Analiza 2.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr.3

Konrad Kaczmarczyk

21 October 2024

Zadanie. Rozważmy funkcje
$$f(x,y) = \frac{(e^{x+y}-1)\sin(x-y)}{x^2-y^2}$$
dla $|x| \neq |y|$

(a) Pokazać, że f można przedłużyć do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}^2$.

(b) Czy to przedłużenie jest różniczkowalne?

(a) Przeprowadźmy zamianę zmiennych na:
$$\begin{cases} s = x - y \\ t = x + y \end{cases}$$
wtedy nasza funkcja to
$$f(s,t) = \frac{e^t - 1}{t} \cdot \frac{\sin(s)}{s}$$
widać że problematycznymi punktami naszej funkcji są $s = 0$ i $t = 0$, lecz znane są granice:
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1 \qquad \lim_{s\to 0} \frac{\sin(s)}{s} = 1$$
więc wystarczy dodefiniować:
$$f(s,t) = \begin{cases} \frac{e^t-1}{t} \cdot \frac{\sin(s)}{s} & x \neq 0 \land y \neq 0 \\ \frac{e^t-1}{t} = f_1(t) & s = 0 \land t \neq 0 \\ \frac{\sin(s)}{s} = f_2(s) & t = 0 \land s \neq 0 \\ 1 & s = 0 \land t = 0 \end{cases}$$
i nasza funkcja jest ciągła, ponieważ jest iloczynem funkcji ciągłych.

(b) Używając poprzednich oznaczeń, obliczmy dwie pochodne:
$$f_1'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} \qquad f_2'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' = \frac{x\cdot\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$
których granice w zerze to odpowiednio (używając wzorów Taylora):
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^2} = 0$$

obliczmy teraz $f_1'(0)$ i $f_2'(0)$:

$$f_1'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$f_2'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$$

korzystając ze wzoru Taylora, a zatem pochodne zdefiniowanych przez nas funkcji są ciągłe.

Teraz wracając do naszej funkcji wyjsciowej f mamy że jej pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f_1(t)\frac{df_2}{ds} = f_1(t)\cdot f_2'(s) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = f_2(s)\frac{df_1}{dt} = f_2(s)\cdot f_1'(t)$$

są iloczynami funkcji ciągłych więc są ciągłe, a zatem cała funkcja jest różniczkowalna w każdym punkcie.