Analiza 2.1*

Rozwiązanie zadania domowego nr. 11

Konrad Kaczmarczyk

9 grudnia 2024

Zadanie. Niech $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb nieujemnych. Wykaż że jeżeli $\sum_{i=1}^n x_i = a$ to

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} x_j x_k \leq \frac{n-1}{2n}a^2$$

§1 Rozwiązanie

Przez mnożniki Lagrange'a: Oznaczmy przez f drugą funkcje, a przez g warunek czyli $\sum_{i=1}^n x_1 - a$, w takim razie, dzu,amy punktu stacjonarnego funkcji:

$$F = f - \lambda g$$

czyli

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{j\neq i} x_j - \lambda = a - x_i - \lambda \Rightarrow a - \lambda = x_i$$

Mamy więc że punktem krytycznym jest przypadek że wszystkie x_i są równe, wówczas:

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} x_j x_k = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{a^2}{n^2} = \frac{n-1}{2n}a^2$$

i zbiór takich x_i że $g = 0$, jest zwarty, więc pozostaje sprawdzić krawędzie. Ustawiamy $x_1 = 0$ (ustawienie $x_1 = a$ jest oczywiste, bo wtedy $f = 0$), i mamy zredukowaną wersje zadania do przypadku $n-1$, stosując indukcje ($n = 1$ oczywisty) mamy tezę.

§2 Rozwiązanie

$$a^2 = \left(\sum x_i\right)^2 = \sum x_i^2 + \sum x_i x_j$$

z nierówności między średnimi wiemy że

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \geq \frac{\sum x_i}{n} = \frac{a}{n}$$

czyli łącząc mamy że

$$\sum x_i x_j \leq \frac{a^2 - \sum x_i^2}{2} \leq \frac{a^2 - \frac{a^2}{n}}{2} \leq a^2\frac{n-1}{2n}$$