Analiza II.1*

Rozwiązanie zadań z serii nr. 3

Konrad Kaczmarczyk

11 kwietnia 2025

§1 Zadanie

Zadanie. Niech $U = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ oraz $f \in C^\infty(U)$. Wykazać, że $\mathrm{d}(f(y\ dx - x\ dy))$ jest proporcjonalna do formy ω wtedy i tylko wtedy gdy f jest dodatnio jednorodna stopnia -2. Jaki warunek na f jest równoważny równaniu $\mathrm{d}(f(y\ \mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)) = 0$?

Rozpiszmy:

$$\mathrm{d}f(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}f \wedge (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) + f\,\mathrm{d}(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y)$$
$$= \left(-x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + y\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y - x\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x\right) - 2f\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$
$$= \left(-x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - y\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + x\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$
$$= \left(-x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - z\frac{\partial f}{\partial z} - 2f\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + y\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$
$$= \left(-x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - z\frac{\partial f}{\partial z} - 2f\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \omega$$

Wiemy, że warunek dodatnio jednorodności stopnia -2 to:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -2f$$

z którego jeżeli założymy że zachodzi mamy że:

$$\mathrm{d}f(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = -\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \omega$$

czyli formy są proporcjonalne, jeśli f jest dodatnio jednorodna stopnia -2.

Załużmy zatem że że formy są proporcjonalne, w takim razie mamy że $\exists\lambda$:

$$\lambda\omega = \left(-x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - z\frac{\partial f}{\partial z} - 2f\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

co porównaniu na pochodnych daje nam $\lambda = 0$, więc spełniony jest warunek dodatniej jednorodności f.

Przejdźmy do przypadku $\mathrm{d}f(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = 0$, który na podstawie poprzednich obliczeń jest równoważny:

$$\begin{cases} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = -2f \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

czyli są to dowolne funkcje dodatnie jednorodne na zmiennych $x\,y$, i niezależne od z.

Zadanie. Niech

$$\omega = \frac{(x-1)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x-1)^2+y^2} - \frac{(x+1)\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x+1)^2+y^2}$$

(a) Wykazać, że nie istnieje funkcja $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{\pm 1, 0\}\right)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$.

(b) Czy istnieje funkcja $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{[-1,1]\times 0\}\right)$ taka, że $\omega = \mathrm{d}f$?

Zadanie. Niech U będzie dopełnieniem w $\mathbb{R}^3$ półprostej $\{x = y = 0, z \leq 0\}$, $W = \{(u,v,w) : w > 0\}$ oraz $\phi : W \to U$ dane jest wzorem

$$\phi(u,v,w) = \left(uw, vw, \frac{1}{2}(-u^2 - v^2 + w^2)\right).$$

Dana jest 2-forma $\omega \in \Omega^2(U)$: $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y)$

(a) Wykazać, że ϕ jest dyfeomorfizmem W na U.

(b) Obliczyć $\phi * \omega$.

(c) Znaleźć 1-formę $\alpha \in \Omega^1(W)$ taką, że $\mathrm{d}\alpha = \phi * \omega$.

(d) Wywnioskować, że istnieje 1-forma $\beta \in \Omega^1(U)$ taka, że $\mathrm{d}\beta = \omega$