Analiza II.2*

Rozwiązanie zadań z serii nr. 2

Konrad Kaczmarczyk

11 kwietnia 2025

Zadanie. Niech $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $p, q, r > 1$.
Wykazać że:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Rozpoczniemy od szacowania na $|(f * g)(x)|$:

$$|(f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1+\frac{p}{r}-\frac{p}{r}} \cdot |g(y)|^{1+\frac{q}{r}-\frac{q}{r}}\, dy =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-y)|^p \cdot |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{r}} \cdot |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \cdot |g(y)|^{\frac{r-q}{r}}\, dy$$

zauważmy teraz że:

$$\frac{1}{\frac{rp}{r-p}} + \frac{1}{\frac{rq}{r-q}} + \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

więc skorzystamy z uogólnionej nierówności Hölder'a dla tych właśnie wag:

$$\leq \left\| \left(f(x-y)^p \cdot g(y)^q\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_r \cdot \left\| |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{rp}{r-p}} \cdot \left\| |f(y)|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{rq}{r-q}}$$

rozpiszmy każdy z tych czynników osobno:

$$\left\| \left(f(x-y)^p \cdot g(y)^q\right)^{\frac{1}{r}} \right\|_r = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\, |g(y)|^q\, dy\right)^{\frac{1}{r}}$$
$$\left\| |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{rp}{r-p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}\cdot\frac{pr}{r-p}}\right)^{\frac{r-p}{pr}} = \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}}$$
$$\left\| |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{rq}{r-q}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^{\frac{r-q}{r}\cdot\frac{qr}{r-q}}\right)^{\frac{r-q}{qr}} = \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}}$$

zatem mamy że:

$$|(f * g)(x)| \leq \left(\|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\, |g(y)|^q\right)^{\frac{1}{r}}$$

napiszmy w końcu że:

$$\|f * g\|_r^r = \left(\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|^r\right) \leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p\, |g(y)|^q\, dy\, dr$$

skorzystajmy teraz z tw. Fubini'ego dla ostatniej całki:

$$\leq \|f\|_r^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p \, dy$$
$$= \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \|f\|_p^p \cdot \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$$

co po spierwiastkowaniu daje tezę.

Zadanie. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x)$$

Skorzystajmy z rozwinięcia Taylor'a dla $n = 1$ i mamy:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\xi) \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x) + \frac{x}{2}\varphi''(\xi)$$

zatem teraz nasza całka z zadania:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \cdot \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(0) + \frac{x}{2}\varphi''(\xi)\right) dl_1(x) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{\varphi(0)}{x} dl_1(x) +$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \varphi'(0) dl_1(x) +$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{x}{2}\varphi''(\xi) dl_1(x)$$

rozważmy każdą z powyższych całek:

1. Pierwsza to całka z funkcji nieparzystej zatem jest równa 0.
2. Druga to całka z funkcja z funkcji e^{-x^2} z odpowiednim skalowaniem zatem jej wartość to $f'(0)$.
3. Trzecią całkę możemy oszacować:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{x}{2}\varphi''(\xi) dl_1(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \left|\frac{x}{2}\varphi''(\xi)\right| dl_1(x) \leq$$
$$2M \cdot \int_0^\infty \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{x}{2} = 2M \cdot \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2n^2} \to 0$$

zatem w granicy mamy że:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-n^2x^2\right) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) =$$
$$0 + f'(0) + 0 = f'(0)$$

Zadanie. Wykazać, że:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(k) = A\chi_{[-B,B]}(k)$$

Zastosujmy twierdzenie o inwersji Fouriera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} A\chi_{[-B,B]} \cdot e^{ixk} dk = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{[-B,B]} \cos(xk) + i\sin(xk)\, dk =$$

skorzystamy z faktu że sin jest funkcją nieparzystą a cos jest parzystą więc:

$$= A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^B \cos(xk)\, dk$$

zastosujmy teraz podstawienie $a = xk$:

$$= A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \int_0^{xB} \cos a\; da = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(xB)}{x}$$

zatem porównując mamy że współczynniki A, B to odpowiednio:

$$\begin{cases} A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ B = 1 \end{cases}$$

Zadanie. Definujemy:

$$S := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall_{k,l} \sup_{\mathbb{R}} \left| x^k f^{(l)}(x) \right| < +\infty \right\}$$

(a) Wykazać, że dla dowolnego $\varphi \in S$ istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x)$$

(b) Wykazać, że:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \cdot (\mathcal{F}\varphi)(x)\, dl_1(x) = C \cdot \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x) \cdot \varphi(x)\, dl_1(x)$$

Znaleźć stałą C.

Uwaga-wniosek: "$F\left(\frac{1}{x}\right) = C \cdot \operatorname{sgn}(k)$"

(a) Rozpiszmy:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) =$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) + \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x)$$

Obliczmy pierwszą całkę:

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} x \cdot \varphi(x) \cdot \frac{1}{x^2} dl_1(x) \leq$$
$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]} (|x \cdot \varphi(x)|) \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \left| \frac{1}{x^2} \right| dl_1(x) \leq M \cdot (0 - (-1) + 1 - 0) = 2M$$

Przy drugiej całce skorzystamy z obserwacji:

$$\int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(0)}{x} dl_1(x) = \varphi(0) \cdot \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} dl_1(x) = 0$$

zatem:

$$\int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} dl_1(x)$$

oznaczmy przez $g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$, i zauważmy że:

$$g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \to^{x \to 0} \varphi'(0)$$

czyli definiując $g(0) = \varphi'(0)$ mamy że $g(x) \in C(\mathbb{R})$ (co oczywiście wynika z faktu że $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$)

Teraz zostało powiedzieć że całka z funkcji ciągłej na przedziale zwartym jest ograniczona, czyli niezależnie od ε mamy:

$$\int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} g(x) dl_1(x)$$

$$\leq \int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} |g(x)|\, dl_1(x) = \int_{[-1,1]} |g(x)|\, dl_1(x) = N$$

więc nasza granica:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) \leq 2M + N$$

(b) Ponownie rozpiszmy:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{1}{x} \cdot (\mathcal{F}\varphi)(x)\, dl_1(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x)}{x}\, dl_1(x)$$

zauważmy że:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{-ikx}\, dl_1(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) e^{-ikx}\, dl_1(k) = \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(-kx)\, dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx)\, dl_1(k) \\
-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) \cos(kx)\, dl_1(k) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) \sin(kx)\, dl_1(k) \\
= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(kx)\, dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx)\, dl_1(k) \\
-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(kx)\, dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx)\, dl_1(k) \\
= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx)\, dl_1(k)
\end{aligned}$$

skorzystajmy teraz z tw. Fubiniego:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x)}{x}\, dl_1(x) = \\
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sin(-kx)\, dl_1(k)\, dl_1(x) = \\
-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(kx)\, dl_1(x) dl_1(k)
\end{aligned}$$

Obliczmy wewnętrzną całkę korzystając z faktu, że bezproblemowo możemy zabrać granicę pod całkę (z twierdzenia o Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej bo φ należy do S):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} dx = \operatorname{sgn}(k) \int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(k)$$

Kończąc zapisujemy zatem że:

$$\begin{aligned}
-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(kx)\, dl_1(x)\, dl_1(k) = \\
-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \operatorname{sgn}(k)\, dl_1(k) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \operatorname{sgn}(k)\, dl_1(k)
\end{aligned}$$