TEN2 2022-03-24
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men gradskiva och passare är godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens högskola
Avdelningen för tillämpad matematik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$. (6 p)

2 Låt $A = (-4, 16, 12)$, $B = (6, -14, 12)$, $C = (6, 16, -8)$ och $D = (9, 20, 16)$ vara fyra punkter.
a Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)
b Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (3 p)
c Beräkna avståndet mellan punkten D och planet som innehåller A, B, C. (2 p)

3 Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ beteckna vektorerna i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.
a Skriv ned gångertabellen för skalärprodukt av vektorer i standardbasen. (1 p)
b Skriv ned gångertabellen för vektorprodukt av vektorer i standardbasen. (1 p)

4 Finn alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, samt till varje egenvärde en egenvektor. (6 p)

5 Låt $\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = -4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$, och $\mathbf{v}_3 = -5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$, där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.
a Avgör om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer. (2 p)
b Avgör om $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. (4 p)

6 Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

		(d)	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \times (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	(e)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(b)	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$	(f)	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
(c)	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	(g)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (3 p)

Fråga 6 är den sista. På nästa sida följer några tabeller.

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$	$\sqrt{10+n} \approx$
0	1	1	100	0,00	3,16
1	2	3	121	1,00	3,32
2	4	9	144	1,41	3,46
3	8	27	169	1,73	3,61
4	16	81	196	2,00	3,74
5	32	243	225	2,24	3,87
6	64	729	256	2,45	4,00
7	128	2187	289	2,65	4,12
8	256	6561	324	2,83	4,24
9	512	19683	361	3,00	4,36

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!