GAL2, lato 2024

notatki z ćwiczeń

Konrad Kaczmarczyk

21 marca 2025

§1 cwiczenia 26 luty

Definicja 1.1
$A \in M_n(K)$ jest skalarna, jesli $A = aI$, $a \in K$

Fakt 1.2. A jest skalarna $\iff$ jedyna macierz w $M_n(k)$ podobna do A jest A.

1. $\Rightarrow$
2. $\Leftarrow$ Załóżmy że A nie jest taka, że $a_{ij} \neq 0$ dla jakis i, j.

> **Uwaga 1.3.**
> $$I_i(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & c & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Więc $A' = I_i(c) \cdot A \cdot I_i(\frac{1}{c}) \not= A$

§2 Endomorfizmy

Zadanie 2.1. Niech $W \subset V$, $dimW = n$, $dimV = 2n$, $n \geq 1$

$$\exists f \in End(V) \qquad (f : V \to V)$$

taki, że: $ker(f) = im(f) = W$

Wystarczy zdefiniować na bazie.

Zadanie 2.2. $f, g \in End(V)$ $\begin{cases} r(f) = r(g) = 1 \\ Ker(f) = Ker(g) \\ Im(f) = Im(g) \end{cases} \Rightarrow f \circ g = g \circ f$

Zadanie 2.3. Niech A będzie macieżą nieodwracalną. Pokaż że jest podobna do jakiejs macierzy z zerowym wierszem.

Skoro $detA = 0$ to $dimker\phi \geq 1$, a stąd $\exists v \neq 0$ taki że $\phi(v) = 0$ z tw. Steiniza o wymianie możemy uzupełnic zbiór $\{v\}$ do bazy nazwijmy A.

Drugie rozwiązanie: Z faktu że rzędy są linowo zależne, z pomocą operacji elementarnych możemy wyzerować jeden z wierszy tworząc macierz z zerowym wierszem.

§3 ćwiczenia 4 marca

Rozwiązania zadań:

Zadanie 3.1. Dla każdego z endomorfizmów φ znaleźć wartosci własne i bazy ich przestrzeni własnych

(a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2) = (5x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2)$.

(c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, 7x_1 - 7x_2 + 5x_3)$.

(d) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_3)$

(e) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) =$
$(-6x_1 - x_2 + 2x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_4, -14x_1 - 2x_2 + 5x_3, -x_4)$

(a) Weźmy bazę $\mathcal{A} = \{(1,1), (1,-1)\}$, dla której macierz przekształcenia φ wygląda następująco,

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

więc wartosci własne to 1, i 3, a bazą podprzestrzeni własnej jest $\mathcal{A}$.

(b) Wielomian charakterystyczny w bazie standardowej to

$$(5 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - (-1)(1) = 11 - 7\lambda + \lambda^2$$

co po rozwiązaniu równania kwadratowego daje nam dwie wartosci własne: $\frac{7+\sqrt{5}}{2}$, oraz $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$, które po dalszych obliczeniach dają wektory własne $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, i $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$, które przy okazji są bazą podprzesterzeni własnej.

(c) Łatwo zauważyć że $\varphi((0,0,1)) = (0,0,5)$, czyli znaleźlismy wektor własny i jego wartosc własną (przyjmijmy że znajduje się w bazie podprzestrzeni własnej), zauważyć można jeszcze że wektorem własnym jest $(1,1)$, z wartoscią 5. Rozwiązując teraz wielomian charakterystyczny otrzymujemy ostatnią wartość własną czyli 1, więc znaleźć metodą macierzową pozostały wektor $(1,-3)$.

(d) Postępując podobnie mamy: $\lambda = 2$, $v_1 = (1,-1,0)$

(e) Analogicznie mamy:

$$(v_1, v_2, v_3) = ((1, -3, 2, 0))$$

ze swoimi wartosciami własnymi kolejno -1, i 1.

Zadanie 3.2. Niech V będzie przestrzeni bazą funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mających pochodne i-tego stopnia dla każdego $i \in \mathbb{N}$ i niech $\phi : V \to V$ będzie różniczkowaniem, to znaczy $\phi(f) = f'$ dla każdego $f \in V$. Wykazać, że każda liczba $a \in \mathbb{R}$ jest wartoscią własną endomorfizmu ϕ. Dla każdego $a \in R$ znaleźć $V_{(a)}$.

Rozwiązanie zadania sprowadza się do rozwiązania równiania:

$$f' = \phi(f) = af$$

czyli $f = c \cdot e^{ax}$. Dodatkowo można zauważyć że $V_{(a)} = ((e^{ax}))$.

Zadanie 3.3. **(a)** Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$ będzie bazą podprzestrzeni V, niech $\varphi : V \to V$, z warunkiem $\varphi(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, oraz

$$\varphi(\alpha_n) = a_0\alpha_1 + \cdots + a_{n-1}\alpha_n$$

Znaleźć wielomian charakterystyczny.

(b) Wykazać że dla wielomianu w postaci:

$$w(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda_i \qquad a_n = (-1)^n$$

o współczynnikach w ciele K istnieje macierz $A \in M_n(K)$, taka że w jest jej wielomianem charakterystycznym.

(a) Wystarczy napisać macierz i ze wzorów Laplace'a mamy że:

$$det(A) = (-1)^{n-1}a_0 + \lambda(-1)^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-1}a_{n-1}$$

(b) Wystarczy rozpatrzeć macierz w postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & \cdots \end{bmatrix}$$

Zadanie 3.4. Czy istnieje endomorfizm, który ma conajmniej jeden wektor własny, ale nie ma ich niekskończnie wiele?

Wtedy i tylko wtedy gdy ciało jest skończone.

§4 5 marca

Zadanie 4.1. Dla każdego z endomorfizmów $\varphi : V \to V$ zbadać czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych φ (czytaj jest diagonalizowalna). Jesli tak to podaj przykład takiej bazy oraz $\mathrm{M}(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

(a) Licząc wartosci własne macierzy endomorfimu $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ znajdujemy że ma ona jeden wektor własny czyli $(1, -1)$, więc nie ma bazy.

(b) Pdobnie jak w zadaniu 3.1 a, wektorami własnymi są $(0, 1, 1)$ i $(0, 1, -1)$, i szybko licząc wielomian mamy pozostały wektor $(1, 1, 0)$, które razem rozpinają $\mathbb{R}^3$, więc są bazą $\mathcal{A}$, macierz to:

$$\mathrm{M}(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) Macierz $\mathrm{M}(\varphi)_{id}^{id}$, jest w postaci blokowej, więc możemy ją rozbić na dwie pomniejsze, zatem w tej pierwszej mamy wektory $(1, -1)$, i $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$, w drugiej są $(1, 1)$, oraz $(1, -3)$, które równierz rozpinają i razem z poprzednimi tworzą bazę.

Zadanie 4.2. Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dla każdej z powyższych macierzy A_i, $i = 1, \ldots, 4$ zbadać czy A_i jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$ oraz czy A_i jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$

1. Łatwo zauważyć wektory własne: $(0, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, -2)$, które rozpinają $\mathbb{R}^3$, i należą do $\mathbb{Q}^3$, zatem jest diagonalizowalna nad $\mathbb{Q}$.
2. Podobnie znajdujemy wektor $(1, 0, 0)$, i licząc dalej znajdujemy kolejny wektor własny $(2, 10, 5)$, lecz tylko jeden więc nie jest diagonalizowalna.
3. ...
4. ...

Zadanie 4.3. Podaj przykład macierzy $A \in M_2(\mathbb{Q})$, która nie jest diagonalizowana nad $\mathbb{Q}$ a jest nad $\mathbb{R}$.

Weźmy macierz Fibo czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Która ma wartosci własne niewymierne.

Zadanie 4.4. Wykaż że jesli macierz $A \in M_n(K)$, ma dokładnie jedną wartosć własną, oraz jest diagonalizowalna to jest macierzą diagonalną.

Po prostej kalkulacji:

$$A = C\lambda \mathrm{Id} C^{-1} = \lambda \mathrm{Id}$$

Zadanie 4.5. Niech φ będzie odwracalnym endomorfizmem. Wykaż że jesli φ jest diagonalizowalym endomorfizmem to φ^{-1} też jest.

Przez kalkulację:

$$A = CDC^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (CDC^{-1})^{-1} = CD'C^{-1}$$

Zadanie 4.6. Czy $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A^T$ jest diagonalizowalny? Jesli tak to podać bazę $\mathcal{A}$ w której macierz przekształcenia f jest diagonalna i znaleźć $\mathrm{M}(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Zadanie już się pojawiło jako 6 z drugiej serii.

Zadanie 4.7. Wykazać że $A \in M_n(K)$, jest diagonalizowalna wtedy gdy A^T też jest. Podaj przykład gdy nie mają tych samych wektorów własnych.

Podobnie jak w zadaniu 4.5

$$A = CDC^{-1} \Rightarrow A^T = CDC^{-1^T} = C^{T^{-1}}DC^T$$

§5 11 marca

Zadanie 5.1. **(a)** Niech $A \in M_n(K)$. Wykazac, ze dla kazdej wartosci własnej λ_i, $\dim V(\lambda_i)$ równa się liczbie klatek Jordana odpowiadających wartosci własnej λ_i w postaci Jordana A.

(b) Niech $n \in \{1, 2, 3\}$ i niech $A \in M_n(K)$ będzie taka, że $w_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^n$. Wykazać, że $\dim V(\lambda_1)$ wyznacza postać Jordana A.

(c) Czy 1b) jest prawdą dla $n \geq 4$?

(d) Niech $A \in M_n(K)$ będzie taka, że $w_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)_{k1} \cdot (\lambda_r - \lambda)_{kr}$, gdzie $k_i \in 1, 2, 3$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, r$. Wykazać, że wszystkie $\dim V(\lambda_i)$ razem wyznaczają postać Jordana A.

(a) Wystarczy zapisać $\dim V_{(a)} = n - r(A - aI) = \dim A - aI$.

(b) ...

Zadanie 5.2. Niech

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprawdź które z tych macierzy są podobne.

Wystarczy znaleźć bazy Jordana i porównać, z czego wynika tylko że $A_1 \sim A_4$