AM1.2* lato 2024

rozwiązania zadań z serii V

Konrad Kaczmarczyk

14 May 2024

§1 Zadanie

Zadanie 1.1. Wykaż zbieżność punktową poniższych szeregów na zadanych zbiorach. Zbadaj ich zbieżność jednostajną i niemal jednostajną:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\left(1+x^2\right)\right), x \in \mathbb{R}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}\left(1+\sin^{2n}(x)\right)}, x \in (0, 2\pi)$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^x}, x \in (0, \infty)$$

(a) Pokażemy jednostajną zbieżność z kryterium Dirichleta. Niech

$$f_n(x) = \sin^2(x)\cos^{2n}(x)$$

wiemy że f_n jest ciągiem monotonicznym, i możemy obliczyć jego maksimum (podstawiamy $c = \cos^2(x)$)

$$(f_n(c)' = nc^{n-1} - (n+2)c^{n+1} = 0$$

i mamy że

$$f_n \leq \left(1 - \frac{n}{n+2}\right) \cdot \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \to 0$$

więc funkcja jest jednostajnie zbieżna do zera.

Wykażemy jeszcze że $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\left(1+x^2\right)\right)$, jest jednostajnie ograniczony, fakt że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha)$ dla dowolnego α jest ograniczony, a zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\left(1+x^2\right)\right)$ jest jednostajnie ograniczony. Korzystając z kryterium Dirichleta mamy jednostajną zbieżność.

(b)

(c) Niech

$$f_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\sin(nx)}{n^x}$$

wtedy

$$f_m\left(\frac{\pi}{2m}\right) > \frac{\pi}{2m} \sum_{n=1}^{m} n^{1-\frac{\pi}{2m}} \; O(m)$$

co wynika ze wzoru Bernoulliego który udowadnialismy jako jedna z małych prac domowych, i niespełnia warunku Cauchy'ego.

Możemy wykazać za to zbieżność niemal jednostajną bo dla dowolnego przedziału $[a, b]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$$

jest ograniczony, a

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a} \rightrightarrows 0$$

więc z kryterium Abela jest niemal jednostajnie zbieżny.

§2 Zadanie

Zadanie 2.1. Niech $a_n > 0$ będą takie że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(a) Wykaż że funkcja $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n x)$ jest klasy C^∞ na $(0, \infty)$

(b) Wykaż, że $f'_+(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(a) Oczywistym jest że $f(0) = 1$, oraz że $\ln(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n x)$ (warto zauważyć że jesli f jest klasy C^∞ to w.t.w. $\ln(f)$ też), skorzystamy z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych. Wystarczy pokazać że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n x}$$

jest jednostajnie zbieżny, ale z kryterium Weiestrass'a i nierównosci $\frac{a_n}{1+a_n x} < a_n$ mamy to. Zatem

$$(\ln(f))' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + a_n x}$$

zauważmy że nasza nierówność działa ogólniej $\left(\frac{a_n}{1+a_n x}\right)^k < a_n^k$, i pozwala nam powiedzieć że $\ln(f)$ jest klasy C^∞.

(b) Skorzystajmy z poprzedniego rezulatu:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = (\ln(f(0)))' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

więc

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

§3 Zadanie

Zadanie 3.1. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

(a) Czy jesli f spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1, to również jej wielomina Bernsteina, $B_n f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, spełnia ten warunek?

(b) Czy jeśli f jest funkcją wypukłą na $[0, 1]$, to $B_n f$ też muszą być funkcjami wypukłymi na $[0, 1]$?

(a) Chcemy pokazać że zachodzi:

$$|B_n f(x) - B_n f(y)| \leq |x - y|$$

Z faktu że wielomiany są analityczne, z wzoru Taylora możemy zapisać, że dla pewnego $\theta \in (x, y)$

$$B_n f(y) = B_n f(x) + B_n' f(\theta) \cdot (y - x)$$

więc wystarczy że dla dowolnego $x \in (0, 1)$

$$\left|B_n' f(x)\right| \leq 1$$

możemy teraz przywołać wzór na pochodną wielomianu Bernstein'a

$$\left|(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\cdot\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\right| \leq 1$$

Z faktu że f spełnia warunek Lipschitz'a z stałą 1, możemy zapisać że:

$$\left|(n+1)\left(f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\right| = \left|\frac{f\left(\frac{k+1}{n+1}\right)-f\left(\frac{k}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\right| \leq 1$$

więc możemy zapisać że

$$\left|B_n' f(x)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}\right| = |(x+(1-x))^n| = 1$$

co kończy dowód.

(b) Wystarczy obliczyć drugą pochodną, mianowicie:

$$B_n'' f(x) = (n+2)(n+1)\cdot(\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k+1}{n+2}\right)\left(\binom{n}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}-\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)$$
$$-\sum_{k=0}^{n+1} f\left(\frac{k}{n+2}\right)\left(\binom{n}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}-\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right))$$

co po przekształceniach staje się

$$B_n'' f(x) = (n+2)(n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k+2}{n+2}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n+2}\right)+f\left(\frac{k}{n+2}\right)\right)$$

którego dodaniosć wynika z faktu że dla f wypukłej zachodzi nierówność

$$f\left(\frac{k+2}{n+2}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n+2}\right)+f\left(\frac{k}{n+2}\right) \geq 0$$

§4 Zadanie

Zadanie 4.1. Niech $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne. Czy musi istnieć funkcja pierwotna funkcji $F'G$?

§5 Zadanie

Zadanie 5.1. Oblicz całki oznaczone

(a) Podstawmy $t^2 = x$, więc dostajemy że $2tdt = dx$ i mamy że:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1} = 2t - \int \frac{dt}{t^2+1} = 2\sqrt{x} - 2\text{arc tg}\left(\sqrt{x}\right) + c$$

(b) Całkując przez częsci:

$$\int x\sinh(x)\,dx = x\cosh(x) - \cosh(x) + c$$

(c) Podstawiając $\operatorname{tgh}(x) = u$ i $du = dx(\operatorname{tgh}^2(x) - 1)$ mamy:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{tgh}(x) - 1} = \int \frac{du}{(u-1)^2(u+1)}$$

który rozwiązujemy poprzez rozszczepienie na ułamki, zatem

$$\int \frac{du}{(u-1)^2(u+1)} = \int \frac{1}{4(u+1)} - \frac{1}{4(u-1) + \frac{1}{2(u-1)^2}}du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln(\operatorname{tgh}(x) + 1) - \ln(\operatorname{tgh}(x) - 1) - \frac{2}{\operatorname{tgh}(x) - 1}\right) + c$$

(d) Możemy tutaj zastosować klasyczne podstawienie $\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ i otrzymamy (po uproszczeniu)

$$\int \frac{2-2\alpha}{\alpha\cdot(1+\alpha)\cdot(1+\alpha^2)}d\alpha = -2\int \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha^2+1} - \frac{1}{\alpha}d\alpha$$

po podobnym jak wczesniej podstawianiu mamy więc wartosci

$$-x + 2\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + c$$

(e) Z pomocą tożsamosci Sophie-Germain mamy rozkład na ułamki

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

gdzie pierwsze dwie całki to pochodna logarytmu wielomianów, w pozostałych dokańczamy kwadrat i podstawiamy $t = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, i mamy całki na $\text{arc tg}()$, i dostajemy

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right) +$$
$$\frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2} + 1\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2} - 1\right)$$

(f) Możemy podstawić $x^2 = u$ i $(u+1) = \sqrt{2}w$

$$\int x\sqrt{x^4+2x^2-1} = \int \sqrt{(u+1)^2-2} = \int \sqrt{w^2-1}$$

która jest klasyczną całką, więc możemy po ponowynym podstawieniu powiedzieć że wynik to

$$\int x\sqrt{x^4+2x^2-1}dx = \frac{1}{4}(-2\ln\left(x^2+\sqrt{(x^2)^2-2}+1\right)+\sqrt{x^4+2x^2-1}x^2$$
$$+\sqrt{x^4+2x^2-1}+\ln(2))+c$$

(g) Dla $a=0$ mamy

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3}} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{3}} + c$$

możemy podstawić $t = x^a$, wtedy $dt = ax^{a-1}dx$ więc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2a}x^a+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}}$$

i po podstawieniu $u = \frac{1}{t}$ mamy

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{-1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}} = \frac{-1}{a}\int \frac{du}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

i podstawiając do wzoru, i podstawiając nasze podstawienia mamy

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2a}+x^a+1}} = -\frac{1}{a}\sinh\left(\frac{\frac{2}{x^a}+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(h) Liczymy przypadki graniczne $n=1$ i $n=2$. Mamy

$$\int \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x+1) - x$$

i

$$\int \frac{x^2}{(1+x)^2}dx = x - \frac{1}{x+1} - \ln(x+1) + c$$

podstawiając $t = x+1$ mamy

$$\int \frac{x^2}{(1+x)^n}dx = \int \frac{t^2-2t+1}{t^n}dt$$

jeszcze tylko dla $n=3$ mamy jeden logarytm

$$\int \frac{x^2}{(1+x)^3}dx = \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$$

i dla $n>3$ mamy

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^n}dx = -\frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{(x+1)^{n-3}} + \frac{2}{n-2}\cdot\frac{1}{(x+1)^{n-2}} - \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(x+1)^{n-1}} + c$$