JAiO zima 2024

Rozwiązanie zadań z serii I

Konrad Kaczmarczyk

16 April 2024

Zadanie 0.1. Dla dwóch języków L, K nad alfabetem $\sum$, definiujemy język zawierający te podciągi słów z L, które można otrzymać poprzez równoczesne usunięcie rozłącznych infiksów, prefiksu i sufiksu, należących do K:

$$L \ominus K = \{v_1 v_2 \dots v_n \in \sum^* \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \sum^*, n \geq 1,$$
$$\exists w_0, \dots, w_n \in K, w_0 v_1 w_1 v_2 \dots w_{n-1} v_n w_n \in L\}$$

Rozstrzygnij prawdziwość następujących zdań:

(a) (1.5 pkt) Dla każdego K, jeśli L jest regularny to $L \ominus K$ jest regularny.

(b) (1.5 pkt) Dla każdego K, jeśli $L \ominus K$ jest regularny to L jest regularny.

(c) (2.0 pkt) Istnieje wielomian p taki, że dla dowolnych języków L i K, jeśli L jest rozpoznawany przez automat deterministyczny o n stanach, to $L \ominus K$ jest rozpoznawany przez automat deterministyczny o $p(n)$ stanach.

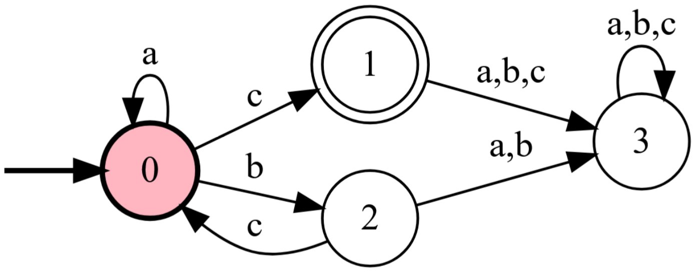
(a) Tak, ustalmy dowolne $K \in \sum^*$, i dla dowolnego L będącego regularne, znamy jego automat $A(L)$. Pokażemy teraz że istnieje automat z ε-przejsciami rozpoznający $L \ominus K$. Aby go otrzymać do automatu $A(L)$ wprowadzimy nowy stan początkowy q_1', oraz nowe stany końcowe q_{k_1}', q_{k_2}', itd., gdzie poprzednie stany końcowe już nimi nie są. Teraz wystarczy już wprowadzić nowe ε-przejscia, zadane wzorami:

$$\forall_{q \in Q} \left(q_1', \varepsilon, q\right) \in \delta \iff \exists_{w \in K} \left(q_1, w, q\right) \in \widehat{\delta}$$
$$\forall_{q_n, q_m \in Q} \left(q_n, \varepsilon, q_m\right) \in \delta \iff \exists_{w \in K} \left(q_n, w, q_m\right) \in \widehat{\delta}$$
$$\forall_{q, q_{k_i}' \in Q} \left(q, \varepsilon, q_{k_i}'\right) \in \delta \iff \exists_{w \in K} \left(q, w, q_{k_i}\right) \in \widehat{\delta}$$

Zatem istnieje taki automat, a z wykładu wiemy że taki jest równoznaczny z jakims automatem deterministycznym, czyli $L \ominus K$ jest językiem regularnym.

(b) Nie, niech $K = a^*$, a $L = \{a^n | \ n \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, wtedy język $L \ominus K = a^*$, jest regularny, a sam L nie jest (fakt ten pojawił się na ćwiczeniach).

(c) Nie, dowiedzmy to używając kontrprzykładu. Niech $L_n = (a+bc)^* c (a+c)^n$, i $K = b^*$. Do budowy automatu deterministycznego rozpoznającego język L_n, potrzebujemy dokładnie $4 + n$ klas, co udowodnimy indukcyjnie. Dla $n = 0$, wystarczą 4 stany i automat wygląda tak,



W przypadku kroku indukcyjnego wystarczy zmienić klasę końcową c^n , na zwykłą i dodać nową klasę końcową c^{n+1}, zmienić parę przejsć, żeby otrzymać automat deterministyczny dla L_{n+1}. Teraz rozpatrzmy automat dla $L_n \ominus K$, który generuje słowa dane wyrażeniem $(a + bc + c)^*c(a + c)^n$, który łatwo zauważyć że potrzebuje wykładniczo wiele stanów, bo słowa

cc . . .ccc, cc . . .cca, cc . . .caa, cc . . .cac, itd.

są różnych klasach abstrakcji, zatem potrzebują osobnych stanów, a ich jest wykładniczo wiele (dokładnie 2^n), wiemy że nie istnieje wielominan spełniający $p(n + 4) > 2^n$, dla wszystkich n, co kończy dowód.