Lösningsförslag TEN1 2021-11-26 MAA140

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} -2x+2y+5z=4 \\ 4x-3y-2z=38 \\ 3x-2y \qquad 37 \end{cases}$

Lösning. För att minska mängden text man skriver så är det lämpligt att ställa upp systemet som utvidgad matris. För att undvika bråk i räkningarna så letar vi efter små skillnader mellan elementen. I x-kolumnen är -2 till 3 och 3 till 4 båda kandidater, men den första ger (ännu fler) rätt stora tal i HL, så vi börjar med 3 från 4:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & -2 & 38 \\ 3 & -2 & 0 & 37 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 37 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ 2 \quad -3 \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 34 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ -6 \quad 2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{matrix} \leftarrow \\ 1 \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Svar: Lösningen är $(x,y,z)=(11,-2,6)$.

Koll:

$VL_1=-2x+2y+5z=-2\cdot 11+2\cdot -2+5\cdot 6=-22-4+30=4=HL_1$

$VL_2=4x-3y-2z=4\cdot 11-3\cdot -2-2\cdot 6=44+6-12=38=HL_2$

$VL_3=3x-2y=3\cdot 11-2\cdot -2=33+4=37=HL_3$. Allt stämmer!

2a Skriv $w = -4\sqrt{3} - 4i$ på polär form.

Lösning. $|w| = \sqrt{Re(w)^2 + Im(w)^2} = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{16 \cdot 3 + 16} = \sqrt{48+16} = \sqrt{64} = 8$

$\tan(\arg(w)) = \frac{Im(w)}{Re(w)} = \frac{-4}{-4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Alltså är de två kandidaterna för arg(w) därmed $\frac{\pi}{6}$ och $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Men w ligger i 3:e kvadranten, och $\arg = \frac{\pi}{6}$ blir i 1:a kvadranten, så $\arg(w) = \frac{7\pi}{6}$.

Svar: $w = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b Lös den binomiska ekvationen $z^5 = 243$. Svara på polär form.

Lösning. En ekvation $z^5 = c \neq 0$ har 5 olika lösningar alla med $|z| = \sqrt[5]{|c|}$ men argument som ligger $\frac{2\pi}{5}$ ifrån varandra. I potenstabellen ser vi att $243 = 3^5$, så en lösning är just $z = 3 = 3(\cos(0) + i\sin(0))$ det innebär att övriga lösningar också har belopp 3 men argument $\frac{2\pi}{5}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$, $3 \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$ och $4 \cdot \frac{2\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$.

Går man ytterligare $\frac{2\pi}{5}$ kommer man sedan tillbaka till den första lösningen $z = 3 = 3\left(\cos\frac{10\pi}{5} + i\sin\frac{10\pi}{5}\right)$.

Svar: Lösningarna är $z_1 = 3(\cos(0) + i\sin(0))$,

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right),$$

$$z_3 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right),$$

$$z_4 = 3\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right) \text{ och}$$

$$z_5 = 3\left(\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}\right).$$

c Skriv $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ på rektangulär form.

Lösning. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$= -1 + i$

Svar: $-1+i$

3 Låt $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

Beräkna följande uttryck, eller förklara varför ett värde inte existerar:
(a) AB, (b) $A+B$, (c) BA, (d) A^T, (e) A^T-B,
(f) A^TB och (g) A^{-1}.

Lösning: (a) en 2×3 går bra att multiplicera med en 3×2, resultatet blir en 2×2. Uppställning:

$$\begin{array}{c|c} & B \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\ \hline A \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -15+8+6 & 10-6-4 \\ -15+12+3 & 10-9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Svar: Går ej, för A är 2×3 och B är 3×2.

(c) En 3×2 går bra att multiplicera med en 2×3, resultatet blir en 3×3. Uppställning

$$\begin{array}{c|c} & A \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline B \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -15+10 & -6+6 & -6+2 \\ 20-15 & 8-9 & 8-3 \\ 15-10 & 6-6 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $BA = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d)

<u>Svar</u>: $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) A^T är 3×2 liksom B, så $A^T - B$ existerar.

$$A^T - B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-3) & 5-2 \\ 2-4 & 3-(-3) \\ 2-3 & 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Svar</u>: $A^T - B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

f) A^T är 3×2 liksom B, men en matris med 2 kolumner kan inte multipliceras med en med 3 rader.

<u>Svar</u>: $A^T B$ existerar inte.

g) <u>Svar</u>: A är inte kvadratisk (utan 2×3), så A^{-1} existerar inte.

<u>Anmärkning</u>: Det är visserligen sant att $A \cdot -B = I$, men $-B$ är inte någon full invers till A, därför att $-B \cdot A \neq I$.

4 Låt $z = -1+4i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen z, $\bar{z}$, iz, z/i, $|z|$, $z+iz$ och $\frac{10+11i}{z}$. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala!

Lösning. $\bar{z} = \overline{-1+4i} = -1-4i$.

$$iz = i(-1+4i) = -i+4i^2 = -4-i$$

$$z/i = \frac{z}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{iz}{-1} = -(-4-i) = 4+i$$

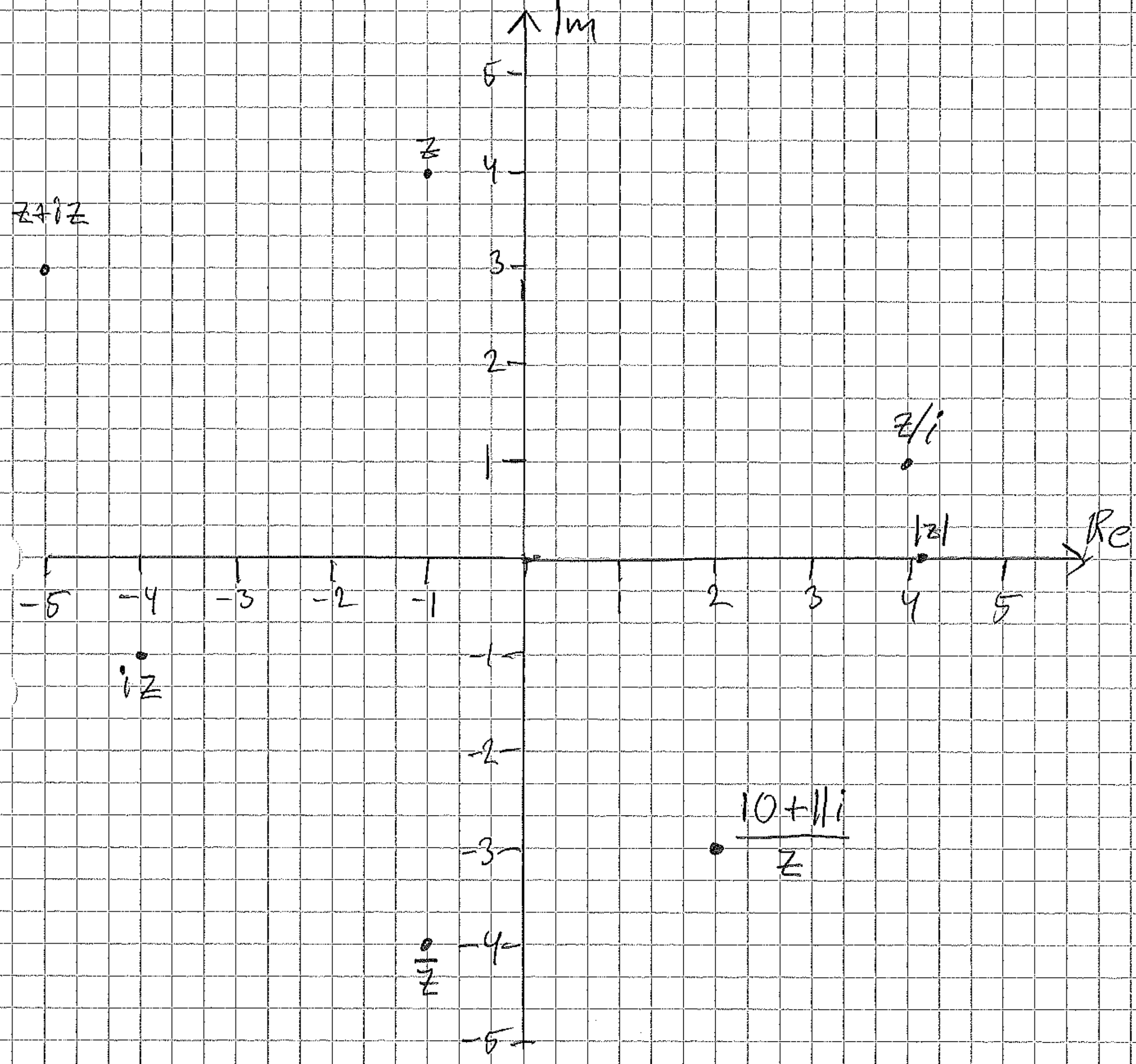
$$|z| = \sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2} = \sqrt{(-1)^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$$

$$z+iz = (-1+4i)+(-4-i) = -5+3i$$

$$\frac{10+11i}{z} = \frac{10+11i}{-1+4i} = \frac{(10+11i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-10-40i-11i-44i^2}{(-1)^2+4^2} =$$

$$= \frac{-10+44-40i-11i}{1+16} = \frac{34-51i}{17} = \frac{34}{17}-\frac{51}{17}i = 2-3i$$

Både realdel och imaginärdel på samtliga tal håller sig mellan -5 och 5, så det är ett lämpligt intervall på axlarna. Vi kan gott kosta på oss 3 rutor per längdenhet.



Svar: $z = -1+4i$

$\bar{z} = -1-4i$

$iz = -4-i$

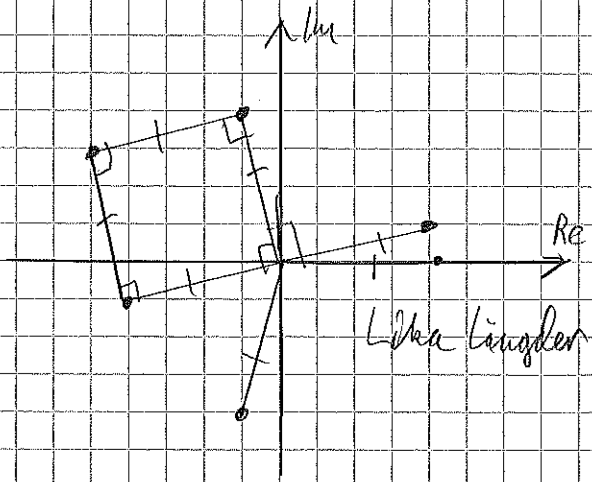
$z/i = 4+i$

$|z| = \sqrt{17}$

$z+iz = -5+3i$

$\dfrac{10+11i}{z} = 2-3i$

Grafisk koll:



Lika längder.

5 Låt C, D och E vara inverterbara 3×3-matriser. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a) $((C+D)+E) = C+(D+E)$ SANT

(Associativa lagen för $+$.)

b) $(C+D)^T = D^T + C^T$ SANT

(Även sant att $(C+D)^T = C^T + D^T$.)

c) $(C+D)^{-1} = D^{-1} + C^{-1}$ FALSKT

(Det hade lett till helt annorlunda metoder för att beräkna A^{-1}, om det hade varit sant.)

d) $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$ SANT

e) $(CD)E = C(DE)$ SANT

(Associativa lagen för $\circ$.)

f) $(CD)^T = D^T C^T$ SANT

g) $(CD)^{-1} = D^{-1} C^{-1}$ SANT