Analiza I.2* lato 2024

Rozwiązanie zadań z serii VI

Konrad Kaczmarczyk

28 May 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Udowodnij, że istnieje ciąg (f_n) funkcji schodkowych taki, że dla dowolnej funkcji ϕ całkowalnej w sensie Riemanna zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi(x) f_n(x) dx = \int_a^b \phi(x) f(x) dx$$

Rozwiązanie rozpocznijmy od uzasadnienia że $f \cdot \phi$ jest R-całkowalna, który wynika z faktu że jesli g jest R-całkowalne to g^2 też jest (funkcja g więc g^2 jest ograniczone przez np. M a $g^2(x) - g^2(y) = (g(x) + g(y))(g(x) - g(y)) < 2M(g(x) - g(y)))$ i że $f \cdot \phi = \frac{1}{2}\left((f + \phi)^2 - f^2 - \phi^2\right)$.

Teraz możemy zapisać że

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} f_n(x)\phi(x)dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \phi(\xi_k) \int_{a+\frac{b-a}{n}(k-1)}^{a+\frac{b-a}{n}k} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \phi(\xi_k) f_n(\xi_k) \frac{b-a}{n} =$$

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx$$

gdzie po drodze skorzytalismy z całkowego tw. o wartosci sredniej, oraz ustalilismy takie f_n, żeby było stałe na przedziałach, $[a + \frac{a-b}{n}(k - 1), a + \frac{b-a}{n}k)$ i równe wartosci f, na początku przedziału.

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\text{tg}(\frac{1}{n})}{2+\sqrt{\frac{k}{n}}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k+n]{k}}{e^{\sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{k}}}$

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{\text{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{2+\sqrt{\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{tg}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2+\sqrt{\frac{k}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2+\sqrt{\frac{k}{n}}} =$$
$$\int_1^2 \frac{1}{2+\sqrt{x}} dx = 2\left(\sqrt{2} - 1 + 2\ln(3) - 2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$$

(b) Z logarytmujmy naszą granicę i mamy

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n} \sqrt[k+n]{k}}{e^{\sum_{k=n}^{2n} \frac{n}{k}}}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k) - n}{k+n} - 1 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n} - 1}{\frac{k}{n} + 1} \leq$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) = -\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4} = -\infty$$

więc logarytm zbiega to minus nieskończonosci, zatem cała suma zbiega do $e^{-\infty} = 0$.

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Zadanie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są ciągłe, a ponadto g jest funkcją okresową o okresie 1. Udowodnij równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)g(nx)dx = \begin{bmatrix} nx & = & u \\ dx & = & \frac{1}{n}du \\ x & = & \frac{u}{n} \end{bmatrix} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^{nx} f(\frac{u}{n})g(u)du =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(\frac{u}{n})g(u)du =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f(\frac{u}{n} + \frac{k}{n})g(u)du =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{u}{n} + \frac{k}{n})g(u)du$$

Z zajęć wiemy że dla każdego $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}) \rightrightarrows \int_0^1 f(x+w)dw$$

oraz zbieżnosć wynikającą z ograniczonosci f :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{u}{n}+w)dw = \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{u}{n}}^{1+\frac{u}{n}} f(w)dw \to \int_0^1 f(w)dw$$

zatem z faktu że g jest równierz ograniczona mamy że

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{u}{n}+\frac{k}{n})g(u) \rightrightarrows \int_0^1 f(x)dx\cdot g(u)$$

z z przejscia granicznego mamy tezę

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{u}{n}+\frac{k}{n})g(u)du = \int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 g(x)dx$$

§4 Zadanie

Zadanie 4.1. Udowodnij, że

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}dx < 9.0001$$

Z całki funkcji odwrotnej wiemy że

$$\int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1} = 3\sqrt[4]{3^4-1} - \int_0^{\sqrt[4]{3^4-1}} \sqrt[4]{x^4+1}dx$$

więc możemy rozpisać

$$\int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}dx = 3\sqrt[4]{3^4-1} + \int_{\sqrt[4]{3^4-1}}^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx$$

z wypukłosci funkcji $\sqrt[4]{x^4+1}$ możemy zapisać zapisać że jest mniejsza od funkcji linowej przecinającej w dwóch miejscach

$$3\sqrt[4]{3^4-1} + \int_{\sqrt[4]{3^4-1}}^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx < 3\sqrt[4]{3^4-1} + \frac{1}{2}\left(3+\sqrt[4]{3^4+1}\right)\cdot\left(3-\sqrt[4]{3^4-1}\right) =$$
$$9+\frac{1}{2}(3-\sqrt[4]{3^4-1})(\sqrt[4]{3^4+1}-3)$$

i po dodatowych kalkulacjach możemy zauważyć że dodatowy czynnik jest równy ≈ 0.0000428688808 czyli jest mniejszy niż 0.0001.

Z drugiej strony funkcja jest większa od funkcji stałej przecinającej na początku przedziału

$$3\sqrt[4]{3^4-1} + \int_{\sqrt[4]{3^4-1}}^3 \sqrt[4]{x^4+1}dx > 3\sqrt[4]{3^4-1} + 3\left(3-\sqrt[4]{3^4-1}\right) = 9$$

§5 Zadanie

Zadanie 5.1. Udowodnij że

$$\int_0^1 \frac{x}{\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)} dx = \ln(2)$$

Po podstawieniu $1 - x = u$ mamy że nasza całka to

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$$

skorzystamy z Twierdzenia Leibniza o różniczkowaniu pod znakiem całki, i okreslimy

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)} dx$$

widzimy że warunki są spełnione oraz

$$I'(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)} = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1}$$

a także znamy wartosć w punkcie $\alpha = 0$, gdyż jest to zero. Zatem możemy podsumować że

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = I(1) = I(1) - I(0) = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+1} d\alpha = \ln(2)$$