

Analiza II.2*

Rozwiązanie zadań z serii I

KONRAD KACZMARCZYK

20 marca 2025

Zadanie. Obliczyć wartość całki

$$\int_{I_n} \max \{x_1, \dots, x_n\} d\ell_n(x_1, \dots, x_n)$$

gdzie $I = [0, 1]$

Podajmy do problemu probabilistycznie, niech x_1, \dots, x_n będą zmiennymi losowymi wybieranymi z zakresu $[0, 1]$.

Łatwo widzieć że dla ustalonego $p \in [0, 1]$ zachodzi:

$$\mathbb{P}(\sqrt[n]{x_1} < p) = p^n$$

a także (wystarczy prosty argument polu wewnątrz $[0, p]^n$) że:

$$\mathbb{P}(\max \{x_1, \dots, x_n\} \leq p) = p^n$$

czyli funkcje $\max \{x_1, \dots, x_n\}$, i $\sqrt[n]{x_1}$ mają te same dystrybuanty, a więc także wartości oczekiwane:

$$\begin{aligned} & \int_{I_n} \max \{x_1, \dots, x_n\} d\ell_n(x_1, \dots, x_n) \\ &= \mathbb{E}[\max \{x_1, \dots, x_n\}] = \mathbb{E}[\sqrt[n]{x_1}] \\ &= \int_I \sqrt[n]{x_1} d\ell_1(x_1) = \left(\frac{n}{n+1} \right) \cdot \left(1^{\frac{n}{n+1}} - 0 \right) = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Zadanie. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchnią

$$S = \left\{ (x, y, z) : (x^2 + y + 2 + z^2)^2 = a(x^2 + y^2 - z^2) \right\}, \quad a > 0$$

W rozwiązaniu skorzystamy z zdania 10 z serii 1 na ćwiczenia (które również jest znane jako twierdzenie Pappus'a-Guldinusa'a), zatem:

Podstawiając współrzędne sferyczne mamy że S to:

$$S = \{ r \cdot \cos(\alpha) \cos(\beta), r \cdot \cos(\alpha) \sin(\beta), r \sin(\alpha) \mid r^2 = a \cos(2\alpha) \}$$

czyli region ograniczony S jest bryłą obrotową. Podstawmy zatem $y = 0$ i oznaczmy:

$$D = \{ (x, y, z) : (x^2 + z^2) = a(x^2 - z^2) \}$$

Oznaczmy przez P pole ograniczone D i gdzie $x > 0$. Obliczmy wartość całki z x w tym obszarze:

$$\begin{aligned} \int_P x \, dl_2 &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{a \cos 2\alpha}} r^2 \cos \alpha \, dr \, d\alpha \\ &= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(\cos 2\alpha)^3} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(1 - 2\sin^2 \alpha)^3} \cos \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

Dokonajmy podstawienia $s = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin \alpha$:

$$= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^1 \sqrt{(1 - s^2)^3} \, ds$$

Oraz ponownego podstawienia $s = \sin \delta$

$$\begin{aligned} &= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - \sin^2 \delta)^3} \cdot \cos \delta \, d\delta = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \delta \, d\delta \\ &= \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{16} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Zatem korzystając z twierdzenia Pappus'a - Guldinusa'a mamy że pole ograniczone krzywą daną w zadaniu jest:

$$V = 2\pi \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{16} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8} a^{\frac{3}{2}}$$

Zadanie. Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą rzeczywistą taką, że $\det A \neq 0$. Obliczyć n -wymiarową miarę Lebesgue'a zbioru

$$B = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq 1 \right\}$$

Rozpocznijmy od interpretacji wzoru w zadaniu. Można zauważyć że jest to złożenie przekształcenia zdefiniowanego macierzą A , z metryką taksówkową:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq 1 \right\} = \{x : \|Ax\| \leq 1\} \quad \text{gdzie } x = (x_1, \dots, x_n)$$

wprowadźmy oznaczenie:

$$B' = \{x : \|x\| \leq 1\}$$

Pokażmy że $A^{-1}(B') = B$ lub ekwiwalentnie $A(B) = B'$:

1. $x \in A(B)$
czyli $\exists y$ $x = Ay$ gdzie $|Ay| \leq 1$, więc mamy $|x| \leq 1$ czyli $x \in B'$
2. $x \in B'$
czyli $\exists y$ $x = Ay$ (z odwracalności A),
więc mamy $|Ay| \leq 1$ i $y \in B$ czyli $x \in A(B)$

możemy zastosować twierdzenie o zamianie zmiennych:

$$l_n(B) = \int_B dl_n = |\det A^{-1}| \int_{B'} dl_n = |\det A^{-1}| \cdot l_n(B')$$

Wystarczy zatem policzyć objętość n -wymiarowej kuli w metryce taksówkowej, oznaczmy ją przez B_n . Narzuca się wzór indukcyjny:

$$B_{n+1} = 2 \cdot \int_0^1 (1-x)^n B_n d\mu = 2 \cdot B_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = B_n \cdot \frac{2}{n+1}$$

Łatwo tutaj zauważyć jawny wzór:

$$B_n = \frac{2^n}{n!}$$

który spełnia rekurencję, a zatem wynikiem jest:

$$l_n(B) = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{|\det A|}$$

Zadanie. Niech $K \subset \mathbb{R}^3$ będzie zbiorem wypukłym, zwartym, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ spełnia warunek $|_{\partial K} \equiv 0$ oraz $(0, 0, 0) \notin \partial K$. Obliczyć wartość całki:

$$\int_K \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dl_3(x, y, z)$$

Zauważmy że:

$$r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} = r \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + r \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} + r \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}$$

Robimy zatem podstawienie sferyczne:

$$\begin{aligned} & \int_K \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dl_3(x, y, z) \\ &= \int_{K'} \sin \alpha \frac{1}{r^3} r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r^2 dl_3(r, \alpha, \beta) = \int_{K'} \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial r} dl_3(r, \alpha, \beta) \end{aligned}$$

Mamy teraz dwa przypadki:

- (a) Punkt $(0, 0, 0)$ należy do K
- (b) Punkt $(0, 0, 0)$ nie należy do K

Pierwszy przypadek: Jeśli punkt $(0, 0, 0)$ należy do K , to całka jest równa:

$$\begin{aligned} & \int_{K'} \frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha dl_2(r, \alpha) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha dl_2(r, \alpha) \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin \alpha \int_0^{r(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} dl_2(r, \alpha) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin \alpha (0 - f(0)) dl_1(\alpha) = -4\pi \cdot f(0) \end{aligned}$$

czyli wynik to $-4\pi f(0)$.

Drugi przypadek: Jeśli punkt $(0, 0, 0)$ nie należy do K , to całka jest równa:

$$\begin{aligned} & \int_{K'} \frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha dl_3(r, \alpha, \beta) = 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \int_{r_2(\alpha)}^{r_1(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha dl_2(r, \alpha) \\ &= 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin \alpha (0 - 0) dl_1(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

czyli wynik w tym przypadku to 0.