Lösningsförslag TBN1 2021-08-16 MA8140

1a) Skriv $w = -5 - 5\sqrt{3}i$ på polär form.

<u>Lösning.</u> $|w| = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-5\sqrt{3})^2} =$

$$= \sqrt{5^2 + 5^2 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot (1+3)} = 5\sqrt{1+3} = 5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$$

Re(w) och Im(w) är båda negativa, så w ligger i 3:e kvadranten.

$$\tan(\arg(w)) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{\mathrm{Re}(w)} = \frac{-5\sqrt{3}}{-5} = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

så kandidater till arg(w) är $\frac{\pi}{3}$ och $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$,

men den första skulle placera w i 1:a kvadranten; bara $\arg(w) = \frac{4\pi}{3}$ stämmer med att w ligger i 3:e kvadranten, så det är rätt värde.

<u>Svar:</u> $w = 10\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

b) Lös den binomiska ekvationen $z^4 = -81$. Svara på polär form.

<u>Lösning.</u> $|z|^4 = |z^4| = |-81| = 81 = 3^4$ (enl. tabell), så $|z| = 3$. -81 är negativ reell, så $\arg(z^4) = \arg(-81) = \pi$. Det innebär att en lösning z_1 har $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$. Övriga lösningar ligger $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ifrån varandra. Det betyder

att lösningarna är

Svar:

$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$,

$z_2 = 3(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$ tg $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$,

$z_3 = 3(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$ tg $\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$,

$z_4 = 3(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$ tg $\frac{7\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$.

c) Skriv $2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$ på rektangulär form.

Lösning: $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 = 0$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Alltså är $2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 + i\cdot -1) = -2i$.

Svar: $-2i$

2 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+5y-2z=1 \\ 2x+3y+z=25 \\ x+y+2z=21. \end{cases}$

<u>Lösning</u>. På utvidgad-matrisform är systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 25 \\ 1 & 1 & 2 & 21 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \quad -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 23 \\ 0 & -4 & 4 & 20 \end{array}\right] \cdot -\tfrac{1}{4} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & 23 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} 7 \quad -5 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 26 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \cdot -\tfrac{1}{2} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 \quad 1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

<u>Svar</u>: Lösningen är $(x, y, z) = (8, 1, 6)$

<u>Koll</u>:

$VL_1 = x+5y-2z = 8+5\cdot 1-2\cdot 6 = 8+5-12 = 1 = HL_1$ OK

$VL_2 = 2x+3y+z = 2\cdot 8+3\cdot 1+6 = 16+3+6 = 25 = HL_2$ OK

$VL_3 = x+y+2z = 8+1+2\cdot 6 = 9+12 = 21 = HL_3$ OK

Alla stämmer!

3 Låt $z = 1-3i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen z, $\bar{z}$, iz, z/i, $|z|$, z^2 och $\frac{11-3i}{z}$.
Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala!

Lösning. $z = 1-3i$

$$\bar{z} = \overline{1-3i} = 1+3i$$

$$iz = i(1-3i) = i-3i^2 = i+3 = 3+i$$

$$\frac{z}{i} = \frac{i\cdot z}{i\cdot i} = \frac{3+i}{-1} = -3-i$$

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

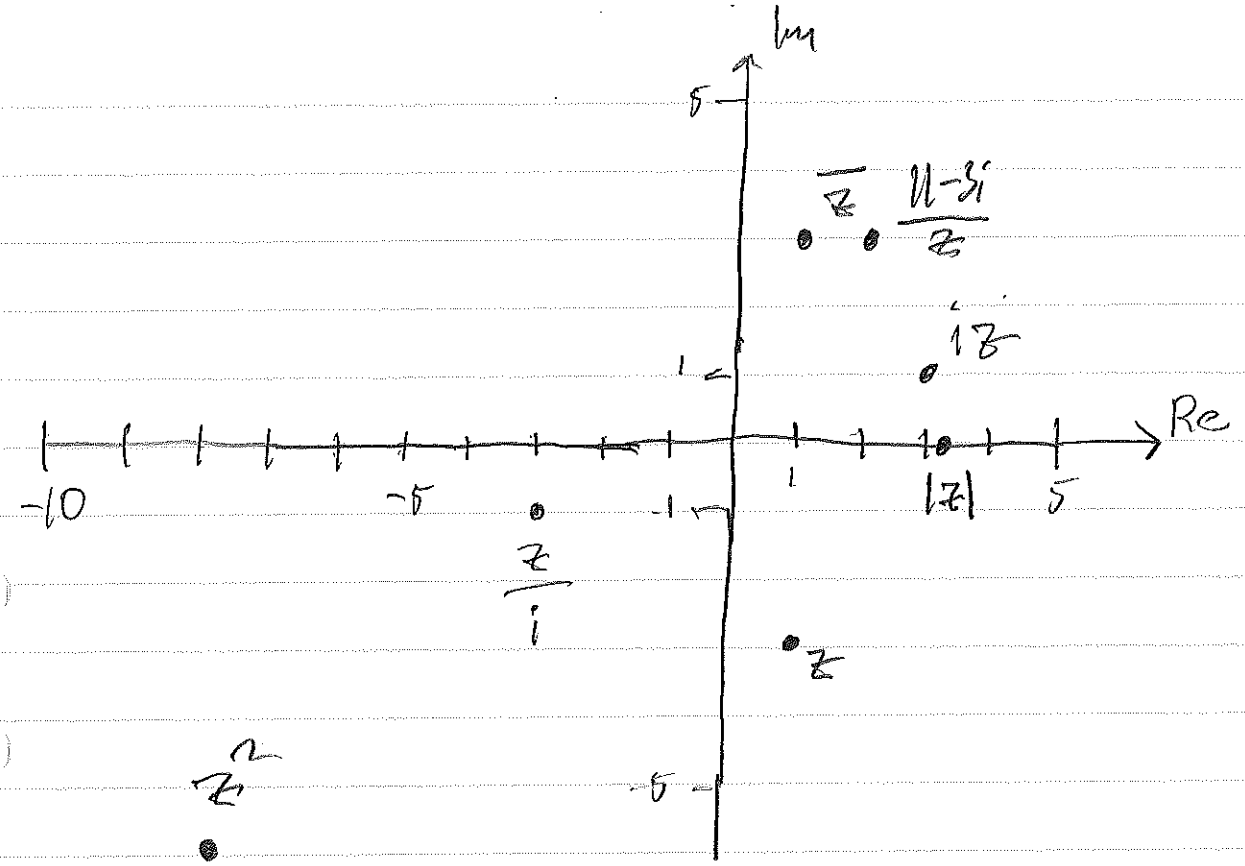
$$z^2 = (1-3i)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot -3i + (-3i)^2 = 1-6i+9i^2 =$$
$$= 1-9-6i = -8-6i$$

$$\frac{11-3i}{z} = \frac{11-3i}{1-3i} = \frac{(11-3i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{11+33i-3i-9i^2}{1^2+3^2} =$$

$$= \frac{11+30i+9}{10} = \frac{20+30i}{10} = 2+3i$$

Svar: $\bar{z} = 1+3i$, $iz = 3+i$, $z/i = -3-i$, $|z| = \sqrt{10}$, $z^2 = -8-6i$

och $\frac{11-3i}{z} = 2+3i$



4 Låt
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Beräkna följande uttryck, eller förklara varför ett värde inte existerar.

a) AB.

Svar: Existerar inte, för A har 3 kolumner men B bara 2 rader.

b) $A+B$

Svar: Existerar inte, för A är 3×3 men B är 2×3.

c) AB^T.

Lösning. $B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, så AB^T existerar.
Uppställning är

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2-5+4 & -2+10+10 \\ -3+8-6 & 3-16-15 \\ -3+6-4 & 3-12-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -1 & -28 \\ -1 & -19 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -1 & -28 \\ -1 & -19 \end{pmatrix}$

d) $A-I$

Lösning: $A - I = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & -3 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

e) A^{-1}

Lösning: A är 3x3, så A^{-1} kan existera. Det bästa sättet att veta säkert är att ställa upp och räkna ut.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \quad 1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

Nu är det tydligt att A^{-1} existerar.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Koll:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -5 & 2 \\ 3 & 8 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4-15+12 & 4-10+6 & -2+2 \\ -6+24-18 & -6+16-9 & 3-3 \\ -6+18-12 & -6+12-6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Stämmer!

5. Låt C, D och E vara inverterbara 3x3-matriser. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

Svar:

(a) $C+D = D+C$ SANT

(b) $(C+D)+E = C+(D+E)$ SANT

(c) $(C-D)-E = C-(D-E)$ FALSKT

HL här blir $(C-D)+E$, inte $(C-D)-E$.

(d) $CD = DC$ FALSKT

(e) $(CD)E = C(DE)$ SANT