TEN2 2021-06-11
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men förutom penna, sudd och linjal är gradskiva och passare godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens högskola
Avdelningen för tillämpad matematik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Låt $A = (2, 0, 2)$, $B = (1, 0, 6)$, $C = (1, 1, 1)$ och $D = (7, 3, 0)$ vara fyra punkter.

a Ange på parameterform en ekvation för planet som innehåller punkterna A, B och C. (1 p)

b Ange på parameterfri form en ekvation för planet som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)

c Beräkna avstådet till punkten D från planet som innehåller A, B och C. (2 p)

2 Låt $A = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
(6 p)

3a Beräkna $\det(A)$, om $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 p)

b Är A inverterbar? Motivera ditt svar. (1 p)

c Är vektorerna $\mathbf{v}_1 = (4, 3, -4, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -4, 4, 2)$ och $\mathbf{v}_3 = (3, 1, 3, 1)$ linjärt beroende? Motivera ditt svar. (1 p)

4 Låt $\mathbf{v}_1 = 6\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a Kontrollera att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal. (3 p)

b Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 = 9\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 15\mathbf{e}_3$. (3 p)

5 Punkten $A = (x, y, z)$ har alla koordinater > 0 (dvs. den ligger i första oktanten av rummet) och dess projektion $B = (x, y, 0)$ på xy-planet ligger i första kvadranten. $O = (0, 0, 0)$ är koordinatsystemets origo. Vad har A för koordinater (x, y, z), om $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 4$, vinkeln mellan $\overrightarrow{OA}$ och $\overrightarrow{OB}$ är $\frac{\pi}{3} = 60°$, och vinkeln mellan $\overrightarrow{OB}$ och x-axeln är $\frac{\pi}{6} = 30°$? (5 p)

Vänd – sista frågan står på andra sidan!

6 Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(a) $-\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

(b) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

(d) $-\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (2 p)

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$
0	1	1	100	0,00
1	2	3	121	1,00
2	4	9	144	1,41
3	8	27	169	1,73
4	16	81	196	2,00
5	32	243	225	2,24
6	64	729	256	2,45
7	128	2187	289	2,65
8	256	6561	324	2,83
9	512	19683	361	3,00

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!