Lösningsförslag TEN2 2021-01-15 MAA140

1. Punkterna $A=(0,2,0)$, $B=(1,1,0)$ och $C=(1,0,1)$ är hörnen i triangeln ABC.

a) Beräkna längderna av sidorna i triangeln ABC.

Lösning. Vektorerna $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ och $\vec{BC}$ går från ett hörn i triangeln till ett annat, så dessas längder ger de sökta sidlängderna.

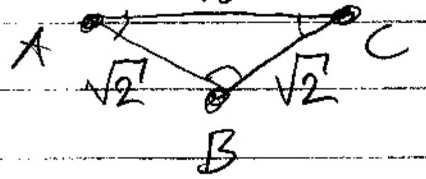
$$\vec{AB} = B-A = (1,1,0)-(0,2,0) = (1,-1,0)$$
$$\vec{AC} = C-A = (1,0,1)-(0,2,0) = (1,-2,1)$$
$$\vec{BC} = C-B = (1,0,1)-(1,1,0) = (0,-1,1)$$

$$\|\vec{AB}\| = \|(1,-1,0)\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$
$$\|\vec{AC}\| = \|(1,-2,1)\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$
$$\|\vec{BC}\| = \|(0,-1,1)\| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$$

Svar: Sidlängderna är $\|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{AC}\| = \sqrt{6}$ och $\|\vec{BC}\| = \sqrt{2}$.

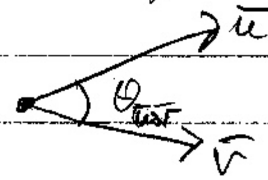
b) Beräkna vinklarna i triangeln ABC.

Lösning: En liten figur kan vara stöd för tanken



Denna triangel är likbent — sidorna AB och BC är lika långa — så motstående vinklar (A och C) kommer att vara lika.

Dock är det fortfarande nödvändigt att räkna ut minst en vinkel, för vilket man lämpligen använder skalärprodukten, med formeln



$$\cos(\theta_{uv}) = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{\|\overline{u}\| \cdot \|\overline{v}\|}.$$

Från hörnet A utgår vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, så

$$\cos(\underbrace{\angle A}_{\text{vinkel } A}) = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(1,-1,0) \bullet (1,-2,1)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1+2+0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Alltså är vinkeln vid A just $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$.

Vektorer från hörnet vid B är $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{BC}$, så

$$\cos(\angle B) = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(-1,1,0) \bullet (0,-1,1)}{\|-\overrightarrow{AB}\| \cdot \sqrt{2}} = \frac{0-1+0}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Alltså är vinkeln vid B just $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Vinkeln vid C är samma som vid A.

Koll: Vinkelsumman i en triangel ska vara $\pi = 180^\circ$. Här får vi $\angle A + \angle B + \angle C = 30^\circ + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ$, så det stämmer.

Svar: Vinklarna är $\angle A = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\angle B = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ och $\angle C = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$.

1c Beräkna arean av triangeln ABC.

Lösning. En vektorformel för arean av en triangel ABC i rummet är $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$, så det är bara att börja räkna.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (1,-1,0)\times(1,-2,1)$$

Uppställning av Sarrus-modell:

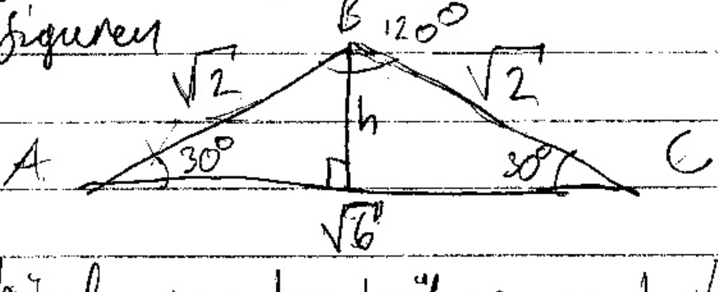
$$\begin{array}{ccc|cc} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}$$

ger värdet $-\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3 + \bar{e}_3 - \bar{e}_2 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3$
$= (-1,-1,-1)$

Så $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-1,-1,-1)$ och $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Svar: Arean är $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alternativ lösning. Vi vet från (a) och (b) att triangelns mått är som i figuren



Höjden h är inte känd, men kan beräknas som $h = \sqrt{2}\cdot\sin(30^\circ) =$
$= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Motsvarande bas är $\sqrt{6}$, så arean blir
$\frac{1}{2}\cdot\text{basen}\cdot\text{höjden} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

1d Ange på parameterfri form ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. Vi har redan beräknat normalen $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-1,-1,-1)$ och en punkt i planet är $A=(0,2,0)$, så punkt-normal-form för planets ekvation är bara att skriva upp:

$$((x,y,z)-(0,2,0)) \bullet (-1,-1,-1) = 0$$

Som formel blir det lite enklare om normalen svängs om till $(1,1,1)$, så

Svar: $((x,y,z)-(0,2,0)) \bullet (1,1,1) = 0$

Alt. svar: $x+y+z=2$

1e Avgör om punkten $(1,-1,5)$ ligger i samma plan som A, B och C.

Lösning. Direkt insättning i planets ekvation från (d) ger

$$\begin{aligned} VL &= ((1,-1,5)-(0,2,0)) \bullet (1,1,1) = \\ &= (1,-3,5) \bullet (1,1,1) = 1-3+5 = \\ &= 3 \neq 0 = HL. \end{aligned}$$

Alltså: nej.

Svar: Punkten $(1,-1,5)$ ligger inte i det planet.

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $\bar{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a Beräkna vektorerna $\bar{v}_1 = A\bar{v}_0$, $\bar{v}_2 = A\bar{v}_1$, $\bar{v}_3 = A\bar{v}_2$ och $\bar{v}_4 = A\bar{v}_3$

Lösning. $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+6 \\ 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(Separat svar kan anses överflödigt.)

b Finn alla egenvärden till matrisen A, samt för varje egenvärde en egenvektor som hör till detta.

Lösning. Eftersom A bara är 2×2 så går det bra att lösa den karakteristiska ekvationen för A:

$$0 = \det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\cdot -\lambda - 2\cdot 1 = -\lambda + \lambda^2 - 2 = (\lambda^2 - \lambda) - 2 =$$
$$= \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{8}{4} = \left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} =$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\right)\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\right) =$$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)$ har lösningarna $\lambda = 2$ och $\lambda = -1$.
Dessa är alltså egenvärdena.

Egenvektor $\bar{u}_1$ hörande till $\lambda = 2$ är en lösning $\bar{x}$ till ekvationen $(A - 2I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow$

$$\bar{0} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\bar{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow \bar{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ för } t \in \mathbb{R}.$$

Egenvektor $\bar{u}_2$ hörande till $\lambda = -1$ är en lösning $\bar{x}$ till ekvationen $(A - (-1)I)\bar{x} = \bar{0} \Leftrightarrow$

$$\bar{0} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bar{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \bar{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ för } t \in \mathbb{R}$$

Alltså kan vi ta $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Koll</u>: $A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\bar{u}_1$

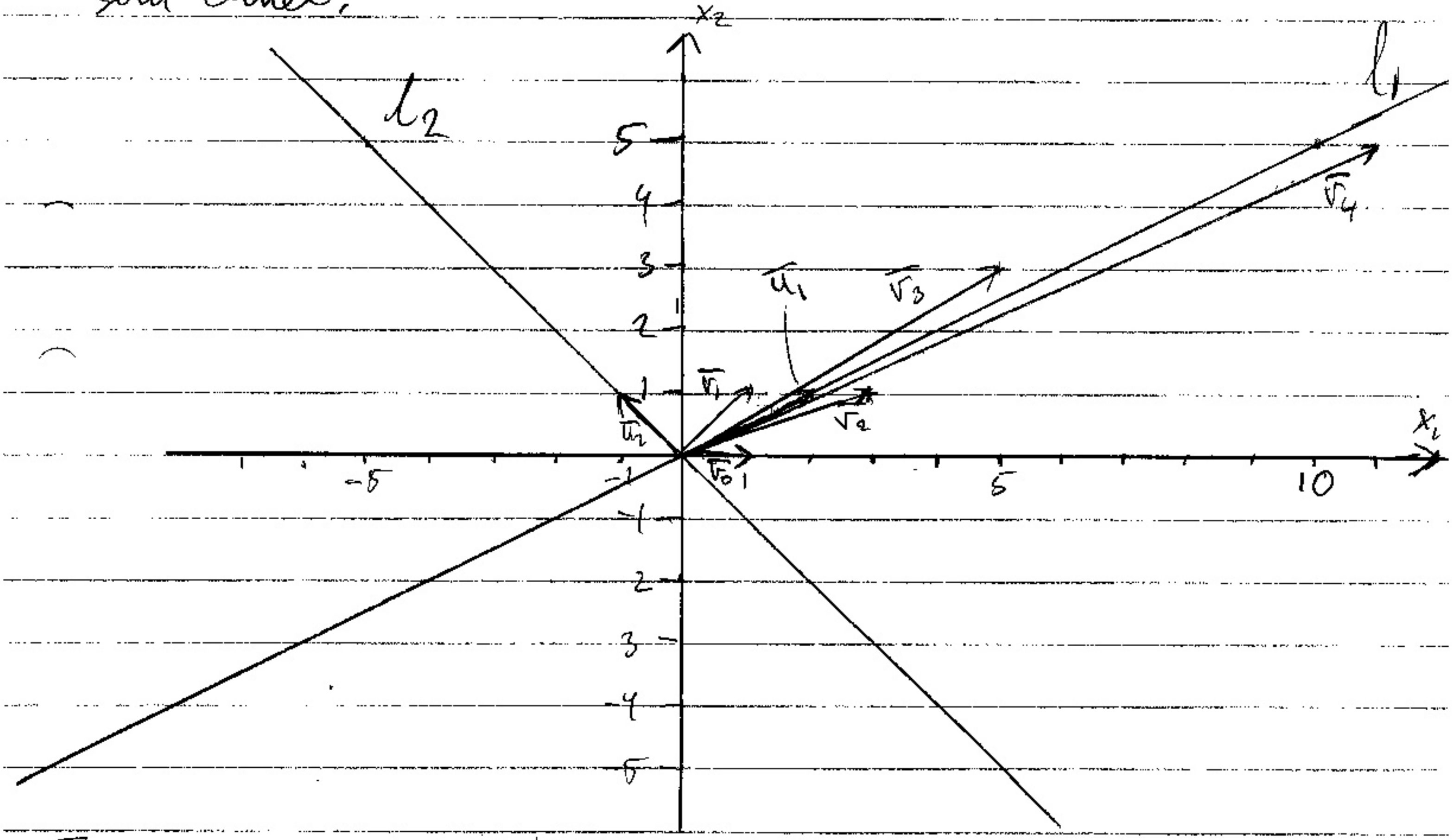
$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\bar{u}_2$

Stämmer!

<u>Svar</u>: Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = -1$. En egenvektor hörande till $\lambda_1 = 2$ är $\bar{u}_1 = \binom{2}{1}$. En egenvektor hörande till $\lambda_2 = -1$ är $\bar{u}_2 = \binom{-1}{1}$.

c Rita i ett och samma koordinatsystem ut följande: (i) vektorerna $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ och $\bar{v}_4$, ansatta från punkten $(0,0)$; (ii) en egenvektor för varje egenvärde, ansatta från $(0,0)$, samt de linjer genom $(0,0)$ som har dessa egenvektorer som riktningsvektor.

<u>Lösning</u>. Vi går upp till 11 på ena axeln och 5 på den andra, så det hela ryms väl med ungefär centimeter som enhet.



$\bar{u}_1 = (2,1)$ är egenvektor hörande till $\lambda_1 = 2$ och ℓ_1 är linjen med

$\bar{u}_1$ som riktningsvektor. På samma sätt är $u_2=(-1,1)$ en egenvektor hörande till $\lambda_2=-1$ och l_2 är linjen med $\bar{u}_2$ som riktningsvektor.

Kommentar. Den här uppgiften illustrerar potensmetoden för att numeriskt beräkna egenvektor till matris. Startvektorn $\bar{v}_0 = \frac{1}{3}\bar{u}_1 - \frac{1}{3}\bar{u}_2$, och hur mycket $\bar{u}_1$-delen växer när man multiplicerar med matrisen A beror bara på egenvärdet $\lambda_1=2$ — i synnerhet har det inget med hur stor $\bar{u}_2$-delen är. Allmänt gäller att

$$\bar{v}_n = A^n\bar{v}_0 = A^n\left(\tfrac{1}{3}\bar{u}_1 - \tfrac{1}{3}\bar{u}_2\right) = \tfrac{1}{3}A^n\bar{u}_1 - \tfrac{1}{3}A^n\bar{u}_2 =$$
$$= \tfrac{1}{3}2^n\bar{u}_1 - \tfrac{1}{3}(-1)^n\bar{u}_2)$$

dvs. $\bar{u}_1$-delen blir dubbelt så stor (ty egenvärdet är 2) för varje gång man multiplicerar med A, medan $\bar{u}_2$-delen bara byter tecken och i övrigt förblir lika stor. Effekten av det går att se i figuren: Ju större n, desto närmare kommer riktningen för $\bar{v}_n$ att stämma överens med riktningen för $\bar{u}_1$, vilken syns som linjen l_1. Avståndet mellan vektorernas spetsar och linjen l_1 förblir emellertid hela tiden detsamma, eftersom det kommer sig av $\bar{u}_2$-delen som hela tiden förblir lika lång.

3 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Lösning.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ -4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0^{+} & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0^{-} & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0^{+} & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0^{-} & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 1^{+} & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0^{+} & -3 & 0 & 1 \\ 0^{-} & 0 & 1 & -15 \\ 1^{+} & 1 & 0 & 5 \\ 0^{-} & -6 & -4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -15 \\ -6 & -4 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -3^{+} & 0 & 1 \\ 0^{-} & 1 & -15 \\ 0^{+} & -4 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -15 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-7-60) = 3 \cdot 67 = 201$$

Svar: 201

Alt. lösning (bara radoperationer, sikte på övertriangulär):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-4) & \\ & (-1) \\ & \\ & \\ & \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ (2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (-4) \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 67 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot 1 \cdot -3 \cdot 1 \cdot 67) = 3 \cdot 67 = 201$$

4. Låt $\bar{u}_1 = 4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, $\bar{u}_2 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3$ och $\bar{u}_3 = \bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$, där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ betecknar vektorerna i standardbasen. Avgör om de tre vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende.

Lösning. Att $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende betyder att $(r,s,t) = (0,0,0)$ är den enda lösningen till $r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2 + t\bar{u}_3 = \bar{0}$, så då ställer vi upp det problemet

$$r\begin{pmatrix}4\\-3\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 4r + 2s + t = 0 & (-1) \\ -3r + 3s + 4t = 0 \\ 4r - s + 5t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4r + 2s + t = 0 \\ -3r + 3s + 4t = 0 & (1) \\ -3s + 4t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r + 5s + 5t = 0 & (3) \\ -3r + 3s + 4t = 0 \\ -3s + 4t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} r + 5s + 5t = 0 \\ 18s + 19t = 0 \\ -3s + 4t = 0 & (6) \end{cases}$$

$4 \cdot 6 + 19 = 24 + 19 = 43$

$$\iff \begin{cases} r + 5s + 5t = 0 \\ 43t = 0 \\ -3s + 4t = 0 \end{cases}$$

Nu är det tydligt att $t=0$, så $s=0$ och $r=0$. Alltså är $(r,s,t) = (0,0,0)$ den enda lösningen.

Svar: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende.

Alt. lösning. Eftersom antalet vektorer är lika med antalet element i vektorerna så kan man avgöra linjärt oberoende genom att ställa upp och räkna ut en determinant – 3 vektorer i $\mathbb{R}^3$ är linjärt beroende om och endast om volymen av den parallellepiped de spänner upp är 0.

Motsvarande determinant är

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

och en Sarrus-uppställning blir

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & -3 & 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right| = 4\cdot 3\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 4 + \\ - 4\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 4 - (-3)\cdot 2\cdot 5 =$$

$$= 12\cdot 5 + 3 + 32 - 12 + 16 + 3\cdot 10 = 60 + 35 + 4 + 30 =$$
$$= 90 + 39 = 129$$

Den volymen är inte 0, så $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ är linjärt oberoende.

5 Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Låt r vara en godtycklig skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga räknelagar (identiteter eller olikheter)?

Svara "sant", "falskt", eller "vet inte" för var och en av dem.

(a) $r(\bar{v}+\bar{w}) = r\bar{v}+r\bar{w}$ Svar: SANT

Anm. Detta är en av flera distributiva lagar.

(b) $\|r\bar{u}\| = r\|\bar{u}\|$ Svar: FALSKT

Anm. Den riktiga regeln är $\|r\bar{u}\| = |r|\cdot\|\bar{u}\|$. Det som står i (b) stämmer inte för $r<0$.

(c) $(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{u} = 0$ Svar: SANT

Anm. $\bar{u}\times\bar{v}$ är vinkelrät mot $\bar{u}$ (och $\bar{v}$), så skalärprodukt med $\bar{u}$ blir alltid 0.

(d) $\bar{v}-\bar{w} = \bar{v}+(-1)\bar{w}$ Svar: SANT

(e) $\|\bar{u}\| \geq 0$ Svar: SANT