Analiza I.2*

Rozwiązanie zadania domowego

Konrad Kaczmarczyk

21 March 2024

§1 Zadanie 1

Zauważmy że

$$P_n(x) = f^{(n)}(\operatorname{tg}(x)) = \left(f^{(n-1)}(\operatorname{tg}(x))\right)' = \left(1+\operatorname{tg}^2(x)\right)\left(P_{n-1}(\operatorname{tg}(x))\right)'$$

Więc indukcyjnie możemy stwierdzić że istnieje taki wielomian $P_n(x)$ o współczynnikach nieujemnych. Wypiszmy parę pierwszych wielomianów:

$$\begin{gathered}P_0(x) = x \\ P_1(x) = 1 + x^2 \\ P_2(x) = (1+x^2)2x = 2x + 2x^3 \\ P_3(x) = (1+x^2)(2+6x^2) = 2 + 8x^2 + 6x^4 \\ P_4(x) = (1+x^2)(16x+24x^3) = 16x + 40x^3 + 24x^5 \\ P_5(x) = (1+x^2)(16+120x^2+120x^4) = 16 + \dots\end{gathered}$$

Więc wypisując wzór Taylora mamy:

$$\begin{gathered}\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(0) + \frac{P_1(\operatorname{tg}(0))}{1!}x + \frac{P_2(\operatorname{tg}(0))}{2!}x^2 + \frac{P_3(\operatorname{tg}(0))}{3!}x^3 + \frac{P_4(\operatorname{tg}(0))}{4!}x^4 \\ + \frac{P_5(\operatorname{tg}(0))}{5!}x^5 + o(x^5) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\end{gathered}$$

§2 Zadanie 2

Ponownie korzystając z wzoru Taylora mamy:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + R_2(x)$$

Zauważmy że reszte możemy zapisać w postaci Lagrange'a i mamy

$$R_2(x) = \frac{((1+x)^\alpha)'''}{6}x^3 = \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}{6\cdot(1+x)^{3-\alpha}}$$

Zatem należy wykazać że

$$\begin{gathered}\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)\alpha}{6\cdot(1+x)^{3-\alpha}} - \frac{3}{4}\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 > 0 \\ 2\,(\alpha-2) - 9x^2(1+x)^{3-\alpha} < 0\end{gathered}$$

I tutaj mamy sume wyrazów ujemnych. Zatem teza zachodzi.