Lösningar TEN2 2022-03-24 MAA140

1. Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix}1&1&0&1&0\\0&-2&1&0&3\\-1&0&5&0&0\\0&1&0&-3&1\\1&0&-1&0&-4\end{vmatrix}$$

<u>Lösning.</u> En kombination av utveckling längs rad/kolumn och rad/kolumnoperationer verkar lämpligt.

$$\begin{vmatrix}1&1&0&1&0\\0&-2&1&0&3\\-1&0&5&0&0\\0&1&0&-3&1\\1&0&-1&0&-4\end{vmatrix} \; 3 \; = \begin{vmatrix}1^+&1^-&0^+&1^-&0\\0&-2&1&0^+&3\\-1&0&5&0^-&0\\3&4&0&0^+&1\\1&0&-1&0^-&-4\end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix}0&-2&1&3\\-1&0&5&0\\3&4&0&1\\1&0&-1&-4\end{vmatrix} \; 2 \; = -1 \cdot \begin{vmatrix}0^+&-2^-&1&3\\-1&0^+&5&0\\3&0^-&2&7\\1&0^+&-1&-4\end{vmatrix} =$$

$$5$$

$$= -1 \cdot -(-2) \cdot \begin{vmatrix}-1&5&0\\3&2&7\\1&-1&-4\end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix}-1^+&0^-&0^+\\3&17&7\\1&4&-4\end{vmatrix} =$$

24
$\cdot\, 8$
192

$$= -2 \cdot -1 \cdot \begin{vmatrix}17&7\\4&-4\end{vmatrix} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix}17&7\\1&-1\end{vmatrix} = 8 \cdot (-17-7) =$$

$$= 8 \cdot -24 = -192$$

<u>Svar: -192</u>

2 Låt $A=(-4,16,12)$, $B=(6,-14,12)$, $C=(6,16,-8)$ och $D=(9,20,16)$ vara fyra punkter

a) Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. Allmän formel för sådan ekvation är

$$(x,y,z) = A + s\vec{AB} + t\vec{AC} \text{ för } s,t \in \mathbb{R}$$

(där A, B, C kan byta roller med varandra utan att ändra på att ekvationen är korrekt). Alltså har vi bara att räkna ut och sätta in.

$$\vec{AB} = B - A = (6,-14,12)-(-4,16,12) =$$
$$= (6+4, -14-16, 12-12) = (10,-30,0)$$
$$\vec{AC} = C - A = (6,16,-8) - (-4,16,12) =$$
$$= (6+4, 16-16, -8-12) = (10,0,-20)$$

Ekvationen blir alltså

Svar: $(x,y,z) = (-4,16,12) + s(10,-30,0) + t(10,0,-20)$ för $s,t \in \mathbb{R}$

Alternativa svar är t.ex.

$$(x,y,z) = (-4,16,12) + s(1,-3,0) + t(1,0,-2) \text{ för } s,t \in \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) = (-4+s+t, 16-3s, 12-2t) \text{ för } s,t \in \mathbb{R}$$

b Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. För att hitta en sådan ekvation behöver vi en punkt i planet (t.ex. A) och en normal till planet. Det senare kan vi hitta med hjälp av kryssprodukten.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (10\bar{e}_1 - 30\bar{e}_2) \times (10\bar{e}_1 - 20\bar{e}_3) =$$

$$= 10\bar{e}_1 \times 10\bar{e}_1 - 10\bar{e}_1 \times 20\bar{e}_3 - 30\bar{e}_2 \times 10\bar{e}_1 + 30\bar{e}_2 \times 20\bar{e}_3 =$$

$$= \bar{0} - 200(-\bar{e}_2) - 300(-\bar{e}_3) + 600\bar{e}_1 =$$

$$= 600\bar{e}_1 + 200\bar{e}_2 + 300\bar{e}_3 = 100(6\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3)$$

En lämplig normal är alltså vektorn (6, 2, 3). Det ger ekvationen

$$0 = (6,2,3) \bullet ((x,y,z) - (-4,16,12)) =$$

$$= (6,2,3) \bullet (x+4, y-16, z-12) = 6(x+4) + 2(y-16) + 3(z-12)$$

$$= 6x + 24 + 2y - 32 + 3z - 36 = 6x + 2y + 3z - 44$$

Svar: En parameterfri ekvation för det planet är $6x+2y+3z=44$.

Koll: $(x,y,z) = B$ ger $VL = 6\cdot 6 + 2\cdot -14 + 3\cdot 12 = 36 - 28 + 36 = 44 = HL$ OK

$(x,y,z) = C$ ger $VL = 6\cdot 6 + 2\cdot 16 + 3\cdot -8 = 36 + 32 - 24 = 44 = HL$ OK

$(x,y,z) = A$ ger $VL = 6\cdot -4 + 2\cdot 16 + 3\cdot 12 = -24 + 32 + 36 = 44 = HL$ OK.

Alla stämmer.

Alternativt så kan man hitta normalen genom att ställa upp problemet som ett ekvationssystem för normalens element.

Ansätt att normalen är (a,b,c). Villkoren att denna ska vara vinkelrät mot $\vec{AB}=(10,-30,0)$ och $\vec{AC}=(10,0,-20)$ blir

$$\begin{cases} 0=(a,b,c)\bullet(10,-30,0)=10a-30b \\ 0=(a,b,c)\bullet(10,0,-20)=10a-20c, \end{cases}$$

eller som utvidgad matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -30 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -20 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot\frac{1}{10} \\ \cdot\frac{1}{10} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1) \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \text{ dvs. } \begin{cases} a-3b = 0, \\ \phantom{a-{}} 3b-2c=0. \end{cases}$$

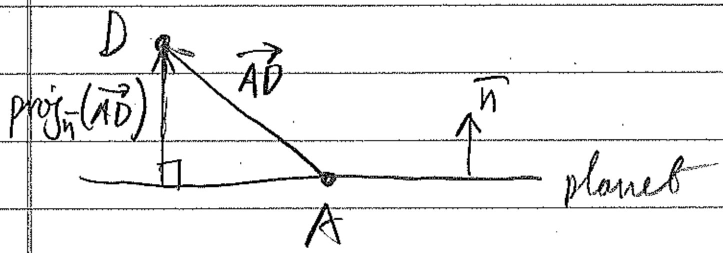
Ansättningen $c=t$ ger $3b=2t \Leftrightarrow b=\frac{2}{3}t$ och $a=3b=3\cdot\frac{2}{3}t=2t$, så varje normal är på formen

$$(a,b,c)=(2t,\tfrac{2}{3}t,t) \text{ för något } t\in\mathbb{R}.$$

För $t=3$ får man den normal $(6,2,3)$ som användes ovan, för $t=300$ får man $\vec{AB}\times\vec{AC}$.

c Beräkna avståndet mellan punkten D och det plan som innehåller punkterna A, B och C.

<u>Lösning.</u> Detta avstånd kan beräknas som $\|\mathrm{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{AD})\|$, där $\bar{n}$ är någon normal till planet ifråga.



Lämpligen tas $\bar{n} = (6,2,3)$

Vi har att $\overrightarrow{AD} = D - A = (9,20,16) - (-4,16,12) = (9+4, 20-16, 16-12) =$
$= (13,4,4)$.

$$\mathrm{proj}_{\bar{n}}(13,4,4) = \frac{(13,4,4)\cdot(6,2,3)}{(6,2,3)\cdot(6,2,3)}\bar{n} =$$

$$= \frac{13\cdot 6 + 4\cdot 2 + 4\cdot 3}{6^2+2^2+3^2}\bar{n} = \frac{78+8+12}{36+4+9}\bar{n} = \frac{98}{49}\bar{n} = 2\bar{n}$$

Vidare är $\|\bar{n}\| = \sqrt{\bar{n}\cdot\bar{n}} = \sqrt{49} = 7$, så

$$\|\mathrm{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{AD})\| = \|2\bar{n}\| = 2\cdot\|\bar{n}\| = 2\cdot 7 = 14.$$

<u>Svar</u>: Avståndet är 14.

<u>Anm.</u> Skillnaden mellan $\overrightarrow{AD} = (13,4,4)$ och $2\bar{n} = (12,4,6)$ är inte så stor, så A ligger rätt nära den punkt $D - 2\bar{n} =$ $(9,20,16) - (12,4,6) = (-3,16,10)$ i planet som är närmast D. Men A är alltså inte exakt denna punkt.

3 Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ beteckna vektorerna i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

a Skriv ned gångertabellen för skalärprodukt av vektorerna i standardbasen.

<u>Svar</u>:

$\bullet$	$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
$\bar{e}_1$	1	0	0
$\bar{e}_2$	0	1	0
$\bar{e}_3$	0	0	1

b Skriv ned gångertabellen för vektorprodukt av vektorerna i standardbasen.

<u>Svar</u>:

	$\times$	Höger faktor: $\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
Vänster faktor	$\bar{e}_1$	$\bar{0}$	$\bar{e}_3$	$-\bar{e}_2$
	$\bar{e}_2$	$-\bar{e}_3$	$\bar{0}$	$\bar{e}_1$
	$\bar{e}_3$	$\bar{e}_2$	$-\bar{e}_1$	$\bar{0}$

4 Finn alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, samt till varje egenvärde en egenvektor.

<u>Lösning</u>. Vi hittar egenvärdena genom att lösa det karakteristiska ekvationen för A.

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(1-\lambda) - 12 =$$

$$= -3 + 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 12 = \lambda^2 + 2\lambda - 15 =$$

$$= (\lambda+1)^2 - 1 - 15 = (\lambda+1)^2 - 16 = (\lambda+1)^2 - 4^2 =$$

$$= \big((\lambda+1)-4\big)\big((\lambda+1)+4\big) = \underbrace{(\lambda-3)}_{\substack{0 \text{ när} \\ \lambda=3}}\underbrace{(\lambda+5)}_{\substack{0 \text{ när} \\ \lambda=-5}}$$

Alltså är egenvärdena 3 och −5. För att hitta tillhörande egenvektorer använder vi "byt plats och ett tecken"-tricket.

$\underline{\lambda = 3}$ ger

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-3 & 4 \\ 3 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 \end{matrix} \qquad \text{Egenvektor } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -5}$ ger

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3+5 & 4 \\ 3 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 4 & -2 \end{matrix} \qquad \text{Egenvektor } \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \left(\text{även } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$\underline{\text{Koll:}}$
$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+12 \\ 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

$$A\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-8 \\ 12-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \end{pmatrix} = -5\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

<u>Svar</u>: A har egenvärdet 3 med egenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och egenvärdet −5 med egenvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

5 Låt $\bar{v}_1 = 4\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$,
$\bar{v}_2 = -4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$ och
$\bar{v}_3 = -5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a) Avgör om $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är en ortogonal följd av vektorer.

Lösning. För att vara ortogonal måste vektorerna vara parvis vinkelräta mot varandra, dvs. deras skalärprodukter måste bli 0. Det är bara att kolla.

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 4 \cdot -4 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot -2 = -16 + 12 + 4 = 0. \quad \text{OK}$$
$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 = 4 \cdot -5 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot -3 = -20 + 12 + 6 = -2.$$

Nära, men inte ortogonala.

Svar: $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är inte ortogonal som följd av vektorer.

b) Avgör om $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning. Med tanke på de vinklar (rät och nära rät) som vi såg i (a) är det nog ganska troligt, men det behöver kollas. Det är 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$, så för att dra slutsatsen att de utgör en bas räcker det med att ha kollat att de är linjärt oberoende.

Elementär metod är att ställa upp $r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = \bar{0}$ som ett linjärt ekvationssystem och se om $(r, s, t) = (0, 0, 0)$ är den enda lösningen.

$$\begin{array}{cccc} r & s & t & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -4 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & -11 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right]$$

Här ser man att $(r,s,t)=(0,0,0)$ är den enda lösningen ($13t=0$, så $t=0$, i vilket fall $-s=0$, så även $s=0$, och det medför $-2r=0$, så $r=0$), så $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3$ är linjärt oberoende, och därmed en bas.

Svar: $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

Alternativ lösning. Vi kan kolla om $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3$ är linjärt oberoende genom att beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} - \bar{v}_1 - \\ - \bar{v}_2 - \\ - \bar{v}_3 - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 4 \\ -4 & 3 \\ -5 & 3 \end{matrix} =$$

$$= 4\cdot 3\cdot -3 + 4\cdot -2\cdot -5 + -2\cdot -4\cdot 3 - (-2)\cdot 3\cdot -5 - 4\cdot -2\cdot 3 - 4\cdot -4\cdot -3 =$$
$$= -36 + 40 + 24 - 30 + 24 - 48 = 4 - 6 - 24 = -26 \neq 0$$

Det betyder att volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är $26 \neq 0$, så vektorerna ligger inte alla i samma plan. Alltså bildar de en bas för $\mathbb{R}^3$.

6 Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)? Svara "sant", "falskt" eller "vet inte".

a $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ SANT
(Kommutativa lagen för +.)

b $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{u}$ FALSKT
(Rätt identitet är $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$.)

c $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ SANT
(Kommutativa lagen för skalärprodukt.)

d $(\bar{u} \times \bar{v}) + \bar{w} = (\bar{u} + \bar{w}) \times (\bar{v} + \bar{w})$ FALSKT
(Utveckling av HL skulle ge $\bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w} + \bar{w} \times \bar{v} + \bar{w} \times \bar{w}$, av vilka $\bar{u} \times \bar{v}$ finns även i VL, och $\bar{w} \times \bar{w} = \bar{0}$. Därmed skulle det återstå $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} + \bar{w} \times \bar{v}$, vilket inte kan gälla för alla $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. I synnerhet är HL alltid vinkelrät mot $\bar{w}$!)

e $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ SANT
(Associativa lagen för +.)

f $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ FALSKT
(Vektorprodukten är inte associativ.)

g $(\bar{u} + \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times \bar{w} + \bar{v} \times \bar{w}$ SANT
(Distributiva lagen för vektorprodukt.)