Analiza 2.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr.8

Konrad Kaczmarczyk

26 listopada 2024

Zadanie.

$$SO(3) = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AA^\top = I_d, \det A = 1\}$$

Pokaż, że $SO(3)$ jest podrozmaitością gładką wymiaru 3 w $\mathbb{R}^9$.

Niech $F(A) = AA^T - I \in S_{3\times 3}$. F spełnia warunek twierdznia o funkcji odwrotnej czyli:

$$\begin{aligned} F(A+H) - F(A) &= (A+H)(A+H)^T - I - (AA^T - I) \\ &= AA^T - AA^T + HA^T + AH^T \\ &= HA^T + AH^T + HH^T \\ &= F'(A)H + HH^T \end{aligned}$$

Z warunku twierdzenia mamy że

$$\forall_{S \in S_{3\times 3}} \exists_{H \in M_{3\times 3}} HA^T + AH^T = S$$

czyli $H = \frac{1}{2}SA$. A zatem rząd macierzy przekształcenia F to 6, (warto zauważyć że warunek $\det A = 1$ wybiera tylko spójną składową wśród macierzy ortogonalnych), czyli z twierdzenia o rzędzie rozmaitość gładka $SO(3)$ jest wymiaru 3.