Lösningsförslag TEN1 2021-09-24 MAA140

1. Låt $z = 4-3i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen $z, \bar{z}, iz, z/i, |z|, z^2$ och $\frac{1+18i}{z}$. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala!

Lösning. Först beräkning. $z = 4-3i$

$$\bar{z} = \overline{4-3i} = 4+3i$$

$$iz = i(4-3i) = 4i - 3i^2 = 3+4i$$

$$z/i = \frac{z \cdot -i}{i \cdot -i} = \frac{(4-3i) \cdot -i}{1} = -4i + 3i^2 = -3-4i$$

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$z^2 = (4-3i)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3i + (3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

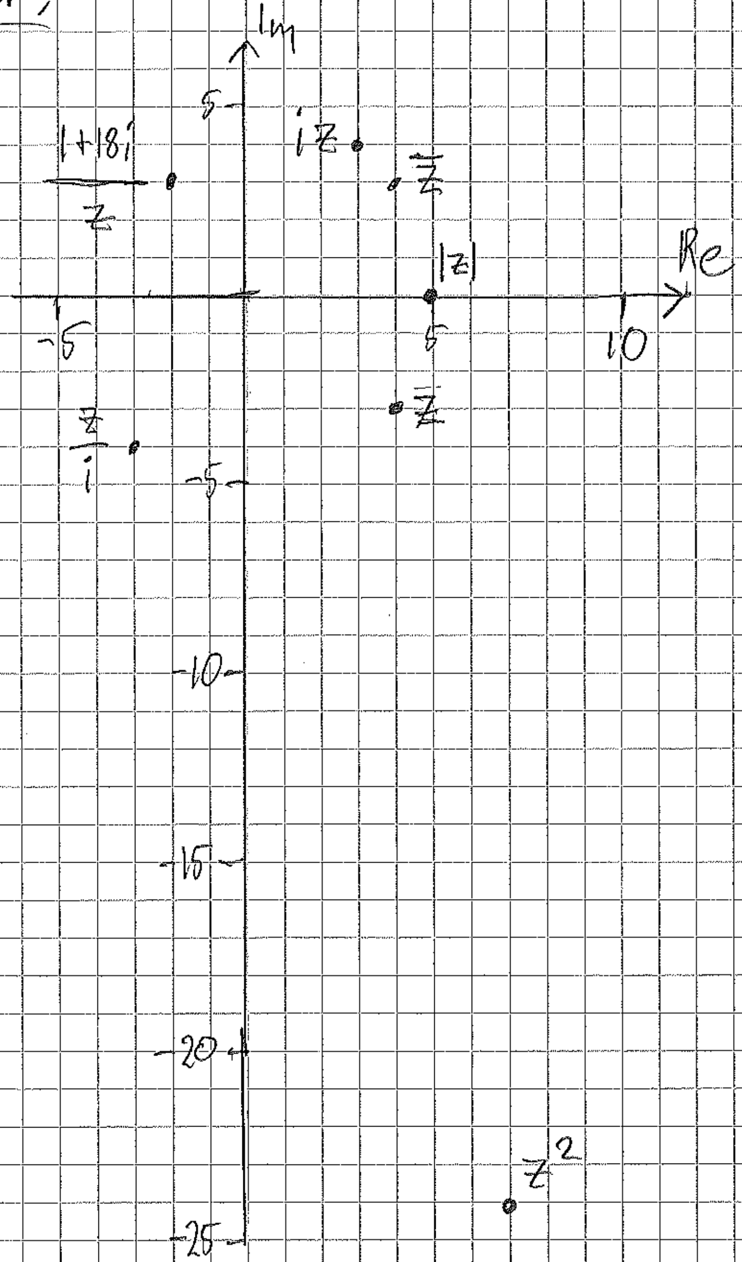
$$\frac{1+18i}{z} = \frac{(1+18i)(4+3i)}{(4-3i)(4-3i)} = \frac{4+3i+18 \cdot 4i + 18 \cdot 3i^2}{4^2+3^2} = \frac{4+3i+72i-54}{25} =$$

$$= \frac{-50+75i}{25} = -\frac{50}{25} + \frac{75}{25} i = -2+3i$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \cdot\, 4 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18 \\ \cdot\, 3 \\ \hline 54 \end{array}$$

Största realdel är 7 (från z^2), minsta är −3 (från z/i). Största imaginärdel är 4 (från iz) och minsta är −24 (från z^2). Vi tar lämpligen intervallet $[-25, 5]$ på imaginära axeln och $[-5, 10]$ på den reella.

Figur:



Svar: $z = 4-3i$, $\bar{z} = 4+3i$, $iz = 3+4i$, $z/i = -3-4i$,
$|z| = 5$, $z^2 = 7-24i$, $\frac{1+18i}{z} = -2+3i$

2 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x+8y+5z=22 \\ 3x+9y+6z=33 \\ x+7y+4z=11 \end{cases}$

<u>Lösning:</u> Uppställning med utvidgad matris blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 5 & 22 \\ 3 & 9 & 6 & 33 \\ 1 & 7 & 4 & 11 \end{array}\right] \cdot\frac{1}{3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 11 \\ 2 & 8 & 5 & 22 \end{array}\right] (-1)\ (-2) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot -\frac{1}{2} \\ \cdot -\frac{1}{3} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 4 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Här kan man på trappstegsformen se att det blir parameterlösning, med en parameter.

Sätter vi $z=t$ så får vi ur andra raden $2y+z=0$ att $2y+t=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}t$. Insättes det i första raden $x+7y+4z=11$ fås

$$x+7\cdot -\frac{1}{2}t+4\cdot t=11 \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}t-4t+11=\frac{7-8}{2}t+11$$

$$=-\frac{1}{2}t+11$$

<u>Svar:</u> Lösningen är $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}t+11 \\ y=-\frac{1}{2}t \\ z=t \end{cases}$ för $t\in\mathbb{R}$.

Koll:

$VL_1 = 2x+8y+5z = 2\left(-\frac{1}{2}t+11\right)+8\cdot -\frac{1}{2}t+5t = -t+22-4t+5t = 22 = HL_1$

$VL_2 = 3x+9y+6z = 3\left(-\frac{1}{2}t+11\right)+9\cdot -\frac{1}{2}t+6t = -\frac{3}{2}t+33-\frac{9}{2}t+\frac{12}{2}t = 33 = HL_2$

$VL_3 = x+7y+4z = -\frac{1}{2}t+11+7\cdot -\frac{1}{2}t+4t = -\frac{1}{2}t+11-\frac{7}{2}t+\frac{8}{2}t = 11 = HL_3.$

Allt stämmer!

3 Finn alla komplexa lösningar z till ekvationen $z^3 = -64i$. Ge ditt svar på rektangulär form.

Lösning. Vi ansätter en lösning på polär form,

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Då är $64 = |-64i| = |z^3| = |z|^3 = r^3$. Eftersom $64 = 2^6$ (se tabell) så är $r = 64^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$; mycket riktigt är $4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 16\cdot 4 = 64$.

På samma sätt får vi att

$$\arg(-64i) = \arg(z^3) = 3\arg(z) = 3\theta.$$

$-64i$ ligger på negativa imaginära axeln, så vi kan ta $\arg(-64i) = -\frac{\pi}{2}$ för att få den första lösningen. $3\theta_1 = -\frac{\pi}{2} \iff \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$. Övriga lösningar ligger någon multipel av $\frac{2\pi}{3}$ (en tredjedel av ett varv) ifrån den första, så dessa blir

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2},$$

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

På rektangulär form är lösningarna då

$$z_1 = r(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot -\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_2 = r(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4(0+i) = 4i$$

$$z_3 = r(\cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3)) = 4\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 4\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\cdot -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot -\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} - 2i$$

Svar: Lösningarna är $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$, $z_2 = 4i$ och
$z_3 = -2\sqrt{3} - 2i$.

4 Låt
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
Beräkna följande uttryck eller förklara varför ett värde inte existerar.

(a) AB.

Lösning.
Uppställning ger

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2+2-2 & 4+1-2 \\ 4+6-7 & 8+3-7 \\ 5+8-9 & 10+4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A+B$

Svar: Existerar inte, för A är 3×3 men B är 3×2.

(c) BA

Svar: Existerar inte, för B har 2 kolumner men A har 3 rader.

(d) A^T

<u>Svar:</u> $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

(e) A^{-1}

<u>Lösning:</u> A är kvadratisk, så den kan vara inverterbar. Om inte så märker vi det när vi försöker radreducera... Uppställning blir:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -2 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 5 & 0 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 3 \quad -2 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -3 \quad 1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

<u>Svar:</u> $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Koll nästa sida.

Koll:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2+1-2 & 2-8+6 & -2+6-4 \\ 4+3-7 & 4-24+21 & -4+18-14 \\ 5+4-9 & 5-32+27 & -5+24-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Stämmer!

5 Skriv om följande ekvationssystem på (a) standardform och ange sedan (b) en matris V och vektor $\bar{h}$ sådan att systemet är ekvivalent med vektorekvationen $V\bar{x}=\bar{h}$, om $\bar{x}=(p,q,r,s,t)^T$

$$
\begin{cases} q-2t+3p=4s-5 \\ 6r+7q-8t=9+p \\ -2s-3q+4=5r+6s \\ 7s-8t-9=q-2r+3 \end{cases}
$$

Svar (a):

$$
\begin{cases} 3p+q-4s-2t=-5 \\ -p+7q+6r-8t=9 \\ -3q-5r-8s=-4 \\ -q+2r+7s-8t=12 \end{cases}
$$

Svar (b):

$$
V=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 7 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 7 & -8 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}=\begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}
$$