TEN2 2021-01-15
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men förutom penna, sudd och linjal är gradskiva och passare godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens högskola
Avdelningen för tillämpad matematik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Punkterna $A = (0, 2, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ och $C = (1, 0, 1)$ är hörnen i triangeln ABC.

a Beräkna längderna av sidorna i triangeln ABC. (2 p)

b Beräkna vinklarna i triangeln ABC. (2 p)

c Beräkna arean av triangeln ABC. (2 p)

d Ange på parameterfri form ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)

e Avgör om punkten $D = (1, -1, 5)$ ligger i samma plan som A, B och C. (1 p)

2 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a Beräkna vektorerna $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_4 = A\mathbf{v}_3$. (1 p)

b Finn alla egenvärden till matrisen A, samt för varje egenvärde en egenvektor som hör till detta. (6 p)

c Rita i ett och samma koordinatsystem ut följande: (i) vektorerna $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 och \mathbf{v}_4$, ansatta från punkten $(0, 0)$; (ii) en egenvektor för varje egenvärde till A, ansatta från punkten $(0, 0)$, samt de linjer genom $(0, 0)$ som har dessa egenvektorer som riktningsvektorer.
Kom ihåg att sätta ut en skala samt märka upp vilken vektor som är vilken. (2 p)

3 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. (6 p)

4 Låt $\mathbf{u}_1 = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$, där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ betecknar vektorerna i standardbasen. Avgör om de tre vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är linjärt oberoende. (4 p)

5 Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Låt r vara en godtycklig skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga räknelagar (identiteter eller olikheter)?

(**a**)	$r(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{w}$	(**d**)	$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$
(**b**)	$\lVert r\mathbf{u} \rVert = r \lVert \mathbf{u} \rVert$	(**e**)	$\lVert \mathbf{u} \rVert \geqslant 0$
(**c**)	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$		

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (2 p)

Fråga 5 är den sista. På nästa sida följer några tabeller.

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$
0	1	1	100	0,00
1	2	3	121	1,00
2	4	9	144	1,41
3	8	27	169	1,73
4	16	81	196	2,00
5	32	243	225	2,24
6	64	729	256	2,45
7	128	2187	289	2,65
8	256	6561	324	2,83
9	512	19683	361	3,00

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!