauważyć:

$$f(x) \cdot f^{-1}(x) \leq x^2 \iff f(f(y)) \cdot y \leq (f(y))^2$$

i możemy przeliczyć:

$$f(f(y)) \cdot y = f(y \cdot \frac{1}{y} \cdot f(y)) \cdot y \leq \frac{1}{y} \cdot f(y) \cdot f(y) \cdot y \leq (f(y))^2$$

co kończy dowód.

§4 Zadanie

Zadanie 4.1. Udowodnij, że dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$2\text{tg}\,(x) > \sinh(x)$$

Możemy przekształcić tezę do postaci:

$$x - \text{arc tg}\left(\frac{\sinh(x)}{2}\right) > 0 \qquad x \in (0, \infty)$$

Skorzystamy ponownie z lematu o biegaczach dla naszej funkcji. Oznaczmy funkcje po lewej jako f, oczywiscie mamy że $f(0) = 0$, i policzmy pochodną:

$$f'(x) = \frac{4 - 2\cosh(x) + \sinh^2(x)}{4 + \sinh^2(x)} = \frac{(\cosh(x) - 1)^2 + 2}{4 + \sinh^2(x)} > 0$$

Zatem nierówność zachodzi z lematu o biegaczach.

§5 Zadanie

Zadanie 5.1. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzą nierówności

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \ln\left(1 + \sqrt[n]{(e^{a_1} - 1) \cdot \dots \cdot (e^{a_n} - 1)}\right) \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Zacznijmy od prawej nierównosci, postawmy $e^{b_i} = e^{a_i} - 1$, mamy

$$\ln\left(1 + e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + e^{b_i}\right)$$

co wynika z twierdzenia Jensena, wystarczy tylko udwodnić że:

$$\left(\ln(1 + e^x)\right)'' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

co kończy dowód prawej strony. Aby udowodnić lewą nierównosć postawiamy $\ln\left(1 + e^{b_i}\right) = e^{c_i}$ i po przekształceniach mamy:

$$\ln\left(e^{e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i}} - 1\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(e^{e^{c_i}} - 1\right)$$

które ponownie możemy wywnioskować z twierdzenia Jensena, wystarczy tylko sprawdzić:

$$\left(\ln\left(e^{e^x} - 1\right)\right)'' = \frac{e^{x+e^x}\left(e^{e^x} + e^x + 1\right)}{\left(e^{e^x} + 1\right)^2} > 0$$