Analiza I.2*

Notatki z ćwiczeń

Konrad Kaczmarczyk

12 March 2024

§1 26 luty - pochodne

Zadanie 1.1. Narysowano styczne do paraboli $y = x - \frac{1}{4}y^2$ w punktach $(0,0)$, $(2,1)$ i $(4,0)$. Znajdź równania tych stycznuch bez stosowania pochodnych.

(a) Dla $(2,1)$ wystarczy zauważyć że to wierzchołek, więc $y = 0$ spełnia.

(b) W pozostałych przypadkach wystarczy rozwiązać układy:

$$\begin{cases} y = ax \\ y = x - \frac{1}{4}x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = a(x-4) \\ y = (x-4) - \frac{1}{4}(x-4)^2 \end{cases}$$

które możemy rozwiąać z pomocą delty.

Zadanie 1.2. Pod jakim kątem przecinają się wykresy funkcji

1. $y = x^2$ i $x = y^2$
2. $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$ i $y = \sqrt[3]{x}$?

(a) Rozwiązujemy układ

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

otrzymujemy rozwiązania: $(x, y) \in \{(1,1), (0,0)\}$, przypadek drugi jest łatwy bo styczne do wierzchołków paraboli przecinają się pod kątem prostym. W pierwszym przypadku liczymy styczne, mianowicie: $x = 2y - 1$, oraz $y = 2x - 1$, licząc kąt między nimi otrzymujemy $\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}\frac{1}{2}$

(b)

Zadanie 1.3. Korzystając jedynie z definicji pochodnej oblicz $f'(p)$, przy czym $f(p)$ jest tak określonem, by f była ciągła w punkcie p:

1. $f(x) = x(x-1)$, $p = 1$,
2. $f(x) = (x-2)|x+3|$, $p = 2$,

3. $f(x) = (lnx)\sqrt{1+3x^2}$, $p = 1$.

(a)

(b) $f'(2), f(x) = (x-2)\,|x+3|$

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{F(p+h) - F(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5h+h^2}{h}$$

Zadanie 1.4. Niech $f(x) = \operatorname{tg}\left(x\cdot\cos\left(x^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\right)$ dla $-1 < x < 1$. Zbadaj, czy funkcja f ma pochodną w punkcie 0. Oblicz $f''(0)$, jeśli istnieje lub wykaż, że funkcja f pochodnej w punkcje 0 nie ma.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg}\left(h\cdot\cos\left(h^2\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}\left(h\cos\left(h^2\right)\right)}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zadanie 1.5.

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^n f_i(x)\right)'}{\prod_{i=1}^n f_i(x)} = \sum \frac{f_i'(x)}{f_i'(x)}$$

Dowód jest poprzez indukcję.

Zadanie 1.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalna. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ Czy $\exists_{\varepsilon>0}$, takie że f jest s cisle rosnąca na $(-\varepsilon, \varepsilon)$?

Wystarczy postawić funkcje

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x + \alpha x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

zatem:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x+\alpha x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} x\alpha\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

i wyierając odpowiedni parametr α tworzymy kontrprzykład.

Zadanie Domowe 1.7. Rozważamy lustro w kształcie paraboli $x = y^2$. Niech $c \in \mathbb{R}$. Promień świetlny biegnie od punktu (∞, c) do punktu (c_2, c), a następnie ulega odbiciu zgodnie z zasadą: „kąt padania jest równy kątowi odbicia”. Uzasadnij, że po odbiciu promień świetlny przejdzie przez punkt $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. (Jest to ognisko paraboli $x = y^2$.)

Przykład 1.8

$(x^x)' = e^{xln(x)} = x^x(1 + ln\,(x))$

Przykład 1.9

$$(ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right))'$$
$$=\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)'(ln\,(y))'=\cdots=1$$

Zadanie 1.10.
$$f(x)=\begin{cases}5x^2+ax, & x\leq 0\\ 2x+b, & x>0\end{cases}$$
Znajdź a, b że f jest różniczkowalna.

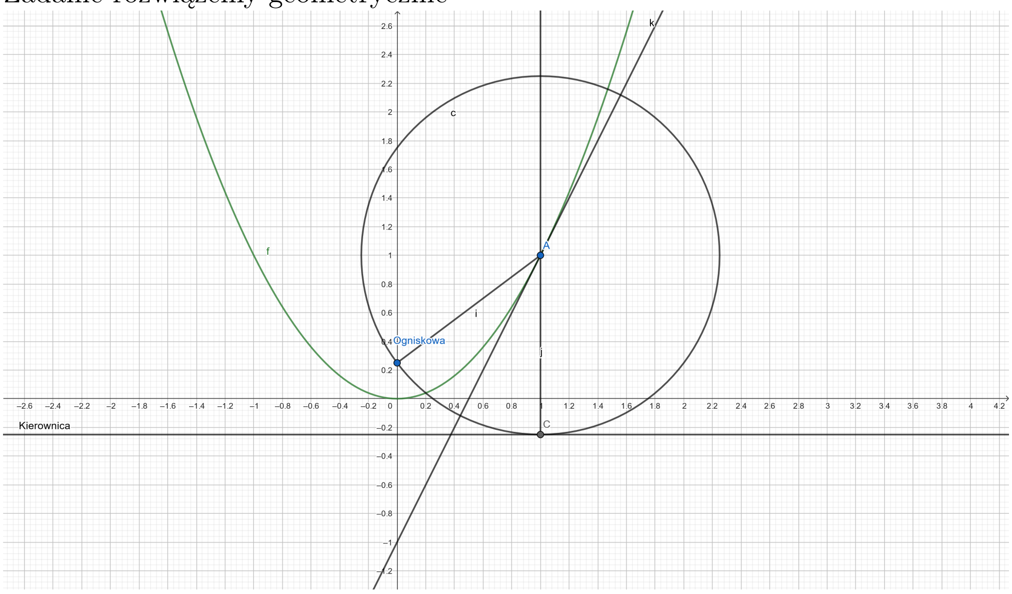
Wystarczy rozpatrzyć tylko przypadek gdy $p=0$, gdyż pochodna jest tylko pojęciem lokalnym.

Różniczkowalna w $p=0$, czyli ciągła, zatem po obliczeniach $b=0$, a zgodnosc pochodnych wymusza $a=2$.

Zadanie Domowe 1.11. Oblicz $f'(x)$, dla
$$f(x)=log_x\,(\sin(x))\qquad x\in(0,\pi)\,,x\neq 1$$

§1.1 Rozwizania zadań domowych

1. Zadanie rozwiążemy geometrycznie



Rozważmy geometrycznie czym jest styczna w punkcie A, mianowicie jest to prosta która przechodząca przez A, oraz punkt powstały poprzez przesunięcie się o infitezymalnie małą odległość na paraboli. Zauważmy że trójkąt stworzony przez A, ognisko, oraz rzut prostopadły na kierownice, jest równoramienny, podobnie dla dowolnego punktu na paraboli, a także dla naszego infitezymalnie małego punktu. Wystarczy zauważyć zatem że jedyną opcją dla naszego punktu jest leżeć na wyskosci wypuszczonej z punktu A, więc jest styczną.

Następnie zauważyć można kąty wierzchołkowe, oraz prawo odbicia (rysunek wyżej), i orzymujemy że wszystkie promienie po odbiciu przechodzą przez ognisko (czemu zawdzięcza swoją nazwę).

Skończyć możemy zauważyć że punkt $(0,0)$, jest równo między ogniskiem a kierownicą, zatem znajdując rozwiązanie układu

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

znajdujemy współrzędne punktu na paraboli który wraz z kierownicą i ogniskiem tworzy kwadrat zatem wpółrzędna y tego punktu czyli $\frac{1}{4}$ jest współrzędną ogniska.

2. Korzystając z wzorów na zmianę podstawy logarytmu i pochodną ilorazu otrzymujemy:

$$(\log_x(\sin(x)))' = \left(\frac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}\right)' = \frac{(\ln(\sin(x)))' \cdot \ln(x) - \ln(\sin(x)) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{\operatorname{ctg}(x)\ln(x)\,x - \ln(\sin(x))}{x\ln^2(x)}$$

Zadanie 1.12. Niech $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\{0\} = 0$, $f'(x) > f(x)$

§1.2 Rozwązanie 1

Korzystamy z twierdznia o wartosci sredniej, i następnie z faktu o osiąg aniu swoich granic przez ciągłosc.

§1.3 Rozwiązanie 2

Wystarczy zapisać że $f(x) = e^x g(x)$, z założeń otrzymujemy że $(g)' > 0$, i $g(0) = 0$, zatem funkcja jest rosnąca od 0, co kończy dowód.

§2 29 luty

Przykład 2.1

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Wyznacz styczną w punkcie $(1, f(1))$.

Rozpatrzmy trójkąt o bokach: $2x$, $1+x^2$, i $1-x^2$. Przez α oznaczmy kąt naprzeciwko boku $2x$, zatem mamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2x}{1-x^2}, \qquad x = \operatorname{tg}(\beta)$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(2\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \quad mod\pi$$
$$\alpha = 2\operatorname{arctg}(x)$$

Zadanie 2.2. **(a)** Niech $f(x) = x^2 + x$, wyznacz styczną w punkcie $(1, 2)$.

(b) Wykaż że istnieje funkcja odwrotna w przedziale $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ($g = f^{-1}$)

(c) Pokaż że $g(2) = 1$, i oblicz $g'(2)$.

(d) Znajdź jawny wzór na g.

(a) $f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, czyli $y = 3(x-1) + 2 \Rightarrow y = 3x - 1$.

(b) W punkcie $x = \frac{1}{2}$, jest wierzchołek paraboli, zatem na przedziale $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ uzyskuje każdą wartosc tylko jeden raz, zatem istnieje funkcja odwrotna.

(c) Patrz następne

(d) Wystarczy rozwiązać równanie $g^2 + g = x$, z pomocą delty.

Zadanie 2.3.

$$f(x) = x + e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

Wyznacz funkcje odwrotną i jej pochodną w punkcie $x = 1$.

Zauważmy że $(f)' = e^x + 1 > 0$, więc jest rosnąca $\Rightarrow$ funkcja jest różnowartosciowa.

$$g'(1) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

Zadanie 2.4.

$$f = \operatorname{atg}(x) + \operatorname{atg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Pokaż że $f = \frac{\pi}{4}$

Rozwiązanie 1
Obliczyć pochodne

$$f' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} = \dots$$

Rozwiązanie 2:
Skorzystaj z wzoru na sumę $\operatorname{atg}()$.

Zadanie Domowe 2.5. Zbadaj funkcje;

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\frac{1}{|x|}\right) & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Zadanie Domowe 2.6. Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i $a \in \mathbb{R}$, $x_n \to a$, $z_n \to a$ i $f'(a)$ istnieje

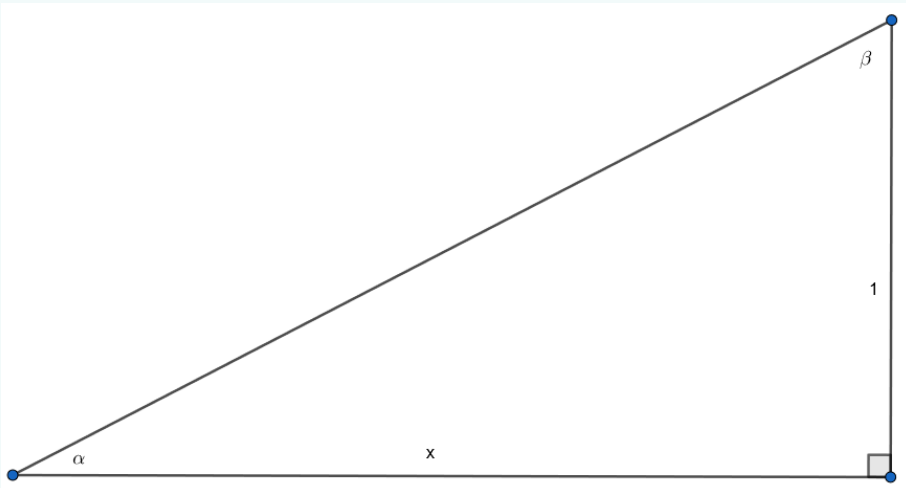
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} \neq f'(a)$$

Zadanie 2.7. Zbadaj różniczkowalnosć funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{|x|}\right) & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

Z zajęć wiemy że funkcja $\operatorname{arc\,tg}()$ jest różniczkowalna na całym $\mathbb{R}$, więc funkcja f również jest różniczkowalna, gdy $x \neq 0$, zatem wystarczy sprawdzić, jej różniczkowalnosć w tym punkcie.

Lemat 2.8



Zauważmy że w trójkącie o bokach x, 1, $\sqrt{x^2+1}$, występują następujące własnosci

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha \\ \operatorname{arc\,tg}(x) = \beta \end{cases}$$

Zatem zachodzi następujący lemat:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Korzystając z lematu możemy obliczyć pochodne lewo i prawostronne:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\operatorname{arc\,tg}(|x|)}{x} = 1$$

Gdzie po drodze skorzytalismy z granicy $\frac{\operatorname{arc\,tg}(x)}{x} \to 1$, którą możemy otrzmyać z granicy $\frac{\operatorname{tg}(x_n)}{x_n} \to 1$, dla $x_n \to 0$, i podstaiwając $x_n = \operatorname{arc\,tg}(b_n)$, gdzie $b_n \to 0$.

Zadanie 2.9. Podaj przykład funkcji f, punktu p i ciągów (x_n), (z_n) takich że $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = p$, $z_n, x_n \neq p$, oraz funkcja f jest równiczkowalna w punkcie p, ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} \neq f'(p)$$

Moim pomysłem jest skorzystanie z funkcji nie analitycznych, np:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \in \mathbb{Q} \\ x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić że, w punkcie $p = 0$, mamy pochodną równą zero bo $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - 1\right| = \left|\frac{f(x)}{x} - 1\right|$, które dla $x \notin \mathbb{Q}$: $\left|\frac{x}{x} - 1\right| = 0$, i w pozostałych przypadkach $\left|\frac{x^2+x}{x} - 1\right| = |x| \to 0$.

Pozostało znaleźć odpowiednie (x_n), i (z_n). Wystarczające jest:

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad z_n = \frac{1}{n} + \frac{\pi}{n^3}$$

gdyż po obliczeniach mamy że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{n^3}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{\pi}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{n-\pi}{\pi} \neq 1$$

§3 5 marca

Przykład 3.1

Wyznacz maksima funkcji

$$\left|x^2 - 2x - 3\right| + \frac{3}{2}\ln(x) \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Lemat 3.2

Jesli f jest minimalna na $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ i ma lokalne ekstremum w x_0 to $f'(x_0) = 0$.

f przyjmuje kresy tj. $\exists_{x_1,x_2} f(x_1) = \sup_{x\in[\frac{1}{2},2]} f$, $f(x_2) = \inf \ldots$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3, 1$$

Rozważamy dwa przedziały $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, i $[1, 2]$, i pochodne na tych przediałach:

$$f' = \begin{cases} 2x + 2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} & x \geq 1 \\ -2x + 2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x} & x < 1 \end{cases}$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$$4x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \text{ nie istnieje}$$

Po sprawdzeniu $\frac{1}{2}$ to minimum, a 2 to maksimum

Przykład 3.3

Wyznacz ekstrema funkcji:

$$f = 2ex\ln(x) \qquad x \in (0, 2]$$

$$f' = 2e(\ln(x) + 1) = 0 \iff x = e^{-1}$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{z}{e^z}|_{x=e^{-z}} = 1$$

Zadanie 3.4. Wielomian $P(x)$ ma n różnych pierwiastków ⇒ P' ma conajmniej $n-1$ różnych pierwiastków.

Korzystając z twierdzenia Rolle'a, wybieramy dwa kolejne pierwiastki, i otrzymujemy że między nimi istnieje pierwiastek P', co kończy dowód.

Zadanie 3.5. Wiemy że $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, jest różniczkowalna i $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = c$. Udowodnij że:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x + 1) - f(x)) = c$$

Skorzystać z tw. Lagrange'a

Zadanie 3.6.

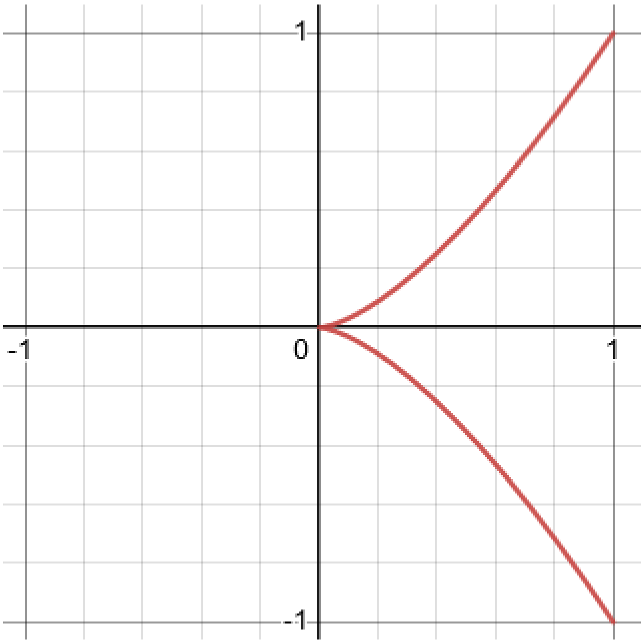
$$f = x^2, \quad g = x^3 \qquad x \in [-1, 1]$$

Czy istnieje takie $\varepsilon \in (-1, 1)$ takie:

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

Które założenie tw. Cauchy'ego nie jest spełnione?

1 Rozwiązanie:
Geometrycznie możemy narysować krzywą



i zauważyć że wektor prędkosci nigdy nie jest równoległy do odcinka (1,-1) - (1,1).
2 Rozwiązanie:
W tw. Cauchy'ego nie jest spełniony warunek $g' \neq 0$, i podstawić wartosci.

Zadanie 3.7. Niech $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi, różniczkowalnymi na (a, b). Niech:

$$F(x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{bmatrix}$$

Udowodnij, że istnieje $x_0 \in (a, b)$ takie, że $F'(x_0) = 0$. Wywnioskuj stąd twierdzenia Cauchy'ego i Lagrange'a o wartości średniej.

Wiemy że $F(a) = F(b) = 0$, i korzystając z tw. Rolle'a mamy tezę.

1. stosując $F'(x)$, z $h = 1$, otrzymujemy tw. Cauchy'ego

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

2.

Zadanie 3.8. Tak jak poprzednio niech f będzie ciągłe i różniczkowalne na $[a, b]$, wykaż że: f nie jest liniowa $\Rightarrow \exists_{x_1, x_2 \in (a,b)}$

$$f'(x_1) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(x_2)$$

$$\exists_{x_0 \in (a,b)} f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F(x) = f(x) - x \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F' = f' - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$F'(x_0) = 0$$
$$\vdots$$

Niech $l(x)$ będzie funkcją linową z $(a, f(a))$ do $(b, f(b))$.

$$\exists x_0 f(x_0) > l(x_0)$$

Zatem z tw. lagrange'a mamy

$$f'(x_2) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = f'(x_1)$$

Zadanie Domowe 3.9.

$$f = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin(x) \qquad x \in [-\pi, 2\pi]$$

Znajdź maksima i minima funkcji f.

Korzystając z lematu Fermata, wiemy że funkcja swoje ekstrema gdy $f' = 0$, zatem obliczmy:

$$f' = 4 - \frac{9\pi^2}{x^2} + \cos(x)$$

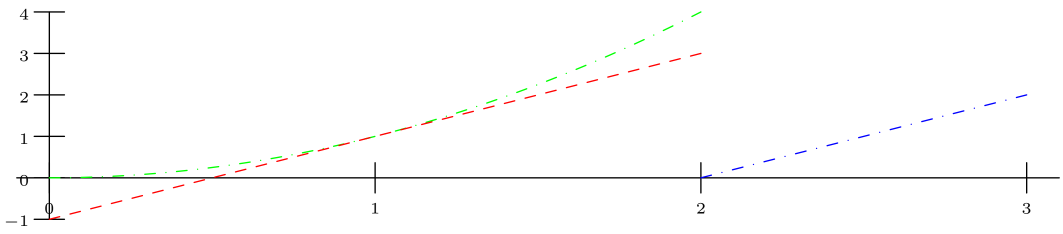
Przeanalizujmy osobno funkcje $4 - \frac{9\pi^2}{x^2}$, i $\cos(x)$.

1. dla $4 - \frac{9\pi^2}{x^2}$ wiemy że w punkcie $x = \frac{3}{2}\pi$ punkt zerowy, dla $x < \frac{3}{2}\pi$, jest ujemna, a dla $x > \frac{3}{2}\pi$, jest dodatnia.
2. dla $\cos(x)$ mamy podobnie w punkcie $x = \frac{3}{2}\pi$ punkt zerowy, dla $x < \frac{3}{2}\pi$, jest ujemna, a dla $x > \frac{3}{2}\pi$, jest dodatnia.

Wiemy że suma dwóch funkcji dodatnich jest dodatnia, a ujemnych ujemna. Zatem w przedziale $[\pi, 2\pi]$, występuje jedno miejsce zerowe pochodnej. Po podstawieniu kolejno, $x = \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$, znajdujemy ekstrema mianowicie

$$\min_{x \in [\pi, 2\pi]} f(x) = 12\pi - 1 \qquad \max_{x \in [\pi, 2\pi]} f(x) = 13\pi$$

Zadanie Domowe 3.10. Niech $f(x) = x^2$, jeśli $0 < x < 2$, i x jest liczbą wymierną, $f(x) = 2x - 1$ jeśli $0 < x < 2$, ale x jest liczb niewymierną i $f(x) = 2x - 4$ jeśli $x \in (2, 3)$ jest taką liczbą wymierną, że $\sqrt{2x - 4}$ jest liczba niewymierną. Wykazać, że funkcja f jest różniczkowalna w $x_0 = 1$, $f'(1) \neq 0$, ma funkcję odwrotną, ale funkcja odwrotna nie jest różniczkowalna w punkcie $y0 = f(1) = 1$.



Łatwo pokazać że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\leq \max\left(2,\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}\right)=2$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\geq \min\left(2,\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}\right)=2$$

Zatem wiemy że $f'(1)=2$, a także funkcja f posiada funkcje odwrotną o definicji:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & x\notin\mathbb{Q}\\ \sqrt{x} & x=a^2, a\in\mathbb{Q}\\ \frac{1}{2}x+2 & x=a^2, a\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

I łatwo zauważyć że ta funkcja przy $x\to 1$, nie będzie równa $\frac{1}{2}$, gdyż dla ciągu $x_n=\frac{1}{p_n}\to 0$, definicja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{p_n}+2-1}{\frac{1}{p_n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+p_n\right)=\infty$$

Więc nie spełnia warunków.

§4 7 marca

Przykład 4.1

Wykaż że funkcją spełniającą

$$f''=-f$$

są funkcje w postaci $f=a\sin(x)+b\cos(x)$.

Oznaczmy funkcje α, i β

$$\alpha(x)=f(x)\cos(x)-f'(x)\sin(x)$$
$$\alpha'(x)=f'\cos(x)+f\sin(x)-f'\cos(x)-f\sin(x)=0\beta(x)=f(x)\sin(x)+f'\cos(x)$$
$$\beta'(x)=0$$
$$\begin{bmatrix}\cos(x) & -\sin(x)\\ \sin(x) & \cos(x)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f\\ f'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$$

Odwracając macierz obrotu otrzymujemy tezę.

Przykład 4.2

Wykaż że

$$\text{arc tgh }(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Mając definicje $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, i $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, mamy że

$$\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Biorąc funkcje odwrotną otrzymujemy tezę.

Drugi sposób:

Skorzystajmy z wzorów:

$$\sinh' x = \cosh' x \qquad \cosh' x = \sinh' x$$

Licząc pochodną $\operatorname{tgh}(x)$:

$$(\operatorname{tgh}\, x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \cdots = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \operatorname{tgh}^2(x)$$

Więc

$$(\operatorname{arc\,tgh}(x))' = \frac{1}{\operatorname{arc\,tg}'(x)} = \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2(x)} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Zadanie 4.3. $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, ciągłe , różniczkowalne i niech $f(0) = f(1) = 0$, udowodnij że równanie ma rozwiązanie

$$g' f + f' = 0$$

Wystarczy podstawić $h := e^g f$, i sprawdzić założenia.

Zadanie 4.4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ która jest różniczkowalna i ciągła, i niech $b - a > \pi$. Wykaż że

$$f' < 1 + f^2$$

ma rozwiązanie

Podstawiając $g = \operatorname{arc\,tg}(f)$, teza zmienia się w $\exists_{x_0} g'(x_0) < 1$, więc przez sprzeczność w $g' \geq 1$, ale:

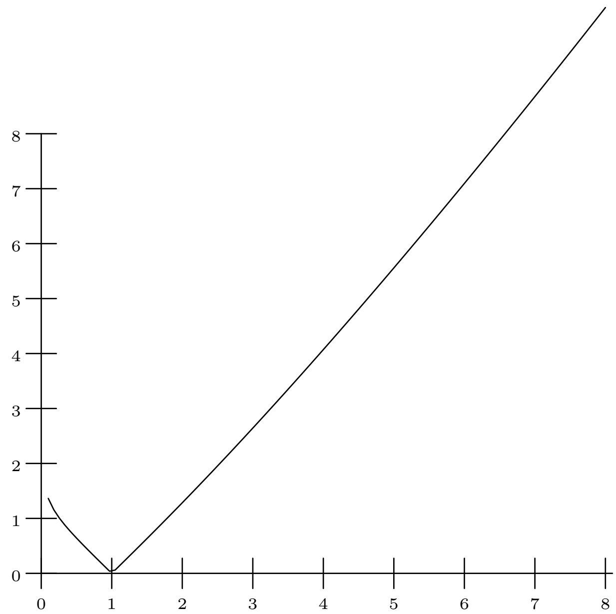
$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(\varepsilon) \geq 1 \Rightarrow g(b) - g(a) \geq \pi$$

co jest sprzeczne z zbiorem wartosci funkcji $\operatorname{arc\,tg}(x)$, co kończy dowód.

Zadanie 4.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna i $f(a) = a$ dla $a = 0, 1, 2$, wykaż że istnieje takie x_0 takie że $f''(x_0) = 0$

Połóżmy $h(x) = f(x) - x$, i korzystając dwukrotnie z twierdzenia Rolle'a otrzymujemy tezę.

Zadanie 4.6. Niech $f(x) = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(x-1)^6}{x}}$ zbadaj przebieg zmiennosci funkcji.



§5 12 marca

Zadanie 5.1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na $[a, b]$, f' ciągła na $[a, b]$ i

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$$

Z tw. Rolle'a wiemy że istnieje takie c że $f'(c) = 0$, i korzystając dwa kolejne razy otrzymujemy tezę.

Lemat 5.2

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne na przedziale (a, b)

Jesli $f(a) = g(a)$, i $f' \leq g'$, wtedy $f(b) \leq g(b)$, i odwrotnie.

Przykład 5.3

$$\cos(x) > 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Co wynika z nierównosci $\sin(x) < x$.

Zadanie 5.4.

$$\ln\left(1 + x^2\right)$$

sprawdź czy jest jednostajnie ciągła

Wytarczy sprawdzić że $f' = \frac{2x}{1+x^2}$, które jest ograniczone przez 1, zatem jest j.ciągłą.

Przykład 5.5

$$f = \ln\left(1 + x^x\right)$$

czy jest j. ciągła

Wiemy że

$$f' = \frac{x^x(\ln(x) + 1)}{1 + x^x} \to \infty$$

Zatem

$$\sup\{f(x+\sigma) - f(x) : x \in D_f\}$$

Gdy przy $\sigma \to 0$, jest ograniczone, to funkcja jest j. ciągła. Ale przy ustalonej δ mamy:

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = f'(\varepsilon) \to +\infty$$

Więc nie jest j. ciągła.

Zadanie 5.6. Funkcja dana funkcja $f : [0, \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\pi}\right)] \to \mathbb{R}$ jest wzorem

$$f = x\sin^2(x) + \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Znajdź ekstrema tej funkcji.