Analiza II.2*

Rozwiązanie zadań z serii I

Konrad Kaczmarczyk

11 kwietnia 2025

Zadanie. Obliczyć wartość całki

$$\int_{I_n} \max\{x_1, \dots, x_n\}\, dl_n(x_1, \dots, x_n)$$

gdzie $I = [0, 1]$

Podejdźmy do problemu probabilistycznie, niech $x_1, \dots x_n$ będą zmiennymi losowymi wybieranymi z zakeresu $[0, 1]$.

Łatwo widać że dla ustalonego $p \in [0, 1]$ zachodzi:

$$\mathbb{P}\left(\sqrt[n]{x_1} < p\right) = p^n$$

a także (wystarczy prosty argument polu wewnątrz $[0, p]^n$) że:

$$\mathbb{P}\left(\max\{x_1, \dots, x_n\} \leq p\right) = p^n$$

czyli funkcje $\max\{x_1, \dots, x_n\}$, i $\sqrt[n]{x_1}$ mają te same dystrybuanty, a więc także wartości oczekiwane:

$$\begin{aligned}
&\int_{I_n} \max\{x_1, \dots, x_n\}\, dl_n(x_1, \dots, x_n) \\
&= \mathbb{E}\left[\max\{x_1, \dots, x_n\}\right] = \mathbb{E}\left[\sqrt[n]{x_1}\right] \\
&= \int_I \sqrt[n]{x_1}\, dl_1(x_1) = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(1^{\frac{n}{n+1}} - 0\right) = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Zadanie. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchnią

$$S = \left\{(x, y, z) : \left(x^2 + y + 2 + z^2\right)^2 = a\left(x^2 + y^2 - z^2\right)\right\}, \quad a > 0$$

W rozwiązaniu skorzystamy z zdania 10 z serii 1 na ćwiczenia (które również jest znane jako twierdzenie Pappus'a-Guldinus'a), zatem:
Podstawiając współrzędne sferyczne mamy że S to:

$$S = \left\{r \cdot \cos(\alpha)\cos(\beta), r \cdot \cos(\alpha)\sin(\beta), r\sin(\alpha) \mid r^2 = a\cos(2\alpha)\right\}$$

czyli region ograniczony S jest bryłą obrotową. Podstawmy zatem $y = 0$ i oznaczmy:

$$D = \left\{(x, y, z) : \left(x^2 + z^2\right) = a\left(x^2 - z^2\right)\right\}$$

Oznaczmy przez P pole ograniczone D i gdzie $x > 0$. Obliczmy wartość całki z x w tym obszarze:

$$\int_P x \, dl_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{a\cos 2\alpha}} r^2 \cos\alpha \, dr \, d\alpha$$
$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cos 2\alpha)^3} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)^3} \cos\alpha \, d\alpha$$

Dokonajmy podstawienia $s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\alpha$:

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{\left(1 - s^2\right)^3} \, ds$$

Oraz ponownego podstawienia $s = \sin\delta$

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1 - \sin^2\delta\right)^3} \cdot \cos\delta \, d\delta = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\delta \, d\delta$$
$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16} a^{\frac{3}{2}}$$

Zatem korzystając z twierdzenia Pappus'a - Guldinusa'a mamy że pole ograniczone krzywą daną w zadaniu jest:

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{16} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} a^{\frac{3}{2}}$$

Zadanie. Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą rzeczywistą taką, że $\det A \neq 0$. Obliczyć n-wymiarową miarę Lebesgue'a zbioru

$$B = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big| \leq 1 \right\}$$

Rozpcznijmy od interpretacji wzoru w zadaniu. Można zauważyć że jest to złożenie przekształcenia zdefiniowanego macierzą A, z metryką taksówkową:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big| \leq 1 \right\} = \{x : \|Ax\| \leq 1\} \quad \text{gdzie } x = (x_1, \dots, x_n)$$

wprowadźmy oznaczenie:

$$B' = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

Pokażmy że $A^{-1}(B') = B$ lub ekwiwalentnie $A(B) = B'$:

1. $x \in A(B)$
   czyli $\exists_y x = Ay$ gdzie $|Ay| \leq 1$, więc mamy $|x| \leq 1$ czyli $x \in B'$

2. $x \in B'$
   czyli $\exists_y ! x = Ay$(z odwracalności A),
   więc mamy $|Ay| \leq 1$ i $y \in B$ czyli $x \in A(B)$

możemy zastosować twierdzenie o zamianie zmiennych:

$$l_n(B) = \int_B dl_n = \left|\det A^{-1}\right| \int_{B'} dl_n = \left|\det A^{-1}\right| \cdot l_n(B')$$

Wystarczy zatem policzyć objętość n-wymiarowej kuli w metryce taskówkowej, oznaczmy ją przez B_n. Narzuca się wzór indukcyjny:

$$B_{n+1} = 2 \cdot \int_0^1 (1-x)^n B_n \, d\mu = 2 \cdot B_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = B_n \cdot \frac{2}{n+1}$$

Łatwo tutaj zauważyć jawny wzór:

$$B_n = \frac{2^n}{n!}$$

który spełnia rekurencje, a zatem wynikiem jest:

$$l_n(B) = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{|\det A|}$$

Zadanie. Niech $K \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem wypukłym, zwartym, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ spełnia warunek $\big|_{\partial K} \equiv 0$ oraz $(0,0,0) \notin \partial K$. Obliczyć wartość całki:

$$\int_K \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathrm{d}l_3(x,y,z)$$

Zauważmy że:

$$r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = r \cdot \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + r \cdot \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} + r \cdot \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

Robimy zatem podstawienie sferyczne:

$$\int_K \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \right) \mathrm{d}l_3(x,y,z)$$
$$= \int_{K'} \sin\alpha \frac{1}{r^3} r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r^2 \,\mathrm{d}l_3(r,\alpha,\beta) = \int_{K'} \sin\alpha \frac{\partial f}{\partial r} \,\mathrm{d}l_3(r,\alpha,\beta)$$

Mamy teraz dwa przypadki:

(a) Punkt $(0,0,0)$ należy do K

(b) Punkt $(0,0,0)$ nie należy do K

Pierwszy przypadek: Jeśli punkt $(0,0,0)$ należy do K, to całka jest równa:

$$\int_{K'} \frac{\partial f}{\partial r} \sin\alpha \,\mathrm{d}l_2(r,\alpha) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} \sin\alpha \,\mathrm{d}l_2(r,\alpha)$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\alpha \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} \,\mathrm{d}l_2(r,\alpha) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\alpha \,(0 - f(0)) \,\mathrm{d}l_1(\alpha) = -4\pi \cdot f(0)$$

czyli wynik to $-4\pi f(0)$.

Drugi przypadek: Jeśli punkt $(0,0,0)$ nie należy do K, to całka jest równa:

$$\int_{K'} \frac{\partial f}{\partial r} \sin\alpha \,\mathrm{d}l_3(r,\alpha,\beta) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \int_{r_2(\alpha)}^{r_1(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} \sin\alpha \,\mathrm{d}l_2(r,\alpha)$$
$$= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin\alpha \,(0-0)) \,\mathrm{d}l_1(\alpha) = 0$$

czyli wynik w tym przypadku to 0.