TEN2 2022-06-10
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men gradskiva och passare är godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens universitet
Avdelningen för matematik och fysik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Låt $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (6 p)

2 Låt $\mathbf{u} = (4, -5)$ och $\mathbf{v} = (2, 3)$. Illustrera i två separata figurer vektoroperationerna $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ genom att ansätta vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ från lämpligt valda punkter. (2 p)

3 Låt $A = (1, 5, 1)$, $B = (4, 3, 3)$, $C = (10, 0, 5)$ och $D = (3, 7, -4)$ vara fyra punkter.
- **a** Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)
- **b** Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (3 p)
- **c** Avgör om punkten D ligger i samma plan som A, B och C. (1 p)
- **d** Beräkna $\cos(\beta)$, där β är vinkeln mellan yz-planet och planet som innehåller A, B, C. (2 p)

4 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. (6 p)

5 Låt $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = 11\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$, där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.
- **a** Kontrollera att $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal. (3 p)
- **b** Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 = -5\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 + 17\mathbf{e}_3$. (3 p)

6 Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

(b) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (2 p)

Fråga 6 är den sista. På nästa sida följer några tabeller.

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$	$\sqrt{10+n} \approx$
0	1	1	100	0,00	3,16
1	2	3	121	1,00	3,32
2	4	9	144	1,41	3,46
3	8	27	169	1,73	3,61
4	16	81	196	2,00	3,74
5	32	243	225	2,24	3,87
6	64	729	256	2,45	4,00
7	128	2187	289	2,65	4,12
8	256	6561	324	2,83	4,24
9	512	19683	361	3,00	4,36

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!