Lösningsförslag TEN1 2022-08-18 MAA140

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 5x+7y-3z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \\ 3x+4y-5z=0 \end{cases}$

Lösning: Uppställt som utvidgad matris blir det

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-2) \; (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -7 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2) \; (-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

(-2) syftar till att få en 1:a i pos. (1,1). (-1) var ett infall för att få en mindre faktor än (-3) i steget efter.

Här ser man att två ekvationer blivit lika, så parameterlösning är att vänta!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 16 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Jepp, blir nollrad.
Icke ledande kolumn är z, så ansätt $z=t$.

Andra raden $y+16z=3 \iff y=3-16z=3-16t$

Första raden $x+y-7z=-1 \iff x=-1+7z-y=$
$=-1+7t-(3-16t)=-4+23t.$

Svar: Lösningen är $\begin{cases} x=-4+23t \\ y=3-16t \\ z=t \end{cases}$ för $t\in\mathbb{R}$.

Koll: Insättning ger.

$VL_1 = 5x + 7y - 3z = 5(-4+23t) + 7(3-16t) - 3t =$
$= (-20+21) + (115 - 112 - 3)t = 1 = HL_1$

$VL_2 = 2x + 3y + 2z = 2(-4+23t) + 3(3-16t) + 2t =$
$= (-8+9) + (46-48+2)t = 1 = HL_2$

$VL_3 = 3x + 4y - 5z = 3(-4+23t) + 4(3-16t) - 5t =$
$= (-12+12) + (69-64-5)t = 0 = HL_3$. Stämmer!

2. Låt $z = 2-3i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen $z, \bar{z}, iz, z/i, |z|, i-z$ och $\frac{1+5i}{z}$.

Lösning. $\bar{z} = \overline{2-3i} = 2+3i$

$iz = i(2-3i) = 2i - 3i^2 = 3+2i$

$z/i = \frac{i \cdot z}{i \cdot i} = \frac{3+2i}{-1} = -3-2i$

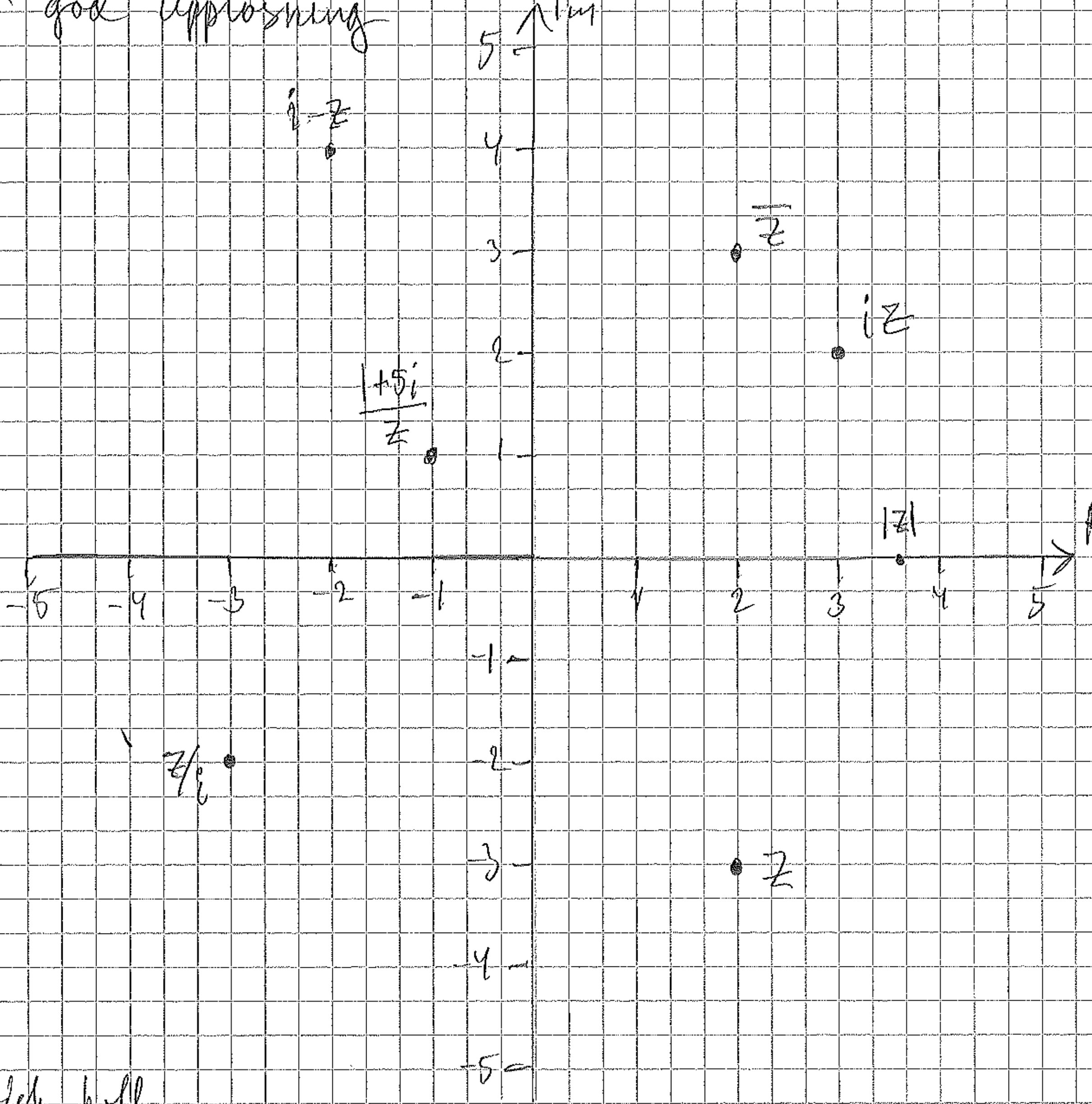
$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$

$i - z = i - (2-3i) = i - 2 + 3i = -2 + 4i$

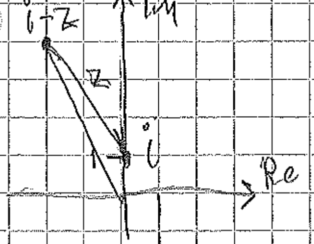
$$\frac{1+5i}{z} = \frac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+10i+15i^2}{2^2+3^2} = \frac{(2-15)+(3+10)i}{4+9} =$$

$$= \frac{-13+13i}{13} = \frac{-13}{13} + \frac{13i}{13} = -1+i$$

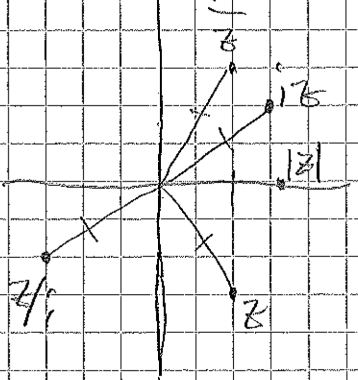
Alla real- och imaginärdelar håller sig mellan −5 och +5, så det kan vara lämpliga intervall. Tre rutor per enhet ger god upplösning



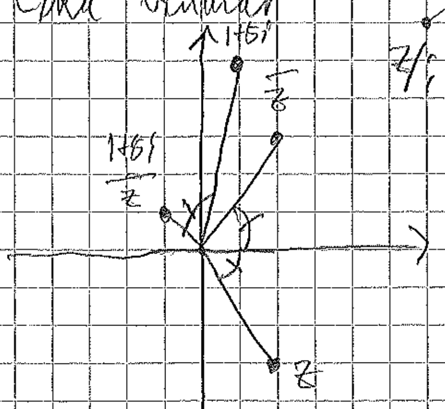
Grafisk koll



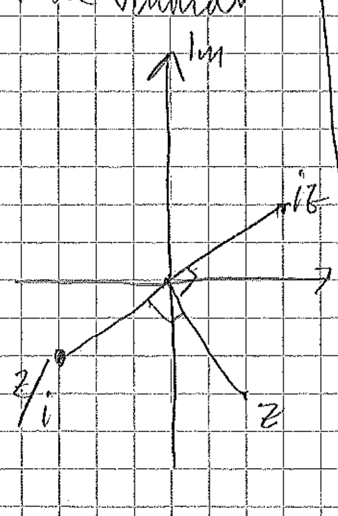
Lika belopp



Lika vinklar



Räta vinklar



Svar:

$\bar z = 2+3i$

$iz = 3+2i$

$z/i = -3-2i$

$|z| = \sqrt{13}$

$i-z = -2+4i$

$\frac{1+5i}{z} = -1+i$

3 Låt $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Beräkna följande uttryck, eller förklara varför ett värde inte existerar.

a AB (2p)

Lösning: A är 3×3 och B är 3×2, så produkten blir 3×2.

Uppställning:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25+36+12 & 15+20+8 \\ 35+45+18 & 21+25+12 \\ 30+36+18 & 18+20+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 & 43 \\ 98 & 58 \\ 84 & 50 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $AB = \begin{pmatrix} 73 & 43 \\ 98 & 58 \\ 84 & 50 \end{pmatrix}$

b $A-B$ (1p)

Svar: Ej definierat, för A är 3×3 (har 3 kolumner) men B är 3×2 (har bara 2 kolumner).

c BA (1p)

Svar: Ej definierat, för B är 3×2 (har 2 kolumner) men A är 3×3 (har hela 3 rader).

d B^T (1p)

Svar: $B^T = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

e A^{-1} (5p)

Lösning: A är 3×3, så en invers är tänkbar. Vi behöver ställa upp och räkna ut.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (-1)\,(-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (1)\,(6) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 6 & 0 & -5 \end{array}\right] \begin{matrix} (-1) \\ (-4) \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ (1)\,(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

Svar: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Koll:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -15+28-12 & -12+20-8 & -6+12-6 \\ 15-21+6 & 12-15+4 & 6-9+3 \\ 10-28+18 & 8-20+12 & 4-12+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Stämmer!

4a Skriv $w = -5+5i$ på polär form.

Lösning: $|w| = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

$\tan(\arg(w)) = \frac{5}{-5} = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

w ligger i 2:a kvadranten, men $-\frac{\pi}{4}$ är ett argument i 4:e kvadranten, så rätt argument är $-\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$.

Svar: $w = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

b Lös den binomiska ekvationen $z^4 = 81\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.
Svara på polär form.

Lösning. Beloppet 81 är 3^4, så $|z| = 3$.

En rot har argument som är $\frac{1}{4}$ av argumentet $\frac{\pi}{3}$ för HL, så den roten har argument $\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$ (ej standardvinkel). Övriga rötter ligger $\frac{1}{4}$ varv ifrån varandra, så på skillnad

$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Argumenten blir: $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$)

$\frac{\pi}{12} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{12}$ och $\frac{\pi}{12} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{18\pi}{12} = \frac{19\pi}{12}$.

Svar: Lösningarna är $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$,

$z_2 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $z_3 = 3\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$

samt $z_4 = 3\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

c Skriv $6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ på rektangulär form.

Lösning: $\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Alltså är $6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) =$

$= -3\sqrt{3} + 3i$

Svar: $-3\sqrt{3} + 3i$

5 Låt C, D och E vara inverterbara 3x3-matriser. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a $CI = C$ SANT
(Det är hur identiteten ska fungera.)

b $CC^T = I$ FALSKT
(Men jämför (e).)

c $(CD)E = C(DE)$ SANT
(Associativa lagen för matrismultiplikation.)

d $IC = I$ FALSKT
(IC blir också C.)

e $CC^{-1} = I$ SANT
(Det är hur inversen ska fungera.)