Topologia I

Rozwiązanie zadań z serii 1

KONRAD KACZMARCZYK

6 listopada 2024

Zadanie. Niech (X, T_X) będzie przestrzenią topologiczną. Udowodnij, że dla dowolnego $A \subset X$ zachodzi
$$\bar{A} = X \setminus \text{Int}\,(X \setminus A)$$

Pokażmy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} X \setminus \text{Int}\,(X \setminus A) &= X \setminus \{x \in X : \exists \text{ otoczenie } x \subset X \setminus A\} \\ &= \{x \in X : \forall \text{ otoczenie } x \cap A \neq \emptyset\} = \overline{A} \end{aligned}$$

Zadanie. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, 0 \geq y < 1\}$, gdzie $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych wymiernych. Znaleźć domknięcie i wnętrze zbioru A

(a) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką kolejową d_k,

(b) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka d_r,

(a) Domknięcie: Dla punktów w postaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ każde otoczenie jest w postaci odcinka otwartego na płaszczyźnie, więc zawiera taki punkt że jego współrzędna "iksowa"jest wymierna (łącznie z punktami na osi OY), w pozostałych przypadkach można znaleźć odpowienio małe otoczenie nie przecinające A, zatem

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$$

Wnętrze: Podobnie jak poprzednio zauważmy że każdy odcinek otwarty (tym razem bez odcinka na OY), zawiera punkt o współrzędnej "iksowej"niewymiernej więc żaden punkt nie będący na OY nie zawiera się we wnętrzu, a zatem pozostają nam

$$\text{Int}\, A = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1\}$$

(b) Domknięcie: W tej topologii dla punktów (x, y) gdzie $y \neq 0$ istnieje otoczenie całkowcie leżące na tej samej współrzędnej "iksowej". Logicznym wnioskiem będzie że wszystkie punkty w postaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ nie należą do domknięcia. Kolejną obserwacją będzie że wszystkie punkty w postaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ należą do domknięcia, ponieważ każde ich otoczenie zawiera zbiór otwarty czyli "romb", który zawiera przedział otwarty na osi OX, więc zawiera punkt z A, w konsekwencji te punkty są w domknięciu. Wystarczy jeszcze dołożyć oczywiste punkty z A i $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y = 1\}$, i mamy że:

$$\overline{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$$

Wnętrze: Tutaj podobnie jak poprzednio punkty $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ nie mogą należeć do wnętrza, a w pozostałych osiach równoległych do OY, leża wnętrza odcinków należących do A, czyli:

$$\text{Int } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, 0 < y < 1\}$$

Zadanie. Niech f będzie przekształceniem określonym formułą:

$$f(x, y) = (x - 1, 1)$$

Znaleźć zbiór punktów ciągłości przekształcenia f jeśli

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d_k) \to (\mathbb{R}^2, d_r)$.

(b) $f : (\mathbb{R}^2, d_r) \to (\mathbb{R}^2, d_k)$

(a) Ustalmy punkt, np: $q = (x, y)$, sprawdźmy dla niego ciągłość przekształcenia. Zacznijmy od wybrania U czyli odpowiednio małego otoczenia $f(x)$, że nie zawiera punktów z osi OX, i dla niego możemy powiedzieć że

$$\forall_{a=(x',y')} f(a) \in U \iff x' = x$$

Wiemy że dla wszystkich punktów q nie leżących na osi OY, istnieje otoczenie dla którego nie wszytkie punkty posiadają tą samą współrzędną "iksową". Kolejną rzeczą wartą uwagi jest gdy $q = 0$ to każde otoczenie zawiera otwarte "koło"którego obraz nie zawiera się w otoczeniu U. Zatem funkcja jest ciągła w punktach:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = 0\}$$

(b) Podobnie jak poprzednio możemy powiedzieć że dla dowolnego q, istnieje otoczenie U punktu $f(q)$ posiadające własność:

$$\forall_a f(a) \in U \iff x' = x$$

Teraz użyjemy faktu że dla wszystkich punktów nie leżących na osi OX, istnieje otoczenie którego wszystkie punkty mają wspólną współrzędną "iksową", a zatem należą do zbioru ciągłości przekształcenia f. Dla pozostałych punktów, ich otoczenia, przechodzą na odcinki otwarte równoległe do OX, których nie obejmuje żadne otoczenie w d_k. Zatem punktów ciągłości jest:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

Zadanie. Niech $X = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n}\right\}$ z topologią podprzestrzeni prostej euklidesowej. Podać przykład trzech niehomeomorficznych gęstych właściwych podprzestrzeni iloczynu kartezjańskiego $X \times X$.

Ustalmy więc:

$$U_1 = \{(x, y) \in X \times X : x \neq 0 \land y \neq 0\} \qquad U_2 = U_1 \cup \{(0, 0)\} \qquad U_3 = U_1 \cup \{(1, 0), (0, 1)\}$$

oczywistym jest że są one gęste (wystarczy rozważyć ich domknięcie), oraz wykażemy że są parami niehomeomorficzne.

Załużmy że przekształcenie f z U_3 do U_2 (lub U_1) jest ciągłe w punktach $(1,0)$ i $(0,1)$. Wtedy z definicji istnieją otoczenia $f(1,0)$ i $f(0,1)$, w którym zawierają się otoczenia punktów $(1,0)$ i $(0,1)$, które są co najmniej policzalnie nieskończone. W takim razie punty $(1,0)$ i $(0,1)$ nie mogą przechodzić na punkty w postaci $(\frac{1}{i}, \frac{1}{j})$ (bo możemy je otoczyć odpowiednio małą kulką taką że ich otoczenia są jednoelementowe), czyli muszą przechodzić na $(0,0)$ sprawiając że funkcja nie jest różnowartościowa (i w przypadku U_1 nie istnieje) więc nie ciągła, sprzeczność.

Analogicznie w przekształceniu f z U_2 do U_1 punkt $(0,0)$ nie może być punktem ciągłości funcji, zaprzeczając homeomorficzności przestrzeni.

Łącząc przestrzenie są nie homeomorficzne parami.