Lösningsförslag TEN2 2021-08-20 MAA140

1. Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av de följande vektorerna som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösning. Vi räknar ut $A\bar{u}_k$ och ser om den vektorn är på formen $\lambda \bar{u}_k$ för något λ, för $k = 1, \dots, 6$.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-7+16 \\ 12+6-16 \\ -6+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$ så egenvektor med $\lambda = 2$.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-7+16 \\ 4+6-16 \\ -2+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$ för något λ, så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-28+36 \\ 16+24-36 \\ -8+8-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix},$$ så egenvektor med $\lambda = 1$.

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+8 \\ 8-8 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$ så egenvektor med $\lambda = 3$.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+4 \\ 6-4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ för något λ, så ej egenvektor.

$\bar{u}_6 = \frac{1}{2}\bar{u}_4$, så $\bar{u}_6$ måste också vara en egenvektor med egenvärde 3.
Detta är lätt att bekräfta:

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 4-4 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\bar{u}_6$$

Svar: $\bar{u}_1$ är egenvektor med egenvärde 2,
$\bar{u}_3$ är egenvektor med egenvärde 1,
$\bar{u}_4$ och $\bar{u}_6$ är egenvektorer med egenvärde 3.

2. Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ vara vektorerna i standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Skriv ned gångertabellen för vektorprodukten i standardbasen.

Svar:

Höger faktor

	$\times$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
vänster faktor	$\bar{e}_1$	$\bar{0}$	$\bar{e}_3$	$-\bar{e}_2$
	$\bar{e}_2$	$-\bar{e}_3$	$\bar{0}$	$\bar{e}_1$
	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_2$	$-\bar{e}_1$	$\bar{0}$

3. Punkterna $A=(8,2,0)$, $B=(7,3,1)$ och $C=(5,6,-5)$ är hörnen i triangeln ABC.

a) Beräkna längderna av sidorna i triangeln ABC

Lösning. Först räknar man ut vektorerna, sedan tar man normerna av dessa.

$$\vec{AB} = B-A = (7,3,1)-(8,2,0) = (-1,1,1)$$
$$\vec{AC} = C-A = (5,6,-5)-(8,2,0) = (-3,4,-5)$$
$$\vec{BC} = C-B = (5,6,-5)-(7,3,1) = (-2,3,-6)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$
$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2} = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

Svar: Sidan AB har längd $\sqrt{3}$, sidan AC har längd $5\sqrt{2}$ och sidan BC har längd 7.

b) Beräkna arean av triangeln ABC.

Lösning. Den arean kan beräknas som $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$.
Sarrus-uppställning för $\vec{AB}\times\vec{AC}$ är

$$\begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -5 & -3 & 4 \end{array}$$

så $\vec{AB}\times\vec{AC} = -5\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 + 3\bar{e}_3 - 4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 =$
$= -9\bar{e}_1 - 8\bar{e}_2 - \bar{e}_3$

Koll: $(-1,1,1)\cdot(-9,-8,-1) = 9-8-1 = 0$ OK
$(-3,4,-5)\cdot(-9,-8,-1) = 27-32+5 = 0$ OK

Alltså är arean $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\|(-9,-8,-1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2+(-8)^2+(-1)^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{81+64+1} = \frac{1}{2}\sqrt{146}$$

$146 = 2\cdot 73$, så kvadratroten går just inte att förenkla mera.

Men $\sqrt{146} \approx \sqrt{144} = 12$

Svar: Arean är $\frac{1}{2}\sqrt{146}$

---

c) Ange på parameterfri form ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. Från (b) vet vi att $(-9,-8,-1)$ är en normal till planet, men $(9,8,1)$ är nog enklare att räkna med. En punkt i planet är A, så att ställa upp planets ekvation på punkt–normal-form är lätt gjort:

$$0 = (9,8,1)\bullet((x,y,z)-(8,2,0))$$
$$= (9,8,1)\bullet(x-8,y-2,z) = 9(x-8)+8(y-2)+z =$$
$$= 9x-72+8y-16+z = 9x+8y+z-88$$

Koll:

$(x,y,z)=A=(8,2,0)$ ger $HL = 9x+8y+z-88 = 9\cdot 8+8\cdot 2+0-88 = 72+16-88 = 0$

$(x,y,z)=B=(7,3,1)$ ger $HL = 9x+8y+z-88 = 9\cdot 7+8\cdot 3+1-88 = 63+24+1-88 = 0$

$(x,y,z)=C=(5,6,-5)$ ger $HL = 9x+8y+z-88 = 9\cdot 5+8\cdot 6-5-88 = 45+48-5-88 = 0$

Ekvationen stämmer!

Svar: Planets ekvation är $9x+8y+z=88$.

d) Avgör om linjen

$$\ell: (x,y,z) = (8+t, 1-2t, 6+7t) \text{ för } t \in \mathbb{R}$$

ligger i samma plan som punkterna A, B och C.

<u>Lösning</u>. Det enklaste sättet att avgöra detta är att sätta in uttrycken för punkter på linjen ℓ i ekvationen från (c) för planets ekvation $9x+8y+z=88$:

$$VL = 9x+8y+z = 9(8+t)+8(1-2t)+(6+7t) =$$
$$= 72+9t+8-16t+6+7t = (9-16+7)t+(72+8+6) =$$
$$= 86 \neq 88 = HL$$

Det blev inte lika, så linjen ℓ ligger <u>inte</u> i planet. Av det faktum att t-termerna tar ut varandra kan vi rentav se att ingen enda punkt på linjen ligger i planet, utan linjen och planet är parallella.

<u>Svar</u>: Linjen ℓ ligger <u>inte</u> i det planet.

4 Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Lösning.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} \; (1) = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \; (-1)\,(-4) = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 20 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 1 & 20 & 5 \end{vmatrix} \; (2)\,(5) = -1 \cdot \begin{vmatrix} -9 & 9 & 0 \\ -6 & 2 & -1 \\ -29 & 30 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -9 & 9 \\ -29 & 30 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-9 \cdot 30 - 9 \cdot -29) = 9(30-29) = 9$$

Svar: 9

5a) Dela upp vektorn $\bar{u} = 6\bar{e}_2$ i komposanter $\bar{w}_1$ och $\bar{w}_2$ parallella med respektive vinkelräta mot vektorn $\bar{v} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Den parallella komposanten $\bar{w}_1$ är helt enkelt ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{v}$, $\mathrm{proj}_{\bar{v}}(\bar{u})$.

$$\overline{w}_1 = \text{proj}_{\overline{v}}(u) = \frac{\overline{u}\bullet\overline{v}}{\overline{v}\bullet\overline{v}}\overline{v} = \frac{(0,6,0)\bullet(1,1,1)}{(1,1,1)\bullet(1,1,1)}\overline{v} = \frac{0+6+0}{1+1+1}\overline{v} = 2\overline{v}$$

$$= 2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$$

Alltså är den vinkelräta komposanten:

$$\overline{w}_2 = \overline{u} - \overline{w}_1 = 6\overline{e}_2 - (2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3) = -2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$$

Svar: Parallella komposanten $\overline{w}_1 = 2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 2\overline{e}_3$
och vinkelräta komposanten $\overline{w}_2 = -2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 - 2\overline{e}_3$.

Koll: $\overline{v}\bullet\overline{w}_2 = (\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)\bullet(-2\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 - 2\overline{e}_3) = 1\cdot -2 + 1\cdot 4 + 1\cdot -2 = -2+4-2 = 0$

Stämmer

b) Hitta en vektor $\overline{w}_3 \neq \overline{0}$ som är vinkelrät mot både $\overline{w}_1$ och $\overline{w}_2$.

Lösning. Ett sätt är att använda kryssprodukten. Ett annat är att ställa upp det som ett ekvationssystem:

Vi söker en vektor $\overline{w}_3 = (x,y,z)$ sådan att

$$\begin{cases} 0 = \overline{w}_1 \bullet \overline{w}_3 = (2,2,2)\bullet(x,y,z) = 2x+2y+2z \\ 0 = \overline{w}_2 \bullet \overline{w}_3 = (-2,4,2)\bullet(x,y,z) = -2x+4y-2z \end{cases}$$

På utvidgad-matrisform blir det

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot\frac{1}{6} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Så $y=0$, och $x+z=0$, så lösningarna är $(x,y,z) = (-t,0,t)$ för $t\in\mathbb{R}$. En lösning är alltså (för $t=-1$) att $\overline{w}_3 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$.

Svar: $\overline{w}_3 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3$

c) Beräkna vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{w}_3$.

Lösning: Man börjar lämpligen med att beräkna skalärprodukten $\bar{u} \cdot \bar{w}_3 = (0,6,0) \cdot (1,0,-1) = 0+0+0 = 0$. Eftersom den är 0 så är vektorerna ortogonala; vinkeln är $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.
(Det är egentligen rätt uppenbart: $\bar{u} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$, och $\bar{w}_3$ är vinkelrät mot både $\bar{w}_1$ och $\bar{w}_2$.)

Svar: Vinkeln är $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

6. Låt B och C vara inverterbara 3×3-matriser. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

	Svar:
(a) $\det(B+C) = \det(B) + \det(C)$	FALSKT
(b) $\det(B+C) = \det(B)\det(C)$	FALSKT
(c) $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$	SANT
(d) $\det(B^{-1}) = \det(B)$	FALSKT
(e) $\det(BC) = \det(B) + \det(C)$	FALSKT
(f) $\det(BC) = \det(B)\det(C)$	SANT
(g) $\det(B^T) = 1/\det(B)$	FALSKT