AM1.2* lato 2024

Rozwiązanie zadań z serii IV

Konrad Kaczmarczyk

18 April 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Zbadaj jednostajną zbieżność na $[0, \infty)$ ciągu funkcyjnego (f_n), gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & x \in [0, n] \\ 0 & x > n \end{cases}$$

Stosunkowo łatwo znaleźć zbieżnosć punktową naszej funkcji, mianowicie:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$

gdzie po drodze zauważylismy że dla dowolnego ustalonego x, istnieje N, że dla dowolnego $n \geq N$, $x \in [0, n]$. Udowodnimy teraz zbieżność jednostajną, mianowicie wiemy że, zachodzi:

$$\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

co wynika z nierównosci Bernoulliego

$$\left(1 - \frac{x}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \geq 1 - \frac{n+1}{n} \cdot \frac{x}{n+1} = 1 - \frac{x}{n}$$

czyli

$$f_{n+1} \geq f_n$$

korzystając teraz z pierwszego twierdzenia Diniego, mamy więc że $f_n \rightrightarrows f$, na przedziale $[0, n]$, ale dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N_1 że dla dowolnego $x > N_1$, $e^{-x} < \varepsilon$, więc widzimy że istnieje takie N_2 że dla dowolnego $x \in [0, \infty)$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, więc jest jednostajnie zbieżna.

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Niech $\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Definiujemy ciąg funkcji jako n-krotną iteracje przekształcenia ϕ:

$$f_n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \cdots \circ \phi}\, n.$$

Zbadaj zbieżność punktową i zbieżnosc jednostajną ciągu (f_n), prostej $\mathbb{R}$.

Kluczowym będzie obserwacja że:

$$f_n = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

którą udowodnimy indukcyjnie, mianowice przypadek bazowy zachodzi, a krok:

$$f_{n+1} = f_n\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+n\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

też zachodzi, więc zbieżność punktowa to:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = 0$$

a w przypadku zbieżnosci jednostajniej, wystarczy zauważyć że nasza funkcja jest nieparzysta, oraz że

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+n}} \qquad x > 0$$

jest oczywiscie rosnące, zatem funkcje f_nsą rosnace, wówczas z drugiego twierdzenia Dini'ego mamy teżę że nasz ciąg jest zbieżny jednostajnie do 0.

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Wiadomo, że (i) ciąg funkcji (f_n) zbiega jednostajne do funkcji f na zbiorze A, (ii) p jest punktem skupienia zbioru A, (iii) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją skończone granice $A_n := \lim_{x\to p} f_n(x)$. Udowodnij, że:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{x\to p} f(x)$$

Skorzytamy wielokrotnie z definicji granicy. Oznaczmy przez $P = \lim_{x\to p} f(x)$, i mamy więc że:

$$\exists_{N_1} \forall_{m \geq N_1} |f(x_m) - P| < \varepsilon$$

oraz zbieżnosci jednostajniej f_n mamy że, dowolnego x, np. $x = x_m$

$$\exists_N \forall_{n \geq N} |f_n(x_m) - f(x_m)| < \varepsilon$$

oraz z definicji A_n:

$$\exists_{N_2} \forall_{m \geq n_3} |A_n - f_n(x_m)| < \varepsilon$$

Wybierając teraz takie że $M = \max(N_1, N_2)$ i sumując stronami nierównosci mamy więc:

$$\exists_{N,M} \forall_{n \geq N, m \geq M} |A_n - P| < |A_n - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f(x_m)| + |f(x_m) - P| < 3 \cdot \varepsilon$$

Podstawiając $\varepsilon := 3 \cdot \varepsilon$ kończymy z:

$$\exists_N \forall_{n \geq N} |A_n - P| < \varepsilon$$

czyli $P = \lim_{n\to\infty} A_n$, c. k. d.

§4 Zadanie

Zadanie 4.1. Wyznacz zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ złożony z tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg:

$$s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x \sin\left(\frac{1}{1+n^2x^2}\right)$$

jest zbieżny. Czy szereg ten jest jednostajnie zbieżny na zbiorze X? Czy s jest funkcją ciągłą na zbiorze X?

Widzimy że:

$$x \sin\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right) = (-x) \cdot \sin\left(\frac{(-x)}{1+n^2(-x)^2}\right)$$

czyli nasza funcja jest parzysta, więc BSO możemy rozważać tylko przypadki gdy $x > 0$ (przypadek gdy $x = 0$, jest trywialny), zatem korzystając z nierównosci $\sin(x) \leq x$:

$$x \sin\left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right) \leq \frac{x^2}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

i teraz korzystamy z kryt. Weierstrassa, gdyż $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, więc nasza funkcja jest jednostajnie zbieżna, na $\mathbb{R}$, czyli ciągła.

§5 Zadanie

Zadanie 5.1. Niech (a_n) będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Określamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-a_n| - |a_n|}{2^n}$$

Udowodnij, że

(a) funkcja f jest wypukła

(b) wyznacz zbiór punktów, w których f jest różniczkowalna

(a) Ustalmy jako f_n funkcje,

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-a_k| - |a_k|}{2^k}$$

i zauważmy że na dowolnym przedziale A dla którego istnieje $s = sup(|x|, x \in A)$, mamy że

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x-a_k| - |a_k|}{2^k} \leq s \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = s \cdot (1 - \frac{1}{2^n})$$

zatem z kryterium Diniego mamy że f jest niemal jednostajnie zbieżny. Udowodnimy teraz że f jest ciągła, przez sprzeczność jesli f jest nieciągła, to ma punkt nieciągłosci $x \in \mathbb{R}$, zatem możemy wybrać taki zbiór $(x_n)_n$ w $\mathbb{R}$, że zawiera się on jakims $[-a, a]$, i $x_n \to x$, ale wiemy że każdym z tych punktów funkcja jest jednostajnie zbieżna, oraz wiemy że f_n są ciągłe, co jest sprzeczne z założeniem że funkcja f ma w punkcie x nieciągłość.

Aby udowodnić wypukłość pozostaje nam sprawdzić czy dla dowolnych $x < y < z$, zachodzi warunek

$$IR(x, y) \leq IR(x, z)$$

co łatwo sprawdzić wyraz po wyrazie porównując

$$\frac{|x - a_n| - |y - a_n|}{x - y} \leq \frac{|x - a_n| - |z - a_n|}{x - z}$$

co rozbiciu na przypadki

1. $a_n \leq x$
2. $z \leq a_n$
3. $x < a_n \leq y$
4. $y < a_n < z$

W pierwszych dwóch mamy że $1 \leq 1$, a w dwóch pozostałych dochodzimy do założenia, co kończy dowód wypukłosci.

(b) Skorzytajmy ponownie z f_n, weźmy dowolne $\varepsilon > 0$, i $x \notin \{(a_n)_n\}$ więc dla dowolnego n istnieje takie δ, że do zbioru $(x - \delta, x + \delta)$, nie należy żadne $a_1, \ldots a_n$, iloraz różnicowy dowolnego $h \in (-\delta, \delta)$

$$\frac{s_n(x + h) - s_n(x)}{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x + h - a_n| - |x - a_n|}{h} \cdot \frac{1}{2^i}$$

ma stałą wartosć.

Obliczmy teraz iloraz różnicowy dla funkcji f:

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| < \left| \frac{f(x + h) - f_n(x + h) - (f(x) - f_n(x))}{h} \right| + \left| \frac{f_n(x + h) - f_n(x)}{h} \right|$$

Możemy zauważyć że :

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x - a_i| - |a_i|}{2^i} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x - a_{n+i}| - |a_{n+1}|}{2^i} < \frac{|x|}{2^n}$$

zatem wracając mamy więc że :

$$\left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - \text{ const.} \right| < \frac{|x + h| + |x|}{2^n} < \varepsilon$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z dowolnosci n jaką mielismy od początku.