Lösningsförslag TEN2 2021-03-25 MAA140

1. Låt
$$A=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}.$$ Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till $A$, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \bar{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \bar{u}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}\quad \bar{u}_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}\quad \bar{u}_5=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}\quad \bar{u}_6=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Lösning: Vi undersöker genom direkt beräkning om $A\bar{u}_k=\lambda\bar{u}_k$ för någon skalär $\lambda$.

$$A\bar{u}_1=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+11+10\\-2+10+10\\2-11-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\18\\-20\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ för alla $\lambda$. Ej egenvektor.

$$A\bar{u}_2=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+11-10\\-2+10-10\\2-11+11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$ Egenvektor, egenvärde $-2$.

$$A\bar{u}_3=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+33-40\\-6+30-40\\6-33+44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\-16\\17\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}3\\3\\-4\end{pmatrix}$$ för alla $\lambda$, ty $-\frac{16}{3}\neq\frac{17}{-4}$.

Ej egenvektor.

$$A\bar{u}_4=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12-22+30\\-8-20+30\\8+22-33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-3\end{pmatrix}=-1\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}.$$ Egenvektor, egenvärde $-1$.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9-44+50\\ -6-40+50\\ 6+44-55\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}.$$ Egenvektor, egenvärde $-1$. (igen)

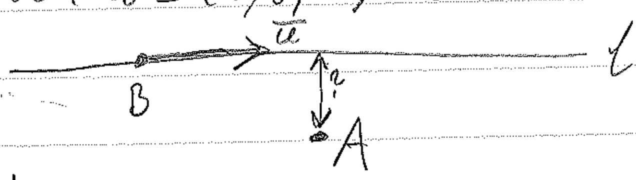
$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix}-3 & 11 & 10\\ -2 & 10 & 10\\ 2 & -11 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+22-20\\ -2+20-20\\ 2-22+22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}.$$ Egenvektor, egenvärde $-1$ (igen!).

Svar: $\bar{u}_2$ är egenvektor med egenvärde $-2$.
$\bar{u}_4, \bar{u}_5$ och $\bar{u}_6$ är egenvektorer med egenvärde $-1$.
$\bar{u}_1$ och $\bar{u}_3$ är inte egenvektorer.

Anmärkning: $\bar{u}_4 = \bar{u}_5 + \bar{u}_6$, så om två av dem har samma egenvärde måste även den tredje ha det egenvärdet.

2. Beräkna avståndet mellan linjen $\ell : (x,y,z) = (0,7,14) + t(-3,8,5)$ för $t \in \mathbb{R}$ och punkten $A = (1,2,3)$.

Lösning. Beteckna $B = (0,7,14)$ och $\bar{u} = (-3,8,5)$. Situationen kan då illustreras som




Det sökta avståndet kan beräknas som längden av den komposant av vektorn $\overrightarrow{AB}$ som är vinkelrät mot linjens riktningsvektor $\bar{u}$, dvs.

$$\left\| \overrightarrow{AB} - \mathrm{proj}_{\bar{u}}(\overrightarrow{AB}) \right\|.$$

Beräkningarna blir:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,7,14) - (1,2,3) = (-1,5,11)$$

$$\mathrm{proj}_{\bar{u}}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \bar{u}}{\bar{u} \circ \bar{u}} \bar{u} = \frac{(-1,5,11) \bullet (-3,8,5)}{(-3,8,5) \bullet (-3,8,5)} \bar{u} =$$

$$= \frac{3+40+55}{9+64+25} \bar{u} = \frac{98}{98} \bar{u} = \bar{u}$$

$$\overrightarrow{AB} - \mathrm{proj}_{\bar{u}}(\overrightarrow{AB}) = (-1,5,11) - (-3,8,5) = (-1+3, 5-8, 11-5) = (2,-3,6)$$

$$\|\overrightarrow{AB} - \mathrm{proj}_{\bar{u}}(\overrightarrow{AB})\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

<u>Svar:</u> Avståndet mellan linjen $l$ och punkten $A$ är $7$.

3. Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

<u>Lösning.</u>

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0^+ & 0^- & 0^+ & 0^- & 1^+ \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 20 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} \; 2 \; = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 20 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot (11 \cdot 5 - 20 \cdot 1) = -3 \cdot (55 - 20) =$$

$$= -3 \cdot 35 = -105$$

Svar: Determinanten blir $-105$.

4. Punkterna $A=(2,0,2)$, $B=(1,0,3)$ och $C=(2,5,\frac{9}{2})$ är hörnen i triangeln $ABC$

a Ange på parameterform en ekvation för planet som innehåller $A$, $B$ och $C$.

Lösning. Typekvationen är $(x,y,z)=A+s\vec{AB}+t\vec{AC}$ för $s,t \in \mathbb{R}$, så med litet uträkning får man

$$\vec{AB} = B-A = (1,0,3)-(2,0,2) = (-1,0,1)$$
$$\vec{AC} = C-A = (2,5,\tfrac{9}{2})-(2,0,2) = (0,5,\tfrac{9}{2}-\tfrac{4}{2}) = (0,5,\tfrac{5}{2})$$

Trivialsvaret blir alltså

$$(x,y,z) = (2,0,2)+s(-1,0,1)+t(0,5,\tfrac{5}{2}) \text{ för } s,t \in \mathbb{R}.$$

Man kan alternativt skala om andra riktningsvektorn för att få heltalskoordinater

$$(x,y,z) = (2,0,2)+s(-1,0,1)+t(0,10,5) \text{ för } s,t \in \mathbb{R}.$$

Men vi tar det enkelt.

Svar: $(x,y,z) = (2,0,2)+s(-1,0,1)+t(0,5,\frac{5}{2})$ för $s,t \in \mathbb{R}$.

b Ange på parameterfri form en ekvation för planet som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. För parameterfri form behöver vi en punkt, t.ex. A, och en normal till planet. En sådan normal kan man hitta som kryssprodukten av de två riktningsvektorerna.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-\bar{e}_1 + \bar{e}_3) \times (5\bar{e}_2 + \tfrac{5}{2}\bar{e}_3) = -5\bar{e}_3 + \tfrac{5}{2}\bar{e}_2 - 5\bar{e}_1 =$$
$$= \tfrac{5}{2}(-2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3)$$

En normalvektor är alltså $\bar{n} = (-2, 1, -2)$, så planets ekvation på punkt-normal-form blir

$$0 = \bar{n} \bullet ((x,y,z) - (2,0,2)) = (-2,1,-2) \bullet (x-2, y, z-2)$$
$$= -2(x-2) + y - 2(z-2) =$$
$$= -2x + 4 + y - 2z + 4 =$$
$$= -2x + y - 2z + 8$$

Flyttar man över variablerna till VL blir det

Svar: $2x - y + 2z = 8$

Koll:

$(x,y,z) = A$ ger $VL = 2x - y + 2z = 2\cdot 2 - 0 + 2\cdot 2 = 4 + 4 = 8 = HL$

$(x,y,z) = B$ ger $VL = 2x - y + 2z = 2\cdot 1 - 0 + 2\cdot 3 = 2 + 6 = 8 = HL$

$(x,y,z) = C$ ger $VL = 2x - y + 2z = 2\cdot 2 - 5 + 2\cdot \frac{9}{2} = 4 - 5 + 9 = 8 = HL$

Alla stämmer.

c Beräkna arean av triangeln ABC.

Lösning. Om A, B, C är tre punkter i $\mathbb{R}^3$ så kan arean av triangeln ABC beräknas som

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$$

eftersom kryssprodukt av två vektorer i $\mathbb{R}^3$ har som längd arean av det parallellogram som vektorerna spänner upp, och en triangel är ett halvt parallellogram. Då den kryssprodukten redan beräknats i (b) behöver vi bara normen av densamma.

$$\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \left\|\frac{5}{2}(-2\bar{e}_1+\bar{e}_2-2\bar{e}_3)\right\| = \frac{5}{2}\cdot\|(-2,1,-2)\| =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{4+1+4} = \frac{5}{2}\sqrt{9} = \frac{5}{2}\cdot 3$$

Alltså är arean $= \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 3 = \frac{15}{4}$

Svar: Arean av triangeln ABC är $\frac{15}{4}$.

5. Låt $\bar{v}_1 = 5\bar{e}_1+7\bar{e}_2+6\bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = 4\bar{e}_1+8\bar{e}_2+9\bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = 3\bar{e}_1+1\bar{e}_2+2\bar{e}_3$, där $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ betecknar vektorerna i standardbasen. Uttryck $\bar{u} = 38\bar{e}_1+42\bar{e}_2+46\bar{e}_3$ som en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$, eller påvisa att detta inte är möjligt.

Lösning. Det här är ett basbytesproblem. Eftersom till-basen är uttryckt i från-basen (snarare än tvärtom) så är det fråga om det jobbigare fallet av basbyte. Eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ vidare bara har positiva element så är det dessutom uppenbart att de inte är ortogonala; någon genväg medges inte, utan vi blir tvungna att ställa upp och lösa ett linjärt ekvationssystem.

När man gör det, så hjälper det att uttrycka alla vektorer som kolumnmatriser:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 38 \\ 42 \\ 46 \end{pmatrix}$$

Vi söker $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att $r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = \bar{u}$, vilket uppställt som utvidgad matris blir

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} r & s & t & \phantom{38} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 38 \\ 7 & 8 & 1 & 42 \\ 6 & 9 & 2 & 46 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} -1 & -1 \\ & \\ & \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & 38 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -2 & -5 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -21 & 8 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & -12 \\ 1 & 5 & -1 & 8 \end{array}\right] \text{ eller på klammerform } \begin{cases} -21s + 8t = -2, \\ -6s = -12, \\ r + 5s - t = 8. \end{cases}$$

$-6s = -12 \Leftrightarrow s = 2$. Insättning i $-21s + 8t = -2$ ger $-42 + 8t = -2$ $\Leftrightarrow 8t = 40 \Leftrightarrow t = 5$. Insättning i $r + 5s - t = 8$ ger $r + 10 - 5 = 8$ $\Leftrightarrow r = 8 - 10 + 5 = 3$. Lösningen är alltså $(r, s, t) = (3, 2, 5)$.

Svar: $\bar{u} = 3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3$ är det sökta uttrycket.

Anm. Hade systemet saknat lösning skulle svaret istället ha varit att $\bar{u}$ inte går att uttrycka som en sådan linjärkombination.

Koll:

$$3\bar{v}_1 + 2\bar{v}_2 + 5\bar{v}_3 = 3\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\8\\9\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}15\\21\\18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\16\\18\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}15\\5\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15+8+15\\21+16+5\\18+18+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30+8\\21+21\\36+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}38\\42\\46\end{pmatrix} = \bar{u}$$

Stämmer!

6. Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element, B vara en 3x3-matris och r vara en godtycklig skalär. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter? Svara "sant", "falskt" eller "vet inte".

(a) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$ FALSKT!

(HL ska vara $\bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{w}$.)

(b) $\det(rB) = r\det(B)$ FALSKT!

(c) $\|r\bar{u}\| = |r| \cdot \|\bar{u}\|$ SANT!

(d) $\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$ FALSKT!

(1:a kvadreringsregeln gäller, så $\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$.)

(e) $\bar{u} \times (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \times \bar{v} + \bar{u} \times \bar{w}$ SANT!

(f) $\det(rB) = r^3 \det(B)$ SANT!

(g) $\|r\bar{u}\| = |r|^3 \cdot \|\bar{u}\|$ FALSKT!