Anaiza II.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr. 10

Konrad Kaczmarczyk

17 grudnia 2024

Zadanie. Elipsą na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ nazywamy:

$$E = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Z punktu $(x, y) \in E$ wypuszczany normalną N. Jaka jest największa odległość N od $(0, 0)$?

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, będzie funkcją dla której elipsa E jest poziomicą. Z poprzednich zadań domowych wiemy że funkcje f możemy zapisać jako $f(x, y) = g(b^2x^2 + a^2x^2)$, w szczególności $f = b^2x^2 + a^2y^2$. Oznaczmy punkt wypuszczenia normalnej (x_0, y_0), i mamy że normalna $N \perp E \perp (\nabla f)(x_0, y_0)$ czyli (korzystając z faktu że znajdujemy się w $\mathbb{R}^2$) $N \parallel (\nabla f)(x_0, y_0)$. Łącząc jest $N = \alpha \left(\nabla f\right)(x_0, y_0) + (x_0, y_0)$, przy $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\nabla f)(x_0)\alpha + (x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 2b^2x_0 \\ 2a^2y_0 \end{bmatrix} \alpha + (x_0, y_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2(a^2 - b^2)x_0y_0 = 2a^2y_0x - 2b^2x_0y \right\}$$

upraszczając, mamy:

$$N = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 - b^2 = a^2 \frac{x}{x_0} + b^2 \frac{y}{y_0} \right\}$$

czyli z wzoru na odległość punktu od prostej mamy że odległość to

$$\frac{\left|a^2 - b^2\right|}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{y_0}\right)^2}}$$

pozostało nam zadanie optymalizacyjne, skoro $\left|a^2 - b^2\right|$ jest stałą, to odległość jest największa gdy wyrażenie w mianowniku jest najmniejsze (pierwiastek jest funcją rosnącą więc też można go pominąć), oznaczając $\frac{x^2}{a^2} \to x$, i $\frac{y^2}{b^2} \to y$, mamy:

$$V = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \qquad G = x + y - 1 = 0$$

poszukujemy więc mininum funkcji V, przy warunku $G = 0$. Korzysytając z mnożników lagrange'a mamy:

$$-\frac{a^2}{x^2} + \lambda = 0$$

$$-\frac{b^2}{y^2} + \lambda = 0$$
$$x + y = 1$$

po podstawieniu mamy że $\min V = (a+b)^2$ (wiemy że jest to minimum chociażby ze struktury V), i powracając do odległości punktu mamy że:

$$\min d(N, (0,0)) = \frac{|a^2 - b^2|}{|a+b|} = |a - b|$$