Lösningsförslag TEN2 2022-08-19 MAAHO

1 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Lösning</u>. Det är bara att räkna ut de olika produkterna $A\bar{u}_i$ och kolla om de blir på formen $\lambda\bar{u}_i$ för någon skalär λ.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+3+18 \\ -18+4+36 \\ -6+3+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 22 \\ 18 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_1,$$ så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-18+24 \\ -18-24+48 \\ -6-18+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = -\bar{u}_2,$$ så egenvektor med $\lambda = -1$.

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6-6 \\ 6+8-12 \\ 2+6-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{u}_3,$$ så egenvektor med $\lambda = 1$.

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+12+6 \\ 36+16+12 \\ 12+12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 31 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_4,$$ så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3+18 \\ 12+4+36 \\ 4+3+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 52 \\ 28 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_5,$$ så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 6 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-6 \\ 6+4-12 \\ 2+3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\bar{u}_6,$$ så egenvektor med $\lambda = -2$.

Svar. $\bar{u}_2$ är egenvektor med egenvärde -1.
$\bar{u}_3$ är egenvektor med egenvärde 1.
$\bar{u}_6$ är egenvektor med egenvärde -2.
$\bar{u}_1$, $\bar{u}_4$ och $\bar{u}_5$ är ej egenvektorer.

2 Låt $A=(8,1,9)$, $B=(1,1,8)$ och $C=(3,2,9)$ vara tre punkter.

a Beräkna längderna av sidorna AB, AC och BC i triangeln ABC.

Lösning. För att beräkna längden av en sträcka (vilket är vad en triangelsida är) så tar man normen av motsvarande vektor, så det är vad som behöver beräknas.

$\vec{AB} = B-A = (1,1,8)-(8,1,9) = (-7,0,-1)$
$\vec{AC} = C-A = (3,2,9)-(8,1,9) = (-5,1,0)$
$\vec{BC} = C-B = (3,2,9)-(1,1,8) = (2,1,1)$

Alltså är

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-7)^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{49+0+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2+1^2+0^2} = \sqrt{25+0+1} = \sqrt{26} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{13}$$
$$\|\vec{BC}\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

Svar: AB har längden $\sqrt{50}$, AC har längden $\sqrt{26}$ och BC har längden $\sqrt{6}$.

b Beräkna vinkeln vid B i triangeln ABC.

Lösning. Vi har att

$$\cos(\text{vinkeln } B) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\|} = \frac{(7,0,1)\cdot(2,1,1)}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{14+0+1}{\sqrt{300}} = \frac{15}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos(30^\circ)$$

Svar: Vinkeln vid B är $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Anmärkning: Det finns även ett antal skolgeometriska satser som man kan använda för att beräkna den vinkeln, till exempel cosinussatsen, men det ovanstående är den metod vi gått igenom i kursen.

c Beräkna arean av triangeln ABC.

Lösning. Kryssprodukten av två vektorer ger arean av det parallellogram som spänns upp av de vektorerna; arean av motsvarande triangel är halva arean av parallellogrammet. Alltså vill vi beräkna

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-7,0,-1)\times(-5,1,0) = (-7\bar{e}_1 - \bar{e}_3)\times(-5\bar{e}_1 + \bar{e}_2) =$$

$$= -7\bar{e}_3 + 5\bar{e}_2 - (-\bar{e}_1) = (1,5,-7)$$

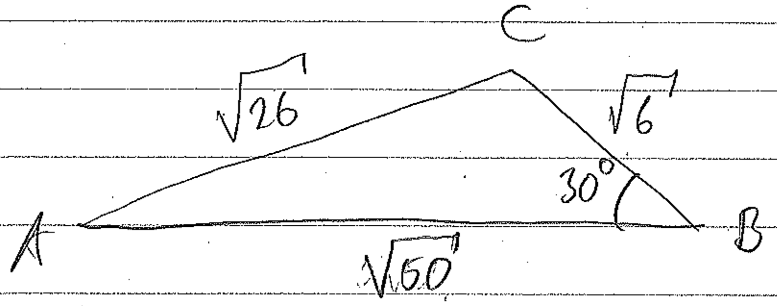
och normen därav,

$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \|(1,5,-7)\| = \sqrt{1^2+5^2+(-7)^2} = \sqrt{1+25+49} = \sqrt{75}$
$= 5\sqrt{3}$

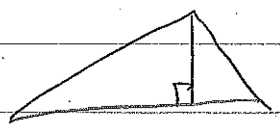
Alltså är triangelns area hälften av det.

Svar: Arean är $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Alternativ lösning. Vi vet följande om ABC:



Alltså kan vi använda trigonometri till att räkna ut att höjden mot sidan AB är $\sqrt{6}\cdot\sin(30^\circ)=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$.



Därav följer att arean är

$$\frac{\text{basen}\cdot\text{höjden}}{2} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{300}}{4} = \frac{10\sqrt{3}}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

d Ange på parameterfri form ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. En punkt i detta plan är $B=(1,1,8)$. En normal är $\vec{AB}\times\vec{AC}=(1,5,-7)$. Alltså är ekvationen

Svar: $0=(1,5,-7)\cdot\big((x,y,z)-(1,1,8)\big)$

Koll: Insättning av $(x,y,z) = A$ ger

$$HL = (1,5,-7)\bullet\big((8,1,9) - (1,1,8)\big) = (1,5,-7)\bullet(7,0,1) =$$
$$= 7+0-7 = 0 = VL.$$

Insättning av $(x,y,z) = C$ ger

$$HL = (1,5,-7)\bullet\big((3,2,9) - (1,1,8)\big) = (1,5,-7)\bullet(2,1,1) =$$
$$= 2+5-7 = 0 = VL.$$

Båda stämmer!

3 Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lösning.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ -4 \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -4 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -3\end{vmatrix} \begin{matrix}4 & 4\end{matrix} = 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & -3 & 8\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}}_{}^{\text{Triangulär!}} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot -3\cdot 9 = -27$$

Svar: -27

4 Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = 6\bar{e}_1 + 6\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = 29\bar{e}_1 + 36\bar{e}_2 + 36\bar{e}_3$.

Lösning. Uppställd som kolumnvektorer blir ekvationen

$$r\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29\\36\\36\end{pmatrix}$$

Detta är precis ett linjärt ekvationssystem, som vi kan ställa upp som utvidgad matris.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 6 & 3 & 29\\ 3 & 6 & 2 & 36\\ 2 & 7 & 3 & 36\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \\ -1\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 6 & 3 & 29\\ 1 & -1 & -1 & 0\\ 2 & 7 & 3 & 36\end{array}\right] \begin{matrix}-1 & -2\end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 6 & 3 & 29\\ 0 & -7 & -4 & -29\\ 0 & -5 & -3 & -22\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \\ -1 & 1\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 7\\ 0 & -2 & -1 & -7\\ 0 & -5 & -3 & -22\end{array}\right] \begin{matrix}\\ -3\\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad 2 \quad -1 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

dvs. $r = 8$, $-t = -9$ och $s = -1$. Lösningen är alltså $(r, s, t) = (8, -1, 9)$.

<u>Svar:</u> $(r, s, t) = (8, -1, 9)$.

<u>Koll:</u>

$$8\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-6+27 \\ 24-6+18 \\ 16-7+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

5 Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a $\bar{u} \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \bullet \bar{v} + \bar{u} \bullet \bar{w}$ SANT
(Distributiva lagen för skalärprodukt)

b $(\bar{u} \bullet \bar{v})\,\bar{w} = \bar{u}\,(\bar{v} \bullet \bar{w})$ FALSKT
(Skalärprodukt är inte associativ)

c $\bar{u} \bullet \bar{v} = -\bar{v} \bullet \bar{u}$ FALSKT
(I stället gäller $\bar{u} \bullet \bar{v} = \bar{v} \bullet \bar{u}$.)

d $\|\bar{u}\|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$ SANT

(Renbar definitionen av norm.)

e $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ SANT

(Distributiva lagen för vektorprodukt)

f $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ FALSKT

(Vektorprodukten är inte associativ.)

g $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$ SANT

(Vektorprodukten är antikommutativ.)