Lösningsförslag TEN2 2021-11-05 MAA140

1. Låt $\bar{v}_1 = 2\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = 4\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 - 9\bar{e}_3$ där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ betecknar vektorerna i standardbasen. Uttryck $\bar{u} = \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ som en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$, eller påvisa att detta inte är möjligt.

Lösning. Skrivna som kolumnvektorer har vi

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ och } \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Frågan är om det finns skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = \bar{u}$, vilket leder till det linjära ekvationssystem som har utvidgad-matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & -9 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} (2)\ (-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & 2 \\ 0 & -7 & -14 & 5 \\ 0 & 11 & 22 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -9 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 11 & 22 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (1)\ (-3) \\ \\ \end{array} \sim$$

(Redan här kan man inse att det inte går: Rad 2: $-7(s+2t)=5$
Rad 3: $11(s+2t)=-4$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (4) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right]$$

← Nollrad i VL, men inte i HL! Lösning saknas.

Svar: Det går inte att skriva $\bar{u}$ som en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

Koll. Vi kan verifiera att VL i matrisen inte är inverterbar genom att beräkna dess determinant. Sarrus ger

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{matrix} = -18 + 12 + 32 - 4 + 32 - 54 = $$
$$= 76 - 54 - 22 = 0$$

Detta visar inte entydigt att det inte går (den saken beror på $\bar{u}$), men det visar att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är linjärt beroende.

2. Beräkna determinanten
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Lösning. Glesast är rad 1, rad 4 och kolumn 5, men de två senare har inte så enkel proportion mellan elementen, så sikta på att utveckla längs rad 1 för $5 \times 5 \to 4 \times 4$.

$$\begin{array}{c} \quad \quad (-2) \to \downarrow \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} + \quad - \quad + \quad - \quad + \\ \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & 1 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow \end{array} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)\ (2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 12 & -9 \\ -4 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 12 \\ -4 & 0 \\ -2 & -5 \end{matrix} = \{\text{Sarrus}\} =$$

$$= -\big(1\cdot 0\cdot 6 + 12\cdot 5\cdot -2 + (-9)\cdot(-4)\cdot(-5) +$$
$$- (-9)\cdot 0\cdot(-2) - 1\cdot 5\cdot(-5) - 12\cdot(-4)\cdot 6\big) =$$

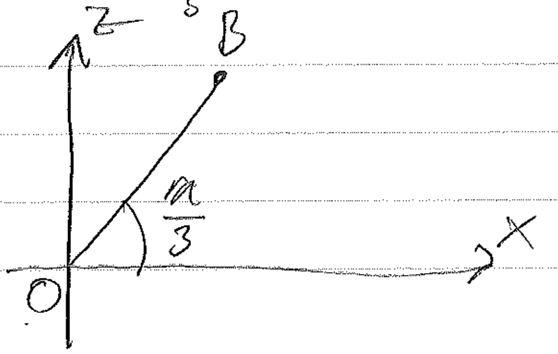
$$\begin{array}{r} 48 \\ \cdot\ 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$= -(0 - 120 - 9\cdot 20 - 0 + 25 + 48\cdot 6) =$$
$$= 120 + 180 - 25 - 288 = 300 - 313 = -13$$

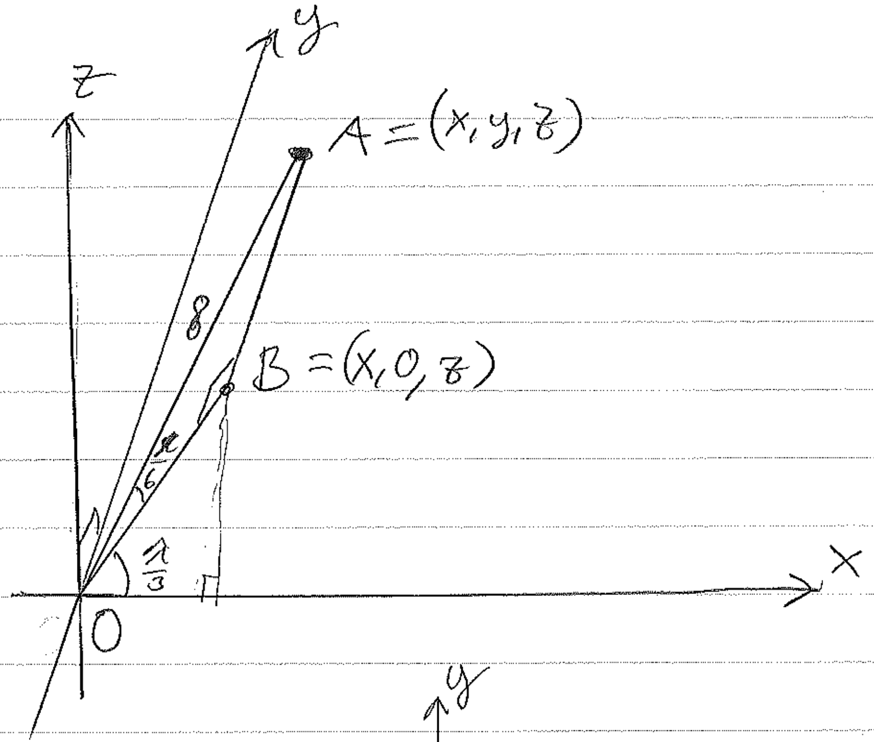
Svar: Determinantens värde är -13.

3. Punkten $A=(x,y,z)$ har alla koordinater >0 (dvs. den ligger i "första oktanten" av rummet) och dess projektion $B=(x,0,z)$ på xz-planet ligger i första kvadranten. Vad har A för koordinater (x,y,z), om $\|\vec{OA}\|=8$, vinkeln mellan $\vec{OA}$ och $\vec{OB}$ är $\frac{\pi}{6}=30^\circ$, och vinkeln mellan $\vec{OB}$ och x-axeln är $\frac{\pi}{3}=60^\circ$?

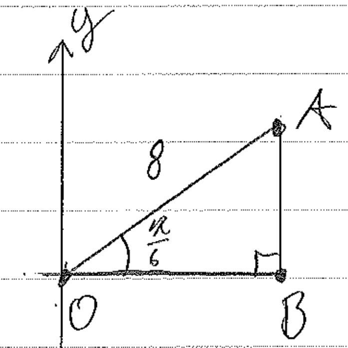
Lösning. I xz-planet ser den beskrivna situationen ut som



Den totala figuren blir ungefär denna:



Men kanske hjälper det mer att avbilda planet som innehåller O, A och B:



(Linjen genom O och B är inte en koordinataxel, utan snarast linjen $z = x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ i xz-planet.)

Trigonometri säger att $y = \|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ och $\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Det innebär att $x = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$ och $z = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 3 = 6$.

<u>Svar</u>: $A = (2\sqrt{3}, 4, 6)$.

<u>Koll</u>: $\|\overrightarrow{OA}\| = \|(2\sqrt{3}, 4, 6)\| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 4^2 + 6^2} =$

$= \sqrt{4 \cdot 3 + 16 + 36} = \sqrt{12 + 52} = \sqrt{64} = 8$. Stämmer.

$$\cos(\angle AOB) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{(2\sqrt{3}, 4, 6) \cdot (2\sqrt{3}, 0, 6)}{8 \cdot \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2 + 6^2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 3 + 0 + 36}{8 \cdot \sqrt{4\cdot 3+0+36}} = \frac{48}{8\cdot\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \sqrt{\frac{48}{64}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Stämmer.

På samma sätt är

$$\cos(\text{vinkeln mellan } \overrightarrow{OB} \text{ och x-axeln}) = \frac{\overrightarrow{OB} \bullet \overline{e_1}}{\|\overrightarrow{OB}\| \cdot \|e_1\|} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{3}, 0, 6) \bullet (1,0,0)}{\|(2\sqrt{3}, 0, 6)\| \bullet \|\overline{e_1}\|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{48}\cdot 1} = 2\sqrt{\frac{3}{48}} = 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 2\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Allt verkar stämma.

4. Låt $A=(2,0,2)$, $B=(1,1,1)$, $C=(0,5,1)$ och $D=(4,3,0)$ vara fyra punkter.

a) Ange på parameterform ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. En sådan ekvation är allmänt

$$(x,y,z) = A + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \quad \text{för } s,t \in \mathbb{R}.$$

I vårt fall är

$\overrightarrow{AB} = B-A = (1,1,1)-(2,0,2) = (-1,1,-1)$ och

$\overrightarrow{AC} = C-A = (0,5,1)-(2,0,2) = (-2,5,-1)$, så

Svar: $(x,y,z) = (2,0,2) + s(-1,1,-1) + t(-2,5,-1)$ för $s,t \in \mathbb{R}$.

b) Ange på parameterfri form en ekvation för det plan som innehåller A, B och C.

Lösning. En sådan ekvation är till exempel den på punkt–normal-form

$$((x,y,z)-A)\bullet\bar{n}=0,$$ där $\bar{n}$ är någon normal till planet.

En sådan normal är $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$, så vi kan räkna

$$(-\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3)\times(-2\bar{e}_1+5\bar{e}_2-\bar{e}_3)=-5\bar{e}_1\times\bar{e}_2+\bar{e}_1\times\bar{e}_3-2\bar{e}_2\times\bar{e}_1+$$
$$+\bar{e}_2\times\bar{e}_3+2\bar{e}_3\times\bar{e}_1-5\bar{e}_3\times\bar{e}_2=-5\bar{e}_3-\bar{e}_2+2\bar{e}_3-\bar{e}_1+2\bar{e}_2+5\bar{e}_1=$$
$$=4\bar{e}_1+\bar{e}_2-3\bar{e}_3=\bar{n}$$

Svar: Sökt ekvation är $((x,y,z)-(2,0,2))\bullet(4,1,-3)=0$

Svar 2: Sökt ekvation är $4(x-2)+y-3(z-2)=0$.

Svar 3: Sökt ekvation är $4x+y-3z=8-6=2$

Koll:

$(x,y,z)=A$ ger $VL=4x+y-3z=4\cdot2+0-3\cdot2=8-6=2$ OK

$(x,y,z)=B$ ger $VL=4x+y-3z=4\cdot1+1-3\cdot1=4+1-3=2$ OK

$(x,y,z)=C$ ger $VL=4x+y-3z=4\cdot0+5-3\cdot1=0+5-3=2$ OK

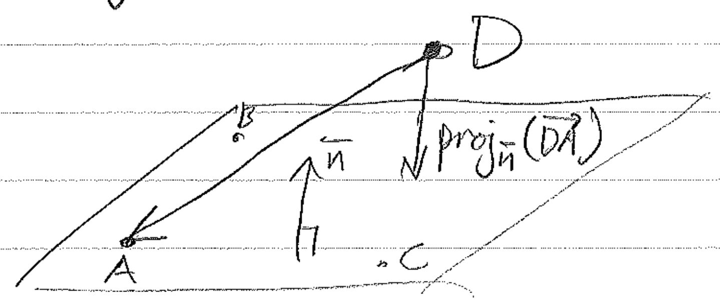
Däremot för $(x,y,z)=D$ blir

$$VL=4x+y-3z=4\cdot4+3-3\cdot0=16+3-0=19\neq2,$$

så D ligger inte i samma plan som A, B och C.

c) Beräkna avståndet från punkten D till planet som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. Kortaste vektor från D till planet fås genom att projicera $\overrightarrow{DA}$ på planets normal.



$$\overrightarrow{DA} = A - D = (2,0,2) - (4,3,0) = (-2,-3,2)$$

$$\text{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{DA}) = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n} = \frac{(-2,-3,2)\cdot(4,1,-3)}{(4,1,-3)\cdot(4,1,-3)} \bar{n} =$$

$$= \frac{-8-3-6}{16+1+9} \bar{n} = -\frac{17}{26} \bar{n}$$ (Åt motsatt håll, som i figuren.)

Nu gäller att $\|\bar{n}\| = \sqrt{\bar{n} \cdot \bar{n}} = \sqrt{26}$, så

$$\text{avståndet} = \left\|\text{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{DA})\right\| = \left\| -\frac{17}{26} \bar{n} \right\| = \frac{17}{26}\|\bar{n}\| = \frac{17}{\sqrt{26}} \approx 3$$

(faktiskt mycket nära $3\frac{1}{3}$, men det är svårt att se med bara papper och penna).

Svar: Avståndet är $\frac{17}{\sqrt{26}}$.

5. Låt $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvärden till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

<u>Lösning.</u> Det är bara att pröva dem.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ 10-11 \\ 10-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenvektor med $\lambda = -1$.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2-2 \\ 11+10+11 \\ 10+10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 32 \\ 31 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Helt fel oklart. Ej egenvektor!

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-14+12 \\ -11+70-66 \\ -10+70-66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Egenvektor med $\lambda = -1$ (igen!).

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-22+20 \\ -22+110-110 \\ -20+110-110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -22 \\ -20 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Egenvektor med $\lambda = -2$.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9+8+10 \\ 33-40-55 \\ 30-40-55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -62 \\ -65 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ej egenvektor!

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 11 & 10 & -11 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+16-14 \\ 11-80+77 \\ 10-80+77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Egenvektor med $\lambda = -1$.

<u>Svar:</u> $\bar{u}_1$, $\bar{u}_3$ och $\bar{u}_6$ är egenvektorer med egenvärde -1, $\bar{u}_4$ är egenvektor med egenvärde -2, men $\bar{u}_2$ och $\bar{u}_5$ är ej egenvektorer.

6. Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a) $\bar{u} \circ (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \circ \bar{v} + \bar{u} \circ \bar{w}$ SANT
(distributiva lagen för $\circ$)

b) $\bar{u} \circ \bar{v} = -\bar{v} \circ \bar{u}$ FALSKT
(rätt lag är $\bar{u} \circ \bar{v} = \bar{v} \circ \bar{u}$)

c) $(\bar{u} \circ \bar{v})\bar{w} = \bar{u}(\bar{v} \circ \bar{w})$ FALSKT
($\bar{u}$ och $\bar{w}$ kan ha olika riktning)

d) $\|\bar{u}\|^2 = \bar{u} \circ \bar{u}$ SANT

e) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ SANT
(distributiva lagen för $\times$)

f) $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$ SANT
($\times$ är antikommutativ)

g) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ FALSKT
($\times$ är <u>inte</u> associativ)