

**Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!**

- 1 Låt  $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$  och  $\mathbf{v}_3 = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 9\mathbf{e}_3$ , där  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  betecknar vektorerna i standardbasen. Uttryck  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$  som en linjärkombination av  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  och  $\mathbf{v}_3$ , eller påvisa att detta inte är möjligt. (5 p)

2 Beräkna determinanten  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . (6 p)

- 3 Punkten  $A = (x, y, z)$  har alla koordinater  $> 0$  (dvs. den ligger i första oktanten av rummet) och dess projektion  $B = (x, 0, z)$  på  $xz$ -planet ligger i första kvadranten.  $O = (0, 0, 0)$  är koordinatsystemets origo. Vad har  $A$  för koordinater  $(x, y, z)$ , om  $\|\vec{OA}\| = 8$ , vinkeln mellan  $\vec{OA}$  och  $\vec{OB}$  är  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ , och vinkeln mellan  $\vec{OB}$  och  $x$ -axeln är  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ ? (5 p)

- 4 Låt  $A = (2, 0, 2)$ ,  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (0, 5, 1)$  och  $D = (4, 3, 0)$  vara fyra punkter.  
 a Ange på parameterform en ekvation för planet som innehåller punkterna  $A, B$  och  $C$ . (1 p)  
 b Ange på parameterfri form en ekvation för planet som innehåller punkterna  $A, B$  och  $C$ . (2 p)  
 c Beräkna avståndet till punkten  $D$  från planet som innehåller  $A, B$  och  $C$ . (2 p)

5 Låt  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$ . Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till  $A$ , och vad de egenvektorerna har för egenvärden.  
 $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$      $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$      $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$      $\mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$      $\mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$      $\mathbf{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$  (6 p)

- 6 Låt  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

|  |   |
|--|---|
| (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ | (e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ |
| (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$   | (f) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$  |
| (c) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$                      | (g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$       |
| (d) $\ \mathbf{u}\ ^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$   |   |

Svara "sant", "falskt", eller "vet inte" för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (3 p)

Fråga 6 är den sista. På nästa sida följer några tabeller.

Värden som kan vara bra att ha:

| $n$ | $2^n$ | $3^n$ | $(10+n)^2$ | $\sqrt{n} \approx$ | $\sqrt{10+n} \approx$ |
|-----|-------|-------|------------|--------------------|-----------------------|
| 0   | 1     | 1     | 100        | 0,00               | 3,16                  |
| 1   | 2     | 3     | 121        | 1,00               | 3,32                  |
| 2   | 4     | 9     | 144        | 1,41               | 3,46                  |
| 3   | 8     | 27    | 169        | 1,73               | 3,61                  |
| 4   | 16    | 81    | 196        | 2,00               | 3,74                  |
| 5   | 32    | 243   | 225        | 2,24               | 3,87                  |
| 6   | 64    | 729   | 256        | 2,45               | 4,00                  |
| 7   | 128   | 2187  | 289        | 2,65               | 4,12                  |
| 8   | 256   | 6561  | 324        | 2,83               | 4,24                  |
| 9   | 512   | 19683 | 361        | 3,00               | 4,36                  |

| $\theta$                   | $\cos \theta$        | $\sin \theta$        |
|----------------------------|----------------------|----------------------|
| $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        |
| $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Lycka till!