Analiza II.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr.4

Konrad Kaczmarczyk

28 October 2024

Zadanie. Mamy $0 < a < b$ i $n \in \mathbb{N}$. Pomiędzy a i b wstawić $x_1, \ldots, x_n$, tak aby

$$f = \frac{\prod_i x_i}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

było jak największe.

Obliczmy dowolną pochodną cząstkową:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{x_k^2 - x_{k-1}x_{k+1}}{(x_{k-1}+x_k)(x_k+x_{k+1})} \cdot \frac{\prod_{i \neq k} x_i}{(a+x_1)\ldots(x_n+b)}$$

widzimy że pochodna zeruje się tylko dla $x_k = \sqrt{x_{k-1}x_{k+1}}$ (rozważamy wartosci dodatnie).

Dodatkowo można też zauważyć że funkcja jest dodatnia dla całej dziedziny oraz jest to minimum tej funkcji (uznając ją za funkcje jednej zmiennej).

Obliczmy więc gradient i znajdźmy gdzie się zeruje:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 = ax_2 \\ x_2^2 = x_1x_3 \\ \vdots \\ x_n^2 = x_{n-1}b \end{bmatrix} = 0$$

łatwo zauważyć że nasze $(x_i)_{i=1\ldots n}$ tworzą ciąg geometryczny, z warunkami:

$$x_0 = a \qquad x_{n+1} = b \qquad \Rightarrow \qquad x_k = a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^k$$

oraz widzimy że jest to minimum funkcji, po sprawdzeniu minimum przy granicach (jedna z $x_i \to a$ lub b, zasadniczo wtedy minima dla pozostałych zmiennych też pozostają ciągami geometrycznymi lecz są one większe).