TEN2 2022-01-10
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men gradskiva och passare är godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens högskola
Avdelningen för tillämpad matematik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Låt $A = (1, 2, 3)$, $B = (8, 9, 4)$, $C = (7, 6, 5)$ vara tre punkter.

a Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)

b Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (3 p)

c Avgör om punkten $D = (6, 3, 6)$ ligger i samma plan som A, B och C. (1 p)

2 Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Låt $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_2 = A\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_3 = A\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_4 = A\mathbf{u}_3$ och $\mathbf{u}_5 = A\mathbf{u}_4$. Låt $\mathbf{v}_1 = B\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_2 = B\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = B\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_4 = B\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_5 = B\mathbf{v}_4$. Rita ut vektorerna $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_5$ och $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_5$ i ett koordinatsystem. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala. (4 p)

3 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. (6 p)

4 Låt $A = \begin{pmatrix} 19 & 8 & -2 \\ -39 & -17 & 3 \\ 27 & 10 & -6 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (6 p)

5 Låt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 9\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, och $\mathbf{v}_3 = 11\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a Kontrollera att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal. (3 p)

b Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 = 12\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 30\mathbf{e}_3$. (3 p)

Vänd! Sista frågan står på nästa sida.

6 Låt B och C vara 3×3-matriser, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ en vektor med tre element, och λ vara en godtycklig skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(**a**) $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{u}\|$

(**b**) $\det(3B) = 3\det(B)$

(**c**) $\det(BC) = \det(B)\det(C)$

(**d**) $\|B\mathbf{u}\| = \det(B)\|\mathbf{u}\|$

(**e**) $\det(B^{\mathrm{T}}) = \det(B)$

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (2 p)

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$	$\sqrt{10+n} \approx$
0	1	1	100	0,00	3,16
1	2	3	121	1,00	3,32
2	4	9	144	1,41	3,46
3	8	27	169	1,73	3,61
4	16	81	196	2,00	3,74
5	32	243	225	2,24	3,87
6	64	729	256	2,45	4,00
7	128	2187	289	2,65	4,12
8	256	6561	324	2,83	4,24
9	512	19683	361	3,00	4,36

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!