

Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innehålla ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

1. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har i berörda standardbaser matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & -7 & -3 \\ 4 & -1 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestäm F :s nollrum och F :s värderum, och uttryck dem som linjära höljen genererade av en uppsättning basvektorer i respektive rum.

2. Låt $A = [(3, 1, -2, 4), (7, 3, 3, 7)]$ och $B = [(4, 2, -3, 3), (23, 9, -32, 26)]$ vara två underrum till \mathbb{R}^4 . Bestäm om möjligt en bas i skärningsrummet $A \cap B$.

3. Bestäm längderna av och vinkeln mellan vektorerna \mathbf{e}_1 och $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ i det euklidiska rummet E för vilket skalärprodukten är fixerad till

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5x_3y_3,$$

där (x_1, x_2, x_3) och (y_1, y_2, y_3) är koordinaterna för \mathbf{u} respektive \mathbf{v} i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

4. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har det linjära höljet $[(3, 2, 2)]$ som sitt nollrum, har $(1, 0, 1)$ som en egenvektor med egenvärde -2 , och avbildar $(1, 3, 0)$ på $(3, 1, 0)$. Bestäm F :s matris i standardbasen och avgör om operatoren är inverterbar eller ej.

5. Utgå från att (x, y, z) betecknar koordinater i ett ON-system och förklara vad ekvationen $2xz + y^2 = 2$ beskriver för typ av yta. Bestäm speciellt avståndet mellan ytan och origo, samt avgör om någon rotationssymmetri föreligger (bestäm i så fall, uttryckt i det givna ON-systemet, ekvationen för rotationsaxeln).

6. Låt M vara ett underrum till \mathbb{E}^4 , definierat enligt

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $v = (16, 8, 3, 2)$ på M .

7. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta - 2 \\ \beta - 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

där $\beta \in \mathbb{R}$. Bestäm de värden på β för vilka operatoren är diagonaliseringbar. Ange även för respektive av dessa värden en bas av egenvektorer till F .

8. Låt \mathcal{S} vara det linjära rummet av alla reellvärda och symmetriska 2×2 -matriser, och beteckna med $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ matrisuppsättningarna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ respektive } \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Visa att $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ är en bas i \mathcal{S} . Visa sedan att även $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ är en bas i \mathcal{S} . Specificera i detta sammanhang basbytesmatrisen T i ett byte från \mathbf{e} -basen till \mathbf{f} -basen. Bestäm slutligen koordinaterna för matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$.

MMA129 / Lösningar till tentamen 2014-01-17

① $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har i berörda standardbasen matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & -7 & -3 \\ 4 & -1 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dvs $\dim V(F) = 2$, $\dim N(F) = 5-2=3$, och

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{N(F)} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0\} \\ = \{(-3r-s-t, -3r+2s, r, s, t) : r, s, t \in \mathbb{R}\} \\ = \{(-3, -3, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)\} \\ \underline{V(F)} = \{(2, -3, 4), (-1, 2, -1)\} \end{array} \right.$$

② $A = \begin{bmatrix} (3, 1, -2, 4) \\ u_1 \\ (7, 3, 3, 7) \\ u_2 \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^4$, $B = \begin{bmatrix} (4, 2, -3, 3) \\ v_1 \\ (23, 9, -32, 26) \\ v_2 \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^4$

Variet vektor $w \in A \cap B$ uppfyller relationen

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ för entydiga koordinater

(α_1, α_2) resp. (β_1, β_2) . Ekvationen $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ motsvaras av den utökade koefficientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & 23 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ -2 & 3 & -3 & -32 \\ 4 & 7 & 3 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 9 & 1 & -14 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 & -34 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs } \begin{cases} \alpha_1 = 7\beta_2 \\ \alpha_2 = -2\beta_2 \\ \beta_1 = -4\beta_2 \end{cases} \quad \text{dvs } w = 7\beta_2(3, 1, -2, 4) - 2\beta_2(7, 3, 3, 7) \\ = \beta_2(21-14, 7-6, -14-6, 28-14) \\ = \beta_2(7, 1, -20, 14)$$

dvs en bas i $A \cap B$ är t.ex. $(7, 1, -20, 14)$

③ $\langle u | v \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + 5x_3y_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{där koordinaterna är för } u \text{ och } v \text{ i basen } e_1, e_2, e_3$$

V ; har att

$$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle} = \sqrt{(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\|e_2 - e_3\| = \sqrt{\langle e_2 - e_3 | e_2 - e_3 \rangle} = \sqrt{(0, 1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0, 1, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}} = \sqrt{6} \quad \text{forts.}$$

(3) förs. Vinkeln θ mellan vektorerna e_1 och $e_2 - e_3$ ges av

$$\langle e_1 | e_2 - e_3 \rangle = \|e_1\| \cdot \|e_2 - e_3\| \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{där } \langle e_1 | e_2 - e_3 \rangle = (100) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (100) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{och därmed } 3 = \sqrt{2} \sqrt{6} \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

dvs $\theta = \pi/6$ ty vinkelar mellan vektorer är definierade att tillhöra intervallet $[0, \pi]$.

Sammanfattning

$$\begin{cases} \text{Längd}(e_1) = \sqrt{2} \\ \text{Längd}(e_2 - e_3) = \sqrt{6} \end{cases} \quad \theta_{e_1, e_2 - e_3} = \pi/6$$

(4) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller allt $\begin{cases} N(F) = \{(3, 2, 2)\} \\ F(1, 0, 1) = -2(1, 0, 1) \\ F(1, 3, 0) = (3, 1, 0) \end{cases}$
Beteckna F :s matris i standardbasen med A .

Ds gäller utifrån F :s egenskaper att

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvs att $A \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_C$, och därmed att

$$A = C B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(0+6+2)-(0+9+0)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & 2 \\ 12 & -4 & -14 \end{pmatrix}$$

F är inte inverterbar ty $\det(A) = \det(C) (\det(B))^{-1} = 0$
utifrån att C innehåller en nollkolonn och därmed har determinanten lika med noll.

(5) $2 = 2xz + y^2 = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^T G X$

där (x, y, z) är koordinater i ett ON-system, och där G är matrisen till en symmetrisk avbildning Γ (ty G är symmetrisk i en ON-bas). Spektraletsatsen ger att det finns en ON-bas av egenvektorer. Speciellt är avbildningen diagonalisbar.

Eigenverden: $0 = \det(G - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1)$
 $= -(2+\lambda)(2-\lambda)^2$

5) Forts. $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1: G - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t_1 \neq 0 \\ \lambda_{2,3} = 1: G - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_{2,3} = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

$\minst en av t_2, t_3 \neq 0$
är skild från noll.

Def. $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

som är en ortogonal basbytessmätrix för ett basbyte från den givna basen e_1, e_2, e_3 till en ON-bas $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ av egenvektorer,

dvs $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) S$ (som inducerar sambandet $x = S \tilde{x}$)

Vi har att $2 = 2xz + y^2 = \tilde{x}^T G \tilde{x} = (S \tilde{x})^T S G S^{-1} S \tilde{x}$
 $= \tilde{x}^T S^T S \tilde{G} \tilde{x} = \tilde{x}^T \tilde{G} \tilde{x} = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x}$
 $\text{ty } S^T = S^{-1} \text{ ty } S \text{ är ortogonal}$
 $= -\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 \text{ dvs } 2 + \tilde{x}^2 = \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$

dvs ekvationen beskriver en enmantlad rotationshyperboloid med rotationsaxeln parallell med $\tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$, och därmed lydande ekv:en $(x, y, z) = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, och med avståndet till origo lika med $\sqrt{2}$ (det senare ty $\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 2 + \tilde{x}^2 \geq 2 + 0$ och avståndet är lika med avståndet till \tilde{x} -axeln).

6) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 : 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ är ett underrum till } \mathbb{E}^4$. En allmän vektor i M kan uttryckas enligt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, -x_1 - x_2, -2x_1 - x_2) = r \underbrace{(1, 0, -1, -2)}_{u_1} + s \underbrace{(0, 1, -1, -1)}_{u_2}$, $r, s \in \mathbb{R}$

Gram-Schmidtts ortog. metod ger (med standardskalarprod:en ty \mathbb{E}^4)

$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1, -2) \\ f_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1 = (0, 1, -1, -1) - \langle (0, 1, -1, -1) | \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1, -2) \rangle \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, -1, -2) \\ = (0, 1, -1, -1) - \frac{1}{6}(0+0+1+2)(1, 0, -1, -2) = \frac{1}{2}((0, 2, -2, -2) - (1, 0, -1, -2)) = \frac{1}{2}(-1, 2, -1, 0) \\ e_2 = \frac{1}{\|f_2\|} f_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1, 0) \end{array} \right.$

Den ortogonala projektionen av $v = (16, 8, 3, 2)$ på M , dvs v_M , ges

enligt $v_M = \langle v | e_1 \rangle e_1 + \langle v | e_2 \rangle e_2$
 $= \frac{1}{6}(16+0-3-4)(1, 0, -1, -2) + \frac{1}{6}(-16+16-3+0)(-1, 2, -1, 0)$
 $= \frac{3}{2}(1, 0, -1, -2) - \frac{1}{2}(-1, 2, -1, 0) = \underline{(2, -1, -1, -3)}$.

7) $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har i basen e_1, e_2, e_3 matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta-2 \\ \beta-2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Eigenvärdesekvationen lyder

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\lambda & \beta-2 \\ \beta-2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{\text{Utv. efter kolonn 2}}{=} (\beta-\lambda)(1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ \beta-2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda-\beta)$$

Om $\beta \neq 2, 5$ är alla eigenvärdena olika varför det finns en bas av egenvektorer och F är diagonalisbar. Om $\beta=2$ eller $\beta=5$ har vi ett dubbel eigenvärde varför diagonalisbarheten avgörs av om motsvarande egenrum är tvådimensionellt eller inte.

$\beta=2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{1,2} = 2 \quad \text{ger} \quad A - \lambda_{1,2} E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{dvs egenrummet i fråga är tvådimensionellt} \\ \text{var i } (1,0,0), (0,1,0) \text{ är en bas} \end{array} \right.$$

$$\lambda_3 = 5 \quad \text{ger} \quad A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs } (0,0,1) \text{ är en basvektor i egenrummet}$$

$\beta=5$

$$\lambda_{2,3} = 5 \quad \text{ger} \quad A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs egenrummet i fråga är endimensionellt} \\ \text{varför det inte existerar någon bas} \\ \text{av egenvektorer. Detta innebär att } F \\ \text{inte är diagonalisbar.}$$

$\beta \neq 2, 5$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \quad \text{ger} \quad A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-2 & \beta-2 \\ \beta-2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta-2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ty } \beta \neq 2} \\ \lambda_2 = 5 \quad \text{ger} \quad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-5 & \beta-2 \\ \beta-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-5 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = \beta \quad \text{ger} \quad A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 2-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 \\ \beta-2 & 0 & 5-\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ty } \beta \neq 2} \end{array} \right.$$

Sammanfattning

β

Diagonalisbar

En bas av egenvektorer

$\neq 2, 5$

JA

$(3, \beta-2, 2-\beta), (0, \beta-2, 5-\beta), (0, 1, 0)$

$= 2$

JA

$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$= 5$

NEJ

existerar ej

8) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

Givet $\begin{cases} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$

a) Testekv. för e_1, e_2, e_3 ihopsumling

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ dvs } e_1, e_2, e_3 \text{ är linj. obero. v.s.v.}$$

b) Vi har att $f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -e_1 + 3e_2 + 2e_3$

$$\begin{aligned} f_2 &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \\ f_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2e_1 + e_2 - 2e_3 \end{aligned}$$

$$\text{dvs } (f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_2, e_3) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{basbytesmatrix } T}$$

$$\text{där } T \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{dvs } \text{rang } T = 3 \text{ dvs } T \text{ är invertierbar}$$

dvs f_1, f_2, f_3 är en bas utifrån att e_1, e_2, e_3 är en bas v.s.v.

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + 3e_3 = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= (f_1, f_2, f_3) T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (f_1, f_2, f_3) \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & -5 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = -f_1 - 5f_2 - 5f_3$$

dvs Koord $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{f_1, f_2, f_3} = (-1, -5, -5)$

**Tentamen 2014-01-17****POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter**

1. $N(F) = [(-3, -3, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1)]$

$$\begin{aligned} V(F) &= [(2, -3, 4), (-1, 2, -1)] \\ &= [(1, 0, 5), (0, 1, 2)] \end{aligned}$$

2. En bas i $A \cap B$ är t.ex. $(7, 1, -20, 14)$

3. $\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{2}$

$$\|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\| = \sqrt{6}$$

$$\theta_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3} = \pi/6$$

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -2 & 1 & 2 \\ 12 & -4 & -14 \end{pmatrix}$$

Operatorn F är inte inverterbar

5. Ekvationen kan genom diagonalisering omformas till $2 = -\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$ som beskriver en enmantlad rotationshyperboloid med rotationsaxeln längs linjen $(x, y, z) = t(1, 0, -1)$, $t \in \mathbb{R}$, och med ett avstånd till origo lika med $\sqrt{2}$

1p: Korrekt bestämt en radkanonisk, eller en nästintill radkanonisk, matris som är radekvivalent med avbildningens matris, dvs i praktiken förberett för att kunna bestämma $N(F)$ och $V(F)$

3p: Korrekt bestämt en bas i och spannet för $N(F)$

1p: Korrekt bestämt en bas i och spannet för $V(F)$

1p: Korrekt formulerat en (test-)ekvation som prövar om det finns gemensamma, icke-triviala vektorer i de linjära rummen $A = [u_1, u_2]$ och $B = [v_1, v_2]$, dvs om det finns koordinater (x_1, x_2) respektive (y_1, y_2) så att

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 = y_1 v_1 + y_2 v_2$$

1p: Korrekt löst det uppkomna ekvationssystemet

3p: Korrekt från det Gaußeliminerade ekvationssystemet identifierat en bas i $A \cap B$

1p: Korrekt tolkat hur den givna skalärprodukten tillämpas

1p: Korrekt beräknat längden av vektorn \mathbf{e}_1

1p: Korrekt beräknat längden av vektorn $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$

2p: Korrekt beräknat vinkeln mellan vektorerna

1p: Korrekt tolkat nolrummet som rymmande de kolon-vektorer vilka avbildas på nollvektorn, dvs att sambandet $\mathbf{A}(3 \ 2 \ 2)^T = (0 \ 0 \ 0)^T$ gäller för avbildningsmatrisen \mathbf{A}

1p: Korrekt tolkat informationen om egenvektorn och om avbildningen av den tredje vektorn, samt korrekt sammanställt allt det givna som ett matrissamband för avbildningsmatrisen \mathbf{A}

2p: Korrekt löst den uppkomna matrisekvationen

1p: Korrekt avgjort att avbildningen inte är inverterbar

1p: Korrekt bestämt egenvärden och egenvektorer till den symmetriska avbildning som i den givna basen har den kvadratiska formen $2xz + y^2$

1p: Korrekt bestämt en ortogonal basbytesmatris som diagonaliseras den kvadratiska formen $2xz + y^2$

1p: Korrekt funnit att ekvationen geometriskt betyder en enmantlad rotationshyperboloid

1p: Korrekt funnit ekvationen för rotationsaxeln

1p: Korrekt bestämt avståndet mellan ytan och origo

6. $(2, -1, -1, -3)$

1p: Korrekt funnit en bas i M

2p: Korrekt ortonormaliserat basen

1p: Korrekt bestämt ett uttryck för den ortogonal
projektionen av vektorn $\mathbf{v} = (16, 8, 3, 2)$ på M

1p: Korrekt beräknat den ortogonal projektionen av vektorn
 $\mathbf{v} = (16, 8, 3, 2)$ på underrummet M

7. Beta Diag.bar Bas av egenvektorer

$\neq 2, 5$	Ja	$(3, \beta - 2, 2 - \beta), (0, 1, 0),$ $(0, \beta - 2, 5 - \beta)$
$= 2$	Ja	$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
$= 5$	Nej	existerar ej

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $\beta \neq 2, 5$

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $\beta = 2$

1p: Korrekt avgjort vad som gäller i fallet $\beta = 5$

1p: Korrekt i fallet $\beta \neq 2, 5$ funnit en bas av egenvektorer

1p: Korrekt i fallet $\beta = 2$ funnit en bas av egenvektorer

8. $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ har i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$
koordinaterna $(-1, -5, -5)$

1p: Korrekt visat ett vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ utgör en bas i det
linjära rummet S

1p: Korrekt visat att också $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ utgör en bas i det linjära
rummet S

1p: Korrekt funnit basbytesmatrisen T i ett basbyte från
 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$

2p: Korrekt bestämt koordinaterna för matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
i basen $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$
