

Analiza II.2*

Rozwiązanie zadań z serii nr. 2

KONRAD KACZMARCZYK

22 marca 2025

Zadanie. Niech $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ oraz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $p, q, r > 1$.
Wykazać że:

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Rozpocznijmy od szacowania na $|(f * g)(x)|$:

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1+\frac{p}{r}-\frac{p}{r}} \cdot |g(y)|^{1+\frac{q}{r}-\frac{q}{r}} dy = \\ &\int_{\mathbb{R}} (|f(x-y)|^p \cdot |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \cdot |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \cdot |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} dy \end{aligned}$$

zauważmy teraz że:

$$\frac{1}{\frac{rp}{r-p}} + \frac{1}{\frac{rq}{r-q}} + \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$$

więc skorzystamy z uogólnionej nierówności Hölder'a dla tych właśnie wag:

$$\leq \left\| (f(x-y)^p \cdot g(y)^q)^{\frac{1}{r}} \right\|_r \cdot \left\| |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{rp}{r-p}} \cdot \left\| |f(y)|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{rq}{r-q}}$$

rozpiszmy każdy z tych czynników osobno:

$$\begin{aligned} \left\| (f(x-y)^p \cdot g(y)^q)^{\frac{1}{r}} \right\|_r &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ \left\| |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}} \right\|_{\frac{rp}{r-p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r} \cdot \frac{pr}{r-p}} dy \right)^{\frac{r-p}{pr}} = \|f\|_p^{\frac{r-p}{r}} \\ \left\| |g(y)|^{\frac{r-q}{r}} \right\|_{\frac{rq}{r-q}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|^{\frac{r-q}{r} \cdot \frac{qr}{r-q}} dy \right)^{\frac{r-q}{qr}} = \|g\|_q^{\frac{r-q}{r}} \end{aligned}$$

zatem mamy że:

$$|(f * g)(x)| \leq \left(\|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{r}}$$

napiszmy w końcu że:

$$\|f * g\|_r^r = \left(\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(x)|^r dx \right) \leq \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy dx$$

skorzystajmy teraz z tw. Fubini’ego dla ostatniej całki:

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_r^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p dy \\ &= \|f\|_p^{r-p} \cdot \|g\|_q^{r-q} \cdot \|f\|_p^p \cdot \|g\|_q^q = \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r \end{aligned}$$

co po spierwiastkowaniu daje tezę.

Zadanie. Niech $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Obliczyć wartość granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x)$$

Skorzystajmy z rozwinięcia Taylor’a dla $n = 1$ i mamy:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(\xi) \Rightarrow \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(0) + \frac{x}{2}\varphi''(\xi)$$

zatem teraz nasza całka z zadania:

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \cdot \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(0) + \frac{x}{2}\varphi''(\xi) \right) dl_1(x) = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{\varphi(0)}{x} dl_1(x) + \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \varphi'(0) dl_1(x) + \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{x}{2} \varphi''(\xi) dl_1(x) \end{aligned}$$

rozważmy każdą z powyższych całek:

1. Pierwsza to całka z funkcji nieparzystej zatem jest równa 0.
2. Druga to całka z funkcją z funkcji e^{-x^2} z odpowiednim skalowaniem zatem jej wartość to $f'(0)$.
3. Trzecią całkę możemy oszacować:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{x}{2} \varphi''(\xi) dl_1(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \left| \frac{x}{2} \varphi''(\xi) \right| dl_1(x) \leq \\ &2M \cdot \int_0^\infty \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{x}{2} = 2M \cdot \frac{n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2n^2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

zatem w granicy mamy że:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2) \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) &= \\ 0 + f'(0) + 0 &= f'(0) \end{aligned}$$

Zadanie. Wykazać, że:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(k) = A\chi_{[-B,B]}(k)$$

Zastosujmy twierdzenie o inwersji Fouriera:

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} A\chi_{[-B,B]} \cdot e^{ixk} dk = A \cdot \int_{[-B,B]} \cos(xk) + i \sin(xk) dk =$$

skorzystamy z faktu że \sin jest funkcją nieparzystą a \cos jest parzystą więc:

$$= 2A \cdot \int_0^B \cos(xk) dk$$

zastosujmy teraz podstawienie $a = xk$:

$$= \frac{2A}{x} \cdot \int_0^{xB} \cos a da = 2A \cdot \frac{\sin(xB)}{x}$$

zatem porównując mamy że współczynniki A, B to odpowiednio:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 1 \end{cases}$$

Zadanie. Definiujemy:

$$S := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall_{k,l} \sup_{\mathbb{R}} |x^k f^{(l)}(x)| < +\infty \right\}$$

(a) Wykazać, że dla dowolnego $\varphi \in S$ istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x)$$

(b) Wykazać, że:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \cdot (\mathcal{F}\varphi)(x) dl_1(x) = C \cdot \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x) \cdot \varphi(x) dl_1(x)$$

Znaleźć stałą C .

Uwaga-wniosek: " $F\left(\frac{1}{x}\right) = C \cdot \operatorname{sgn}(k)$ "

(a) Rozpiszmy:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) + \int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) \end{aligned}$$

Obliczmy pierwszą całkę:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) &= \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} x \cdot \varphi(x) \cdot \frac{1}{x^2} dl_1(x) \leq \\ \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]} (|x \cdot \varphi(x)|) \cdot \int_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} \left| \frac{1}{x^2} \right| dl_1(x) &\leq M \cdot (0 - (-1) + 1 - 0) = 2M \end{aligned}$$

Przy drugiej całce skorzystamy z obserwacji:

$$\int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(0)}{x} dl_1(x) = \varphi(0) \cdot \int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} dl_1(x) = 0$$

zatem:

$$\int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} dl_1(x)$$

oznaczymy przez $g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$, i zauważmy że:

$$g(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi'(0)$$

czyli definiując $g(0) = \varphi'(0)$ mamy że $g(x) \in C(\mathbb{R})$ (co oczywiście wynika z faktu że $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$)

Teraz zostało powiedzieć że całka z funkcji ciągłej na przedziale zwartym jest ograniczona, czyli niezależnie od ε mamy:

$$\int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) = \int_{[-1, 1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} g(x) dl_1(x)$$

$$\leq \int_{[-1,1] \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |g(x)| dl_1(x) = \int_{[-1,1]} |g(x)| dl_1(x) = N$$

więc nasza granica:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x} dl_1(x) \leq 2M + N$$

(b) Ponownie rozpiszmy:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{1}{x} \cdot (\mathcal{F}\varphi)(x) dl_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x)}{x} dl_1(x)$$

zauważmy że:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) e^{-ikx} dl_1(k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) e^{-ikx} dl_1(k) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(-kx) dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx) dl_1(k) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) \cos(kx) dl_1(k) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(-k) \sin(kx) dl_1(k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(kx) dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx) dl_1(k) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cos(kx) dl_1(k) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx) dl_1(k) \\ &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx) dl_1(k) \end{aligned}$$

skorzystajmy teraz z tw. Fubiniiego:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(\mathcal{F}\varphi)(x) - (\mathcal{F}\varphi)(-x)}{x} dl_1(x) &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \sin(-kx) dl_1(k) dl_1(x) &= \\ -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(kx) dl_1(x) dl_1(k) \end{aligned}$$

Obliczmy wewnętrzną całkę korzystając z faktu, że bezproblemowo możemy zabrać granicę pod całkę (z twierdzenia o Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej bo φ należy do S):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x} dx = \operatorname{sgn}(k) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(k)$$

Kończąc zapisujemy zatem że:

$$\begin{aligned} -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin(kx) dl_1(x) dl_1(k) &= \\ -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \operatorname{sgn}(k) dl_1(k) &= -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi(k) \cdot \operatorname{sgn}(k) dl_1(k) \end{aligned}$$