

Denna tentamen består av åtta om varannat SLUMPMÄSSIGT ORDNADE uppgifter som vardera kan ge maximalt 5 poäng. Den maximalt möjliga poängsumman är således 40. För betygen 3, 4 och 5 krävs minst 18, 26 respektive 34 poäng. Lösningar förutsätts innefatta ordentliga motiveringar och tydliga svar. Samtliga lösningsblad skall vid inlämning vara sorterade i den ordning som uppgifterna är givna i. Undvik speciellt att skriva på baksidor av lösningsblad.

- 1.** Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, -2x_1 + x_2, x_1 - x_2 - x_3).$$

Bestäm F :s matris i basen $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

- 2.** Låt h vara en kvadratisk form på \mathbb{E}^3 definierad genom

$$h(\mathbf{u}) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

I vilket (slutet) intervall ligger $h(\mathbf{u})$ då $\|\mathbf{u}\| = 1$, och för vilka \mathbf{u} antas respektive extremvärde?

- 3.** Avgör och förklara för var och en av mängderna

$$\begin{cases} M_1 = \text{Mängden av alla heltal} \\ M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \end{cases}$$

om den utgör ett linjärt rum över de reella talen eller ej.

- 4.** Bestäm den ortogonalala projektionen av polynomet $1 + x + x^2$ på

$$\{p \in \mathcal{P}_2 : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0\},$$

där \mathcal{P}_2 är rummet av alla polynom av grad högst 2, försett med den skalärprodukten

$$\langle p | q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx.$$

- 5.** En triangel har sina hörn i punkterna $P : (-1, 3, 1)$, $Q : (2, 1, 3)$ och $R : (1, 0, 2)$, där koordinaterna är givna i ett ON-system. Bestäm hörnen för spegelbilden av triangeln vid spegling i planet $\pi : 3x + 2y - z = 0$.

- 6.** Den linjära operatorn $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ beskrivs i standardbasen av matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en bas i värderrummet till F och en bas i nollrummet till F .

- 7.** Bestäm en ortonormerad bas i underrummet $M = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$ till det euklidiska rummet \mathbb{E} för vilket skalärprodukten är definierad enligt

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

- 8.** Ange för varje reellt a den geometriska innehördeten av ekvationen

$$x^2 - 2a^2y^2 + (1 - 2a)z^2 - 2xz - 4ayz = 1.$$

MMA129 / Lösningar till tentamen 2013-06-12

① $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges i basen e_1, e_2, e_3 av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, -2x_1 + x_2, x_1 - x_2 - x_3)$$

Om koordinaterna för $F(x_1, x_2, x_3)$ benämns (y_1, y_2, y_3)

har vi matrissambandet $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

dvs F :s matris i basen e_1, e_2, e_3 är $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Basbytet $e_1, e_2, e_3 \rightarrow \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ där $\begin{cases} \tilde{e}_1 = 2e_1 - e_2 \\ \tilde{e}_2 = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \\ \tilde{e}_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$
kan på matrisform sättas

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dvs } \tilde{e} = eT$$

där T är basbytesmatrisen i bytet från basen e_1, e_2, e_3 till basen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$

Utifrån att

$$\underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3}_\text{vektorn x uttryckt i basen } e_1, e_2, e_3 = x = \underbrace{\tilde{x}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{e}_2 + \tilde{x}_3 \tilde{e}_3}_\text{vektorn x uttryckt i basen } \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$$

fors på matrisform att $eX = \tilde{e}\tilde{X} = eT\tilde{X}$

dvs $X = T\tilde{X}$ (ty basvektorerna e_1, e_2, e_3 är linj. obero.)

Vi har sammansättningsvis att $\begin{cases} y = AX \\ \tilde{y} = \tilde{A}\tilde{X} \end{cases}$ där $\begin{cases} X = T\tilde{X} \\ y = T\tilde{y} \end{cases}$

vilket ger att $T\tilde{Y} = A T \tilde{X}$ och därmed att $\tilde{A} = T^{-1}AT$

Har $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{(4+0-2)-(0+4-3)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

Avbildningsmatrisen i basen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, dvs \tilde{A} , är

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -5 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -26 & -6 & 3 \\ 29 & 6 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$h(u) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

med koordinaterna
givna i en ON-bas
(tj u ∈ ℝ³)

På matrisform för att

$$(h(u)) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T G \mathbf{x}$$

där G har valts att vara symmetrisk. Utifrån att
basen är ON så är G avbildningsmatrisen till en
symmetrisk avbildning. Utifrån detta ger spektralsatsen
att det finns en ON-bas av egenvektorer. Speciellt är
avbildningen diagonalisierbar.

$$\text{Eigenländer } \lambda = \det(G - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 0 + 0) - (0 - 4(\lambda-2) - 4\lambda) = -[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 4\cdot 2(\lambda-1)] \\ = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = -(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda_1 = -2}: A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; k_1 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \underline{\lambda_2 = 1}: A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; k_2 = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \underline{\lambda_3 = 4}: A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; k_3 = t_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{där } t_1, t_2, t_3 \neq 0$$

Låt S vara basbytessmatrisen i sambandet $\tilde{x} = eS$ för
ett basbyte från ON-basen e_1, e_2, e_3 till ON-basen $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$

där de senare är respektive av de normerade egenvektorerna:

$$\text{där } S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{där } S^T = S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vi får att } (h(u)) = \mathbf{x}^T G \mathbf{x} = (S \tilde{x})^T G (S \tilde{x})$$

$$= \tilde{x}^T (S^T G S) \tilde{x} = \tilde{x}^T (S^{-1} G S) \tilde{x} = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tilde{x} \\ = (-2\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + 4\tilde{x}_3^2)$$

I och med att $-2(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) \leq h(u) \leq 4(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2)$

får vi $-2 \leq h(u) \leq 4$ för $\|u\| = 1$.

$$\min h(u) \text{ antas för } u = \pm \tilde{e}_1 = \pm \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 + 2e_3) \quad \text{och} \quad \|u\| = 1$$

$$\max h(u) \text{ antas för } u = \pm \tilde{e}_3 = \pm \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 + e_3) \quad \text{och} \quad \|u\| = 1$$

(3) $M_1 = \text{'Mängden av alla heltal'}$ är ej ett linjärt rum
över de reella talen ty t.ex. $\frac{1}{2} \cdot 3 \notin M_1$,
trots att $3 \in M_1$ och $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$.

$$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ är ett linjärt rum}$$

ty om $u = (x_1, x_2, x_3) \in M_2$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in M_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 sätts $\begin{cases} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = (x_1+x_2+x_3) + (y_1+y_2+y_3) = 0+0=0 \\ (\lambda x_1) + (\lambda x_2) + (\lambda x_3) = \lambda(x_1+x_2+x_3) = \lambda \cdot 0 = 0 \end{cases}$

dvs $\begin{cases} u+v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in M_2 \\ \lambda u = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \in M_2 \end{cases}$

$$M_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\} \text{ är inte ett linjärt rum}$$

ty nollelementet $(0, 0, 0) \notin M_3$ och varje linjärt rum ska innehålla ett nollelement.

(4) Sätt $M = \{p \in \mathbb{P}_2 : \int_{-1}^1 p(x) dx = 0\}$ där \mathbb{P}_2 är
försedd med skalarprodukten $\langle p | q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx$.

Vi har att $M = \{ap_0 + bp_1 + cp_2 : \int_{-1}^1 (ap_0(x) + bp_1(x) + cp_2(x)) dx = 0, p_i(x) = x^i\}$
 $= \{ap_0 + bp_1 + cp_2 : a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot \frac{2}{3} = 0\} = \{a(p_0 - 3p_2) + bp_1\} = [p_0 - 3p_2, p_1]$

Vi noterar att $\langle u_1 | u_2 \rangle = \int_{-1}^1 (1-3x^2)x dx = 0$
 dvs u_1, u_2 är ortogonala i den aktuella skalarprodukten

Detta gör att ortogonala projektioner på M fås direkt som en summa av de ortogonala projektionerna på u_1 resp u_2 .
 Vi får således att

$$\begin{aligned} \text{proj}_M(p) &= \frac{\langle p | u_1 \rangle}{\langle u_1 | u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle p | u_2 \rangle}{\langle u_2 | u_2 \rangle} u_2 = \frac{\int_{-1}^1 ((1+x+x^2)(1-3x^2)) dx}{\int_{-1}^1 (1-3x^2)^2 dx} u_1 + \frac{\int_{-1}^1 ((1+x+x^2)x) dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} u_2 \\ &= \frac{2(1+0-2\frac{1}{3}+0-3\frac{1}{5})}{2(1-\frac{2}{3}+\frac{9}{5})} u_1 + \frac{2(0+\frac{1}{3}+0)}{2(\frac{1}{3})} u_2 = -\frac{1}{3}u_1 + u_2 \\ \text{dvs } \text{proj}_M(p)(x) &= -\frac{1}{3}x + x + x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P = (-1, 3, 1) \\ Q = (2, 1, 3) \\ R = (1, 0, 2) \end{cases}$$

ON-system

$$(5) \quad \pi: 3x+2y-z=0,$$

på parameterform fås

$$\pi: (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, 3x+2y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, 2)$$

Alltså: Vektorerna $e_1 + 3e_3$ och $e_2 + 2e_3$ är $\parallel \pi$
och vektorn $3e_1 + 2e_2 - e_3 \perp \pi$

Den linjära avbildning F som speglar vektorer m.s.p.
ett vektorrum som är parallellt med π ges således av
relationerna $\begin{cases} F(e_1 + 3e_3) = e_1 + 3e_3 \\ F(e_2 + 2e_3) = e_2 + 2e_3 \\ F(3e_1 + 2e_2 - e_3) = -(3e_1 + 2e_2 - e_3) \end{cases}$

dus

$$(F(e_1) \ F(e_2) \ F(e_3)) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_B = (e_1 \ e_2 \ e_3) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_C.$$

Varför avbildningsmatrisen för F är lika med CB^{-1} .

Vi får att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{(1+0+0)-(9+4+0)} \begin{pmatrix} -5 & 6 & -3 \\ 6 & -10 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 12 & -6 \\ 12 & -6 & -4 \\ -6 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Koordinaterna för spegelpunkterna
 $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ till punkterna P, Q, R resp.

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

där \tilde{C} är
spegeln i
punkt C

Sammanfattningsvis fås

$$A \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -13 & -1 & 4 \\ 17 & -3 & -2 \\ 9 & 26 & 15 \end{pmatrix}$$

dus $\begin{cases} \tilde{P}: \left(-\frac{13}{7}, \frac{17}{7}, \frac{4}{7}\right) \\ \tilde{Q}: \left(-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{26}{7}\right) \\ \tilde{R}: \left(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{15}{7}\right) \end{cases}$

⑥ $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ bestäms av matrisen A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

radkanonisk form

Vi noterar bl.a. att $\begin{cases} \dim V(F) = \text{rang } A = 2 \\ \dim N(F) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim V(F) = 4-2 = 2 \end{cases}$

V har allt

$$\begin{aligned} N(F) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : AX = 0\} = \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_3 + 4x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4)\} \\ &= [(2, 1, 1, 0), (4, 1, 0, 1)] \end{aligned}$$

dvs en bas i $N(F)$ är t.ex. $(2, 1, 1, 0), (4, 1, 0, 1)$

$$V(F) = [(1, 0, 3, 2), (-4, 1, -7, -3)] = [(1, 0, 3, 2), (0, 1, 5, 5)]$$

dvs en bas i $V(F)$ är t.ex. $(1, 0, 3, 2), (0, 1, 5, 5)$

⑦ $M = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)] \subset \mathbb{E}$

I den bas i vilken M:s definierande vektorer är givna gäller att skalarprodukten i \mathbb{E} lyder

$$\langle u | v \rangle = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 + 2 x_3 y_3 \quad \text{där} \quad (x_1, x_2, x_3) \text{ och } (y_1, y_2, y_3) \text{ är koordinaterna för } u \text{ resp. } v.$$

Välj $f_1 = u_1 = (1, 0, 1)$ och normera till e_1

$$\langle f_1 | f_1 \rangle = 1^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 = 3$$

$$\text{dvs } e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, 1)$$

Välj $f_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle e_1 \quad \text{som} \quad \begin{cases} \in M \\ \neq (0, 0, 0) \text{ ty } e_1 \text{ och } u_2 \text{ är} \\ \perp e_1 \end{cases}$

$$f_2 = (0, 1, 1) - (0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1) \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, 1)$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} (1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} (-2, 3, 1)$$

$$\langle f_2 | f_2 \rangle = \frac{1}{3} [(-2)^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1^2] = \frac{1}{3} \cdot 33$$

$$\text{dvs } e_2 = \frac{1}{\sqrt{33}} (-2, 3, 1)$$

En ON-bas i M är

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{33}} (-2, 3, 1)$$

$h(u)$

$$\begin{aligned}
 ⑧ \quad I &= \overbrace{x^2 - 2a^2y^2 + (1-2a)z^2 - 2xz - 4ayz}^{h(u)} \\
 &= (x-z)^2 - 2a(z^2 + 2yz) - 2a^2y^2 \\
 &= (x-z)^2 - 2a[(z+y)^2 - y^2] - 2a^2y^2 \\
 &= (x-z)^2 - 2a(z+y)^2 - 2a(a-1)y^2 \\
 &= \tilde{x}^2 - 2a\tilde{y}^2 - 2a(a-1)\tilde{z}^2
 \end{aligned}$$

där $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dvs $\tilde{x} = MX$

I och att $\det(M) = -1 \neq 0$ så är M inversen till en basbytessmätris från basen e_1, e_2, e_3 till $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$, dvs slutsatser om signatur och rang för den kvadratiska formen $h(u)$ kan göras baserat på uttrycket $\tilde{x}^2 - 2a\tilde{y}^2 - 2a(a-1)\tilde{z}^2$

<u>Vi konstaterar följande:</u>	<u>a</u>	<u>rang</u>	<u>signatur</u>
$a < 0$		3	(1, 1, -1)
$a = 0$		1	(1, 0, 0)
$0 < a < 1$		3	(1, 1, -1)
$a = 1$		2	(1, -1, 0)
$a > 1$		3	(1, -1, -1)

Därmed fås att den geometriska innebörden av ekvationen $I = h(u)$ är att den beskriver ...

- { en enmantlad hyperboloid om $a < 0$
- två parallella plan om $a = 0$
- en enmantlad hyperboloid om $0 < a < 1$
- en hyperbolisk cylinder om $a = 1$
- en tvåmantlad hyperboloid om $a > 1$



Tentamen 2013-06-12

POÄNGSPANN (maxpoäng) för olika delmoment i uppgifter

1. F :s matris i basen

$2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$
 är lika med

$$\begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -26 & -6 & 3 \\ 29 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

1p: Korrekt funnit avbildningsmatrisen A för den linjära operatorn F i basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

1p: Korrekt funnit basbytesmatrisen T för bytet från basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ till $\tilde{\mathbf{e}} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\tilde{\mathbf{e}}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, dvs korrekt funnit matrisen T i sambandet $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}T$ mellan baserna, där \mathbf{e} och $\tilde{\mathbf{e}}$ är radmatriserna med vektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ respektive $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ som matriselement

1p: Korrekt funnit/noterat att F :s matris i basen $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$, dvs \tilde{A} , ges av relationen $\tilde{A} = T^{-1}AT$

1p: Korrekt bestämt inversen till matrisen T

1p: Korrekt bestämt matrisen \tilde{A}

2. Den kvadratiska formen $h(\mathbf{u})$ ligger i intervallet $[-2, 4]$.

Minimum antas för

$$\mathbf{u} = \pm \tilde{\mathbf{e}}_1 = \pm \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

och maximum för

$$\mathbf{u} = \pm \tilde{\mathbf{e}}_3 = \pm \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

1p: Korrekt funnit egenvärdena till den kvadratiska formen

1p: Korrekt identifierat den diagonalala formen för den kvadratiska formen

1p: Korrekt, utifrån framställningen $-2\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + 4\tilde{x}_3^2$ av den den kvadratiska formen $h(\mathbf{u})$ i basen av egenvektorer, identifierat det interval som $h(\mathbf{u})$ ligger i då normen av \mathbf{u} är lika med 1

1p: Korrekt funnit de \mathbf{u} för vilka $h(\mathbf{u})$ på $\|\mathbf{u}\| = 1$ är minimal

1p: Korrekt funnit de \mathbf{u} för vilka $h(\mathbf{u})$ på $\|\mathbf{u}\| = 1$ är maximal

3. M_1 och M_3 är inte linjära rum över R
 M_2 är ett linjärt rum över R

2p: Korrekt visat att M_1 inte är ett linjärt rum

2p: Korrekt visat att M_2 är ett linjärt rum

1p: Korrekt visat att M_3 inte är ett linjärt rum

4. $-\frac{1}{3} + x + x^2$

1p: Korrekt funnit en bas u_1, u_2 i underrummet till P_2

1p: Korrekt noterat att den funna basen är ortogonal, eller alternativt ortogonaliserat basen till att lyda f_1, f_2

1p: Korrekt noterat att en ortogonal projektion på underrummet till P_2 är lika med summan av de ortogonala projektionerna på f_1 och f_2

1p: Korrekt beräknat den ortogonala projektionen på f_1

1p: Korrekt beräknat den ortogonala projektionen på f_2 , och korrekt sammanställt den ortogonala projektionen på underrummet till P_2

5. $P_s : (-\frac{13}{7}, \frac{17}{7}, \frac{9}{7})$
 $Q_s : (-\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{26}{7})$
 $R_s : (\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{15}{7})$

1p: Korrekt noterat att speglingen i planet π förmedlas av en linjär avbildning som avbildar vektorer parallella med planet på sig själva och vektorer vinkelräta mot planet på minus sig själva

1p: Korrekt från ekvationen för planet identifierat vilket vektorrum som är parallellt med planet och vilket som är ortogonal, samt från detta formulerat de villkor som ger avbildningen

2p: Korrekt bestämt avbildningsmatrisen för speglingen

1p: Korrekt funnit koordinaterna för spegelpunkterna

$$P_s, Q_s, R_s \text{ till punkterna } P, Q, R$$

6. En bas i F :s nollrum är t.ex.
 $(2,1,1,0), (4,1,0,1)$

En bas i F :s värderum är t.ex.
 $(1,0,3,2), (-4,1,-7,-3)$
eller t.ex. $(1,0,3,2), (0,1,5,5)$

1p: Korrekt funnit en trappstegsmatris som är radekvivalent med den linjära operatorns avbildningsmatris

1p: Korrekt bestämt en av två basvektorer i F :s nollrum

1p: Korrekt bestämt en andra av två basvektorer i F :s nollrum

1p: Korrekt bestämt en av två basvektorer i F :s värderum

1p: Korrekt bestämt en andra av två basvektorer i F :s värderum

7. En ON-bas i M är t.ex.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{33}}(-2,3,1)$$

1p: Korrekt från M valt ut en vektor \mathbf{u}_1 och korrekt normerat den till \mathbf{e}_1

1p: Korrekt från M valt ut en andra vektor \mathbf{u}_2 och korrekt till formen konstruerat en vektor \mathbf{f}_2 som tillhör M , som är skild från nollvektorn, och som är ortogonal mot den först valda vektorn, dvs t.ex. bestämt $\mathbf{f}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1$

2p: Korrekt bestämt det explicita uttrycket för \mathbf{f}_2

1p: Korrekt normerat \mathbf{f}_2 till \mathbf{e}_2

8. $a < 0$: en enmantlad hyperboloid
 $a = 0$: två parallella plan
 $0 < a < 1$: en enmantlad hyperboloid
 $a = 1$: en hyperbolisk cylinder
 $a > 1$: en tvåmantlad hyperboloid

1p: Korrekt kvadratkompletterat i den kvadratiska formen så att slutsatser kan dras för olika värden på a

1p: Korrekt funnit att ekvationen beskriver en enmantlad hyperboloid om $(a < 0) \vee (0 < a < 1)$

1p: Korrekt funnit att ekvationen beskriver två parallella plan om $a = 0$

1p: Korrekt funnit att ekvationen beskriver en hyperbolisk cylinder om $a = 1$

1p: Korrekt funnit att ekvationen beskriver en tvåmantlad hyperboloid om $a > 1$
