Analiza II.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr.5

Konrad Kaczmarczyk

5 November 2024

Zadanie. Niech $U = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, z przekształceniem $f : U \to \mathbb{R}$ różniczkowalnym i spełniającym:

$$x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 7y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

Pokazać, że istnieje $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ różniczkowalne, i takie że

$$f(x,y) = g(x^7 y)$$

Rozwiązanie rozpoczniemy od podstawienia nowych zmiennych $x = e^u$, $y = e^w$, i $\partial x = x\,\partial u$ i $\partial y = y\,\partial w$:

$$x\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 7y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial u}f(e^u,e^w) = 7\frac{\partial}{\partial w}f(e^u,e^w)$$

nazwijmy funkcją h funkcje $h := f(e^u, e^w)$, i mamy że

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}h(u,w) - 7\frac{\partial}{\partial w}h(u,w) = (\nabla h)\begin{bmatrix}1 & -7\end{bmatrix}$$

Z czego wynika że jesli:

$$h(u_0,w_0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall_\alpha\ h((u_0,w_0) + \alpha(1,-7)) = c$$

czyli poziomice to proste $7x + y = k$, więc funkcje h możęmy zapisać w postaci $h(u,w) = k(7u + w)$, i wracając do funkcji f mamy:

$$f(x,y) = h\left(\ln(x), \ln(y)\right) = k\left(7\ln(x) + \ln(y)\right) = k\left(\ln\left(x^7 y\right)\right) = g(x^7 y)$$