

Rachunek prawdopodobieństwa I*

Rozwiązanie zadania domowego nr. 2

KONRAD KACZMARCZYK

6 kwietnia 2025

§1 Zadanie

Zadanie. Ponumerujmy genotypy AA, Aa, aa odpowiednio 1, 2, 3 i niech $p_{ik}, i, k \in \{1, 2, 3\}$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe, że potomek będzie należał do genotypu k jeśli jego ojciec (lub matka) należą do genotypu i . Oblicz p_{ik} zakładając, że prawdopodobieństwo, że drugi z rodziców jest genotypu 1, 2, 3 wynosi odpowiednio $p^2, 2pq, q^2$. Ogólnie pokaż, że $p_{ik}^{(n)}$ -prawdopodobieństwa, że potomek w n -tym pokoleniu będzie należał do genotypu k jeśli ustalony przodek należał do genotypu i wynosi

$$\begin{pmatrix} p^2 + \frac{pq}{2^{n-1}} & 2pq + \frac{q(q-p)}{2^{n-1}} & q^2 - \frac{q^2}{2^{n-1}} \\ p^2 + \frac{p(q-p)}{2^n} & 2pq + \frac{1-4pq}{2^n} & q^2 + \frac{q(p-q)}{2^n} \\ p^2 - \frac{p^2}{2^{n-1}} & 2pq + \frac{p(p-q)}{2^{n-1}} & q^2 + \frac{pq}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że wpływ genotypu przodka maleje z pokolenia na pokolenie o $1/2$.

Skorzystajmy z indukcji

Dla $n = 1$ poprzez ręczne rachunki mamy że powinna być to macierz:

$$\begin{pmatrix} p^2 + \frac{1}{2} \cdot 2pq & q^2 + \frac{1}{2} \cdot 2pq & 0 \\ \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4} \cdot 2pq & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{4}pq \\ 0 & p^2 + pq & q^2 + pq \end{pmatrix}.$$

co po podstawieniu do tezy działa.

Zauważmy że zachodzą zależności:

$$\begin{aligned} p_{k1}^{(n+1)} &= p_{k1}^{(n)} \cdot (p^2 + pq) + p_{k2}^{(n)} \cdot \left(\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}pq\right) \\ p_{k2}^{(n+1)} &= p_{k1}^{(n)} \cdot (pq + q^2) + p_{k2}^{(n)} \cdot \left(\frac{1}{2}p^2 + pq + \frac{1}{2}q^2\right) + p_{k3}^{(n)} \cdot (p^2 + pq) \\ p_{k3}^{(n+1)} &= p_{k2}^{(n)} \cdot \left(\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}q^2\right) + p_{k3}^{(n)} \cdot (pq + q^2) \end{aligned}$$

korzystając z oczywistego faktu że $p + q = 1$ mamy że:

$$\begin{aligned} p_{k1}^{(n+1)} &= p_{k1}^{(n)} \cdot p + p_{k2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2}p \\ p_{k2}^{(n+1)} &= p_{k1}^{(n)} \cdot q + p_{k2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2} + p_{k3}^{(n)} \cdot p \\ p_{k3}^{(n+1)} &= p_{k2}^{(n)} \cdot \frac{1}{2}q + p_{k3}^{(n)} \cdot q \end{aligned}$$

czyli w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} p_{11}^{(n+1)} & p_{12}^{(n+1)} & p_{13}^{(n+1)} \\ p_{21}^{(n+1)} & p_{22}^{(n+1)} & p_{23}^{(n+1)} \\ p_{31}^{(n+1)} & p_{32}^{(n+1)} & p_{33}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & p_{13}^{(n)} \\ p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & p_{23}^{(n)} \\ p_{31}^{(n)} & p_{32}^{(n)} & p_{33}^{(n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ \frac{1}{2}p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q \\ 0 & p & q \end{bmatrix}$$

wystarczy zatem sprawdzić czy:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \frac{pq}{2^{n-1}} & 2pq + \frac{q(q-p)}{2^{n-1}} & q^2 - \frac{q^2}{2^{n-1}} \\ p^2 + \frac{p(q-p)}{2^n} & 2pq + \frac{1-4pq}{2^n} & q^2 + \frac{q(p-q)}{2^n} \\ p^2 - \frac{p^2}{2^{n-1}} & 2pq + \frac{p(p-q)}{2^{n-1}} & q^2 + \frac{pq}{2^{n-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ \frac{1}{2}p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}q \\ 0 & p & q \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} p^2 + \frac{pq}{2^n} & 2pq + \frac{q(q-p)}{2^n} & q^2 - \frac{q^2}{2^n} \\ p^2 + \frac{p(q-p)}{2^{n+1}} & 2pq + \frac{1-4pq}{2^{n+1}} & q^2 + \frac{q(p-q)}{2^{n+1}} \\ p^2 - \frac{p^2}{2^n} & 2pq + \frac{p(p-q)}{2^n} & q^2 + \frac{pq}{2^n} \end{bmatrix}$$

co zachodzi i kończy dowód zadania.

§2 zadanie

Zadanie. Niech A_1, A_2, \dots będą zdarzeniami. Załóżmy, że $\sum_k \mathbf{P}(A_k) = \infty$. Wykaż, że jeśli

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k))^2}{\sum_{1 \leq j, k \leq n} \mathbf{P}(A_j \cap A_k)} = \alpha > 0,$$

wówczas $\mathbf{P}(\limsup A_n) \geq \alpha$, gdzie $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m$.

Rozwiązanie zaczniemy od lematu, wynikającego z tw. Jensen'a:

Lemat 2.1

Niech $Z \geq 0$ będzie zmienną losową, wówczas:

$$(\mathbb{E}Z)^2 \leq \mathbb{P}(Z > 0) \cdot \mathbb{E}Z^2$$

Dowód:

Skorzystajmy z wzoru na warunkową wartość oczekiwaną dla Z i Z^2 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \mathbb{P}(Z > 0) \cdot \mathbb{E}[Z \mid Z > 0] \\ \mathbb{E}Z^2 &= \mathbb{P}(Z^2 > 0) \cdot \mathbb{E}[Z^2 \mid Z > 0] \end{aligned}$$

zauważmy że $\mathbb{P}(Z^2 > 0) = \mathbb{P}(Z > 0)$, skorzystajmy więc z tw. Jensen'a:

$$\left(\frac{\mathbb{E}[Z]}{\mathbb{P}(Z > 0)} \right)^2 = (\mathbb{E}[Z \mid Z > 0])^2 \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} \mathbb{E}[Z^2 \mid Z > 0] = \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{P}(Z^2 > 0)} = \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{P}(Z > 0)}$$

co po wymnożeniu daje tezę lematu.

Udowodnijmy teraz więc drugi lemat, który pozwoli rozwiązać zadanie:

Lemat 2.2

Niech A_1, \dots, A_n będą zdarzeniami, wówczas zachodzi:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \frac{(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k))^2}{\sum_{1 \leq j, k \leq n} \mathbf{P}(A_j \cap A_k)}$$

Dowód:

Ustalmy zmienne losowe:

$$X_k = \chi_{A_k}$$

i korzystając z [Lemat 2.1](#) mamy że:

$$\left(\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k\right]\right)^2 \leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n X_k > 0\right) \cdot \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right]$$

korzystając z faktów że:

$$X_k \cdot X_l = \chi_{A_k} \cdot \chi_{A_l} = \chi_{A_k \cap A_l} \quad \mathbb{E}[X_k] = \mathbb{P}(A_k)$$

przekształcając mamy:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k]\right)^2 &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} > 0\right) \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{l,k=1}^n X_l X_k\right] \\ \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)^2 &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} > 0\right) \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{l,k=1}^n \chi_{A_k \cap A_l}\right] \\ \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)^2 &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cdot \sum_{l,k=1}^n \mathbb{E}[\chi_{A_k \cap A_l}] \\ \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)^2 &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cdot \sum_{l,k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_l) \\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &\geq \frac{(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k))^2}{\sum_{l,k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_l)} \end{aligned}$$

co po dowodzi lematu.

Korzystając z powyższego lematu możemy popęlnić dwie obserwacje

Pierwszą, oznaczając:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \quad t_n = \sum_{k,l=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap A_l)$$

z tezy zadania wiemy że $s_n \rightarrow \infty$ czyli:

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \frac{s_n^2}{t_n} \Rightarrow t_n \rightarrow \infty$$

Drugą, szacując:

$$\sum_{l,k=m+1}^n \mathbb{P}(A_l \cap A_k) =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l,k=1}^n \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ m+1 \leq k \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ m+1 \leq l \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{l,k=1}^m \mathbb{P}(A_l \cap A_k) \\
& \leq t_n - \sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ m+1 \leq k \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ m+1 \leq l \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - t_m \leq t_n - t_m
\end{aligned}$$

i korzystając z [Lemat 2.2](#) mamy:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^n A_k\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{k=m}^n \mathbb{P}(A_k))^2}{\sum_{m \leq j, k \leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_n - s_m)^2}{\sum_{l,k=m+1}^n \mathbb{P}(A_l \cap A_k)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(s_n - s_m)^2}{t_n - t_m} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{t_n - t_m} \cdot \left(\frac{s_n^2}{t_n} + 2 \frac{s_n s_m}{t_n} + \frac{s_m^2}{t_n} \right)
\end{aligned}$$

korzystając zatem z obserwacji (czyli $s_n \rightarrow \infty, t_n \rightarrow \infty$) oraz warunku zadania (czyli $\frac{s_n^2}{t_n} \rightarrow \alpha$), mamy:

$$= 1 \cdot (\alpha + 0 + 0) = \alpha$$

czyli łącząc:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \geq \alpha$$

dla dowolnego m , a wiemy że przy granicy $m \rightarrow \infty$:

$$\alpha \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_k A_k\right)$$

co kończy dowód.