JAiO lato 2024

Rozwiązania zadań z serii II

Konrad Kaczmarczyk

7 May 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Dla języka $L \in \Sigma^*$ definiujemy:

$$\sqrt{L} := \{w \in \Sigma \; ww \in L\}$$

(a) Czy język L jest bezkontekstowy, to język $\sqrt{L}$ jest bezkontekstowy?

(b) Czy jesli język $\sqrt{L}$ jest bezkontekstowy, to język L jest bezkontekstowy?

(c) Czy odpowiedzi zmieniają się, gdy ograniczymy się do alfabetów dwu- lub jednoliterowych?

(a) Nie, weźmy za przykład $L = a^n b^n a^* b^m a^m$ (który jest bezkontekstowy jako konkatenacja języków $a^n b^n$, a^*, $b^m a^m$ które są oczywiscie bezkontekstowe), dla którego język $\sqrt{L}$ to

$$\sqrt{L} = a^n b^n a^n$$

który już bezkontekstowy nie jest (z lematu o pompowaniu dla języków bezkontekstowych).

(b) Nie, weźmy za przykład $L = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$ (który oczywiscie nie jest bezkontekstowy), ale za to

$$\sqrt{L} = \{\varepsilon, a\}$$

jest bezkontekstowy, co zaprzecza.

(c) Widzimy że dla ograniczając się do automatów jedno- i dwuliterowych teza w podpunkcie (b) pozostaje taka sama, oraz że dla dwuliterowych w podpunkcie (a) też. Pozostaje zatem pokazać że dla jednoliterowych teza pierwszego się zmieni.

Zatem, korzystając z tw. Parikh'a mamy i że nasz alfabet jest jednoliterowy mamy że dowolny język bezkontekstowy L jest regularny, ale wtedy język $\sqrt{L}$ też jest regularny (fakt ten pojawił się na ćwiczeniach `https://www.mimuw.edu.pl/~lk406698/teaching/JAiO2024/tutorial3.pdf`), a więc bezkontekstowy, co kończy dowód.