Rachunek prawdopodobieństwa I*

Rozwiazanie zadania domowego nr. 2

Konrad Kaczmarczyk

4 kwietnia 2025

§1 Zadanie

§2 Zadanie

Zadanie. Niech $A_1, A_2, \ldots$ będą zdarzeniami. Załóżmy, że $\sum_k \mathbf{P}(A_k) = \infty$. Wykaż, że jeśli

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)\right)^2}{\sum_{1\le j,k\le n} \mathbf{P}(A_j \cap A_k)} = \alpha > 0,$$

wówczas $\mathbf{P}(\limsup A_n) \ge \alpha$, gdzie $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_n \bigcup_{m\ge n} A_m$.

Rozwiązanie zacznijmy od lematu, wynikającego z tw. Jensen'a:

Lemat 2.1

Niech $Z \ge 0$ będzie zmienną losową, wówczas:

$$(\mathbb{E}Z)^2 \le \mathbb{P}(Z \ge 0) \cdot \mathbb{E}Z^2$$

Dowód:

Skorzystajmy z wzoru na warunkową wartość oczekiwaną dla Z i Z^2:

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{P}(Z > 0) \cdot \mathbb{E}\left[Z \mid Z > 0\right]$$
$$\mathbb{E}Z^2 = \mathbb{P}(Z^2 > 0) \cdot \mathbb{E}\left[Z^2 \mid Z > 0\right]$$

zauważmy że $\mathbb{P}(Z^2 > 0) = \mathbb{P}(Z > 0)$, skorzystajmy więc z tw. Jensen'a:

$$\left(\frac{\mathbb{E}[Z]}{\mathbb{P}(Z>0)}\right)^2 = \left(\mathbb{E}\left[Z \mid Z > 0\right]\right)^2 \overset{\text{Jensen}}{\ge} \mathbb{E}\left[Z^2 \mid Z > 0\right] = \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{P}(Z^2>0)} = \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{\mathbb{P}(Z>0)}$$

co po wymnożeniu daje tezę lematu.

Udowodnijmy teraz więc drugi lemat, który pozwoli rozwiązać zadanie:

Lemat 2.2

Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą zdarzeniami, wówczas zachodzi:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k)\right)^2}{\sum_{1\le j,k\le n} \mathbf{P}(A_j \cap A_k)}$$

Dowód:
Ustalmy zmienne losowe:

$$X_k = \chi_{A_k}$$

i korzystając z Lemat 2.1 mamy że:

$$\left(\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right)^2 \leq \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > 0\right) \cdot \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right]$$

korzystając z faktu że:

$$X_k \cdot X_l = \chi_{A_k} \cdot \chi_{A_l} = \chi_{A_k \cap A_l}$$

możemy interpretować powyższą nierówność jako:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)^2 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cdot \sum_{l,k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \cap A_l\right)$$

co po przekształceniu dowodzi lematu.
Korzystając z powyższego lematu możemy popełnić dwie obserwacje
Pierwszą, oznaczając:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \qquad t_n = \sum_{k,l=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k \cap A_l\right)$$

z tezy zadania wiemy że $s_n \to \infty$ czyli:

$$1 \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{s_n^2}{t_n} \Rightarrow t_n \to \infty$$

Drugą, szacując:

$$\sum_{l,k=m+1}^{n} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) =$$

$$\sum_{l,k=1}^{n} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{\substack{1 \leq l \leq m \\ m+1 \leq k \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ m+1 \leq l \leq n}} \mathbb{P}(A_l \cap A_k) - \sum_{l,k=1}^{m} \mathbb{P}(A_l \cap A_k)$$

$$\leq t_n - t_m$$

i korzystając z Lemat 2.2 mamy:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{n} A_k\right) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sum_{k=m}^{n} \mathbb{P}(A_k)\right)^2}{\sum_{m \leq j,k \leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(s_n - s_m)^2}{\sum_{l,k=m+1}^{n} \mathbb{P}(A_l \cap A_k)} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{(s_n - s_m)^2}{t_n - t_m} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{t_n - t_m} \cdot \left(\frac{s_n^2}{t_n} + 2\frac{s_n s_m}{t_n} + \frac{s_m^2}{t_n}\right)$$

korzystając zatem z obserwacji (czyli $s_n \to \infty, t_n \to \infty$) oraz warunku zadania (czyli $\frac{s_n^2}{t_n} \to \alpha$), mamy:

$$= 1 \cdot (\alpha + 0 + 0) = \alpha$$

czyli łącząc:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \geq \alpha$$

dla dowolnego m, a wiemy że przy granicy $m \to \infty$:

$$\alpha \leq \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_{k} A_k\right)$$

co kończy dowód.