Lösningsförslag TEN1 2022-02-11 MAA140

1. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna följande uttryck,
eller förklara varför ett värde inte existerar.

a) AB

Svar: Ej definierat, för A har 3 kolumner men B (som är 2×3) bara 2 rader.

b) $A-B$

Svar: Ej definierat, för A är 3×3 men B är bara 2×3.

c) BA

Lösning: Uppställning ger

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -24-36+60 & -12-20+30 & 4+8-12 \\ 30+0-30 & 15-0-15 & -5+0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) B^T

Svar: $B^T = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

e) A^{-1}

Lösning. A är 3x3, utan uppenbar nollrad eller dylikt, så det blir till att ställa upp inverteringen och räkna för att se om invers existerar.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; 9 \; -6 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & -5 & 2 & 0 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; -3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right] \; \cdot -1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Alternativ strategi för radoperationerna:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ & \\ & \end{array}
\sim
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{array}{cc} & \\ -3 & 1 \\ & \end{array}
\sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right]
\begin{array}{cc} -3 & 3 \\ & \\ & \end{array}
\sim
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 0 & 3 \end{array}\right]
\begin{array}{c} \\ \\ \cdot(-1) \end{array}
\sim
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right]
$$

<u>Koll:</u>

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -9 & -5 & 2 \\ 10 & 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \hline
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -9+10 & -5+5 & 2-2 \\ 12+18-30 & 6+10-15 & -2-4+6 \\ 30-0-30 & 15+0-15 & -5+0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Stämmer!

2 Finn alla komplexa lösningar z till ekvationen $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$. Ge ditt svar på rektangulär form.

<u>Lösning.</u> Binomiska ekvationen som denna är enklast att lösa på polär form, så vi behöver först omvandla högerledet.

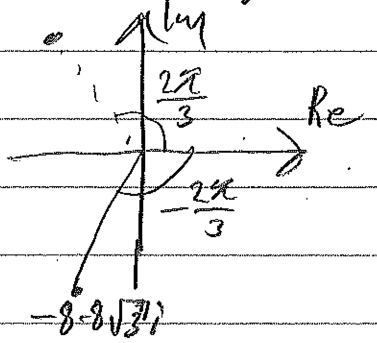
$$|-8-8\sqrt{3}i| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt{64 \cdot (1+3)} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 8 \cdot 2 = 16$$

$$\cos(\arg(-8-8\sqrt{3}i)) = \frac{-8}{|-8-8\sqrt{3}i|} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Alltså är $\frac{2\pi}{3}$ den ena kandidaten för argumentet. Den andra kandidaten är $-\frac{2\pi}{3}$, eftersom cos sväljer tecknet på vinklar. $-8-8\sqrt{3}i$ ligger i 3:e kvadranten, men $\frac{2\pi}{3}$ är ett argument i 2:a kvadranten, så rätt argument är $-\frac{2\pi}{3}$.



Det betyder att vi ska lösa ekvationen

$$z^4 = 16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Det gäller att $|z|^4 = |z^4| = \left|16\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\right| = 16 = 2^4$, så $|z| = 2$.

För den första lösningen z_1 kan vi ta $\arg(z_1) = \frac{1}{4} \cdot -\frac{2\pi}{3} =$
$= -\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$. Lösningarna ligger $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6}$ ifrån varandra, så vi får

$$\arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arg(z_3) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \text{ och}$$

$$\arg(z_4) = \arg(z_3) + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}.$$

Alltså är lösningarna

$$z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \text{ och}$$

$$z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Svar: Lösningarna är $\sqrt{3} - i$, $1 + i\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + i$ och $-1 - i\sqrt{3}$.

3 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 4y + 16z = 6 \\ 3x + 7y + 11z = 12 \\ 4x + 10y + 6z = 8. \end{cases}$

Lösning. Uppställning som utvidgad matris blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 16 & 6 \\ 3 & 7 & 11 & 12 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 5 & -6 \\ 3 & 7 & 11 & 12 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \end{array}\right] (3)(4) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 26 & -6 \\ 0 & -2 & 26 & -16 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -2 & 26 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right]$$

Att $0=-10$ saknar lösningar, så detsamma gäller för systemet i sin helhet.

Svar: Lösning saknas.

4 Låt $z=-3+2i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen $z, \bar{z}, iz, z/i, |z|,$ $i-z$ och $(5+14i)/z$. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala!

Lösning. Om $z=-3+2i$ så blir

$$\bar{z} = \overline{-3+2i} = -3-2i,$$

$$iz = i(-3+2i) = -3i+2i^2 = -2-3i,$$

$$z/i = \frac{z\cdot\bar{i}}{i\cdot\bar{i}} = \frac{z\cdot(-i)}{i\cdot -i} = \frac{-iz}{1} = -(-2-3i) = 2+3i,$$

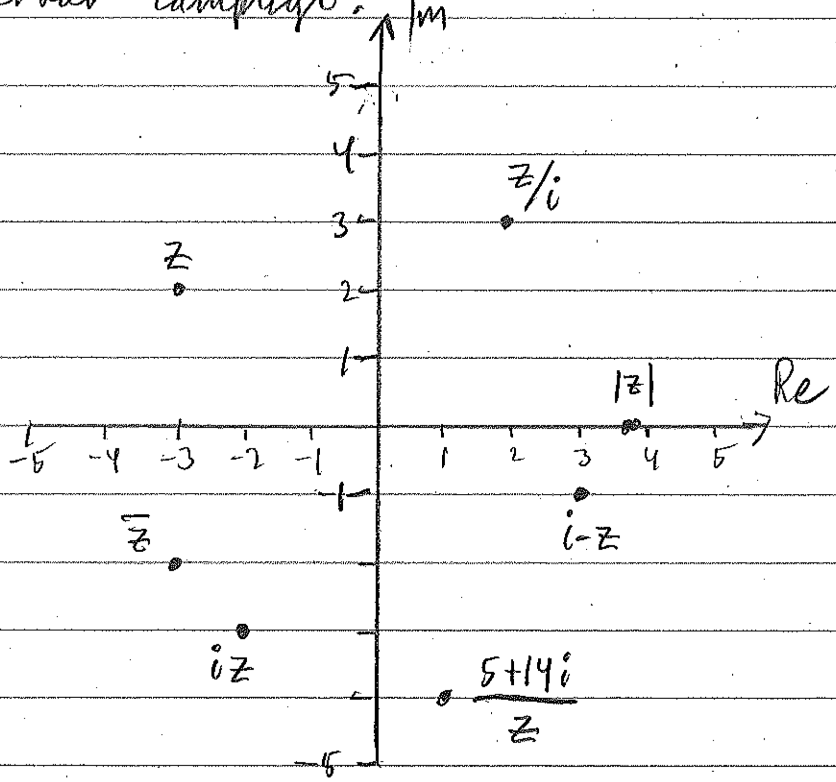
$$|z| = \sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2} = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}61,$$

$i-z = i-(-3+2i) = i+3-2i = 3-i$ och

$$\frac{5+14i}{z} = \frac{(5+14i)\cdot(-3-2i)}{(-3+2i)\cdot(-3-2i)} = \frac{-15-10i-42i-28i^2}{(-3)^2+2^2} =$$
$$= \frac{-15-52i+28}{9+4} = \frac{13-52i}{13} = \frac{13}{13} - \frac{52}{13}i = 1-4i$$

(Koll: $(-3+2i)(1-4i) = -3+12i+2i-8i^2 = -3+14i+8 = 5+14i.$)
Stämmer!

Realdel håller sig mellan -3 och $\sqrt{13}$, imaginärdel mellan -4 och 3, så intervall -5 till 5 på båda axlarna verkar lämpligt.



Svar: $\bar{z} = -3-2i$

$iz = -2-3i$

$z/i = 2+3i$

$|z| = \sqrt{13}$

$i-z = 3-i$

$\frac{5+14i}{z} = 1-4i$

5 Låt C, D och E vara inverterbara 3x3-matriser.
Låt z och w vara komplexa tal.
Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a) $\overline{wz} = \overline{w}\,\overline{z}$ SANT

(Gånger trivs med konjugat.)

b) $|z|^2 = z^2$ FALSKT

(Stämmer för reella tal, men inte för till exempel $z=i$: $|i|^2 = 1^2 = 1$ men $i^2 = -1$!
Den allmänna räknelagen är att $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.)

c) $\overline{z+w} = \overline{z} - \overline{w}$ FALSKT

(Rätt likhet är $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ och $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.)

d) $(CD)E = C(DE)$ SANT

(Associativa lagen för matrismultiplikation.)

e) $CD = DC$ FALSKT

(Matrismultiplikation är inte kommutativ.)