JAiO lato 2024

rozwiązanie zadań z serii III

Konrad Kaczmarczyk

4 June 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Ustalmy alfabet wejściowy $A = \{0, 1\}$ i alfabet taśmowy $T = \{0, 1, \mathbb{B}\}$. Niech U będzie maszyną uniwersalną. Dla słowa $w \in A^*$ zdefiniujmy maszynę Turinga M_w następująco: jeśli w jest kodem pewnej maszyny M to $M_w := M$, a w przeciwnym przypadku $M_w := U$. Dla każdego z poniższych języków ustal czy jest rozstrzygalny, i czy jest częściowo rozstrzygalny.

(a) $L_1 = \{w \in A^* \mid M_w \text{ jest maszyną o liczbie stanów, która jest potęgą dwójki}\}$

(b) $L_2 = \{w \in A^* \mid \forall v \in L(M_w) \exists n \in \mathbb{N} v = 1^{2^n}\}$

(c) $L_3 = \{w \in A^* \mid \forall v \in L(M_w) v = 1^{|w|} \vee \exists n \in \mathbb{N} v = 1^{2^n}\}$

§2 Rozwiązanie

§2.1 a)

Jest to język rostrzygalny, udowodnimy to przez skonstruowanie automatu rozpoznającego ten język.

Możemy skonstruować maszynę P, rozpocznającą poprawnosć kodu w, następnie jęsli kod jest poprawny przekazujemy go do maszyny zliczającej stany w kodzie w, i przekazujemy ich ilość do maszyny sprawdzającej czy jest to potęga dwójki (poprzez dzielenie jej przez 2, aż dojdziemy do 1, chyba że jakas liczba nie jest podzielna).

§2.2 b)

Na początku pokażemy, że ten język nie jest rozstrzygalny. Przez sprzeczosć, załużmy że jest roztrzygalny, czyli jest rozpoznawany przez np. całkowitą maszyne P, i wynika z tego równierz rostrzygalnosć problemu stopu. Weźmy dowolne słowo w i maszyne Q. Niech maszyna R, niezależnie od swojego wejscia symuluje bieg słowa w w maszynie Q, i jesli jest rozpoznawany daje na wyjsciu 1, w pozostałym przypadku niech się zawiesza (podobnie jak Q). Ale teraz uruchamiamy kod maszyny R na maszynie P, i jesli R dla każdego słowa daje 1, to kod maszyny nie jest rozpoznawalny przez P. Łącząc te rzeczy mamy że P rozpoznaje tylko kody maszyn symulujących zawieszające się układy maszyn i słów, co rozstrzyga problem stopu, więc mamy sprzecznosć.

Teraz pokażemy, że ten język nie jest częsciowo rozstrzygalny. Wystarczy pokazać, że dopełnienie tego języka $A^* - L_2$ jest częsciowo rostrzygalne (teza wtedy wynika z poprzedniego wniosku), czyli kodów maszyn które zawierają conajmniej jedno słowo $v \neq 1^{2^n}$. Mianowicie aby sprawdzić czy $M_w \in A^* - L_2$, możemy symulować jej działanie przez k kroków na kolejno wszystkich słowach o długosci $\leq k$, stopniowo zwiększając k gdy skończą nam sie słowa, gdy znajdziemy takie słowo akceptujące $\neq 1^{2^n}$ to kończymy. Widać że jest to problem częsciowo rostrzygalny, co kończy dowód.

§2.3 c)

Ten podpunkt nie różni się w zasadnie niczym od poprzedniego, wykazanie że nie jest rozstrzygalny jest identyczne jak poprzednio, a w dowodzie braku cz. rostrzygalnosci do każdego $v \neq 1^{2^n}$, dokładamy warunek że $v \neq 1^{|w|}$