MÄLARDALENS HÖGSKOLA
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
Avdelningen för tillämpad matematik
Examinator: Lars-Göran Larsson

TENTAMEN I MATEMATIK
MMA129 Linjär algebra
Datum: 16 januari 2013 *Skrivtid:* 5 timmar
Hjälpmedel: Penna, linjal och radermedel

Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

1. Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ av matrisen

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Visa att F är diagonaliserbar, dvs att det finns en bas av egenvektorer till F. Bestäm en sådan bas och ange F:s matris i den basen.

2. Bestäm en ON-bas i det linjära underrummet $[1+x, 1-x]$ till $\mathcal{P}_2$ utrustat med skalärprodukten

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx\,.$$

3. En linjär operator F är given av att varje vektor $\mathbf{u}$ projiceras parallellt med vektorn $3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ på en vektor parallell med planet $\pi : x - 4y + 4z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för F i den givna basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

4. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas i det linjära rummet L, och definiera vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ enligt

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_1 - 2\tilde{\mathbf{e}}_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\,, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3 = -4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\,, \\ \tilde{\mathbf{e}}_3 + 2\tilde{\mathbf{e}}_2 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,. \end{cases}$$

Visa att $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ också är en bas, och ange koordinaterna för vektorn $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ i denna andra bas.

5. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ges av

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4, -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4, x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 8x_4).$$

Bestäm en bas i F:s nollrum och en bas i F:s värderum.

6. Visa att ekvationen $9x^2 - 4xy + 2xz + 6y^2 + 4yz + 9z^2 = 2$, där (x, y, z) är koordinaterna i ett ON-system, geometriskt betyder en rotationsellipsoid. Specificera speciellt ellipsoidens halvaxellängder och ekvationen för rotationsaxeln.

7. Låt M vara ett underrum till $\mathbb{R}^4$, givet som det linjära höljet

$$[(2, 1, -4, 2), (1, 1, -1, 2), (1, 2, 1, 4), (1, 1, 0, 3)]\,.$$

Bestäm en bas i M, och utred för vilka β som vektorn $(\beta, 4, 3-\beta, 7)$ tillhör M.

8. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ vara en bas i $\mathbb{R}^3$, och låt det euklidiska rummet $\mathbb{E}$ vara $\mathbb{R}^3$ utrustat med en skalärprodukt sådan att vektorerna $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ och $\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{e}_3$ utgör en ON-bas. Specificera hur skalärprodukten ser ut i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, och ange längden av vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ med avseende på den införda skalärprodukten.

MMA129 / Lösningar till tentamen 2013-01-16

1 $F: R^3 \to R^3$ ges i basen e_1, e_2, e_3 av matrisen $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Egenvärdesekv.: $0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= \left[(2-\lambda)(1+\lambda)^2 + 0 + 0\right] - \left[0 - 3(\lambda+1) - (\lambda+1)\right] = -(\lambda+1)\left[(\lambda-2)(\lambda+1) - 3 - 1\right]$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3) \iff \lambda = -2 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 3$$

Det faktum att egenvärdena är olika innebär att motsvarande egenvektorer är linjärt oberoende och bildar därmed en bas i R^3. v.s.v.

Egenvektorer:

$$\begin{cases} A - (-2)I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ A - (-1)I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_2 = t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ A - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

I basen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ med $\begin{cases} \tilde{e}_1 = e_1 - e_2 + 3e_3 \\ \tilde{e}_2 = e_1 - e_3 \\ \tilde{e}_3 = e_1 + 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$ är avbildningsmatrisen för F lika med $\hat{A}$ där

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(egenvärdena på diagonalen)

2 $\underbrace{[\overset{u_1(x)}{1+x}, \overset{u_2(x)}{1-x}]}_{M} \subset P_2$ där P_2 är utrustat med skalärprodukten $\langle p | q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$.

Bestäm en ON-bas e_1, e_2 i M

Välj t.ex. $f_1 = u_1$ och normera till e_1. Vi har att

$$\langle f_1 | f_1 \rangle = \int_0^1 (1+x)^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}(8-1) = 7/3, \text{ dvs } e_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{7}}(1+x)$$

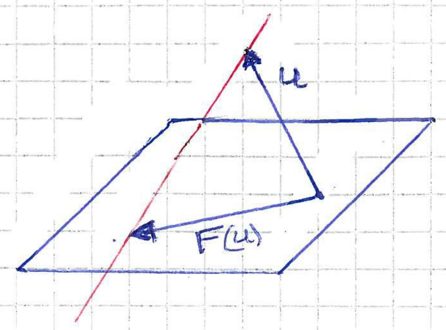
Välj sedan f_2 som $u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1$ och normera. Då gäller att $f_2 \in M$, $f_2 \perp e_1$ och $\|e_2\| = \left\| \frac{1}{\|f_2\|} f_2 \right\| = 1$. Vi har att

$$\begin{cases} f_2(x) = 1 - x - \left(\int_0^1 (1-t)\sqrt{\tfrac{3}{7}}(1+t)\, dt\right)\sqrt{\tfrac{3}{7}}(1+x) = 1 - x - \tfrac{3}{7}\left[t - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 (1+x) = \tfrac{1}{7}(5-9x) \\ \langle 7f_2 | 7f_2 \rangle = \int_0^1 (5-9x)^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{9}(9x-5)^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{27}(4^3 - (-5)^3) = \tfrac{189}{27} = \tfrac{63}{9} = 7 \end{cases}$$

dvs $e_2(x) = \frac{1}{\sqrt{7}}(5-9x)$. Alltså $\sqrt{\tfrac{3}{7}}(1+x), \frac{1}{\sqrt{7}}(5-9x)$ är en ON-bas i M

Forts. MMA129 2013-01-16

(3) Den linjära operatorn F projicerar varje vektor u parallellt med vektorn $v = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ på en vektor parallell med planet $\pi: x - 4y + 4z = 0$



Vi har att $F(u) = u + t_u v$ dvs

$$F(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + t_u(3e_1 + 2e_2 + e_3)$$
$$= (x_1 + 3t_u)e_1 + (x_2 + 2t_u)e_2 + (x_3 + t_u)e_3$$

där koordinaterna för F satisfierar ekvationen för planet π (i och med att planet innehåller origo),

dvs där $(x_1 + 3t_u) - 4(x_2 + 2t_u) + 4(x_3 + t_u) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 4x_2 + 4x_3) + t_u(3 - 8 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow t_u = x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

Alltså $F(u) = u + (x_1 - 4x_2 + 4x_3)(3e_1 + 2e_2 + e_3)$

$$= (4x_1 - 12x_2 + 12x_3)e_1 + (2x_1 - 7x_2 + 8x_3)e_2 + (x_1 - 4x_2 + 5x_3)e_3$$

dvs F:s matris i basen e_1, e_2, e_3 är $\begin{pmatrix} 4 & -12 & 12 \\ 2 & -7 & 8 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Ett alternativt lösningssätt

Vektorerna $4e_1 + e_2$ och $4e_1 - e_3$ är parallella med planet π och är därmed egenvektorer till F, bägge svarande mot egenvärdet 1. Vektorn v är också en egenvektor, men svarande mot egenvärdet 0.

Vi har således att F:s matris $\tilde{A}$ i basen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ med $\tilde{e}_1 = 4e_1 + e_2$, $\tilde{e}_2 = 4e_1 - e_3$, $\tilde{e}_3 = v = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ är lika med $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och att en basbytesmatris S enligt $(\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3) = (e_1\ e_2\ e_3)S$ är lika med $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vi får att den sökta matrisen A ges av uttrycket $S\tilde{A}S^{-1}$,

dvs $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\dfrac{1}{(0+0-3)-(0-8+4)}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ -1 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 8 \\ -1 & 4 & -5 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 12 \\ 2 & -7 & 8 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Forts. MMA129
2013-01-16

4. e_1, e_2, e_3 är en bas i det linjära rummet L och

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 - 2\tilde{e}_2 = 3e_1 - e_2 \\ \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = -4e_1 + 2e_2 - e_3 \\ \tilde{e}_3 + 2\tilde{e}_2 = -2e_1 + e_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3e_1 - e_2 = \tilde{e}_1 - 2\tilde{e}_2 \\ 2e_2 - 3e_3 = 4\tilde{e}_1 - 5\tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3 \\ e_2 = 2\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3e_1 = 3\tilde{e}_1 + 3\tilde{e}_3 \\ e_2 = 2\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2 + 3\tilde{e}_3 \\ -3e_3 = -9\tilde{e}_2 - 3\tilde{e}_3 \end{cases} \Longleftrightarrow (e_1\ e_2\ e_3) = (\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{M}$$

där $\det(M) = (2+6+0) - (0+9+0) = -1 \neq 0$, dvs M är inverterbar. Därmed är $(\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3) = (e_1\ e_2\ e_3)M^{-1}$ med M^{-1} helt bevisligen också inverterbar, dvs $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ är en bas v.s.v.

Vidare

$$3e_1 - e_2 + 2e_3 = (e_1\ e_2\ e_3)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= (\tilde{e}_1\ \tilde{e}_2\ \tilde{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dvs. $\text{koord}_{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3}(3e_1 - e_2 + 2e_3) = (1, 4, 2)$

5. $F: R^4 \to R^3$ är definierad enligt

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4,\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4,\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 8x_4)$$

dvs avbildningsmatrisen A i standardbaserna är

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 7 & -6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Av den till A radekvivalenta matrisen B framgår att t.ex. $(2,-1,1), (-1,3,7)$ är en bas i värderummet till F.

motsv de två första (och linjärt ober.) kolonnerna i B

Nollrummet till F ges av villkoret $AX = 0$, dvs

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3 - x_4,\ x_3 - x_4,\ x_3,\ x_4) = x_3(-1,1,1,0) + x_4(-1,-1,0,1)$$

dvs en bas i nollrummet till F är t.ex. $(1,-1,-1,0), (1,1,0,-1)$

Forts. MMA129
2013-01-16

6 (x,y,z) är koordinater i ett ON-system. Ekvationen

$$2 = 9x^2 - 4xy + 2xz + 6y^2 + 4yz + 9z^2$$
$$= (x\ y\ z)\begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X^T G X$$

I och med att G är symmetrisk i en ON-bas så är den i ON-basen avbildningsmatrisen till en symmetrisk avbildning. Utifrån detta säger spektralsatsen att det finns en ON-bas av egenvektorer. Speciellt är avbildningen diagonaliserbar.

Egenvärden $0 = \det(G - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 9-\lambda \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} 10-\lambda & 0 & 10-\lambda \\ 0 & 10-\lambda & 20-2\lambda \\ 1 & 2 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (10-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-10)^2(8-\lambda-4) = -(\lambda-4)(\lambda-10)^2$$

Egenvektorer
$$\begin{cases} G - 4I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & -12 & -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_1 = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ G - 10I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dvs } k_{2,3} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Välj till att börja med O-basen f_1, f_2, f_3 enligt

$$\begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ f_2 = e_1 + e_3 \\ f_3 = \alpha(e_1+e_3) + \beta(-2e_1 + e_2) \end{cases}$$

dvs välj α, β så att
$$0 = \langle f_2 | f_3 \rangle = (\alpha - 2\beta) + 0 + \alpha$$

dvs en ny ON-bas $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ är t.ex.
$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + 2e_2 - e_3) \\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3) \\ \tilde{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3) \end{cases}$$

Låt S vara basbytesmatrisen från e_1, e_2, e_3 till $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$. Då fås

$$2 = X^T G X = (S\tilde{X})^T G (S\tilde{X}) = \tilde{X}^T (S^T G S)\tilde{X}$$
$$= \ldots = \tilde{X}^T \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \tilde{X} = 4\tilde{x}_1^2 + 10\tilde{x}_2^2 + 10\tilde{x}_3^2$$

dvs $\left(\frac{\tilde{x}_1}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{x}_2}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{x}_3}{1/\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ dvs en rotationsellipsoid ty ekv:en beskriver en ellipsoid med två av halvaxellängderna $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$ lika med varandra.

Rotationsaxeln $// \tilde{e}_1$ dvs rotationsaxelns ekv. är $(x,y,z) = t(1,2,-1)$, $t \in \mathbb{R}$

Forts. MMA129
2013-01-16

(7) $M = [\overset{u_1}{(2,1,-4,2)}, \overset{u_2}{(1,1,-1,2)}, \overset{u_3}{(1,2,1,4)}, \overset{u_4}{(1,1,0,3)}] \subset R^4$

Testekv. för u_1, u_2, u_3, u_4 lyder $0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

där $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

dvs en bas i M är t.ex. u_1, u_2, u_4

Vidare Vektorn $(\beta, 4, 3-\beta, 7) \in M$ omm

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 3-\beta \\ 2 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \beta-8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 19-\beta \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 8-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 2\beta-5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta-4 \\ 0 & 1 & 0 & 13-3\beta \\ 0 & 0 & 1 & 2\beta-5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2\beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4-2\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 2$$

(8) e_1, e_2, e_3 är en bas i R^3 och E är R^3 utrustat med en skalärprodukt sådan att u_1, u_2, u_3, där $u_1 = 2e_1 - e_3$, $u_2 = e_1 + e_2$, $u_3 = 2e_3$, utgör en ON-bas.

Vi har att $(u_1\ u_2\ u_3) = (e_1\ e_2\ e_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{S}$ där

där $\det(S) = (4+0+0)-(0+0+0) = 4 \neq 0$ styrker att S är en basbytesmatris och därmed att u_1, u_2, u_3 verkligen är en bas.

Dessutom (för senare behov): $S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

forts.

Forts. MMA129
2013-01-16

⑧ forts. Låt A och $\tilde{A}$ beteckna de matriser som representerar skalärprodukten i basen e_1, e_2, e_3 respektive u_1, u_2, u_3. Då gäller att skalärprodukten av två godtyckliga vektorer v och w i E är lika med

skalärprodukten uttryckt i basen e_1, e_2, e_3

$$\langle v|w\rangle = X^T A Y$$

koordinatmatriserna för v resp. w, bägge i basen e_1, e_2, e_3

koordinatmatriserna för v resp. w bägge i basen u_1, u_2, u_3

$$= (S\tilde{X})^T A (S\tilde{Y})$$

$$= \tilde{X}^T (S^T A S)\tilde{Y}$$

skalärprodukten uttryckt i basen u_1, u_2, u_3 (ON)

$$= \tilde{X}^T \tilde{A} \tilde{Y} = \tilde{X}^T \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \tilde{Y} = \tilde{x}_1\tilde{y}_1 + \tilde{x}_2\tilde{y}_2 + \tilde{x}_3\tilde{y}_3$$

från föreg. sida

Vi får att $A = (S^T)^{-1}\tilde{A}S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2&-2&0\\0&4&0\\1&-1&2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2&-2&0\\0&4&0\\1&-1&2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2&0&1\\-2&4&-1\\0&0&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2&-2&0\\0&4&0\\1&-1&2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5&-5&2\\-5&21&-2\\2&-2&4 \end{pmatrix}$$

dvs

$$\langle v|w\rangle = \frac{1}{16}\left(5x_1y_1 + 21x_2y_2 + 4x_3y_3 - 5(x_1y_2+x_2y_1) + 2(x_1y_3+x_3y_1) - 2(x_2y_3+x_3y_2)\right)$$

Vidare $\|e_1 - e_3\| = \sqrt{\frac{1}{16}(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 5&-5&2\\-5&21&-2\\2&-2&4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{4}\sqrt{(1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 3\\-3\\-2 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

uträkning i basen e_1, e_2, e_3

$$= \sqrt{\left(S^{-1}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}\left(S^{-1}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\\0\\-1 \end{pmatrix}^T \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\\0\\-1 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

uträkning i basen u_1, u_2, u_3

Ett alternativt lösningssätt (skissartat)

u_1, u_2, u_3 ON-bas ger

där A är symmetrisk, dvs ekv.syst.et nedan har sex villkor och sex obekanta.

$$\begin{cases} 1 = \langle u_1|u_1\rangle = (2\ 0\ -1)A\begin{pmatrix} 2\\0\\-1 \end{pmatrix} = 4a_{11} - 2a_{13} - 2a_{31} + a_{33} = 4a_{11} - 4a_{13} + a_{33} \\ 1 = \langle u_2|u_2\rangle = (1\ 1\ 0)A\begin{pmatrix} 1\\1\\0 \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = a_{11} + 2a_{12} + a_{22} \\ 1 = \langle u_3|u_3\rangle = \ldots = 4a_{33} \\ 0 = \langle u_1|u_2\rangle = \ldots = 2a_{11} + 2a_{12} - a_{31} - a_{32} \\ 0 = \langle u_1|u_3\rangle = \ldots = 4a_{13} - 2a_{33} \\ 0 = \langle u_2|u_3\rangle = \ldots = 2a_{13} + 2a_{23} \end{cases}$$

Tentamen 2013-01-16	POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter
1. Det att egenvärdena är olika innebär att det finns en bas $\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3$ av egenvektorer, exempelvis $\tilde{\mathbf{e}}_1=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_2=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_3=\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$. F :s matris i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3$ är lika med $\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$	**1p**: Korrekt funnit ett första av de tre egenvärdena, samt motsvarande egenrum **1p**: Korrekt funnit ett andra av de tre egenvärdena, samt motsvarande egenrum **1p**: Korrekt funnit det tredje av de tre egenvärdena, samt motsvarande egenrum **1p**: Korrekt, på ett eller annat sätt, visat att F är diagonaliserbar **1p**: Korrekt angivit F :s matris i en vald bas av egenvektorer
2. T.ex. e_1,e_2 där $e_1(x)=\sqrt{\tfrac{3}{7}}(1+x)$, $e_2(x)=\tfrac{1}{\sqrt{7}}(5-9x)$	**1p**: Korrekt normerat den ena av de två polynomfunktionerna, u_1 och u_2, som spänner underrummet till P_2 **1p**: Korrekt formulerat en polynomfunktion f_2 som a) tillhör underrummet, som b) inte är lika med nollfunktionen och som c) är ortogonal mot u_1, dvs formulerat polynomfunktionen $u_2-\langle u_2\|e_1\rangle e_1$, där e_1 är det normerade u_1 **1p**: Korrekt bestämt skalärprodukten $\langle u_2\|e_1\rangle$ **1p**: Korrekt sammanställt f_2 **1p**: Korrekt normerat f_2 till e_2, <u>och</u> korrekt angivit e_1,e_2 som en ON-bas i det aktuella underrummet
3. $\begin{pmatrix}4&-12&12\\2&-7&8\\1&-4&5\end{pmatrix}$	---------------- **Scenario 1** ---------------- **1p**: Korrekt noterat att bilden av vektorn $\mathbf{u}$, dvs $F(\mathbf{u})$, är lika med $\mathbf{u}+t_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, där $\mathbf{v}=3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ och där $t_{\mathbf{u}}$ för varje $\mathbf{u}$ bestäms av att $\mathbf{u}+t_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ ska vara parallell med planet π **1p**: Korrekt tolkat det ovanstående som att koordinaterna för $F(\mathbf{u})$ satisfierar ekvationen för planet π **1p**: Korrekt bestämt $t_{\mathbf{u}}$ till $x_1-4x_2+4x_3$ för varje vektor $\mathbf{u}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ **1p**: Korrekt funnit koordinaterna för $F(\mathbf{u})$ i basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ **1p**: Korrekt angivit matrisen för F i basen $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ ---------------- **Scenario 2** ---------------- **1p**: Korrekt noterat att t.ex. $4\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ och $4\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3$ är egenvektorer till F, svarande mot (dubbel)egenvärdet 1 **1p**: Korrekt noterat att $3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ är en egenvektor till F svarande mot egenvärdet 0 **1p**: Korrekt summerat att den sökta avbildningsmatrisen A ges av relationen $\mathsf{A}=\mathsf{T}\tilde{\mathsf{A}}\mathsf{T}^{-1}$, där $\tilde{\mathsf{A}}$ är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen och där basbytesmatrisens T kolonner innehåller koordinaterna för egenvektorerna tagna i den ordning som svarar mot egenvärdena i $\tilde{\mathsf{A}}$ **1p**: Korrekt bestämt inversen T^{-1} till basbytesmatrisen T **1p**: Korrekt bestämt avbildningsmatrisen A

4.	Vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ är en bas, detta ty matrisen T i matrisrelationen $\tilde{\mathsf{e}} = \mathsf{eT}$ är inverterbar. $koord_{\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,\tilde{\mathbf{e}}_3}(3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) = (1,4,2)$	**1p**: Korrekt funnit att $\mathbf{e}_1 = \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\tilde{\mathbf{e}}_1 + 2\tilde{\mathbf{e}}_2 + 3\tilde{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\mathbf{e}}_3$ **1p**: Korrekt noterat att det funna sambandet mellan basvektorerna kan uttryckas som matrisrelationen $\mathsf{e} = \tilde{\mathsf{e}}\mathsf{B}$, där e och $\tilde{\mathsf{e}}$ är radmatriserna med vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respektive $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ som matriselement **1p**: Korrekt noterat att matrisen B inte är något annat än inversen av en matris T som relaterar den givna basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till vektorerna $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$. I och med att inversen till T existerar så är T en basbytesmatris, dvs $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ är en bas **1p**: Korrekt noterat att koordinaterna för $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ ges av koordinatmatrisen $\mathsf{T}^{-1}\mathsf{X} = \mathsf{BX}$, där X är lika med koordinatmatrisen $(3 \ \ -1 \ \ 2)^T$ **1p**: Korrekt funnit koordinaterna i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$
5.	En bas i F:s nollrum är t.ex. $(1,-1,-1,0)$, $(1,1,0,-1)$ En bas i F:s värderum är t.ex. $(2,-1,1)$, $(-1,3,7)$	**1p**: Korrekt identifierat vad som är F:s avbildningsmatris A, och korrekt funnit rangen för A **1p**: Korrekt bestämt en av två basvektorer i F:s nollrum **1p**: Korrekt bestämt en andra av två basvektorer i F:s nollrum **1p**: Korrekt bestämt en av två basvektorer i F:s värderum **1p**: Korrekt bestämt en andra av två basvektorer i F:s värderum
6.	Ekvationen kan genom diagonalisering omformas till $\left(\frac{\tilde{x}_1}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{x}_2}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{x}_3}{1/\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ som beskriver en rotationsellipsoid med halvaxellängderna $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Rotationsaxelns ekvation lyder $(x,y,z) = t(1,2,-1)$, $t \in R$	**1p**: Korrekt funnit egenvärdena **1p**: Korrekt identifierat den diagonala formen för den kvadratiska formen **1p**: Korrekt visat att ekvationen geometriskt betyder en rotationsellipsoid **1p**: Korrekt identifierat ellipsoidens halvaxellängder **1p**: Korrekt funnit ekvationen för rotationsaxeln
7.	En bas i M är t.ex. $(2,1,-4,2)$, $(1,1,-1,2)$, $(1,1,0,3)$ $\beta = 2$	**1p**: Korrekt iscensatt en undersökning av vilka vektorer som behövs för att spänna upp underummet M, och korrekt funnit den till vektorernas koefficientmatris radekvivalenta trappstegsmatrisen **1p**: Korrekt från trappstegsmatrisen identifierat en uppsättning linjärt oberoende vektorer som spänner upp underrummet M **1p**: Korrekt iscensatt en undersökning av vilka β som gör att vektorn $(\beta, 4, 3-\beta, 7)$ tillhör underummet M **1p**: Korrekt från en trappstegsform noterat det villkor som gäller för β **1p**: Korrekt bestämt värdet på β

8. $\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \mathsf{X}^T \mathsf{A} \mathsf{Y}$ där

$$\mathsf{A} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ -5 & 21 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

och där t.ex. $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$

$$= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathsf{eX}$$

----------------------------------**Scenario 1**--

1p: Korrekt noterat att skalärprodukten av vektorerna $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ i en given bas är lika med matrisprodukten $\mathsf{X}^T \mathsf{A} \mathsf{Y}$, där X och Y är koordinatmatriserna för $\mathbf{v}$ respektive $\mathbf{w}$ i basen, och där A i basen representerar den symmetriska, bilinjära och positivt definita funktion som skalärprodukten är

1p: Korrekt noterat att matrisen i ON-basen $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ är lika med enhetsmatrisen

1p: Korrekt noterat att om matrisen i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ betecknas med A och den i ON-basen med $\tilde{\mathsf{A}}$, så gäller att $\mathsf{A} = (\mathsf{S}^{-1})^T \tilde{\mathsf{A}} \mathsf{S}^{-1}$, där matrisen S är lika med basbytesmatrisen från $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

1p: Korrekt bestämt matrisen A och därmed skalärprodukten

1p: Korrekt beräknat längden av vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$

----------------------------------**Scenario 2**--

1p: Ansatt a_{mn} som A:s matriselement och korrekt utvecklat normeringsvillkoren för vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, dvs $1 = \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_1 \rangle = 2^2 a_{11} + 2 \cdot (-1) a_{13} + (-1) \cdot 2 a_{31} + (-1)^2 a_{33}$, $1 = \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle = \ldots$, och $1 = \langle \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_3 \rangle = \ldots$

1p: Korrekt utvecklat ortogonalitetsvillkoren för vektorerna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, dvs $0 = \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 \rangle = 2 \cdot 1 a_{11} + 2 \cdot 1 a_{12} + (-1) \cdot 1 a_{31} + (-1) \cdot 1 a_{32}$, $0 = \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_3 \rangle = \ldots$, och $0 = \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3 \rangle = \ldots$

2p: Korrekt löst det uppkomna ekvationssystemet där antalet obekanta är $9 - 3 = 6$ eftersom A symmetrisk innebär att $a_{kl} = a_{lk}$

1p: Korrekt beräknat längden av vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$