Topologia

Rozwiązanie zadań z serii III

Konrad Kaczmarczyk

14 stycznia 2025

Zadanie. Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych, zaś

$$T = \{\emptyset, X\} \cup \{\{1, 2, \ldots, k\}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

a) Udowodnij, że rodzina T jest topologią na X.

b) Czy istnieje ciągłe przekształcenie prostej euklidesowej na (X, T)?

c) Czy istnieje ciągłe przekształcenie odcinka $[0, 1]$ na (X, T)?

W punktach b i c odpowiedzi uzasadnij podając przykład takiego przekształcenia i dowodząc, że jest ciągłe lub udowadniając, że nie istnieje.

a) Zgodnie z definicją sprawdzamy:

$$\varnothing, \mathbb{N} \in \mathcal{T}$$

i

$$\{1, \ldots, k\} \cup \{1, \ldots, l\} = \{1, \ldots, \max(l, k)\}$$
$$\{1, \ldots, k\} \cap \{1, \ldots, l\} = \{1, \ldots, \min(l, k)\}$$

wiec analogicznie przecięcie i iloczyn skończenie wielu zbiorów otwartych jest otwarty.

b) Tak, istnieje takie przekształcenie, np:

$$f(x) = \lfloor |x| \rfloor$$

Zgodnie z definicją sprawdzamy:
Dla każdego otwartego $U \in \mathcal{T}$ (czyli $\{1, \ldots, k\}$), mamy że $f^{-1}(U) = (-k-1, k+1)$ czyli jest otwarty.

c) Nie, nie istnieje taka funkcja, dowiedzmy to przez sprzeczność. Zakładamy że istnieje taka funkcja f. Oznaczmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki że $f(x_n) = n$. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa mamy że posiada on ciąg zbieżny powiedzmy więc że

$$f(x_n) = y_n \in X$$

skoro x_n jest zbieżny to ma granice x, i powiedzmy że $f(x) = y$, ale tu widzimy sprzeczność bo w takim razie każde otoczenie y zawiera rosnący nieskończony ciąg liczb naturalnych, a takie nie istnieje.

Zadanie. Czy przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest przestrzenią zwartą? Odpowiedź uzasadnij.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}$$

Oznaczmy $f : \mathbb{R} \to S^1$ jako $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$, oczywiste jest że

$$f(x) = f(y) \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Oznaczmy również jako $K = [0, 1]$, mamy $\pi(K) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, i korzystając z uwagi 5.1.1 B ze skryptu mamy że $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$. Skoro okrąg jest przestrzenią zwartą to mamy że nasza przestrzeń ilorazowa też.

Zadanie. Niech X będzie podprzestrzenią płaszczyzny euklidesowej opisaną wzorem:

$$X = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 0] \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, a_n] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right),$$

gdzie $a_n > 0$.

a) Wykazać, że dla $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, przestrzeń X jest spójna, ale nie jest zwarta.

b) Czy istnieje ciąg liczb dodatnich a_n taki, że X jest jednocześnie spójna i zwarta? Odpowiedź uzasadnij.

a) Przestrzeń nie jest zwarta: Niech $Y = X \cap (x, y) : y = 1 - \frac{3}{2}x, x > 0, y > 0$, układając w ciąg punkty są zbieżne ale nie do punktu należącego do X. Przestrzeń jest spójna: Oczywistym jest że:

$$X' = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [0, a_n] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right)$$

jest spójny, czyli zakładając że zbiór nie jest spójny, jeden A_1 zawiera X' oraz część pozostałych "odcinków", a drugi A_2 pozostałe odcinki czyli:

$$\overline{A}_1 \cap A_2 \neq \varnothing$$

czyli zbiór X jest spójny.

b) Nie, nie istnieje taki ciąg liczb. Skoro przestrzeń jest spójna to dla $A_1 = \{1 \times [0, -1]\}$, mamy:

$$A_1 \cap \overline{X \setminus A_1} \neq \varnothing$$

Więc istnieje ciąg zbieżny (x_n) do $(1, 0)$. Mamy z tego $a_n \to 1$. Z tego wynika sprzeczność podobnie jak w a, przecinamy go z prostą równoległą do OY, i otrzymujemy ciąg przeczący zbieżności.

Zadanie. Czy istnieje spójna przestrzeń metryczna X, taka że $|X| < \infty$. Odpowiedź uzasadnij.

Widać że przestezeń jednoelementowa jasno przeczy treści, załużmy że $|X| > 1$.
Jeśli X byłaby skończenie elementowa to dowolne dwa z nich możemy rozdzielić kulami, a potem wziąść minium po ich promieniach dla wszystkich otrzymując spójne składowe, czyli przestrzeń nie jest spójna.