Analiza I.2*

Rozwiązanie zadań z serii III

Konrad Kaczmarczyk

4 April 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Oblicz granicę:

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3-\frac{1}{2}n^2}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6}+\cos\left(\sinh\left(x\right)\right)-\sqrt[3]{1-x^2}}{\cosh\left(\sin\left(x\right)\right)-e^{\frac{1}{2}x^2}}$$

(a) Po zlogarytmowaniu mamy granicę:

$$\lim_{n\to\infty} n^4\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\left(n^3+\frac{1}{2}n^2\right)\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

skorzystamy teraz z rozwinięcia logarytmu w szereg taylora do stopnia drugiego, trzeciego, i mamy:

$$\lim_{n\to\infty} n^4\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right)+\left(n^3+\frac{1}{2}n^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2n}+o(1)=-\infty$$

Zatem nasza granica to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^3-\frac{1}{2}n^2}\text{''}=\text{''}e^{-\infty}=0$$

(b) Rozwijając funkcje w szeregi Taylora wszystkie funkcje mamy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6}+\cos\left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{\cosh\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)\right)-1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}=\frac{\frac{x}{6}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}$$

Widzimy że granica z lewej jest różna od prawej, więc nie istnieje

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Wyznaczyć wszystkie wartości parametru $p \in [0,1]$ takie, że nierówność

$$(\operatorname{tg}(x))^p (\sin(x))^{1-p} > x$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Przekształćmy tezę do postaci

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{p}} - \cos(x) > 0$$

i rozwińmy w szereg Taylora:

$$L = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6p}\right) x^2 + ...$$

zauważmy że przy $x \to 0$, najwolniej maleje wyraz z x^2, więc musi on być nieujemny więc:

$$p \geq \frac{1}{3}$$

Możemy jeszcze napisać ciąg nierównosci dla $p = \frac{1}{3}$ i $x \leq 3$:

$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 \geq \left(1 - \frac{1}{6}x^2\right)^3 \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{216}x^6 \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \geq \cos(x)$$

Teraz wystarczy zauważyć że pochodna:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{p}} - \cos(x) = -\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\frac{\sqrt[p]{\frac{\sin(x)}{x}}}{p^2} > 0$$

jest dodatnia, zatem z lematu o biegaczach, nierówność w zadaniu jest spełniona dla $p \in [\frac{1}{3}, 1]$.

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Funkcja f jest 2-krotnie różniczkowalna na $[a,b]$, $f(a) = f(b) = 0$, a ponadto istnieje M , że $|f''(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{(b-a)^2}$ dla każdego $x \in [a,b]$. Udowodnij, że $|f'(x)| \leq \frac{M}{b-a}$ dla każdego $x \in [a,b]$.

Rozwińmy w Taylora naszą funkcje wokół $x \in [a,b]$:

$$0 = f(a) = f(x + (a-x)) = f(x) + f'(x) \cdot (a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1) \cdot (a-x)^2$$
$$0 = f(b) = f(x + (b-x)) = f(x) + f'(x) \cdot (b-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2) \cdot (b-x)^2$$

Odejmując równania stronami

$$0 = f'(x) \cdot (a-b) + \frac{1}{2}\left(f''(\xi_1) \cdot (a-x)^2 - f''(\xi_2) \cdot (b-x)^2\right)$$

po przekształceniu:

$$f'(x) = \frac{1}{2(b-a)} \left(f''(\xi_1) \cdot (a-x)^2 - f''(\xi_2) \cdot (b-x)^2 \right)$$

korzystając z nierównosci trójkąta:

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2(b-a)} \left(|f''(\xi_1) \cdot (a-x)^2| + |f''(\xi_2) \cdot (b-x)^2| \right) \leq \frac{M}{4(b-a)^3} \left((a-x)^2 + (b-x)^2 \right)$$

i w szczególnie dla $x = \frac{b+a}{2}$ mamy :

$$|f'(x)| \leq \frac{M}{8(b-a)} \leq \frac{M}{(b-a)}$$

więc otrzymalismy tezę nawet z lepszą stałą.

§4 Zadanie

Zadanie 4.1. Podaj przykład funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ takiej, że $f(x) = 0$ dla $x \leq 0$ i $f(x) = 1$ dla $x \geq 1$.

Z przykładu 6.86 z skryptu prof. Strzeleckiego, mamy że funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

jest gładka. Rozpatrując teraz funkcje:

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}$$

która jest złożeniem funkcji gładkich, czyli jest gładka bo $f(x) + f(1-x) > 0$, i :

$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} = \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \qquad x \geq 1$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} = \frac{0}{f(1-x)} = 0 \qquad x \leq 0$$

§5 Zadanie

Zadanie 5.1. Funkcja f jest klasy C^∞ i $f(\frac{1}{n}) = \frac{n^2}{n^2+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oblicz $f(0)$ i $f(k)^{(k)} = 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Obliczmy bezposrednio $f(0)$ i $f'(0)$:

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$
$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2+1} = 0$$

Następne pochodne liczymy ze wzoru Taylora:

$$\frac{n^2}{n^2+1} = f(0+\frac{1}{n}) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{2!n^2}\cdot f''(\xi_n) = 1 + \frac{1}{2!n^2}f''(\xi_n)$$

po przekształceniu mamy:

$$f''(0) = \lim_{n\to\infty} f''(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} -2!\frac{n^2}{n^2+1} = -2$$

i podobnie dla trzeciej pochodnej:

$$\frac{n^2}{n^2+1} = f(0+\frac{1}{n}) = f(0) + f'(0)\cdot\frac{1}{n} + \frac{f''(0)}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{f'''(\xi_n)}{3!}\frac{1}{n^3}$$

i licząc granice:

$$f'''(0) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n^2+1} = 0$$

Możemy wydedukować że pochodne mają charakter cykliczny:

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k\cdot(2k)! \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0$$

udowonimy to indukcyjnie. Bazę indukcje już mamy, więc rozpocznijmy od przypadku parzystego, i podobnie jak wcześniej liczymy:

$$\begin{aligned} f^{(2k+2)}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(2k+2)}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} -(2k+2)!n^{2k+2}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \sum_{i=0}^{2k+1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!n^i}\right) = \\ \lim_{n\to\infty} -(2k+2)!x^{2k+2}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{n^{2i}}\right) = \\ \lim_{n\to\infty} -(2k+2)!n^{2k+2}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{1-\left(-\frac{1}{n^2}\right)^{k+1}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \\ \lim_{n\to\infty}(2k+2)!(-1)^k\frac{n^2}{n^2+1} = (-1)^k(2k+2)! \end{aligned}$$

I podobnie dla nieparzystych:

$$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) = \lim_{n\to\infty} f^{(2k+1)}(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} -(2k+1)!n^{2k+1}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \sum_{i=0}^{2k}\frac{f^{(i)}(0)}{i!n^i}\right) = \\ \lim_{n\to\infty} -(2k+1)!x^{2k+1}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{n^{2i}}\right) = \\ \lim_{n\to\infty} -(2k+1)!n^{2k+1}\left(-\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{1-\left(-\frac{1}{n^2}\right)^{k+1}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \\ \lim_{n\to\infty}(2k+1)!(-1)^k\frac{n}{n^2+1} = 0 \end{aligned}$$

co kończy dowód.