Analiza II.1*

Rozwiązanie zadania nr.15

Konrad Kaczmarczyk

20 stycznia 2025

Wystarczy podzielić odcinek $[a, b]$ na 2^n równych przedziałów. Niech $P_{k,n}$ będzie k-tym takim przedziałem. Niech

$$v_n(y) = \sum_{2^n-1}^{k=0} \chi_{f(P_{k,n})}(y)$$

Zauważmy, że z ciągłości f mamy, że $f(P_{k,n})$ jest przedziałem: $f(P_{k,n} = \left[\inf_{P_{k,n}}, \sup_{P_{k,n}} f\right]$. Zatem

$$\int_{\mathbb{R}} v_n(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \sum_{2^n-1}^{k=0} \chi_{f(P_{k,n})}(y)dy$$
$$= \sum_{2^n-1}^{k=0} \int_{\mathbb{R}} \chi_{f(P_{k,n})}(y)dy = \sum_{2^n-1}^{k=0} l_1 f(P_{k,n})$$
$$= \sum_{2^n-1}^{k=0} (\sup_{P_{k,n}} - \inf_{P_{k,n}}) \to V(f; a, b)$$

Zatem jeśli $v_n \nearrow v$ to z tw. L-L mamy tezę.

Jeśli $v(y)$ jest skończone to przypadek jest oczywisty.
Jeśli $v(y)$ jest nieskończone to $v_n(y) \to \infty$, ale z tego wynika że jest to zbiór miary zero, czyli pomijalny.