Analiza 2.1*

Rozwiązanie zdadania 2

Konrad Kaczmarczyk

13 October 2024

Zadanie. Niech $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ Dla danych $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiujemy:

$$F = h \cdot f \circ g$$

Zbadać istnienie granicy:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$$

gdy:

(a)

$$g = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad h = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(b)

$$g = \begin{cases} \frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad h = x$$

(c)

$$g = x - y \qquad h = \begin{cases} \frac{1}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

(a)

$$F = \frac{y}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{\frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^4}} = \begin{cases} \frac{y^3\sqrt{|x|}}{y^4+x^2} & x > 0 \\ -\frac{y^3\sqrt{|x|}}{y^4+x^2} & x < 0 \end{cases}$$

Aby udowodnić że ta funkcja nie ma granicy $(0,0)$ ustalmy że $x = y^2$ i zbadajmy istnienie granicy dla $y \to 0^-$ i $y \to 0^+$:

$$F = \frac{y^3\,|y|}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}\frac{|y|}{y}$$

i widzimy:

$$\lim_{y\to 0^-} F(y) = -1 \neq 1 = \lim_{y\to 0^+} F(y)$$

więc funkcja nie ma granicy.

(b) W tym przypadku mamy że:

$$F = x \cdot \frac{\frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

po zamianie współrzędnych na barycentryczne:

$$x = r \cdot \cos(\alpha) \qquad y = r \cdot \sin(\alpha)$$

mamy

$$F = r \cdot \cos^2(\alpha) \sin(\alpha)$$

więc granica to

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{r\to 0} F(\alpha, r) = \lim_{r\to 0} r \cdot W(\cos(x), \sin(x)) = 0$$

(c) Oznaczmy $z = x - y$, mamy wtedy że:

$$F = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{1+z^2}$$

a przy $(x,y) \to (0,0)$ jest $z \to 0$, więc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{z\to 0} F(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+z^2} = 1$$

lecz dla $z = 0$ czyli $x = y$ jest

$$F(x,x) = 0$$

więc granica nie istnieje.