Lösningar TEN2 2022-11-04 MAA140

1 Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3$ och $\bar{v}_2 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a Kontrollera att $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är ortogonala mot varandra.

Lösning. Ortogonalitet betyder att skalärprodukten är 0, så vi beräknar den.

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = (1,1,-4) \cdot (3,1,1) = 3 + 1 - 4 = 0. \quad \text{OK}$$

Svar: $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$, så $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är ortogonala.

b Finn en tredje vektor $\bar{v}_3 \neq \bar{0}$ som är ortogonal mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

Lösning. En vektor vinkelrät mot både $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$. Sarrus-uppställning:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right| \qquad \begin{aligned} \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 &= \bar{e}_1 - 12\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \\ &\quad -3\bar{e}_3 + 4\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \\ &= 5\bar{e}_1 - 13\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 = \bar{v}_3 \end{aligned}$$

Koll: $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = (1,1,-4) \cdot (5,-13,-2) = 5 - 13 + 8 = 0$ OK

$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 = (3,1,1) \cdot (5,-13,-2) = 15 - 13 - 2 = 0$ OK.

Svar: $\bar{v}_3 = 5\bar{e}_1 - 13\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ är ortogonal mot $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

Alternativ lösning. Vi söker en vektor $\bar{v}_3 = (a, b, c)$ som är ortogonal mot $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$. Det betyder att

$$0 = \bar{v}_1 \circ \bar{v}_3 = (1,1,-4) \circ (a,b,c) = a + b - 4c$$
$$0 = \bar{v}_2 \circ \bar{v}_3 = (3,1,1) \circ (a,b,c) = 3a + b + c$$

så vi har alltså att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} a + b - 4c = 0 \\ 3a + b + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{-3} \begin{cases} a + b - 4c = 0 \\ -2b + 13c = 0 \end{cases}$$

Ansätts $c = 2t$ ger $-2b + 13c = 0$ att $b = 13t$, varför $a = -b + 4c = -13t + 8t = -5t$. För $t = -1$ får vi $\bar{v}_3 = (a,b,c) = (-5 \cdot -1, 13 \cdot -1, 2 \cdot -1) = (5, -13, -2)$ som innan.

c Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att:

$$r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = 4\bar{e}_1 + 18\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3.$$

Lösning. Eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är ortogonala kan vi hitta koefficienterna r, s, t genom att ta skalärprodukter med $\bar{u} = 4\bar{e}_1 + 18\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3$.

$$r = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \circ \bar{v}_1} = \frac{(4,18,-8) \circ (1,1,-4)}{(1,1,-4) \circ (1,1,-4)} = \frac{4 + 18 + 32}{1 + 1 + 16} = \frac{54}{18} = \frac{27}{9} = 3$$

$$s = \frac{\bar{u} \circ \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \circ \bar{v}_2} = \frac{(4,18,-8) \circ (3,1,1)}{(3,1,1) \circ (3,1,1)} = \frac{12 + 18 - 8}{9 + 1 + 1} = \frac{22}{11} = 2$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \cdot 13 \\ \hline 54 \\ +18 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$t = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}_3}{\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_3} = \frac{(4,18,-8)\cdot(5,-13,-2)}{(5,-13,-2)\cdot(5,-13,-2)} = \frac{20-234+16}{25+169+4} =$$

$$= \frac{36-234}{29+169} = \frac{-198}{198} = -1$$

<u>Svar:</u> $(r,s,t) = (3,2,-1)$

<u>Alternativ lösning.</u> Vi vill lösa vektorekvationen

$$r\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-13\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\18\\-8\end{pmatrix}.$$

Uppställning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -13 & 18 \\ -4 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \quad 4 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -18 & 14 \\ 0 & 13 & 18 & 8 \end{array}\right] \cdot -\frac{1}{2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 13 & 18 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{c} -13 \quad -3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & 25 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & -99 & 99 \end{array}\right] \cdot -\frac{1}{99} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -22 & 25 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -9 \quad 22 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$ så $(r,s,t) = (3,2,-1)$.

Koll: $3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 - \bar{v}_3 = 3(1,1,-4) + 2(3,1,1) - (5,-13,-2) =$

$= (3,3,-12) + (6,2,2) + (-5,13,2) = (4,18,-8)$

Stämmer!

2 Finn alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Gör sedan en figur som visar hur dessa familjer av egenvärden ligger i planet.

Lösning. Karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$= \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{8}{4} = \left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{3}{2}\right)\left(\left(\lambda + \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{3}{2}\right) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Den har lösningarna $\lambda = 1$ och $\lambda = -2$, så dessa är egenvärdena.

Eftersom A är 2×2 kan vi plocka ut egenvektorer genom att titta på enskilda rader i $A - \lambda I$.

För $\lambda = 1$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Så $\begin{matrix} -1 & 2 & \to & 2 \\ 2 & -1 & \to & 1 \end{matrix}$ ger $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

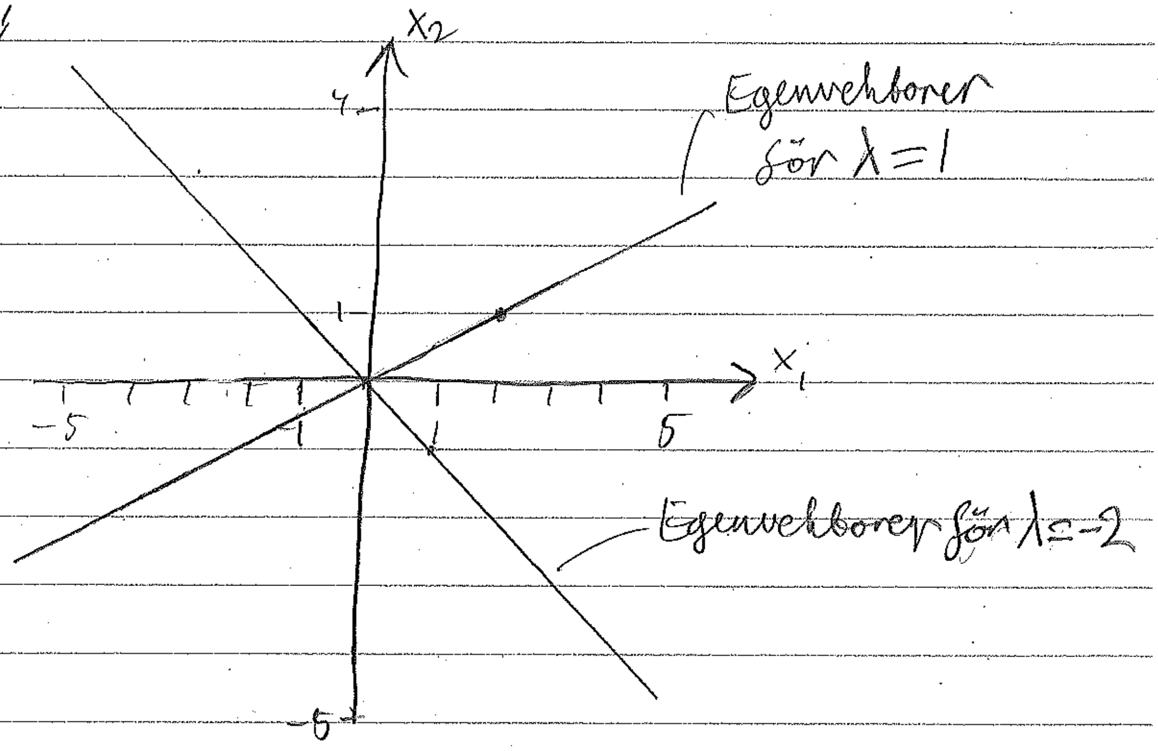
För $\lambda = -2$: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. så $\begin{matrix} 1 & 1 & \to & 1 \\ 1 & 1 & \to & -1 \end{matrix}$ ger $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Koll: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ har egenvärde 1,

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ har egenvärde -2.

Övriga egenvektorer är omskalningar av dessa.

Figur:



Svar: Vektorerna $\bar{u} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ för $t \neq 0$ är egenvektorer till egenvärde $\lambda = 1$, vektorerna $\bar{u} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ för $t \neq 0$ är egenvektorer till egenvärde $\lambda = -2$.

3 Låt $A=(7,-9,1)$, $B=(1,7,8)$, $C=(-3,6,9)$ och $D=(1,8,6)$ vara fyra punkter.

a Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna B, C och D.

Lösning. En allmän formel för en sådan ekvation skulle vara

$$(x,y,z)=B+s\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BD} \text{ för } s,t\in\mathbb{R}.$$

Vi har

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-3,6,9)-(1,7,8)=(-4,-1,1)$$
$$\overrightarrow{BD}=D-B=(1,8,6)-(1,7,8)=(0,1,-2)$$

Svar: $(x,y,z)=(1,7,8)+s(-4,-1,1)+t(0,1,-2)$ för $s,t\in\mathbb{R}$.

b Beräkna arean av triangeln BCD.

Lösning. I en triangel där två sidor är $\overrightarrow{BC}$ och $\overrightarrow{BD}$ så kan arean beräknas som

$$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\|.$$

Kryssprodukten är

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=(-4\bar{e}_1-\bar{e}_2+\bar{e}_3)\times(\bar{e}_2-2\bar{e}_3)=$$
$$=-4\bar{e}_3-8\bar{e}_2+2\bar{e}_1-\bar{e}_1=\bar{e}_1-8\bar{e}_2-4\bar{e}_3$$

Koll: $(-4,-1,1)\cdot(1,-8,-4)=-4+8-4=0$ OK,
$(0,1,-2)\cdot(1,-8,-4)=0-8+8=0$ OK.

Arean är alltså $\frac{1}{2}\|\bar{e}_1-8\bar{e}_2-4\bar{e}_3\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-8)^2+(-4)^2}=$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1+64+16} = \frac{1}{2}\sqrt{81} = \frac{1}{2}\cdot 9 = \frac{9}{2}$$

Svar: Arean är $\frac{9}{2}$.

c Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna B, C och D.

Lösning. Kryssprodukten $\vec{BC} \times \vec{BD}$ är en fungerande normal, så ekvationen på punkt-normal-form är

$$0 = (1,-8,-4) \bullet ((x,y,z) - (1,7,8)) =$$

$$= (1,-8,-4)\bullet(x-1,\ y-7,\ z-8) = x-1-8(y-7)-4(z-8) =$$

$$= x-1-8y+56-4z+32 = x-8y-4z+87$$

Koll:

$(x,y,z)=D$ ger $VL = 1-8\cdot 8-4\cdot 6+87 = 1-64-24+87 = 88-88 = 0 = HL$.

$(x,y,z)=C$ ger $VL = -3-8\cdot 6-4\cdot 9+87 = -3-48-36+87 = -51+51 = 0 = HL$

$(x,y,z)=B$ ger $VL = 1-8\cdot 7-4\cdot 8+87 = 1-56-32+87 = 0 = HL$.

Alla stämmer!

Svar: $-x+8y+4z=87$ är en ekvation på parameterfri form för planet som innehåller B, C och D.

d Beräkna avståndet mellan A och det plan som innehåller B, C och D.

Lösning. Vi vet från tidigare deluppgifter att $\bar{n}=(1,-8,-4)$ är en normal till planet. Alltså kan avståndet beräknas genom att måta den komposant av $\vec{AB}$ som är parallell med normalen.

$$\vec{AB} = B-A = (1,7,8)-(7,-9,1) = (-6,16,7)$$

$$\vec{AB} \circ \bar{n} = (-6,16,7) \circ (1,-8,-4) = -6-128-28 = -162$$

$$\bar{n} \circ \bar{n} = 1^2+8^2+4^2 = 1+64+16 = 81$$

$$\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\vec{AB}) = \frac{-162}{81}\bar{n} = -2\bar{n}$$

$$\|\operatorname{proj}_{\bar{n}}(\vec{AB})\| = \|-2\bar{n}\| = 2\|\bar{n}\| = 2\sqrt{81} = 2\cdot 9 = 18$$

Svar: Avståndet är 18.

4 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Lösning. Rad 5 och kolumn 1 är glesast, så vi kan till att börja med sikta på att glesa ur dessa ytterligare och sedan kofaktorexpandera.

$$\begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 11 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 3(-48+33) = 3 \cdot -15 = -45$$

Svar: -45

5 Låt B och C vara inverterbara 3×3-matriser, samt r vara en skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a $\det(rB) = r^3 \det(B)$ SANT
(r bryts ut ur varje rad i rB för att komma till B.)

b $\det(B+C) = \det(B) + \det(C)$ FALSKT
(Determinant trivs inte med plus.)

c $\det(B+C) = \det(B)\det(C)$ FALSKT
(Determinant är inte heller som exponentialfunktion.)

d $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$ SANT
(Följer ur $1 = \det(I) = \det(B \cdot B^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})$.)

e $\det(rB) = r\det(B)$ FALSKT
(Jämför a.)

f $\det(BC) = \det(B) + \det(C)$ FALSKT
(Determinant är inte som logaritm.)

g $\det(BC) = \det(B)\det(C)$ SANT
(Men determinant trivs med gånger!)