

Examen Práctico: Cálculo Integral (Ingeniería Industrial)

Objetivo de Aprendizaje OA2: *Desarrolla habilidades de razonamiento y manipulación algebraica para aplicar técnicas de integración.*

Indicadores de Logro: IL2.1, IL2.2, IL2.3

Instrucciones:

- Resuelva los **tres problemas** aplicados presentados a continuación. Cada problema aborda un contexto de ingeniería industrial y requerirá el uso de diferentes **técnicas de integración** (sustitución, integración por partes, integrales definidas).
- **Muestre todo el procedimiento** de solución de forma clara y organizada. Esto incluye la manipulación algebraica paso a paso, la aplicación correcta de la técnica de integración correspondiente y, si es necesario, una breve explicación o interpretación del resultado.
- Emplee la notación matemática adecuada. Simplifique expresiones algebraicamente cuando sea posible antes de integrar.
- Exprese las **unidades de medida** en la respuesta final cuando corresponda (por ejemplo, unidades de velocidad, energía, cantidad, costo, etc.).
- Se evaluará la precisión de los cálculos, así como la claridad de la presentación y justificación de sus respuestas. Consulte la **rúbrica de evaluación** al final para conocer los criterios específicos.

Problemas:

Problema 1: Movimiento de una cinta transportadora (Sustitución u)

Una cinta transportadora industrial parte del reposo y su aceleración instantánea $a(t)$ (en m/s²) viene dada por la función:

$$a(t) = \frac{12t}{t^2 + 4}$$

donde t es el tiempo en segundos.

a) Encuentre la expresión general de la **velocidad** $v(t)$ (en m/s) de la cinta transportadora en función del tiempo, **integrando** la aceleración $a(t)$. Considere la constante de integración y utilice el dato de que $v(0)=0$ (parte del reposo) para determinar dicha constante.

b) Calcule la **velocidad** de la cinta transportadora en $t=5$ segundos. Interprete brevemente el significado de este resultado en contexto (¿qué representa este valor para la operación de la cinta?).

Problema 2: Trabajo realizado por una fuerza variable (Integración por partes)

En un proceso de mantenimiento, se debe empujar un equipo pesado a lo largo de un riel.

La **fuerza** requerida para mover el equipo depende de la posición x (en metros) según:

$$F(x) = 5Xe^{0.2x}$$

donde $F(x)$ se mide en Newtons. Se desea calcular el **trabajo** realizado al desplazar el equipo desde $x=0$ hasta $x=3$ metros.

a) Plantee la **integral definida** que representa el trabajo W realizado al mover el equipo desde $x=0$ hasta $x=3$. Recuerde que el trabajo se calcula como $\int_{x_1}^{x_2} F(X)dx$

b) Evalúe la integral para determinar el **trabajo total** (en Joules) efectuado en mover el equipo en ese tramo. Muestre los pasos de integración (utilice el método de **integración por partes**) e incluya las unidades apropiadas en su respuesta.

Problema 3: Costo total a partir de un costo marginal (Área bajo la curva)

Una empresa manufacturera conoce la función de **costo marginal** de producción de cierto artículo, dada por:

$$MC(q)=20+5q,$$

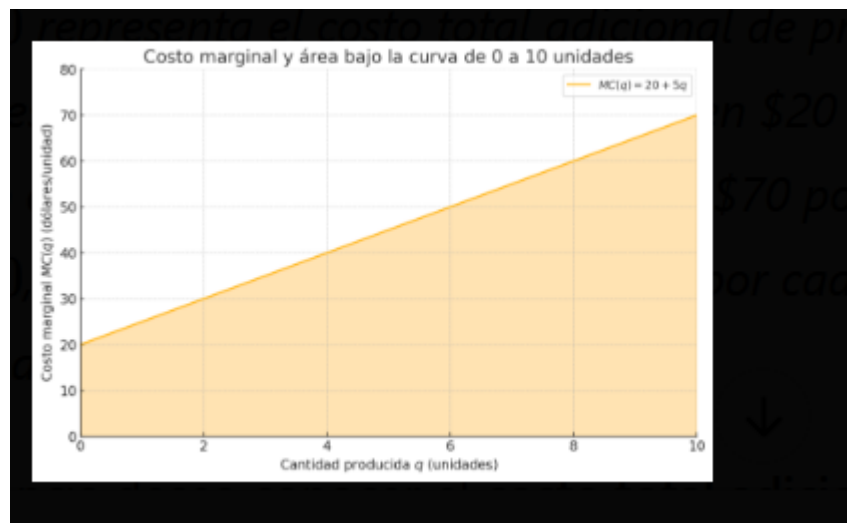


Figura 1

donde $MC(q)$ se mide en dólares por unidad y q es la cantidad de unidades producidas.

(Es decir, para producir una unidad adicional cuando ya se han producido q unidades, el costo incremental es $MC(q)$ dólares.) La función $MC(q)$ es lineal creciente, indicando que a medida que aumenta q , el costo marginal por unidad producida se incrementa de forma constante.

Figura 1: Gráfica de la función de costo marginal $MC(q)=20+5q$. El área sombreada bajo la curva desde $q=0$ hasta $q=10$ representa el costo total adicional de producir esas 10 unidades. Obsérvese que $MC(q)$ inicia en \$20 por unidad cuando $q=0$ y crece linealmente hasta \$70 por unidad en $q=10$, reflejando el aumento en costo por cada unidad adicional.

La gerencia desea conocer el **costo total adicional** de incrementar la producción desde $q=0$ hasta $q=10$ unidades.

a) Formule la **integral definida** que representa el **costo total acumulado** por producir desde la 0-ésima hasta la 10-ésima unidad (es decir, el área bajo la curva $MC(q)$ desde $q=0$ hasta $q=10$).

b) Calcule el valor de dicha integral para obtener el **costo adicional total** de producir 10 unidades. Exprese el resultado en dólares e **interprete su significado** en el contexto dado (¿qué indica este valor respecto al costo de producción?).

Rúbrica de Evaluación:

A, continuación se presenta la rúbrica con los criterios de evaluación. Cada criterio se calificará en una escala de **1 a 3 puntos**, donde 3 representa el desempeño más alto. El puntaje total del examen será la suma de los puntos obtenidos en los cuatro criterios (máximo 12 puntos).

Criterio	3 puntos (Excelente)	2 puntos (Bueno)	1 punto (Insuficiente)
Manipulación algebraica	Realiza la simplificación y manipulación algebraica de expresiones de forma correcta y eficiente en todos los pasos del procedimiento.	Comete pequeños errores algebraicos o omite alguna simplificación menor, pero en general maneja adecuadamente las expresiones.	Presenta errores algebraicos graves o no simplifica las expresiones, dificultando la resolución del problema.
Aplicación de técnicas de integración	Aplica la técnica de integración apropiada en cada problema (sustitución, partes, etc.) de manera	Identifica la técnica adecuada pero muestra alguna dificultad en su aplicación (por	No emplea la técnica de integración adecuada o la aplica de forma incorrecta, demostrando

Criterio	3 puntos (Excelente)	2 puntos (Bueno)	1 punto (Insuficiente)
	correcta, mostrando comprensión clara del método.	ejemplo, pasos de integración incompletos o con errores menores).	falta de comprensión del método.
Precisión en la resolución de problemas	Obtiene resultados correctos en los cálculos de las integrales y en las respuestas finales, incluyendo unidades correctas cuando corresponde.	Los resultados presentan algún error de cálculo menor o descuido (p. ej. signo equivocado), pero el procedimiento es esencialmente correcto.	Los resultados son incorrectos debido a errores de cálculo significativos o procedimientos erróneos, indicando una resolución imprecisa.
Presentación y argumentación	Presenta el trabajo de forma ordenada , clara y legible , con cada paso justificado. Explica o interpreta	La presentación es medianamente clara; aunque se entienden los pasos, faltó ordenar mejor el	La solución es desordenada o poco clara , sin explicación de los pasos. No se brinda interpretación de los resultados en

Criterio	3 puntos (Excelente)	2 puntos (Bueno)	1 punto (Insuficiente)
	<p>correctamente los resultados en el contexto de los problemas cuando se le solicita.</p>	<p>procedimiento o dar una justificación más completa en algunas partes. La interpretación de resultados es vaga o incompleta.</p>	<p>contexto cuando es necesaria, o la comunicación es confusa.</p>