Lösningsförslag TEN2 2022-01-10 MAA140

1. Låt $A=(1,2,3)$, $B=(8,9,4)$ och $C=(7,6,8)$ vara tre punkter.
a) Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. En allmän ekvation för ett sådant plan (och på rätt form) är

$$(x,y,z) = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \text{ för } s,t\in\mathbb{R}.$$

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (8,9,4)-(1,2,3) = (7,7,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = C-A = (7,6,8)-(1,2,3) = (6,4,2)$$

Alltså blir ekvationen

$$(x,y,z) = (1,2,3) + s(7,7,1) + t(6,4,2) \text{ för } s,t\in\mathbb{R}.$$

Svar: $(x,y,z) = (1,2,3) + s(7,7,1) + t(6,4,2)$ för $s,t\in\mathbb{R}$.

b) Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. För att ställa upp planets ekvation på parameterfri form behöver vi en punkt i planet, till exempel A, och en normalvektor till planet. Den senare kan vi beräkna som kryssprodukten $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= (7\bar{e}_1+7\bar{e}_2+\bar{e}_3)\times(6\bar{e}_1+4\bar{e}_2+2\bar{e}_3) = \\ &= 28\bar{e}_3+14(-\bar{e}_2)+42(-\bar{e}_3)+14\bar{e}_1+6\bar{e}_2+4(-\bar{e}_1) = \\ &= (14-4)\bar{e}_1+(-14+6)\bar{e}_2+(28-42)\bar{e}_3 = 10\bar{e}_1-8\bar{e}_2-14\bar{e}_3\end{aligned}$$

Alltså är $\vec{AB} \times \vec{AC} = 2(5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3)$, så vi kan ta $5\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 - 7\bar{e}_3 = \bar{n}$ som normalvektor i den sökta ekvationen.

$$0 = \bar{n} \bullet \left((x,y,z) - A\right) = (5,-4,-7) \bullet \left((x,y,z) - (1,2,3)\right) =$$

$$= (5,-4,-7) \bullet (x-1, y-2, z-3) = 5(x-1) - 4(y-2) - 7(z-3) =$$

$$= 5x - 5 - 4y + 8 - 7z + 21 = 5x - 4y - 7z + 24$$

Svar: En ekvation för det planet är $5x - 4y - 7z = -24$.

Koll:

$(x,y,z) = A$ ger $5x - 4y - 7z = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 5 - 8 - 21 = -24$.

$(x,y,z) = B$ ger $5x - 4y - 7z = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 9 - 7 \cdot 4 = 40 - 36 - 28 = -24$.

$(x,y,z) = C$ ger $5x - 4y - 7z = 5 \cdot 7 - 4 \cdot 6 - 7 \cdot 5 = 35 - 24 - 35 = -24$.

Alltså ligger A, B, C samtliga i planet $5x - 4y - 7z = -24$.

c) Avgör om punkten $D = (6,3,6)$ ligger i samma plan som A, B och C.

Lösning. Vi fortsätter med insättning som ovan.

$(x,y,z) = D$ ger $5x - 4y - 7z = 5 \cdot 6 - 4 \cdot 3 - 7 \cdot 6 = 30 - 12 - 42 = 30 - 54 = -24$.

Svar: Ja, punkten D ligger också i samma plan.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Låt

$\bar{u}_1 = A\bar{u}_0$, $\bar{u}_2 = A\bar{u}_1$, $\bar{u}_3 = A\bar{u}_2$, $\bar{u}_4 = A\bar{u}_3$ och $\bar{u}_5 = A\bar{u}_4$. Låt $\bar{v}_1 = B\bar{v}_0$, $\bar{v}_2 = B\bar{v}_1$, $\bar{v}_3 = B\bar{v}_2$, $\bar{v}_4 = B\bar{v}_3$ och $\bar{v}_5 = B\bar{v}_4$. Rita ut vektorerna $\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_5$ och $\bar{v}_0, \ldots, \bar{v}_5$ i ett koordinatsystem. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala.

Lösning. För att kunna rita ut vektorerna behöver vi först räkna ut vilka de är.

$$\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 = A\bar{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_1 = B\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_2 = B\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

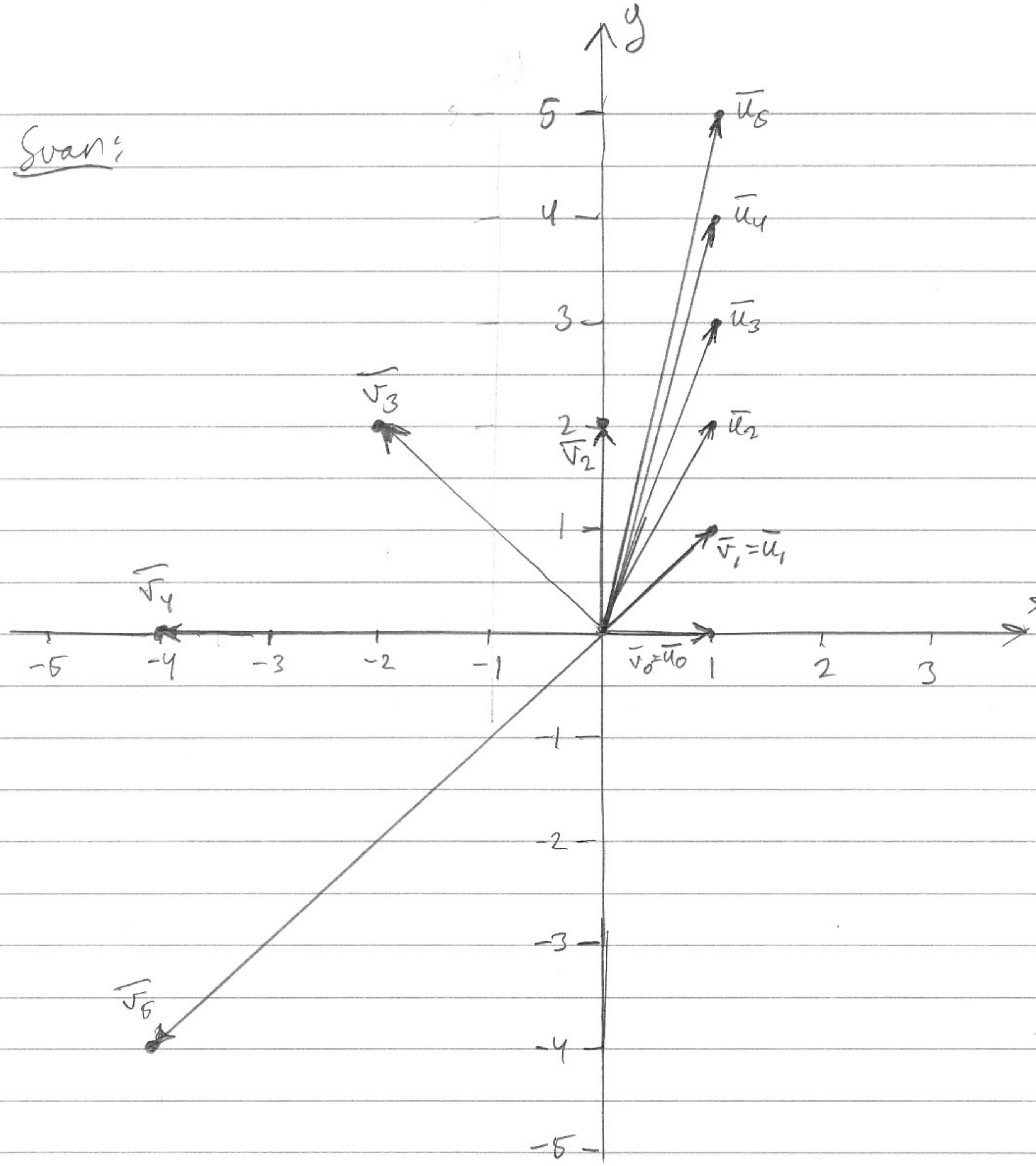
$$\bar{u}_3 = A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_3 = B\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_4 = A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_4 = B\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_5 = A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{v}_5 = B\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

x-koordinater går från -4 till $+1$ och y-koordinater från -4 till 5, så ett intervall från -5 till 5 på båda axlarna verkar lämpligt. Men om man kortar positiva sidan av x-axeln litet grand får man plats med en figur i större skala på papperet.

Svar:



y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
$\bar{u}_5$
$\bar{u}_4$
$\bar{u}_3$
$\bar{u}_2$
$\bar{v}_1 = \bar{u}_1$
$\bar{v}_0 = \bar{u}_0$
$\bar{v}_2$
$\bar{v}_3$
$\bar{v}_4$
$\bar{v}_5$

3. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

<u>Lösning</u>. Man kan ju börja med grundstrategin för radreduktion...

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \quad -4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1^{+} & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0^{-} & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0^{+} & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 0^{-} & 0 & -10 & 2 & 10 \\ 0^{+} & 0 & -16 & 0 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 2 & 10 \\ 0 & -16 & 0 & 23 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2^{+} & 0 & -3 & 0 \\ 0^{-} & 3 & -6 & 5 \\ 0^{+} & -10 & 2 & 10 \\ 0^{-} & -16 & 0 & 23 \end{vmatrix} =$$

(Nu blir det mer gå stil på räkningarna.)

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -10 & 2 & 10 \\ -16 & 0 & 23 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \end{matrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -27^{+} & 0^{-} & 35 \\ -10 & 2^{+} & 10 \\ -16 & 0^{-} & 23 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -27 & 35 \\ -16 & 23 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \end{matrix} =$$

$$\begin{matrix} 3 \end{matrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -27 & 8 \\ -16 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-21 - 40) = 4 \cdot -61 = -244$$

<u>Svar</u>: -244

4. Låt $A = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösning. Det är bara att kolla dem mot egenvektorrelationen $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ -17+12 \\ 10-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -14 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_1$$

Skulle behöva ha $\lambda = -5$ för andra element men $\lambda = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} = -3{,}5$ för tredje.

Ej egenvektor.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19-8+2 \\ 39+17-3 \\ -27-10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 \\ 53 \\ -31 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_2$$

Pekar helt annan riktning. Ej egenvektor.

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38-32-4 \\ -78+68+6 \\ 54-40-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{u}_3$$

Egenvektor, $\lambda = 1$.

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38-40-2 \\ -78+85+3 \\ 54-50-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\bar{u}_4$$

Egenvektor, $\lambda = -2$

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 \\ -17+6 \\ 10-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \lambda\bar{u}_5$$

Inget värde på λ kan göra första elementet i $\lambda\bar{u}_5$ till något annat än 0.

Ej egenvektor.

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19+24-2 \\ 39-51+3 \\ -27+30-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} = -3\bar{u}_6$$ Egenvektor, $\lambda = -3$

<u>Svar:</u> Egenvektorerna är $\bar{u}_3$ (egenvärde $\lambda=1$), $\bar{u}_4$ (egenvärde $\lambda=-2$) och $\bar{u}_6$ (egenvärde $\lambda=-3$). $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_5$ är ej egenvektorer.

5. Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 9\bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = 11\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ betecknar vektorerna i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

a) Kontrollera att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ betecknar en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal.

<u>Lösning.</u> Ortogonalitet kontrolleras med skalärprodukt.

$$\bar{v}_1 \bullet \bar{v}_2 = (1,4,9)\bullet(1,2,-1) = 1+8-9 = 0$$
$$\bar{v}_1 \bullet \bar{v}_3 = (1,4,9)\bullet(11,-5,1) = 11-20+9 = 0$$
$$\bar{v}_2 \bullet \bar{v}_3 = (1,2,-1)\bullet(11,-5,1) = 11-10-1 = 0$$

Alla parvisa skalärprodukter blir 0, så $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är ortogonal. Orto<u>normalitet</u> skulle även kräva att $\|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = \|\bar{v}_3\| = 1$, men det ser man lätt på de tre övriga skalärprodukterna att normerna inte alls blir 1:

$$\bar{v}_1 \bullet \bar{v}_1 = 1^2+4^2+9^2 = 1+16+81 = 98 \qquad (\text{så } \|\bar{v}_1\| \approx 10)$$
$$\bar{v}_2 \bullet \bar{v}_2 = 1^2+2^2+(-1)^2 = 1+4+1 = 6 \qquad (\text{så } \|\bar{v}_2\| \approx 2{,}5)$$
$$\bar{v}_3 \bullet \bar{v}_3 = 11^2+(-5)^2+1^2 = 121+25+1 = 147 \qquad (\text{så } \|\bar{v}_3\| \approx 12)$$

<u>Svar:</u> $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är ortogonala men ej normerade.

b) Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = 12\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 30\bar{e}_3$

Lösning. Eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är ortogonala så kan man beräkna r, s, t medelst skalärprodukt med vektorn vars koefficient de är, utan att behöva ta hänsyn till de andra vektorerna. (Då dessa vektorer emellertid inte är normerade så behöver man dela produkten med normen i kvadrat för att kompensera för längden.) Låt $\bar{u} = 12\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 30\bar{e}_3$. Då är

$$r = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \bullet \bar{v}_1} = \frac{(12,3,30) \bullet (1,4,9)}{98} = \frac{12+12+270}{98} = \frac{294}{98} = \frac{147}{49} = \frac{21}{7} = 3$$

$$s = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}_2}{\bar{v}_2 \bullet \bar{v}_2} = \frac{(12,3,30) \bullet (1,2,-1)}{6} = \frac{12+6-30}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$t = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}_3}{\bar{v}_3 \bullet \bar{v}_3} = \frac{(12,3,30) \bullet (11,-5,1)}{147} = \frac{132-15+30}{147} = \frac{147}{147} = 1$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot\, 11 \\ \hline 12 \\ 12 \\ \hline 132 \end{array}$$

Svar: $(r, s, t) = (3, -2, 1)$

Koll: $3\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3 = 3(\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 9\bar{e}_3) - 2(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3) + (11\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + \bar{e}_3) = 3\bar{e}_1 + 12\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3 - 2\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 11\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 + \bar{e}_3 = (3-2+11)\bar{e}_1 + (12-4-5)\bar{e}_2 + (27+2+1)\bar{e}_3 = 12\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 30\bar{e}_3 = \bar{u}$. Stämmer!

6 Låt B och C vara 3x3-matriser, $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ en vektor med tre element, och λ vara en godtycklig skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(a) $\|\lambda\bar{u}\| = |\lambda|\,\|\bar{u}\|$ SANT

(Räkneregel för norm och skalning.)

(b) $\det(3B) = 3\det(B)$ FALSKT

(Rätt vore att $\det(3B) = 3^3\det(B) = 27\det(B)$.)

(c) $\det(BC) = \det(B)\det(C)$ SANT

(Räkneregel för determinant och matrismultiplikation.)

(d) $\|B\bar{u}\| = \det(B)\,\|\bar{u}\|$ FALSKT

(Enkelt argument för att detta är orimligt: $\|\bar{u}\|$ och $\|B\bar{u}\|$ måste vara ≥ 0, men $\det(B)$ kan vara negativ.)

(e) $\det(B^T) = \det(B)$ SANT