Analiza Matematyczna II.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr.14

Konrad Kaczmarczyk

13 stycznia 2025

Zadanie. Pokazać nierówność

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f dl_1\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \exp(f) dl_1$$

gdzie f jest mierzalna i całkowalna na $[a,b]$.

Niech:

$$x_0 = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \exp(f) dl_1$$

z pierwszego semestru analizy znamy fakt że styczna do wykresu funkcji wypukłej jest "pod"nim, czyli:

$$\exists_{c,d}\ e^x > cx + d \ \wedge \ e_0^x = cx_0 + d$$

czyli mamy nierówności:

$$\int_{[a,b]} \exp(f) dl_1 \geq \int_{[a,b]} cx + ddl_1$$

$$= c\int_{[a,b]} f dl_1 + d(b-a) = (b-a)(cx_0 + d) = (b-a)\ e_0^x$$

$$= (b-a)\exp(\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f dl_1)$$

miejsce na tensora