Lösningsförslag TEN1 2022-09-23 MAA140

1. Låt $z=4-3i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen $z, \bar{z}, iz, z/i, |z|$, $i-z$ och $(10+5i)/z$. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala.

Lösning. $\bar{z}=\overline{4-3i}=4+3i$

$iz=i(4-3i)=4i-3i^2=3+4i$

$z/i=\frac{z\cdot i}{i\cdot i}=\frac{3+4i}{-1}=-3-4i$

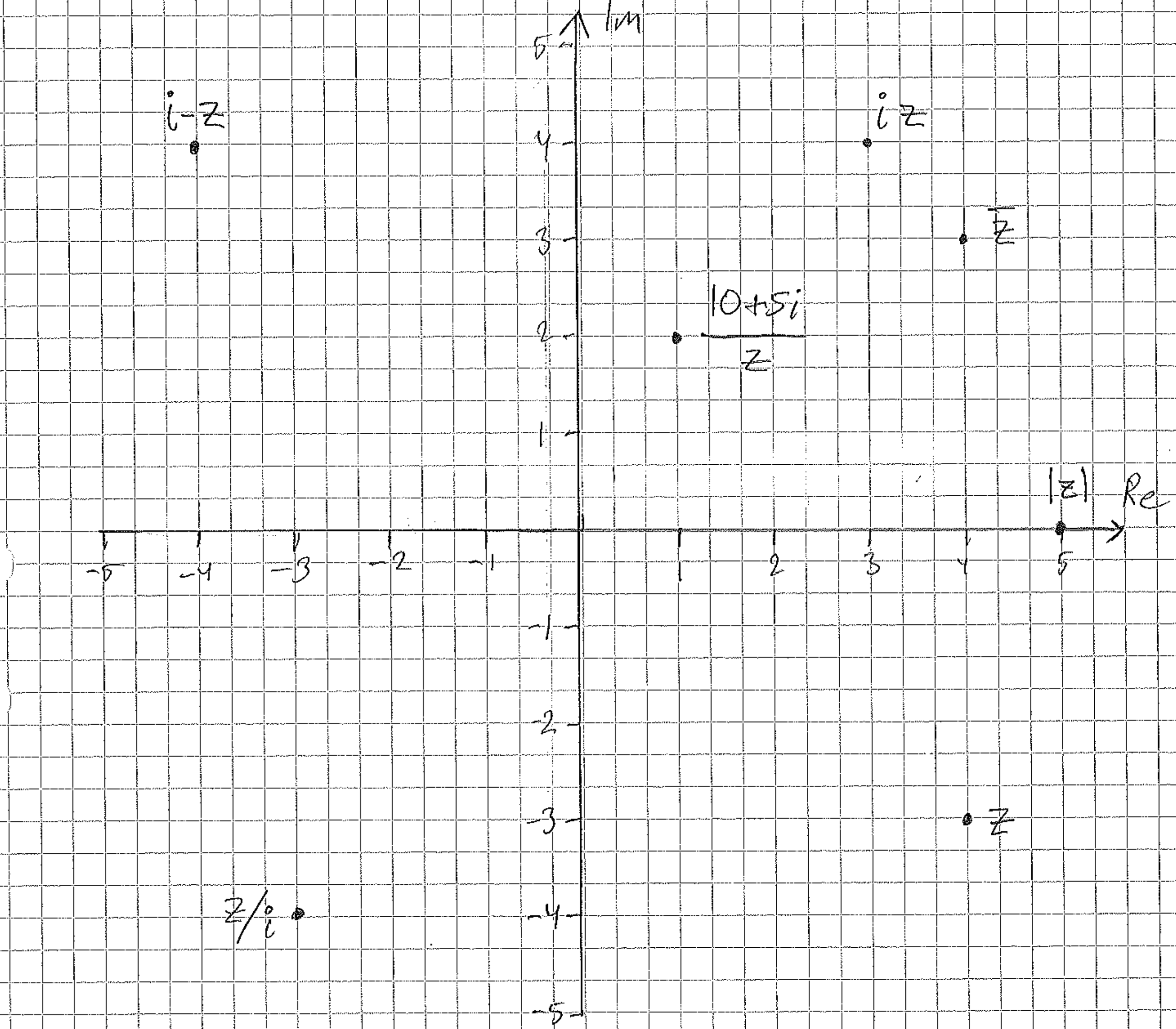
$|z|=\sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$i-z=i-(4-3i)=i-4+3i=-4+4i$

$$\frac{10+5i}{z}=\frac{(10+5i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)}=\frac{40+30i+20i+15i^2}{4^2+3^2}=$$

$$=\frac{40+50i-15}{16+9}=\frac{25+50i}{25}=1+2i$$

Alla real- och imaginärdelar håller sig i intervallet från -5 till $+5$, så det är ett lämpligt intervall att avbilda.



Svar;

$(z = 4 - 3i)$

$\bar{z} = 4 + 3i$

$iz = 3 + 4i$

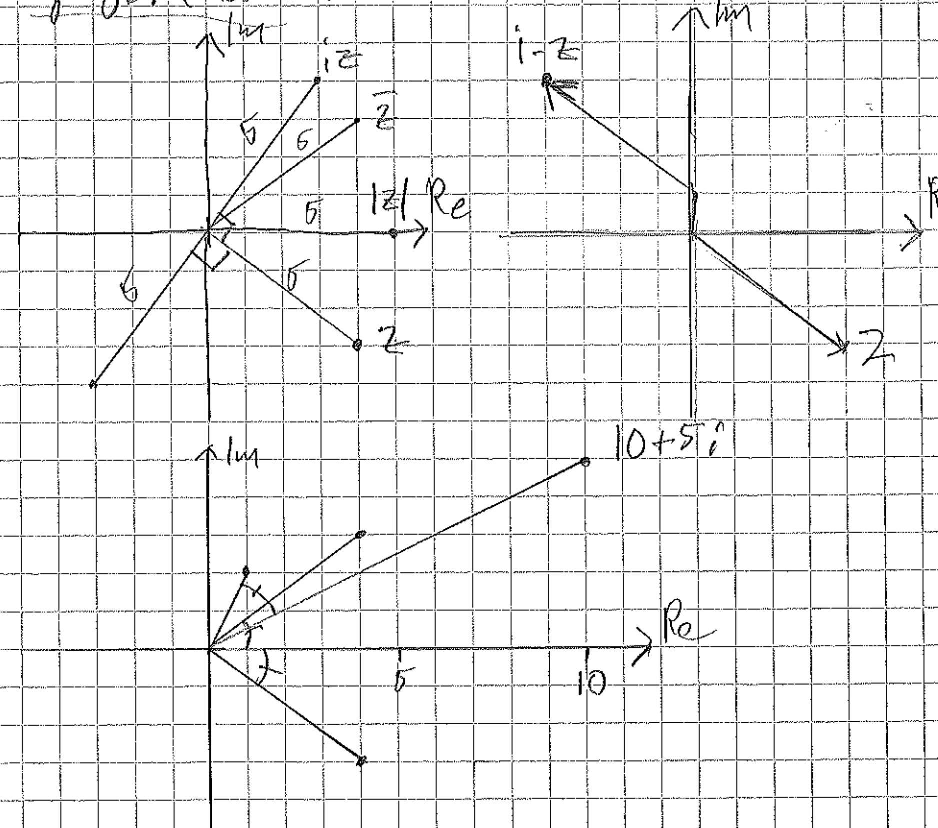
$z/i = -3 - 4i$

$|z| = 5$

$i - z = -4 + 4i$

$\frac{10+5i}{z} = 1 + 2i$

Grafisk koll !



2 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x - 2y - 10z = 1 \\ -3x + 3y + 12z = 3 \\ -4x + 2y + 13z = -1. \end{cases}$

Lösning. Uppställt som utvidgad matris blir detta

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -10 & 1 \\ -3 & 3 & 12 & 3 \\ -4 & 2 & 13 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -10 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \cdot -1 \\ 2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot\frac{1}{3} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2 \quad 3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \underline{\text{Svar}}: \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Koll:

$VL_1 = 3x - 2y - 10z = 3\cdot 9 - 2\cdot -2 - 10\cdot 3 = 27 + 4 - 30 = 1 = HL_1$

$VL_2 = -3x + 3y + 12z = -3\cdot 9 + 3\cdot -2 + 12\cdot 3 = -27 - 6 + 36 = 3 = HL_2$

$VL_3 = -4x + 2y + 13z = -4\cdot 9 + 2\cdot -2 + 13\cdot 3 = -36 - 4 + 39 = -1 = HL_3$

Alla stämmer.

3 Låt
$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix} \text{ och } B=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Beräkna följande uttryck eller förklara varför ett värde inte existerar.

a) AB (1p)

Svar: Existerar inte, för A har 3 kolumner men B har 2 rader.

b) $A-I$ (1p)

Lösning.
$$A-I=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Svar: $A-I=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 7 & 4\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$

c BA (2p)

Lösning.
$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 2 & -4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4+4-8 & 4+16-12 & -4+8-12\\ 2+10+6 & -2+40+9 & 2+20+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 8 & -8\\ 18 & 47 & 31\end{pmatrix}$$

Svar: $BA=\begin{pmatrix}-8 & 8 & -8\\ 18 & 47 & 31\end{pmatrix}$

d $B+A$ (1p)

<u>Svar:</u> Existerar ej, för B har 2 rader men A har 3 rader.

e B^T (1p)

<u>Svar:</u> $B^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

f A^{-1} (4p)

<u>Lösning.</u> Uppställning blir

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Här har vi en nollrad i VL, så den matrisen är inte inverterbar.

<u>Svar:</u> A^{-1} existerar inte.

4 Finn alla komplexa lösningar till ekvationen $z^4 = -8-8\sqrt{3}i$. Ge ditt svar på rektangulär form.

Lösning. En binomisk ekvation löses lämpligen på polär form, så vi behöver först omvandla till $-8-8\sqrt{3}i$ till polär form.

$$|-8-8\sqrt{3}i| = \sqrt{(-8)^2+(-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{8^2+8^2\cdot 3} =$$

$$= \sqrt{8^2\cdot(1+3)} = 8\cdot\sqrt{4} = 8\cdot 2 = 16$$

$$\tan(\arg(-8-8\sqrt{3}i)) = \frac{\mathrm{Im}(-8-8\sqrt{3}i)}{\mathrm{Re}(-8-8\sqrt{3}i)} = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3} =$$

$= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$, men $\frac{\pi}{3}$ är ett argument i 1:a kvadranten, medan $-8-8\sqrt{3}i$ ligger i 3:e kvadranten. Alltså är $\arg(-8-8\sqrt{3}i)$ den andra vinkeln med tangent $\sqrt{3}$, ett halvt varv ifrån $\frac{\pi}{3}$. Vi har att

$$\arg(-8-8\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}+\pi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ.$$

På polär form är ekvationen alltså

$$z^4 = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Ansätt $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Då gäller att

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \quad \text{för något heltal } n. \end{cases}$$

I tabellen ser vi att $16 = 2^4$, så $r = |z| = 2$.
De fyra lösningarna (upp till hela varv) på ekvationen för argumentet är:

$n=0$ ger $\theta_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$n=1$ ger $\theta_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

$n=2$ ger $\theta_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right) = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$n=3$ ger $\theta_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3} + 6\pi\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{2\pi + 9\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Då återstår bara att omvandla $z_k = r(\cos\theta_k + i \sin\theta_k)$ till den önskade rektangulära formen.

$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$

$z_3 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}\, i = -z_1$

$z_4 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i = -z_2$

Svar: Lösningarna är $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$,

$z_3 = -1 - \sqrt{3}\, i$ och $z_4 = \sqrt{3} - i$.

Koll: Det gäller att $z_4 = i z_3 = i^2 z_2 = i^3 z_1$.

Lösning 2. Eftersom exponenten 4 är en tvåpotens så kan denna ekvation lösas på rektangulär form, genom upprepad kvadratrotsutdragning.

Ansätt $w = z^2$. Då är $w^2 = z^4 = -8-8\sqrt{3}i$, så vi har att

$$(1): \quad Re(w)^2 - Im(w)^2 = Re(w^2) = Re(-8-8\sqrt{3}i) = -8$$
$$(2): \quad 2Re(w)Im(w) = Im(w^2) = Im(-8-8\sqrt{3}i) = -8\sqrt{3}$$
$$(3): \quad Re(w)^2 + Im(w)^2 = |w|^2 = |w^2| = |-8-8\sqrt{3}i| = 16$$

så

$$(3)+(1): \quad 2Re(w)^2 = 16-8 = 8 \Leftrightarrow Re(w)^2 = 4 \Leftrightarrow Re(w) = \pm 2$$
$$(3)-(1): \quad 2Im(w)^2 = 16-(-8) = 24 \Leftrightarrow Im(w)^2 = 12 \Leftrightarrow Im(w) = \pm 2\sqrt{3}$$

Från (2) ser vi att $Re(w)$ och $Im(w)$ har olika tecken, så de två lösningarna till $w^2 = -8-8\sqrt{3}i$ är

$w_1 = 2-2\sqrt{3}i$ och $w_2 = -2+2\sqrt{3}i$.

Nu återstår att på samma sätt lösa $z^2 = w_1$ och $z^2 = w_2$.

För $z^2 = w_1 = 2-2\sqrt{3}i$ fås

$$(1): \quad Re(z)^2 - Im(z)^2 = Re(z^2) = Re(2-2\sqrt{3}i) = 2$$
$$(2): \quad 2Re(z)Im(z) = Im(z^2) = Im(2-2\sqrt{3}i) = -2\sqrt{3}$$
$$(3): \quad Re(z)^2 + Im(z)^2 = |z|^2 = |z^2| = |2-2\sqrt{3}i| = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} =$$
$$= \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

så

$$(3)+(1): \quad 2Re(z)^2 = 4+2 = 6 \Leftrightarrow Re(z)^2 = 3 \Leftrightarrow Re(z) = \pm\sqrt{3}$$
$$(3)-(1): \quad 2Im(z)^2 = 4-2 = 2 \Leftrightarrow Im(z)^2 = 1 \Leftrightarrow Im(z) = \pm 1$$

Real- och imaginärdelar har åter olika tecken, så $z^2 = w_1$ har lösningarna $z_{11} = \sqrt{3} - i$ och $z_{12} = -\sqrt{3}+i$.

För $z^2 = w_2 = -2+2\sqrt{3}i$ fås istället

(1): $\text{Re}(z)^2 - \text{Im}(z)^2 = \text{Re}(z^2) = \text{Re}(-2+2\sqrt{3}i) = -2$

(2): $2\text{Re}(z)\text{Im}(z) = \text{Im}(z^2) = \text{Im}(-2+2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}$

(3): $\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 = |z|^2 = |z^2| = |-2+2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2} =$

$= \sqrt{4+4\cdot 3} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

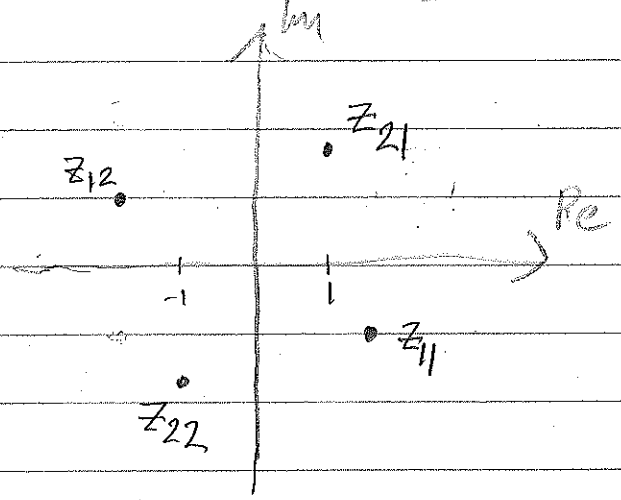
så

$(3)+(1)$: $2\text{Re}(z)^2 = 4-2 = 2 \Leftrightarrow \text{Re}(z)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \pm 1$

$(3)-(1)$: $2\text{Im}(z)^2 = 4-(-2) = 6 \Leftrightarrow \text{Re}(z)^2 = 3 \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \pm\sqrt{3}$.

Denna gång säger (2) att real- och imaginärdelarna har samma tecken, så lösningarna till $z^2 = w_2$ blir

$z_{21} = 1+\sqrt{3}i$ och $z_{22} = -1-\sqrt{3}i$.



Svar: Ordnade efter kvadranter är lösningarna $z_{21} = 1+\sqrt{3}i$ (1:a kvadranten), $z_{12} = -\sqrt{3}+i$ (2:a kvadranten), $z_{22} = -1-\sqrt{3}i$ (3:e kvadranten) och $z_{11} = \sqrt{3}-i$ (4:e kvadranten).

5 Låt C och D vara inverterbara 3x3-matriser. Låt $\bar{x}$ vara en vektor med 3 element. Låt r och s vara skalärer. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a) $CD = DC$ Svar: FALSKT
(Kommentar: Matrismultiplikation är inte kommutativ.)

b) $(rs)C = rC + sC$ Svar: FALSKT
(Kommentar: $(rs)C = r(sC)$ och $(r+s)C = rC + sC$.)

c) $(CD)\bar{x} = C(D\bar{x})$ Svar: SANT
(Kommentar: Att detta ska gälla är vad som motiverar matrismultiplikationens definition. Det är även ett specialfall av att matrismultiplikation är associativ.)

d) $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$ Svar: SANT
(Invers kastar om ordningen av matrismultiplikation.)

e) $r(C+D) = rC + rD$ Svar: SANT
(Kommentar: Distributiv lag för skalning och matrisaddition.)