Topologia I

Rozwiązanie zadania domowego nr. 4

Konrad Kaczmarczyk

16 stycznia 2025

Zadanie. Prozpatrujemy $\mathbb{R}^2$ z metryką rzeka. Niech:

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq, 0 \leq y \leq\right\}$$

1. Czy X jest przestrzenią spójną? Odpowiedź uzasadnij.
2. Czy X jest przestrzenią zwartą? Odpowiedź uzasadnij.
3. Czy X jest przestrzenią zupełną? Odpowiedź uzasadnij.

1. Tak, przestrzeń jest spójna, a nawet łukowo spójna (oczywstą drogą miedzy punktami jest przejście do rzeki i zniej dostanie się do dowolnego punktu).
2. Nie, przestrzeń nie jest zwarta. Weźmy punkty których współrzędna "igrekowa"jest równa dla przykładu $\frac{1}{2}$, możemy wybrać na nich dowolny ciąg, i on (pod warunkiem że punkty się nie powtarzają) jest niezbieżny w tej przestrzeni.
3. Tak, przestrzeń X jest zupełna. Udowodnijmy że $\left(\mathbb{R}^2, d_r\right)$ jest zupełna: Weźmy dowolny ciąg Cauchy'ego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, czyli $a_n = (x_n, y_n)$. Z definicji metryki kolejowej mamy że:

   $$|x_n - x_k| \leq d_r(a_n, a_k) \qquad |y_n - y_k| \leq d_r(a_n, a_k)$$

   czyli spełniają warunek Cauchy'ego na prostej. Mamy więc $x_n \to x$ i $y_n \to y$. Wystarczy pokazać: $a_n \to (x, y)$.

   (a) Jeśli $y \neq 0$ to dla dostatecznie dużego N punkty leżą na tej samej prostopadłej do rzeki czyli od pewnego momentu mamy $x_n = x$ i $d_r = d_e$ więc zbieganie jest jak na prostej czyli $a_n \to (x, y)$

   (b) Jeśli $y = 0$ to dowolnym rombie wokół (x, y) leża prawie wszystkie wyrazy a_n, gdyż prawie wszystkie leża w dowolnych odcinkach wokół x i y, więc możemy wziąć takie dla których współędna "igrekowa"lub "iksowa"są stałe.

   co dowodzi że $(\mathbb{R}^2, d_r)$ jest przestrzenią zupełną, a obcięcie jej do X której jest domknięte, ciągle jest zupełne.

Zadanie. Dla dowolnej liczby rzeeczywistej a niech $X(a) = \{f \in C[0,1] : f(0) = a\}$.

(a) Udowodnij, że $X(a)$ jest zbiorem domkniętym i brzegowym w przestrzeni metrycznej $(C[0,1].d_{sup})$.

(b) Niech $X = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} X(q)$. Czy przestrzeń X przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ jest metryzowalna w sposób zupełny?