Mälardalens universitet

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

Extentasamling: TEN1 – *Lösningsförslag*

2022–2023

Detta är ett samlingsdokument med alla de TEN1 som gått i kursen under sedan den grundades 2014 och fram t.o.m. augusti 2022, med lösningsförslag och rättningsnormer. (Detta med undantag för de specialutformade tentor som gavs på distans då campus var stängt av Coronaskäl under vårterminen 2020. Dessa ligger i ett separat dokument.)

Varning! Det är fel lite här och var i lösningarna. Detta upptäcker man i samband med rättningen av tentan, men man glömmer ofta(st) att korrigera i filen i datorn. Så verkar något konstigt så fråga en lärare.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* Demo

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Någon person, som nås på ett eller annat telefonnummer

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Detta är alltså en demonstration av hur TEN1 kommer att vara upplagd.

1. Förenkla följande bråk maximalt: $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{5}}+\dfrac{2}{17}$ (3p)

Lösning:

Enklast är att dela upp beräkningen:

(i) $\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{1\cdot 15}{2\cdot 15}=\frac{18-20+15}{30}=\frac{13}{30}$

(ii) $\frac{4}{3}-\frac{1}{5}=\frac{4\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{20-3}{15}=\frac{17}{15}$

(iii) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{13}{30}}{\frac{17}{15}}=\frac{13}{30}\cdot\frac{15}{17}=\frac{13\cdot\cancel{15}}{2\cdot\cancel{15}\cdot 17}=\frac{13}{2\cdot 17}$

(iv) $\dfrac{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{5}}+\frac{2}{17}=\frac{13}{2\cdot 17}+\frac{2}{17}=\frac{13}{2\cdot 17}+\frac{2\cdot 2}{17\cdot 2}=\frac{13+4}{17\cdot 2}=\frac{\cancel{17}\cdot 1}{\cancel{17}\cdot 2}=\frac{1}{2}$

2. Ekvationen $x^2+y^2-8x+4y+11=0$ beskriver en cirkel. Bestäm cirkelns medelpunkt och radie. (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-8x+4y+11&=0\\
x^2-2\cdot 4x+4^2-4^2+y^2+2\cdot 2y+2^2-2^2+11&=0\\
(x-4)^2-16+(y+2)^2-4+11&=0\\
(x-4)^2+(y+2)^2&=4+16-11\\
&=9
\end{aligned}$$

Detta är en cirkel med medelpunkt i $x=4$, $y=-2$ och med radie $\sqrt{9}=3$ längdenheter.

3. (a) Förklara vad det är för betydelseskillnad på symbolerna $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$. (2p)

Lösning:

$\Leftrightarrow$ står för ekvivalens, och betyder att påståendena som den står mellan är lika sanna; är det ena sant så är det andra det också, är det ena falskt så är det andra det också.

$\Rightarrow$ står för implikation, och betyder att det andra av påståendena garanterat är sant om det första är det. Däremot säger det ingenting om vad som händer ifall det första är falskt.

(b) Vilken av symbolerna ska stå mellan utsagorna $x = 2$ och $x^2 = 4$? Motivera! (1p)

Lösning:

Implikationspil, eftersom det är fullt möjligt att den andra usagan är sann utan att den första är det. De har alltså inte garanterat samma sanningsvärde. (Prova med $x = -2$.)

4. Polynomet $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$ har nollstället $x = -4$. Bestäm de övriga nollställena. (3p)

Lösning:

Om $x = -4$ är ett nollställe så är $x + 4$ en faktor. Dividerar vi med denna får vi en första faktorisering:

POLYNOMDIVISION som är så besvärlig att typsätta att jag inte orkar göra det just nu. Den ger hur som helst att $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x+4)(x^2 - 9)$

Nu kan vi söka nollställena till den andra faktorn, som enkelt faktoriseras med konjugatregeln: $(x^2 - 3^2) = (x+3)(x-3)$.

Svar: $x = -3$ och $x = 3$.

5. Vilka x uppfyller nedanstående olikhet?

$$\frac{5}{3-x} \leq 3 + x \qquad (3p)$$

Lösning:

”Flytta över”, sätt på gemensamt bråkstreck och faktorisera:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{3-x} &\leq 3 + x \\
\frac{5}{3-x} - (3+x) &\leq 0 \\
\frac{5 - (3+x)(3-x)}{3+x} &\leq 0 \\
\frac{5 - (9 - x^2)}{3-x} &\leq 0 \\
\frac{x^2 - 4}{3-x} &\leq 0 \\
\frac{(x+2)(x-2)}{3-x} &\leq 0
\end{aligned}$$

Teckenskiften sker vid $x = -2$, $x = 2$ och $x = 3$. Teckentabell:

		-2		2		3	
$x+2$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$1/(3-x)$	+	+	+	+	+	odef	$-$
	+	0	$-$	0	+	odef	$-$

Svar: $-2 \leq x \leq 2$ eller $x > 3$

6. Bestäm definitionsmängd och värdemängd för f, då $f(x) = \sqrt{x+5} + 2$. (3p)

Lösning:

Definitionsmängden är (om inget annat sägs) de x som den givna beräkningsformeln är meningsfull för. Kvadratrötter är definierade för ickenegativa tal, så $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

Värdemängden är de resultat man kan få ut ur beräkningen. Det minsta värde man kan få ur en rotutdragning är 0; sedan kan man få vilket positivt tal som helst (det är bara att se till att det under rottecknet är tillräckligt stort). Om man sedan lägger 2 därtill bör man kunna få alla tal från 2 och uppåt.

Svar: Definitionsmängd $[-5, \infty)$, värdemängd $[2, \infty)$

7. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $4x - 2 = \sqrt{6 - 20x}$ (3p)

Lösning:

Börja med att kvadrera för att bli av med rottecknet:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= \sqrt{6-20x} \\
(4x-2)^2 &= (\sqrt{6-20x})^2 \qquad \text{Kolla svaren!} \\
16x^2 - 16x + 4 &= 6 - 20x \\
16x^2 + 4x - 2 &= 0 \\
x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} &= 0 \\
x^2 + 2\cdot\frac{1}{8} + (\frac{1}{8})^2 - (\frac{1}{8})^2 - \frac{1}{8} &= 0 \\
(x + \frac{1}{8})^2 - \frac{9}{64} &= 0 \\
((x + \frac{1}{8}) + \frac{3}{8})((x + \frac{1}{8}) - \frac{3}{8}) &= 0 \\
(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4}) &= 0
\end{aligned}
$$

Lösningsförslag: $x = -\frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{4}$. Kvadreringen kan ha introducerat falska rötter, så förslagen måste testas i ursprungsekvationen:

$$
\begin{aligned}
x = -\frac{1}{2}: \qquad & \text{VL} = 4\cdot(-\frac{1}{2}) - 2 = -4 \\
& \text{HL} = \sqrt{6 - 20\cdot(-\frac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4 \\
x = \frac{1}{4}: \qquad & \text{VL} = 4\cdot\frac{1}{4} - 2 = -1 \\
& \text{HL} = \sqrt{6 - 20\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}
$$

Ingendera lösningsförslaget gick att använda.

Svar: Ekvationen saknar lösning.

8. (a) Förenkla maximalt: $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ (1p)

Lösning:

$\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9\cdot 2} - \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

(b) Skriv om så att det inte finns något rotuttryck i nämnaren: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (1p)

Lösning:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) Skriv om så att det inte finns något rotuttryck i nämnaren: $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ (1p)

Lösning:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2014.10.01 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås telefon 073–763 27 88

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{4}{9}}$$ (3p)

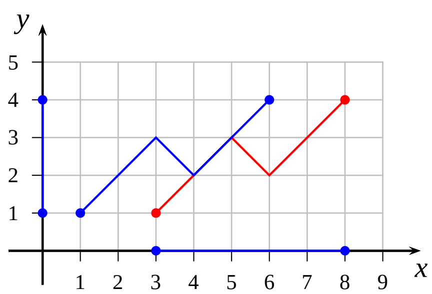
Lösning:

Uppgiften är lånad ur *Matematik startbok* från Studentlitteratur.

$$\frac{\frac{2\cdot 8}{3\cdot 8}+\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}}{\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}-\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}} = \frac{\frac{16+15}{24}}{\frac{15-8}{18}} = \frac{\frac{31}{24}}{\frac{7}{18}} = \frac{31}{24}\cdot\frac{18}{7} = \frac{31}{4\cdot\cancel{6}}\cdot\frac{3\cdot\cancel{6}}{7} = \frac{31\cdot 3}{4\cdot 7} = \frac{93}{28}$$

Rättningsnorm: 1p avdrag för varje enskilt fel (att inte använda mgn anses som ett fel) och för varje steg som fattas.

2. Vi studerar en funktion f. Här är kurvan $y = f(x)$:



(a) Ange f:s definitionsmängd. (1p)

Lösning:

Definitionsmängden (markerad i blått på x-axeln) är intervallet $[3, 8]$.

(b) Ange f:s värdemängd. (1p)

Lösning:

Värdemängden (markerad i blått på y-axeln) är intervallet $[1, 4]$.

(c) Skissa kurvan $y = f(x + 2)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

Denna transformation flyttar kurvan 2 steg åt vänster, och ger den kurva som är inritad i blått.

Rättningsnorm: (Gäller alla deluppgifterna) Eftersom det bara är fråga om att ”ange” eller ”rita” så behövs ingen motivering, och svaren kan nog bara bli rätt eller fel. Inga poängavdrag om man tagit öppna intervall istället för slutna.

3. För vilka värden på x är nedanstående uttryck sant?

$$2 \geq \frac{5}{2 - x} \qquad (3p)$$

Lösning:

Standardmetoden är att skyffla över allt på en sida av tecknet, faktorisera och teckenanalysera:

$$\begin{aligned}
2 &\geq \frac{5}{2-x} \\
0 &\geq \frac{5}{2-x} - 2 \\
0 &\geq \frac{5}{2-x} - \frac{2(2-x)}{2-x} \\
0 &\geq \frac{5-4+2x}{2-x} \\
0 &\geq \frac{1+2x}{2-x} \\
0 &\geq \frac{2(x+1/2)}{2-x}
\end{aligned}$$

Uttrycket byter tecken då $x + 1/2$ och $2 - x$ passerar noll. Teckentabell:

		$-1/2$		2	
2	+	+	+	+	+
$x + 1/2$	−	0	+	+	+
$1/(2 - x)$	+	+	+	odef	−
	−	0	+	odef	−

Det var meningen att uttrycket skulle vara 0 eller negativt, så områdena $x \leq -1/2$ och $x > 2$ funkar.

Rättningsnorm: Korrekt omformat uttrycket: 1p. Korrekt teckentabell för det uttryck man har: 1p. Korrekt svar utgående från tabellen: 1p.

4. Vi har mängderna $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ och $B = \{3, 6, 9, 12\}$. Bestäm

(a) $A \cap B$

Lösning:
Snittet av A och B är de element som mängderna har gemensamt: $A \cap B = \{6, 12\}$.

(b) $A \cup B$

Lösning:
Unionen av A och B är mängderna sammanslagna: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$.
Rättningsnorm: Korrekt snitt: 1p; korrekt union; 1p. Svarat med snittet på (a) och unionen på (b): 1p.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

5. Den som tjänar 20 000 kronor på ett år ska betala 4007 kronor i skatt. Den som tjänar 21 000 kronor ska betala 4272 kronor i skatt. Hur mycket skatt bedömer du att en person som tjänar 20 400 kronor ska betala? (3p)

Lösning:

Detta är ett fall för linjär interpolation (eftersom att slå upp svaret på skatteverkets hemsida inte är en tillåten metod på en tenta):

Informell lösning: Skillnaden i intäkter är 1000:-, skillnad i skatt är 265:-, vi vill ha skatten på intäktsnivån som motsvarar 40 % av intäktsskillnaden. Skatteskillnaden borde bli $0{,}4 \cdot 265 = 106$:-, och då blir skatten $4007 + 106 = 4113$:-.

Lösning med linje: Vi tar fram linjen genom punkterna $(x_1, y_1) = (20\,000, 40007)$ och $(x_2, y_2) = (21\,000, 4272)$ och söker sedan det y som hör till $x = 20\,400$.

Först söker vi linjens riktningskoefficient:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4272 - 4007}{21\,000 - 20\,000} = \frac{265}{1000}$$

Givet denna kan vi ta fram linjens uttryck med t.ex. enpunktsformeln:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= k(x - x_1) \\ y - 4007 &= \frac{265}{1000}(x - 20\,000) \\ y &= \frac{265}{1000}(x - 20\,000) + 4007 \end{aligned}$$

Sätter vi nu in $x = 20\,400$ får vi

$$y = \frac{265}{1000}(20\,400 - 20\,000) + 4007 = \frac{265}{1000} \cdot 400 + 4007 = 106 + 4007 = 4113$$

Rättningsnorm: Rätt svar med begriplig metod: 3p. Något mindre fel: 2p. Åtminstone delvis korrekt: 1p.

6. Lös följande ekvation fullständigt: $6x - \sqrt{x} - 1 = 0$ (3p)

Lösning:

Substitution: Utnyttja att $x = (\sqrt{x})^2$:

$$\begin{aligned} 6(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 1 &= 0 \qquad \text{Sätt } \sqrt{x} = t \\ 6t^2 - t - 1 &= 0 \\ t^2 - {}^1\!/\!_6 t - {}^1\!/\!_6 &= 0 \\ t^2 - 2 \cdot {}^1\!/\!_{12} t + ({}^1\!/\!_{12})^2 - ({}^1\!/\!_{12})^2 - {}^1\!/\!_6 &= 0 \\ (t - {}^1\!/\!_{12})^2 - {}^1\!/\!_{144} - {}^{24}\!/\!_{144} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(t - 1/12)^2 - 25/144 &= 0\\
(t - 1/12)^2 - (5/12)^2 &= 0\\
((t - 1/12) + 5/12)((t - 1/12) - 5/12) &= 0\\
(t + 4/12)(t - 6/12) &= 0\\
(t + 1/3)(t - 1/2) &= 0
\end{aligned}$$

Nollfaktorlagen/faktorsatsen ger att vi har de två lösningarna $t = -1/3$ och $t = 1/2$. Återsubstitution ger att $\sqrt{x} = -1/3$ inte är ett möjligt alternativ (rötter är aldrig negativa); $\sqrt{x} = 1/2$ ger $x = 1/4$ som ekvationens enda lösning.

Kvadrering: Flytta om och kvadrera:

$$\begin{aligned}
6x - 1 &= \sqrt{x}\\
(6x - 1)^2 &= (\sqrt{x})^2 \qquad \text{Kolla svaren!}\\
36x^2 - 12x + 1 &= x\\
36x^2 - 13x + 1 &= 0\\
x^2 - 13/36x + 1/36 &= 0\\
x^2 - 2 \cdot 13/2{\cdot}36x + (13/2{\cdot}36)^2 - (13/2{\cdot}36)^2 + 1/36 &= 0\\
(x - 13/2{\cdot}36)^2 - 169/4{\cdot}36^2 + 4{\cdot}36/4{\cdot}36^2 &= 0\\
(x - 13/2{\cdot}36)^2 - 25/4{\cdot}36^2 &= 0\\
(x - 13/2{\cdot}36)^2 - (5/2{\cdot}36)^2 &= 0\\
((x - 13/2{\cdot}36) + 5/2{\cdot}36)((x - 13/2{\cdot}36) - 5/2{\cdot}36) &= 0\\
(x - 1/9)(x - 1/4) &= 0
\end{aligned}$$

Den ekvation som vi hade efter kvadreringen har alltså de två lösningarna $x = 1/9$ och $x = 1/4$. Kontroll i ursprungsekvationen:

$$\begin{aligned}
x = 1/9: &\quad \text{VL} = 6 \cdot 1/9 - \sqrt{1/9} - 1 = 2/3 - 1/3 - 1 = 2/3 \neq 0\\
x = 1/4: &\quad \text{VL} = 6 \cdot 1/4 - \sqrt{1/4} - 1 = 3/2 - 1/2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$x = 1/9$ var en falsk rot; ekvationens enda lösning är $x = 1/4$.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Fixat större delen av uträkningen: 2p. Har gjort någonting korrekt (som att kvadrera ekvationen eller att kvadratkomplettera korrekt): 1p.

7. **(a)** Förklara varför potensräkningsregeln $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ gäller. Du kan utgå från att m och n är positiva heltal.

Lösning:

Enligt definitionen av potens är a^m m stycken a:n ihopmultiplicerade. Samma för a^n. Detta ger att

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ st } a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ st } a}}_{m+n \text{ st } a} = a^{m+n}$$

Om vi multiplicerar ihop m st a:n och multiplicerar på ytterligare n stycken så har vi multiplicerat ihop $m + n$ stycken.

(b) Förklara varför man inte kan dividera med noll.

Lösning:

$a/0$ ska enligt definitionen av division bli det tal som multiplicerat med 0 ger a som resultat. Om a inte är 0 så finns det inget sådant tal, eftersom 0 gånger vad-som-helst blir 0. Om a *är* 0 är problemet istället att *alla* tal passar lika bra, och detta är inte heller ett fungerande svar. (Ett sådant här uttryck bör motsvara en och endast en plats på tallinjen; att det blir hela tallinjen är mindre praktiskt). Därför får man ge upp att definiera vad division med noll borde bli, utan får låta det vara odefinierat.

Ett mindre sofistikerat svar är att det är väldigt svårt att dela något i ingen bit alls. (Detta täcker dock inte upp varför man inte kan dela noll med noll.)

Rättningsnorm: Förklaringar som tar fasta i definitionerna av begreppen och som är generella ger 3p totalt. Delpoäng för ungefär hur stor andel av en god förklaring man har åstadkommit.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

8. Förenkla följande uttryck maximalt:

$$\frac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2+ab} \qquad (3p)$$

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 1.27(b) ur *Mot bättre vetande*. (Det var ju utlovat att något tentatal skulle plockas bland de rekommenderade uppgifterna.)

$$\frac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2+ab}=\frac{\cancel{a}(a^2+b^2)}{\cancel{a}(a^2-b^2)}\cdot\frac{\cancel{a}(a-b)}{\cancel{a}(a+b)}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)\cancel{(a-b)}}\cdot\frac{\cancel{(a-b)}}{(a+b)}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Korrekta förkortningar, men missat någon förkortningsmöjlighet: 2p. Någon felaktig faktorisering, men maximalförkortat utgående från faktoriseringen: 2p. Mer fel än så, men fortfarande innehållande korrekta delar: 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA ESKILSTUNA VÄSTERÅS
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation
MAA121 Matematik grundkurs
TEN1 – *Lösningsförslag* 2014.12.01 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås telefon 073–763 27 88

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

December

1. Faktorisera följande uttryck med hjälp av kvadratkomplettering:

$$12 - 10x - 2x^2 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Börja med att bryta ut andragradskoefficienten, och fortsätt därifrån:

$$\begin{aligned}
12 - 10x - 2x^2 &= -2(x^2 + 5x - 6) \\
&= -2(x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 - 6) \\
&= -2((x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} - \frac{24}{4}) \\
&= -2((x + \frac{5}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2) \\
&= -2((x + \frac{5}{2}) + \frac{7}{2})((x + \frac{5}{2}) - \frac{7}{2}) \\
&= -2(x + 6)(x - 1)
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Korrekt faktorisering *utan* att passera kvadratkomplettering: 1p. Annars: 1p för att ha kommit igång, 1p för att ha kommit till kvadratkompletterad form, 1p för att ha gått vidare till faktoriserad form.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{5}{\frac{5}{4} + \frac{5}{6}} - 2 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Kan angripas på ett antal sätt, här är ett:

$$\frac{5}{\frac{5}{4}+\frac{5}{6}}-2=\frac{5}{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}}-2=\frac{5}{\frac{15+10}{12}}-2$$
$$=5\cdot\frac{12}{25}-2=\cancel{5}\cdot\frac{12}{5\cdot\cancel{5}}-\frac{2\cdot 5}{5}=\frac{12-10}{5}=\frac{2}{5}$$

Rättningsnorm: 1p avdrag för varje felaktighet och varje nödvändig sak som inte har gjorts.

3. **(a)** Förklara vad som menas med en *lösning* till en ekvation. (1p)

Lösning:

Något som instoppat på den obekantas plats i ekvationen ger ett sant utryck som resultat. Så $x = 2$ är en lösning till ekvationen $3 \cdot x = 6$ eftersom $3 \cdot 2 = 6$ är sant.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Förklara varför man måste testa lösningarna om man har använt kvadrering då man löser en ekvation. (2p)

Lösning:

Därför att två tal som är olika kan ha samma kvadrat. Så ett värde på den obekanta som ger ett sant uttryck som resultat om man stoppar in det i den kvadrerade ekvationen behöver inte ge ett sant uttryck om man stoppar in det i den okvadrerade. Man måste därför kontrollera om detta har hänt eller inte. Exempelvis har ekvationen $-x = 1$ bara lösningen $x = -1$ medan den kvadrerade ekvationen $(-x)^2 = 1^2$, som kan förenklas till $x^2 = 1$, har de två lösningarna $x = 1$ och $x = -1$. Den första av dem passar inte in i den okvadrerade ekvationen.

Rättningsnorm: För full poäng måste man ha förklarat det som är speciellt med kvadrering (att det tar bort minustecken). Förklaringar av varför det generellt är bra att kolla svar får 1p.

4. Bestäm definitionsmängden för funktionen f, där $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$. (3p)

Lösning:

Definitionsmängden är (om inget annat anges) de värden som det är meningsfullt att stoppa in i funktionsberäkningen. Man kan inte dra roten ur negativa tal, så definitionsmängden är de x som uppfyller olikheten

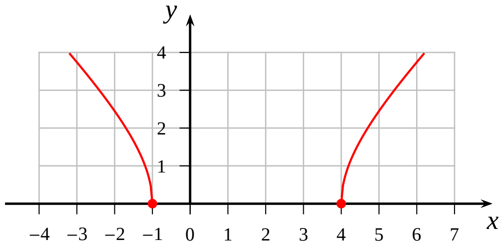
$$\begin{aligned}
x^2-3x-4 &\geq 0\\
x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-4 &\geq 0\\
(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}-\frac{16}{4} &\geq 0\\
(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{5}{2})^2 &\geq 0\\
((x-\frac{3}{2})+\frac{5}{2})((x-\frac{3}{2})-\frac{5}{2}) &\geq 0\\
(x+1)(x-4) &\geq 0
\end{aligned}$$

För att en produkt av två faktorer ska bli positiv måste båda faktorerna vara positiva eller båda negativa. Man kan ställa upp en teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Definitionsmängden består av alla tal upp till och med -1 tillsammans med alla tal från och med 4, eller med intervall- och mängdnotation: $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$.

Om någon är nyfiken så ser funktionens graf ut så här:



Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Visat att man vet vad som ska räknas ut: 1p. Korrekt faktoriserat: 1p. Korrekt analyserat tecken utgående från faktorisering: 1p.

5. Är $x + 2$ en faktor i polynomet $x^4 - 13x^2 + 36$? Motivera ditt svar! (3p)

Lösning:

Går att lösa på ett antal olika sätt:

Faktorsatsen: Om $x + 2$ är en faktor så är $x = -2$ ett nollställe (och tvärtom). Kolla:

$$(-2)^4 - 13(-2)^2 + 36 = 16 - 52 + 36 = 0$$

JA, detta var en faktor!

Polynomdivision Prova att dela $x^4 - 13x^2 + 36$ med $x + 2$. Går det jämnt ut så var det en faktor. (Divisionen är typsatt enligt amerikansk standard, eftersom jag hittade ett färdigt paket för sådan typsättning.)

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^3 & -2x^2 & -9x & +18 & \\
\hline
x+2) & x^4 & & -13x^2 & & +36 \\
 & -x^4 - 2x^3 & & & & \\
\cline{2-2}
 & & -2x^3 - 13x^2 & & & \\
 & & 2x^3 + 4x^2 & & & \\
\cline{3-3}
 & & & -9x^2 & & \\
 & & & 9x^2 + 18x & & \\
\cline{4-4}
 & & & & 18x + 36 & \\
 & & & & -18x - 36 & \\
\cline{5-5}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

JA, detta var en faktor!

Faktorisering: Försök faktorisera polynomet, och se om $x + 2$ visar sig vara en av faktorerna. Polynomet är av grad 4, men eftersom det inte innehåller några udda potenser av x kan det hanteras med substitution och kvadratkomplettering.

$$
\begin{aligned}
x^4 - 13x^2 + 36 &= (x^2)^2 - 13x^2 + 36 \\
&= t^2 - 13t + 36 && \text{Sätt } x^2 = t \\
&= t^2 - 2 \cdot \frac{13}{2}t + (\frac{13}{2})^2 - (\frac{13}{2})^2 + 36 \\
&= (t - \frac{13}{2})^2 - \frac{169}{4} + \frac{144}{4} \\
&= (t - \frac{13}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 \\
&= ((t - \frac{13}{2}) + \frac{5}{2})((t - \frac{13}{2}) - \frac{5}{2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (t-4)(t-9) \\
&= (x^2-4)(x^2-9) \\
&= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)
\end{aligned}
$$

JA, detta var en faktor!

Rättningsnorm: Vattentätt resonemang, korrekt genomfört med klart och tydligt svar: 3p. Fungerande metod men med något fel i utförandet, alternativt korrekt genomfört men oklart om svaret är ”ja” eller ”nej”: 2p. Åtminstone visat någon förståelse för problemet: 1p.

6. Definiera intervallen A och B genom $A = [-2, 4]$ och $B = (1,5)$.

(a) Rita en tallinje och markera de två intervallen på tallinjen.

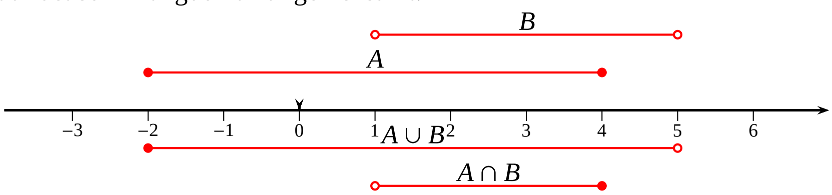
(b) Bestäm unionen av de två intervallen: $A \cup B$.

(c) Bestäm snittet av de två intervallen: $A \cap B$.

Lösning:

Detta är en delmängd av rekommenderad uppgift 8 ur kapitel 1 i *Kompletterande kompendium*, utfylld med en del av uppgift 10.

Enklast att ta alla deluppgifterna på samma gång. Hakparentes innebär att ändpunkten ingår, vilket grafisk markeras med en fylld punkt. Böjd parentes innebär att ändpunkten *inte* ingår, vilket markeras med en ofylld punkt. Unionen är mängderna sammanslagna; snittet är det som mängderna har gemensamt.



Vill man ge svaren skriftligt istället för grafiskt får man

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= [-2, 5) = \{x \mid -2 \le x < 5\} \\
A \cap B &= (1, 4] = \{x \mid 1 < x \le 4\}
\end{aligned}
$$

Rättningsnorm: Klart visat att man förstår intervallbeteckningar: 1p. Klart visat att man vet vad som menas med union: 1p. Klart visat att man vet vad som menas med snitt: 1p. Blandar man ihop begreppen ges 1p totalt för unionen och snittet.

7. Förenkla nedanstående uttryck maximalt:

$$\frac{(x^2-16)(3x^2-12x)}{(6x^3+6x)(x^2-8x+16)} \qquad \text{(3p)}$$

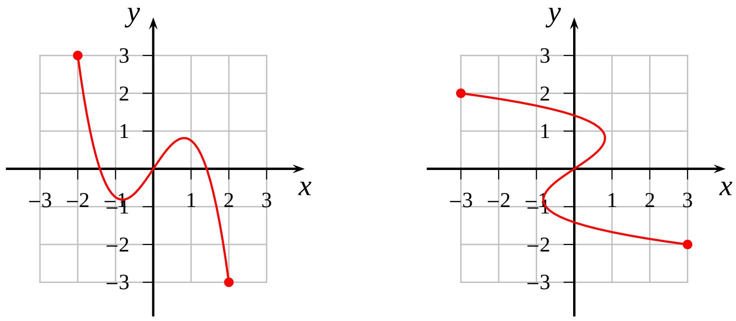
Lösning:

Faktorisera och stryk gemensamma faktorer:

$$
\begin{aligned}
\frac{(x^2-16)(3x^2-12x)}{(6x^3+6x)(x^2-8x+16)} &= \frac{(x^2-16)3x(x-4)}{6x(x^2+1)(x^2-8x+16)} \\
&= \frac{\cancel{3x}(x+4)\cancel{(x-4)(x-4)}}{2\cdot\cancel{3x}(x^2+1)\cancel{(x-4)^2}} = \frac{x+4}{2(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

Rättningsnorm: Helt korrekt: 3p. Missat enstaka grej: 2p. Åtminstone visat att man förstår grundprinciperna: 1p.

8.



(a) Den ena av bilderna ovan avbildar grafen för en funktion av x. Den andra gör det inte. Förklara vilken av dem det är som motsvarar en funktion och hur du ser detta. (2p)

Lösning:

Den första bilden avbildar en funktion av x. För att det ska vara en funktion ska det finnas *ett och endast ett* värde kopplat till varje värde i definitionsmängden (som här är x-värdena). Detta uppfylls av den första kurvan men inte av den andra. (Där är t.ex. tre olika y-värden kopplade till $x = 0$.) Eller med andra ord: den första kurvan passerar vertikallinjetestet, men det gör inte den andra.

Rättningsnorm: Begripligt korrekt svar: 2p. ("Passerar vertikallinjetestet" räknas som ett komplett svar.) Något som med största välvilja kan tolkas som ett korrekt svar: 1p.

(b) Vilken värdemängd har funktionen ifråga, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Värdemängden är här y-värdena, och på kurvan finns y-värden mellan -3 och 3, ändpunkterna inkluderade. Så värdemängden är intervallet $[-3, 3]$.

Rättningsnorm: Vad som helst som kan dechiffreras som korrekt svar godtas, och poäng ges även om man anger ett öppet intervall istället. Har man påstått att det är den andra bilden som visar en funktion av x ska man här ange intervallet $[-2, 2]$ istället.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.01.07 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

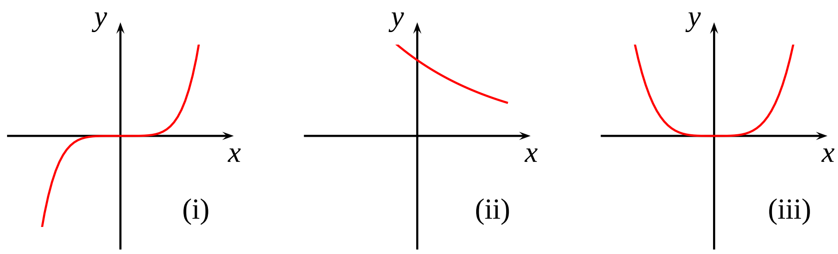
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1.



(a) En av bilderna ovan föreställer kurvan $y = x^4$. Vilken av bilderna är det, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Bild (iii). Alla jämna potenser har egenskapen att både positiva och negativa värden avbildas på positiva (vilket utesluter kurva (i)) och att 0 avbildas på 0 (vilket utesluter kurva (iii)).

(b) En annan av bilderna föreställer kurvan $y = x^5$. Vilken av bilderna är det, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Bild (i). Udda potenser avbildar negativa tal på negativa, och det utesluter båda de andra bilderna.

(c) Den återstående bilden föreställer kurvan $y = a^x$. Är a större än 1 eller mindre än 1, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Det måste vara den av bilderna som vi inte redan pekat ut som något annat, vill säga bild (ii). Kurvan lutar neråt, så basen a måste vara mindre än 1. (Enligt principen att $0{,}5^1 > 0{,}5^2 > 0{,}5^3$, och så vidare.)

Rättningsnorm: (Gäller alla uppgifterna.) Korrekt svar med något som åtminstone påminner om en förklaring ger 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{2-\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}}$$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 1.8c ur *Mot bättre vetande*.

Kan lösas på flera sätt; här är ett:

$$\frac{2-\frac{2}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{(2-\frac{2}{9})\cdot 9}{\frac{8}{9}\cdot 9} = \frac{18-2}{8} = \frac{16}{8} = \frac{2\cdot 8}{8} = 2$$

(Här fick man ju ingen minst-gemensamma-nämnare-problematik, men det kan dyka upp i andra problem.)

Rättningsnorm: 1p avdrag för varje felaktig operation och för varje nödvändig operation som inte gjorts. (Poängen kan dock inte bli lägre än noll.)

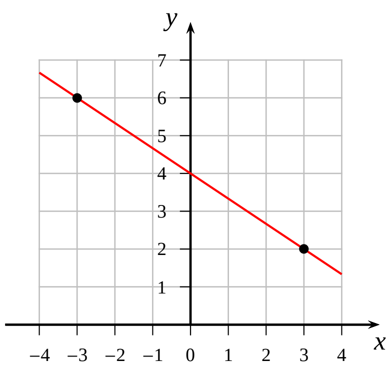
3. En linje passerar punkterna $(x, y) = (3, 2)$ och $(x, y) = (-3, 6)$.

(a) Ta fram en ekvation av typ $y = kx + m$ för denna linje. (2p)

(b) Rita linjen i ett graderat ekvationssystem. (1p)

Lösning:

Enklaste sättet att rita är att att rita koordinatsystemet, markera punkterna, och så lägga linjalen genom dem och dra ett streck. Ur denna bild går det att läsa ut ekvationen, förutsatt att man ritar noga.



Linjen skär y-axeln vid $y = 4$, vilket ger m-värdet. På 3 steg framåt åker man 2 steg neråt, vilket ger riktningskoefficienten $k = -2/3$. Linjen kan alltså skrivas $y = -2/3x + 4$.

Om man föredrar en beräkningslösning framför en grafisk så börjar man med att ta fram k-värdet genom

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(Går lika bra att ta punkterna i omvänd ordning; det ger samma svar.) m-värdet kan sedan bestämmas exempelvis med enpunktsformeln:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= -{}^2\!/_3(x-3)\\
y - 2 &= -{}^2\!/_3 x + 2\\
y &= -{}^2\!/_3 x + 4
\end{aligned}
$$

(Det finns andra metoder, och man får samma svar oavsett vilken av punkterna man utgår ifrån.)

Rättningsnorm: (a): Rätt k-värde: 1p. Rätt m-värde: 1p. (Om man räknar helt fel men konstaterar att resultatet inte stämmer med bilden ges 1p här.) (b): Helt rätt: 1p.

4. Lös nedanstående ekvation fullständigt:

$$16^x - 5 \cdot 4^{x-1} + \frac{1}{4} = 0 \qquad (3p)$$

Lösning:

16 är en jämn 4-potens, så det verkar fördelaktigt att skriva om ekvationen så att allt blir uttryckt i 4-potenser:

$$
\begin{aligned}
(4^2)^x - 5\cdot 4^x \cdot 4^{-1} + \frac{1}{4} &= 0\\
(4^x)^2 - \frac{5}{4}\cdot 4^x + \frac{1}{4} &= 0 && \text{Sätt } 4^x = t\\
t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{4} &= 0\\
t^2 - 2\cdot\frac{5}{8}t + (\frac{5}{8})^2 - (\frac{5}{8})^2 + \frac{1}{4} &= 0\\
(t - \frac{5}{8})^2 - \frac{25}{64} + \frac{1\cdot 16}{4\cdot 16} &= 0\\
(t - \frac{5}{8})^2 - \frac{9}{64} &= 0\\
(t - \frac{5}{8})^2 &= (\frac{3}{8})^2\\
t - \frac{5}{8} &= \pm\frac{3}{8}\\
t = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8} &= \begin{cases} \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Så ett alternativ är $4^x = 1$, vilket ger $x = 0$ (för $4^0 = 1$), och ett annat är $4^x = 1/4$, vilket ger $x = -1$ (för $4^{-1} = 1/4$).

Rättningsnorm: Uppgiften består i princip av delmomenten (1) Skriva om till ett problem i 4^x. (2) Substituera. (3) Kvadratkomplettera. (4) Gå vidare till lösning i t. (5) Gå vidare till lösning i x. Helt rätt: 3p. Fixat 3–4 delmoment: 2p. Fixat 1–2 delmoment: 1p.

5. Vi tittar på funktionen f, där $f(x) = x^2 + 3x$.

(a) Skissa grafen för f i ett graderat koordinatsystem. (1p)

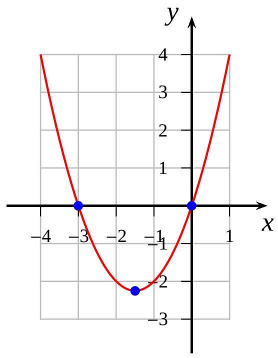
(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (2p)

Lösning:

Alla andragradsfunktioner ser ut som en hårnål, och om andragradskoefficienten är positiv hamnar kröken i nederkant. (”positiv – glad mun”). Man behöver därför inte särskilt mycket data för att rita en OK bild. Minst vetenskapligt är att göra upp en värdetabell, pricka in punkterna, och så dra en kurva. Mer tjusigt är att göra en faktorisering via kvadratkomplettering. (Just det här uttrycket är enkelt nog att faktorisera *utan* kvadratkomplettering – bryt ut x – men den kvadratkompletterade formen är intressant i sig.)

$$x^2 + 3x = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = (x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = x(x + 3)$$

Ur den faktoriserade formen framgår att nollställena är $x = 0$ och $x = -3$. Ur den kvadratkompletterade formen framgår att funktionens lägsta värde är $-(3/2)^2 = -9/4$, och det antas då kvadratuttrycket $(x + 3/2)^2$ är noll, vill säga då $x = -3/2$. Prickar man in dessa tre kända punkter kan man rita en hyfsad graf. (Det skadar inte att beräkna några värden till, men ”skissa” betyder ”rita på ett ungefär”).



Ur diskussionen baserad på kvadratkompletteringen framgick att lägsta värdet är $-9/4 = -2{,}25$, och sedan antas alla värden därifrån och uppåt. Värdemängden är alltså $[-9/4, \infty) = \{ y \mid y \geq -9/4 \}$. (Arbetar man enbart utgående från en värdetabell, där man förmodligen studerat heltalsvärden på x, finns risken att man ser att det lägsta värdet i tabellen är $y = -2$ och svarar baserat på detta.)

Rättningsnorm: (a): Rätt placerade nollställen, ungefär rätt placerad minpunkt och rätt form: 1p. (b): Klart visat att man förstått frågan: 1p. Helt korrekt svar: +1p.

6. (a) Om man säger att ett tal är *rationellt*, exakt vad menar man? (Vi vill alltså ha definitionen av *rationellt tal*.) (1p)

Lösning:

Ett tal som kan skrivas som kvot av två heltal, där det i nämnaren inte är 0, eller med mängdnotation: $\mathbb{Q} = \{ q \mid q = a/b \text{ där } a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \}$

Rättningsnorm: ”Bråktal” accepteras som svar.

(b) Visa med hjälp av definitionen att 3,14 är ett rationellt tal. (1p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 4(a) ur kapitel 1 i *Kompletterande kompendium*.

$3{,}14 = 314/100$, så talet kan skrivas som kvot av två heltal (med nämnare skild från noll) och är därför ett rationellt tal.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. Om man på (a) påstått att rationellt tal är något helt annat så ska svaret här passa ihop med svaret där.

(c) Är följande implikation sann? Motivera!

$$x \text{ är ett heltal} \Rightarrow x \text{ är ett rationellt tal} \qquad (1p)$$

Lösning:

Ja. Om något är ett heltal så är det automatiskt också ett rationellt tal, för man kan skriva det som en kvot med sig själv som täljare och heltalet ett som nämnare. (Däremot så finns det rationella tal som *inte* är heltal, så detta är inte en ekvivalens.)

Rättningsnorm: Se (b).

7. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet.

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 = 0$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Informationen går lätt att läsa ut om man kvadratkompletterar uttrycket:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 10x + 4y + 25 &= x^2 - 2 \cdot 5x + y^2 + 2 \cdot 2y + 25 \\ &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 2^2 + 25 \\ &= (x-5)^2 - 25 + (y+2)^2 - 4 + 25 \\ &= (x-5)^2 + (y+2)^2 - 4 \\ &= 0 \\ (x-5)^2 + (y-(-2))^2 &= 2^2 \end{aligned}$$

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r har ekvationen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, och matchar vi det mot det uttryck vi har ser vi att medelpunkten är $(5, -2)$ och radien 2 l.e..

Rättningsnorm: Helt korrekt kvadratkomplettering: 2p, 1p vid något enstaka fel. Korrekt svar utgående från det uttryck man tagit fram: 1p.

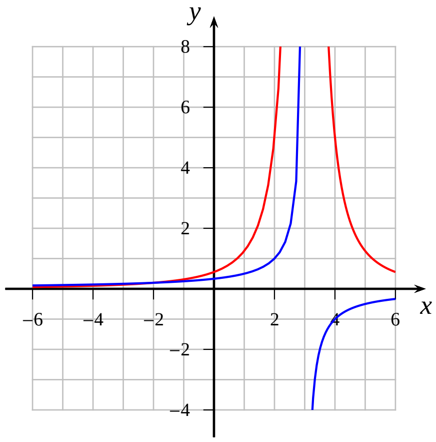
8. För vilka värden på x är nedanstående uttryck sant?

$$\frac{5}{(x-3)^2} \geq \frac{1}{3-x}$$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik för olikheter: skyffla över allt på samma sida om olikhetstecknet, sätt på gemensamt bråkstreck och faktorisera:

$$\begin{aligned} \frac{5}{(x-3)^2} &\geq \frac{1}{3-x} \\ \frac{5}{(x-3)^2} - \frac{1}{3-x} &\geq 0 \\ \frac{5}{(x-3)^2} + \frac{1}{x-3} &\geq 0 \\ \frac{5}{(x-3)^2} + \frac{x-3}{(x-3)^2} &\geq 0 \\ \frac{5+x-3}{(x-3)^2} &\geq 0 \\ \frac{x+2}{(x-3)^2} &\geq 0 \end{aligned}$$



Uttrycket kommer att teckenväxla vid $x = -2$ (då täljaren blir noll) och vid $x = 3$ (då nämnaren blir noll). Teckentabell:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$\frac{x+2}{(x-3)^2}$	$-$	0	$+$	odef	$+$

Intervallet från och med -2 fram till 3, och så allt från 3 och uppåt ger ett icke-negativt resultat.

Svar: $[-2, 3) \cup (3, \infty)$

Det hela är illustrerat i bilden bredvid beräkningen. Den röda kurvan är $y = 5/(x-3)^2$, den blåa $y = 1/(3-x)$. Den röda ligger underst fram till $x = -2$, sedan skär de varandra och den röda ligger överst för resten, med undantaget att vid $x = 3$ är ingendera uttrycket definierat och det går därför inte att säga vad som ligger högst.

Rättningsnorm: Satt allt på gemensamt bråkstreck på ena sidan olikhetstecknet: 1p. Ställt upp en (någorlunda) korrekt teckentabell: 1p. Korrekt avläst uppställd teckentabell: 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.02.20 08.30-11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. Lös följande ekvation: $1 - x = \sqrt{3 - x}$. (3p)

Lösning:

Beräkningslösning: Kvadrera för att få bort rottecknet:

$$\begin{aligned}
1 - x &= \sqrt{3-x} \\
(1-x)^2 &= (\sqrt{3-x})^2 \qquad \text{Kontrollera svaren!} \\
1 - 2x + x^2 &= 3 - x \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x^2 - 2\cdot\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 &= 0 \\
(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{4}{4} &= 0 \\
(x - \frac{1}{2})^2 &= \frac{9}{4} \\
x - \frac{1}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\
x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} &= \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

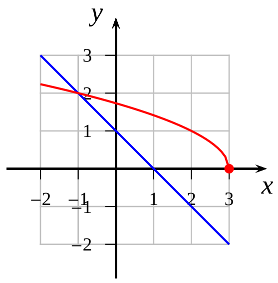
Eftersom kvadreringen kan introducera falska rötter (för två tal kan vara olika men ändå ha samma kvadrat) måste vi testa svaren:

$$x = 2 : \begin{cases} \text{VL} = 1 - 2 = -1 \\ \text{HL} = \sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \text{VL} = 1 - (-1) = 2 \\ \text{HL} = \sqrt{3-(-1)} = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

Den första roten var tydligen falsk; den andra stämmer.

Grafisk lösning: Vänsterledet motsvarar en rät linje; högerledet motsvarar en rotkurva spegelvänd och flyttad tre steg åt höger. Ritar man upp detta får man



Kurvorna har helt klart bara en skärningspunkt, som förefaller ligga vid $x = -1$. Genom insättning i ekvationen kan man bekräfta att avläsningen är korrekt.

Svar: $x = -1$.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något enstaka fel (t.ex. felaktig kvadrering eller missat testa rötterna): 2p. Mer fel än så, men fortfarande någon väsentligt del rätt: 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{7}}\cdot\frac{10}{7} \qquad (3p)$$

Lösning:

Kan göras på flera sätt. Här är ett:

$$\frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{7}}\cdot\frac{10}{7} = \frac{\frac{1}{15}+\frac{5\cdot 1}{5\cdot 3}}{2\cdot\frac{7}{7}-\frac{12}{7}}\cdot\frac{10}{7} = \frac{\frac{6}{15}}{\frac{2}{7}}\cdot\frac{10}{7} = \frac{\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{7}} = 2$$

Och här är ett annat:

$$\frac{\frac{1}{15}+\frac{1}{3}}{2-\frac{12}{7}}\cdot\frac{10}{7} = \frac{\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\right)\cdot 10}{\left(2-\frac{12}{7}\right)\cdot 7} = \frac{\frac{2\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}+\frac{10}{3}}{2\cdot 7-\frac{12\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}}} = \frac{\frac{12}{3}}{2} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 2$$

Rättningsnorm: 3p vid helt rätt; 1p avdrag för varje enskilt fel och varje nödvändigåtgärd som ej vidtagits. (Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som ett fel.)

3. Funktionen f definieras enligt $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$. Bestäm funktionens definitionsmängd. (3p)

Lösning:

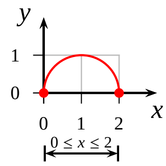
Definitionsmängden är de x-värden som är meningsfulla att använda, vilket om inget annat sägs får antas vara de för vilka uttrycket är definierat. Man kan inte dra roten ur negativa tal, så definitionsmängden består av de x som löser följande olikhet:

$$2x - x^2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(2-x) \geq 0$$

En produkt blir positiv om båda faktorerna är positiva eller båda negativa. Första faktorn blir positiv då x passerar 0. Andra faktorn blir negativ då x passerar 2. I området mellan

0 och 2 är båda positiva; något område där båda är negativa finns inte. Om man föredrar teckentabell får man

	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(2-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



Svar: $\mathcal{D}_f = [0,2] = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$

Kommentar: Om vi tittar på kurvan $y = \sqrt{2x-x^2}$ så kan vi göra följande omskrivningar av uttrycket:

$$y = \sqrt{2x-x^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

Detta sista känner man igen som ekvationen för en cirkel med medelpunkt i $(x,y) = (1,0)$ och radien 1. Det ursprungliga uttrycket motsvarar överhalvan av cirkeln; underhalvan får man om man sätter ett minustecken på roten. Och i x-led sträcker sig denna kurva mycket riktigt mellan 0 och 2.

Rättningsnorm: Visat att man förstår vad det är som ska räknas ut: 1p. Korrekt lösning av olikheten: 2p, 1p vid enstaka mindre fel.

4. Lös följande ekvation: $\dfrac{x^3-6x^2+9x}{2x^2-18} = 0$ (3p)

Lösning:

Ett bråk blir noll om och endast om täljaren är noll samtidigt som nämnaren *inte* är det. Leta nollställen var för sig, förslagsvis med hjälp av faktorisering:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x^2 - 2\cdot 2x + 3^2) = x(x-3)^2$$
$$2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x+3)(x-3)$$

Täljaren blir alltså noll om $x = 0$ eller $x = 3$. Nämnaren blir noll om $x = 3$ eller $x = -3$. Den enda lösningen är därmed $x = 0$.

Rättningsnorm: Korrekt hantering av täljaren: 1p. Korrekt hantering av nämnaren: 1p. Korrekt sammanställning av resultaten: 1p. Korrekt faktorisering och förkortning av bråket men inget mer än så korrekt: 1p totalt.

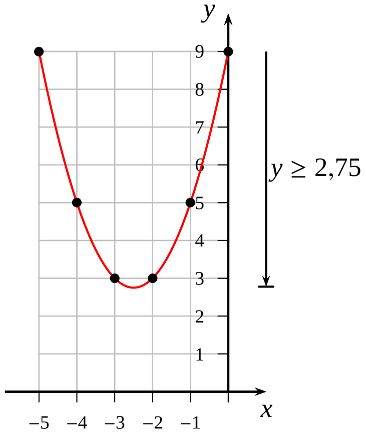
5. Funktionen g definieras enligt $g(x) = x^2+5x+9$. Bestäm funktionens värdemängd. (Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Värdemängden är de värden funktionen antar, ”y-värdena”. Uttrycket är av andra graden, så grafen är en parabel (hårnål), och eftersom andragradskoefficienten är 1, som är positivt, är kröken i nederkant. (”Positiv – glad mun”.) Hittar vi lägsta värdet så är värdemängden sedan alla värden från och med det och uppåt.

Värdetabell: För att få en uppfattning om hur funktionen ser ut så kan vi göra upp en värdetabell:

x	y
-5	9
-4	5
-3	3
-2	3
-1	5
0	9
1	15
2	23
3	33
4	45
5	59



Fram till $x = -3$ minskar värdena, från $x = -2$ ökar de. Minimum borde infalla mellan -3 och -2, dvs. för $x = -2{,}5$. Insatt i formeln får vi $g(-2{,}5) = (-2{,}5)^2 + 5 \cdot (-2{,}5) + 9 = 6{,}25 - 12{,}5 + 9 = 2{,}75$. Värdemängden blir alltså alla tal från och med detta.

Kvadratkomplettering:

$$x^2 + 5x + 9 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + (\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 + 9$$
$$= (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + \frac{36}{4} = (x + \frac{5}{2})^2 + \frac{11}{4}$$

Det lägsta värde som $(x + {}^5\!/_2)^2$ kan anta är 0, och det värdet antas då $x + {}^5\!/_2 = 0$, dvs. då $x = -{}^5\!/_2 = -2{,}5$. Värdet på hela uttrycket är då $0 + {}^{11}\!/_4 = {}^9\!/_4 = 2{,}75$. Värdemängden är alltså alla tal från och med detta.

Nollställen: Extrempunkten för en andragradare ligger mitt emellan nollställena, av symmetriskäl. Man kan alltså söka nollställen och sedan kolla värdet mitt emellan dem. Denna beräkning börjar med kvadratkompletteringen ovan (åtminstone om man observerat ”pq-formeln får ej användas”). Tyvärr kör man här fast, för det kvadratkompletterade uttrycket har formen $a^2 + b^2$ och inte $a^2 - b^2$, vilket fordras gör att man ska kunan gå vidare med konjugatregeln. Och om man istället ”flyttar över” får man $(x + {}^5\!/_2)^2 = -{}^{11}\!/_4$, som saknar reell lösning (eftersom kvadrater inte kan bli negativa vid räkning med reella tal). Den här funktionen saknar nollställen, så denna metod fungerar tyvärr inte.

Derivataresonemang: Detta fick som sagt inte användas, men om någon undrar hur det ser ut så innebär det att man deriverar $g(x)$ och sätter derivatan till noll och löser erhållen ekvation. Erhållet x-värde ger extrempunktens läge.

Svar: $\mathcal{V}_g = [{}^{11}\!/_4, \infty) = \{y \mid y \geq 2{,}75\}$

Rättningsnorm: Kommit till korrekt, motiverat svar: 3p. Åtminstone visat att man fattar frågan: 1p. Mellanting: 2p. Korrekt genomförd kvadratkomplettering men utan uppföljning: 1p totalt.

6. Vi har polynomen $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9$ och $q(x) = x + 3$.

(a) Dividera $p(x)$ med $q(x)$. (2p)

Lösning:

Vi genomför en polynomdivision (som får typsättas enligt amerikansk standard, eftersom jag har ett programpaket som gör det åt mig):

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 - 2x^2 + 4x - 3 \\
\hline
x+3) & x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9 \\
 & -x^4 - 3x^3 \\
\hline
 & -2x^3 - 2x^2 \\
 & 2x^3 + 6x^2 \\
\hline
 & 4x^2 + 9x \\
 & -4x^2 - 12x \\
\hline
 & -3x - 9 \\
 & 3x + 9 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Det stod ju bara ”dividera” i frågan, och det har vi nu gjort. Om man vill sammanställa svaret elegant kan man skriva

$$\frac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 9x - 9}{x+3} = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$$

Rättningsnorm: 2p för helt korrekt genomförd division, 1p för division med räknefel (för svaret är enkelt att kontrollera; multiplicera ihop uttrycken igen).

(b) Är $x = -3$ ett nollställe till $p(x)$? Motivera! (1p)

Lösning:

Faktorsatsen: Divisionen gick jämnt ut, så $x + 3$ är en faktor i $p(x)$ och i så fall är $x = -3$ ett nollställe.

Värdeberäkning: Sätt in $x = -3$ i $p(x)$ och se om det blir noll:

$$p(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 2(-3)^2 + 9(-3) - 9 = 81 - 27 - 18 - 27 - 9 = 0$$

Det blev det.

Svar: Ja

Rättningsnorm: Omotiverat svar och svar som det inte går att begripa om det är ”ja” eller ”nej” får 0p. Motiverat svar som överensstämmer med resultatet av genomförd undersökning får 1p.

7. Här är en del ur en värdetabell för en funktion h:

x	0	30	60	90
$h(x)$	0,00	0,50	0,87	1,00

(a) Bestäm ett approximativt värde på $h(45)$. Det ska klart framgå hur du resonerar. (2p)

(b) Det värde som du tog fram på (a)-uppgiften, bedömer du att det är större än det riktiga värdet eller mindre än det riktiga värdet på $h(45)$? Motivera! (1p)

(Detta är en ”tänka-själv-fråga”; vi har inte tagit något exakt sådant här i undervisningen men det bör gå att tänka ut ett svar.)

Lösning:

Vi tar båda deluppgifterna ihop:

Interpolation, informell: 45 ligger precis mitt emellan 30 och 60, så i brist på bättre information kan vi satsa på att $f(45)$ ska ligga precis mitt emellan $f(30)$ och $f(60)$:

$$f(45) \approx \frac{f(30) + f(60)}{2} = \frac{0{,}50 + 0{,}87}{2} = \frac{1{,}37}{2} = 0{,}685$$

Interpolation, mer formell: Vi har tillgång till punkter på ömse sidor om den sökta, så vi kan ta fram den räta linjen genom dessa punkter och sedan räkna fram y-värdet på denna. Vi börjar med riktningskoefficienten:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}87 - 0{,}50}{60 - 30} = \frac{0{,}37}{30} = \frac{37}{3000}$$

Nu kan vi ta fram linjens uttryck. $h(30)$ har enklast siffror, så vi använder den punkten:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{37}{3000}(x - 30) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{37}{3000}x + \frac{13}{100}$$

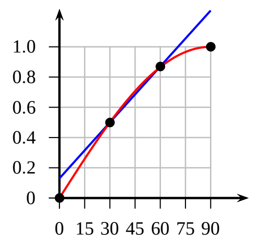
Sätter vi nu in $x = 45$ i denna formel får vi

$$y = \frac{37}{3000} \cdot 45 + \frac{13}{100} = \frac{137}{200} = 0{,}685$$

vilket är ett approximativt värde på $h(45)$.

Grafisk lösning: Markera punkterna i ett koordinatsystem och dra en snygg böjd kurva genom dem (se nedan). Mät av y-värdet som motsvarar $x = 45$. Denna metod ger ett bättre värde än vad den linjära interpolationen ger.

Grafisk felanalys: Prickar man in de givna värdena i ett koordinatsystem så verkar de motsvara en kurva som är böjd:



Det värde vi tog fram med interpolation motsvarar det man hittar på en rät linje genom två punkter; denna linje ligger av figuren att döma *nedanför* kurvan, och i så fall är det värde vi tagit fram lite *mindre* än det riktiga.

Räknemässig felanalys: x-värdena förändras mer mellan 0 och 30 än vad de gör mellan 30 och 60, och den förändringen är större än vad förändringen mellan 60 och 90 är. Det tyder på att förändringstakten avtar, och i så fall borde största delen av förändringen som görs mellan 30 och 60 ske på första halvan av sträckan. I den linjära interpolationen har vi utgått från att förändringen är jämnt fördelad, vilket bör innebära att värdet är underskattat.

Identifiering av funktionen: (Strunta i det här om du inte läst trigonometri!) Om man läst trigonometri finns chansen att man känner igen att funktionen h är sinus för vinklar angivna i grader. I så fall kan man utnyttja att $\sin 45°$ är något som man bör kunna utantill:

$$\sin 45° = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7$$

Kvadrerar man detta värde får man tillbaka $0{,}7^2 = 0{,}49 < 0{,}5$, så detta värde är aningens underskattat. Har man tagit fram ett approximativt värde med hjälp av interpolation så kan man jämföra med det här som är något bättre framräknat, och konstatera att det approximerade värdet är något underskattat.

Rättningsnorm: (a) Vettigt och motiverat resultat: 2p, 1p vid mindre felaktigheter eller ej slutfört. (b) Vettigt och motiverat svar: 1p.

8. (a) Bevisa satsen ”kvadraten på ett udda tal är udda”. (2p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 22 ur kapitel 1 i *Kompletterande kompendium*, och facit där inkluderar en fullständig lösning av uppgiften. Därför tas inga som helst hänsyn till protester om att uppgiften var obegriplig.

Ett tal är udda om det kan skrivas som två gånger ett heltal plus ett. Sätt att $x = 2n+1$, där n är ett heltal. Detta innebär alltså att x är udda. I så fall är

$$x^2 = (2n+1)^2 = (2n)^2 + 2 \cdot 2n \cdot 1 + 1^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Om n är ett heltal så är $2n^2 + 2n$ ett heltal, så x^2 är också det ett udda tal.

Rättningsnorm: Vattentätt resonemang: 2p; resonemang med mindre luckor: 1p. Resonemang som påpekar att detta är ett specialfall av ”produkten av två udda tal är udda” eller att slutsiffran i en multiplikation av heltal enbart beror av slutsiffrorna i talen får 1p om de inte inkluderar bevis av de utnyttjade satserna.

(b) Bevisa att omvändningen inte gäller. (1p)

Lösning:

Satsen kan formuleras som implikationen ”om ett tal är udda så är kvadraten på talet udda”. Omvändningen är ”om kvadraten på ett tal är udda så är talet udda”. Exempelvis är kvadraten på roten ur 3 det udda talet 3, men roten ur 3 är inte ett udda tal, det är inte ens ett heltal!

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.06.09 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Faktorisera nedanstående polynom:

$$-5x^3 + 20x^2 + 25x \qquad (3p)$$

Lösning:

Det verkar till att börja med finnas lite gemensamma faktorer att bryta ut. Därefter kan kvadratkompettering starta, och följas av konjugatregeln:

$$-5x^3+20x^2+25x = -5x(x^2-4x-5) = -5x(x^2-2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 - 5) = -5x((x-2)^2-9)$$
$$= -5x((x-2)^2 - 3^2) = -5x((x-2)+3)((x-2)-3) = -5x(x+1)(x-5)$$

Rättningsnorm: Helt korrekt lösning där det går att se hur faktoriseringen har hittats (och där metoden inte är pq-formeln): 3p. Största delen av en korrrekt lösning: 2p. Åtminstone någon konstruktiv eller korrekt åtgärd (som att bryta ut $-5x$): 1p.

2. Förenkla följande uttryck maximalt:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^9}\, c^{-2}}{a\sqrt{b^4c}}$$

Du kan förutsätta att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

Det är bara att tillämpa potensreglerna:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2b^9}\, c^{-2}}{a\sqrt{b^4c}} = \frac{(a^2b^9)^{1/3}}{a(b^4c)^{1/2}c^2} = \frac{a^{2/3}b^{9/3}}{ab^{4/2}c^{1/2}c^2} = \frac{a^{2/3}b^3}{ab^2c^{1/2+2}}$$
$$= \frac{b^{3-2}}{a^{-2/3+1}c^{5/2}} = \frac{b}{a^{1/3}c^{5/2}} = a^{-1/3}bc^{-5/2}$$

De två sista versionerna kan betraktas som lika förenklade; det varierar beroende på tillämpning vilketdera som är mest funktionellt.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll).

3. (a) Din kurskamrat har skrivit

$$[3, 8] = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Förklara varför detta är fel. (1p)

Lösning:

$[3, 8]$ betyder alla rella tal från och med 3 till och med 8. Detta är en del av tallinjen, och den innehåller inte bara heltal utan alla andra reella sorter också. (Det här intervallet inkluderar exempelvis $^{10}/_{3}$, π, $\sqrt{10}$ och 7,5, förutom alla andra tal som ligger *mellan* de uppräknade punkterna.)

Rättningsnorm: Poäng om det klart framgår att problemet är att talen *mellan* heltalen inte tagits med.

(b) Vilka tal ingår i talmängden $\{x \in \mathbb{R} : x = 2k \text{ där } k \in \mathbb{Z} \text{ och } k > 0\}$? Hur utläser man beteckningen? (2p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 1.10(b) i *Kompletterande kompendium*.

”Mängden av alla reella tal x sådana att x är lika med två gånger k där k är ett heltal och k är större än noll”, vilket blir de positiva jämna talen.

Rättningsnorm: Korrekt utläsning av uttrycket: 1p. Korrekt förklaring av vad det innebär: 1p.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{9}{4} - \frac{11}{6}}{\frac{7}{6} - \frac{8}{9}}$$ (3p)

Lösning:

Metod 1: Förenkla täljare och nämnare var för sig:

$$\frac{9 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{27 - 22}{12} = \frac{5}{12} \qquad \frac{7 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{21 - 16}{18} = \frac{5}{18}$$

Detta ger

$$\frac{\frac{9}{4} - \frac{11}{6}}{\frac{7}{6} - \frac{8}{9}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{18}} = \frac{5}{12} \cdot \frac{18}{5} = \frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{2}$$

Notera att det inte finns någon anledning att räkna ut $5 \cdot 18$ och $12 \cdot 5$ innan man börjar förenkla produkten.

Metod 2: Notera att minsta gemensamma nämnare för bråken i täljaren och nämnaren är 36, och förläng med detta tal:

$$\frac{(\frac{9}{4} - \frac{11}{6}) \cdot 36}{(\frac{7}{6} - \frac{8}{9}) \cdot 36} = \frac{\frac{9 \cdot 9 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4}} - \frac{11 \cdot 6 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}}{\frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} - \frac{8 \cdot 4 \cdot \cancel{9}}{\cancel{9}}} = \frac{81 - 66}{42 - 32} = \frac{15}{10} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{2 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{2}$$

Det finns fler metoder; alla ska dock ge svaret $^{3}/_{2}$.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel.

5. Lös följande ekvation: $4^x - 2^{x+2} - 32 = 0$ (3p)

Lösning:

Sortera ut 2^x (som verkar finnas på flera ställen) och substituera:

$$
\begin{aligned}
4^x - 2^{x+2} - 32 &= 0 \\
(2^x)^2 - 2^2 \cdot 2^x - 32 &= 0 \qquad \text{Sätt } 2^x = t \\
t^2 - 4t - 32 &= 0 \\
t^2 - 2 \cdot 2t + 2^2 - 2^2 - 32 &= 0 \\
(t-2)^2 - 36 &= 0 \\
((t-2)+6)((t-2)-6) &= 0 \\
(t+4)(t-8) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
t + 4 = 0 & \vee & t - 8 = 0 \\
t = -4 & & t = 8 \\
2^x = -4 & & 2^x = 8 = 2^3 \\
\text{Olöslig} & & x = 3
\end{array}
$$

Rättningsnorm: Helt korrekt lösning: 3p. Största delen av en korrekt lösning: 2p. Gjort något konstruktivt, typ substituerat: 1p.

6. (a) Funktionen f definieras enligt

$$f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{2x-5} + \sqrt{6-x}$$

Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (2p)

Lösning:

Definitionsmängden är de invärden som är meningsfulla, vilket om inget annat sägs är de x som beräkningen är definierad för. Man kan inte dra roten ur negativa tal, så det första rotuttrycket är bara definierat för $x \geq -4$ och det andra för $x \leq 6$. Vidare kan man inte dividera med noll, så bråket är odefinierat för $x = 2{,}5$. Det innebär att funktionen är definierad för alla tal från och med -4 till och med 6 med undantag för 2,5. Eller med symboler: $\mathcal{D}_f = [-4,\ 2{,}5) \cup (2{,}5,\ 6] = \{x \mid -4 \leq x \leq 6 \wedge x \neq 2{,}5\}$

Rättningsnorm: Något som går att tolka som ett korrekt svar (även om notationen är inkorrekt): 2p. Klart visat att man vet vad frågan går ut på: 1p.

(b) Då man talar om *värdemängden* för en funktion, exakt vad menar man? (Vi vill alltså ha definitionen av begreppet; du ska inte räkna ut något!) (1p)

Lösning:

Värdemängden är alla de tal man kan få som resultat då man beräknar $f(x)$, ”y”-värdena.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

7. Lös följande olikhet: $\dfrac{6}{x+2} \geq 3 - x$ (3p)

Lösning:

Skyffla över allt på samma sida; sätt på gemensamt bråkstreck; faktorisera:

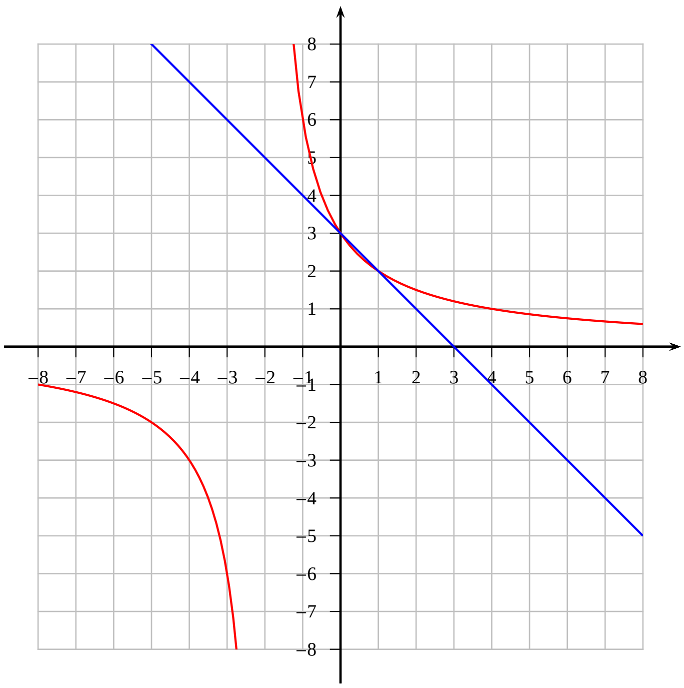
$$
\begin{aligned}
\frac{6}{x+2} &\geq 3 - x \\
\frac{6}{x+2} + (x-3) \cdot \frac{x+2}{x+2} &\geq 0
\end{aligned}
$$

$$\frac{6+x^2+2x-3x-6}{x+2} \geq 0$$
$$\frac{x^2-x}{x+2} \geq 0$$
$$\frac{x(x-1)}{x+2} \geq 0$$

Täljaren teckenväxlar i $x = 0$ och $x = 1$, nämnaren i $x = -2$. Teckentabell:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(x-1)}{x+2}$	$-$	odef	$+$	0	$-$	0	$+$

Uttrycket är ickenegativt från -2 till och med 0, och sedan från och med 1 och framåt.

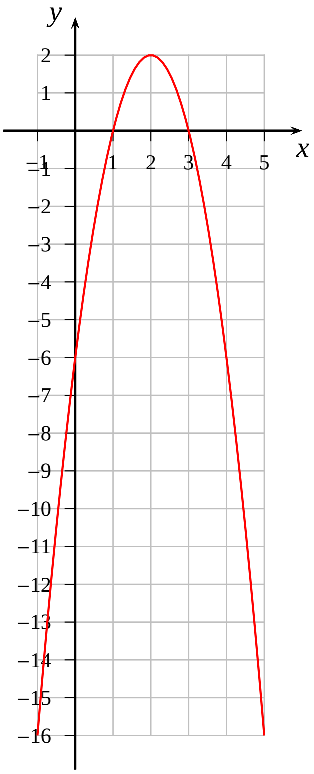


Grafiskt ser problmet ut som ovan. Den blåa linjen $y = 3 - x$ ligger ovanför den röda kurvan $y = 6/(x-2)$ fram till $x = -2$, då den röda kurvan startar om ovanifrån och ligger överst fram till $x = 0$, där den tillfälligtvis går under linjen för att sedan från $x = 1$ ligga överst igen. Det vi har beräknat är i vilka områden den röda kurvan ligger överst.

Svar: $\{x \mid -2 < x \leq 0 \vee x \geq 1\} = (-2, 0] \cup [1, \infty)$

Rättningsnorm: Helt korrekt lösning: 3p. Lösning med något mindre fel: 2p. Lösning som åtminstone innehåller några korrekta delar: 1p

8. Här är en bild av en kurva av typen $y = p(x)$, där $p(x)$ är ett andragradspolynom.



Ta fram en formel för $p(x)$. Det ska framgå hur du resonerar. (3p)

(Vi har inte gått igenom någon uppgift som sett ut precis så här på föreläsningarna, men uppgiften går att lösa med hjälp av de saker som vi *har* gått igenom.)

Lösning:

Nollställen: Kurvan skär x-axeln vid $x = 1$ och $x = 3$, som alltså är nollställen. Då måste polynomet innehålla faktorerna $x - 1$ och $x - 3$. Den kan dock inte vara bara $y = (x - 1)(x - 3)$, för den kurvan har kröken neråt och inte uppåt. Det måste alltså vara en konstant a med i spelet, och kurvan kan skrivas $y = a(x - 1)(x - 3) = ax^2 - 4ax + 3a$.

Axelskärning: Sätter man in $x = 0$ i uttrycket får man $a \cdot 0^2 - 4a \cdot 0 + 3a = 3a$, vilket är skärningen med y-axeln, som kan avläsas till $y = -6$. Så $3a = -6$, dvs. $a = -2$.

Maxpunkt: Sätter man in $x = 2$ i uttrycket får man $a \cdot 2^2 - 4a \cdot 2 + 3a = -a$, vilket motsvarar toppens y-koordinat, som kan avläsas till $y = 2$. Så $-a = 2$, dvs. $a = -2$.

Kvadratkomplettering: Alternativt utläser man ur maxpunkten att polynomet på kvadratkompletterad form ser ut som $p(x) = a(x - 2)^2 + 2$ (där a måste vara negativt, eftersom $y = 2$ är maxvärdet. Genom att sedan sätta in koordinaterna för någon annan lättavläst punkt kan värdet på a bestämmas.

Ansättning: Alternativt utgår man från att polynomet måste ha formen $p(x) = ax^2 + bx + c$, varefter man sätter in tre lättavlästa punkter i formeln. Detta ger tre ekvationer med de obekanta a, b och c, och det erhållna ekvationssystemet kan lösas med hjälp av t.ex. Gausselimination. (Denna lösning är lämplig om man har läst vektoralgebra, som täcker upp effektiva metoder att lösa den här typen av ekvationssystem.)

Svar: En formel för andragradspolynomet är $p(x) = -2(x - 1)(x - 3) = -2x^2 + 8x - 6 = -2(x - 2)^2 + 2$. (OK, detta var tre formler. Alla är lika bra som svar.)

Rättningsnorm: Begriplig lösning som leder till rätt svar: 3p. Största delen av en korrekt lösning eller lösning med något mindre fel: 2p. Visat några konstruktiva idéer: 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.08.12 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

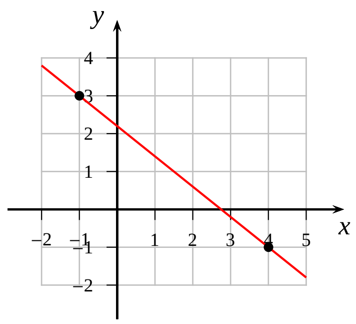
Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som når på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. En linje passerar punkterna $(-1, 3)$ och $(4, -1)$.

(a) Rita linjen i ett graderat koordinatsystem. (1p)

Lösning:



Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng, och det inkluderar att systemet ska vara graderat.

(b) Ta fram ett uttryck för linjen på formen $y = kx + m$. (2p)

Lösning:

Grafisk analys: Ur bilden ser man att linjen går 4 steg neråt på 5 steg framåt, vilket ger att riktningskoefficienten $k = -4/5 = -0{,}8$. Linjen skär y-axeln vid $m = 3 - 4/5 = 11/5 = 2{,}2$. Dess ekvation är alltså $y = -4/5x + 11/5 = -0{,}8x + 2{,}2$.

Beräkning: Tvåpunktsformeln:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-1)}{-1 - 4} = -\frac{4}{5}$$

(Och det blir samma svar om man tar punkterna i omvänd ordning.)

Sedan kan man använda enpunktsformel:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 3 &= -\tfrac{4}{5}(x - (-1)) \\ y &= -\tfrac{4}{5}x - \tfrac{4}{5} + 3 = -\tfrac{4}{5}x + \tfrac{11}{5} \end{aligned}$$

(Det blir samma svar med den andra punkten.) Eller så sätter man in någon av punkterna i ekvationen:

$$y = kx + m \qquad 3 = -\tfrac{4}{5}(-1) + m \qquad m = 3 - \tfrac{4}{5} = \tfrac{11}{5}$$

Rättningsnorm: 1p för k, 1p för m

2. Är $q(x) = x^2 - 4$ en faktor i $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 8x - 20$? Motivera. (3p)

Lösning:

Polynomdivision: Dividera $p(x)$ med $q(x)$ och se om det går jämnt ut:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & x^2 & -2x & +5 & & \\
\cline{2-6}
x^2-4) & x^4 - 2x^3 & +x^2 & +8x & -20 & \\
 & -x^4 & +4x^2 & & & \\
\cline{2-3}
 & -2x^3 & +5x^2 & +8x & & \\
 & 2x^3 & & -8x & & \\
\cline{2-4}
 & & 5x^2 & & -20 & \\
 & & -5x^2 & & +20 & \\
\cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Resten blev 0, så $q(x)$ var en faktor i $p(x)$.

Nollställesanalys: $q(x) = (x + 2)(x - 2)$, och har därför nollställena $x = \pm 2$. Om dessa tal också är nollställen till $p(x)$ är motsvarande faktorer också faktorer i $p(x)$:

$$p(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 8 \cdot 2 - 20 = 16 - 16 + 4 + 16 - 20 = 0$$

$$p(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 20 = 16 + 16 + 4 - 16 - 20 = 0$$

De var nollställen, så $q(x)$ var en faktor i $p(x)$.

Kombiresonemang: Man kan också faktorisera $q(x)$ och så dela med en faktor i taget; ger samma svar.

Rättningsnorm: Vattentät analys: 3p. Vettigt resonemang men oklart vad svaret är, alternativt korrekt metod med felräkning ihop med svaret ”nej”: 2p. Gjort någonting konstruktivt: 1p.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{6} + 3\right) \cdot 5$$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift, nr 13 från första bråktestet.

Kan lösas på flera sätt. Här är ett:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{6} + 3\right) \cdot 5 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{24} - \frac{5}{6} - 15 \\ &= \frac{16}{12} - \frac{1}{12} - \frac{10}{12} - \frac{180}{12} = \frac{16 - 1 - 10 - 180}{12} = -\frac{175}{12}\end{aligned}$$

Här är ett annat:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{6} + 3\right) \cdot 5 &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{16}{8} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{18}{6}\right) \cdot 5 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{8} - \frac{19}{6} \cdot 5 = \frac{15}{12} - \frac{95}{6} = \frac{15}{12} - \frac{190}{12} = -\frac{175}{12}\end{aligned}$$

4. **(a)** Är $x = 10 \Rightarrow x^2 = 100$ en sann utsaga? (1p)

(b) Är $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ en sann utsaga? (1p)

(c) Är $x = 10 \Leftrightarrow x^2 = 100$ en sann utsaga? (1p)

Motivera dina svar kortfattat.

Lösning:

(a) Ja, för om det är sant att x är 10 så blir ju kvadraten på x garanterat 100.

(b) Nej, för $x^2 = 100$ kan mycket väl vara sant även om det är lögn att x är 10 (nämligen om x är -10).

(c) Nej. För att två utsagor ska vara ekvivalenta så måste de ömsesidigt implicera varandra, vilket de enligt (b) inte gör.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men har man svarat ”ja” på både (a) och (b) så ska man svara ”ja” på (c) också.

5. Lös följande ekvation:

$$3\sqrt{x} = x - 4 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Kan lösas på flera sätt:

Med substitution:

$$
\begin{aligned}
3\sqrt{x} &= (\sqrt{x})^2 - 4 && \text{Sätt } \sqrt{x} = t \\
3t &= t^2 - 4 \\
t^2 - 3t - 4 &= 0 \\
t^2 - 2\cdot\frac{3}{2}t + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 &= 0 \\
\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{16}{4} &= 0 \\
\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \\
t - \frac{3}{2}^2 &= \pm\frac{5}{2} \\
t &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\
t = 4 \quad &\vee \quad t = -1 \\
\sqrt{x} = 4 \quad & \quad \sqrt{x} = -1 \\
x = 4^2 \quad & \quad \text{Olöslig} \\
x = 16
\end{aligned}
$$

Som rotekvation:

$$
\begin{aligned}
(3\sqrt{x})^2 &= (x-4)^2 && \text{Kolla svaren!} \\
9x &= x^2 - 8x + 16 \\
x^2 - 17 + 16 &= 0 \\
x^2 - 2\cdot\frac{17}{2}x + \left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 16 &= 0 \\
\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{64}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{17}{2}\right)^2 &= \frac{225}{4} \\
x - \frac{17}{2} &= \pm\frac{15}{2} \\
x &= \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$

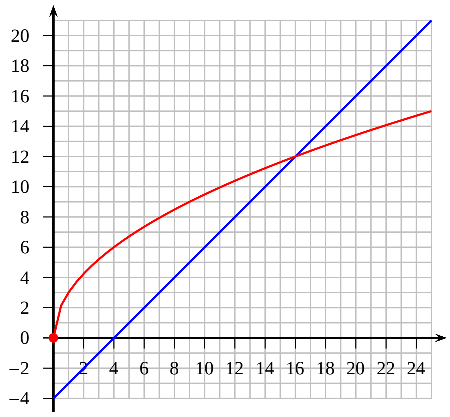
$$x = 16 \vee x = 1$$

Test i ursprungsekvationen. (Testet är nödvändigt eftersom två tal kan vara olika men ändå ha samma kvadrat, se föregående uppgift. Observera att tester alltid ska göras i *ursprungs*ekvationen!)

$$x = 16 : \begin{cases} \text{VL} = 3\sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12 \\ \text{HL} = 16 - 4 = 12 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$$x = 1 : \begin{cases} \text{VL} = 3\sqrt{1} = 3 \cdot 1 = 3 \\ \text{HL} = 1 - 4 = -3 \end{cases} \quad \text{EJ OK!}$$

Grafiskt: Eftersom båda leden motsvarar funktioner som är lätta att rita kan en grafisk lösning fungera:



Det finns uppenbart en och endast en skärningspunkt mellan linjen och parabelhalvan, och den är belägen vid $x = 16$.

Rättningsnorm: Helt korrekt: 3p. Största delen av en korrekt lösning, eller lösning med mindre felräkning: 2p. Åtminstone någonting konstruktivt: 1p.

6. **(a)** Förklara varför regeln $(xy)^n = x^n y^n$ gäller. (Du kan utgå från att n är ett positivt heltal.) (2p)

Lösning:

Att upphöja i ett positivt heltal motsvarar per definition att multiplicera ihop det antalet identiska faktorer:

$$(xy)^n = \underbrace{xy \cdot xy \cdot \ldots \cdot xy}_{n \text{ par}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ st}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{n \text{ st}} = x^n y^n$$

I en multiplikation spelar ju faktorernas inbördes ordning ingen roll, så ingenting förändras av att vi samlar ihop x:en i en grupp och y:na i en annan.

Rättningsnorm: Generell och tydlig förklaring som utgår från definitionen av potens: 2p. Otydlig eller icke-generell förklaring, men rätt idé: 1p.

(b) Visa (till exempel med ett exempel) att $(x + y)^n$ inte behöver bli samma sak som $x^n + y^n$. (1p)

Lösning:

Vi kan t.ex. ta $x = 1$, $y = 1$, $n = 2$: $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$; $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Och $4 \neq 2$.

(För enstaka talkombinationer, t.ex. där x eller y är 0 eller där $n = 1$ blir det faktiskt likhet. Men normalfallet är att resultaten blir helt olika.)

Notera att man kan visa att en regel *inte* gäller genom att hitta ett enda motexempel, medan man för att visa att den faktiskt gäller måste ha ett generellt resonemang som täcker all tänkbara fall.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

7. Funktionen f definieras enligt $f(x) = \sqrt{x(3+x)(2-x)}$. Bestäm funktionens definitionsmängd. (3p)

Lösning:

Man kan inte dra roten ur negativa tal, så de x som kan användas är de som uppfyller $x(3+x)(2-x) \geq 0$. De tre faktorerna byter tecken i $x = 0$, $x = -3$ respektive $x = 2$. Teckentabell:

		-3		0		2	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x(3+x)(2-x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Talen fram till och med -3 och så talen mellan 0 och 2 (inklusive 0 och 2) går att använda.

Svar: $\mathcal{D}_f = \{x \mid x \leq -3 \vee 0 \leq x \leq 2\} = (-\infty, -3] \cup [0, 2]$

Rättningsnorm: Klart visat att man förstår vad det handlar om: 1p. Korrekt löst olikheten: +2p.

8. Funktionen g definieras med formeln

$$g(x) = \frac{2x^2 + 160x + 3200}{x^2 - 1600}$$

Beräkna $g(39)$. Svaret ska vara maximalt förenklat. (3p)

Lösning:

Smart lösning: Det verkar som en god idé att se om uttrycket kan förenklas *innan* man sätter in $x = 39$ i formeln.

$$g(x) = \frac{2x^2 + 160x + 3200}{x^2 - 1600} = \frac{2(x^2 + 80x + 1600)}{x^2 - 1600} = \frac{2(x^2 + 2 \cdot 40x + 40^2)}{x^2 - 40^2}$$
$$= \frac{2(x+40)^2}{(x+40)(x-40)} = \frac{2(x+40)}{x-40} \quad \text{om } x \neq -40$$

Detta ger att

$$g(39) = \frac{2(39+40)}{39-40} = \frac{2 \cdot 79}{-1} = -158$$

Inte riktigt lika smart lösning: Sätt in och räkna:

$$g(39) = \frac{2 \cdot 39^2 + 160 \cdot 39 + 3200}{39^2 - 1600} = \frac{3042 + 6240 + 3200}{1521 - 1600} = \frac{12482}{-79} = -\frac{158 \cdot 79}{79} = -158$$

Rättningsnorm: Normen kommer att sättas samman i samband med rättningen, för jag har verkligen ingen aning om på vilka sätt den här uppgiften kan bli fellöst.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.09.30 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{15}}$$ (3p)

Lösning:

Variant 1: Förenkla täljare och nämnare var för sig, och slå sedan ihop resultaten:

$$\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}-\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{10-9}{12}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2}{15}=\frac{3+2}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1\cdot \cancel{5}}{3\cdot \cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{15}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{12}\cdot 3=\frac{1\cdot \cancel{3}}{4\cdot \cancel{3}}=\frac{1}{4}$$

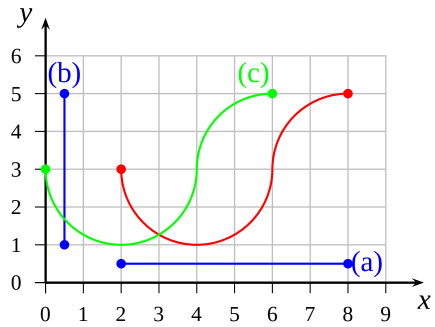
Variant 2: Förläng med minsta gemensamma nämnaren för både täljare och nämnare (vilket är $60 = 4\cdot 15 = 5\cdot 12 = 6\cdot 10$):

$$\frac{(\frac{5}{6}-\frac{3}{4})\cdot 60}{(\frac{1}{5}+\frac{2}{15})\cdot 60}=\frac{\frac{5\cdot\cancel{6}\cdot 10}{\cancel{6}}-\frac{3\cdot\cancel{4}\cdot 15}{\cancel{4}}}{\frac{1\cdot\cancel{5}\cdot 12}{\cancel{5}}+\frac{2\cdot 4\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}=\frac{50-45}{12+8}=\frac{5}{20}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{4\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{4}$$

Det finns säkert fler sätt!

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Att inte använda mgn klassas som ett fel.

2. Här är kurvan $y = f(x)$:



(a) Vad har f för *definitionsmängd*? Vad tittade du på i bilden för att avgöra det? (1p)

Lösning:
Definitionsmängden motsvarar x-koordinaterna för punkterna på kurvan, vilket blir intervallet $2 \leq x \leq 8$, markerat i figur.

(b) Vad har f för *värdemängd*? Vad tittade du på i bilden för att avgöra det? (1p)

Lösning:
Värdemängden motsvarar y-koordinaterna för punkterna på kurvan, vilket blir intervallet $1 \leq y \leq 5$, markerat i figur.

(c) Hur ser kurvan $y = f(x+2)$ ut? Du kan antingen rita eller beskriva med ord. (1p)

Lösning:
Samma kurva flyttad 2 steg åt vänster (för det som tidigare inträffade vid $x = 2$ inträffar nu redan vid $x = 0$), inritad i figuren i grönt.
Kurvan är för övrigt ihopskarvad av två cirkelbågar. Om man av någon anledning vill ha en beräkningsformel för funktionen så ser denna ut så här:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{2^2 - (x-4)^2} & 2 \leq x \leq 6 \\ 3 + \sqrt{2^2 - (x-8)^2} & 6 < x \leq 8 \end{cases}$$

Rättningsnorm: (Gäller alla deluppgifterna:) Kan nog bara bli rätt eller fel; svar utan motivering klassas som fel även om det är rätt. Motiveringen behöver dock inte vara så omfattande.

3. Hitta alla reella lösningar till följande ekvation:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Substitution:

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^2 + 8 &= 0 \\ (x^2)^2 - 6x^2 + 8 &= 0 \qquad \text{Sätt } x^2 = t \\ t^2 - 6t + 8 &= 0 \\ t^2 - 2 \cdot 3t + 3^2 - 3^2 + 8 &= 0 \\ (t-3)^3 - 9 + 8 &= 0 \\ (t-3)^2 &= 1 \\ t - 3 &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcr} t-3=1 & \vee & t-3=-1 \\ t=4 & & t=2 \\ x^2=4 & & x^2=2 \\ x=\pm 2 & & x=\pm\sqrt{2} \end{array}$$

Polynomresonemang: Ekvationen är av 4:e graden, så den ska ha 4 lösningar (om man räknar med multiplicitet och tillåter icke-reella tal). Om ett polynom med heltalskoefficenter har ett heltalsnollställe så är detta nollställe en faktor i konstanta termen. Faktorerna i 8 är ± 1, ± 2, ± 4 och ± 8.Testa:

$$\begin{aligned} x=\pm 1: &\quad (\pm 1)^4 - 6\cdot(\pm 1)^2 + 8 = 1 - 6 + 8 = 3 \\ x=\pm 2: &\quad (\pm 2)^4 - 6\cdot(\pm 2)^2 + 8 = 16 - 14 + 8 = 0 \\ x=\pm 4: &\quad (\pm 4)^4 - 6\cdot(\pm 4)^2 + 8 = 256 - 96 + 8 = 168 \\ x=\pm 8: &\quad (\pm 8)^4 - 6\cdot(\pm 8)^2 + 8 = 4096 - 384 + 8 = 3720 \end{aligned}$$

Vi har hittat två lösningar: $x = \pm 2$. Det kan finnas två till, men dessa är i så fall inte heltal. De två lösningar vi har motsvarar faktorer, så vi kan faktorisera med hjälp av polynomdivision. $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$, så vi delar med detta. (Man kan ta faktorerna en i taget, men det går fortare att ta båda på en gång.)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 2 \\ \hline x^2 - 4) & x^4 - 6x^2 + 8 \\ & -x^4 + 4x^2 \\ \hline & -2x^2 + 8 \\ & 2x^2 - 8 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Så nu vet vi att $x^4 - 6x^2 + 8 = (x^2-4)(x^2-2)$. Nollställena till den andra faktorn får vi ur

$$x^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Svar: $\{2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Rättningsnorm: Hittat alla svaren med hjälp av en begriplig metod: 3p. Hittat åtminstone ett svar: 1p. Inte hittat alla svar men kommit längre än till att hitta bara ± 2: 2p.

4. **(a)** Stämmer det för alla reella tal x att $\sqrt{x^2} = x$?

- Om svaret är ja: Förklara varför!
- Om svaret är nej: För vilka tal är det sant?

Lösning:

Nej. Exempelvis är $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$. Kvadreringen tar bort minustecken, och dessa får man inte tillbaka vid rotutdragningen. Det blir likhet om det inte fanns något minustecken att ta bort, dvs. om $x \geq 0$.

(b) Stämmer det för alla reella tal x att $(\sqrt{x})^2 = x$?

- Om svaret är ja: Förklara varför!
- Om svaret är nej: För vilka tal är det sant?

Lösning:

Nej. Om $x < 0$ är $\sqrt{x}$ odefinierad, och kvadraten på något odefinierat är odefinierad, vilket inte är samma sak som x. För positiva tal däremot är $\sqrt{x}$ ”det icke-negativa tal som i kvadrat blir x”, och kvadrerar man det så får man ju x. Så även denna likhet gäller bara om $x \geq 0$.

Rättningsnorm: Helt korrekta och välmotiverade svar: 3p. I övrigt poäng efter hur stor andel av en korrekt lösning man har fått ihop.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

5. Lös följande ekvation: $\dfrac{x^3+7x^2+6x}{x^2-36} = 0$ (3p)

Lösning:

Ett bråk blir noll om och endast om täljaren blir noll samtidigt som nämnaren inte blir det. Faktorisering av täljaren:

$$x^3+7x^2+6x = x(x^2+7x+6) = x\left(x^2+2\cdot\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+6\right) = x\left(\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{24}{4}\right)$$
$$= x\left(\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right) = x\left(\left(x+\frac{7}{2}\right)+\frac{5}{2}\right)\left(\left(x+\frac{7}{2}\right)-\frac{5}{2}\right) = x(x+6)(x+1)$$

Nollställen, kandidater till lösning: $x = 0$, $x = -6$, $x = -1$. Faktorisering av nämnaren:

$$x^2-36 = x^2-6^2 = (x+6)(x-6)$$

Nollställen, motkandidater till lösning: $x = -6$, $x = 6$.

Svar: $x = 0$, $x = -1$

Rättningsnorm: 3p för korrekt svar med begriplig metod. 2p om man bara svarar med täljarens nollställen. Mer fel än så, men fortfarande med korrekta bitar: 1p.

6. Definiera intervallen A och B genom $A = (2/5, 5/2]$ och $B = [3/10, 10/3)$.

(a) Rita en tallinje och markera de två intervallen på tallinjen. (1p)

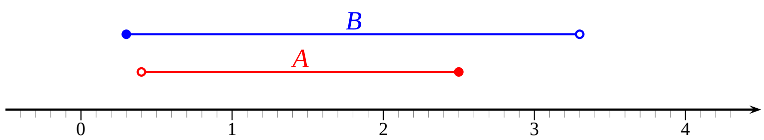
(b) Bestäm snittet av de två intervallen: $A \cap B$. (1p)

(c) Bestäm unionen av de två intervallen: $A \cup B$. (1p)

Lösning:

Enklast är att ta alla uppgifterna i samma vända. Det kan underlätta uppritningen att uttrycka intervallens ändpunkter på decimalform:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad \frac{3}{10} = 0{,}3 \qquad \frac{10}{3} \approx 3{,}33$$



Vi kan notera att intervall A är en del av intervall B; alla punkter som tillhör intervall A tillhör dessutom intervall B.

Snittet av de två intervallen är de punkter som intervallen har gemensamma, vilket är alla som tillhör intervall A: $(2/5, 5/2]$.

Unionen är de punkter som ingår i intervallen sammanslagna; de som tillhör ena eller andra eller båda. Det motsvarar intervall B: $[3/10, 10/3)$.

Rättningsnorm: Full poäng för bilden även om man inte följt principerna för fylld och ofylld ring i ändorna på intervallen. Om man ger unionen på (b) och snittet på (c) ges 1p totalt för (b)+(c).

7. Förenkla följande uttryck maximalt:

$$\frac{\sqrt[4]{x^{-1}y^2}\,z^3}{x^{1/2}(yz^{-2})^4}$$

Du kan förutsätta att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

Bara att tillämpa potensreglerna (som vi bör notera bara är garanterade att gälla för positiva baser):

$$\frac{\sqrt[4]{x^{-1}y^2}\,z^3}{x^{1/2}(yz^{-2})^4} = \frac{(x^{-1}y^2)^{1/4}z^3}{x^{1/2}(yz^{-2})^4} = \frac{x^{-1\cdot 1/4}y^{2\cdot 1/4}z^3}{x^{1/2}y^4z^{-2\cdot 4}}$$
$$= \frac{x^{-1/4}y^{1/2}z^3}{x^{1/2}y^4z^{-8}} = x^{-1/4-1/2}y^{1/2-4}z^{3+8} = x^{-3/4}y^{-7/2}z^{11} = \frac{z^{11}}{x^{3/4}y^{7/8}}$$

De två sista versionerna kan räknas som lika förenklade; det beror på tillämpningen vilkendera som är att föredra.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Om samma fel görs på flera ställen dras dock bara en poäng.

8. Lös följande olikhet:

$$x - 2 \le \frac{3}{x} \le 1 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 2.18(d) ur *Mot bättre vetande*.

Beräkningslösning: Detta är egentligen två olikheter: $x - 2 \le 3/x$ och $3/x \le 1$. Det man får göra är att lösa dem var för sig och så ta skärningen av svaren (vilket blir de x för vilka båda olikheterna stämmer). Generella metoden är att skyffla över allt på ena sidan tecknet, sätta på gemensamt bråkstreck, faktorisera och teckenanalysera:

$$\begin{aligned} x - 2 &\le \frac{3}{x} \\ x - 2 - \frac{3}{x} &\le 0 \\ \frac{x(x-2)-3}{x} &\le 0 \\ \frac{x^2-2x-3}{x} &\le 0 \\ \frac{(x+1)(x-3)}{x} &\le 0 \end{aligned}$$

Teckenväxlingar då $x + 1 = 0$, $x - 3 = 0$ och $x = 0$, dvs. vid $x = -1$, $x = 0$ och $x = 3$. Teckentabell:

		-1		0		3	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x+1)(x-3)}{x}$	$-$	0	$+$	odef	$-$	0	$+$

Olikheten stämmer på de två intervallen $\{x : x \le -1\}$ och $\{x : 0 < x \le 3\}$.

Den andra olikheten blir

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &\le 1 \\ \frac{3}{x} - 1 &\le 0 \\ \frac{3-x}{x} &\le 0 \end{aligned}$$

Teckenväxlar då $3 - x = 0$ och då $x = 0$, dvs. vid $x = 3$ och $x = 0$. Teckentabell:

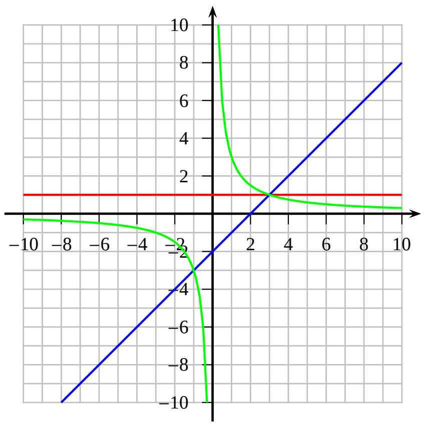
		0		3	
$3 - x$	+	+	+	0	−
x	−	0	+	+	+
$\frac{3-x}{x}$	−	odef	+	0	−

Denna olikhet stämmer på de två intervallen $\{x : x < 0\}$ och $\{x : x \geq 3\}$.

Det gemensamma för dessa två lösningar är intervallet $\{x : x \leq -1\}$ ihop med punkten $x = 3$.

Grafisk lösning: $y = x - 2$ är en sned linje, $y = 1$ är en horisontell linje, och $y = 3/x$ består av två böjda kurvstycken (motsvarar $= 1/x$ utdragen med en faktor 3 på höjden). Olikheten innebär att vi söker de områden där den böjda kurvan befinner sig ovanför den sneda linjen och samtidigt under den horisontella linjen. Detta går hyfsat att rita:

x	$3/x$
$1/2$	6
1	3
2	1,5
3	1
5	0,6
10	0,3



Den böjda kurvan ligger mellan den horisontella och den sneda linjen fram till $x = -1$, där den skär den sneda linjen och försvinner nedanför. Dessutom ligger alla tre kurvorna på varandra i punkten $x = 3$, där alla har y-värdet 1.

Rättningsnorm: Full poäng även om man missade punkten $x = 3$. Högst 1p om man ”multiplicerar upp” nämnaren. I övrigt poäng efter hur stor del av en korrekt lösning man åstadkommit.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2015.12.01 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. En linje har riktningskoefficienten $k = -2/3$ och går genom punkten $(x, y) = (-3, 1)$.

(a) Var skär linjen y-axeln?

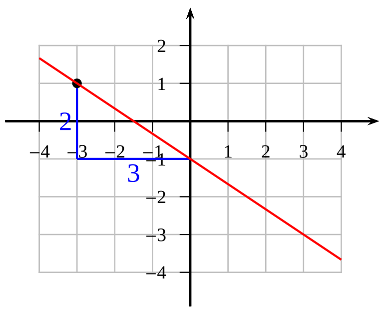
(b) Var skär linjen x-axeln?

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

Lösning:

Inspektion: k-värdet $-2/3$ innebär att på 3 steg framåt åker man 2 steg neråt. y-axeln ligger 3 steg till höger om punkten $(-3, 1)$, så man åker 2 steg neråt från nivån $y = 1$, och då hamnar man på $y = -1$. Omvänt så innebär 2 steg neråt att man åker 3 steg framåt. x-axeln ligger 1 steg under startpunkten, vilket innebär att man åker 1,5 steg framåt från position $x = -3$, varvid man hamnar på $x = -1{,}5$.

Grafisk lösning: Rita linjen ordentligt och läs av:



Enpunktsformeln: Den givna informationen insatt i enpunktsformeln $y - y_0 = k(x - x_0)$ ger att linjens ekvation är

$$y - 1 = -\tfrac{2}{3}(x - (-3)) \quad \Leftrightarrow \quad y = -\tfrac{2}{3}x - 1$$

I den omskrivna versionen motsvarar konstanttermen skärningen med y-axeln, som följaktligen är vid $y = -1$. Sätter vi in $y = 0$ och löser ut x får vi $0 = -\frac{2}{3}x - 1$ som ger $x = -\frac{3}{2}$, skärningen med x-axeln.

Formel, annan variant: Den informationen om k-värdet säger oss att linjens ekvation är av typen $y = -\tfrac{2}{3}x + m$. Sätter vi in den kända punkten får vi $1 = -\tfrac{2}{3} \cdot 3 + m$, som ger $m = -1$. Och detta är y-koordinaten för skärningen med y-axeln. Och skärningen med x-axeln erhålls på samma sätt som i föregående förslag.

Rättningsnorm: Korrekta svar med en begriplig metod: 3p. Vettig metod med något mindre fel i utförandet: 2p. Fortfarande innehållande vettiga bitar: 1p.

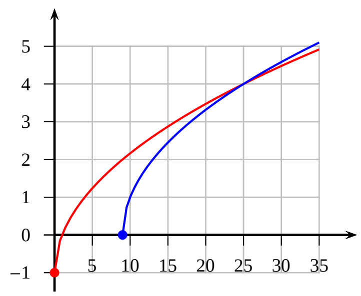
2. Lös ekvationen $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x-9}$. (3p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 2.15(a) ur *Mot bättre vetande*.

För att bli av med rottecken måste man kvadrera, men det innebär att erhållna rötter måste kontrolleras eftersom operationen kan introducera falska rötter.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} - 1 &= \sqrt{x-9} \\
(\sqrt{x} - 1)^2 &= (\sqrt{x-9})^2 \qquad \text{Kolla svaren!} \\
x - 2\sqrt{x} + 1 &= x - 9 \\
2\sqrt{x} &= 10 \\
\sqrt{x} &= 5 \\
x &= 25
\end{aligned}
$$



Kontroll:

$$\text{VL} = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4 \qquad \text{HL} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

Svaret var OK. Bredvid beräkningen är ett koordinatsystem med kurvorna $y = \sqrt{x} - 1$ och $y = \sqrt{x-9}$ utritat. Man ser att kurvorna skär varandra vid $x = 25$ (där båda har y-koordinaten 4). Kurvorna motsvarar den vanliga rotkurvan $y = \sqrt{x}$ förflyttat 1 steg neråt respektive 9 steg åt höger.

(Om du inte inser varför svaret måste testas kan du prova att lösa den snarlika ekvationen $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x + 1/3}$.)

Rättningsnorm: Lösande av ekvationen: 2p. (Använder man inte kvadreringsregeln då man kvadrerar vänsterledet får man 0p för ekvationslösningen.) Klargjort att man inser att svaren ska kontrolleras: 1p.

3. (a) Vi har funktionen f, där $f(x) = x^4$. Vad har f för <u>värde</u>mängd? (Motivera kortfattat.) (1p)

Lösning:

$[0, \infty) = \{y : y \geq 0\}$; alla tal från 0 och uppåt. (Jämna potenser kan inte bli negativa.)

(b) Vi har funktionen g, där $g(x) = x^{-4}$. Vad har g för <u>definitions</u>mängd? (Motivera kortfattat.) (1p)

Lösning:

Allt utom 0, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \{x : x \neq 0\}$; för man kan inte dividera med noll, och $x^{-4} = 1/x^4$.

(c) Vi har funktionen h, där $h(x) = x^{1/4}$. Vad har h för <u>definitions</u>mängd? (Motivera kortfattat.) (1p)

Lösning:

$[0, \infty) = \{x : x \geq 0\}$; alla tal från 0 och uppåt. $x^{1/4} = \sqrt[4]{x} =$ ”det ickenegativa tal som upphöjt i 4 blir x”, och att hitta ickenegativa tal som upphöjt i 4 ger negativa resultat går inte. Beräkningen går därför inte att utföra för negativa värden på x.

Rättningsnorm: (Gäller alla deluppgifterna:) Korrekt svar kombinerat med något som kan tolkas som en motivering ger poäng.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}-\frac{8}{19}$$ (3p)

Lösning:

Variant 1: Förenkla täljare och nämnare i det större bråket var för sig och slå ihop:

$$\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{7}{10}=\frac{8+7}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3\cdot\cancel{5}}{2\cdot\cancel{5}}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{20}-1=\frac{1}{20}-\frac{20}{20}=-\frac{19}{20}$$

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}-\frac{8}{19}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{19}{20}}-\frac{8}{19}=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{20}{19}\right)-\frac{8}{19}=-\frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 10}{\cancel{2}\cdot 19}-\frac{8}{19}$$

$$=\frac{-30-8}{19}=\frac{-38}{19}=-\frac{2\cdot\cancel{19}}{\cancel{19}}=-2$$

Variant 2: Förläng med minsta gemensamma nämnare för både täljare och nämnare i det större bråket, vilket blir med $20=2\cdot 10=4\cdot 5$:

$$\frac{(\frac{4}{5}+\frac{7}{10})\cdot 20}{(\frac{1}{20}-1)\cdot 20}-\frac{8}{19}=\frac{\frac{4\cdot 4\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}+\frac{7\cdot 2\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}}{\frac{1\cdot\cancel{20}}{\cancel{20}}-1\cdot 20}-\frac{8}{19}=\frac{16+14}{1-20}-\frac{8}{19}$$

$$=-\frac{30}{19}-\frac{8}{19}=\frac{-30-8}{19}=\frac{-38}{19}=-\frac{2\cdot\cancel{19}}{\cancel{19}}=-2$$

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Att inte använda mgn klassas som ett fel.

5. (a) Din kompis löser olikheten $\frac{x-3}{x-1}\le 0$ så här:

$$(x-1)\cdot\frac{x-3}{x-1}\le(x-1)\cdot 0$$
$$x-3\le 0$$
$$x\le 3$$

Förklara för kompisen varför detta ger fel svar. (1p)

Lösning:

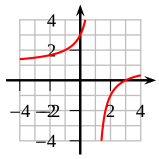
Exempelvis: Om man multiplicerar en olikhet med ett *negativt* tal så ska man vända på olikheten. $x-1$ kan vara både positivt och negativt, så efter multiplikationen så vet du inte längre åt vilket håll olikhetstecknet ska vara vänt!

Rättningsnorm: Allt på temat ”du vet inte åt vilket håll olikheten ska vara vänd” eller ”du ska inte multiplicera med något som du inte vet vad det är” godtas.

(b) Lös olikheten $\frac{x-3}{x-1}\le 0$ på ett *korrekt* sätt. (2p)

Lösning:
Räkningarna är i princip klara; det vi behöver göra är att studera tecknet. Täljaren byter tecken i $x = 3$ och nämnaren i $x = 1$. Teckentabell:

		1		3	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-1}$	$+$	odef	$-$	0	$+$



Lösningen är alltså $1 < x \leq 3$.
Alternativt kan man använda kompisens metod, men med modifikation:

Fall 1: $x - 1 < 0$

$$(x-1)\cdot\frac{x-3}{x-1} \geq (x-1)\cdot 0$$
$$x - 3 \geq 0$$
$$x \geq 3$$

Fall 2: $x - 1 > 0$

$$(x-1)\cdot\frac{x-3}{x-1} \leq (x-1)\cdot 0$$
$$x - 3 \leq 0$$
$$x \leq 3$$

Vilket innebär att av talen mindre än 1 kan vi använda de som är minst 3 (och några sådana tal finns inte) och av talen större än 1 kan vi använda de som dessutom är som störst 3. Detta blir talen från 1 till och med 3. (Samma svar men krångligare uträkning.)
Kommentar: Bredvid teckentabellen finns kurvan $y = (x-3)/(x-1)$ utritad. Vi ser att den ligger ovanför x-axeln (så att y-värdena är positiva) fram till $x = 1$, där den börjar om nerifrån för att passera x-axeln vid $x = 3$. y-värdena är icke-positiva från 1 till och med 3. Bilden stämmer överens med den korrekta lösningen (men inte med kompisens lösning).
Rättningsnorm: Korrekt tabell (eller motsvarande resonemang i ord): 1p. Korrekt svar: 1p.

6. (a) Är $x \in [2,3] \Rightarrow x \in (1,4)$ en sann utsaga? Motivera! (1p)

Lösning:
Uttryckt på svenska står det ”om x ligger i området mellan 2 och 3 så ligger x i området mellan 0 och 4”. Detta är sant; intervallet mellan 2 och 3 är en del i intervallet mellan 1 och 4, så allting som ingår i det mindre intervallet ingår också i det större.
Rättningsnorm: ”Ja” kombinerat med något som kan tolkas som en vettig motivering ger poäng.

(b) Är $x \in [2,3] \Leftarrow x \in (1,4)$ en sann utsaga? Motivera! (1p)

Lösning:
Nej. Exempelvis tillhör $x = 3{,}5$ intervallet $(1,4)$ utan att tillhöra intevallet $[2,3]$. (För att en implikation ska räknas som sann måste sanning i pilens början alltid leda till sanning vid pilens slut.
(Vi kan notera att de två intervallen innehåller samma *heltal*, nämligen 2 och 3. Men dessutom innehåller de en massa andra tal också, eftersom det finns tal mellan heltalen och intervallbeteckningar per definition står för alla reella tal mellan de indikerade ändpunkterna.)
Rättningsnorm: ”Nej” kombinerat med något som kan tolkas som en vettig motivering ger poäng.

(c) Är $x \in [2,3] \Leftrightarrow x \in (1,4)$ en sann utsaga? Motivera! (1p)

Lösning:
Nej. För att två utsagor ska vara ekvivalenta fordras att de implicerar varandra, och enligt (b) så är inte det fallet här.
(Om man ansett att utsagan på (b) var sann så ska man svara ”ja” här.)
Rättningsnorm: Svar konsistent med svaren på (a) och (b) kombinerat med något som kan tolkas som att man vet vad ekvivalens är ger poäng.

7. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet:

$$x^2 + y^2 = 11 - 8x + 6y$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Städa upp med kvadratkomplettering, vilket måste inledas med att man sätter alla variabler på samma sida likhetstecknet:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 11 - 8x + 6y \\ x^2 + 8x + y^2 - 6y &= 11 \\ x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2 - 4^2 + y^2 - 2 \cdot 3y + 3^2 - 3^2 &= 11 \\ (x+4)^2 - 16 + (y-3)^2 - 9 &= 11 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 &= 36 \\ (x-(-4))^2 + (y-3)^2 &= 6^2 \end{aligned}$$

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r har ekvationen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, och matchar vi det mot det uttryck vi har ser vi att medelpunkten är $(-4, 3)$ och radien 6 l.e..

(Observera att uttrycket *inte* kan skrivas om till $(x + 4) + (y - 3) = 6$, vilket motsvarar en rät linje. En linje och en cirkel är inte samma sak. En omskrivning av den här typen innehåller två felaktigheter: 1) Roten ur en summa är inte samma sak som summan ur rötterna. 2) Om man "plockar bort" kvadrater så tillkommer lite $\pm$, eftersom tal kan ha samma kvadrat *utan* att ha samma tecken.)

Rättningsnorm: Korrekt uträkning, rätt svar och ingen omskrivning till linje: 3p. I stort sett rätt: 2p. Åtminstone visat att man kan något relevant, kvadratkomplettering eller cirkelns ekvation: 1p.

8. Är $q(x) = x^2 - 6x + 9$ en faktor i polynomet $p(x) = x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x$? Motivera! (3p)

Lösning:

Faktorsatsen: Om α är ett nollställe så är $x - \alpha$ en faktor. $q(x)$ är en andragradare, och kan brytas ner i två förstagradsfaktorer, så vi skulle kunna se om dessa svarar mot nollställen i $p(x)$ genom insättning. Nu råkar $q(x)$ faktoriseras som $q(x) = x^2 - 2 \cdot 3x + 3^2 = (x-3)^2$, så 3 är ett *dubbelt* nollställe där. Nollställestestet kan bara kontrollera om något är ett nollställe, inte vilken multiplicitet det har. Vi genomför testet:

$$p(3) = 3^4 - 7 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 81 - 7 \cdot 27 + 7 \cdot 9 + 45 = 81 - 189 + 63 + 45 = 0$$

Så ja, 3 är ett nollställe till $p(x)$, men vi vet inte om det är enkelt eller dubbelt, så vi vet inte om $q(x)$ är en faktor eller inte. (Hade vi däremot fått ett annat svar än 0 hade vi kunnat säga säkert att $q(x)$ *inte* var en faktor.)

Faktorisering: Vi faktoriserar båda polynomen. Om alla faktorer i $q(x)$ även ingår i $p(x)$ så är $q(x)$ en faktor i $p(x)$.

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x = x(x^3 - 7x^2 + 7x + 15)$$

Tredjegradsuttrycket kan ha upp till och med 3 olika nollställen. Om vi delar med $x - 3$

(som vi konstaterat är en faktor) får vi

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - 4x - 5 \\ \cline{2-2}
x-3) & x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \\
 & -x^3 + 3x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -4x^2 + 7x \\
 & \quad 4x^2 - 12x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -5x + 15 \\
 & \qquad 5x - 15 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

och andragradaren kan faktoriseras med kvadratkomplettering enligt

$$x^2-4x-5 = x^2-2\cdot 2x + 2^2 - 2^2 - 5 = (x-2)^2-3^2 = ((x-2)+3)((x-2)-3) = (x+1)(x-5)$$

Vi har alltså att

$$q(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) \qquad p(x) = x(x-3)(x+1)(x-5)$$

Alternativt kan man här hitta nollställena (och därigenom faktorerna) utgående från att tredjegradaren har heltalskoefficienter, och i så fall är eventuella heltalsnollställen delare i konstanttermen 15. Det är därför värt att testa om några av $x = \pm 1$, $x = \pm 3$, $x = \pm 5$ eller $x = \pm 15$ är nollställen. $x = -1$, $x = 3$ och $x = 5$ fungerar, och eftersom en tredjegradare inte kan ha mer än tre nollställen är vi säkra på att vi hittat allihop.

Hur vi än tagit fram faktoriseringarna så kan vi konstatera att faktorerna inte matchar; $q(x)$ innehåller en faktor $x-3$ som inte finns i $p(x)$.

Polynomdivision: Dividera $p(x)$ med $q(x)$. Går det jämnt upp så är $q(x)$ en faktor, annars inte.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad x^2 - x - 8 \\ \cline{2-2}
x^2-6x+9) & x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 15x \\
 & -x^4 + 6x^3 - 9x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -x^3 - 2x^2 + 15x \\
 & \quad x^3 - 6x^2 + 9x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -8x^2 + 24x \\
 & \qquad 8x^2 - 48x + 72 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -24x + 72
\end{array}
$$

Vi fick resten $-24x + 72$, vilket innebär att divisionen *inte* går jämnt upp, så $q(x)$ är inte en faktor i $p(x)$.

Rättningsnorm: Vettig metod kombinerad med korrekt svar: 3p. Huvudsakligen rätt: 2p. Innehåller korrekta idéer: 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2016.01.05 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Vi har funktionen f, som definieras enligt

$$f(x) = \sqrt{5-x} + \frac{1}{x-3} + (x-1)^{1/3}$$

Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (3p)

Lösning:

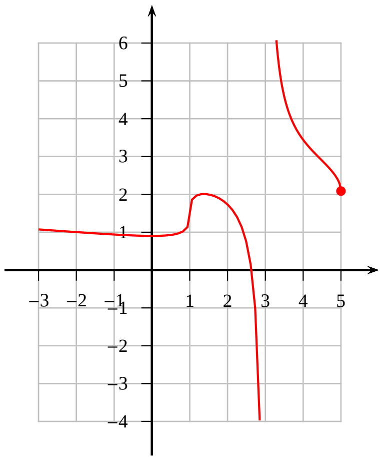
Definitionsmängden är (om inget annat sägs) de värden på x som beräkningen går att utföra för.
Ytterst är beräkningen en summa, vilket alltid går att beräkna så länge själva termerna är definierade. Vi går därför igenom termerna:

(i) $\sqrt{5-x}$: Man kan inte dra kvadratroten ur ett negativt tal, så $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

(ii) $1/(x-3)$: Man kan inte dividera med noll, så $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

(iii) $(x-1)^{1/3}$: Tredje-rötter går att dra ur alla tal, posiviva, negativa och noll, så den här ger inga restriktioner.

Totalt sett så får vi $\mathcal{D}_f = \{x : x \leq 5 \wedge x \neq 3\} = (-\infty, 3) \cup (3, 5]$.
Funktionens graf, som ser ganska lustig ut, finns avbildad här intill.



Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. (Inga avdrag för felaktig symbolanvändning i mängdbeskrivningen så länge det går att se att man menar rätt.) Till största delen rätt: 2p. Åtminstone visat att man vet vad en definitionsmängd är: 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{9}{14} - \frac{1}{21}}{5} + \frac{4}{10 + \frac{1}{2}}$$ (3p)

Lösning:

Går att göra på många sätt; här är två varianter.

Variant 1: Börja med att sätta bråken i täljare respektive nämnare på gemensamt bråkstreck:

$$\frac{\frac{9\cdot 3}{14\cdot 3}-\frac{1\cdot 2}{21\cdot 2}}{5}+\frac{4}{10\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{27-2}{42}}{5}+\frac{4}{\frac{21}{2}}=\frac{25}{42\cdot 5}+\frac{4\cdot 2}{21}$$
$$=\frac{5\cdot\cancel{5}}{42\cdot\cancel{5}}+\frac{8\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{5+16}{42}=\frac{21}{42}=\frac{\cancel{21}}{2\cdot\cancel{21}}=\frac{1}{2}$$

Variant 2: Förläng båda dubbelbråken med minsta gemensamma nämnare, vilket är $42 = 14\cdot 3 = 21\cdot 2$ respektive 2:

$$\frac{\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{21}\right)\cdot 42}{5\cdot 42}+\frac{4\cdot 2}{\left(10+\frac{1}{2}\right)\cdot 2}=\frac{9\cdot 3-1\cdot 2}{5\cdot 42}+\frac{8}{20+1}=\frac{25}{5\cdot 42}+\frac{8}{21}$$
$$=\frac{5\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 42}+\frac{8\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{5+16}{42}=\frac{21}{42}=\frac{\cancel{21}}{2\cdot\cancel{21}}=\frac{1}{2}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Att inte använda mgn klassas som ett fel.

3. **(a)** Förklara vad som menas med *substitution* vid ekvationslösning. (1p)

Lösning:

Man ersätter (substituerar) något krångligt i ekvationen med t.ex. t för att få en mer överblickbar ekvation. T.ex. kan man ge sig på ekvationen $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ genom att skriva den som $(x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0$ och så sätta $x^2 = t$ så att man får andragradsekvationen $t^2 - 6t + 8 = 0$, som man klarar att lösa.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men svaren tolkas välvilligt.

(b) Du har löst en andragradsekvation med hjälp av kvadratkomplettering. Nu testar du dina rötter genom att sätta in dem i ekvationen. En av dem passar inte. Vad ska du dra för slutsats ur det? (1p)

Lösning:

Jag har räknat fel, för en korrekt genomförd kvadratkomplettering följd av faktorisering ger de korrekta svaren och ingenting annat. Jag ska antingen leta fel i beräkningen eller göra om den från början (det sistnämnda är ofta enklast).

Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”räknat fel”/”gör om” godtas.

(c) Du har löst en rotekvation med hjälp av kvadrering. Nu testar du dina rötter genom att sätta in dem i ekvationen. En av dem passar inte. Vad ska du dra för slutsats? (1p)

Lösning:

Troligen är det en falsk rot. Kvadreringar tar bort tecken, och det är fullt möjligt att VL $\neq$ HL samtidigt som VL^2 = HL^2. Kvadrerar man de två leden i en ekvation kan man därför få en ny ekvation med fler lösningar än den gamla. De som inte passar i den gamla får man kasta bort. (Kvadrering är en av de operationer som kan ha denna effekt. Det finns fler!)

Ett sätt att kontrollera rimligheten i svaret är att se om man kan skissa upp kurvorna y = VL och y = HL och se var de skär varandra. Skärningspunkterna motsvarar lösningar, och även ur en ganska dålig skiss brukar det gå att se på ett ungefär var de ligger.

Anmärkning Jag har då jag granskat tidigare tentor funnit att många studenter har svårt att skilja på de här två situationerna. Tyckte att det var värt att belysa dem!

Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”falsk rot” godtas.

4. Förenkla följande potensuttyck maximalt:

$$\frac{\sqrt[3]{a^6b^{-1}}\,c^9}{a^{-2}(b^4c)^{-1/2}}$$

Du kan utgå från att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

Kan göras på flera sätt, här är ett:

$$\frac{\sqrt[3]{a^6b^{-1}}\,c^9}{a^{-2}(b^4c)^{-1/2}} = ((a^6b^{-1})^{1/3}c^9)(a^{-2}(b^4c)^{-1/2})^{-1} = (a^{6/3}b^{-1/3}c^9)(a^2(b^4c)^{1/2})$$
$$= a^2b^{-1/3}c^9a^2b^{4/2}c^{1/2} = a^{2+2}b^{-1/3+2}c^{9+1/2} = a^4b^{5/3}c^{19/2}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll).

5. (a) Vad är definitionen av mängden av *rationella tal*, $\mathbb{Q}$? (1p)

Lösning:

Det är mängden av alla tal som kan skrivas som en kvot mellan två heltal, där nämnaren inte är noll. Eller med symboler:

$$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n} \wedge m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$$

Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”bråktal” godtas, även om man inte omnämnt det där med att nämnaren inte får vara noll.

(b) Visa med hjälp av definitionen att -10 är ett rationellt tal. (1p)

Lösning:

Denna uppgift och efterföljande är tagna ur den rekommenderade uppgiften övning 4 i kapitel 1 i *Kompletterande kompendium*.

$-10 = -10/1$, så -10 kan skrivas som kvot mellan två heltal. (Finns oändligt många andra kvoter som också blir -10, men det här var den enklaste.)

Rättningsnorm: En kvot mellan heltal som blir -10 ger poäng. Om man påstått att de rationella talen är något helt annat men korrekt visar att -10 är en sådan grej så ges poäng.

(c) Ge ett exempel på ett rationellt tal som inte tillhör talmängden $\mathbb{Z}$. (1p)

Lösning:

Exempelvis $1/2$.

Rättningsnorm: Samma bedömningsprinciper som på (b).

6. Funktionen g definieras enligt $g(x) = -x^2+x-2$. Bestäm funktionens värdemängd. (Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Värdemängden är de resultat man kan få då man räknar ut $f(x)$ för alla tänkbara x. Eftersom detta är ett andragradsuttryck så kan den informationen lätt läsas ut ur den kvadratkompletterade formen:

$$g(x) = -x^2 + x - 2 = -(x^2 - x + 2) = -(\underbrace{x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2}_{(x-1/2)^2} - (\frac{1}{2})^2 + 2)$$
$$= -((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \frac{8}{4}) = -((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4})$$

Minsta möjliga värdet på $(x - 1/2)^2$ är 0 och det antas vid $x = 1/2$. Det innebär att minsta möjliga värde på $(x - 1/2)^2 + 7/4$ är $7/4$. Och detta innebär att *största* möjliga värde på $-((x - 1/2)^2 + 7/4)$ är $-7/4$. Kurvan $y = f(x)$ ser ut som en ledsen mun med topp-punkt vid $x = 1/2$, $y = -7/4$, och fortsätter neråt hur långt som helst.

Svar: $\mathcal{V}_g = (-\infty, -7/4] = \{y : y \leq -7/4\}$

Anmärkning: Om man brukar bestämma extremvärdet för andragradsuttryck med hjälp av nollställena får man här problem, eftersom funktionen saknar nollställen.

Rättningsnorm: 0p om man använt derivator. Annars: 1p för att man visat att man vet vad värdemängd är, 1p för kvadratkomplettering, 1p för korrekt utläsning av svaret ur beräkningen.

7. Du ser i kokboken att en tryckkokare kan hetta upp vatten till 120°C innan det börjar koka. I en tabellsamling hittar du följande samband mellan kokpunkt och tryck:

kokpunkt (°C)	tryck (MPa)
100	0,101
150	0,476
200	3,976
300	8,588
350	16,529

Bestäm med hjälp av tabellen föjande: Om kokpunkten är 120°C, vilket är då trycket? (3p)

Lösning:

Detta är ett klart fall för interpolation.

Informell lösning: 120°C ligger 40 % av vägen mellan 100°C och 150°C, som vi har information om. Då bör vi få trycket genom att lägga 40 % av tryckskillnaden till trycket vid 100°C:

$$0{,}101 + 0{,}4(0{,}476 - 0{,}101) = 0{,}251\,\text{MPa}$$

Ultraformell lösning: Vi betecknar kokpunkten med x och trycket med y. Till att börja med söker vi den linje som passerar punkterna (100; 0,101) och 150; 0,476). Riktningskoefficienten k får vi enligt:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}476 - 0{,}101}{150 - 100} = 0{,}0075$$

Enpunktsformeln ger oss nu

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad y - 0{,}101 = 0{,}0075(x - 100) \quad \Leftrightarrow \quad y = 0{,}0075(x - 100) + 0{,}101$$

Det y-värde som hör till $x = 120$ får vi nu enligt

$$y = 0{,}0075(120 - 100) + 0.101 = 0{,}251$$

Svar: Då kokpunkten är 120°C är trycket ungefär 0,251 MPa. (Svaret är inte exakt, för sambandet är inte linjärt. Men det här är det bästa vi kan ta fram med givna hjälpmedel.)

Kommentar: Tryckkokaren är en kastrull där locket spänns fast. Den är försedd med en säkerhetsventil som börjar släppa ut ånga då trycket passerar en viss gräns. Brukar vara inställt så att temperaturen i kastrullen blir ca 120°C, istället för de 100°C man normalt får. Det innebär att många matvaror (som ärtsoppa) kan tillagas på betydligt kortare tid. Den var ett mycket populärt hjälpmedel i hushållen innan frysar började bli överkomliga i pris.

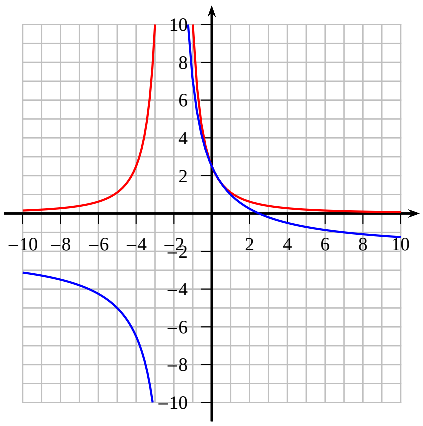
Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något mindre fel i utförandet: 2p. Åtminstone visat förståelse för frågeställningen: 1p.

8. Lös följande olikhet: $\dfrac{10}{(x+2)^2} \geq \dfrac{9}{x+2} - 2$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: Skyffla över allt på ena sidan olikhetstecknet, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera. Minsta gemensamma nämnare är $(x+2)^2$.

$$\frac{10}{(x+2)^2} - \frac{9}{x+2} + 2 \geq 0$$
$$\frac{10}{(x+2)^2} - \frac{9(x+2)}{(x+2)^2} + \frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2} \geq 0$$
$$\frac{10 - 9x - 18 + 2x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2} \geq 0$$
$$\frac{2x^2 - x}{(x+2)^2} \geq 0$$
$$\frac{x(2x-1)}{(x+2)^2} \geq 0$$



x passerar 0 vid $x = 0$, $2x - 1$ passerar 0 vid $x = 1/2$ och $x + 2$ passerar 0 vid $x = -2$. Teckentabell:

		-2		0		$1/2$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{x(2x-1)}{(x+2)^2}$	$+$	odef	$+$	0	$-$	0	$+$

Alla tal fram till och med 0 *utom* -2 och alla tal från och med $1/2$ funkar.

Svar: $(-\infty, -2) \cup (-2, 0] \cup [1/2, \infty)$

Som en konkretisering är kurvorna $y = 10/(x+2)^2$ och $y = 9/(x+2) - 2$ inritade i ett koordinatsystem bredvid uträkningen, i rött respektive blått. Det vi räknat ur är i vilka områden som den röda kurvan befinner sig ovanför den blåa. Det gör den överallt utom i $x = -2$ (där ingendera kurvan existerar och man därför inte kan säga vilken som är överst) och i det korta området mellan 0 och $1/2$.

Rättningsnorm: Korrekt skrivit om uttrycket till något som går att analysera: 2p. Korrekt analyserat det man skrivit om det till: 1p. 0p om man ”multiplicerar upp” nämnaren.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2016.02.17 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

För att visa hur tentan hänger ihop med studiehandledningen har jag denna gång skrivit upp vilka av målen för kursen som uppgifterna testar.

1. **(a)** Förklara vad som menas med en *lösning* till en ekvation. (1p)

Lösning:

Något som insatt på den obekantas plats i ekvationen ger ett sant uttryck.

När jag började gå igenom tentorna insåg jag dock att ordet *lösning* har flera betydelser, en annan är ”beräkning/resonemang med vars hjälp man tar fram svaret till en fråga”, och som uppgiften var formulerad måste även detta svar godtas.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men svaret tolkas välvilligt.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Lösning.

(b) Förklara vad som menas med *lösningsmängden* till en ekvation. (1p)

Lösning:

Alla lösningarna.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Lösningsmängd.

(c) Förklara vad som menas med en *falsk rot* till en ekvation. (1p)

Lösning:

En lösning som uppkommit under lösningsarbetet och som inte tillhör ursprungsekvationen; kan exempelvis uppkomma vid kvadrering (eftersom två tal kan vara olika men ändå ha samma kvadrat). Bara för att en lösning som man fått fram inte passar behöver den inte vara en falsk rot; betydligt oftare är förklaringen att man räknat fel!

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Falsk rot. Du ska kunna göra följande: • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter..

Svaren på frågorna förväntas vara en eller ett par meningar långa.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\left(\frac{7}{15} - \frac{9}{25}\right)\Big/\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Bråket blir lättare att läsa om man skriver det med ett horisontellt bråkstreck:

$$\frac{\frac{7}{15}-\frac{9}{25}}{\frac{2}{5}}+\frac{1}{3}$$

Observera att enligt prioritetsreglerna går division före addition, om det inte finns parenteser som anger annat!

Det verkar bra att förenkla dubbelbråket innan man börjar fundera på additionen. En metod:

$$\frac{\frac{7\cdot 5}{15\cdot 5}-\frac{9\cdot 3}{25\cdot 3}}{\frac{2}{5}}=\frac{35-27}{75}\cdot\frac{5}{2}=\frac{8}{15\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{2}=\frac{4\cdot\cancel{2}}{15\cdot\cancel{2}}=\frac{4}{15}$$

Annan metod:

$$\frac{\left(\frac{7}{15}-\frac{9}{25}\right)\cdot 75}{\frac{2}{5}\cdot 75}=\frac{\frac{7\cdot 5\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}-\frac{9\cdot 3\cdot\cancel{25}}{\cancel{25}}}{\frac{2\cdot 15\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}}=\frac{35-27}{2\cdot 15}=\frac{8}{2\cdot 15}=\frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{2}\cdot 15}=\frac{4}{15}$$

Och slutligen:

$$\frac{\frac{7}{15}-\frac{9}{25}}{\frac{2}{5}}+\frac{1}{3}=\frac{4}{15}+\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{4+5}{3\cdot 5}=\frac{9}{3\cdot 5}=\frac{\cancel{3}\cdot 3}{\cancel{3}\cdot 5}=\frac{3}{5}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll). Att inte använda mgn klassas som ett fel.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser.• Korrekt tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning.

3. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{x+6}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|llll}
 & 2x^2 & -15x & +94 & \\
\hline
x+6 & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -5 \\
 & -(2x^3 & +12x^2) & & \\
\hline
 & & -15x^2 & +4x & \\
 & & -(-15x^2 & -90x) & \\
\hline
 & & & 94x & -5 \\
 & & & -(94x & +564) \\
\hline
 & & & & -569
\end{array}$$

Kvoten är $2x^2 - 15x + 94$, resten är -569. Man kan också skriva

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x+6} = 2x^2 - 15x + 94 - \frac{569}{x+6}$$

eller

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 = (2x^2 - 15x + 94)(x+6) - 569$$

Rättningsnorm: Polynomdivisionen: 2p, 1p vid något mindre räknefel. Klart indikerat svar: 1p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision.

4. Lös ekvationen $4^x - 17 \cdot 2^{x-1} = -4$. (3p)

Lösning:

Talet 2 verkar vara inblandat på flera ställen. Skriver man om uttrycket med hjälp av potensräkningslagarna och substituerar får man en hanterbar ekvation:

$$\begin{aligned}
4^x - 17 \cdot 2^{x-1} &= -4 \\
(2^x)^2 - 17 \cdot 2^x \cdot 2^{-1} + 4 &= 0 \qquad \text{sätt } 2^x = 2 \\
t^2 - \frac{17}{2}t + 4 &= 0 \\
t^2 - 2 \cdot \frac{17}{4}t + (\frac{17}{4})^2 - (\frac{17}{2})^2 - 4 &= 0 \\
(t - \frac{17}{4})^2 - \frac{289}{16} + \frac{64}{16} &= 0 \\
(t - \frac{17}{4})^2 - \frac{225}{16} &= 0 \\
(t - \frac{17}{4})^2 - (\frac{15}{4})^2 &= 0 \\
(t - \frac{17-15}{4})(t - \frac{17+15}{4}) &= 0 \\
t - \frac{1}{2} = 0 \quad &\vee \quad t - 8 = 0 \\
2^x = 2^{-1} \quad & \quad 2^x = 2^3 \\
x = -1 \quad & \quad x = 3
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Omskrivning och substitution: 1p. Kvadratkomplettering: 1p. Svar: 1p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. • Faktorisera ett andragradsuttryck och lösa en andragradsekvation med hjälp av kvadratkomplettering.

5. (a) Förklara vad ekvivalenspilen $\Leftrightarrow$ betyder. (1p)

Lösning:

Att utsagorna på var sin sida om pilen är lika sanna; om en ena är sann så är den andra också sann och tvärtom.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men svaren tolkas välvilligt.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Ekvivalens.

(b) Din kompis har skrivit

$$(a+b)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2$$

Förklara för kompisen varför det är fel att använda en ekvivalenspil på det här stället. (1p)

Lösning:

De där grejerna är inte *utsagor* utan *uttryck*; pilen är en logisk symbol som ställs mellan saker som kan vara sanna eller falska. ”$(a+b)^2$” är inte något som har en sanningshalt.

Rättningsnorm: Svaret måste göra ett försök att förklara *varför*; ”för att man inte får göra så” räcker inte.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Ekvivalens. Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt..

(c) Tala om för kompisen vilken symbol det ska stå istället för pilen. (1p)

Lösning:

Ett likhetstecken, ”=”. Observera för övrigt att det vi har är första kvadreringsregeln; $(a+b)^2$ får exakt samma värde som $a^2 + 2ab + b^2$, oavsett vad vi sätter in för saker på a:s och b:s platser. Så alla lösningar som argumenterar för att sakerna inte alltid är lika måste klassas som felaktiga.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt..

6. Förenkla följande uttryck så långt det går:

$$\frac{2x^2 - 24x + 72}{x^3 - 36x} \cdot \frac{x^4 + 36x^2}{4x + 24} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Enklast är nog att börja med att bryta ut gemensamma faktorer, för att sedan se om det som blir kvar är identifierbart som något lättfaktoriserat:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2 - 24x + 72}{x^3 - 36x} \cdot \frac{x^4 + 36x^2}{4x + 24} &= \frac{2(x^2 - 12x + 36) \cdot x^2(x^2 + 36)}{x(x^2 - 36) \cdot 4(x + 6)} \\
&= \frac{\cancel{2}(x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2)x^{\cancel{2}}(x^2 + 36)}{\cancel{x}(x^2 - 6^2)\cancel{2} \cdot 2(x + 6)} \\
&= \frac{(x-6)^{\cancel{2}}x(x^2 + 36)}{(x+6)\cancel{(x-6)}2(x+6)} \\
&= \frac{x(x-6)(x^2 + 36)}{2(x+6)^2}
\end{aligned}$$

Notera att $x^2 + 36$ inte kan faktoriseras, eftersom uttryckets värde som lägst är 36 vilket innebär att det saknar nollställen.

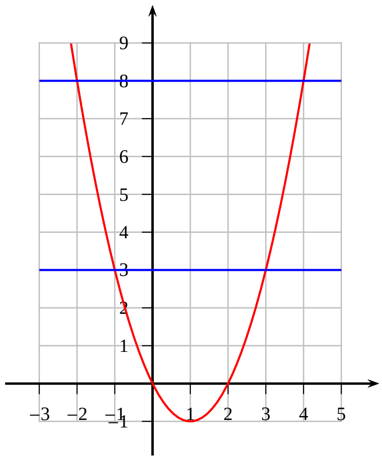
Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll).

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln. • Förenkla rationella uttryck.

7. Lös olikheten $3 < x^2 - 2x < 8$ (3p)

Lösning:

Grafisk lösning: $x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$, vilket innebär att kurvan $y = x^2 - 2x$ ser ut som $y = x^2$ flyttad 1 steg åt höger och 1 steg neråt. (Annars kan vi bara hävda ”positiv andragradskoefficient – glad mun” och så skissa från en värdetabell.) Vi ritar in denna parabel och de horisontella linjerna $y = 3$ och $y = 5$ i samma koordinatsystem:



Det vi söker är de områden där parabeln ligger *mellan* de två linjerna. Detta verkar vara mellan -2 och -1 samt mellan 3 och 4.

Beräkningslösning: Lös de två olikheterna $3 < x^2 - 2x$ och $x^2 - 2x < 8$ var för sig, och ta skärningen mellan svaren. (Det blir de punkter där båda uttrycken är sanna.)

$$\begin{aligned}
&3 < x^2 - 2x\\
&0 < x^2 - 2x - 3\\
&0 < x^2 - 2x + 1 - 1 - 3\\
&0 < (x-1)^2 - 2^2\\
&0 < (x+1)(x-3)
\end{aligned}$$

	$x < -1$		$-1 < x < 3$		$x > 3$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Så första olikheten gäller för $x < -1$ och $x > 3$. (Stämmer med bilden, för parabeln befinner sig ovanför den lägre linjen innan $x = -1$ och efter $x = 3$.)

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x &< 8\\
x^2 - 2x - 8 &< 0\\
x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 &< 0\\
(x-1)^2 - 3^2 &< 0\\
(x+2)(x-4) &< 0
\end{aligned}$$

	$x < -2$		$-2 < x < 4$		$x > 4$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Så den andra olikheten gäller för $-2 < x < 4$. (Stämmer också med bild; parabeln befinner sig nedanför den övre linjen mellan $x = -2$ och $x = 4$.)

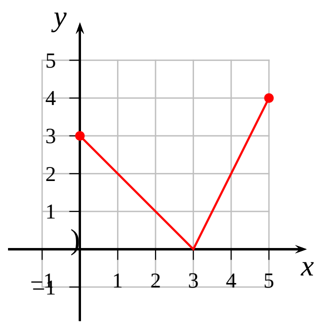
Slår man ihop det här får man de två intervallen $-2 < x < -1$ och $3 < x < 4$. Med mängd- och intervallbeteckningar:

$$((\infty, -1) \cup (3, \infty)) \cap (-2, 4) = (-2, -1) \cup (3, 4)$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone redovisat att man förstår grunderna i olikhetsproblem: 1p. Något däremellan: 2p. Grafiska lösningar med kommentarer accepteras.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck..

8. Hitta ett uttryck för funktionen vars graf är den givna kurvan:



(3p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 55 ur utdraget ur *Calculus*.

Det verkar helt klart vara två olika formler som ingår; en som används mellan 0 och 3, och en som används mellan 3 och 5. I övrigt har vi raka linjer, vilkas formler går att läsa ut.

Direkt utläsning: Det första linjestycket lutar neråt, vilket ger negativ riktningskoefficient k. På ett steg framåt går det ett steg neråt, så $k = -1$. Linjen skär y-axeln vid $y = 3$, så dess ekvation är $y = -x + 3$. Det andra linjestycket går uppåt, så positivt k. På ett steg fram går man två steg upp, så $k = 2$. Förlänger man linjen så att den skär y-axeln så finner man att den gör det nere vid $y = -6$. Dess ekvation är alltså $y = 2x - 6$.

Beräkning: Första linjestycket passerar punkterna $(0, 3)$ och $(3, 0)$. Riktningskoefficienten är då

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-3}{3-0} = \frac{-3}{3} = -1$$

Enpunktsformeln med punkten $(3, 0)$ ger sedan

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad y - 0 = -1(x - 3) \quad \Leftrightarrow \quad y = -x + 3$$

Andra linjestycket passerar punkterna $(3, 0)$ och $(5, 4)$. Riktningskoefficienten är

$$k = \frac{4-0}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

Alla kända värden insatta i $y = kx + m$ ger

$$4 = 2 \cdot 5 + m \quad \Leftrightarrow \quad m = 4 - 10 = -6$$

så detta linjestycke kan skrivas $y = 2x - 6$.

Gemensam avslutning:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{om } 0 \le x < 3 \\ 2x - 6 & \text{om } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

(För de som läst absolutbelopp: med hjälp av absolutbelopp kan formeln skrivas $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}|x - 3|$. Ni som ännu inte läst absolutbelopp: ni kan ju kontrollera det här när ni väl läst det!)

Rättningsnorm: Insett att det ska vara en styckvis definierad funktion: 1p. Fixat formlerna: 2p, 1p vid något mindre misstag.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd • Styckvis definierad funktion. Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2016.06.08 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{3x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 5}{x^2 - 1}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Polynomdivision (typsatt på amerikanska):

$$
\begin{array}{r@{}rrrrr}
 & & & 3x^2 & +x & -1 \\ \cline{2-6}
x^2-1) & 3x^4 & +x^3 & -4x^2 & +x & -5 \\
 & -3x^4 & & +3x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & x^3 & -x^2 & +x & \\
 & & -x^3 & & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x^2 & +2x & -5 \\
 & & & x^2 & & -1 \\ \cline{4-6}
 & & & & 2x & -6
\end{array}
$$

Svar: Kvot: $3x^2 + x - 1$; rest: $2x - 6$.

Rättningsnorm: Polynomdivisionen: 2p, 1p vid något mindre räknefel. Klart indikerat svar: 1p

Mål: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision.

2. (a) Beräkna $4 \cdot (9^{3/2})$ (1p)

Lösning:

$4 \cdot (9^{3/2}) = 4 \cdot (9^{(1/2)\cdot 3}) = 4 \cdot (9^{1/2})^3 = 4 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$

alternativt

$4 \cdot (9^{3/2}) = 4 \cdot (9^{1+1/2}) = 4 \cdot (9^1 \cdot 9^{1/2}) = 4 \cdot 9 \cdot 3 = 4 \cdot 27 = 108$

Rättningsnorm: Inga avdrag för rena sifferräkningsfel, men principen måste vara rätt.

(b) Beräkna $(4 \cdot 9)^{3/2}$ (1p)

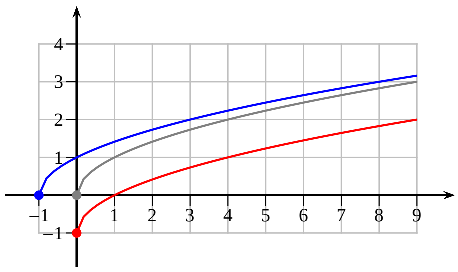
Lösning:
$(4\cdot 9)^{3/2} = 36^{(1/2)\cdot 3} = (36^{1/2})^3 = 6^3 = 216$
alternativt
$(4\cdot 9)^{3/2} = 36^{1+1/2} = 36^1\cdot 36^{1/2} = 36\cdot 6 = 216$
Rättningsnorm: Inga avdrag för rena sifferräkningsfel, men principen måste vara rätt. Lägger man upp uträkningen ostrategiskt genom att kubera innan rotutdragningen, så att man får något som man inte klara att dra roten ur, så kan man få 1p totalt på (a)+(b).

(c) Om man skriver $4\cdot 9^{3/2}$ (utan några parenteser), menar man då uttrycket i (a) eller uttrycket i (b)? (1p)

Lösning:
Man menar uttrycket i (a). Potenser går före multiplikation.
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel!
Mål: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna.

3. Lös ekvationen $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x+1}$. (3p)

Lösning:
Grafisk lösning: Kurvan $y = \sqrt{x}$ vet vi hur den ser ut. $y = \sqrt{x} - 1$ blir den kurvan flyttad ett steg neråt. $y = \sqrt{x+1}$ blir den kurvan flyttad ett steg åt vänster. Uppritat ser det ut som:



Det ser inte ut som att kurvorna tänker skära varandra, och i så fall saknar ekvationen lösning.

Beräkningslösning: Vi får kvadrera för att bli av med rottecknen, och då får vi inte glömma att testa svaren:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} - 1 &= \sqrt{x+1} \\
(\sqrt{x} - 1)^2 &= (\sqrt{x+1})^2 && \text{kvadrera; kolla svaren} \\
(\sqrt{x})^2 - 2\cdot\sqrt{x}\cdot 1 + 1^2 &= x+1 && \text{1:a kvadreringsregeln} \\
x - 2\sqrt{x} + 1 &= x + 1 && \text{förenkla} \\
-2\sqrt{x} &= 0 && \text{stryk gemensamma termer} \\
\sqrt{x} &= 0 && \text{dela med } -2 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Så $x = 0$ är *kanske* en lösning till ekvationen. Kontroll i ursprungsekvationen:

$$\begin{cases} \text{VL} = \sqrt{0} - 1 = 0 - 1 = -1 \\ \text{HL} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \end{cases}$$

Vänster och höger led blir inte lika, så detta är inte en lösning utan en falsk rot. Ekvationen saknar lösning.

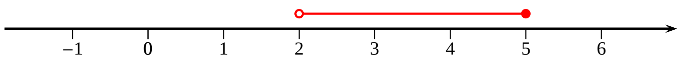
(Kom ihåg att $\sqrt{1}$ är ”det *icke-negativa* tal som i kvadrat blir 1”, så $\sqrt{1} = 1$ och inget annat.)

Rättningsnorm: En grafisk lösning får högst 2p, eftersom det inte är helt uppenbart att kurvorna inte kommer att gå ihop. Annars: 1p för korrekt genomförd kvadrering. 1p för lösning av kvadrerad ekvation. 1p för test och förkastande av rot.

Mål: Du ska kunna göra följande: • [...] tillämpa kvadreringsreglerna [...] • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. • Avgöra om något är en lösning till en ekvation..

4. (a) Markera intervallet $(2,\ 5]$ på en tallinje. (1p)

Lösning:



Rättningsnorm: Det måste framgå att 2 inte ingår och att 5 gör det.

(b) Finns det något största tal i intervallet $(2,\ 5]$?

- Om svaret är *Ja*, vilket är talet?
- Om svaret är *Nej*, varför inte? (1p)

Lösning:

Ja. Intervallet kan med mängdnotation skrivas $\{x : 2 < x \leq 5\}$, och det största talet i det är ändpunkten 5.

Rättningsnorm: Svaret måste vara rätt, och det ska finnas något som kan klassas som en motivering.

(c) Finns det något minsta tal i intervallet $(2,\ 5]$?

- Om svaret är *Ja*, vilket är talet?
- Om svaret är *Nej*, varför inte? (1p)

Lösning:

Nej. Intervallet har inget minsta tal. 2 ingår inte. 2,1 ingår, 2,01 ingår också, och 2,001 och så vidare. Hur nära ändpunkten 2 vi är går så går det att komma ännu närmare och hitta ett tal som är ännu mindre men ändå ingår i intervallet.

Rättningsnorm: Svaret måste vara rätt, och det ska finnas något som kan klassas som en motivering. Om det är klart att man blandat ihop vilken parentes som står för vad men resonerar korrekt utgående från det man trodde så ges 1p för (b)+(c).

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Större än, mindre än. Du ska kunna göra följande: • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt..

5. Faktorisera följande uttryck med hjälp av kvadratkomplettering:

$$4 - 6x - 4x^2$$

(3p)

Lösning:

Börja med att bryta ut, så att vi får x^2 utan komplikationer:

$$\begin{aligned}
&4 - 6x - 4x^2 \\
&= -4(x^2 + \tfrac{6}{4}x - 1) && \text{bryt ut} \\
&= -4(x^2 + 2 \cdot \tfrac{3}{4}x - 1) && \text{fixa 2:a på } x\text{-termen} \\
&= -4(x^2 + 2 \cdot \tfrac{3}{4}x + (\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{3}{4})^2 - 1) && \text{lägg till / dra ifrån} \\
&= -4((x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} - \tfrac{16}{16}) && \text{samla ihop kvadraten, räkna ut}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -4((x+\tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{25}{16}) && \text{slå ihop konstanterna}\\
&= -4((x+\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{5}{4})^2) && \text{skriv som kvadrat}\\
&= -4((x+\tfrac{3}{4}) + \tfrac{5}{4})((x+\tfrac{3}{4}) - \tfrac{5}{4}) && \text{konjugatregeln}\\
&= -4(x+\tfrac{8}{4})(x-\tfrac{2}{4}) && \text{slå ihop konstanterna}\\
&= -4(x+2)(x-\tfrac{1}{2}) && \text{förenkla bråken}
\end{aligned}
$$

Rättningsnorm: Annan metod är kvadratkomplettering: 0p. Annars: 2p för kvadratkompletteringen, 1p vid något smärre slarvfel. 1p för steget vidare till faktorisering.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges). • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck. • Faktorisera ett andragradsuttryck [...] med hjälp av kvadratkomplettering..

6. Sätt in $x = 2/5$ i uttrycket $\dfrac{2x+3}{2x-3} - \left(4x + \dfrac{1}{x}\right)$. Förenkla.

Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.(3p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 19 från bråktestet.

Går att göra på flera sätt, här är ett:

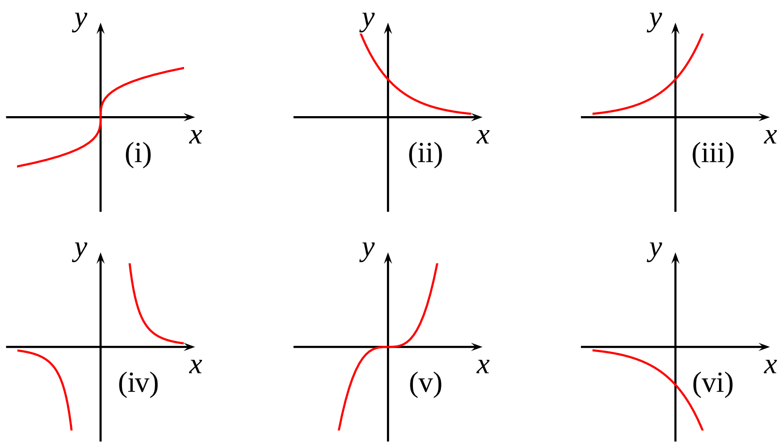
$$
\begin{aligned}
&\frac{2(2/5)+3}{2(2/5)-3} - \left(4(2/5) + \frac{1}{(2/5)}\right) && \text{ersätt } x \text{ med } 2/5\\
&= \frac{2\cdot\frac{2}{5}+3}{2\cdot\frac{2}{5}-3} - \left(4\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{\frac{2}{5}}\right) && \text{skriv mer läsbart}\\
&= \frac{\left(\frac{2\cdot 2}{5}+3\right)\cdot 5}{\left(\frac{2\cdot 2}{5}-3\right)\cdot 5} - \left(\frac{4\cdot 2}{5} + \frac{5}{2}\right) && \text{multiplicera och förläng}\\
&= \frac{4+15}{4-15} - \frac{8}{5} - \frac{5}{2} && \text{multiplicera in och multiplicera ihop}\\
&= \frac{19}{-11} - \frac{8}{5} - \frac{5}{2} && \text{addera/subtrahera}\\
&= -\frac{19\cdot 10}{11\cdot 10} - \frac{8\cdot 22}{5\cdot 22} - \frac{5\cdot 55}{2\cdot 55} && \text{förläng till gemensam nämnare}\\
&= -\frac{190+176+275}{110} && \text{multiplicera ihop, gemensamt bråkstreck}\\
&= -\frac{641}{110} && \text{addera}
\end{aligned}
$$

Anm: Uppgiften innehöll ingen mgn-problematik.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och stryk en poäng för varje enskilt fel och för varje nödvändig åtgärd som inte utförts (med stopp när man är nere på noll).

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Korrekt tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. .

7. Här har vi sex bilder:



Här har vi sex formler:

(a) $y = x^3$ (b) $y = 3^x$ (c) $y = x^{-3}$ (d) $y = -3^x$ (e) $y = x^{(1/3)}$ (f) $y = (1/3)^x$

Skriv upp vilken bild som hör till vilken formel. Motivering behövs inte, men felaktiga svar ger minuspoäng.

Poängsättning: Varje korrekt par ger +0,5p, varje felaktigt par ger −0,5p. Om poängsumman blir negativ sätts 0p på uppgiften. I övrigt avrundas summan uppåt till närmsta heltal. (3p)

Lösning:

Vi skriver in motiveringar ändå:

(a) $y = x^3$: udda potenser blir S-kurvor som planar ut vid origo och blir allt brantare mot kanterna. Kurva (v) är den enda som passar in där.

(b) $y = 3^x$: exponentialfunktion med bas större än 1 blir en kurva med positiva y-värden som ökar ju längre åt höger man går. Kurva (iii) är den enda som passar.

(c) $y = x^{-3} \Leftrightarrow y = 1/x^3$: Det blir division med noll, vilket är odefinierat, vid $x = 0$, så kurvan ska ha ett avbrott där. Kurva (iv) är den enda som passar in.

(d) $y = -3^x$: innebär att man byter tecken på (b), vilket ger att alla y-värdena ska vara negativa. Kurva (vi) är den enda som passar in.

(e) $y = x^{(1/3)} \Leftrightarrow y^3 = x$: är samma sak som (a) men med x och y i ombytta roller. Kurva (i) är den enda som passar in.

(f) $y = (1/3)^x$: exponentialfunktion med bas mindre än 1 blir en kurva med positiva y-värden som minskar ju längre åt höger man går. Kurva (ii) är den enda som passar.

Rättningsnorm: Se informationen om poängsättning. Svar som man inte kan begripa får 0p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Skissa grafen för en exponentialfunktion..

8. Vi har funktionen f, som definieras enligt

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+3}{4-5x}}$$

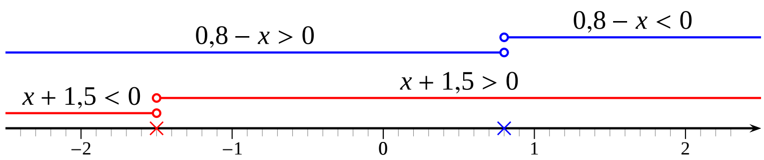
Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (3p)

Lösning:

Man kan inte dra roten ur negativa tal, så f:s definitionsmängd är lika med lösningsmängden för olikheten

$$\frac{2x+3}{4-5x} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2(x+1{,}5)}{5(0{,}8-x)} \geq 0$$

(Normalt brukar bråkform vara lättare att hantera än decimaler, men just här verkade decimalformen bli enklare.) Täljaren byter tecken vid $x = -1{,}5$ och nämnaren vid $x = 0{,}8$. Två intressanta punkter bryter upp tallinjen i tre delar:



Det ger följande teckentabell:

	$x < -1{,}5$	$x = -1{,}5$	$-1{,}5 < x < 0{,}8$	$x = 0{,}8$	$x > 0{,}8$
$x+1{,}5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$0{,}8-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{2(x+1{,}5)}{5(0{,}8-x)}$	$-$	0	$+$	odef	$-$

(2:an och 5:an påverkar inte tecknet, och behöver inte tas med.)

Olikheten gäller i intervallet $-1{,}5 \leq x < 0{,}8$.

Svar: $\mathcal{D}_f = [-1{,}5;\ 0{,}8)$

Rättningsnorm: Kommit fram till olikheten: 1p. Korrekt löst olikheten: 2p, 1p vid något mindre fel. Att prova sig fram med olika heltals-x eller multiplicera upp nämnaren anses som större fel.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Bestämma definitionsmängden för en enkel funktion. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck..

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2016.08.17 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet.

$$y^2 + x^2 - 6x + 3y = -5$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
y^2 + x^2 - 6x + 3y &= -5 \\
x^2 - 6x + y^2 + 3y &= -5 \\
x^2 - 2\cdot 3x + y^2 + 2\cdot\tfrac{3}{2}y &= -5 \\
x^2 - 2\cdot 3x + 3^2 + y^2 + 2\cdot\tfrac{3}{2}y + (\tfrac{3}{2})^2 &= -5 + 3^2 + (\tfrac{3}{2})^2 \\
(x-2)^2 + (y+\tfrac{3}{2})^2 &= -5 + 9 + \tfrac{9}{4} \\
(x-2)^2 + (y+\tfrac{3}{2})^2 &= \tfrac{-20+36+9}{4} \\
(x-2)^2 + (y-(-\tfrac{3}{2}))^2 &= (\tfrac{5}{2})^2
\end{aligned}$$

Cirkelns medelpunkt är $(x, y) = (2, -3/2)$ och dess radie är $5/2$ (i vad man nu använder för enhet).

Rättningsnorm: Korrekt genomförd kvadratkomplettering: 1p. Korrekt utläst medelpunkt ur vad-man-nu-fått-fram: 1p. Korrekt utläst radie: 1p.

2. (a) Vad står det här?

$$x \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; x \in \mathbb{N}$$

Skriv på svenska hur det här ska utläsas. (1p)

Lösning:

”Om x tillhör de hela talen så tillhör x de naturliga talen” eller mer ledigt uttryckt ”om x är ett heltal så är x ett naturligt tal”, eller ännu ledigare ”heltal är naturliga tal”.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Är utsagan ovan sann eller inte? Förklara! (1p)

Lösning:
Inte sann. De negativa heltalen ingår inte bland de naturliga talen, så exempelvis $-1 \in \mathbb{Z}$ men $-1 \notin \mathbb{N}$.

(c) Är utsagans omvändning sann eller inte? Förklara! (1p)

Lösning:
Sann. Alla naturliga tal är heltal; de naturliga talen är $\{0, 1, 2, \ldots\}$, vilket är en delmängd till de hela talen, som är $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Rättningsnorm: (Gäller både (b) och (c):) Om man tolkat (a) som något helt annat så ska ens svar och motivering matcha det som man påstod att utsagan betydde. Ingen motivering, ingen poäng. Halvdålig motivering på båda deluppgifterna kan ge 1p totalt.

3. Förenkla följande uttryck så långt det går:

$$\frac{\dfrac{x - x^3}{x^3 + x^2}}{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}} \qquad (3p)$$

Lösning:

Exempelvis:

$$\frac{\dfrac{x - x^3}{x^3 + x^2}}{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x}} = \frac{x - x^3}{x^3 + x^2} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x(1 - x^2)}{x^2(x + 1)} \cdot \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{x(1 + x)(1 - x)x(x - 2)}{x^2(x + 1)(x - 1)^2} = \frac{\cancel{x^2}\cancel{(x + 1)}(-\cancel{(x - 1)})(x - 2)}{\cancel{x^2}\cancel{(x + 1)}\cancel{(x - 1)}(x - 1)} = -\frac{x - 2}{x - 1}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktig åtgärd och för varje nödvändig åtgärd som ej utförts.

4. **(a)** Förklara varför $\dfrac{a \cdot b}{a \cdot c}$ kan förkortas till $\dfrac{b}{c}$.

(b) Förklara varför $\dfrac{a \cdot b + c}{a \cdot d}$ i normalfallet *inte* kan förkortas till $\dfrac{b + c}{d}$.

Utgå från att $a \neq 0$ i båda deluppgifterna. Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

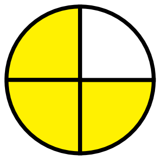
Notera att man om man vill visa att något alltid gäller måste göra ett generellt resonemang, medan att det om man vill visa att något *inte* alltid gäller räcker med att hitta ett exempel där det inte fungerar.

(a) *Konkret resonemang:* Vi ska alltså förklara varför

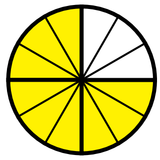
$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \qquad a \neq 0$$

Vi kan lika gärna börja i högerledet och förklara varför det kan förlängas till uttrycket i vänsterledet. Högerledet motsvarar att vi delat varje hel i c bitar, och så har vi tagit b stycken bitar. Om vi nu delar upp varje bit i a bitar så kommer antalet bitar vi delat de hela i öka till $a \cdot c$, och antalet bitar som vi har till $a \cdot b$. Men vi har inte ändrat på hur mycket vi har. Så de två uttrycken är lika, vilket skulle visas.

Vi kan exempelvis se att $3/4$ och $9/12$ är lika ur denna bild:



$$\frac{3}{4}$$



$$\frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Egentligen är den här förklaringen bara giltig om alla de inblandade talen är positiva heltal, men den får räknas som acceptabel här.

Definitionen av division: Division är motsatsen till multiplikation; om $x/y = z$ så är $x = y \cdot z$. Och om vi tar två uttryck som är lika med varandra och multiplicerar dem med samma tal så får vi två nya uttryck som är lika med varandra. Och om talet inte är noll kan vi vända på processen:

$$\frac{b}{c} = d \quad \Leftrightarrow \quad b = c \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot b = a \cdot c \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot b}{a \cdot c} = d$$

Så $(a \cdot b)/(a \cdot c)$ är lika med samma sak som b/c, vilket vi kan uttrycka som att det går att stryka a:na utan att ändra värdet.

(b) *Praktiskt prov:* Vi testar att beräkna de två uttrycken för några lätträknade värden, som $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ och $d = 5$:

$$\frac{2 \cdot 3 + 4}{2 \cdot 5} = \frac{6 + 4}{10} = \frac{10}{10} = 1 \qquad \frac{3 + 4}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

Det blev ju inte alls samma sak!

Utnyttjande av den redan kända regeln: Vi vet enligt föregående deluppgift att en gemensam faktor i täljare och nämnare kan strykas. Problemet är att talet a i $a \cdot b + c$ inte ingår i den andra termen, så det är inte en faktor i täljaren. Det man kan göra är en omskrivning typ

$$\frac{a \cdot b + c}{a \cdot d} = \frac{a \cdot (b + {}^{c}\!/_{a})}{a \cdot d} = \frac{b + {}^{c}\!/_{a}}{d}$$

men detta är bara lika med $(b + c)/d$ om $c = {}^{c}\!/_{a}$, vilket bara gäller om $a = 1$ eller $c = 0$. Detta är de enda fall där den beskrivna "förenklingen" faktiskt går att göra (vilket förklarar att det står "i normalfall" i frågan; det finns fall där det stämmer).

Rättningsnorm: Vattentät förklaring: 3p. Förklaring med mindre luckor: 2p. Åtminstone visat att man har klart för sig vad uppgiften handlar om: 1p.

5. Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3 + x^2 - 10x - 10 = 0$. (3p)

Lösning:

Tredjegradsekvationer har upp till tre olika reella lösningar. *Om* ett polynom med heltalskoefficienter och högstagradskoefficient har ett heltalsnollställe *så* är detta heltalsnollställe en faktor i konstanttermen. Konstanttermen är -10, så det är värt att testa med ± 1, ± 2, ± 5 och ± 10:

$$\begin{aligned} x = 1 :& 1^3 + 1^2 - 10 \cdot 1 - 10 = 1 + 1 - 10 - 10 \neq 0 \\ x = -1 :& (-1)^3 + (-1)^2 - 10 \cdot (-1) - 10 = -1 + 1 + 10 - 10 = 0 \end{aligned}$$

Vi har hittat ett nollställe till polynomet. Om a är ett nollställe så är $x - a$ en faktor, så vi kan bryta upp polynomet med hjälp av en polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\; x^2 \qquad\quad - 10 \\ \cline{2-2} x + 1) & x^3 + x^2 - 10x - 10 \\ & -x^3 - x^2 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad - 10x - 10 \\ & \qquad\quad\;\; 10x + 10 \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad\; 0 \end{array}$$

Så ekvationen kan skrivas $(x+1)(x^2-10) = 0$. De resterande lösningarna hör till ekvationen $x^2 - 10 = 0$, som ger

$$x^2 - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{10}$$

Rättningsnorm: Hittat nollställe: 1p. Korrekt polynomdivision: 1p. Hittat övriga nollställen: 1p.

6. Nedan har vi en bild av kurvan $y = f(x)$.

(a) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

Lösning:

Värdemängden blir de y-värden som finns på kurvan, vilket är allt mellan 1 (nedersta värdet) och 4 (översta värdet): $\mathcal{V}_f = [1,\ 4] = \{y : 1 \leq y \leq 4\}$ (markerat med rött i bilden).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Rita kurvan $y = f(2x)$. (1p)

Lösning:

Effekten av 2:an är att allt händer dubbelt så fort; det som tidigare inträffade vid $x = 2$ sker nu redan vid $x = 1$. Kurvan dras ihop med en faktor 2 horisontellt. Inritat med blått i bilden.

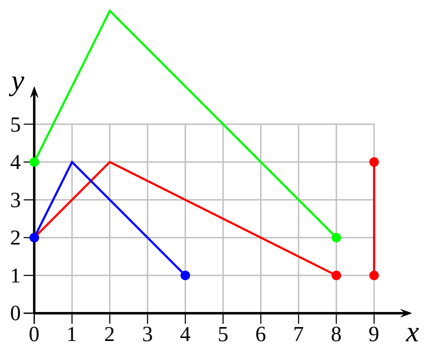
(c) Rita kurvan $y = 2f(x)$. (1p)

Lösning:

Effekten av 2:an är att det händer dubbelt så mycket; om y-värdet tidigare var 2 så blir det nu 4 istället. Kurvan dras ut med en faktor 2 vertikalt. Inritat med grönt i bilden.

Rättningsnorm: (Gäller både (b) och (c):) Ingen gradering, ingen poäng. Annars kan det nog bara bli rätt eller fel.

Koordinatsystemen måste vara graderade, annars går det inte att se att du tänkt rätt!



7. Hitta ett uttryck för funktionen vars graf är den ovan givna kurvan. (3p)

Lösning:

Kurvan består av bitar av två olika linjer. Linjerna har olika formler, så detta är en *styckvis definierad* funktion, med olika formler på olika intervall.

Första linjen kan direkt läsas ut som $y = x + 2$. Andra linjen går $1/2$ steg neråt på ett steg framåt, och förlänger man den till y-axeln så skär den på höjden 5. Den är alltså

$y = -\frac{1}{2}x + 5$. Första formeln gäller mellan $x = 0$ och $x = 2$, sedan tar man den andra formeln fram till $x = 8$, sedan slutar man. Så uttrycket är

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x + 5 & 2 < x \le 8 \end{cases}$$

Rättningsnorm: Visat att man förstår att det ska vara två olika formler: 1p. Korrekta formler med korrekta intervall: 2p, 1p vid något mindre fel.

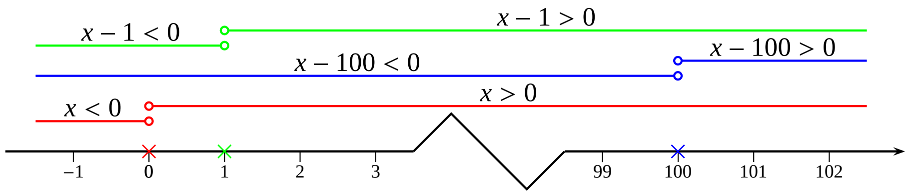
8. Lös följande olikhet: $x - 99 \le \dfrac{99}{x-1}$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: Skyffla över allt på ena sidan olikhetstecknet, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera.

$$\begin{aligned} x - 99 &\le \frac{99}{x-1} \\ x - 99 - \frac{99}{x-1} &\le 0 && \text{”flytta över”} \\ \frac{(x-99)(x-1) - 99}{x-1} &\le 0 && \text{upp på gemensamt bråkstreck} \\ \frac{x^2 - x - 99x + 99 - 99}{x-1} &\le 0 && \text{multiplicera ihop} \\ \frac{x^2 - 100x}{x-1} &\le 0 && \text{förenkla} \\ \frac{x(x-100)}{x-1} &\le 0 && \text{faktorisera} \end{aligned}$$

Teckenväxlingar i $x = 0$, $x = 100$ och $x = 1$, delar tallinjen i fyra delar:



Teckentabell:

	$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$1<x<100$	$x=100$	$x>100$
x	−	0	+	+	+	+	+
$x-100$	−	−	−	−	−	0	+
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{x(x-100)}{x-1}$	−	0	+	odef	−	0	+

Uttrycket skulle vara mindre än eller lika med noll, så lösningsmängden blir de två intervallen $x \le 0$ och $1 < x \le 100$.

Svar: $(-\infty,\ 0] \cup (1,\ 100]$

Rättningsnorm: Korrekt skrivit om uttrycket: 1p. Ställt upp en fungerande teckenanalys: 1p. Korrekt utläst svaret ur analysen: 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2016.09.28 14.30–17.30

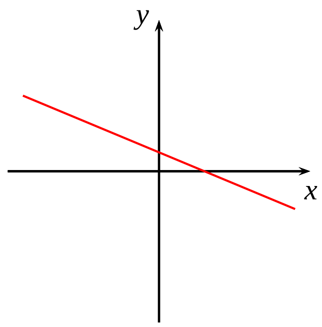
Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Här är en bild av en rät linje $y = kx + m$:



Eftersom koordinatsystemet saknar gradering kan man inte läsa ut all information om linjen, men en del saker kan man avgöra:

(a) Är k positiv eller negativ eller noll? Motivera! (1p)

Lösning:

Lutar neråt (ökar x så minskar y), så k är negativ.

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som motivering krävs för poäng.

(b) Är m positiv eller negativ eller noll? Motivera! (1p)

Lösning:

Skär y-axeln ovanför origo, vilket är i det positiva området, så m är positiv.

Rättningsnorm: Se (a).

(c) En annan linje passerar punkterna $(1, -4)$ och $(-9, 16)$. Vad har den linjen för riktningskoefficient? (1p)

Lösning:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4 - 16}{1 - (-9)} = \frac{-20}{10} = -2$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. Räkningarna är så pass enkla att slarvfel räknas som fel.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{7}{\frac{3}{10}+\frac{1}{6}} \cdot \frac{\frac{1}{5}-\frac{8}{15}}{4} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Kan göras på flera sätt, här visas två av dem:

Inifrån och ut:

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{9+5}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\cdot\cancel{2}}{15\cdot\cancel{2}}=\frac{7}{15}$$

$$\frac{7}{\frac{3}{10}+\frac{1}{6}}=\frac{7}{\frac{7}{15}}=\cancel{7}\cdot\frac{15}{\cancel{7}}=15$$

$$\frac{1}{5}-\frac{8}{15}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{8}{15}=\frac{3-8}{15}=\frac{-5}{15}=-\frac{\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{5}-\frac{8}{15}}{4}=\frac{-\frac{1}{3}}{4}=-\frac{1}{3\cdot 4}=-\frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{\frac{3}{10}+\frac{1}{6}}\cdot\frac{\frac{1}{5}-\frac{8}{15}}{4}=15\cdot(-\frac{1}{12})=-\frac{5\cdot\cancel{3}}{4\cdot\cancel{3}}=-\frac{5}{4}$$

Utifrån och in:

$$\frac{7}{\frac{3}{10}+\frac{1}{6}}\cdot\frac{\frac{1}{5}-\frac{8}{15}}{4}=\frac{7\cdot(\frac{1}{5}-\frac{8}{15})}{(\frac{3}{10}+\frac{1}{6})\cdot 4}=\frac{\frac{7\cdot 1}{5}-\frac{7\cdot 8}{15}}{\frac{3\cdot 4}{10}+\frac{1\cdot 4}{6}}=\frac{\frac{7}{5}-\frac{56}{15}}{\frac{3\cdot 2\cdot\cancel{2}}{5\cdot\cancel{2}}+\frac{2\cdot\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}}}$$

Om man observerar att minsta gemensamma nämnare för täljare och nämnare är $15 = 3\cdot 5$ kan man fortsätta

$$=\frac{(\frac{7}{5}-\frac{56}{15})\cdot 15}{(\frac{6}{5}+\frac{2}{3})\cdot 15}=\frac{\frac{7\cdot 3\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}-\frac{56\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}{\frac{6\cdot 3\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}+\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}}}=\frac{21-56}{18+10}=\frac{-35}{28}=-\frac{5\cdot\cancel{7}}{4\cdot\cancel{7}}=-\frac{5}{4}$$

Annars kan man sätta täljare och nämnare på gemensamma bråkstreck och så ”vända” nämnaren och förkorta.

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktig åtgärd och för varje nödvändig åtgärd som ej utförts. Att inte använda minsta gemensamma nämnare vid addition/subtraktion räknas som ett fel.

Kommentarer angående notation: En sådan här uträkning ska ha likhetstecken mellan stegen, eftersom poängen med den är att varje version av uttrycket är lika med den föregående. Vid multiplikation med negativa tal ska man sätta talet inom parentes om det står till höger om den andra faktorn. Använder man sneda bråkstreck kan man behöva lägga in ett antal parenteser för att visa beräkningsordning.

3. Lös ekvationen $\frac{2}{9^x-1}=1$. (3p)

Lösning:

Kan vinna på substitution:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{9^x - 1} &= 1 \\
\frac{2}{t-1} &= 1 && \text{sätt } 9^x = t \\
2 &= t - 1 && \text{multiplicera med } t-1, \underline{\text{kolla svaren}}! \\
t &= 3 && \text{addera 1} \\
9^x &= 9^{1/2} && \text{återsubstituera; skriv som potens} \\
x &= \tfrac{1}{2} && \text{samma bas, samma exponent}
\end{aligned}
$$

”Kolla svaren” var för att ”multiplikation med obekant” kan introducera falska rötter (eftersom det kan ta bort ”division-med-noll”-problematik). Men om $t = 3$ är $t - 1 \neq 0$, så det var inget problem i det här fallet.

Rättningsnorm: Kommit till rätt svar: 3p. Åtminstone gjort någonting konstruktivt: 1p. Största delen av en korrekt lösning: 2p.

Kommentarer angående notation: Skriver man beräkningen horisontellt så ska man ha med ekvivalenspilar mellan stegen. (Skriver man, som här, vertikalt så anses ekvivalensrelationen vara underförstådd.)

4. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{2 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 + 9 \cdot x - 6}{x^2 - 3 \cdot x + 1}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Division typsatt på amerikanska (eftersom jag har ett färdigt program som gör det och därför slipper göra det själv):

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 \qquad\quad - 2 \\
\hline
x^2 - 3x + 1) & 2x^4 - 6x^3 \qquad\quad + 9x - 6 \\
 & -2x^4 + 6x^3 - 2x^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad -2x^2 + 9x - 6 \\
 & \qquad\qquad\ \ 2x^2 - 6x + 2 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 3x - 4
\end{array}
$$

Kvoten är det högst upp, resten det längst ner.

Svar: Kvot $2 \cdot x^2 - 2$, rest $3 \cdot x - 4$

Rättningsnorm: Beräkning: 2p, 1p vid något mindre fel. Tydlig angivelse av svar: 1p.

5. **(a)** Förklara varför man aldrig ska multiplicera en olikhet med ett uttryck med okänt värde (som $x + 1$).

OBS! ”För att läraren sagt det” eller ”för att man ska göra så här i stället” är inte tillräckligt bra svar. Det måste framgå vad som är problemet med den här operationen. (1p)

Lösning:

Därför att olikheter ”vänds” om man multiplicerar med ett negativt värde (och blir till likheter om man multiplicerar med noll), så multiplicerar man med något med okänt tecken så vet man inte längre om man har ett *större än, mindre än* eller *lika med*. (Det går att hantera detta genom att dela upp problemet i flera separata fall, men det brukar vara ganska besvärligt.)

Rättningsnorm: Det måste framgå att man är medveten om att problemet är att relationen ändras om uttrycket inte är positivt.

(b) Bestäm alla x för vilka gäller $(1-2x)(x+2) > 0$ (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 2.16(b) ur *Mot bättre vetande*.

Den första faktorn byter tecken då $1-2\cdot x = 0$, dvs. vid $x = 1/2$. Den andra byter tecken då $x+2=0$, dvs. vid $x=-2$. Teckentabell:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<1/2$	$x=1/2$	$x>1/2$
$1-2\cdot x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(1-2\cdot x)\cdot(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(Multiplicerar man ihop parenteserna så får man ett andragradsuttryck med negativ andragradskoefficient, och det motsvarar då grafiskt en parabel med böjen uppåt. Detta intervall är det intervall där kurvan ligger ovanför x-axeln.)

Svar: $-2 < x < 1/2$

Rättningsnorm: Korrekt svar som stämmer med beräkning (eller motivering i ord): 2p. Korrekt beräkning utan klart angivet svar: 1p.

6. (a) Vilka tal ingår i den mängd som kallas de *naturliga talen*, $\mathbb{N}$? (1p)

Lösning:

Heltalen från 0 och uppåt; $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; alla tal som anger möjliga *antal*.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Är följande utsaga sann?

$$x \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x \not< 0$$

Motivera! (1p)

Lösning:

Det står ”om ett tal är naturligt så är det inte mindre än noll”. Det verkar stämma bra, eftersom de naturliga talen börjar vid noll.

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som en motivering: 1p. Om man på (a) påstod att de naturliga talen är något helt annat än vad de är så ska svaret här stämma med det man sa. Om man uppenbart tolkat symbolen $\not<$ som något annat än ”inte mindre än” så ger svar som stämmer med tolkningen 1p totalt för (b) och (c).

(c) Är följande utsaga sann?

$$x \not< 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{N}$$

Motivera! (1p)

Lösning:

Det står ”om ett tal inte är mindre än noll så är det naturligt”. Stämmer inte så bra; π är inte mindre än noll men är inte ett naturligt tal för det! (”Mindre-än”-relationen är definierad för de reella talen, så genom att använda den har man klargjort att man talar om reella tal. Men det finns ju reella tal mellan heltalspunkterna.)

Rättningsnorm: Se (b).

7. Faktorisera följande uttryck med hjälp av kvadratkomplettering:

$$-4{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x + 20$$

Inga andra metoder godtas! (3p)

Lösning:

Standardberäkning:

$$
\begin{aligned}
&-4{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x + 20 \\
&= -4{\cdot}(x^2 - \tfrac{1}{2}{\cdot}x - 5) && \text{bryt ut andragradskoefficienten} \\
&= -4{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}\tfrac{1}{4}{\cdot}x - 5) && \text{fixa 2:a på } x\text{-termen} \\
&= -4{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}\tfrac{1}{4}{\cdot}x + (\tfrac{1}{4})^2 - (\tfrac{1}{4})^2 - 5) && \text{lägg till / dra ifrån} \\
&= -4{\cdot}((x - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{16} - \tfrac{5\cdot 16}{16}) && \text{skriv som kvadrat; gör liknämnigt} \\
&= -4{\cdot}((x - \tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{81}{16}) && \text{Kvadratkompletterat!} \\
&= -4{\cdot}((x - \tfrac{1}{4})^2 - (\tfrac{9}{4})^2) && \text{skriv som kvadrat} \\
&= -4{\cdot}((x - \tfrac{1}{4}) + \tfrac{9}{4}){\cdot}((x - \tfrac{1}{4}) - \tfrac{9}{4}) && \text{konjugatregeln} \\
&= -4{\cdot}(x + \tfrac{8}{4}){\cdot}(x - \tfrac{10}{4}) && \text{Faktoriserat!} \\
&= -4{\cdot}(x + 2){\cdot}(x - \tfrac{5}{2}) && \text{förenkla}
\end{aligned}
$$

Rättningsnorm: 3p om man kommit ända till svar. 1p om man åtminstone gjort något konstruktivt. 2p för ”nästan rätt”. Annan metod är kvadratkomplettering: 0p.

Kommentarer angående notation: Precis som i bråkräkningsuppgiften ska man här ha likhetstecken mellan uttrycken, eftersom det handlar om att skriva om ett uttryck till en annan form med samma värde. Man får heller inte glömma parentesen då man bryter ut -4.

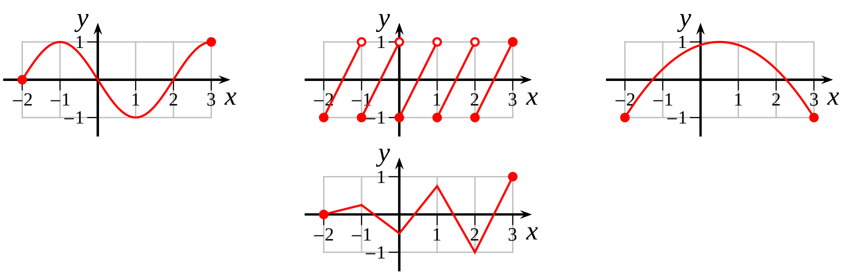
8. Rita ett graderat koordinatsystem. Rita i koordinatsystemet grafen för en funktion f vars definitionsmängd är intervallet $[-2,\ 3]$ och vars värdemängd är intervallet $[-1,\ 1]$. Skriv också hur man ser att funktionen verkligen har rätt definitions- och värdemängd.

(Uppgiften har många olika korrekta svar.) (3p)

Lösning:

Detta var tentans kreativa uppgift.

x-värdena ska alltså gå från -2 till 3 och y-värdena från -1 till 1. (Alla värden i intervallen ska användas, och inga värden som går utanför.) Absolut enklaste lösningen är att bara förbinda punkterna $(-2,\ -1)$ och $(3,\ 1)$ med en rät linje. Här är några andra varianter:



Det som krävs är att inget x är knutet till flera y (annars är det ingen funktion) och att man täcker upp rätt värden.

Rättningsnorm: Funktion: 1p. Definitionsmängd (med förklaring): 1p. Värdemängd (med förklaring): 1p.

9. (a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2016.12.02 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

För att visa hur frågorna relaterar till kursinnehållet finns på varje fråga angivet några av de punkter i studiehandledningen som frågan är kopplad till.

1. Förenkla följande potensuttyck maximalt:

$$\frac{(x^{-1}\cdot\sqrt[4]{y^2\cdot z})^3}{(x\cdot y^{1/2})^4\cdot z^{-1/4}}$$

Du kan utgå från att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

Det är bara att tillämpa potensregler:

$$\begin{aligned}
\frac{(x^{-1}\cdot\sqrt[4]{y^2\cdot z})^3}{(x\cdot y^{1/2})^4\cdot z^{-1/4}} &= \frac{(x^{-1}\cdot(y^2\cdot z)^{1/4})^3}{(x\cdot y^{1/2})^4\cdot z^{-1/4}} \\
&= \frac{x^{(-1)\cdot 3}\cdot(y^2\cdot z)^{(1/4)\cdot 3}}{x^4\cdot y^{(1/2)\cdot 4}\cdot z^{-1/4}} \\
&= \frac{x^{-3}\cdot(y^2\cdot z)^{3/4}}{x^4\cdot y^2\cdot z^{-1/4}} \\
&= \frac{x^{-3}\cdot y^{2\cdot 3/4}\cdot z^{3/4}}{x^4\cdot y^2\cdot z^{-1/4}} \\
&= \frac{x^{-3}\cdot y^{3/2}\cdot z^{3/4}}{x^4\cdot y^2\cdot z^{-1/4}} \\
&= x^{-3-4}\cdot y^{(3/2)-2}\cdot z^{(3/4)-(-1/4)} \\
&= x^{-7}\cdot y^{-1/2}\cdot z \\
&= \frac{z}{x^7\cdot\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

Det beror lite på tillämpning vilket av de två sista uttrycken som är att anse som ”bäst”.

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna.

Rättningsnorm: Starta med 3p och stryk 1p för varje enskilt fel och varje nödvändig åtgärd som inte utförts, och stanna när poängen är nere på noll. Även ”slarvfel” i exponenterna räknas som fel.

2. (a) Förklara vad som menas med en *falsk rot* till en ekvation. (1p)

Lösning:

En beräknad lösning som inte passar i ekvationen, inte därför att man räknat fel utan för att man använt operationer som ger en ny ekvation med fler lösningar än den gamla.

Mål: **Du ska kunna förklara vad följande betyder**: • Falsk rot

Rättningsnorm: Det ska på något sätt framgå att det inte är vanlig felräkning som orsakat problemet, men svaren tolkas välvilligt.

(b) Lös ekvationen $\sqrt{x+4} = \frac{1}{2}\cdot x + 2$. (2p)

Lösning:

Beräkningslösning: Denna ekvation verkar fordra att vi kvadrerar, vilket är en operation som kan ge falska rötter (eftersom två tal kan ha samma kvadrat utan att vara lika).

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= \tfrac{1}{2}\cdot x + 2 \\
(\sqrt{x+4})^2 &= (\tfrac{1}{2}\cdot x + 2)^2 && \text{kvadrera; Kolla svaren!} \\
x + 4 &= (\tfrac{1}{2}\cdot x)^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x\cdot 2 + 2^2 && \text{1:a kvadreringsregeln} \\
x + 4 &= \tfrac{1}{4}\cdot x^2 + 2\cdot x + 4 && \text{räkna ut sifferuttrycken} \\
0 &= \tfrac{1}{4}\cdot x^2 + x && \text{”flytta över”} \\
0 &= x\cdot(\tfrac{1}{4}\cdot x + 1) && \text{faktorisera}
\end{aligned}$$

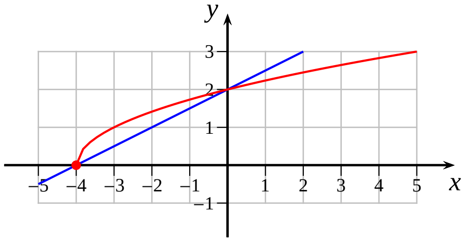
Nollfaktorlagen ger att vi har lösningarna $x = 0$ och $\frac{1}{4}\cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4$. Nu kontrollen:

$$x = 0: \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{HL} = \frac{1}{2}\cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$$x = -4: \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{-4+4} = \sqrt{0} = 0 \\ \text{HL} = \frac{1}{2}\cdot(-4) + 2 = -2 + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

Ingen av rötterna var falsk. (Notera att kvadrering *kan* introducera falska rötter; det är inte *säkert* att det gör det.)

Grafisk lösning: Båda led ger kurvor som vi vet hur de ser ut och som är lätta att rita. $y = \sqrt{x+4}$ är den vanliga rotkurvan flyttad 4 steg åt vänster; $y = \frac{1}{2}\cdot x + 2$ är en rät linje som skär y-axeln på höjden 2 och som har lutning $\frac{1}{2}$ (så att ett steg framåt ger ett halvt steg uppåt). Uppritat blir detta:

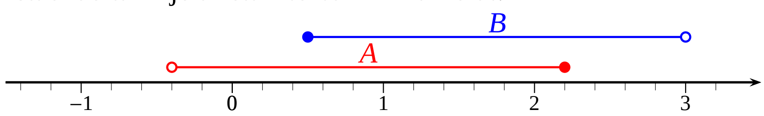


Vi ser att det finns exakt två skärningspunkter, och deras koordinater kan avläsas och kontrolleras på samma sätt som i beräkningslösningen.

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna. . . • Avgöra om något är en lösning till en ekvation. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter.

Rättningsnorm: Korrekt beräkningslösning med kontoll: 2p. Lätt felräknad beräkningslösning med kontroll och korrekt beräkningslösning utan kontroll: 1p. Grafisk lösning med kontroll: 2p, utan kontroll: 1p.

3. På nedanstående tallinje är ett intervall A markerat:



(a) Skriv intervall A med intervallbeteckningar. (1p)

Lösning:

Anm. Poängen för fråga (a) hade av misstag skrivits på instruktionerna till fråga (b) och (c). Om det verkar som att någon skrivande till följd av detta missförstått frågan får vi bedöma detta från fall till fall.

Området mellan heltalen är delat i fem delar, så varje liten markering motsvarar $1/5 = 0{,}2$ steg. Det startar vid $-0{,}4$ och slutat vid $2{,}2$. Öppen ring i början: denna ändpunkt ingår ej. Sluten punkt i andra ändan: denna ändpunkt ingår. ”Intervallbeteckningar” är de där parenteserna med vänster och höger ändpunkt innanför. (Eftersom vi inte understrukit att det är dessa beteckningar som kallas intervallbeteckningar har godtar vi även korrekta mängdbeteckningar som svar.)

Svar: $(-0{,}4,\ 2{,}2]$

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt.

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

Vi har också ett intervall $B = \{x \mid 0{,}5 \leq x < 3\}$. ~~(1p)~~

(b) Bestäm $A \cup B$. (1p)

Lösning:

Till både denna och nästa uppgift:

Intervall B är inritat i bilden i blått. Unionen av intervallen är det område som täcks in av intervallen tillsammans:

$$A \cup B = \{x \mid -0{,}4 < x < 3\} = (-0{,}4,\ 3)$$

Snittet är det område som ingår i båda intervallen:

$$A \cap B = \{x \mid 0{,}5 \leq x \leq 2{,}2\} = [0{,}5,\ 2{,}2]$$

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Tolka en enkel mängdbeskrivning. • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p, dock inga avdrag för följdfel från (a). Har man kastat om union och snitt men i övrigt gjort rätt ges 1p för (b) och (c). Om man på (a) visat att man inte kan tolka illustrationer korrekt kan inte poäng ges för illustrationer; det går inte att ur det se att den skrivande menar rätt.

(c) Bestäm $A \cap B$. (1p)

På (b) och (c) spelar det ingen roll hur du väljer att beskriva svaret, bara det går att tolka vad du menar.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{1/10 - 4/15}{1/3 + 2/9}$$ (3p)

Lösning:

Bråket blir mer läsbart skrivet så här:

$$\frac{\frac{1}{10}-\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}$$

En bit i taget: Förenkla täljare och nämnare för sig, och sätt sedan ihop helheten.

Täljaren:

$$\frac{1}{10}-\frac{4}{15}=\frac{1\cdot 3}{10\cdot 3}-\frac{4\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{3-8}{30}=\frac{-\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 6}=-\frac{1}{6}$$

Nämnaren:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}+\frac{2}{9}=\frac{3+2}{9}=\frac{5}{9}$$

Helheten

$$\frac{\frac{1}{10}-\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}=\frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{9}}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{9}{5}=-\frac{3\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}\cdot 5}=-\frac{3}{10}$$

Allt på en gång: Minsta gemensamma nämnare för samtliga bråk är $90 = 9\cdot 10 = 6\cdot 15 = 3\cdot 30$. Förläng med den:

$$\frac{\frac{1}{10}-\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}}=\frac{\left(\frac{1}{10}-\frac{4}{15}\right)\cdot 90}{\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)\cdot 90}=\frac{\frac{1\cdot 9\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}-\frac{4\cdot 6\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}{\frac{\cancel{3}\cdot 30}{\cancel{3}}+\frac{2\cdot\cancel{9}\cdot 10}{\cancel{9}}}$$

$$=\frac{9-24}{30+20}=\frac{-15}{50}=-\frac{3\cdot\cancel{5}}{10\cdot\cancel{5}}=-\frac{3}{10}$$

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som +, −, · och /) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Korrekt tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning.

Rättningsnorm: Starta med 3p och stryk 1p för varje enskilt fel och varje nödvändig åtgärd som inte utförts, och stanna när poängen är nere på noll. Även ”slarvfel” och att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som fel.

5. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet.

$$x^2+\tfrac{2}{5}\cdot x+y^2-\tfrac{1}{5}\cdot y-\tfrac{1}{5}=0$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettera:

$$x^2+\tfrac{2}{5}\cdot x+y^2-\tfrac{1}{5}\cdot y-\tfrac{1}{5}=0$$

$$x^2+2\cdot\tfrac{1}{5}\cdot x+(\tfrac{1}{5})^2-(\tfrac{1}{5})^2$$
$$+y^2-2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot y+(\tfrac{1}{10})^2-(\tfrac{1}{10})^2-\tfrac{1}{5}=0 \qquad \text{kvadratkomplettera}$$

$$(x+\tfrac{1}{5})^2+(y-\tfrac{1}{10})^2-\tfrac{1\cdot 4}{25\cdot 4}-\tfrac{1}{100}-\tfrac{1\cdot 20}{5\cdot 20}=0 \qquad \text{skriv som kvadrater; gör liknämnigt}$$
$$(x+\tfrac{1}{5})^2+(y-\tfrac{1}{10})^2=\tfrac{4+1+20}{100} \qquad \text{gem. bråkstreck; ”flytta över”}$$
$$(x+\tfrac{1}{5})^2+(y-\tfrac{1}{10})^2=\tfrac{25}{4\cdot 25} \qquad \text{addera; faktorisera}$$
$$(x-(-\tfrac{1}{5}))^2+(y-\tfrac{1}{10})^2=(\tfrac{1}{2})^2 \qquad \text{skriv på standardform}$$

Ekvationen för en cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r i ett ortonormerat koordinatsystem kan skrivas $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, och jämför vi med den omskrivna ekvationen har vi

Svar: medelpunkt $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{10})$, radie $\frac{1}{2}$ längdenheter

Kommentar: Observera att ekvationen *inte* kan förenklas till $(x-(-\frac{1}{5}))+(y-\frac{1}{10})=\frac{1}{2}$, ett uttryck som beskriver en rät linje. (Det finns ingen operation som kan göras på de två leden som ger detta resultat.)

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering.

Rättningsnorm: Helt rätt, med svar tydligt angivet (och ingen omskrivning till rät linje): 3p. Mindre fel i beräkningarna, inget svar alternativt omskrivning till linje: 2p. Mer fel än så, men fortfarande med klar indikation av att man vet vad som ska göras: 1p.

6. Bestäm definitionsmängden för funktionen f, då

$$f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{3\cdot x+4}} \qquad (3p)$$

Lösning:

Beräkningen innehåller addition, subtraktion, multiplikation, division samt rotutdragning. De tre första räknesätten ger inga restriktioner, men man kan inte dividera med noll och man kan inte dra roten ur negativa tal. Definitionsmängden för funktionen är lika med lösningsmängden till olikheten

$$\frac{2-x}{3\cdot x+4}\geq 0$$

(Olikheten är formulerad för att rotberäkningen ska fungera, men den tar hand om division-med-noll samtidigt, för ett villkor för att något ska kunna vara icke-negativt är att det över huvud taget existerar.) Som uttrycket är skrivet behövs inga större uträkningar, utan man kan gå direkt på teckentabell. Täljaren blir noll då $x=2$, nämnaren blir noll då $x=-4/3$, $-4/3$ ligger till vänster om 2:

	$x<-4/3$	$x=-4/3$	$-4/3<x<2$	$x=2$	$x>2$
$2-x$	+	+	+	0	−
$3\cdot x+4$	−	0	+	+	+
$\frac{2-x}{3\cdot x+4}$	−	odef	+	0	−

Definitionsmängden för olikheten är intervallet $-4/3<x\leq 2$.

Svar: $\mathcal{D}_f=(-4/3, 2]$

Mål: **Du ska kunna förklara vad följande betyder**: • Definitionsmängd **Du ska kunna göra följande**: • Bestämma definitionsmängden för en enkel funktion ur beräkningsformeln. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck.

Rättningsnorm: Korrekt analys som slutar i ett entydigt tolkbart korrekt svar: 3p. Något grej fel: 2p. Mer fel än så, men åtminstone visat att man förstått vad som ska göras: 1p.

7. Bestäm alla rötter till ekvationen $x^3+6x^2+11x+6=0$ (3p)

Lösning:

Detta var en av förra årets rekommenderade uppgifter: 3.7 ur *Kompletterande kompendium*. (Det verkade rättvist att ta en rekommenderad uppgift ur förra årets material och en ur det här årets material.)

Omformulering: Frågan kan lika gärna formuleras som ”bestäm samtliga nollställen till polynomet $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$”, och det kan leda tankarna åt rätt håll.

Inledning: Polynomet (kalla det $p(x)$) har udda grad och reella koefficienter, så det ska finnas minst ett reellt nollställe. Graden är tre, så det finns högst tre nollställen. Koefficienterna är heltal, så *om* det finns ett heltalsnollställe *så* är detta en faktor i konstantermen 6. Vi kan prova med alla tänkbara faktorer: ±1, ±2, ±3, ±6.

$$p(1) = 1^3 + 6\cdot 1^2 + 11\cdot 1 + 6 = 1 + 6 + 11 + 6 \neq 0$$
$$p(-1) = (-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 + 11\cdot(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$$

Så en rot till ekvationen är $x = -1$. Vi kan fortsätta och testa de andra också, men det finns alternativ:

Polynomdivision: Eftersom -1 är ett nollställe så är $x + 1$ en faktor i polynomet, och dividerar vi får vi kvar en andragradare (som vi vet hur man faktoriserar):

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad + 5x + 6 \\
\hline
x + 1) & x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
 & -x^3 \;\; - x^2 \\
\hline
 & \quad 5x^2 + 11x \\
 & \quad -5x^2 \;\; - 5x \\
\hline
 & \qquad\quad 6x + 6 \\
 & \qquad\quad -6x - 6 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Divisionen är typsatt enligt amerikansk standard, eftersom jag har ett färdigt program som gör detta.

Nu faktoriserar vi kvoten:

$$\begin{aligned}
x^2 + 5\cdot x + 6 &= x^2 + 2\cdot 2{,}5\cdot x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 + 6 && \text{kvadratkomplettera}\\
&= (x + 2{,}5)^2 - 6{,}25 + 6 && \text{skriv som kvadrat}\\
&= (x + 2{,}5)^2 - 0{,}5^2 && \text{skriv som kvadrat}\\
&= (x + 2{,}5 + 0{,}5)\cdot(x + 2{,}5 - 0{,}5) && \text{konjugatregeln}\\
&= (x + 3)\cdot(x + 2) && \text{förenkla}
\end{aligned}$$

Med de här faktorerna är nollställena -2 och -3.

Svar: $\{-1, -2, -3\}$

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Avgöra om något är en lösning till en ekvation.

Rättningsnorm: På den här uppgiften får ”testa sig fram” betraktas som en acceptabel metod, förutsatt att man påpekar att mer än tre svar inte kan finnas. Poäng efter hur stor del av en fungerande lösning man åstadkommit.

8. **(a)** Vad menas med *lösningsmängden* till en olikhet? (Vi vill ha definitionen av begreppet.) (1p)

Lösning:

Den mängd värden som insatta på variabelns plats i olikheten ger en sann utsaga.

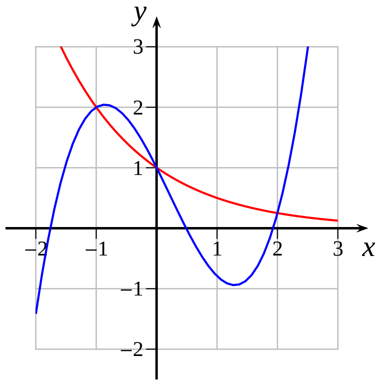
Mål: **Du ska kunna förklara vad följande betyder**: • Lösningsmängd

Rättningsnorm: Svaren tolkas välvilligt.

(b) I nedanstående bild finns kurvorna $y = 2^{-x}$ och $y = \frac{29}{48}\cdot x^3 - \frac{19}{48}\cdot x^2 - 2\cdot x + 1$. Lös med hjälp av bilden olikheten

$$2^{-x} < \frac{29}{48}\cdot x^3 - \frac{19}{48}\cdot x^2 - 2\cdot x - 1 \quad \text{feltryck, ska vara +}$$

(Det är alltså *inte* meningen att du ska räkna ut något! Svaret kan läsas ut ur bilden, men du ska förklara hur du ser vad det är.) (2p)



Lösning:

Detta var uppgift 9.4 ur *Grundlig matematik*, en av detta läsårs rekommenderade uppgifter.

Det var ett feltryck i frågan, men det verkar inte ha ställt till med några oklarheter i lösningarna; de som upptäckte feltrycket utgick från att det var ett feltryck.

Den bågformade kurvan är exponentialfunktionen, den slingrande polynomet. (Exponentialfunktionen kan inte bli negativ, så den kan inte vara den slingrande kurvan.) Vi vill veta var värdet på exponentialuttrycket är *lägre* är på polynomet. Bågen ligger lägre än den slingrande kurvan mellan $x = -1$ och $x = 0$ samt efter $x = 2$.

Svar: $(-1,\ 0) \cup (2,\ \infty)$.

Mål: **Du ska kunna göra följande**: • Tolka en olikhet grafiskt.

Rättningsnorm: 0p om man bara anger skärningspunkternas koordinater, för det visar att man inte förstår frågeställningen. 1p om man tagit fel på vilken kurva som är vilken, eller på innebörden i $<$.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2017.01.03 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

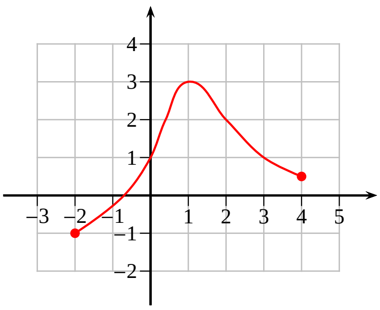
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Det intryck jag fick då jag rättade tentan var "pluggat för lite", så jag har på de flesta uppgifterna gett exempel på vad i det anvisade kursmaterialet som tagit upp uppgifter av den givna typen. Det kan visa på vad det är man ska läsa inför en sådan här tenta.

1. Grafen för en funktion f är given nedan:



(a) Ange värdet på $f(1)$. (1p)

(b) För vilka värden på x är $f(x) = 1$? (1p)

(c) Ange f:s värdemängd. (1p)

Lösning:

Uppgiften är tagen från förra läsårets rekommenderade uppgifter: uppgift 1.1.3 ur *Calculus* av Stewart.

(a) Då $x = 1$ så ser det ut som att $\underline{y = 3}$.

(b) y-värdet är 1 då $\underline{x = 0}$ samt då $\underline{x = 3}$.

(c) Lägsta värdet på kurvan är $y = -1$ och högsta värdet $y = 3$, och alla värden däremellan finns med på kurvan. Så värdemängden är $\{y \mid -1 \le y \le 3\}$ eller med intervallbeteckningar $\underline{[-1,\ 3]}$.

Referenser: För "äldre" studenter var det en rekommenderad uppgift. (a) och (b)-uppgiften kan också anses ingå i alla exempel och uppgifter som innehåller både värdetabeller och grafer. (c)-uppgiften matchar årets inlämningsuppgift 1.5(c).

Rättningsnorm: Eftersom det står "ange" i frågan så accepteras att man bara anger svaret utan motivering.

2. Bestäm lägsta värdet för nedanstående andragradsuttryck.

$$16{\cdot}x^2 - 24{\cdot}x + 25$$

OBS! Derivataresonemang får ej användas. (3p)

Lösning:

Den efterfrågade informationen går att läsa ut ur den kvadratkompletterade formen:

$$\begin{aligned}
16{\cdot}x^2 - 24{\cdot}x + 25 &= 16{\cdot}(x^2 - \tfrac{24}{16}{\cdot}x + \tfrac{25}{16}) \\
&= 16{\cdot}(x^2 - \tfrac{3}{2}{\cdot}x + \tfrac{25}{16}) \\
&= 16{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}\tfrac{3}{4}{\cdot}x + (\tfrac{3}{4})^2 - (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{25}{16}) \\
&= 16{\cdot}((x - \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{9}{16} + \tfrac{25}{16}) \\
&= 16{\cdot}((x - \tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{16}{16}) \\
&= 16{\cdot}((x - \tfrac{3}{4})^2 + 1) \\
&= 16{\cdot}(x - \tfrac{3}{4})^2 + 16
\end{aligned}$$

Det lägsta värdet kvadratuttrycket $(x - \frac{3}{4})^2$ kan anta är 0, och detta gör att det lägsta värde uttrycket som helhet kan anta är 16 (och detta värde antas då $x = \frac{3}{4}$). Notera för övrigt att räkningarna blir väldigt besvärliga om man inte förkortar 24/16 innan man går vidare. Det går att undvika bråkräkning om man istället gör så här:

$$\begin{aligned}
16{\cdot}x^2 - 24{\cdot}x + 25 &= (4{\cdot}x)^2 - 6{\cdot}(4{\cdot}x) + 25 \\
&= (4{\cdot}x)^2 - 2{\cdot}3{\cdot}(4{\cdot}x) + 3^2 - 3^2 + 25 \\
&= (4{\cdot}x - 3)^2 - 9 + 25 \\
&= (4{\cdot}x - 3)^2 + 16
\end{aligned}$$

Svar: Lägsta värdet är 16.

Kommentar: Söker man extremvärdet genom att ställa upp en värdetabell beräknad för heltals-x så kommer man inte att hitta det, eftersom det inte antas i en heltalspunkt. Inte heller får man någon uppenbar symmetri (så att man kan utläsa att extremvädrdet bör antas mitt emellan två punkter), eftersom symmetrilinjen inte ligger symmetriskt bland heltalen. Vill man utnyttja att extremvärdet infaller mitt emellan nollställena får man också problem, eftersom reella nollställen saknas. Till skillnad från de här uppräknade metoderna så fungerar metoden med kvadratkomplettering *alltid*. (Derivataresonemang fungerar också alltid, för övrigt.)

Notation: Eftersom man håller på att skriva om formeln till något som ger *samma* värde (men med en mer lättanalyserad beräkning) ska det vara likhetstecken mellan stegen.

Referenser: Innehållsmässigt motsvarar uppgiften inlämningsuppgift 2.1(b), metod 6.2 i *Grundlig matematik* samt ett stor antal rekommenderade uppgifter.

Rättningsnorm: Kvadratkompletteringen: 2p. Utläsning av svaret: 1p. Svar som är lägsta värdet från en värdetabell med heltal får 0p.

3. Vilka av följande utsagor är sanna? Motivera kortfattat!

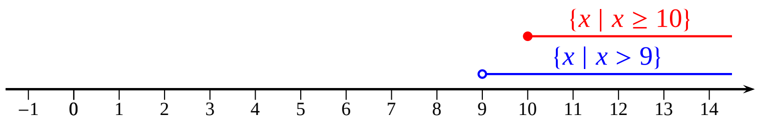
(a) $x > 9 \quad \Rightarrow \quad x \geq 10$ (1p)

(b) $x > 9 \quad \Leftarrow \quad x \geq 10$ (1p)

(c) $x > 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 10$ (1p)

Lösning:

En implikation är sann om sanning vid pilens början garanterar sanning vid pilens slut.



(a) ”Om ett tal är större än 9 så är det minst 10”. Inte sant, för det finns massor av tal mellan 9 och 10. Exempelvis är ”$9{,}1 > 9$ sant medan ”$9{,}1 \geq 10$” är falskt. Och för att en implikation ska räknas som sann ska det vara omöjligt att göra förledet sant samtidigt som efterledet är falskt.

(b) ”Om ett tal är minst 10 så är det större än 9”. Stämmer bra, alla tal från 10 och uppåt ligger till höger om 9 på tallinjen.

(c) För att ekvivalens ska råda måste man ha implikation åt båda hållen, och det har vi inte här. Inte sant, alltså.

Notera att om det dessutom varit givet att man arbetar med *heltal* skulle utsagorna allihop vara sanna!

Referenser: Uppgiften kombinerar talbegreppet och grundläggande logik. Det verkar inte finnas något rekommenderat som exakt motsvarar denna kombination; däremot mycket som tar upp begreppen var för sig.

Rättningsnorm: Ingen motivering – ingen poäng. Om man ansåg att (a) är sann ska även (c) klassas som sann för poäng.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\Big/\left(\frac{5}{6} - \frac{9}{10}\right) \qquad (3p)$$

Lösning:

Detta är detta läsårs rekommenderade uppgift 3.19(c) i *Grundlig matematik*.

Bråk blir till att börja med lättare att överblicka om man enbart använder horisontella bråkstreck:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{8}\Big/\left(\frac{5}{6} - \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{4} + \frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6} - \frac{9}{10}}$$

Observera prioritetsordningen: division går före addition! Nu kan man gå vidare på ett par olika sätt:

Steg för steg:
Nämnaren i andra bråket:

$$\frac{5}{6} - \frac{9}{10} = \frac{5\cdot 5}{6\cdot 5} - \frac{9\cdot 3}{10\cdot 3} = \frac{25-27}{30} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 15} = -\frac{1}{15}$$

Andra bråket:

$$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6} - \frac{9}{10}} = \frac{\frac{7}{8}}{-\frac{1}{15}} = \frac{7}{8}\cdot(-15) = -\frac{7\cdot 15}{8} = -\frac{105}{8}$$

Helheten:

$$\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{9}{10}}=\frac{3}{4}+\left(-\frac{105}{8}\right)=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}-\frac{105}{8}=\frac{6-105}{8}=-\frac{99}{8}$$

Allt på en gång: Minsta gemensamma nämnare för alla bråken i dubbelbråket är $120 = 8\cdot 15 = 6\cdot 20 = 10\cdot 12$. Förlänger vi med den och förkortar plattar bråket ut sig:

$$\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{9}{10}}=\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{8}\cdot 120}{\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{10}\right)\cdot 120}=\frac{3}{4}+\frac{\frac{7\cdot\cancel{8}\cdot 15}{\cancel{8}}}{\frac{5\cdot\cancel{6}\cdot 20}{\cancel{6}}-\frac{9\cdot\cancel{10}\cdot 12}{\cancel{10}}}$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{105}{100-108}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}-\frac{105}{8}=\frac{6-105}{8}=-\frac{99}{8}$$

Notation: Eftersom poängen med alla omskrivningarna är att man ska få ett uttryck som representerar *samma* tal, fast skrivet på en mer lättanalyserad form, ska det vara likhetstecken mellan alla stegen i beräkningarna. (Däremot ska man ju inte ha likhetstecken mellan de olika delberäkningarna i steg-för-steg-metoden, eftersom t.ex. nämnaren i bråket inte är lika med bråket som helhet.)

Referenser: Detta var som sagt en rekommenderad uppgift, det vill säga något som man antas ha räknat igenom tidigare.

Rättningsnorm: Starta med 3p och stryk 1p för varje enskilt fel och varje nödvändig åtgärd som inte utförts, och stanna när poängen är nere på noll. Även ”slarvfel” och att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som fel.

5. **(a)** Förklara varför operationen *kvadrering* kan leda till falska rötter vid ekvationslösning.

(b) Förklara varför operationen *kvadratkomplettering* <u>inte</u> kan leda till falska rötter vid ekvationslösning.

Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

Problemet med kvadrering är att två tal kan vara olika men ändå ha samma kvadrat. Så om det finns ett ”x” som insatt ger att VL $= -$HL så kommer efter kvadrering $(\mathrm{VL})^2 = (-\mathrm{HL})^2$, vilket blir samma sak som $\mathrm{VL}^2 = \mathrm{HL}^2$. Detta värde på x är då en lösning till den kvadrerade ekvationen, men inte till den ekvation som man hade från början.

Kvadratkomplettering innebär att man skriver om något på ett annat format utan att ändra på dess värde, och det innebär att de ”x” som passar in efter omskrivningen också passade in innan omskrivningen. (Visst kan man få falska rötter vid en ekvationslösning som innefattar kvadratkomplettering, men det är då inte kvadratkompletteringen som *orsakat* de falska rötterna, utan de kommer från någon annan operation.)

Kommentar: På decembertentan hade ett mycket stort antal skrivande angett kvadratkomplettering som en trolig orsak till falska rötter. Detta är alltså inte korrekt.

Referenser: Komplikationerna vid kvadrering tas upp i metod 8.9 i *Grundlig matematik*, och ingick också i inlämningsuppgift 2.3. Analysen av kvadratkompletteringen fordrar väl visst självständigt tänkande.

Rättningsnorm: Svårt att förutse hur svaren kommer att se ut, så normen får författas i efterhand.

6. Lös olikheten $2\cdot x \le \dfrac{51\cdot x}{x+25}$. (3p)

Lösning:

Standardtaktik: Skyffla över allt på ena sidan tecknet (så att man får en nolla på andra sidan), sätt på gemensamt bråkstreck och faktorisera:

$$\begin{aligned} 2{\cdot}x &\le \frac{51{\cdot}x}{x+25} \\ 2{\cdot}x - \frac{51{\cdot}x}{x+25} &\le 0 \\ \frac{2{\cdot}x{\cdot}(x+25)}{x+25} - \frac{51{\cdot}x}{x+25} &\le 0 \\ \frac{2{\cdot}x^2 + 50{\cdot}x - 51{\cdot}x}{x+25} &\le 0 \\ \frac{2{\cdot}x^2 - x}{x+25} &\le 0 \\ \frac{2{\cdot}x{\cdot}(x - 1/2)}{x+25} &\le 0 \end{aligned}$$

Notera att det inte behövs någon kvadratkomplettering för att faktorisera täljaren. Kvadratkomplettering kan användas för att skriva om uttryck till en form som är lättare att faktorisera, men det här var redan så lätt som det kunde bli!

Teckenskiften sker då $2{\cdot}x = 0$, $x - 1/2 = 0$ och då $x + 25 = 0$, det vill säga vid 0, $1/2$ och -25. Dessa tre punkter delar upp tallinjen i fyra delintervall. Teckentabell:

	$x < -25$	$x = -25$	$-25 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$2{\cdot}x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1/2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 25$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{2{\cdot}x{\cdot}(x-1/2)}{x+25}$	$-$	odef	$+$	0	$-$	0	$+$

Uttrycket skulle vara mindre än eller lika med noll, vilket det är innan -25 och mellan 0 och $1/2$.

Svar: $\{x \mid x < -25 \;\vee\; 0 \le x \le 1/2\} = (-\infty,\ -25) \cup [0,\ 1/2]$.

Kommentar: ☠ Om man försöker undersöka olikheten genom att göra ett teckenstudium för alla heltal inom det intervall man kommit fram till är relevant får man här skriva *väldigt* mycket, och man kommer ändå att missa vad som händer i området mellan 0 och $1/2$. (Detta är en mycker vanlig missuppfattning om hur teckenstudium ska genomföras.)

Referenser: Motsvarar bland annat exempel 9.4 i *Grundlig matematik* och inlämningsuppgift 2.4 samt ett större antal rekommenderade uppgifter.

Rättningsnorm: Omskrivningar: 1p. Teckenstudium: 1p. Klart och tydligt svar som överensstämmer med studiet: 1p.

7. (a) Skissa kurvan $y = 3^x$ i ett graderat koordinatsystem. (1p)

(b) Rita linjen $y = \frac{1}{2}{\cdot}x + 2$ i samma koordinatsystem. (1p)

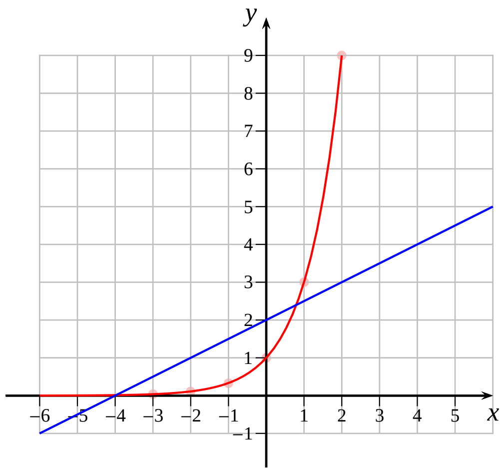
(c) Hur många lösningar har ekvationen $3^x = \frac{1}{2}{\cdot}x + 2$? Obs! Du ska inte räkna ut lösningarna. Däremot ska du förklara hur du vet hur många de är. (1p)

Lösning:

För exponentialfunktionen kan man starta med en värdetabell:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$1/27$	$1/9$	$1/3$	1	3	9	27

(Detta är ungefär enda situationen där en räkning på en sekvens heltalsvärden är vettig att göra.) Linjen skär y-axeln vid $y = 2$ och går 0,5 steg uppåt för varje steg framåt, vilket blir en ruta uppåt på två rutor framåt, och behöver ingen tabell för ritningen. I ett rimligt stort koordinatsystem får vi



Det finns helt klart två skärningspunkter (en nära $x = -4$ och en mellan 0 och 1), men inte mer än så, så ekvationen har exakt två lösningar.

Referenser: Ritning av exponentialkurvan motsvarar grafritning i allmänhet, avsnitt 4.4.i i *Grundlig matematik*, och också avsnitt 5.3.2 (som behandlar exponentialfunktioner). Linjen tas upp i metod 4.3. Utläsande av antal lösningar till ekvationen gås igenom i metod 8.2. Grafisk ekvationslösning fanns också med i inlämningsuppgift 2.3.

Rättningsnorm: (a) Kurva med rätt form som startar utmed x-axeln och passerar punkterna $(0, 1)$ och $(1, 3)$ får poäng. (b) Helt rätt krävs för poäng. (c) Motiverat svar konsistent med ritad bild får poäng.

8. Lös ekvationen $100^x - 11 \cdot 10^{x-1} + \dfrac{1}{10} = 0$.

(Tips: använd substitution) (3p)

Lösning:

Verkar som att 10^x finns på flera ställen. Fall för substitution:

$$
\begin{aligned}
100^x - 11 \cdot 10^{x-1} + \frac{1}{10} &= 0 \\
(10^2)^x - 11 \cdot 10^x \cdot 10^{-1} + \frac{1}{10} &= 0 \\
(10^x)^2 - \frac{11}{10} \cdot 10^x + \frac{1}{10} &= 0 \qquad \text{Sätt } 10^x = t \\
t^2 - \frac{11}{10}t + \frac{1}{10} &= 0 \\
t^2 - 2 \cdot \frac{11}{20}t + \left(\frac{11}{20}\right)^2 - \left(\frac{11}{20}\right)^2 + \frac{1}{10} &= 0 \\
\left(t - \frac{11}{20}\right)^2 - \frac{121}{400} + \frac{40}{400} &= 0 \\
\left(t - \frac{11}{20}\right)^2 &= \frac{81}{400} \\
\left(t - \frac{11}{20}\right)^2 &= \left(\frac{9}{20}\right)^2 \\
t &= \frac{11}{20} \pm \frac{9}{20} \\
t = \frac{20}{20} \quad &\vee \quad t = \frac{2}{20} \\
10^x = 1 \quad & \quad 10^x = \frac{1}{10} \\
10^x = 10^0 \quad & \quad 10^x = 10^{-1} \\
x = 0 \quad & \quad x = -1
\end{aligned}
$$

Referenser: Motsvarar exempel 8.6 och rekommenderad uppgift 8.9 i *Grundlig matematik* med utbytta siffror. (För tidigare läsårs studenter motsvarar den dessutom direkt en av inlämningsuppgifterna.)

Rättningsnorm: Substitution: 1p. Kvadratkomplettering: 1p. Svar: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2017.06.07 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

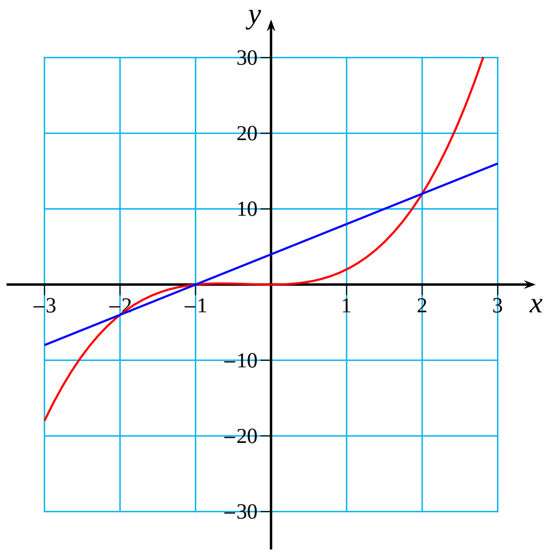
1. (a) Varför bör man inte multiplicera en olikhet med något med okänt värde? (1p)

Lösning:

Därför att olikheten ska vändas om den multipliceras med något som är negativt, och känner man inte till värdet så vet man förmodligen inte heller om det är positivt eller negativt, och då vet man efter multiplikationen inte längre om man har $<$ eller $>$.

Rättningsnorm: Det måste framgå att man då inte vet vad för slags olikhet man har.

(b) I koordinatsystemet nedan finns kurvorna $y = x^3 + x^2$ och $y = 4 \cdot x + 4$.



Lös olikheten $x^3 + x^2 > 4 \cdot x + 4$. Du behöver inte göra någon uträkning, utan det går bra att läsa ut svaret ur bilden, bara du förklarar hur du kunde se vad det blev. (2p)

Lösning:

Grafisk utläsning: $y = 4{\cdot}x + 4$ är en rät linje, så den slingrande saken måste vara den andra kurvan. ”Större än” betyder i vertikalled ”ligger ovanför”. Så frågan är ”var ligger den slingrande saken ovanför den räta linjen?”. Det ser ut som att den gör det mellan $x = -2$ och $x = -1$, samt efter $x = 2$.

Beräkningslösning: Det var inte förbjudet att göra en beräkning, även om det inte var obligatoriskt. Skyffla över allt på ena sidan, faktorisera, teckenstudera. Just det här uttrycket går ganska lätt att faktorisera, med lite observans:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 &> 4{\cdot}x + 4 \\ x^3 + x^2 - (4{\cdot}x + 4) &> 0 \\ x^2{\cdot}(x+1) - 4{\cdot}(x+1) &> 0 \\ (x^2 - 4){\cdot}(x+1) &> 0 \\ (x+2){\cdot}(x-2){\cdot}(x+1) &> 0 \end{aligned}$$

Teckenväxlingar vid $x = -2$, $x = 2$ och $x = -1$. Tabell:

	$x < -1$	$x = -2$	$-2 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x+2$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
VL	$-$	0	+	0	$-$	0	+

Större än noll mellan -2 och -1, samt efter 2.

Svar: $(-2,-1) \cup (2,\infty) = \{x \mid (-2 < x < -1) \vee (x > 2)\}$

Rättningsnorm: Svar utan motivering: 0p. Korrekt och motiverat svar: 2p. Blandat om vilken kurva som är vilken, eller räknat fel men visat att man vet vad som ska göras: 1p.

2. **(a)** Skriv upp ett tal som tillhör $\mathbb{Z}$ men som inte tillhör $\mathbb{N}$. (1p)

(b) Skriv upp ett tal som tillhör $\mathbb{Q}$ men som inte tillhör $\mathbb{Z}$. (1p)

(c) Skriv upp ett tal som tillhör $\mathbb{R}$ men som inte tillhör $\mathbb{Q}$. (1p)

Lösning:

$\mathbb{N}$ är de naturliga talen, $\{0, 1, 2, \ldots\}$. $\mathbb{Z}$ är de hela talen $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. $\mathbb{Q}$ är de rationella talen, bråktalen. $\mathbb{R}$ är de reella talen, allt på tallinjen.

(a) Vilket negativt heltal som helt duger bra, t.ex. -17.

(b) Vilket bråk som helst som inte går jämnt ut duger bra, t.ex. $1/2$.

(c) Vilket reelt tal som helst som inte går att skriva som ett bråk duger bra, t.ex. π, $\sqrt{2}$, e.

Rättningsnorm: Kan förmodligen bara bli rätt eller fel.

3. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i *xy*-planet.

$$x^2 + y^2 - 0{,}4{\cdot}x + 0{,}8{\cdot}y + 0{,}11 = 0$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 0{,}4\cdot x + 0{,}8\cdot y + 0{,}11 &= 0 \\
x^2 - 2\cdot 0{,}2\cdot x + 0{,}2^2 - 0{,}2^2 \qquad & \\
+ y^2 + 2\cdot 0{,}4\cdot y + 0{,}4^2 - 0{,}4^2 + 0{,}11 &= 0 && \text{kvadratkomplettera} \\
(x-0{,}2)^2 - 0{,}04 + (y+0{,}4)^2 - 0{,}16 + 0{,}11 &= 0 && \text{skriv som kvadrater; kvadrera} \\
(x-0{,}2)^2 + (y+0{,}4)^2 - 0{,}09 &= 0 && \text{slå ihop konstanterna} \\
(x-0{,}2)^2 + (y+0{,}4)^2 &= 0{,}09 && \text{"flytta över"} \\
(x-0{,}2)^2 + (y-(-0{,}4))^2 &= 0{,}3^2 && \text{skriv på standardform}
\end{aligned}$$

(Notera att uttrycket *inte* kan förenklas genom att man stryker kvadraterna; då får man uttrycket för en rät linje!)

En cirkel med medelpunkt i $(x, y) = (a, b)$ och radie r kan skrivas $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, så vi har

Svar: Medelpunkt $(x, y) = (0{,}2, -0{,}4)$, radie 0,3 l.e.

Rättningsnorm: Angett korrekt svar och inte skrivit om till linje: 3p. 2p om svar ej angett, omskrivit till linje eller räknat fel. 1p om två av dessa saker gjorts.

4. Förenkla

$$\frac{\frac{5}{3}x + \frac{5}{6}}{\frac{4}{9}x - \frac{7}{12}}$$

Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. (3p)

Lösning:

Detta är en rekommenderad uppgift, 1.27(f) ur *Mot bättre vetande*.

En bit i taget:
Täljaren:

$$\frac{5}{3}\cdot x + \frac{5}{6} = \frac{5\cdot x\cdot 2}{3\cdot 2} + \frac{5}{6} = \frac{10\cdot x + 5}{6}$$

Nämnaren:

$$\frac{4}{9}\cdot x - \frac{7}{12} = \frac{4\cdot x\cdot 4}{9\cdot 4} - \frac{7\cdot 3}{12\cdot 3} = \frac{16\cdot x - 21}{36}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{5}{3}\cdot x + \frac{5}{6}}{\frac{4}{9}\cdot x - \frac{7}{12}} = \frac{\frac{10\cdot x + 5}{6}}{\frac{16\cdot x - 21}{36}} = \frac{10\cdot x + 5}{6} \cdot \frac{36}{16\cdot x - 21}$$

$$= \frac{10\cdot x + 5}{\cancel{6}} \cdot \frac{6\cdot \cancel{6}}{16\cdot x - 21} = \frac{60\cdot x + 30}{16\cdot x - 21} = \frac{30\cdot(2\cdot x + 1)}{16\cdot x - 21}$$

Vilken av de två sista versionerna som är att betrakta som enklast beror lite på tillämpning.

Allt på en gång: $36 = 3\cdot 12 = 6\cdot 6 = 9\cdot 4$ är minsta gemensamma nämnare för samtliga bråk. Förläng med den, så plattar bråket ut sig:

$$\frac{\left(\frac{5}{3}\cdot x + \frac{5}{6}\right)\cdot 36}{\left(\frac{4}{9}\cdot x - \frac{7}{12}\right)\cdot 36} = \frac{\frac{5\cdot x\cdot 12\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} + \frac{5\cdot 6\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}}{\frac{4\cdot x\cdot 4\cdot \cancel{9}}{\cancel{9}} - \frac{7\cdot 3\cdot \cancel{12}}{\cancel{12}}} = \frac{60\cdot x + 30}{16\cdot x - 21}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje inkorrekt åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej gjorts (med stopp då man är nere på noll).

5. (a) Förklara vad det är för skillnad i betydelsen hos = och ⇔. (1p)

Lösning:

⇔, ekvivalenspil, är en logisk symbol som sätts mellan utsagor som har samma sanningsvärde (oavsett omständigheterna). Korrekt användning är exempelvis

$$x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \neq 0$$

”Om x inte är noll så är x i kvadrat inte noll, och tvärtom”.

=, likhetstecknet, innebär att två uttryck representerar samma objekt, som $2 + 2 = 3 + 1$. De här två uttrycken motsvarar båda talet 4, och representerar därmed samma tal.

Rättningsnorm: Det måste framgå att pilen handlar om sanningsvärden och likheten om identitet, men svaren tolkas välvilligt.

(b) Din kompis håller på och löser ekvationen $2{\cdot}x = 4$, och har skrivit

$$2{\cdot}x = 4 = x = 2 \qquad ☠$$

Förklara för kompisen <u>varför</u> det är fel att skriva så. (Det räcker inte att tala om hur man ska skriva, det är nästa uppgift, utan du ska förklara varför man inte få skriva så här.) (1p)

Lösning:

Exempelvis: ”Du har skrivit att $2x$ är samma tal som 4, som är samma tal som x, som är samma tal som 2. Så du har bland annat skrivit att 4 och 2 är samma tal. Och det är de ju inte, så det du skrivit är ren lögn!”

Rättningsnorm: Det måste framgå att problemet är att det står likhet mellan saker som inte är lika.

(c) Visa kompisen ett korrekt sätt att skriva lösningen. (1p)

Lösning:

Exempelvis

$$2{\cdot}x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \qquad \text{eller} \qquad \begin{aligned} 2{\cdot}x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Även implikationspil accepteras.

6. Faktorisera nedanstående polynom:

$$x^4 - 7{\cdot}x^2 + 12$$ (3p)

Lösning:

Inledande funderingar: Polynomet är av grad 4, så det är möjligt att det kan brytas isär i 4 reella förstagradsfaktorer.

Kvadratkomplettering: Polynomet saknar tredjegradsterm och förstagradsterm. Det gör att dess struktur påminner om en andragradare, och andragradare kan vi faktorisera med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} &x^4 - 7{\cdot}x^2 + 12 \\ &= (x^2)^2 - 7{\cdot}x^2 + 12 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^2 - 7\cdot t + 12\\
&= t^2 - 2\cdot\tfrac{7}{2}\cdot t + (\tfrac{7}{2})^2 - (\tfrac{7}{2}) + 12\\
&= (t - \tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{4\cdot 12}{4}\\
&= (t - \tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{1}{4}\\
&= (t - \tfrac{7}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2\\
&= ((t - \tfrac{7}{2}) + \tfrac{1}{2})\cdot((t - \tfrac{7}{2}) - \tfrac{1}{2})\\
&= (t - \tfrac{6}{2})\cdot(t - \tfrac{8}{2})\\
&= (x^2 - 3)\cdot(x^2 - 4)\\
&= (x^2 - (\sqrt{3})^2)\cdot(x^2 - 2^2)\\
&= (x + \sqrt{3})\cdot(x - \sqrt{3})\cdot(x + 2)\cdot(x - 2)
\end{aligned}
$$

Nollställen: Varje förstagradsfaktor motsvarar ett nollställe. Polynomet har heltalskoefficienter så om det finns ett heltalsnollställe så är detta en faktor i konstanttermen, som är 12. Faktorer i 12 är ±1, ±2, ±3, ±4, ±6 och ±12. Testa dessa tal. Börja med de som är enklast att räkna med (och hoppas att aldrig behöva ta itu med de jobbigaste):

$$
\begin{aligned}
x = \pm 1: &\quad (\pm 1)^4 - 7\cdot(\pm 1)^2 + 12 = 1 - 7\cdot 1 + 12 = 1 - 7 + 12 = 6 \neq 0\\
x = \pm 2: &\quad (\pm 2)^4 - 7\cdot(\pm 2)^2 + 12 = 16 - 7\cdot 4 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0
\end{aligned}
$$

(Det gick att ta både ”plus” och ”minus” i samma beräkning eftersom exponenterna var jämna. Inser man inte det så får man göra lite fler beräkningar.) Vi har nu hittat två nollställen. Vi kan fortsätta, men det är enklare att dividera med motsvarande faktorer och så faktorisera det som är kvar (som kommer att vara en andragradare, vilket vi har en effektiv metod att faktorisera). Nollställena $x = -2$ och $x = 2$ motsvarar faktorerna $x+2$ och $x-2$, vilket ger andragradsfaktorn $(x+2)\cdot(x-2) = x^2-4$. Division ger (typsatt på amerikanska):

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & x^2 & & -\,3\\ \hline
x^2 - 4) & x^4 & -\,7x^2 & +\,12\\
 & -\,x^4 & +\,4x^2 & \\ \cline{2-3}
 & & -\,3x^2 & +\,12\\
 & & 3x^2 & -\,12\\ \cline{3-4}
 & & & 0
\end{array}
$$

Så $x^4 - 7\cdot x^2 + 12 = (x^2 - 4)\cdot(x^2 - 3) = (x + 2)\cdot(x - 2)\cdot(x + \sqrt{3})\cdot(x - \sqrt{3})$.

(Notera att vi aldrig skulle ha hittat de två sista nollställena med testning, eftersom de inte är heltal.)

Rättningsnorm: 3p för korrekt svar; 1p om man åtminstone visat prov på några användbara idéer; 2p för största delen av uträkningen.

7. (a) Förklara vad som menas med *kvadratroten* ur ett tal a, $\sqrt{a}$. (Vi vill alltså ha definitionen av begreppet.) (1p)

Lösning:

”Det icke-negativa tal som i kvadrat blir a”.

Rättningsnorm: Det där med icke-negativ måste vara med.

(b) Förklara varför potensräkningsregeln $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ gäller. Du kan utgå från att m och n är positiva heltal. (2p)

Lösning:

”Upphöjt till positivt heltal” betyder per definition ”så här många sådana här saker ihopmultiplicerade”. Så

$$(a^m)^n = \underbrace{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m \text{ stycken}} \cdot \overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m \text{ stycken}} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{m \text{ stycken}}}_{n \text{ grupper}}$$

$$= \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot\ldots\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n \text{ stycken}} = a^{m\cdot n}$$

Rättningsnorm: 2p för vattentät förklaring. Lite svårt att säga hur en 1p-version kan se ut, men de finns säkert.

8. Funktionen f definieras enligt

$$f(x) = \sqrt{6-x} - \sqrt{x+3} + \frac{1}{x+2}$$

Bestäm f:s definitionsmängd. (3p)

Lösning:

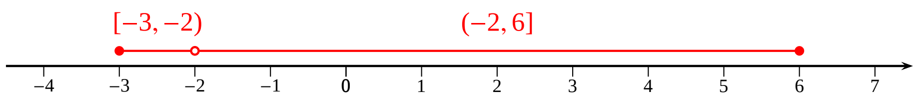
Definitionsmängden är, om inget annat anges, de värden som instoppade i beräkningen inte ger ”error” som resultat. Additionerna och subtraktionerna kan inte ge problem, men rotutdragningarna och divisionen kan göra det.

$\sqrt{6-x}$ går att räkna ut förutsatt att $6-x \geq 0$, d.v.s. om $x \leq 6$.

$\sqrt{x+3}$ går att räkna ut förutsatt att $x+3 \geq 0$, d.v.s. om $x \geq -3$.

$1/(x+2)$ går att räkna ut förutsatt att $x+2 \neq 0$, d.v.s. om $x \neq -2$.

Så x ska ligga mellan -3 och 6 men får inte vara -2:



Svar: $\mathcal{D}_f = [-3,-2) \cup (-2,6] = \{x \mid (-3 \leq x \leq 6) \wedge (x \neq -2)\}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår vad frågan går ut på: 1p. Mellanting: 2p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2017.08.15 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021-10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{x^2 - 13\cdot x + 12}{x-2}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Från förra läsårets rekommenderade uppgifter, 3.3(b) ur *Kompletterande kompendium*. Division (typsatt på amerikanska):

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x - 11 \\ \cline{2-2}
x-2) & x^2 - 13x + 12 \\
 & -x^2 + 2x \\ \cline{2-2}
 & -11x + 12 \\
 & 11x - 22 \\ \cline{2-2}
 & -10
\end{array}$$

Kvoten är det som vi fått ovanpå trappan, resten är det sista vi har kvar nertill.

Svar: kvot $x - 11$, rest -10

Rättningsnorm: Beräkning: 2p, 1p vid enstaka slarvfel. Svar: 1p.

2. Definiera intervallen A och B genom $A = [1/2, 5/2)$ och $B = (-1{,}5,\ 0{,}5]$.

(a) Rita en tallinje och markera de två intervallen på tallinjen. (1p)

(b) Bestäm snittet av de två intervallen: $A \cap B$. (1p)

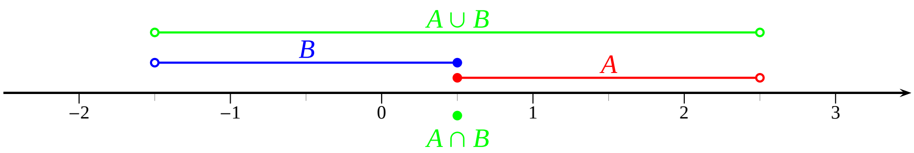
(c) Bestäm unionen av de två intervallen: $A \cup B$. (1p)

Lösning:

Enklast är att ta alla uppgifterna i samma vända. Det kan underlätta uppritningen att uttrycka båda intervallens ändpunkter på decimalform:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad\qquad \frac{5}{2} = 2{,}5$$

(Annars kan man ta båda på bråkform; det underlättar hur som helst att ha båda på *samma* form.)



Intervallen hakar i varandra.

Snittet av de två intervallen är de punkter som intervallen har gemensamma, vilket är punkten 0,5 och inget mer.

Unionen är de punkter som ingår i intervallen sammanslagna; de som tillhör ena eller andra eller båda. Det blir allt från vänster ända av B till höger ända av A: $(-1{,}5,\ 2{,}5)$

Rättningsnorm: Har man missuppfattad intervallbeteckningarna men korrekt tagit fram union och snitt utgående från vad man ansåg att de betydde så ges poäng för union och snitt. Har man blandat ihop union och snitt men gjort rätt i övrigt ges 1p för b+c.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$((1+5)/6+9)/(1+5/(6+9)) \qquad (3p)$$

Lösning:

Vi måste tänkta på prioriteten: Operationer innanför parenteser ska göras innan operationer utanför parenteser; om inte parenteser säger annat så ska divisioner göras innan additioner. Om vi byter till horisontella bråkstreck, vilket är mer lättläst, så kan uppgiften skrivas

$$\frac{\dfrac{1+5}{6}+9}{1+\dfrac{5}{6+9}}$$

En sak i taget:
Täljaren:

$$\frac{1+5}{6}+9 = \frac{6}{6}+9 = 1+9 = 10$$

Nämnaren:

$$1+\frac{5}{6+9} = 1+\frac{5}{15} = \frac{1\cdot 3}{3}+\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

Helheten:

$$\frac{\dfrac{1+5}{6}+9}{1+\dfrac{5}{6+9}} = \frac{10}{\dfrac{4}{3}} = 10\cdot\frac{3}{4} = \frac{\cancel{2}\cdot 5\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 2} = \frac{15}{2}$$

Allt på en gång: I täljaren finns nämnaren 6 och i nämnaren nämnaren 15. Minsta gemensamma nämnare för dessa är $30 = 5\cdot 6 = 2\cdot 15$. Multiplicera med den så plattar bråket ut sig:

$$\frac{\left(\frac{1+5}{6}+9\right)\cdot 30}{\left(1+\frac{5}{6+9}\right)\cdot 30} = \frac{\frac{6\cdot 5\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}+9\cdot 30}{1\cdot 30+\frac{5\cdot 2\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}} = \frac{30+270}{30+10} = \frac{300}{40} = \frac{\cancel{20}\cdot 15}{\cancel{20}\cdot 2} = \frac{15}{2}$$

(Vi utnyttjade här inte att det fanns möjligheter till förkortningar i täljare och nämnare innan förlängningen.)

Kommentar: Genom att förkorta kan man helt undvika ”minsta gemensam nämnare”-problematik i den här uppgiften, men jag använder alltid samma formulering av frågan. Notera att det sätt som frågan är skriven är det sätt som man ska skriva om man vill mata in det här problemet i en miniräknare.

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktigt genomförd åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte vidtagits (med stopp då poängen är nere på 0). Att misstolka hur bråket är uppbyggt räknas som en felaktighet.

4. (a) Din kompis har löst en olikhet så här:

$$x^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad x \le \pm 1 \qquad ☠$$

Läraren säger: ”Så där kan man inte skriva!”

Förklara vad som är fel med att skriva ”$x \le \pm 1$”.

Det räcker inte att förklara vad det *borde* stå (det är nästa uppgift) utan du måste förklara vad som är problemet med det som står här. (Kan fordra att du tänker självständigt.) (1p)

Lösning:

Då man skriver ”$x = \pm 1$” så menar man ”$x = 1$ eller $x = -1$”. Så då borde det här betyda ”$x \le 1$ eller $x \le -1$”. Men ALLA tal som är mindre än -1 är också mindre än 1, då ”minusalternativet” verkar inte tillföra något alls till lösningen. Och om du menar att det ska betyda ”$x \le -1$ och $x \le 1$” så har vi istället problemet att de tal som uppfyller det här är talen som uppfyller $x \le -1$, och i så fall verkar ”plusalternativet” inte tillföra något.

Dessutom kan man lätt konstatera att inga tal som faktiskt är mindre än -1 är lösningar till olikheten; exempelvis är $(-1{,}1)^2 = 1{,}21 \not\le 1$.

Rent allmänt gäller att principer som fungerar vid lösande av likheter inte nödvändigtvis fungerar på olikheter; de är mycket mer komplicerade.

Anmärkning: Detta svar lämnades in av ett ganska stort antal studenter på en tidigare tenta.

Rättningsnorm: Poäng om man påpekar någon av felaktigheterna/oklarheterna i uttrycket.

(b) Visa kompisen hur man ska göra, genom att lösa olikheten på ett *korrekt* sätt. (2p)

Lösning:

Informellt: Kvadraten på tal större än 1 blir större än 1. Och negativa och positiva tal med samma siffror har samma kvadrater, så kvadraten på tal till vänster om -1 blir också större än 1. Så svaret på olikheten är intervallet $-1 \le x \le 1$.

Superformellt: Vi utnyttjar standardtaktiken för olikheter: skyffla över allt på ena sidan, faktorisera, teckenstudera:

$$x^2 \le 1$$

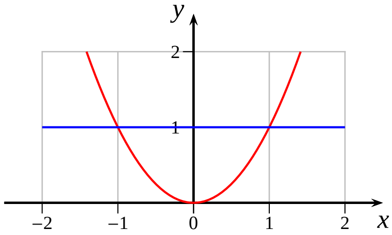
$$x^2 - 1 \le 0$$
$$(x+1)\cdot(x-1) \le 0$$

Teckenbyten i $x = \pm 1$. Teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)\cdot(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Värdet på uttrycket är icke-positivt från och med -1 till och med 1.

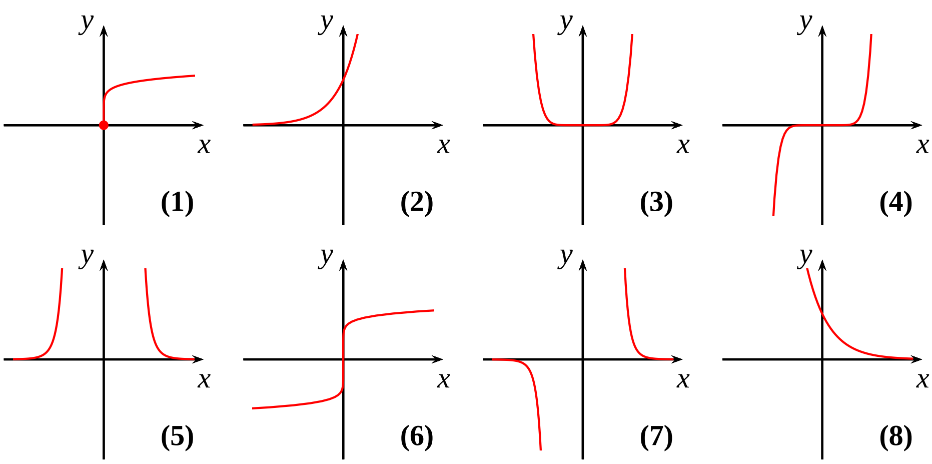
Grafiskt: $y = x^2$ och $y = 1$ är lätta att rita. ”Mindre än” motsvarar vertikalt ”ligger nedanför”.



Parabeln ligger nedanför linjen mellan $x = -1$ och $x = 1$.

Svar: $[-1, 1]$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Korrekt metod med något detaljfel: 1p.



5. I figuren ovan finns graferna för åtta olika funktioner. Vilken bild hör ihop med vilken formel?

(a) 8^{-x} **(b)** 9^x **(c)** x^8 **(d)** x^9 **(e)** $x^{1/8}$ **(f)** $x^{1/9}$ **(g)** x^{-8} **(h)** x^{-9}

0–1 rätt: 0p; 2–3 rätt: 1p; 4–6 rätt: 2p; 7–8 rätt: 3p. Motivering krävs ej.

Lösning:

Från detta läsårs rekommenderade uppgifter, 5.16 ur *Grundlig matematik*. Vi motiverar fast det inte krävs:

(a) (8) $8^{-x} = 0{,}125^x$, och grafen för en exponentialfunktion med bas mindre än 1 blir en kurva som lutar neråt och närmar sig x-axeln då man går åt höger.

(b) (2) Grafen för en exponentialfunktion med bas större än 1 blir en kurva som lutar uppåt och som startar utmed x-axeln.

(c) (3) En jämn positiv potens ger en U-kurva.

(d) (4) En udda positiv potens ger en S-kurva.

(e) (1) $x^{1/8} = \sqrt[8]{x}$, och en jämn rot är odefinierad för negativa tal. (Kurvan ska för övrigt se ut som en liggand variant av ena halvan av x^8.)

(f) (6) $x^{1/9} = \sqrt[9]{x}$, och en udda rot ska se ut som en liggande variant av motsvarande udda potens.

(g) (5) $x^{-8} = 1/x^8$, så värdet ska vara odefinierat om $x = 0$, och i övrigt ska positiva och negativa tal ge samma resultat.

(h) (7) $x^{-9} = 1/x^9$, så värdet ska vara odefinierat om $x = 0$, och negativa x ska ge negativa y och positiva positiva.

Ett sätt att arbeta är att försöka skissa kurvorna för de olika formlerna, och så matcha skisserna med bilderna.

Rättningsnorm: Se uppgiften. (Och om någon får 7 rätt blir jag mycket förvånad.)

6. Lös ekvationen $-x - 1 = \sqrt{x+3}$. (3p)

Lösning:

Beräkningslösning:

$$
\begin{aligned}
-x-1 &= \sqrt{x+3} && \\
(-x-1)^2 &= (\sqrt{x+3})^2 && \text{kvadrera; KOLLA SVAREN}\\
(-x)^2 + 2\cdot(-x)\cdot(-1) + (-1)^2 &= x+3 && \text{kvadreringsregel}\\
x^2 + 2\cdot x + 1 &= x+3 && \text{förenkla}\\
x^2 + x - 2 &= 0 && \text{"flytta över"}\\
x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x + (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 - 2 &= 0 && \text{kvadratkomplettera}\\
(x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{4\cdot 2}{4} &= 0 && \text{skriv som kvadrat; gem. nämnare}\\
(x+\tfrac{1}{2})^2 &= \tfrac{9}{4} && \text{"flytta över"}\\
(x+\tfrac{1}{2})^2 &= (\tfrac{3}{2})^2 && \text{skriv som kvadrat}\\
x+\tfrac{1}{2} &= \pm\tfrac{3}{2} && \text{samma siffror, tecken kan vara olika}\\
x &= -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} && \text{"flytta över"}
\end{aligned}
$$

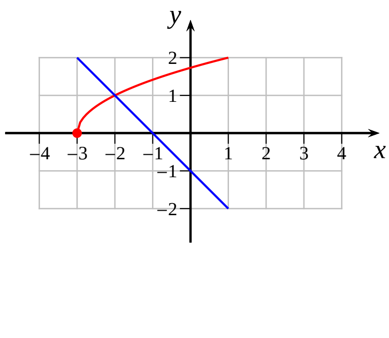
Så $x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ och $x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ *kan* vara lösningar till ekvationen. Men vi har använt operationen kvadrering, och eftersom den kan introducera falska rötter måste vi kontrollera svaren innan vi kan vara säkra på att de stämmer:

$$
x = 1: \begin{cases} \text{VL} = -1 - 1 = -2 \\ \text{HL} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \end{cases} \quad \text{ej OK}
$$

$$
x = -2: \begin{cases} \text{VL} = -(-2) - 1 = 2 - 1 = 1 \\ \text{HL} = \sqrt{-2+3} = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \quad \text{OK}
$$

$x = -2$ är en lösning till ekvationen, $x = 1$ är det inte.

Grafisk lösning: Kurvorna $y = -x - 1$ och $y = \sqrt{x-3}$ är båda lätta att rita, så vi gör det och ser om vi kan läsa av svaren ur bilden:



Av bilden att döma finns det en och endast en skärningspunkt mellan dessa kurvor, och den är belägen vid $x = -2$ (där i båda fallen $y = 1$).

(I de flesta kurser godtas inte rent grafiska lösningar, men de är OK i den här kursen eftersom jag anser att förståelse för hur saker ser ut är oerhört viktig.)

Svar: $x = -2$

Rättningsnorm: Kommit till rätt svar: 3p. Räknat rätt men ej testat: 2p. Mindre räknefel med test: 2p. Mindre räknefel och inget test: 1p. Mer fel än så: 0p.

7. Förenkla följande potensuttyck maximalt:

$$\frac{a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}}{\sqrt[4]{a} \cdot (b \cdot c^4)^{-4}}$$

Du kan utgå från att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

Bara att tillämpa potensreglerna:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}}{\sqrt[4]{a} \cdot (b \cdot c^4)^{-4}} \\
&= (a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}) \cdot (a^{1/4} \cdot (b \cdot c^4)^{-4})^{-1} \\
&= (a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}) \cdot (a^{(1/4)\cdot(-1)} \cdot (b \cdot c^4)^{(-4)\cdot(-1)}) \\
&= (a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}) \cdot (a^{-1/4} \cdot (b \cdot c^4)^4) \\
&= (a^2 \cdot b^{1/2} \cdot c^{-2}) \cdot (a^{-1/4} \cdot b^4 \cdot c^{4\cdot 4}) \\
&= a^2 \cdot a^{-1/4} \cdot b^{1/2} \cdot b^4 \cdot c^{-2} \cdot c^{16} \\
&= a^{2-1/4} \cdot b^{1/2+4} \cdot c^{-2+16} \\
&= a^{8/4-1/4} \cdot b^{1/2+8/2} \cdot c^{-2+16} \\
&= a^{7/4} \cdot b^{9/2} \cdot c^{14}
\end{aligned}$$

Beräkningen kan läggas upp på många andra sätt. Svaret är det som ges här.

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktig åtgärd och för varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits, med stopp vid 0p.

8. Den här uppgiften kan fordra viss kreativitet.

(a) Ta fram de tal för vilka det är sant att $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. För full poäng fordras att det är uppenbart att du hittat alla svar. (2p)

Lösning:

Det är relativt lätt att se att om $y = 0$ så blir båda leden till x^2, det vill säga lika, och samma sak händer om $x = 0$. Frågan är bara om det finns några fler tal som ger likhet. Vi kan starta som vid vanlig ekvationslösning och se vad som händer:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= x^2 + y^2 && \\
x^2 + 2\cdot x\cdot y + y^2 &= x^2 + y^2 && \text{1:a kvadreringsregeln} \\
2\cdot x\cdot y &= 0 && \text{dra bort } x^2 \text{ och } y^2 \text{ från båda led} \\
x = 0 &\lor y = 0 && \text{nollfaktorlagen}
\end{aligned}$$

Det fanns visst inga andra möjligheter!

Kommentar: Att beräkna kvadrater genom att ”multiplicera in” exponenten istället för att använda kvadreringsreglerna är en av de mer ”populära” felräkningarna i lite större problem i andra kurser.

Rättningsnorm: Insett att det blir likhet om någon variabel är noll, men ej visat att det inte finns andra möjligheter: 1p. Heltäckande resonemang: 2p

(b) Visa med ett exempel att det inte alltid blir likhet. (1p)

Lösning:

Vi kan ta något väldigt enkelt, typ $x = y = 1$:

$$(1 + 1)^2 = 2^2 = 4 \qquad 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

Blev helt klart inte samma resultat!

Rättningsnorm: Exempel där VL och HL är beräknade och ej lika ger poäng.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2017.09.27 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{9}{5} + \frac{2}{15}\Big/\frac{4}{21} - \frac{3}{2} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Först måste vi tänka på prioriteten: divisioner går före additioner och subtraktioner om inte parenteser säger något annat. Några parenteser finns inte, så divisionen i mitten ska genomföras innan additionen och subtraktionen:

$$\frac{9}{5} + \frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{21}} - \frac{3}{2} = \frac{9}{5} + \frac{2}{15}\cdot\frac{21}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{5} + \frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot 5\cdot\cancel{2}\cdot 2} - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{9\cdot 2}{5\cdot 2} + \frac{7}{10} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{18+7-15}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Alternativt kan börja med att förlänga dubbelbråket med $105 = 15\cdot 7 = 21\cdot 5$, så plattar det ut sig.

$$\frac{\frac{2}{15}\cdot 15\cdot 7}{\frac{4}{21}\cdot 21\cdot 5} = \frac{2\cdot 7}{4\cdot 5}$$

Om man feltolkar bråket som

$$\frac{\frac{9}{5}+\frac{2}{15}}{\frac{4}{21}-\frac{3}{2}} \quad ☠$$

ska man komma fram till svaret $-406/275$.

Notation: Eftersom vitsen med beräkningen är att skriva ett enklare uttryck som representerar samma tal så ska det vara likhetstecken hela vägen genom beräkningen. (Att ha t.ex. implikationspilar är felaktigt, eftersom uttrycken inte har något sanningsvärde.)

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktigt genomförd åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte vidtagits (med stopp då poängen är nere på 0). Att misstolka hur bråket är uppbyggt är en felaktighet.

2. Lös följande ekvation:

$$\frac{x^3 + 20 \cdot x^2 + 100 \cdot x}{x^2 - 100} = 0 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

För att ett bråk ska bli noll krävs att täljaren är noll samtidigt som nämnaren inte är det.

Täljaren:

$$x^3 + 20 \cdot x^2 + 100 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x + 10^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x + 10)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0, -10\}$$

Nämnaren:

$$x^2 - 100 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 10) \cdot (x - 10) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq \pm 10$$

Så x måste vara något av talen 0 och −10 och kan inte vara något av talen 10 och −10. I så fall är $x = 0$ den enda möjliga lösningen. (Alternativt så testar man förslagen 0 och −10 i nämnaren och ser att −10 inte kan användas.)

Svar: $x = 0$

Notation: Om man som här väljer att ställa upp ekvationslösningen horisontellt ska man ha ekvivalenspilar (eller möjligen implikationspilar) mellan stegen. Skriver man vertikalt brukar pilarna anses underförstådda.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Missat att nämnaren inte får vara noll, men rätt i övrigt: 2p. Mer fel än så men inte helfel: 1p.

3. Vilka av följande utsagor är sanna? (a och b antas vara vanliga tal.)

(a) $((a = 0) \wedge (b = 0)) \quad \Rightarrow \quad (a \cdot b = 0)$

(b) $((a = 0) \wedge (b = 0)) \quad \Leftarrow \quad (a \cdot b = 0)$

(c) $((a = 0) \vee (b = 0)) \quad \Rightarrow \quad (a \cdot b = 0)$

(d) $((a = 0) \vee (b = 0)) \quad \Leftarrow \quad (a \cdot b = 0)$

(e) $((a = 0) \wedge (b = 0)) \quad \Leftrightarrow \quad (a \cdot b = 0)$

(f) $((a = 0) \vee (b = 0)) \quad \Leftrightarrow \quad (a \cdot b = 0)$

Motivering behövs ej. (3p)

Lösning:

Delmängd av rekommenderad uppgift 1.4 ur *Grundlig matematik*. Vi motiverar även om det inte krävdes:

(a) ”Om två tal båda är noll så är produkten av dem noll” SANT

(b) ”Om produkten av två tal är noll så är båda talen noll” FALSKT

(c) ”Om det ena eller det andra av två tal är noll så är produkten av dem noll” SANT

(d) ”Om produkten av två tal är noll så är det ena eller det andra av dem noll” SANT

(e) ”Att två tal båda är noll är samma sak som att deras produkt är noll” FALSKT

(f) ”Att något av två tal är noll är samma sak som att deras produkt är noll” SANT

Rättningsnorm: 0–1 rätt: 0p. 2–3 rätt: 1p. 4–5 rätt: 2p. 6 rätt: 3p.

4. **(a)** Är $x = {}^1\!/_2$ ett nollställe till polynomet $p(x) = 2{\cdot}x^3 - x^2 - 50{\cdot}x + 25$? Motivera! (1p)

(b) Faktorisera polynomet fullständigt. (2p)

Lösning:

Det finns två sätt att kontrollera om något är ett nollställe: sätt in och förenkla och se om du får noll eller dividera med motsvarande faktor och se om det går jämnt upp. För säkerhets skull gör vi båda sakerna:

Insättning:

$$2{\cdot}(\tfrac{1}{2})^3 - (\tfrac{1}{2})^2 - 50{\cdot}\tfrac{1}{2} + 25 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + 25 - 25 = 0$$

Det var ett nollställe!

Division:

$$\begin{array}{r|l} & 2{\cdot}x^2 \qquad\quad - 50 \\ \hline x - {}^1\!/_2 & 2{\cdot}x^3 - x^2 - 50{\cdot}x + 25 \\ & -(2{\cdot}x^3 - x^2) \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad - 50{\cdot}x + 25 \\ & \qquad\quad -(- 50{\cdot}x + 25) \\ \cline{2-2} & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Det var ett nollställe!

Ett tredjegradspolynom har högst tre reella nollställen, motsvarande tre förstagradsfaktorer. Vi har en faktor. Kan vi hitta fler?

$$\begin{aligned} 2{\cdot}x^3 - x^2 - 50{\cdot}x + 25 &= (x - {}^1\!/_2){\cdot}(2{\cdot}x^2 - 50) = (x - {}^1\!/_2){\cdot}2{\cdot}(x^2 - 25) \\ &= 2{\cdot}(x - {}^1\!/_2){\cdot}(x^2 - 5^2) = 2{\cdot}(x - {}^1\!/_2){\cdot}(x + 5){\cdot}(x - 5) \end{aligned}$$

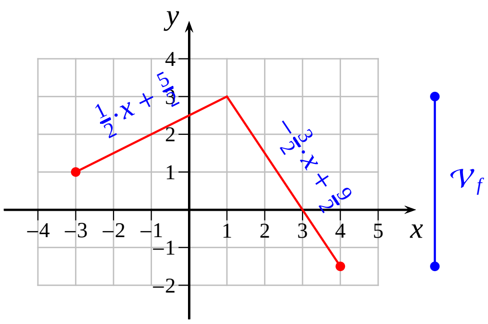
Mer faktoriserat än så här kan det nog inte bli!

Svar: (a) Ja (b) $2{\cdot}(x - {}^1\!/_2){\cdot}(x + 5){\cdot}(x - 5)$

Notation: Det ska vara likhetstecken i beräkningarna; vitsen är att det man har i slutändan motsvarar det man hade från början.

Rättningsnorm: Korrekt visat att $-{}^1\!/_2$ är ett nollställe: 1p. Korrekt faktoriserat i första- och andragradare: +1p. Korrekt faktoriserat i förstagradare: +1p.

5. Här har vi grafen för en funktion f:



(a) Ange hur $f(x)$ beräknas. (Om du läser ut svaret direkt ur bilden, tala om vad det var du tittade på.) (2p)

Lösning:

Kurvan består helt klart av två räta linjestycken, med varsin formel.

Direkt utläsning: Första linjestycket behöver gå 2 rutor framåt för att gå 1 ruta uppåt, så på 1 ruta framåt går det $1/2$ ruta uppåt. Så riktningskoefficienten är $1/2$. Linjestycket skär y-axeln mitt emellan $y = 2$ och $y = 3$, så konstantermen är $2{,}5 = 5/2$.

Det andra linjestycket går 3 rutor neråt på 2 rutor framåt, så på 1 ruta framåt går det $3/2$ rutor neråt. Så riktningskoefficienten är $-3/2$. Förlänger man linjestycket så att det skär y-axeln hamnar skärningen mitt emellan $y = 4$ och $y = 5$, så konstanttermen är $4{,}5 = 9/2$.

Beräkning: Första linjestycket går mellan punkterna $(-3,\ 1)$ och $(1,\ 3)$, vilket (enligt tvåpunktspormeln) ger riktningskoefficienten

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Enpunktsformeln ger nu

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad y - 1 = \frac{1}{2}(x - (-3)) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 1$$

På samma sätt räknar man på andra linjestycket.

Sammanfattning Första linjestycket går mellan $x = -3$ och $x = 1$, andra mellan $x = 1$ och $x = 4$. Grafen börjar och slutar med fyllda pluppar, så ändpunkterna ingår. Sammanfattningsvis:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + \frac{5}{2} & -3 \le x < 1 \\ -\frac{3}{2}\cdot x + \frac{9}{2} & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

(Det spelar ingen roll om vi inkluderar brytpunkten $x = 1$ i första eller andra formeln, eftersom de ger samma resultat, $y = 3$, i båda fallen.)

Rättningsnorm: I stort sett helt rätt: 2p. Rätt tänkt men något fel i utförandet: 1p.

(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

Lösning:

Värdemängden motsvaras av alla y-värden som finns på kurvan, vilket blir allt mellan den lägsta punkten där $y = -3/2$ och högsta punkten där $y = 3$. (Markerat med blått i bilden.)

Svar: $\mathcal{V}_f = \{y \mid -3/2 \le y \le 3\} = [-3/2, 3]$

Notation: Det lägsta värdet ska stå till vänster och det högsta till höger om man använder intervallbeteckningar.

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som en motivering: 1p.

6. Bestäm ~~lägsta~~ högsta värdet för nedanstående andragradsuttryck.

$$-25\cdot x^2 - 10\cdot x - 11$$

OBS! Derivataresonemang får ej användas. (3p)

Lösning:

Det var feltryck i frågan; det finns inget lägsta värde, utan man kan få uttryckets värde hur lågt som helst genom att ta x tillräckligt långt från noll.

Det högsta värdet går att läsa ut ur den kvadratkompletterade formen.

Version 1:

$$-25\cdot x^2 - 10\cdot x - 11 = -25\cdot(x^2 + \frac{10}{25}\cdot x + \frac{11}{25})$$

$$\begin{aligned}
&= -25\cdot(x^2 + \frac{2}{5}\cdot x + \frac{11}{25})\\
&= -25\cdot(x^2 + 2\cdot\frac{1}{5}\cdot x + (\frac{1}{5})^2 - (\frac{1}{5})^2 + \frac{11}{25})\\
&= -25\cdot((x + \frac{1}{5})^2 - \frac{1}{25} + \frac{11}{25})\\
&= -25\cdot((x + \frac{1}{5})^2 + \frac{10}{25})\\
&= -25\cdot(x + \frac{1}{5})^2 - 10
\end{aligned}$$

Version 2: Om man vill undvika bråkräkning:

$$\begin{aligned}
-25\cdot x^2 - 10\cdot x - 11 &= -((5\cdot x)^2 + 2\cdot(5\cdot x) + 11)\\
&= -((5\cdot x)^2 + 2\cdot(5\cdot x)\cdot 1 + 1^2 - 1^2 + 11)\\
&= -((5\cdot x + 1)^2 - 1 + 11)\\
&= -(5\cdot x + 1)^2 - 10
\end{aligned}$$

Det lägsta värde en kvadrat kan anta är noll, så det högsta värde som det inverterade kvadratuttrycket kan anta är noll, och då är det högsta värde som uttrycket som helhet kan anta -10 (och det antas då $x = -1/5$).

Svar: -10

Om man vet att extremvärden antas mitt emellan nollställena är man inte hjälpt av det, eftersom uttrycket saknar nollställen. Om man söker extremvärdet med hjälp av värdetabell är det osannolikt att man hittar det, eftersom det inte ligger i en heltalspunkt.

Notation: Man ska inte lägga på något ”= 0” på uttrycket, för det gör om frågan till ”var är detta uttryck noll?” (vilket är ingenstans) istället för ”vad är detta uttrycks extremvärde?”. Det ska vara likhetstecken, eftersom vitsen är att det man kommer fram till har samma extremvärde som det man började med.

Rättningsnorm: Om det verkar som att den skrivande inte nåtts av korrigeringen av frågan så får vi bedöma fall för fall; det är svårt att på förhand säga vad som kan bli resultatet. Annars: kvadratkomplettering 2p, 1p vid mindre felaktighet. Utläsning av svaret: 1p. Utläsning av värde ur en värdetabell med heltal: 0p.

7. **(a)** Förklara varför potensräkningsregeln $(a/b)^n = a^n/b^n$ gäller. Du kan utgå från att n är ett positivt heltal.

(b) Förklara vad som ger problem då man försöker definiera ett värde för 0^0.

Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

(a) Detta skulle egentligen ha varit en rekommenderad uppgift (*Grundlig matematik* 5.2(a)), men till följd av ett skrivfel i studiehandledningen var den inte markerad som rekommenderad.

Vi tittar på innebörden i potens:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ st}} = \frac{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b} = \frac{a^n}{b^n}$$

(b) $(\text{varje positivt tal})^0 = 1$, $0^{\text{vilket positivt tal som helst}} = 0$. Om vi nu försöker ta oss mot 0^0 så har vi en röst för att det borde bli 1 och en för att det borde bli 0. Då har vi inte enighet om vad det egentligen borde vara.

(Kan formuleras på många sätt, men problemet är det finns flera olika bud om vilket värde som verkar logiskt.)

Anmärkning: Om uppgiften är ”förklara varför denna regel ser ut som den gör” så kan man inte motivera med ”för att regeln ser ut så”, för det förklarar ingenting. (”För att fröken sagt det” är inte heller en förklaring till varför det är så.)

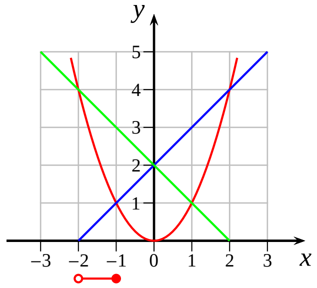
Rättningsnorm: Generellt resonemang på (a) och förnuftig diskussion på (b): 3p. Åtminstone någonting vettigt: 1p. Mellanting: 2p.

8. Lös följande olikhet:

$$2 + x \le x^2 < 2 - x \qquad (3p)$$

Lösning:

Grafisk lösning: Parabeln $y = x^2$ och de två räta linjerna $y = 2 + x$ och $y = 2 - x$ är allihop lätta att rita:



Vi söker det område där parabeln ligger under den gröna neråtlutande linjen och samtidigt ovanför den uppåtlutande blå. Det verkar vara mellan -2 och -1.

Beräkningslösning: Lös de två olikheterna $2 + x \le x^2$ och $x^2 < 2 - x$ var för sig, och ta skärningen av lösningsmängderna (för det blir det område där båda utsagorna är sanna).

Den första olikheten kan skrivas om till $0 \le x^2 - x - 2$. Faktorisera högerledet:

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x + (\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 - 2 = (x - \tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{2\cdot 4}{4}$$
$$= (x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2 = ((x - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{2})\cdot((x - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{3}{2}) = (x + 1)\cdot(x - 2)$$

Teckenbyten vid $x = -1$ och $x = 2$:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 1)\cdot(x - 2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi vill att uttrycket ska vara positivt eller noll, vilket det är på de två intervallen $(-\infty,\ -1]$ och $[2,\ \infty)$.

Den andra olikheten kan skrivas om till $x^2 + x - 2 < 0$. Beräkningen av faktoriseringen blir identisk med den förra, bara med skillnaden att man får plustecken på $1/2$:

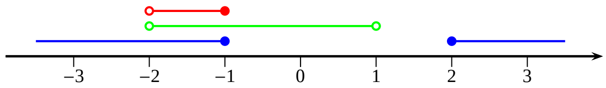
$$x^2 + x - 2 = \cdots = (x + 2)\cdot(x - 1)$$

Teckenbyten vid $x = -2$ och $x = 1$:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x + 2)\cdot(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Här ville vi att uttrycket skulle vara negativt, vilket det är på intervallet $(-2,\ 1)$.

Nu vill vi ha skärningen mellan de här lösningsmängderna, vilket kan illustreras på tallinjen:



Svar: $\{x \mid -2 < x \leq -1\}$

Anmärkning: Om man vill göra omskrivningar av den dubbla olikheten måste man komma ihåg att alla operationer måste göras i alla tre leden; gör man något på bara två ställen kan man inte räkna med att förhållandet bevarats.

Rättningsnorm: Kommenterad grafisk lösning: 3p. Beräkningslösning: helt rätt: 3p. Annars poäng efter hur stor andel av den korrekta lösningen man åstadkommit.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2017.12.01 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet.

$$x^2 + y^2 + 0{,}2 \cdot x - 0{,}6 \cdot y + 0{,}06 = 0$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r kan skrivas på formen $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$. Skriv om till det formatet, med hjälp av kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 0{,}2 \cdot x - 0{,}6 \cdot y + 0{,}06 &= 0 \\
x^2 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot x + 0{,}1^2 - 0{,}1^2 + y^2 - 2 \cdot 0{,}3 \cdot y + 0{,}3^2 - 0{,}3^2 + 0{,}06 &= 0 \\
(x + 0{,}1)^2 - 0{,}01 + (y - 0{,}3)^2 - 0{,}09 + 0{,}06 &= 0 \\
(x + 0{,}1)^2 + (y - 0{,}3)^2 &= 0{,}04 \\
(x - (-0{,}1))^2 + (y - 0{,}3)^2 &= 0{,}2^2
\end{aligned}$$

Jämför vi detta med cirkelns ekvation ser vi att medelpunktens x-koordinat är $-0{,}1$, dess y-koordinat är 0,3 och radien är 0,2 längdenheter.

Svar: Medelpunkt: $(-0{,}1,\ 0{,}3)$, radie 0,2 l.e.

Anmärkning: Observera att ekvationen *inte* kan skrivas om till $(x-(-0{,}1))+(y-0{,}3) = 0{,}2$, vilket motsvarar en rät linje. (Se uppgift 3a för förklaring!) Observera också att man vid kvadrering av ett tal med en decimal får ett resultat med två decimaler.

Rättningsnorm: Helk korrekt (med decimalkomma på rätt plats, klart angivet svar och utan omskrivning till linje): 3p. Något enstaka fel: 2p. Åtminstone redovisat att man vet vad uppgiften går ut på: 1p.

2. (a) Går det att sätta ihop ett intervall som inte innehåller några tal alls? Gör det i så fall; förklara annars varför det inte går. (1p)

(b) Går det att sätta ihop ett intervall som innehåller precis *ett* tal? Gör det i så fall; förklara annars varför det inte går. (1p)

(c) Går det att sätta ihop ett intervall som innehåller precis *två* tal? Gör det i så fall; förklara annars varför det inte går. (1p)

Lösning:

Detta var årets rekommenderade uppgift 2.8 ur *Grundlig matematik*.

(a) $\boxed{\text{Ja.}}$ Ett öppet intervall som $(0,\ 0)$, där ändpunkterna är lika, innehåller ingenting.

(b) $\boxed{\text{Ja.}}$ Ett slutet intervall som $[0,\ 0]$, där ändpunkterna är lika, innehåller denna punkt och inget annat.

(c) $\boxed{\text{Nej.}}$ Det går inte. Om intervallet innehåller två olika punkter så innehåller det dessutom alla de oändligt många tal som ligger mellan punkterna i fråga.

Rättningsnorm: Svar som man inte kan förstå om de är *ja* eller *nej* och svar som saknar någon form av motivering får 0p.

3. Din kompis löser ekvationen $\sqrt{25{\cdot}x^2 - 25} = -3{\cdot}x$ så här: [”25” ska vara ”16”]

$$\begin{aligned}
\sqrt{25{\cdot}x^2 - 16} &= -3{\cdot}x \\
\sqrt{25{\cdot}x^2} - \sqrt{16} &= -3{\cdot}x \\
5{\cdot}x - 4 &= -3{\cdot}x \qquad ☠ \\
8{\cdot}x &= 4 \\
x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(a) Förklara för kompisen varför detta inte fungerar. (Det räcker inte att skriva ”för att man ska göra så här istället”, utan du måste klargöra vad som är fel med det här.) (1p)

Lösning:

”För det första så är $\sqrt{a-b}$ inte lika med $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (utom i enstaka undantagsfall), så omskrivningen av vänsterledet i första steget ger en helt annan ekvation. För det andra är $\sqrt{x^2}$ bara lika med x om x är icke-negativ. Tittar man på hur ekvationen ser ut så inser man att x måste vara negativ; annars har vi ett positivt vänsterled och ett negativt högerled!”

Kommentar: I likhet med alla ”din kompis”-uppgifter är denna baserad på ett mycket vanligt förekommande fel. De flesta som gör detta fel hoppar över andra raden i uträkningen och gör det momentet i huvudet. Det gör att det kan vara svårt att se felaktigheten då man granskar uträkningen. Så en allmän rekommendation är att alltid göra helt klart vad det är man gör!

Rättningsnorm: Det räcker att peka ut *en* felaktighet. Däremot så duger det inte med varianter av ”borde ha gjort det här”.Om någon inte nåtts av meddelandet om feltycker får vi bedöma det fall från fall.

(b) Visa kompisen hur man korrekt löser ekvationen. (2p)

Lösning:

För att ”bli av” med rottecknet får vi kvadrera, och då måste vi kontrollera svaren eftersom kvadrering är en av de operationer som kan introducera falska rötter:

$$\begin{aligned}
\sqrt{25{\cdot}x^2 - 16} &= -3{\cdot}x \\
\left(\sqrt{25{\cdot}x^2 - 16}\right)^2 &= (-3{\cdot}x)^2 \qquad \text{KOLLA SVAREN!} \\
25{\cdot}x^2 - 16 &= 9{\cdot}x^2 \\
16{\cdot}x^2 &= 16 \qquad \text{”flytta över”} \\
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}$$

Som omnämnt i (a)-uppgiften måste x vara negativ, så svarsförslaget $x = 1$ kan direkt kastas, men vi kontrollerar ändå båda svaren i ursprungsekvationen:

$$x = 1 : \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{25 \cdot 1^2 - 16} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \\ \text{HL} = -3 \cdot 1 = -3 \end{cases} \qquad \text{ej OK}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{25 \cdot (-1)^2 - 16} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3 \\ \text{HL} = -3 \cdot (-1) = 3 \end{cases} \qquad \text{OK!}$$

(Så 1 är en falsk rot. Notera att vi där har att VL $\neq$ HL men att $\text{VL}^2 = \text{HL}^2$. Efter kvadrering är sidorna lika.)

$\boxed{\textit{Svar: } x = -1}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Något enstaka fel (som att inte testa svaren): 1p.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$(3/10 - 2/15)/(7/12) + 3/14 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Vi måste hålla ordning på prioriteten: divisioner går före additioner och subtraktioner, om inte parenteser säger annorlunda. Om vi lägger till de parenteser som prioritetsreglerna ger ser uttrycket ut som

$$\Big(((3/10) - (2/15))/(7/12)\Big) + (3/14)$$

Om vi skriver om det med horisontella bråkstreck, som också kan tjänstgöra som parenteser, får vi

$$\frac{\frac{3}{10} - \frac{2}{15}}{\frac{7}{12}} + \frac{3}{14}$$

En bit i taget: Täljaren, vars minsta gemensamma nämnare är 30:

$$\frac{3}{10} - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{9 - 4}{30} = \frac{\cancel{5}}{6 \cdot \cancel{5}} = \frac{1}{6}$$

Stora bråket:

$$\frac{\frac{3}{10} - \frac{2}{15}}{\frac{7}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{6}}{7} = \frac{2}{7}$$

Flera saker samtidigt: Minsta gemensamma nämnare för de tre bråken i dubbelbråket är $60 = 10 \cdot 6 = 15 \cdot 4 = 12 \cdot 5$. Förläng med den:

$$\frac{\frac{3}{10} - \frac{2}{15}}{\frac{7}{12}} = \frac{\left(\frac{3}{10} - \frac{2}{15}\right) \cdot 60}{\frac{7}{12} \cdot 60} = \frac{\frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot 6}{\cancel{10}} - \frac{2 \cdot \cancel{15} \cdot 4}{\cancel{15}}}{\frac{7 \cdot \cancel{12} \cdot 5}{\cancel{12}}} = \frac{18 - 8}{7 \cdot 5} = \frac{10}{7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot \cancel{5}}{7 \cdot \cancel{5}} = \frac{2}{7}$$

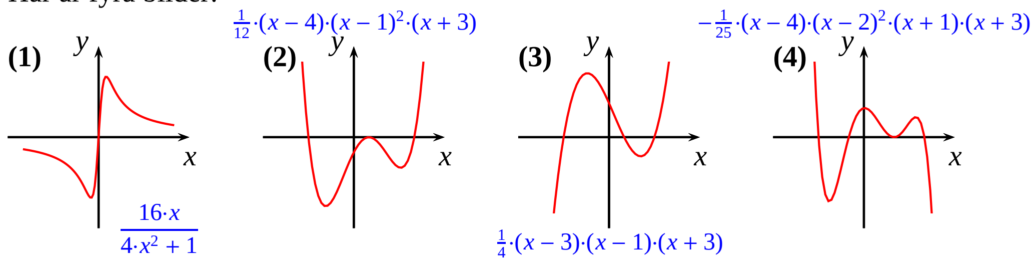
Gemensamt avslut:

$$\frac{\frac{3}{10} - \frac{2}{15}}{\frac{7}{12}} + \frac{3}{14} = \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} + \frac{3}{14} = \frac{\cancel{7}}{2 \cdot \cancel{7}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Om man feltolkar bråket och stoppar in även 3/14 under stora bråkstrecket ska man komma till svaret 14/67.

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktigt genomförd åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte vidtagits (med stopp då poängen är nere på 0). Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som en felaktighet och att misstolka hur bråket är uppbyggt är en felaktighet.

5. Här är fyra bilder:



(a) En av bilderna ovan visar grafen för ett tredjegradspolynom. Vilken av dem är det, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Ett tredjegradspolynom har högst tre reella nollställen. I bild 4 finns fyra, så den är inte rätt. Polynom med udda grad går mot negativa oändligheten i ena ändan och positiva i andra ändan, så bild 2 kan inte heller vara rätt. Och bild 1 går inte mot oändligheten. Den enda som det kan vara är $\boxed{\text{bild 3}}$.

(b) En av bilderna ovan visar grafen för ett fjärdegradspolynom. Vilken av dem är det, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Ett fjärdegradspolynom går mot samma oändlighet i båda ändarna. Det är bara $\boxed{\text{bild 2}}$ som uppfyller det.

(c) En av bilderna ovan visar grafen för något som inte är ett polynom. Vilken av dem är det, och hur ser du det? (1p)

Lösning:

Polynom går mot endera oändligheten i ändarna. $\boxed{\text{Bild 1}}$ visar något som blir allt mer likt noll då man går utåt. Det kan inte vara ett polynom. Alternativt: Tre av bilderna ser ut som typiska polynom (vågiga vid mitten, försvinner sedan uppåt/neråt). Den enda kurva som inte ser ut så lär då vara den som inte representerar ett polynom.

Kommentar: En stor mängd av de som (korrekt) pekat ut bild 1 kom med argument som ”är inte ett polynom ty saknar nollställe” och det finns ett nollställe och polynom behöver inte ha några nollställen (som x^2+1); ”är inte ett polynom ty nollstället ligger i origo” vilket det gör för bland annat alla elementära polynom som x^2, x^3, osv; ”är inte ett polynom ty har bara ett nollställe” vilket alla förstagradspolynom och alla elementära polynom har. Dessa förklaringar fungerar inte!

Rättningsnorm: Gäller alla deluppgifterna: Rätt svar kombinerat med något som kan tolkas som en relevant motivering krävs för poäng.

6. Lös följande olikhet:

$$\frac{2\cdot x^2}{x-1} \leq 9 \qquad (3p)$$

Lösning:

Detta är en delmängd av förra läsårets rekommenderade uppgift 2.18(e) ur *Mot bättre vetande*.

Standardtaktik: Skyffla över allt på ena sidan olikhetstecknet, faktorisera, teckenanalysera:

$$\frac{2\cdot x^2}{x-1} \leq 9$$
$$\frac{2\cdot x^2}{x-1} - 9 \leq 0$$
$$\frac{2\cdot x^2 - 9\cdot(x-1)}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot(x^2 - \frac{9}{2}\cdot x + \frac{9}{2})}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot(x^2 - 2\cdot\frac{9}{4}\cdot x + (\frac{9}{4})^2 - (\frac{9}{4})^2 + \frac{9\cdot 8}{2\cdot 8})}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot((x - \frac{9}{4})^2 - \frac{81}{16} + \frac{72}{16})}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot((x - \frac{9}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2)}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot((x - \frac{9}{4}) + \frac{3}{4})\cdot((x - \frac{9}{4}) - \frac{3}{4})}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot(x - \frac{6}{4})\cdot(x - \frac{12}{4})}{x-1} \leq 0$$
$$\frac{2\cdot(x - \frac{3}{2})\cdot(x - 3)}{x-1} \leq 0$$

Teckenväxlingar vid $x = 3$, $x = \frac{3}{2}$ och $x = 1$. 2:an påverkar inte tecknet. Tabell:

	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 1{,}5$	$x = 1{,}5$	$1{,}5 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x - 1{,}5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	odef	$+$	0	$-$	0	$+$

Vi ville att uttrycket skulle vara negativt eller noll, vilket det är innan 1 och mellan 1,5 och 3.

$\boxed{\textit{Svar: } (-\infty, 1) \cup [\frac{3}{2}, 3]}$

Rättningsnorm: Helt rätt (vilket inkluderar att man kan se vad svaret antas vara): 3p. Multiplicerat upp nämnaren: 0p. Något mindre fel i utförandet: 2p. Större fel i utförandet, men dock visat att man förstår vad som ska utföras: 1p.

7. Ange för vilka värden på x det är sant att

(a) $\sqrt{x^2} = x$ (1p)

Lösning:

$\boxed{x \geq 0}$. (För negativa värden på x får man siffrorna men inte tecknet på x om man kvadrerar och sedan drar rot.)

(b) $(x-5)^2 = x^2 - 10\cdot x + 25$ (1p)

Lösning:

$\boxed{\text{Alla tal}}$. (Kvadreringsreglerna har inga restriktioner.)

Anmärkning: Jag fick på ett tidigare ”din kompis”-tal, 2016.02.17:5(b), en mängd svar som i princip gick ut på att kvadreringsreglerna bara gäller för positiva tal. Det är alltså inte sant.

(c) $\frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$ (1p)

Lösning:

$\boxed{x \neq -1}$ (för då blir det odefinierat på grund av division med noll till vänster, och -2 till höger, vilket inte är samma sak).

Rättningsnorm: Gäller alla deluppgifterna: Eftersom det står ”ange” i frågan räcker det med svar. Svaret måste dock vara korrekt för poäng.

8. En vaktmästare håller på att montera ihop en leverans med stolar. Varje gång han satt ihop 20 stycken klickar han på ett stämpelur, som bokför hur lång tid han har jobbat. Efter 100 stolar ser protokollet ut så här:

stolar (st)	20	40	60	80	100
tid (min)	68	132	194	255	315,5

Hur lång tid bedömer du att han behövde för att sätta ihop 75 stolar? (3p)

Lösning:

Verkar vara ett fall för linjär interpolation.

Informellt: 75 ligger på 75 % av sträckan mellan 60 och 80, så vi kan anta att det tog 75 % av den monteringstiden att ta sig så långt. Att montera dessa 20 stolar tog 61 minuter. Tre fjärdedelar av detta är 45 minuter och 45 sekunder.

Och detta ska adderas till monteringstiden för de första 60 stolarna, vilket ger 239 minuter och 45 sekunder (vilket är 4 timmar minus 15 sekunder).

Superformellt: Vi kallar stolsantalet för x och tidsåtgången för y och drar en rät linje genom de kända punkterna $(x_1, y_1) = (60, 194)$ och $(x_2, y_2) = (80, 255)$. Tvåpunktsformeln ger riktningskoefficient

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{255 - 194}{80 - 60} = \frac{61}{20}$$

Enpunktsformeln ger

$$y - 194 = \frac{61}{20}\cdot(x - 60) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{61}{20}\cdot(x - 60) + 194$$

Det y-värde som hör till $x = 75$ kan nu beräknas:

$$y = \frac{61}{20}\cdot(75 - 60) + 194 = \frac{61}{20}\cdot 15 + 194 = \frac{61\cdot 3\cdot\cancel{5}}{4\cdot\cancel{5}} + \frac{194\cdot 4}{4} = \frac{959}{4}$$

Svar: 3 timmar 59 minuter och 45 sekunder, vilket är 239 minuter och 45 sekunder, vilket är 959/4 minuter

Kommentar: Att man som här blir allt snabbare och snabbare är normalt; det är lite inkörningstid innan man jobbar effektivt. (Däremot så verkar vaktmästaren ha struntat i sina lagstadgade pauser; man ska inte hålla på så här länge i sträck.)

Formeln som används är $t(n) = 3\cdot n + 16\cdot(1 - 0{,}5^{n/20})$, där t är total monteringstid, n antal stolar, första termen är ideal monteringstid och andra termen accumulerad fummeltid. Ingår i det jag lärde mig då jag studerade tidsplanering för byggprojekt. Enligt denna formel är svaret 239 minuter och 49 sekunder.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något mindre fel: 2p. Åtminstone visat förståelse för frågeställningen: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.Vi *funderade* på att sätta 0p här om man skrivit flera tal på samma blad, men beslöt att bara titta på hur själva lösningarna var skrivna.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2018.01.05 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. Bestäm värdemängden för funktionen f, då $f(x) = -6{\cdot}x^2 - 16{\cdot}x + 6$. (3p)

Obs! Derivataresonemang får ej användas.

Lösning:

Värdemängden är de resultat man kan få om man sätter in alla tänkbara x-värden och räknar ut; y-värdena på grafen, om man så vill. Alla grafer för andragradsfunktioner ser ut som hårnålar, och vet man på vilken höjd extrempunkten ligger och åt vilket håll kurvan har öppningen så vet man värdemängden. Extremvärdet kan bestämmas med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
&-6{\cdot}x^2 - 16{\cdot}x + 6 \\
&= -6{\cdot}(x^2 + \tfrac{16}{6}{\cdot}x - 1) && \text{Bryt ut} \\
&= -6{\cdot}(x^2 + 2{\cdot}\tfrac{4}{3}{\cdot}x + \ + (\tfrac{4}{3})^2 - (\tfrac{4}{3})^2 - 1) && \text{Kvadratkomplettera} \\
&= -6{\cdot}((x + \tfrac{4}{3})^2 - \tfrac{16}{9} - \tfrac{9}{9}) && \text{Skriv som kvadrat; gemensam nämnare} \\
&= -6{\cdot}((x + \tfrac{4}{3})^2 - \tfrac{25}{9}) && \text{Snygga upp} \\
&= -6{\cdot}(x + \tfrac{4}{3})^2 + \tfrac{50}{3} && \text{Multiplicera in}
\end{aligned}$$

Det lägsta värdet den kvadrerade parentesen $(x + 4/3)^2$ kan anta är noll, och därmed är det *högsta* värdet som första termen $-6{\cdot}(x+4/3)^2$ kan anta noll, och därmed högsta värdet som uttrycket som helhet kan anta $\frac{50}{3}$. Sedan kan alla värden lägre än detta antas.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = \{y \mid y \leq \tfrac{50}{3}\}}$

Alternativ: Parabelns symmetriska form gör att extremvärdet antas mitt emellan nollställena (förutsatt att nollställen existerar). Man kan fortsätta beräkningen från näst sista raden enligt

$$\begin{aligned}
&= -6{\cdot}((x + \tfrac{4}{3})^2 - (\tfrac{5}{3})^2) && \text{Skriv som kvadrat} \\
&= -6{\cdot}((x + \tfrac{4}{3}) + \tfrac{5}{3}){\cdot}((x + \tfrac{4}{3}) - \tfrac{5}{3}) && \text{Konjugatregeln} \\
&= -6{\cdot}(x + 3){\cdot}(x - \tfrac{1}{3}) && \text{Förenkla}
\end{aligned}$$

Ur faktoriseringen ser vi att extremvärdet här antas mitt emellan $x = -3$ och $x = 1/3$ och , vilket blir i

$$x = \frac{-3 + \frac{1}{3}}{2} = \frac{-\frac{8}{3}}{2} = -\frac{4}{3}$$

och själva värdet är

$$f(-\tfrac{4}{3}) = -6\cdot(-\tfrac{4}{3})^2 - 16\cdot(-\tfrac{4}{3}) + 6 = -\tfrac{6\cdot 16}{9} + \tfrac{64}{3} + \tfrac{6\cdot 3}{3} = \tfrac{-32+64+18}{3} = \tfrac{50}{3}$$

Eftersom andragradskoefficienten -6 är negativ ser kurvan ut som ”ledsen mun”, så extremvärdet är ett maxvärde och alla värden upp till och med detta ingår i värdemängden. Notera dock att denna metod bara fungerar om det faktiskt *finns* nollställen, vilket inte är säkert!

Med derivataresonemang kan man lokalisera extrempunkten genom att derivera och söka derivatans nollställe.

En värdetabell för heltals-x fungerar inte för att hitta extrempunkten, eftersom den inte ligger vid ett heltal.

Rättningsnorm: Rätt svar med begriplig metod: 3p. Någon mindre felaktighet i räkningarna eller oklart svar: 2p. Mer fel än så, men inte helfel: 1p. Svar baserat på värdetabell: 0p.

2. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska:

(a) $0 \in \mathbb{Z}_+$ **(b)** $0 \in \mathbb{Z}_-$ **(c)** $0 \in \mathbb{Z}$ **(d)** $0 \in \mathbb{Q}$ **(e)** $0 \in \mathbb{R}$

(f) $3{,}14 \in \mathbb{Z}$ **(g)** $3{,}14 \in \mathbb{Q}$ **(h)** $3{,}14 \in \mathbb{R}$ **(i)** $\pi \in \mathbb{Q}$ **(j)** $\pi \in \mathbb{R}$

Motivering behövs ej, men se till att det klart framgår vilket svar som hör till vilken fråga. 9–10 rätt: 3p. 6–8 rätt: 2p. 3–7 rätt: 1p. 0–2 rätt: 0p. (3p)

Lösning:

Detta var årets rekommenderade uppgift 2.2 ur *Grundlig matematik*.

Vi skriver ut vad utsagorna säger i klartext, för att tydliggöra:

(a) ”Noll är ett positivt heltal”
Svar: Falskt
(Positiva tal är större än noll)

(b) ”Noll är ett negativt heltal”
Svar: Falskt
(Negativa tal är mindre än noll)

(c) ”Noll är ett heltal”
Svar: Sant

(d) ”Noll är ett rationellt tal (alltså ett tal som kan skrivas som kvot av heltal)”
Svar: Sant
(Exempelvis är $^0/_1 = 0$, så noll kan skrivas som kvot av heltal)

(e) ”Noll är ett reellt tal (alltså ett tal som ligger på tallinjen)”
Svar: Sant

(f) ”Tre och fjorton hundradelar är ett heltal”
Svar: Falskt

(g) ”Tre och fjorton hundradelar är ett rationellt tal”
Svar: Sant
(För $3{,}14 = {}^{314}/_{100}$)

(h) ”Tre och fjorton hundradelar är ett reellt tal”
Svar: Sant

(i) ”Pi är ett rationellt tal”
Svar: Falskt

(j) ”Pi är ett reellt tal”

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{Sant}}$

Rättningsnorm: Framgår i frågan, men svar som det inte går att se vilken av frågorna de hör till och svar som det inte går att begripa om de ska tolkas som ”sant” eller ”falskt” får 0p.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{25}\right)}{4 - \frac{5}{6}} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

En bit i taget: Täljarens minsta gemensamma nämnare är $75 = 5 \cdot 15 = 3 \cdot 25$. Minustecknet utanför parentesen vänder tecken på samtliga termer innanför parentesen. Så täljaren kan förenklas som

$$\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{25}\right) = \frac{3 \cdot 15}{5 \cdot 15} - \frac{2 \cdot 5}{15 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3}{25 \cdot 3} = \frac{45 - 10 + 3}{75} = \frac{38}{25}$$

Nämnaren:

$$4 - \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{24 - 5}{6} = \frac{19}{6}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{3}{5} - \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{25}\right)}{4 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{38}{75}}{\frac{19}{6}} = \frac{38}{75} \cdot \frac{6}{19} = \frac{2 \cdot \cancel{19} \cdot 2 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 25 \cdot \cancel{19}} = \boxed{\frac{4}{25}}$$

Notera att det bara är dumt att räkna ut vad $38 \cdot 6$ och $75 \cdot 19$ är innan man börjar förkorta.

Allt på en gång: Minsta gemensamma nämnare för täljare och nämnare är $150 = 5 \cdot 30 = 15 \cdot 10 = 25 \cdot 6$. Förläng dubbelbråket med detta:

$$\frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15} + \frac{1}{25}\right) \cdot 150}{\left(4 - \frac{5}{6}\right) \cdot 150} = \frac{\frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot 30}{\cancel{5}} - \frac{2 \cdot \cancel{15} \cdot 10}{\cancel{15}} + \frac{1 \cdot \cancel{25} \cdot 6}{\cancel{25}}}{4 \cdot 150 - \frac{5 \cdot 25 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}}$$

$$= \frac{90 - 20 + 6}{600 - 125} = \frac{76}{475} = \frac{\cancel{19} \cdot 4}{\cancel{19} \cdot 25} = \boxed{\frac{4}{25}}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte utförts, med stopp då poängen är nere på noll. Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som ett fel.

4. Funktionen f definieras på följande sätt: $f(x) = \begin{cases} x & \text{om } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{om } 1 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{om } 2 \le x < 3 \\ x - 3 & \text{om } 3 \le x < 4 \\ x - 4 & \text{om } 4 \le x < 5 \end{cases}$

(a) Rita kurvan $y = f(x)$. (1p)

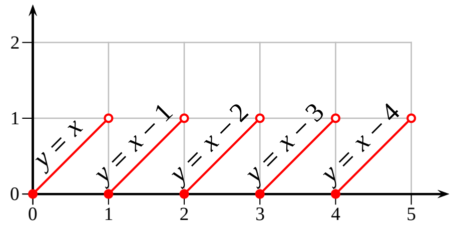
(b) Rita kurvan $y = f(2{\cdot}x)$ (1p)

(c) Rita kurvan $y = 2{\cdot}f(x)$ (1p)

Om du har problem med (a) så kan du på (b) och (c) beskriva med ord hur bilden ska relatera till bilden på (a). (Men om du skriver en sak och ritar något helt annat så kommer vi att tolka det som att du inte vet vad svaret är.)

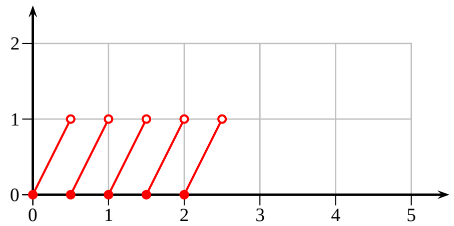
Lösning:

Definitionsmängden är $0 \le x < 5$ (eftersom det inte finns någon information om hur funktionsvärdena ska vara utanför det området). Detta är en styckvis definierad funktion, eftersom den är definierad på olika sätt för olika tal. Alla formlerna motsvarar räta linjer, så kurvan är sammansatt av ett antal linjestycken. Bild:



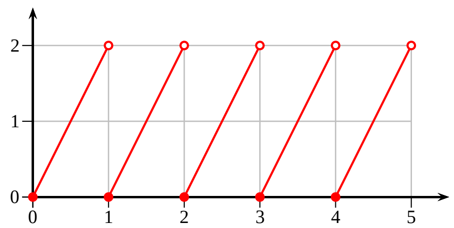
$y = f(2\cdot x)$ blir samma kurva men ihopdragen med en faktor 2 horisontellt. Vill man även ha fram formeln så är det bara att sätta in $2\cdot x$ på alla ställen där det står x i ursprungsformeln:

$$f(2{\cdot}x) = \begin{cases} 2{\cdot}x & \text{om } 0 \le 2{\cdot}x < 1 \\ 2{\cdot}x - 1 & \text{om } 1 \le 2{\cdot}x < 2 \\ 2{\cdot}x - 2 & \text{om } 2 \le 2{\cdot}x < 3 \\ 2{\cdot}x - 3 & \text{om } 3 \le 2{\cdot}x < 4 \\ 2{\cdot}x - 4 & \text{om } 4 \le 2{\cdot}x < 5 \end{cases} = \begin{cases} 2{\cdot}x & \text{om } 0 \le x < 0{,}5 \\ 2{\cdot}x - 1 & \text{om } 0{,}5 \le x < 1 \\ 2{\cdot}x - 2 & \text{om } 1 \le x < 1{,}5 \\ 2{\cdot}x - 3 & \text{om } 1{,}5 \le x < 2 \\ 2{\cdot}x - 4 & \text{om } 2 \le x < 2{,}5 \end{cases}$$



$y = 2\cdot f(x)$ blir samma kurva men utdragen med en faktor 2 vertikalt. Vill man även ha fram formeln så är det bara att fördubbla de beräknade värdena:

$$2{\cdot}f(x) = \begin{cases} 2{\cdot}x & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 2{\cdot}(x - 1) & \text{om } 1 \le x < 2 \\ 2{\cdot}(x - 2) & \text{om } 2 \le x < 3 \\ 2{\cdot}(x - 3) & \text{om } 3 \le x < 4 \\ 2{\cdot}(x - 4) & \text{om } 4 \le x < 5 \end{cases} = \begin{cases} 2{\cdot}x & \text{om } 0 \le x < 1 \\ 2{\cdot}x - 2 & \text{om } 1 \le x < 2 \\ 2{\cdot}x - 4 & \text{om } 2 \le x < 3 \\ 2{\cdot}x - 6 & \text{om } 3 \le x < 4 \\ 2{\cdot}x - 8 & \text{om } 4 \le x < 5 \end{cases}$$



Kommentar: Denna funktion kallas *bråkdelen av x*, och betecknas i många programspråk med `frac(x)`, och grafen brukar kallas *sågtandskurva*. Funktionen är definierad i hela $\mathbb{R}$, men denna mindre del av den ryms på ett lagom papper.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men inga avdrag för följdfel på b och c.

5. Lös ekvationen $4^x - 3{\cdot}2^{x+2} + 32 = 0$

Tips: använd substitution! (3p)

Lösning:

Både $4^x = (2{\cdot}2)^x = 2^x{\cdot}2^x = (2^x)^2$ och $2^{x+2} = 2^x{\cdot}2^2$ innehåller 2^x. Vi substituerar detta uttryck:

$$\begin{aligned}
4^x - 3{\cdot}2^{x+2} + 32 &= 0 \\
(2^x)^2 - 3{\cdot}2^x{\cdot}2^2 + 32 &= 0 && \text{Skriv som 2-potenser} \\
t^2 - 12{\cdot}t + 32 &= 0 && \boxed{\text{Sätt } 2^x = t} \\
t^2 - 2{\cdot}6{\cdot}t + 6^2 - 6^2 + 32 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(t-6)^2 - 36 + 32 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat} \\
(t-6)^2 &= 4 && \text{"Flytta över"} \\
(t-6)^2 &= 2^2 && \text{Skriv som kvadrat} \\
t - 6 &= \pm 2 && \text{Två möjligheter!} \\
t - 6 = 2 \quad &\vee \quad t - 6 = -2 && \text{Separaträkna} \\
t = 8 \quad &\quad\;\; t = 4 && \text{"Flytta över"} \\
2^x = 2^3 \quad &\quad\;\; 2^x = 2^2 && \text{Återsubstituera, skriv som 2-potens} \\
x = 3 \quad &\quad\;\; x = 2 && \text{Samma potens, samma exponent}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{2, 3\}}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Största delen: 2p. Åtminstone fixat substitutionen: 1p. Hittat svaren med testning: 1p.

6. **(a)** Förklara varför det inte fungerar att dividera med noll.

(b) Förklara varför nedanstående bråkräkningsregel gäller:

$$a\Big/\frac{1}{b} = a{\cdot}b$$

(Du kan utgå från att *a* och *b* är positiva heltal.)

Det räcker inte att säga ”därför att regeln är sådan”, utan det du ska förklara är *varför* regeln är sådan. (Tänk dig att du ska förklara det för en kurskamrat som inte har förstått.) Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

”Division är ju motsatsen till multiplikation; om man säger att tio delat med fem blir två så betyder det att man behöver två stycken femmor för att få ihop till tio.

Så tio delat med noll skulle vara det antal nollor man behöver för att få ihop till tio. Men man kan inte få ihop till tio med bara noll! Hur många nollor man än lägger ihop så har man inte mer än noll. Så svaret är ”något sådant antal finns inte” (eller mer formellt: ”odefinierat”).

Och försöker jag dela noll med noll så vill jag ha det antal nollor jag ska ha för att slutsumman ska bli noll, och där går ju vilket antal som helst lika bra. Så då är svaret ”kan inte säga vad det här blir” (vilket också kallas ”odefinierat”).

Om man föredrar att se på division som ”dela lika” så kan man notera att det är väldigt svårt att dela något i ingen bit alls!

På samma sätt måste tio delat på en tredjedel vara det antal tredjedelar som behövs för att få ihop till tio. Man behöver tre tredjedelar för att få ihop till ett, och tio gånger så många för att få ihop till tio. Och samma resonemang för alla andra sorts delar!”

Om man anser att bråkförlängning redan är utredd (vilket den brukar vara, eftersom den är kopplad till addition och addition brukar komma innan division) så kan man också göra

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{a\cdot b}{\frac{1}{b}\cdot b} = \frac{a\cdot b}{1} = a\cdot b$$

(Inlämnad av ett antal studenter.)

Alternativt: Man kan se $a/\frac{1}{b} = a\cdot b$ som ett specialfall av den mer generella regeln $\frac{a}{c}/\frac{d}{b} = \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}$ (med $c = d = 1$). I boken motiveras dock den generella regeln med hjälp av detta specialfall, vilket innebär att man börjar komma in på cirkelresonemang om man sedan förklarar specialfallet med hjälp av det generella. Jag inser dock att andra böcker kan härleda reglerna i en annan ordning, och om man bevisat den generella regeln *utan* att ta hjälp specialfallet är det sedan fritt fram att motivera specialfallet med hjälp av det generella. Och eftersom jag inte vet hur härledningarna i studenternas gymnasieböcker såg ut så tar jag och accepterar även denna typ av förklaring.

Rättningsnorm: Svårt att formulera, men förklaringen bör ta fasta i innebörden i division. ”För att fröken sagt det” är dock inte ett godtagbart svar.

7. Förkorta nedanstående uttryck maximalt:

$$\frac{a^3-9\cdot a\cdot b^2}{3\cdot a^2+18\cdot a\cdot b+27\cdot b^2}\cdot\frac{9\cdot a^2+81\cdot b^2}{a^2-3\cdot a\cdot b} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

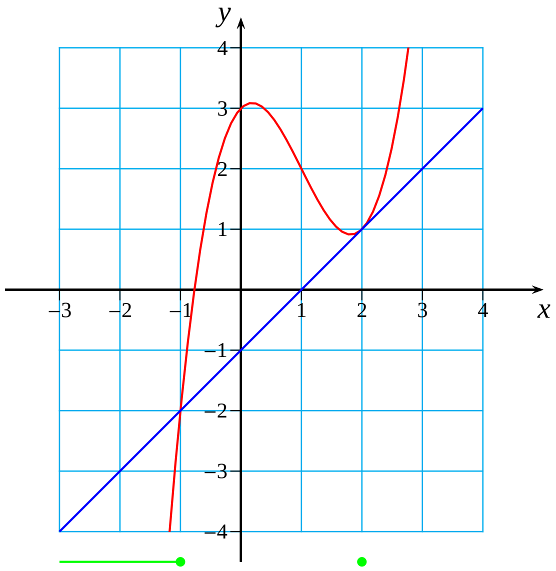
Man bör faktorisera, och så ”stryka” gemensamma faktorer. Det verkar vara en bra start att bryta ut uppenbara faktorer, och så se vad som blir kvar:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^3-9\cdot a\cdot b^2}{3\cdot a^2+18\cdot a\cdot b+27\cdot b^2}\cdot\frac{9\cdot a^2+81\cdot b^2}{a^2-3\cdot a\cdot b}\\
&=\frac{\cancel{a}\cdot(a^2-9\cdot b^2)\cdot 9\cdot(a^2+9\cdot b^2)}{3\cdot(a^2+6\cdot a\cdot b+9\cdot b^2)\cdot\cancel{a}\cdot(a-3\cdot b)}\\
&=\frac{(a^2-(3\cdot b)^2)\cdot\cancel{3}\cdot 3\cdot(a^2+(3\cdot b)^2)}{\cancel{3}\cdot(a^2+2\cdot a\cdot(3\cdot b)+(3\cdot b)^2)\cdot(a-3\cdot b)}\\
&=\frac{\cancel{(a+3\cdot b)}\cdot\cancel{(a-3\cdot b)}\cdot 3\cdot(a^2+(3\cdot b)^2)}{(a+3\cdot b)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(a-3\cdot b)}}\\
&=\boxed{\frac{3\cdot(a^2+9\cdot b^2)}{a+3\cdot b}}
\end{aligned}$$

Förkortningarna är giltiga så länge de strukna faktorerna inte är noll, eftersom ”noll delat med noll” är odefinierat, se föregående uppgift.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte utförts, med stopp då poängen är nere på noll.

8. **(a)** I koordinatsystemet nedan finns kurvorna $y = x^3 - 3\cdot x^2 + x + 3$ och $y = x - 1$.



Lös olikheten $x^3 - 3{\cdot}x^2 + x + 3 \leq x - 1$. Du behöver inte göra någon uträkning, utan det går bra att läsa ut svaret ur bilden, bara du förklarar hur du kunde se vad det blev. (2p)

Lösning:

Linjen måste representera högerledet, så vågen (typisk polynomkurva) måste representera vänsterledet. Vi vill veta var vågen ligger *lägre* än linjen. Det gör den fram till och med $x = -1$ (där de skär), och så tangerar de vid $x = 2$ (där de alltså ligger på samma höjd). Detta är markerat med grönt i bilden.

$\boxed{\textit{Svar: } \{x \mid x \leq -1 \ \vee \ x = 2\}}$

Om man skulle vilja lösa uppgiften genom att räkna (vilket var fullt tillåtet även om det inte var obligatoriskt) så blir det ungefär så här:

$$x^3 - 3{\cdot}x^2 + x + 3 \leq x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3{\cdot}x^2 + 4 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad (x+1){\cdot}(x-2)^2 \leq 0$$

Tabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x + 1$	$-$	0	+	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
VL	$-$	0	+	0	+

Vi ville att det omskrivna uttrycket skulle vara negativt eller noll, vilket det är till och med -1 och i 2.

Kommentar: Har du problem med den här frågan är det något **mycket** viktigt begreppsmässigt som du har missat, och den luckan kommer att sabotera många andra problemtyper, inte bara olikheter. Så titta på det här momentet tills du faktiskt förstår det, och be om hjälp om du inte gör det!

Rättningsnorm: Korrekt svar med något som kan tolkas som en motivering: 2p. Nästan rätt: 1p

(b) Berätta hur man går till väga då man löser en dubbel olikhet. (Tänk dig att du ska förklara det för en medstudent som redan vet hur man löser olikheter med bara ett olikhetstecken.) (1p)

Lösning:

Om du har en dubbel olikhet typ VL < ML < HL (vänster led, mittenled, höger led) så kan du dela upp den i två olikheter: VL < ML och ML < HL. Lös dessa var för sig. Sedan tar du skärningen mellan de två lösningmängderna, för det blir de punkter där båda utsagorna är sanna, vilket var de punkter vi letade efter.

(En del extremt enkla dubbla olikheter kan lösas genom att man ser till att göra alla operationer i *alla tre* leden. Om man använder operationer som bevarar ordningen så kan man komma fram till lösningen den vägen. Men den föregående metoden fungerar garanterat.)

Rättningsnorm: Förklaring som behandlar dubbel olikhet och som det verkar troligt att en medstudent skulle fatta: 1p

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Det vanligaste notationsfelet var att inte ha med likhetstecken i uppgift 1, 3 och 7. Alla dessa uppgifter handlar om att skriva om ett uttryck till annat format men med samma värde som förut. Och då ska man ha med att det är *lika med* det man startade med!

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2018.03.20 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Det var ganska många inlämnade lösningar som såg ut som att lösaren över huvud taget inte tittat på materialet. Jag har därför skrivit in lite om vad av det som står angivet i studiehandledningen som varit relevant i de olika uppgifterna. Förhoppningen är att det ska ge lite känsla för hur man använder studiehandledningen.

1. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{4\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 6\cdot x + 7}{x^2 - 2\cdot x + 3}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rl}
 & 4\cdot x \quad + 13 \\
x^2 - 2\cdot x + 3 & \overline{\big)\, 4\cdot x^3 + \ 5\cdot x^2 - \ 6\cdot x + \ 7} \\
 & -(4\cdot x^3 - \ 8\cdot x^2 + 12\cdot x) \\
 & \qquad 13\cdot x^2 - 18\cdot x + \ 7 \\
 & \qquad -(13\cdot x^2 - 26\cdot x + 39) \\
 & \qquad\qquad\qquad 8\cdot x - 32
\end{array}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Kvot: } 4\cdot x + 13\text{; rest: } 8\cdot x - 32}$

Svaret kan lätt kontrolleras, genom att man sätter tillbaka kvoten på bråkstrecket igen. (Det är därför slarvfel ger poängavdrag.)

Rättningsnorm: Begriplig uträkning med klart och tydligt svar: 3p. Slarvfel eller otydlighet i svaret: 2p. Systematiskt fel i beräkningen, men rätt grundtanke: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision. Metod 5.1, Exempel 7.6, Övning 7.7.

2. $a \in \mathbb{R}$ och $b \in \mathbb{R}$. Avgör om följande implikationer är sanna eller falska. Motivera!

(a) $a^2 < b^2 \quad \Rightarrow \quad a < b$ (1p)

(b) $a^3 < b^3 \quad \Rightarrow \quad a < b$ (1p)

(c) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > b$ (1p)

Lösning:

En implikation räknas som sann om sanning i pilens början *garanterar* sanning vid pilens slut. Notera att ett enda motexempel räcker för att visa att en implikation *inte* gäller, men för att visa att den gäller måste man argumentera mer generellt.

(a) Nej. Exempelvis gäller att $(-1)^2 < (-2)^2$, men $-1 \not< -2$. (Om det dessutom varit givet att talen skulle vara *positiva* hade det varit sant!)

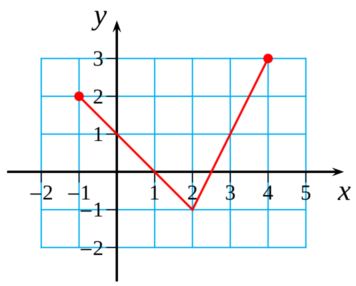
(b) Ja. Kubikkurvan lutar hela tiden uppåt, så "y" som sitter långt upp hör till "x" som sitter långt åt höger. (Detta är ett exempel på ett generellt resonemang.)

(c) Nej. Exempelvis gäller att $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$, men $-2 \not> 3$. (Också här gäller att implikationen är sann för positiva tal.)

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en motivering ger poäng. Om man på både (a) och (c) bortsett från möjligheten att talen skulle kunna vara negativa men motiverat väl i övrigt ges 1p totalt för de två uppgifterna.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion; Övning 9.3.

3. Här är kurvan $y = f(x)$.



Rita kurvan $y = (f(x))^2$. Det ska framgå hur du visste att den skulle se ut som du ritade. (Uppgiften kan kräva att du tänkter själv. Den går att lösa med hjälp det vi gått igenom i kursen, men fordrar att man kombinerar några olika saker.) (3p)

Lösning:

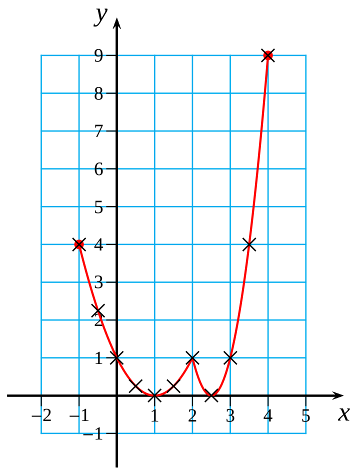
Tabell: Det går att läsa av funktionsvärdena ur kurvan. Om man börjar med heltalspunkterna (och tar mellanliggande punkter om man ser att man vill ha mer data) får man

x	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	2	1,5	1	0,5	0	−0,5	−1	0	1	2	3
$(f(x))^2$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	0	1	4	9

Formel: Funktionen är helt klart styckvis definierad, hopskarvad av två linjestycken. Det första går ett steg neråt på ett steg framåt, så riktningskoefficienten är −1, och den skär y-axeln på höjden 1, så konstanttermen är 1. För det andra linjestycket är motsvarande värden 2 och −5 (man får tänka sig att man förlänger linjestycket så att det skär y-axeln). Formel:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & -1 \le x < 2 \\ 2\cdot x - 5 & 2 \le x \le 4 \end{cases} \qquad (f(x))^2 = \begin{cases} (-x+1)^2 & -1 \le x < 2 \\ (2\cdot x - 5)^2 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$(-x+1)^2 = (-(x-1))^2 = (-1)^2\cdot(x-1)^2 = (x-1)^2$, så första biten blir den vanliga parabeln flyttad 1 steg åt höger, så att minpunkten hamnar vid $x = 1$. $(2\cdot x-5)^2 = (2\cdot(x-2{,}5))^2 = 4\cdot(x-2{,}5)^2$, vilket blir den vanliga parabeln flyttad 2,5 steg åt höger och utdragen med en faktor 4 på höjden. Eller så gör man upp en värdetabell baserad på de här formlerna.



Rättningsnorm: På ett ungefär: helt rätt: 3p. Åtminstone visat några goda idéer: minst 1p.

Referenser: Uppgiften handlade om att kunna göra något som inte exakt korresponderade med något genomräknat exempel från kursen, men följande kan anses ha relevans: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient; Undersökning 4.1; Övning 4.16.

4. Lös följande olikhet: $x^3 - 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x > 0$ (3p)

Lösning:

Förra läsårets rekommenderade uppgift 2.17(a) ur *Mot bättre vetande*.

Faktorisera och gör teckenstudium. Vi skriver om vänsterledet:

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= x^3 - 3{\cdot}x^2 + 2{\cdot}x \\
&= x{\cdot}(x^2 - 3{\cdot}x + 2) \\
&= x{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}1{,}5{\cdot}x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 + 2) \\
&= x{\cdot}((x - 1{,}5)^2 - 2{,}25 + 2) \\
&= x{\cdot}((x - 1{,}5)^2 - 0{,}5^2) \\
&= x{\cdot}((x - 1{,}5) + 0{,}5){\cdot}((x - 1{,}5) - 0{,}5) \\
&= x{\cdot}(x - 1){\cdot}(x - 2)
\end{aligned}$$

Så olikheten kan skrivas

$$x{\cdot}(x - 1){\cdot}(x - 2) > 0$$

Teckenbyten vid $x = 0$, $x = 1$ och $x = 2$. Teckentabell:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
x	−	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	0	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	−	−	0	+
VL	−	0	+	0	−	0	+

Vi ville att uttrycket skulle vara positivt, vilket det tydligen är mellan 0 och 1 samt efter 2.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in ((0,\ 1) \cup (2,\ \infty))}$

Rättningsnorm: Begriplig lösning med tydligt svar: 3p. I övrigt poäng för hur stor procent av korrekt lösning man åstadkommit.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Lösa olikheter innehållande polynom [...]; Metod 9.1, Övning 9.9, 9.10.

5. Definiera intervallen A och B genom $A = ({}^2\!/_5, {}^5\!/_2)$ och $B = [-2{,}5,\ 0{,}4]$.

(a) Rita en tallinje och markera de två intervallen på tallinjen. (1p)

(b) Bestäm unionen av de två intervallen: $A \cup B$. (1p)

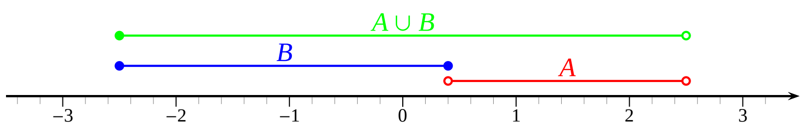
(c) Bestäm snittet av de två intervallen: $A \cap B$. (1p)

Lösning:

Enklast är att ta alla uppgifterna i samma vända. Det kan underlätta uppritningen att uttrycka båda intervallens ändpunkter på decimalform:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad\qquad \frac{5}{2} = 2{,}5$$

(Annars kan man ta båda på bråkform; det underlättar hur som helst att ha båda på *samma* form.)



Det ena intervallet börjar så fort det andra slutar.

Unionen är de punkter som ingår i intervallen sammanslagna; de som tillhör ena eller andra (eller båda, vilket ingen punkt gör). Det blir allt från och med vänster ända av B till höger ända av A: $\boxed{[-2{,}5,\ 2{,}5)}$.

Snittet av de två intervallen är de punkter som intervallen har gemensamma, vilket är ingen alls: $\boxed{\{\}}$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Union, snitt; Du ska kunna göra följande: • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt. • Utnyttja tallinjen för att illustrera exempelvis intervall och räkneoperationer. • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall); Exempel 2.1, Övning 2.9.

6. Multiplicera in konstanten:

(a) $4{\cdot}(a-6)^2$ (1p)

(b) $3{\cdot}\sqrt{1-2{\cdot}b}$ (1p)

Bryt ut en konstant:

(c) $(10{\cdot}c-15)^{-1}$ (1p)

Lösning:

Delar av rekommenderad uppgift 6.13 och 6.14, med utbytt variabelnamn i (b)-uppgiften.

(a) $4{\cdot}(a-6)^2 = 2^2{\cdot}(a-6)^2 = (2{\cdot}(a-6))^2 = \boxed{(2{\cdot}a-12)^2}$

(b) $3{\cdot}\sqrt{1-2{\cdot}b} = \sqrt{9}{\cdot}\sqrt{1-2{\cdot}b} = \sqrt{9{\cdot}(1-2{\cdot}b)} = \boxed{\sqrt{9-18{\cdot}b}}$

(c) $(10{\cdot}c-15)^{-1} = (5{\cdot}(2{\cdot}c-3))^{-1} = 5^{-1}{\cdot}(2{\cdot}c-3)^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{5}{\cdot}(2{\cdot}c-3)^{-1}}$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel!

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [...] tillämpa potensräkningsreglerna. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer; Exempel 5.2; Övning 5.13, 6.13, 6.14.

7. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{4}{3} + \frac{4}{15}\bigg/\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Prioritetsreglerna säger att divisioner går före additioner och subtraktioner, vilket ger att uttrycket skrivet med enbart horisontella bråkstreck blir

$$\frac{4}{3} + \frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{5}} - \frac{2}{5} = \frac{4}{3} + \frac{4}{15}\cdot\frac{5}{2} - \frac{2}{5} = \frac{4\cdot 5}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot\cancel{2}\cdot 5}{15\cdot\cancel{2}} - \frac{2\cdot 3}{5\cdot 3} = \frac{20+10-6}{15} = \frac{24}{15} = \frac{\cancel{3}\cdot 8}{\cancel{3}\cdot 5} = \boxed{\frac{8}{5}}$$

Om man inte följer prioritetsreglerna utan tolkar uttrycket som

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{15}}{\frac{2}{5} - \frac{2}{5}} \qquad ☠$$

bör man omedelbart se att detta är odefinierat på grund av division med noll!

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktigt genomförd åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej genomförts, med stopp då poängen är nere på 0. Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som ett fel, och att ta fel på prioritetsordningen *är* ett fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som +, −, · och /) korrekt [. . .] • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror; Övning 3.11, 3.29.

8. Din kompis har löst en ekvation så här:

$$\begin{aligned}
x + 2 &= \sqrt{x+4} \\
x^2 + 2^2 &= x + 4 && \text{Kvadrera; KOLLA SVAREN!} \\
x^2 &= x && \text{Subtrahera 4} \\
x^2 - x &= 0 && \text{Subtrahera } x \\
x\cdot(x-1) &= 0 && \text{Faktorisera} \\
x = 0 \ \lor\ x - 1 &= 0 && \text{Nollfaktorlagen} \\
x &= 1 && \text{Addera 1}
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren:

$$x = 0 : \begin{cases} \text{VL} = 0 + 2 = 2 \\ \text{HL} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \end{cases} \qquad \text{VL} = \text{HL OK!}$$

$$x = 1 : \begin{cases} \text{VL} = 1 + 2 = 3 \\ \text{HL} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{cases} \qquad \text{VL} \neq \text{HL ej OK}$$

Svar: $x = 0$.

”Varför fick jag inte full poäng för det här?”

(a) Förklara för kompisen var felet i lösningen ligger. (1p)

Lösning:
På andra raden har du kvadrerat de enskilda termerna i vänsterledet istället för att kvadrera vänsterledet som en helhet. Alla operationer vid ekvationslösning ska göras på identiskt sätt i båda led, och det kräver att de görs på leden som helheter.

(Ett bra sätt att hitta felet är att göra b-uppgiften först, utan att tjuvkika på den här uträkningen. Sedan jämför man beräkningarna och ser var de skiljer sig.)

Kommentar: Detta fel är oerhört vanligt då kvadreringar ingår som del i ett större räkneproblem, även bland personer som kan kvadreringsreglerna perfekt!

Rättningsnorm: Man måste ha pekat ut något som är direkt fel i uträkningen för poäng. (Förhoppningsvis finns det bara det här felet, men någon kanske upptäckler något annat!)

(b) Lös ekvationen på ett korrekt sätt, för att visa kompisen hur det ska göras. (2p)

Lösning:
Nu ser vi hur det blir om vi gör kvadreringen på hela ledet:

$$\begin{aligned}
x + 2 &= \sqrt{x+4} \\
(x+2)^2 &= x + 4 && \text{Kvadrera; KOLLA SVAREN!} \\
x^2 + 4\cdot x + 4 &= x + 4 && \text{Utveckla} \\
x^2 + 4\cdot x &= x && \text{Subtrahera 4} \\
x^2 + 3x &= 0 && \text{Subtrahera } x \\
x\cdot(x+3) &= 0 && \text{Faktorisera} \\
x = 0 \ &\vee\ x + 3 = 0 \\
& \quad\quad\ \ x = -3
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren:

$$x = 0 : \begin{cases} \text{VL} = 0 + 2 = 2 \\ \text{HL} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2 \end{cases} \qquad \text{VL} = \text{HL OK!}$$

$$x = -3 : \begin{cases} \text{VL} = -3 + 2 = -1 \\ \text{HL} = \sqrt{-3+4} = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \qquad \text{VL} \neq \text{HL ej OK}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x = 0}$

Notera att trots att kompisen fick rätt *svar* så var lösningen ändå felaktig. I nästan alla ekvationer av det här slaget så ger kompisens räkningar helt fel svar. (Intressant extrauppgift: fundera på hur man går till väga för att konstruera en ekvation där denna felräkning inte ger fel svar.) Man kan för övrigt se att något är på tok på kompisens lösning därför att den ”falska” (i själva verket felaktiga) roten inte uppfyller att $\text{VL}^2 = \text{HL}^2$ vilket däremot vår egen falska rot gör.

Rättningsnorm: Helt korrekt beräkning: 2p. Något mindre fel, ej samma som i a-uppgiften: 1p. Mer fel än så: 0p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [...] tillämpa kvadreringsreglerna [...] • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter; Metod 8.9; Övning 8.24.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Vanligaste felet är att utelämna likhetstecken; att ha pilar istället för likhetstecken samt att ha likhetstecken mellan saker som inte är lika. Näst vanligast är att inte ha parentes runt negativa tal i multiplikationer och potensberäkningar.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Ett antal kolleger anser att jag ska sätta 0p på presentationen för de som skrivit flera uppgifter på samma papper. Jag har allvarligt funderat på saken, men beslutat att tills vidare bara titta på om uppgifterna går att tolka.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2018.06.05 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Lös ekvationen $\dfrac{4\cdot x - 4\cdot x^2 + x^3}{4\cdot x^2 - 16} = 0.$ (3p)

Lösning:

Ett bråk är noll om och endast om täljaren är noll samtidigt som nämnaren *inte* är det.

Täljaren:

$$4\cdot x - 4\cdot x^2 + x^3 = x\cdot(4 - 4\cdot x + x^2) = x\cdot(2 - x)^2$$

En produkt är noll om och endast om någon faktor är noll, så vi har alternativen $x = 0$ eller $2 - x = 0$, dvs. $x = 2$. (Här hade vi för övrigt ett exempel på en tredjegradsekvation med bara två olika lösningar.)

Nämnaren:

$$4\cdot x^2 - 16 = 4\cdot(x^2 - 4) = 4\cdot(x + 2)\cdot(x - 2)$$

För att detta inte ska vara noll krävs $x + 2 \neq 0$ och $x - 2 \neq 0$, vilket innebär $x \notin \{2, -2\}$.

Totalt: x måste vara något av talen 0 och 2, och får inte vara något av talen 2 och −2. Då är enda alternativet

$\boxed{\textit{Svar: } x = 0}$

Rättningsnorm: Hittat båda täljarens nollställen: 2p. Kastat bort det som inte kan användas: 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{7}{\frac{5}{14} + \frac{10}{21}} - \frac{\frac{14}{5} + \frac{21}{10}}{7}$$ (3p)

Lösning:

Bit för bit:
Första nämnaren:

$$\frac{5\cdot 3}{14\cdot 3}+\frac{10\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{15+20}{42}=\frac{35}{42}=\frac{5\cdot\cancel{7}}{6\cdot\cancel{7}}=\frac{5}{6}$$

Första bråket:

$$\frac{7}{\frac{5}{14}+\frac{10}{21}}=\frac{7}{\frac{5}{6}}=7\cdot\frac{6}{5}=\frac{42}{5}$$

Andra täljaren:

$$\frac{14\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{21}{10}=\frac{28+21}{10}=\frac{49}{10}$$

Andra bråket:

$$\frac{\frac{14}{5}+\frac{21}{10}}{7}=\frac{\frac{49}{10}}{7}=\frac{7\cdot\cancel{7}}{10\cdot\cancel{7}}=\frac{7}{10}$$

Helheten:

$$\frac{7}{\frac{5}{14}+\frac{10}{21}}-\frac{\frac{14}{5}+\frac{21}{10}}{7}=\frac{42\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{7}{10}=\frac{84-7}{10}=\boxed{\frac{77}{10}}$$

Mer på en gång:
Första bråket:

$$\frac{7\cdot 42}{(\frac{5}{14}+\frac{10}{21})\cdot 42}=\frac{7\cdot 42}{\frac{5\cdot 3\cdot\cancel{14}}{\cancel{14}}+\frac{10\cdot 2\cdot\cancel{21}}{\cancel{21}}}=\frac{7\cdot 42}{15+20}=\frac{7\cdot 42}{35}=\frac{\cancel{7}\cdot 42}{\cancel{7}\cdot 5}=\frac{42}{5}$$

Andra bråket:

$$\frac{(\frac{14}{5}+\frac{21}{10})\cdot 10}{7\cdot 10}=\frac{\frac{14\cdot 2\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}+\frac{21\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}}{7\cdot 10}=\frac{7\cdot 2\cdot 2+7\cdot 3}{7\cdot 10}=\frac{\cancel{7}\cdot(4+3)}{\cancel{7}\cdot 10}=\frac{7}{10}$$

Avslutningen blir identisk med den i den andra varianten.

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktigt genomförd åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej genomförts, med stopp då poängen är nere på 0. Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som ett fel.

3. Funktionen f beräknas enligt $f(x)=\sqrt{6-x}-\dfrac{1}{\sqrt{x+6}}$. Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (3p)

Lösning:

Om inget annat sägs får man utgå från att definitionsmängden är den största talmängd som inte resulterar i ERROR då man försöker beräkna funktionsvärdet för ett element i mängden.

Kvadratrotsfunktionen är definierad för icke-negativa reella tal. Division är definierat för allt utom noll. Addition och subtraktion kan inte ställa till med problem.

För att $\sqrt{6-x}$ ska vara definierad krävs att

$$6-x\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad 6\geq x \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty,6]$$

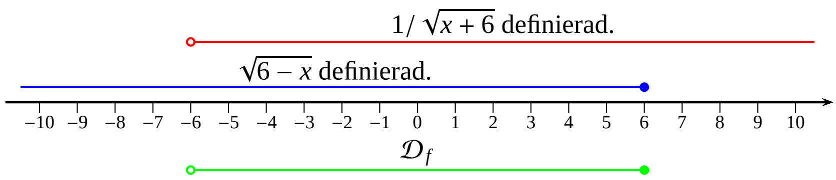
För att $1/\sqrt{x+6}$ ska vara definierad krävs att $x + 6 \geq 0$ och att $\sqrt{x+6} \neq 0$, vilket ger

$$x + 6 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -6 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-6, \infty)$$

För att båda termerna ska vara definierade krävs att

$$(x \in (-\infty, 6]) \wedge (x \in (-6, \infty)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in ((-\infty, 6] \cap (-6, \infty)) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-6, 6]$$

Grafiskt:



$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = (-6, 6]}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

4. (a) Förklara vad som menas med *naturliga tal*. (1p)

Lösning:

Tal som representerar $\boxed{\text{antal}}$: ingen, en, två, . . . ; ickenegativa heltal.

(Det finns läroböcker som definierar de naturliga talen som positiva heltal, och eftersom kursdeltagare kan ha haft en sådan bok accepteras även detta svar.)

Vi har mängderna $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{Z}$.

(b) Talet -2 tillhör någon/några av dessa mängder. Vilken/vilka? (1p)

Lösning:

$\mathbb{N}$ är de naturliga talen, se (a). $\mathbb{Z}$ är de hela talen, en utvidgning av de naturliga talen där man även har med negativa sådana. $\mathbb{Q}$ är de rationella talen, tal som kan skrivas som bråk mellan heltal. De hela talen är en del av dessa. $\mathbb{R}$ är de reella talen, tallinjen med alla de ovanstående talmängderna och de icke-rationella talen dessutom.

Minus två är inte ett naturligt tal, eftersom det är omöjligt att ha minus två äpplen i påsen. Däremot är det ett heltal, och alla heltal är också rationella tal, och alla rationella tal är reella tal. Så -2 tillhör $\boxed{\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \text{ och } \mathbb{R}}$.

(c) Talet $\sqrt{2}$ tillhör någon/några av dessa mängder. Vilken/vilka? (1p)

Lösning:

Roten ur två är inte ett rationellt tal, det bevisas i boken. Men det går att pricka in på tallinjen, så det är ett reellt tal, och tillhör därmed $\boxed{\mathbb{R}}$

Rättningsnorm: (Gäller samtliga deluppgifter) Kan nog bara bli rätt eller fel.

5. Vid ett fysikexperiment med fritt fall från ett högt torn har ni fått följande mätdata:

Sträcka (m)	0	5	10	15	20
Tid (s)	0,0	1,0	1,4	1,7	2,0

(a) Hur lång bör föremålet ha fallit efter 1,5 s? (2p)

(b) Bedömer du att ditt svar på (a) är en överskattning eller en underskattning av det verkliga svaret? (1p)

Lösning:

Föremålet accelererar, så hastigheten ändrar sig hela tiden. Men vi kan genomföra en linjär interpolation utgående från de två tiderna på ömse sidor om 1,5 s.

Informellt: Mellan tiden 1,4 s och 1,7 s (under ett tidsintervall på 0,3 s) förflyttade sig föremålet 5 m. 1,5 s ligger en tredjedel in i intervallet, så sträckan det föll borde vara ungefär en tredjedel av de fem metrarna. Detta ska sedan läggas till den sträcka det redan fallit under de första 1,4 sekunderna. Borde bli

$$s(1{,}5) \approx 10 + \tfrac{1}{3}\cdot 5 \approx 10 + 1{,}7 = \boxed{11{,}7\,\text{m}}$$

Superformellt: Vi ställer upp uttrycket för en linje, baserat på de två mätpunkterna. Om vi kallar tiden för x och sträckan för y så får vi ur de givna punkterna $(x_1, y_1) = (1{,}4,\ 10)$ och $(x_2, y_2) = (1{,}7,\ 15)$ riktningskoefficienten

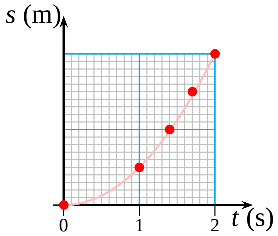
$$k = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 10}{1{,}7 - 1{,}4} = \frac{5}{0{,}3} = \frac{50}{3}$$

Enpunktsformeln ger oss då ett uttryck för linjen enligt

$$y = k(x - x_1) + y - 1 = \frac{50}{3}(x - 1{,}4) + 10$$

vilket för $x = 1{,}5$ ger

$$y = \frac{50}{3}(1{,}5 - 1{,}4) + 10 = \frac{5}{3} + \frac{30}{3} = \boxed{\frac{35}{3}\,\text{m}}$$



Felanalys: Om vi vill avgöra om detta är en överskattning eller en underskattning så kan vi konstatera att föremålet accelererar. Det betyder att det går långsammare i början av de 0,3 sekunderna, och därför inte hinner riktigt den tredjedel av sträckan som vi räknat med. Det verkliga svaret är då något lägre, och detta är en $\boxed{\text{överskattning}}$.

Eftersom värdena är avrundade till en decimal kan man också tolka givna data som att föremålet på grund av luftmotstånd nått en stabil hastighet. I det fallet skulle beräknat värde vara korrekt.

Mer exakt räkning: Om man kommer ihåg sin fysik så är sambandet mellan sträcka och tid vid rörelse med konstant acceleration

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Om man tittar på de givna värdena verkar de matcha denna formel med $s_0 = 0\,\text{m}$, $v_0 = 0\,\text{m/s}$ och $a = 10\,\text{m/s}^2$. Ur detta kan man räkna ett bättre värde än vad den linjära interpolationen ger, och då blir frågan om över/underskattning annorlunda.

Rättningsnorm: (a) Fått ett svar med en vettig metod: 2p. Visat förståelse för frågan: 1p. (b) Motiverat svar konsistent med det man gjorde på (a): 1p.

6. Bestäm medelpunkt och radie på nedanstående cirkel:

$$x^2 - 5 \cdot x + y^2 + 6 \cdot y - 5 = 0 \qquad (3p)$$

Lösning:

Detta är en av årets rekommenderade uppgifter, 6.23(b) ur *Grundlig matematik*. (Den hade nummer 6.7(b) förra läsåret, och var rekommenderad då med.)

Kvadratkomplettera:

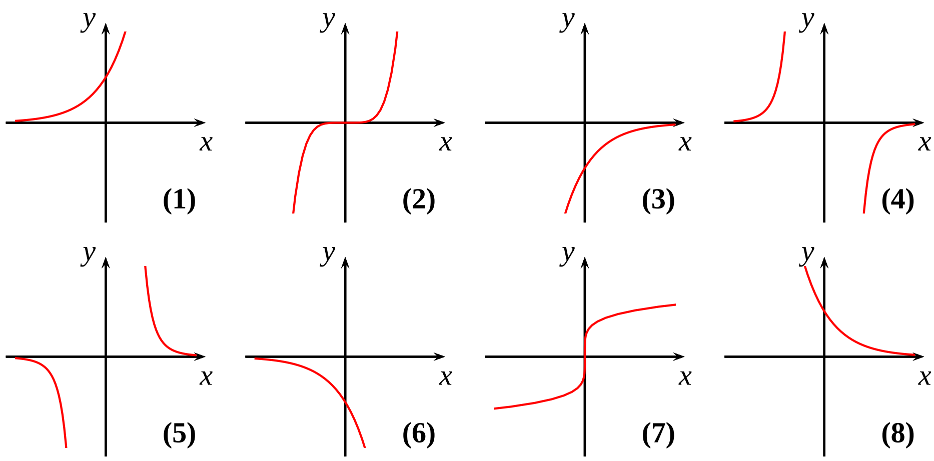
$$\begin{aligned}
x^2 - 5\cdot x + y^2 + 6\cdot y - 5 &= 0 \\
x^2 - 2\cdot\tfrac{5}{2}\cdot x + (\tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2 & \\
+\, y^2 + 2\cdot 3\cdot y + 3^2 - 3^2 - 5 &= 0 && \text{kvadratkomplettera} \\
(x - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} + (y+3)^2 - 9 - 5 &= 0 && \text{skriv som kvadrater} \\
(x - \tfrac{5}{2})^2 + (y+3)^2 &= \tfrac{25}{4} + \tfrac{9\cdot 4}{4} + + \tfrac{5\cdot 4}{4} && \text{"flytta över", gör liknämnigt} \\
(x - \tfrac{5}{2})^2 + (y+3)^2 &= \tfrac{81}{4} && \text{förenkla} \\
(x - \tfrac{5}{2})^2 + (y-(-3))^2 &= (\tfrac{9}{2})^2 && \text{skriv på standardform}
\end{aligned}$$

En cirkel med medelpunkt i $(x, y) = (a, b)$ och radie r kan skrivas $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, så vi har

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Medelpunkt: } (x, y) = (\tfrac{5}{2}, -3), \text{ radie } \tfrac{9}{2}}$

Kommentar: Notera att ekvationen *inte* kan skrivas om till $(x - \frac{5}{2}) + (y - (-3)) = \frac{9}{2}$, ett uttryck som motsvarar en rät linje. (Omskrivningen är omöjlig därför att $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$, annat än om det ena av talen är noll och det andra ickenegativt.)

Rättningsnorm: Korrekt beräkning: 2p. Klart svar: 1p. Om uttrycket skrivits om till linje ges max 2p.



7. I figuren ovan finns graferna för åtta olika funktioner. Här nedanför finns sex olika formler. Vilken formel hör till vilken bild? (Det ska alltså bli två bilder över.)

(a) x^5 **(b)** x^{-5} **(c)** $x^{1/5}$ **(d)** 5^x **(e)** 5^{-x} **(f)** -5^x

0–1 rätt: 0p. 2–3 rätt: 1p. 4–5 rätt: 2p. 6 rätt: 3p. Motivering behövs ej. (3p)

Lösning:

Enklast är att titta på formlerna, fundera på hur tillhörande graf ser ut, och så identifiera grafen bland bilderna. (Alternativt tittar man på kurvorna och försöker se vilken typ av funktion de motsvarar, varefter man försöker hitta en formel av den typen i listan.)

(a) x^5: positiv udda potens: S-kurva som passerar origo nästan horisontellt. $\boxed{(2)}$

(b) x^{-5}. Negativ potens: odefinierad vid 0, närmar sig x-axeln då man avlägsnar sig från y-axeln. Udda potens: negativa tal ger negativa resultat och positiva positiva. $\boxed{(5)}$

(c) $x^{1/5}$. Udda rot, ser ut som en liggande variant av motsvarande potens, alltså S-kurva som passerar origo nästan vertikalt. $\boxed{(7)}$

(d) 5^x. Exponentialfunktion med bas större än 1. Växande funktion, alla värden positiva. $\boxed{(1)}$

(e) $5^{-x} = 0{,}2^x$. Exponentialfunktion med bas mindre än 1. Avtagande, men fortfarande med alla värden positiva. $\boxed{(8)}$

(f) -5^x. Exponentialfunktion med bas större än 1, men teckenvänd, så att alla värden ligger under y-axeln istället för över. $\boxed{(6)}$.

De kurvor som ingen formel gjort anspråk på är (3), som motsvarar -5^{-x}, och (4), som motsvarar $-x^{-5}$.

Kommer man inte alls ihåg hur formler och kurvformer hänger ihop kan man göra en grov värdetabell för formlerna:

	-2	-1	0	1	2
x^5	-128	-1	0	1	128
$1/x^5$	$-1/128$	-1	odef	1	$1/128$
$\sqrt[5]{x}$	?	-1	0	1	?
5^x	$1/25$	$1/5$	1	5	25
$1/5^x$	25	5	1	$1/5$	$1/25$
$-(5^x)$	$-1/25$	$-1/5$	-1	-5	-25

($\sqrt[5]{2}$ verkade svår att bestämma med huvudräkning; bör vara ”ett komma nånting”. Och notera att prioritetsordningen gör att -5^x beräknas som $-(5^x)$.) Baserat på tabellen kan man nu göra grovskisser och matcha mot bilderna.

Rättningsnorm: Se frågan.

8. Din kompis har löst nedanstående olikhet så här:

$(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-7) > 0$

Teckenbyten i $x = 5$, $x = 6$ och $x = 7$. Sätt upp tabell:

	4	5	6	7	8
$x-5$	−	0	+	+	+
$x-6$	−	−	0	+	+
$x-7$	−	−	−	0	+
VL	−	0	0	0	+

Uttrycket är positivt från och med $x = 8$, så svaret är $x \geq 8$.

☠

(a) Förklara för din kompis vad det är för fel i resonemangen.

(b) Visa din kompis en korrekt lösning av olikheten.

Uppgiften bedöms som en helhet. För full poäng fordras både en förklaring av <u>varför</u> kompisens metod inte funkar och en korrekt lösning. (3p)

Lösning:

”Du, det finns tal *mellan* de hela talen också! Du har inte kollat på vad som händer mellan 5 och 6, och mellan 6 och 7. Och värdet bör ha slagit om till positivt innan 8; 7,1 och 7,01 och så vidare ligger till höger om 7. Om vi tar och lägger till det där i tabellen, och skriver lite bättre rubriker, så blir den

	$x<5$	$x=5$	$5<x<6$	$x=6$	$6<x<7$	$x=7$	$x>7$
$x-5$	−	0	+	+	+	+	+
$x-6$	−	−	−	0	+	+	+
$x-7$	−	−	−	−	−	0	+
VL	−	0	+	0	−	0	+

Så lösningsmängden blir området mellan 5 och 6, och så allt till höger om 7.”

$\boxed{\textit{Svar: } (5,\ 6) \cup (7,\ \infty)}$

Kommentarer: Uppgiften är inspirerad av ett vanligt förekommande fel på föregående tenta. Ett sätt att hitta problemen i en sådan här uppgift är att skriva av uppgiften, och utan att titta på det felaktiga lösningsförslaget lösa den från början. Sedan jämför man.

Ett antal skrivande förklarade att man skulle börja med att multiplicera ihop parenteserna. Nästa steg skulle då bli att bryta itu uttrycket i parenteser igen, eftersom teckenstudium är baserat på egenskaperna hos multiplikation. Man skulle då ha lagt minst en sidas uträkningar på att komma tillbaka till frågan exakt som den såg ut från början. Tänk alltid igenom *syftet* med de omskrivningar ni gör!

Rättningsnorm: För full poäng måste det vara troligt att kompisen skulle förstå vad problemet var och att det korrekta svaret ges. Delpoäng i proportion till hur mycket av detta man åstadkommit.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras. (Man riskerar alltså inte några poäng på att vid tidsbrist lämna in en inte renskriven uppgift.)

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2018.08.14 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Lös följande olikhet: $\dfrac{49}{3-2\cdot x} \le 2\cdot x + 11$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan och faktorisera:

$$\frac{49}{3-2\cdot x} \le 2\cdot x + 11$$

$$\frac{49}{3-2\cdot x} - (2\cdot x + 11) \le 0 \qquad \text{”flytta över”}$$

$$\frac{49-(2\cdot x + 11)\cdot(3-2\cdot x)}{3-2\cdot x} \le 0 \qquad \text{sätt på gemensamt bråkstreck}$$

$$\frac{49-6\cdot x + 4\cdot x^2 - 33 + 22\cdot x)}{3-2\cdot x} \le 0 \qquad \text{utveckla}$$

$$\frac{4\cdot x^2 + 16\cdot x + 16}{3-2\cdot x} \le 0 \qquad \text{förenkla}$$

$$\frac{4\cdot(x^2 + 4\cdot x + 4)}{3-2\cdot x} \le 0 \qquad \text{bryt ut}$$

$$\frac{4\cdot(x+2)^2}{3-2\cdot x} \le 0 \qquad \text{skriv som kvadrat}$$

Det händer saker med tecknet då $x + 2 = 0$ och då $3 - 2\cdot x = 0$, vilket är vid $x = -2$ och $x = 1{,}5$. Teckentabell:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1{,}5$	$x = 1{,}5$	$x > 1{,}5$
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
$3-2\cdot x$	+	+	+	0	–
	+	0	+	odef	–

4:an påverkar inte tecknet, och behöver inte tas med om man inte vill.

Vi vill veta var uttrycket är negativt eller noll, vilket är i punkten $x = -2$ och intervallet $x > 1{,}5$.

$\boxed{\textit{Svar: } x = -2 \ \vee \ x \in (1{,}5, \infty)}$

Anmärkning: Om man ritar upp kurvan $y = 49/(3 - 2\cdot x)$ och linjen $y = 2\cdot x + 11$ i ett koordinatsystem så ser man att kurvan tangerar linjen i $x = -2$. Vidare består kurvan av två stycken, ett till vänster om $x = 1{,}5$ och ett till höger. Högerdelen ligger helt och hållet nedanför linjen; vänsterdelen ligger ovanför, förutom i tangeringpunkten där de sammanfaller.

Rättningsnorm: Helt rätt med klart och tydligt svar: 3p. Ganska rätt: 2p. Åtminstone visat förståelse för problemet: 1p.

2. Vårt universum består av heltalen mellan −6 och 6 (vilket är 13 tal). Vidare har vi mängderna $M_2 = \{0, \pm2, \pm4, \pm6\}$, $M_3 = \{0, \pm3, \pm6\}$, $M_4 = \{0, \pm4\}$, $M_5 = \{0, \pm5\}$ och $M_6 = \{0, \pm6\}$. (M_2 är de tal i universum som är delbara med 2, och så vidare.)

Vilka av följande utsagor är sanna? (Motivering behövs ej.)

(a) $M_2 \subseteq M_3$ (1/3p)

(b) $M_3 \subseteq M_2$ (1/3p)

(c) $M_4 \subseteq M_2$ (1/3p)

Bestäm följande:

(d) $M_5 \cap M_6$ (1p)

(e) $M_5 \cup M_6$ (1p)

Poängen avrundas till närmsta heltal.

Lösning:

Detta var en delmängd av rekommenderad uppgift 1.15 ur *Grundlig matematik*. (Den hade nummer 1.7 förra läsåret, och var rekommenderad då också.) Vi motiverar ändå:

(a) De flesta elementen i M_2 ingår inte i M_3, så påståendet att M_2 är en del av M_3 är $\boxed{\text{falskt}}$.

(b) Inte heller är M_3 en del av M_2, så $\boxed{\text{falskt}}$.

(c) Men alla elementen i M_4 ingår i M_2, så det är $\boxed{\text{sant}}$ att M_4 är en del av M_2.
Rättningsnorm: Gäller (a)–(c): kan bara bli rätt eller fel.

(d) Snittet är allt som mängderna har gemensamt, vilket här är $\boxed{\{0\}}$ och inget mer.

(e) Unionen är det som mängderna innehåller tillsammans, vilket är $\boxed{\{0,\ \pm5,\ \pm6\}}$.
Rättningsnorm: Gäller (d)–(e): Om det är uppenbart att man blandat ihop beteckningarna för union och snitt ges 1p totalt för de två uppgifterna.

3. Faktorisera polynomet $p(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 8$ fullständigt. (3p)

Lösning:

Om α är ett nollställe så är $x - \alpha$ en faktor, så vi kan lika gärna leta nollställen.

Tredjegradspolynom, så den enda metod som gåtts igenom är att gissa ett nollställe och se om man gissat rätt. Om polynomet har högstagradskoefficient 1 är eventuella heltalsnollställen faktorer i konstanttermen. Det här polynomet har inte högstagradskoefficient 1, men med en utbrytning kan vi ordna saken:

$$p(x) = 2 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 8 = 2 \cdot (x^3 + 2 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 4)$$

Konstanttermen i det inre polynomet är −4, så relevant att testa är ±1, ±2 och ±4.

$$\begin{aligned}
x = 1: &\quad p(1) = 2 \cdot (1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 4) = -6 \\
x = -1: &\quad p(-1) = 2 \cdot ((-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 4) = -2 \\
x = 2: &\quad p(2) = 2 \cdot (2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 4) = 16 \\
x = -2: &\quad p(-2) = 2 \cdot ((-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 4) = 0
\end{aligned}$$

−2 är ett nollställe, så $x + 2$ är en faktor. Då kan vi bryta ner problemet med polynomdivision (typsatt på amerikanska, eftersom jag har ett färdigt paket som gör det åt mig):

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & & -2 & \\
\hline
x+2) & x^3 + 2x^2 & - 2x & - 4 & \\
 & -x^3 - 2x^2 & & & \\
\hline
 & & -2x & -4 & \\
 & & 2x & +4 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Den återstående andragradsfaktorn $x^2 - 2$ kan faktoriseras med konjugatregeln:

$$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})\cdot(x - \sqrt{2})$$

(Notera att det inte finns någon kvadrat att kompettera här.)

Nu är polynomet uppstyckat i förstagradsfaktorer:

$$\boxed{\textit{Svar: } p(x) = 2\cdot(x+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

Alternativlösning: Om man är observant ser man att man kan inleda faktoriseringen med två utbrytningar:

$$x^3 + 2\cdot x^2 - 2\cdot x - 4 = x^2\cdot(x+2) - 2\cdot(x+2) = (x^2 - 2)\cdot(x+2)$$

Då slipper man testningen och polynomdivisionen.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Gjort någonting konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även "slarvfel" klassas som fel.

$$(5/6 + 2/3)/(9/8) - 4/3 \qquad (3p)$$

Lösning:

Uttrycket är lättare att läsa skrivet med horisontella bråkstreck, vilket enligt prioritetsreglerna blir

$$\frac{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{9}{8}} - \frac{4}{3}$$

Bit för bit: Första täljaren:

$$\frac{5}{6} + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 2} = \frac{5+4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}} = \frac{3}{2}$$

Första bråket:

$$\frac{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{8}{9} = \frac{\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3\cdot\cancel{3}} = \frac{4}{3}$$

Helheten:

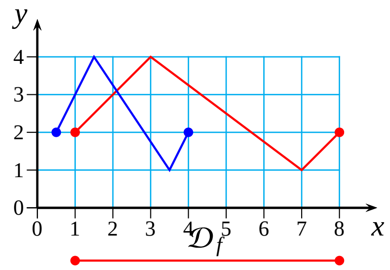
$$\frac{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}{\frac{9}{8}} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \boxed{0}$$

Mer på en gång: Minsta gemensamma nämnare för alla tre bråken i dubbelbråket är $24 = 6\cdot 4 = 3\cdot 8$. Förläng dubbelbråket med detta så plattar det ut sig:

$$\frac{(\frac{5}{6}+\frac{2}{3})\cdot 24}{\frac{9}{8}\cdot 24} = \frac{\frac{5\cdot\cancel{6}\cdot 4}{\cancel{6}} + \frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 8}{\cancel{3}}}{\frac{9\cdot 3\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}}} = \frac{20+16}{27} = \frac{36}{27} = \frac{4\cdot\cancel{9}}{3\cdot\cancel{9}} = \frac{4}{3}$$

Rättningsnorm: Starta med 3p och dra 1p för varje felaktig åtgärd och för varje nödvändig åtgärd som ej gjorts, med stopp då poängen är nere på noll. Att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som ett fel, och att ta fel på hur bråket är uppbyggt *är* ett fel.

5. Här är kurvan $y = f(x)$:



(a) Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (1p)

Lösning:

Definitionsmängden är de indatavärden, här x-värden, som används i funktionen. Av bilden att döma är det intervallet $\boxed{1 \le x \le 8}$, markerat nedanför koordinatsystemet i bild.

Rättningsnorm: Går det att se att den skrivand menar rätt så överses med fel i notationen.

(b) Rita kurvan $y = f(2\cdot x)$ (2p)

Lösning:

Kända effekter av transformationer: Multiplikation med 2 gör att allt händer dubbelt så fort. Det som tidigare hände vid $x = 1$ kommer nu att hända redan vid $x = {}^1\!/_2$, eftersom $1 = 2\cdot{}^1\!/_2$; det som hände vid $x = 8$ händer nu vid $x = 4$. Kurvan dras ihop med en faktor 2 horisontellt, inritat i bilden i blått.

Via formel: Vi kan börja med att ta fram hur funktionen beräknas. Kurvan består av tre linjestycken, så vi har en styckvis definierad funktion. Analys (ej utskriven här) ger:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & 1 \le x < 3 \\ -0{,}75\cdot x + 6{,}25 & 3 \le x < 7 \\ x-6 & 7 \le x \le 8 \end{cases}$$

$f(2\cdot x)$ får vi genom att sätta in $2\cdot x$ på *alla* ställen i formeln där det nu står x:

$$f(2\cdot x) = \begin{cases} 2\cdot x+1 & 1 \le 2\cdot x < 3 \\ -0{,}75\cdot 2\cdot x + 6{,}25 & 3 \le 2\cdot x < 7 \\ 2\cdot x-6 & 7 \le 2\cdot x \le 8 \end{cases} = \begin{cases} 2\cdot x+1 & 0{,}5 \le x < 1{,}5 \\ -1{,}5\cdot x + 6{,}25 & 1{,}5 \le x < 3{,}5 \\ 2\cdot x-6 & 3{,}5 \le x \le 4 \end{cases}$$

Sedan ritar man enligt dessa instruktioner.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Mindre fel, som att ha missat var kurvan ska börja: 1p.

6. Lös följande ekvation: $(x + 98)^2 = x + 100$ (3p)

Lösning:

Med substitution: Eftersom det inte verkar så roligt att kvadrera 98 kan man förenkla räkningarna med hjälp av substitution:

$$\begin{aligned}
(x+98)^2 &= x + 100 && \\
(x+98)^2 &= x + 98 + 2 && \text{gör uttrycken mer lika varandra} \\
t^2 &= t + 2 && \boxed{\text{Sätt } x + 98 = t} \\
t^2 - t - 2 &= 0 && \text{"flytta över"} \\
t^2 - 2{\cdot}0{,}5{\cdot}t + 0{,}5^2 - 0{,}5^2 - 2 &= 0 && \text{kvadratkomplettera} \\
(t - 0{,}5)^2 - 2{,}25 &= 0 && \text{skriv som kvadrat} \\
(t - 0{,}5)^2 &= 1{,}5^2 && \text{"flytta över"; skriv som kvadrat} \\
t - 0{,}5 &= \pm 1{,}5 && \text{glöm inte } \pm! \\
t = -1 \quad &\vee \quad t = 2 && \\
x + 98 = -1 \quad &\quad\; x + 98 = 2 && \\
x = -99 \quad &\quad\; x = -96 &&
\end{aligned}$$

Utan substitution: Det är dock möjligt att lösa uppgiften även utan list:

$$\begin{aligned}
(x+98)^2 &= x + 100 \\
x^2 + 196{\cdot}x + 9604 &= x + 100 \\
x^2 + 195{\cdot}x + 9504 &= 0 \\
x^2 + 2{\cdot}\frac{195}{2}{\cdot}x + \left(\frac{195}{2}\right)^2 - \left(\frac{195}{2}\right)^2 + 9504 &= 0 \\
\left(x + \frac{195}{2}\right)^2 - \frac{38025}{4} + \frac{4{\cdot}9504}{4} &= 0 \\
\left(x + \frac{195}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
\left(x + \frac{195}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
x + \frac{195}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\
x = -\frac{192}{2} \quad &\vee \quad x = -\frac{198}{2} \\
x = -96 \quad &\quad\; x = -99
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-96, -99\}}$

Rättningsnorm: Substiuerat: 1p. Resten: 2p. För lösning utan substitution fördelas alla 3 poängen över lösningen.

7. Dina kompisar Adam och Beda tittar på en extenta, med en uppgift som handlar om att matcha grafer med funktionstyper.

(a) Adam säger ”Den där kan inte vara ett fjärdegradspolynom, för den har bara tre nollställen”. Har Adam rätt eller fel? Motivera!

Lösning:

$\boxed{\text{Fel}}$. Sats 7.3 i boken säger: ”Ett polynom av grad n har högst n reella nollställen”. Så ett polynom av grad 4 har högst 4 reella nollställen. Antalet 3 uppfyller detta, så det är fullt möjligt att det handlar om ett fjärdegradspolynom. (Exempelvis har fjärdegradspolynomet $(x-1){\cdot}x^2{\cdot}(x+1)$ de tre nollställena 1, 0 och -1.)

(b) Beda säger ”Den där kan inte vara ett tredjegradspolynom, för den har hela fyra nollställen”. Har Beda rätt eller fel? Motivera!

Lösning:

$\boxed{\text{Rätt}}$. Samma argument, men 4 nollställen är inte ”högst 3”, så det kan omöjligt vara ett tredjegradspolynom.

Rättningsnorm: Gäller (a) och (b). Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en korrekt motivering ger poäng. Svar där det är oklart om de betyder ”rätt” eller ”fel” får 0p.

(c) Nu kommer din kompis Ceasar också, och frågar ”Hur ser man egentligen på grafen om en exponentialfunktion har en bas större eller mindre än ett?”. Förklara för Caesar!

Lösning:

Om man tar ett tal större än ett och ”gångrar” ihop en massa exemplar av detta så blir det mer ju fler man tar. Det gör att värdena på $y = a^x$ blir större ju längre åt höger man går, om $a > 1$. Kurvan lutar då uppåt. Och tvärtom med tal mindre än ett; då lutar kurvan neråt. (Om basen är t.ex. 0,5 innebär förflyttning åt höger att man halverar och halverar och halverar, och då blir det allt mindre och mindre kvar.

Rättningsnorm: Förklaring som det verkar möjligt att en medstudent skulle förstå får poäng.

Kommentar: Uppgiften är inspirerad av inlämnade svar på en tidigare tenta.

8. Funktionen f definieras enligt $f(x) = 25{\cdot}x^2 + 40{\cdot}x + 25$. Bestäm funktionens värdemängd. (Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Värdemängden (”y-värdena”) kan läsas ut ur den kvadratkompletterade formen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 25{\cdot}x^2 + 40{\cdot}x + 25 \\
&= 25{\cdot}(x^2 + \frac{40}{25}{\cdot}x + 1) \\
&= 25{\cdot}(x^2 + 2{\cdot}\frac{4}{5}{\cdot}x + \ + (\frac{4}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 + 1) \\
&= 25{\cdot}((x + \frac{4}{5})^2 - \frac{16}{25} + \frac{25}{25}) \\
&= 25{\cdot}((x + \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}) \\
&= 25{\cdot}(x + \frac{4}{5})^2 + 9
\end{aligned}$$

$(x + 4/5)^2$ kan inte bli mindre än noll, och därför kan inte heller $25{\cdot}(x + 4/5)^2$ bli mindre än noll, och därmed kan inte $25{\cdot}(x + 4/5)^2 + 9$ bli mindre än 9. Däremot kan uttrycket bli hur stort som helst, det är bara att ta till x tillräckligt stort. Värdemängden är därför

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = \{y \mid y \geq 9\}}$

Kommentar: Att hitta extrempunkten genom att utnyttja att den ligger mitt emellan nollställena går här dåligt, då det inte finns några nollställen. Att göra upp en värdetabell fungerar förmodligen inte heller, eftersom man antagligen inte testar $x = -4/5$. Med derivator kan man hitta extrempunkten, men den metoden fick inte användas.

Rättningsnorm: Kommit till korrekt svar: 3p. Mindre fel i utförandet: 2p. Åtminstone gjort något konstruktivt, mer avancerat än värdetabell: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2018.10.03 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Förenkla följande potensuttryck maximalt:

$$\frac{\sqrt{a \cdot b^4}}{(a^{1/4} \cdot b^{-1})^{-2}}$$

Du kan utgå från att alla talen är positiva. (3p)

Lösning:

För positiva baser gäller alla potensräkningsregelr utan restriktioner:

$$\frac{\sqrt{a \cdot b^4}}{(a^{1/4} \cdot b^{-1})^{-2}} = \frac{(a \cdot b^4)^{1/2}}{(a^{1/4})^{-2} \cdot (b^{-1})^{-2}} = \frac{a^{1/2} \cdot (b^4)^{1/2}}{a^{-2/4} \cdot b^2} = \frac{a^{1/2} \cdot b^2}{a^{-1/2} \cdot b^2} = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = \boxed{a}$$

Kommentar: Notera att det där om ”positiva tal” är nödvändigt. Om något av talen är noll blir det ”odefinierat” på grund av division med noll, och om a är negativ får vi problem med rot ur negativt tal. (I det här fallet skulle det dock inte vara något problem om b var negativ.)

Rättningsnorm: Starta med 3p och minska med 1p för varje felaktigt genomför åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits, med stopp då poängen är nere på 0. Även ”slarvfel” räknas som fel.

2. Är följande utsagor sanna eller falska? Motivera kortfattat!

(a) $0{,}5^a > 0{,}5^b \quad \Rightarrow \quad a > b$ (1p)

Lösning:

”Om en halv upphöjt i a är större än en halv upphöjt i b så måste a vara större än b”. $\boxed{\text{Falskt}}$ eftersom exponentialfunktionskurva med bas mindre än ett lutar neråt. Exempelvis är $0{,}5^1 > 0{,}5^2$ (dvs. $0{,}5 > 0{,}25$), men $1 \not> 2$.

(b) $a \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{Q}$ (1p)

Lösning:

”Om a är ett heltal så kan a skrivas som ett bråk mellan heltal”. $\boxed{\text{Sant}}$ för man kan exempelvis skriva $a = a/1$. (Notera att detta inte motsäger att det handlar om reella tal, eftersom både heltal och rationella tal är reella tal.)

(c) $a^3 = b^3 \quad\Rightarrow\quad a = b$ (1p)

Lösning:

”Om a och b har samma kubik så måste de vara samma tal”. $\boxed{\text{Sant}}$ eftersom kubikkurvan lutar uppåt hela vägen, så samma värde antas inte på två olika platser. (Dock är det inte sant om man börjar blanda in icke-reella tal också. Då går det att hitta tre olika tal med samma kubik. Notera också att det inte hade varit sant om exponenten varit ett jämnt tal.)

Rättningsnorm: Gäller alla uppgifterna: motiveringen ska vara tillräcklig för att man ska kunna tro att den skrivande inte bara singlat slant om vad som ska vara svaret. Den behöver dock inte vara speciellt välformulerad.

Utgå från att det handlar om reella tal.

3. Är $x^2 - 1$ en faktor i polynomet $p(x) = x^4 + x^3 - 6{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x + 1$?

Motivera! (3p)

Lösning:

Polynomdivision: Vi provar att dividera. Går det jämnt ut så har vi en faktor, annars inte:

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x^2 + x - 5 \\ \cline{2-2}
x^2 - 1) & x^4 + x^3 - 6x^2 + 3x + 1 \\
 & -x^4 \qquad\quad + x^2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad x^3 - 5x^2 + 3x \\
 & \qquad -x^3 \qquad\quad + x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -5x^2 + 4x + 1 \\
 & \qquad\qquad\ \ 5x^2 \qquad - 5 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 4x - 4
\end{array}$$

Vi fick resten $4{\cdot}x - 4$, så divisionen gick *inte* jämnt ut.

Nollställen: Om $x^2 - 1 = (x+1){\cdot}(x-1)$ är en faktor så ska både $x = 1$ och $x = -1$ vara nollställen till $p(x)$. Testa:

$$\begin{aligned}
x = 1: &\quad p(1) = 1^4 + 1^3 - 6{\cdot}1^2 + 3{\cdot}1 + 1 = 1 + 1 + 6 + 3 + 1 = 0 \\
x = -1: &\quad p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 6{\cdot}(-1)^2 + 3{\cdot}(-1) + 1 \\
&\qquad\quad = 1 - 1 - 6 - 3 + 1 = -8 \neq 0
\end{aligned}$$

$x - 1$ är en faktor men $x + 1$ är det inte, så $x^2 - 1$ är inte en faktor i $p(x)$.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Nej.}}$

Rättningsnorm: Polynomdivision: 2p för korrekt division, 1p vid felräkning (eftersom resultatet är lätt att kontrollera), och 1p för svaret. Nollställen: Korrekt tanke: 1p. Korrekt genomfört: 2p.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}$$ (3p)

Lösning:

Steg för steg: Täljaren:

$$\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{5}{6}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}=\frac{3}{2}$$

Nämnaren:

$$\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{3}{12}+\frac{10}{12}=\frac{13}{12}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{13}{12}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{13}=\frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 6}{\cancel{2}\cdot 13}=\boxed{\frac{18}{13}}$$

Allt på en gång: Minsta gemensamma nämnare för samtliga bråk är $12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4$. Förlänger vi dubbelbråket med detta plattar det ut sig:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)\cdot 12}{\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot 12}=\frac{\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 4}{\cancel{3}}+\frac{5\cdot 2\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}}{\frac{1\cdot 3\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}+\frac{5\cdot 2\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}}=\frac{8+10}{3+10}=\boxed{\frac{18}{13}}$$

Kommentar: Notera att man *inte* kan ”förkorta bort” den gemensamma termen $5/6$ ur täljare och nämnare! Notera också att ett horisontellt bråkstreck också tjänstgör som parentes. Skriver man detta uttryck med sneda bråkstreck blir det $(2/3+5/6)/(1/4+5/6)$; additionerna ska genomföras innan den stora divisionen.

Rättningsnorm: Starta med 3p och minska med 1p för varje felaktigt genomför åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits, med stopp då poängen är nere på 0. Även ”slarvfel” och att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som fel.

5. Funktionen f definieras enligt följande:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cdot x & \text{då } -2\le x\le 2\\ 2\cdot x-5 & \text{då } \ \ 2< x\le 4\end{cases}$$

(a) Rita funktionens graf. Obs! Koordinatsystemet måste vara graderat! (1p)

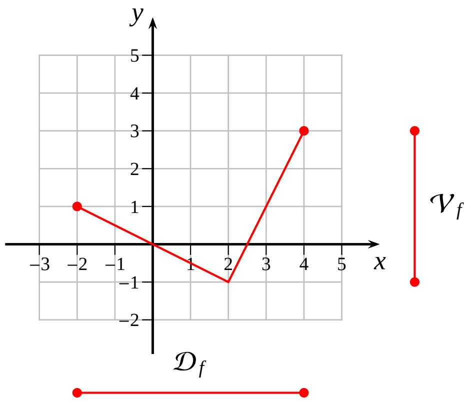
(b) Ange funktionens definitionsmängd. (1p)

(c) Ange funktionens värdemängd. (1p)

Lösning:

Alla deluppgifterna i ett:

Kurvan består av två linjestycken; ett som går ett halvt steg neråt för varje steg framåt passerar y-axeln i origo, och ett som går två steg uppåt för varje steg framåt och där en tänkt inledning skär y-axeln på höjd -5. (Eller så kan man beräkna y-värdet för två x på varje linjestycke och lägga linjalen genom de beräknade punkterna.)



Definitionsmängden är alla x-värden på kurvan: $\boxed{\mathcal{D}_f = [-2, 4]}$

Värdemängden är alla y-värden på kurvan: $\boxed{\mathcal{V}_f = [-1, 3]}$

Rättningsnorm: Grafen ska vara *helt* rätt för poäng. Mängderna ska stämma med bilden, och får poäng om man kan tolka vad den skrivande menar. Har man exempelvis skrivit ”$\mathcal{V}_f = \{-1, 3\}$”, vilket betyder de två talen -1 och 3 och inget annat, går det inte att se att man menade ”alla tal mellan -1 och 3”.

6. Lös följande olikhet:

$$\frac{3}{x^2 + 3\cdot x} - \frac{2}{x^2 - 9} \leq 0 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Allt av intresse befinner sig redan på samma sida om olikhetstecknet, så nu gäller det att baka ihop allt till ett enda uttryck. Bråkaddition kräver gemensam nämnare, och självbevarelsedrift kräver *minsta* gemensamma nämnare; annars kan uttrycket bli fullkomligt ohanterligt. De två nämnarna kan faktoriseras enligt

$$x^2 + 3\cdot x = x\cdot(x + 3) \qquad\qquad x^2 - 9 = (x + 3)\cdot(x - 3)$$

Minsta gemensamma nämnare ser ut att vara $x\cdot(x+3)\cdot(x-3)$. Omskrivning av vänsterledet:

$$\begin{aligned} \text{VL} = \frac{3}{x\cdot(x+3)} - \frac{2}{(x+3)\cdot(x-3)} &= \frac{3\cdot(x-3)}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} - \frac{x\cdot 2}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} \\ &= \frac{3\cdot x - 9 - 2\cdot x}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} = \frac{x-9}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} \end{aligned}$$

så olikheten kan skrivas

$$\frac{x-9}{x\cdot(x+3)\cdot(x-3)} \leq 0$$

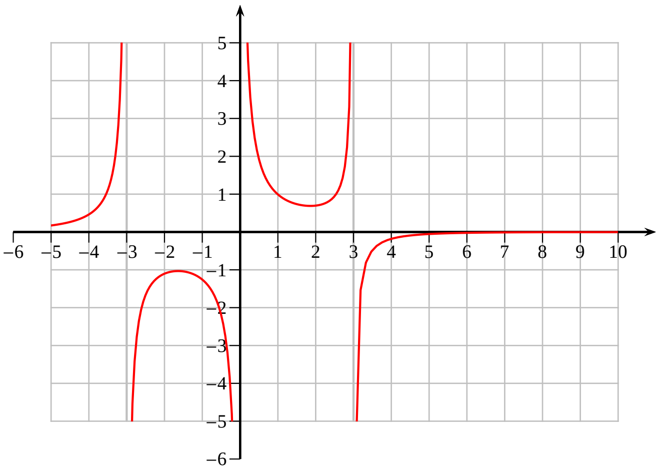
Teckenskiften vid $x = 9$, $x = 0$, $x = -3$ och $x = 3$. Tabell:

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < 9$	$x = 9$	$x > 9$
$x - 9$	−	−	−	−	−	−	−	0	+
x	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$x + 3$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x - 3$	−	−	−	−	−	0	+	+	+
VL	+	odef	−	odef	+	odef	−	0	+

Vi ville att vänsterledet skulle vara negativt eller noll, vilket det är då

$\boxed{\textit{Svar: } x \in ((-3, 0) \cup (3, 9])}$

Kommentar: Kurvan $y = \text{VL}$ ser det ut så här:



Fram till $x = -3$ ligger kurvan uppe i det positiva området. Efter $x = -3$ börjar den om nere i det negativa området, och stannar där till $x = 0$. Så börjar den om uppe i det positiva området, och stannar där till $x = 3$. Så börjar den om nerifrån, skär x-axeln i $x = 9$, och ligger därefter uppe i det positiva området. Detta är exakt vad tabellen säger.

Rättningsnorm: Helt rätt med klart och tydligt svar: 3p. Ganska rätt: 2p. Åtminstone visat förståelse för problemet: 1p. (En lösning som på ytan påminner om en korrekt lösning men som klart visar bristande förståelse får 0p.)

7. (a) Din kompis har gjort följande bråkförenkling:

$$\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y + z} = \frac{\cancel{2} \cdot x}{\cancel{2} \cdot y + z} = \frac{x}{y + z}$$

Kompisen är dock osäker och frågar dig om det här var rätt eller fel.

- Avgör om det är rätt eller fel och *förklara* för kompisen *varför* det är så.

Det räcker inte att säga ”för att regeln är så” alternativt ”för att regeln inte är så”, utan kompisen ska förstå varför det är som det är. (2p)

Lösning:

”Nej, det är $\boxed{\text{fel}}$. Det du försökt göra är att tillämpa regeln

$$\frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b} \qquad \text{om } c \neq 0$$

men den där 2:an är bara kopplad till y:et i nämnaren, inte till z, eftersom multiplikation går före addition. Det hade varit en annan sak om nämnaren varit $2 \cdot (y + z)$; då hade det varit rätt.

Du kan se att det inte är korrekt genom att sätta in något lätträknat på bokstävernas platser; säg $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Då får du

$$\text{VL} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{2}{4 + 3} = \frac{2}{7} \approx 0{,}28 \qquad \text{men} \qquad \text{HL} = \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Om uttrycken varit lika så skulle det ha blivit samma resultat.”

Rättningsnorm: 2p för förklaring som det är troligt att kompisen skulle förstå, 1p för ”fel” med oklar förklaring.

(b) Dessutom undrar kompisen varför man inte kan dela med noll. Förklara! (1p)

Lösning:

”Du vet att division är motsatsen till multiplikation. 10 delat med 5 är 2 därför att 2 gånger 5 är 10. Så 10 delat med noll är det man ska multiplicera noll med för att få 10. Men det *finns inget* tal som gånger noll ger 10. Noll gånger vad som helst är noll.

Man kan inte gör dividera med noll därför att det inte finns något som fungerar som svar.

Och om du föredrar en förklaring med heltal: Att dela med 2 är att man delar något i två lika delar och ser hur stor en av dem är. Vad innebär det att dela något i ingen del alls?

Kan tillägga att noll delat med noll istället ger problemet att det ska vara det tal som gånger noll ger noll. Men där går ju vilket tal som helst lika bra! Så vilket av dem ska man säga är rätt?”

Rättningsnorm: Förklaring som på något sätt hakar på innebörden i division ger poäng. (”För att det är odefinierat” är inte en förklaring.)

8. Lös ekvationen $(x-4711)^2 = x-4709$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.18(a) ur *Grundlig matematik*.

Med substitution: Det är obehagligt att handräkna med så här stora tal, men med substitution kan man göra problemet mer hanterligt:

$$\begin{aligned}
(x-4711)^2 &= x-4709 \\
(x-4711)^2 &= x-4711+2 && \text{Skriv om} \\
t^2 &= t+2 && \text{Sätt } x-4711=t \\
t^2-t-2 &= 0 && \text{”flytta över”} \\
t^2-2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot t+(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2-2 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(t-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-\tfrac{2\cdot 4}{4} &= 0 && \text{Skriv som kvadrat} \\
(t-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{9}{4} &= 0 \\
(t-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{3}{2})^2 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat} \\
((t-\tfrac{1}{2})+\tfrac{3}{2})\cdot((t-\tfrac{1}{2})-\tfrac{3}{2}) &= 0 && \text{Konjugatregeln} \\
(t+\tfrac{2}{2})\cdot(t-\tfrac{4}{2}) &= 0 \\
(t+1)\cdot(t-2) &= 0 \\
t+1=0 \quad &\vee \quad t-2=0 && \text{Nollfaktorlagen} \\
t=-1 \quad & \quad t=2 \\
x-4711=-1 \quad & \quad x-4711=2 && \text{Återsubstituera} \\
x=4710 \quad & \quad x=4713
\end{aligned}$$

Utan substitution: Om man inte kommer på något fiffigt att göra är det lika bra att sätta igång med brute force (ett dåligt sätt att lösa ett problem är fortfarande bättre än inget sätt alls):

$$\begin{aligned}
(x-4711)^2 &= x-4709 \\
x^2-2\cdot 4711\cdot x+4711^2 &= x-4709 && \text{2:a kvadreringsregeln} \\
x^2-9422\cdot x+22193521 &= x-4709 && \text{Räkna ut} \\
x^2-9423\cdot x+22198230 &= 0 && \text{”Flytta över”} \\
x^2-2\cdot\tfrac{9423}{2}\cdot x+(\tfrac{9423}{2})^2-(\tfrac{9423}{2})^2+22198230 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(x-\tfrac{9423}{2})^2-\tfrac{88792929}{4}+\tfrac{22198230\cdot 4}{4} &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; räkna ut} \\
(x-\tfrac{9423}{2})^2-\tfrac{9}{4} &= 0 && \text{Räkna ut}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(x - \tfrac{9423}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat}\\
((x - \tfrac{9423}{2}) + \tfrac{3}{2})\cdot((x - \tfrac{9423}{2}) - \tfrac{3}{2}) &= 0 && \text{Konjugatregel}\\
(x - \tfrac{9420}{2})\cdot(x - \tfrac{9426}{2}) &= 0 && \text{Förenkla}\\
(x - 4710)\cdot(x - 4313) &= 0 && \text{Förenkla}\\
x - 4710 = 0 \quad &\vee \; x - 4713 = 0\\
x = 4710 \quad &\quad x = 4713
\end{aligned}
$$

Alternativ substitution: Detta hade försökts av ett antal tentander. Ingen av dessa hade slutfört beräkningarna, men det fungerar faktiskt om man inte ger upp.

$$
\begin{aligned}
(x - 4711)^2 &= x - 4709\\
(x - t)^2 &= x - t + 2 && \text{Sätt } 4711 = t\\
x^2 - 2\cdot x\cdot t + t^2 &= x - t + 2\\
x^2 - (2\cdot t + 1)\cdot x + t^2 + t - 2 &= 0\\
x^2 - 2\cdot(t + \tfrac{1}{2})\cdot x + (t + \tfrac{1}{2})^2 - (t + \tfrac{1}{2})^2 + t^2 + t - 2 &= 0\\
(x - (t + \tfrac{1}{2}))^2 - (t^2 + t + \tfrac{1}{4}) + t^2 + t - 2 &= 0\\
(x - (t + \tfrac{1}{2}))^2 - t^2 - t - \tfrac{1}{4} + t^2 + t - 2\cdot\tfrac{4}{4} &= 0\\
(x - (t + \tfrac{1}{2}))^2 - \tfrac{9}{4} &= 0\\
(x - (t + \tfrac{1}{2}))^2 - (\tfrac{3}{2})^2 &= 0\\
(x - (t + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{2})\cdot(x - (t + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{2}) &= 0\\
(x - t + 1)\cdot(x - t - 2) &= 0\\
x - t + 1 = 0 \quad &\vee \; x - t - 2 = 0\\
x = t - 1 \quad &\quad x = t + 2\\
x = 4711 - 1 \quad &\quad x = 4711 + 2\\
x = 4710 \quad &\quad x = 4713
\end{aligned}
$$

Besvärligare än den föreslagna substitutionen, men trevligare än att räkna med alla siffror!

Testning: Man kan notera att om x är nära 4711 så kommer både vänsterledet och högerledet ligga nära noll, vilket innebär att de också är relativt lika. Alltså kan man testa med några tal i närheten av 4711 och se om det fungerar. Eftersom det handlar om en andragradsekvation vet man att fler än två lösningar kan det inte finnas, så har man hittat så många så har man hittat alla som finns. (Notera att om de tal man väljer att testa med inte fungerar så är detta inget bevis för att ekvationen är olöslig; man kanske inte valt rätt saker att testa!)

Kontroll: Om man inte litar på sina uträkningar kan det vara bra att testa svaren (vilket går att göra med huvudräkning, om man inte vill slösa papper):

$$
x = 4710 : \begin{cases} \text{VL} = (4710 - 4711)^2 = (-1)^2 = 1 \\ \text{HL} = 4710 - 4709 = 1 \end{cases} \quad \text{OK!}
$$

$$
x = 4713 : \begin{cases} \text{VL} = (4713 - 4711)^2 = 2^2 = 4 \\ \text{HL} = 4713 - 4709 = 4 \end{cases} \quad \text{OK!}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{4710, 4713\}}$

Rättningsnorm: Substitution: 1p för substitutionen, 2p för resten. Utan substitution: Poäng efter hur långt man kommit. Gissning: full poäng om man påpekar att fler svar inte kan finnas.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Det som kostat poäng här är (som vanligt) felaktigheter i användning av likhetstecken. På t.ex. fråga 1 och 4 *ska* man ha likhetstecken mellan stegen (och ekvivalenspilar är inte likhetstecken); däremot ska man *inte* ha likhetestecken mellan de olika stegen i ekvations- och olikhetslösning (men ekvivalenspilar går bra, även om de inte är obligatoriska).

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Här såg det ganska bra ut, om man bortser från det där med ”börja alltid ny uppgift på nytt blad”, vilket förfärande många missat.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2018.12.05 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Allmänna kommentarer: Vid granskningen av lösningarna till denna tenta såg jag väldigt mycket som helt klart var ”räknat för lite”. Det var bristande rutin, som ledde till användning av obefintliga ”räkneregler”, som att ”stryka” gemensamma *termer* och att ”multiplicera in” *exponenter*. Rent allmänt vill jag ge tipset att i varje steg fundera på exakt vilken räkneregel ni använder och hur den skulle se ut i en formelsamling. Kommer ni inte på något som passar så går det ni vill göra förmodligen inte att göra.

Det var också många problem som verkade relaterade till ”inte läst frågan ordentligt”. När ni löst en uppgift, gå tillbaka och läs frågan igen och fundera på om det ni skrivit låter som ett svar på den ställda frågan.

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel.

$$(1/10 + 1/15)/(1/3) - 3/4 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Alla bråkproblem brukar bli mer lättlästa om man skriver dem med horisontella bråkstreck, för då framgår prioriteten tydligare. Divisioner går före additioner och subtraktioner om inte parenteser säger något annat. Så subtraktionen ska inte göras förrän divisionen av parentesuttrycken är genomförd, medan additionen ska genomföras innan denna division:

$$(((1/10) + (1/15))/(1/3)) - (3/4) = \frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} - \frac{3}{4}$$

(De parenteser som prioritetsordningen ger är inritade med färg.)

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{1 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

Stora bråket:

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{\cancel{3}}{2 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{2}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}-\frac{3}{4}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

Mer på en gång: Minsta gemensamma nämnare i dubbelbråket är $30 = 10\cdot 3 = 15\cdot 2$. Multiplicera med den så plattar bråket ut sig:

$$\frac{(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})\cdot 30}{\frac{1}{3}\cdot 30}=\frac{\frac{3\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}+\frac{2\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}{\frac{10\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}}=\frac{3+2}{10}=\frac{5}{10}=\frac{\cancel{5}}{2\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{2}$$

Fortsätt som i förra beräkningen.

Rättningsnorm: Starta med 3p och minska med 1p för varje felaktigt genomför åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits, med stopp då poängen är nere på 0. Även ”slarvfel” och att inte använda minsta gemensamma nämnare räknas som fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

2. Lös ekvationen $\sqrt{20-4\cdot x} = 2-x$. (3p)

Lösning:

Algebraiskt: Kvadrera för att bli av med rottecknet, men kom ihåg att kvadrering är en operation som kan generera falska rötter:

$$\begin{aligned}\sqrt{20-4\cdot x} &= 2-x \\ (\sqrt{20-4\cdot x})^2 &= (2-x)^2 && \text{kvadrera; \textit{kolla svaren!}} \\ 20-4\cdot x &= 4-4\cdot x+x^2 && \text{potens- och kvadreringsregel} \\ 16 &= x^2 && \text{”flytta över”} \\ x &= \pm 4\end{aligned}$$

Kontroll:

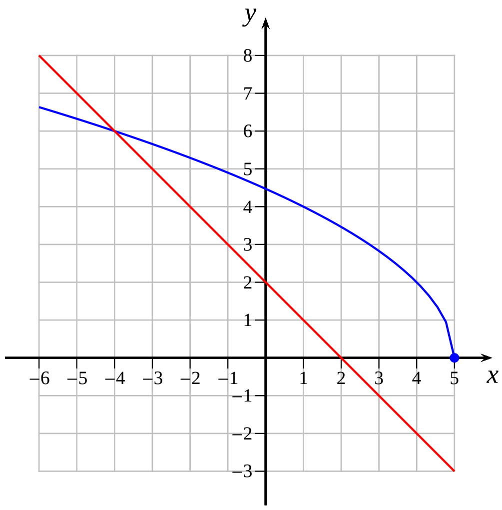
$$x=4:\begin{cases}\text{VL} = \sqrt{20-4\cdot 4} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{HL} = 2-4 = -2\end{cases}\qquad \text{VL} \neq \text{HL ej OK}$$

$$x=-4:\begin{cases}\text{VL} = \sqrt{20-4\cdot(-4)} = \sqrt{36} = 6 \\ \text{HL} = 2-(-4) = 6\end{cases}\qquad \text{VL} = \text{HL OK!}$$

Alternativt kan man notera att vänsterledet inte kan vara negativt, vilket innebär högerledet inte heller kan vara negativt. Lösningar måste därför uppfylla $2-x \geq 0$, dvs. $x \leq 2$. Ur denna observation kan förslaget $x = 4$ förkastas.

Kommentar: Observera alltså att *roten ur* är *det ickenegativa tal som i kvadrat blir. . . .* Så $\sqrt{4} = 2$ och inget annat. Vill man ha båda de tal som i kvadrat blir 4 måste man sätta dit plusminus även på rottecknet; $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Grafiskt: $y = \sqrt{20-4\cdot x}$ bör vara en halv parabel. Genom att beräkna några stödpunkter (vilket är enklare om man skriver om till $y^2 = 20-4\cdot x$, $y \geq 0$) kan man skissa kurvan. $y = 2-x$ är en rät linje som skär y-axeln på höjden 2 och och går diagonalt neråt:



Kurvorna skär i $x = -4$, och det finns uppenbart inga fler skärningar.

$\boxed{\textit{Svar: } x = -4}$

Rättningsnorm: Korrekt svar med vattentät motivering (algebraisk eller grafisk): 3p. Räknat rätt men ej uteslutit den falska roten: 2p. Missat ± men testat: 2p.

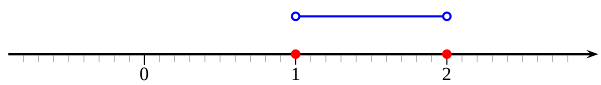
3. **(a)** Hur många tal är det i mängden $\{2,\ 1\}$? (1p)

(b) Hur många tal är det i intervallet $(1,\ 2)$? (1p)

(c) Hur många tal är det i intervallet $[2,\ 1]$? (1p)

Motivera kortfattat, gärna genom att illustrera på tallinjen.

Lösning:



(a) $\boxed{\text{Två}}$; talet 1 och talet 2, och ingenting annat. En uppräkning innanför mängdklamrar betyder att mängden består av de uppräknade sakerna.

(b) $\boxed{\text{Oändligt många}}$; alla tal mellan 1 och 2. (Intervall är ju sammanhängande delar av tallinjen, och tallinjen representerar de reella talen. Intervallet kan också skrivas $\{x \mid 1 < x < 2\}$.)

(c) $\boxed{\text{Inga}}$; beteckningen står för ”alla tal som ligger till höger om eller exakt i 2 och samtidigt till vänster om eller exakt i 1”. Några sådana tal finns inte! Med mängdbeteckningar: $\{x \mid 2 \le x \le 1\} = \{\ \}$.

Rättningsnorm: Gäller alla deluppgifterna: kan förmodligen bara bli rätt eller fel, men om flera av deluppgifterna är halvrätt kan uppgiften som helhet ges 1p. Någon form av motivering fordras, men den behöver inte vara välformulerad.

4. Faktorisera följande uttryck med hjälp av kvadratkomplettering:

$$0{,}5 \cdot x^2 + 0{,}05 \cdot x - 0{,}01 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Det verkar inte vara något konstigt här, förutom att koefficienterna är skrivna som decimaltal. Vi kan antingen räkna på decimalform eller skriva om till bråkform. (Bråkform är vanligtvis enklast.)

På decimalform:

$$
\begin{aligned}
&0{,}5\cdot x^2 + 0{,}05\cdot x - 0{,}01 \\
&\quad = 0{,}5\cdot x^2 + 0{,}5\cdot 0{,}1\cdot x - 0{,}5\cdot 0{,}02 && \text{faktorisera} \\
&\quad = 0{,}5\cdot(x^2 + 0{,}1\cdot x - 0{,}02) && \text{bryt ut} \\
&\quad = 0{,}5\cdot(x^2 + 2\cdot 0{,}05\cdot x + 0{,}05^2 - 0{,}05^2 - 0{,}02) && \text{kvadratkomplettera} \\
&\quad = 0{,}5\cdot((x + 0{,}05)^2 - 0{,}0025 - 0{,}02) && \text{skriv som kvadrat} \\
&\quad = 0{,}5\cdot((x + 0{,}05)^2 - 0{,}0225) \\
&\quad = 0{,}5\cdot((x + 0{,}05)^2 - 0{,}15^2) && \text{skriv som kvadrat} \\
&\quad = 0{,}5\cdot((x + 0{,}05) + 0{,}15)\cdot((x + 0{,}05) - 0{,}15) && \text{konjugatregeln} \\
&\quad = \boxed{0{,}5\cdot(x + 0{,}2)\cdot(x - 0{,}1)}
\end{aligned}
$$

På bråkform:

$$
\begin{aligned}
&0{,}5\cdot x^2 + 0{,}05\cdot x - 0{,}01 \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot x^2 + \tfrac{1}{20}\cdot x - \tfrac{1}{100} && \text{skriv som bråk} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{10}\cdot x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{50} && \text{faktorisera} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot(x^2 + \tfrac{1}{10}\cdot x - \tfrac{1}{50}) && \text{bryt ut} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot(x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{20}\cdot x + (\tfrac{1}{20})^2 - (\tfrac{1}{20})^2 - \tfrac{1}{50}) && \text{kvadratkomplettera} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot((x + \tfrac{1}{20})^2 - \tfrac{1}{400} - \tfrac{1\cdot 8}{50\cdot 8}) && \text{skriv som kvadrat; gör liknämnigt} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot((x + \tfrac{1}{20})^2 - \tfrac{9}{400}) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot((x + \tfrac{1}{20})^2 - (\tfrac{3}{20})^2) && \text{skriv som kvadrat} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot((x + \tfrac{1}{20}) + \tfrac{3}{20})\cdot((x + \tfrac{1}{20}) - \tfrac{3}{20}) && \text{konjugatregeln} \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot(x + \tfrac{4}{20})\cdot(x - \tfrac{2}{20}) \\
&\quad = \tfrac{1}{2}\cdot(x + \tfrac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 5})\cdot(x - \tfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 10}) && \text{förkorta} \\
&\quad = \boxed{\tfrac{1}{2}\cdot(x + \tfrac{1}{5})\cdot(x - \tfrac{1}{10})}
\end{aligned}
$$

Fördelen med bråkformen är att det kan vara lättare att se att $9/400 = (3/20)^2$ än vad det är att se att $0{,}0225 = 0{,}15^2$. Man slipper också fundera på var man ska sätta decimalkommat.

Kontroll: Multiplicera ihop uttrycket igen. Får man tillbaka det man började med är faktoriseringen korrekt.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone kvadratkompletterat korrekt: minst 1p.

5. Vi har uttrycket

$$\frac{x^2 + 18\cdot x + 81}{81 - x^2}$$

(a) Förkorta uttrycket. (2p)

(b) Ange för vilket/vilka x förkortningen inte är giltig. (1p)

Lösning:

Detta var en delmängd av rekommenderad uppgift 7.20(b). Förkortning av rationella uttryck bygger på att man faktoriserar täljare och nämnare, och så förkortar bort gemensamma faktorer. Förkortningen är giltig (vilket innebär att uttrycket motsvarar samma tal innan och efter operationen) förutsatt att man inte tagit bort någon ”division med noll”-problematik.

(a) $\dfrac{x^2+18\cdot x+81}{81-x^2} = \dfrac{x^2+2\cdot 9\cdot x+9^2}{9^2-x^2} = \dfrac{(x+9)^2}{(9+x)\cdot(9-x)} = \dfrac{\cancel{(x+9)}\cdot(x+9)}{\cancel{(x+9)}\cdot(9-x)} = \boxed{\dfrac{x+9}{9-x}}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Delvis rätt: 1p.

(b) Förkortningen är inte giltig då $\boxed{x=-9}$, för i det fallet motsvarar det oförenklade uttrycket ”$0/0$ = detta går inte att räkna ut” medan det förenklade motsvarar ”$0/18 = 0$”.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

6. En funktion f beräknas med följande formel:

$$f(x) = (x^2-4)^{-4} + (x+4)^{1/4}$$

Vad har f för definitionsmängd?

Lösning:

Om inget annat sägs så är definitionsmängden de x som inte ger resultatet ERROR då man försöker räkna ut $f(x)$. Om man skriver formeln lite mer läsbart så ser den ut som

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-4)^4} + \sqrt[4]{x+4}$$

Summor och differenser går att beräkna så länge termerna existerar. Division går inte att göra om nämnaren är noll. Om något upphöjt i 4 är noll måste detta något vara noll, så vi har

$$\begin{aligned} x^2-4 \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+2)\cdot(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x+2 \neq 0 \ \wedge\ x-2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -2 \ \wedge\ x \neq 2 \end{aligned}$$

Vidare kan man inte dra jämna rötter ur negativa tal, så vi har också

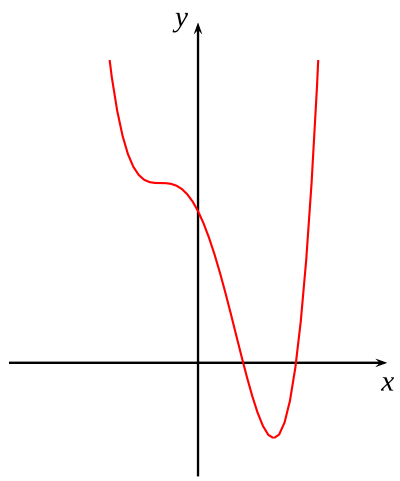
$$x+4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4$$

Så x måste vara minst -4 och får inte vara -2 eller 2.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = \{x \mid x \geq -4 \wedge x \neq \pm 2\} = [-4,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Inga avdrag för felaktigheter i notationen i svaret, så länge det går att tolka vad som avsågs.

7. Här är grafen för ett polynom:



Vad är den lägsta grad detta polynom kan ha? Motivera noga! (3p)

Lösning:

Det finns två nollställen så graden är minst två. Grafen försvinner uppåt i båda ändarna, vilket tyder på jämn grad, för polynom med udda grad försvinner uppåt i ena ändan och neråt i andra. Graden är större än noll, för polynom av grad noll är horisontella linjer (förutom att vi redan sagt att graden är minst två). Graden är inte ett, eftersom förstagradspolynom ger sneda linjer (förutom det där med jämn grad och minst två). Graden är inte heller två, för andragradspolynoms grafer är parablar, som är symmetriska runt en lodrät linje (symmetrilinjen), vilket denna graf inte är. Den lägsta grad som vi inte kan utesluta är fyra.

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Minst 4}}$

Kommentar: Skalan på axlarna är 5 mm = 1 enhet. Polynomet beräknas $\frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^3 - 2\cdot x + 4$.

Rättningsnorm: Vattentät förklaring som utesluter 0, 1, 2 och 3: 3p. Delpoäng efter hur ungefär hur stor del av en korrekt lösning man fått ihop.

8. Lös följande olikhet:

$$\frac{301}{3\cdot x+1} \geq \frac{100}{x} \qquad (3p)$$

Lösning:

Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera:

$$\begin{aligned}
\frac{301}{3\cdot x+1} &\geq \frac{100}{x} \\
\frac{301\cdot x}{(3\cdot x+1)\cdot x} - \frac{(3\cdot x+1)\cdot 100}{(3\cdot x+1)\cdot x} &\geq 0 \qquad \text{"flytta över"; gör liknämnigt} \\
\frac{301\cdot x - 300\cdot x - 100}{(3\cdot x+1)\cdot x} &\geq 0 \qquad \text{multiplicera in; sätt på gemensamt bråkstreck} \\
\frac{x-100}{(3\cdot x+1)\cdot x} &\geq 0
\end{aligned}$$

Teckenskiften då vi passerar $x - 100 = 0$, $3\cdot x + 1 = 0$ och $x = 0$, dvs. för talen i $\{-1/3, 0, 100\}$. Tabell:

		$-1/3$		0		100	
$x-100$	−	−	−	−	−	0	+
x	−	−	−	0	+	+	+
$3\cdot x+1$	−	0	+	+	+	+	+
VL	−	odef	+	odef	−	0	+

Vi ville att uttrycket skulle vara icke-negativt, vilket det är i det korta intervallet mellan $-1/3$ och 0 samt från och med 100.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in ((-1/3, 0) \cup [100, \infty))}$

Kommentar: Om man försöker lösa problemet genom att prova sig fram är det ganska osannolikt att man kommer att hitta svaret!

Rättningsnorm: Helt rätt med klart och tydligt svar: 3p. Ganska rätt: 2p. Åtminstone visat förståelse för problemet: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Det vanligaste felet var (som vanligt) felaktig eller obefintlig användning av likhetstecken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2019.01.11 08.30–11.30

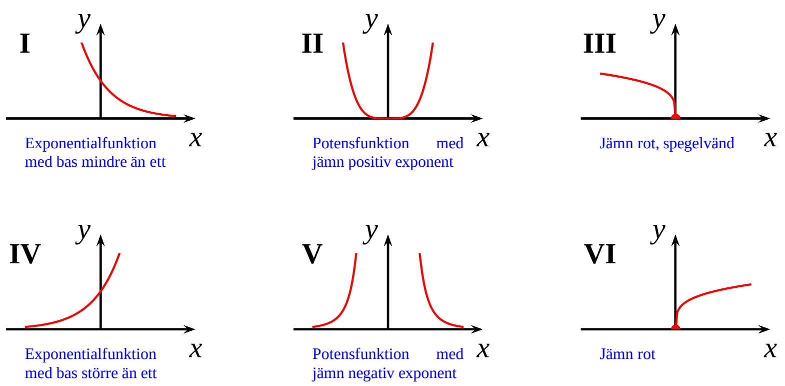
Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Här är sex kurvor:



Här är tio ekvationer:

(a) $y = x^4$ **(b)** $y = x^{-4}$ **(c)** $y = (-x)^4$ **(d)** $y = (1/x)^4$ **(e)** $y = x^{1/4}$

(f) $y = (-x)^{1/4}$ **(g)** $y = 4^x$ **(h)** $y = 4^{-x}$ **(i)** $y = (1/4)^x$ **(j)** $y = (1/4)^{-x}$

Ange för varje ekvation vilken av kurvorna den motsvarar. Några av kurvorna hör till flera av ekvationerna; det är därför antalen inte stämmer överens.

0–2 rätt: 0p. 3–5 rätt: 1p. 6–8 rätt: 2p. 9–10 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

Under kurvorna står nu vilken funktionstyp de ser ut att tillhöra, vilket kan matchas mot formlerna.

Ett annat sätt är att för varje ekvation tänka efter hur tillhörande kurva bör se ut, och så leta rätt på den bild som passar in.

(a) $y = x^4$: jämn positiv potens ska vara en U-kurva, vilket stämmer med $\boxed{\text{II}}$.

(b) $y = x^{-4} = 1/x^4$. Ska avvika starkt från noll då x är nära noll, och närma sig noll då x är långt ifrån. Stämmer med $\boxed{\text{V}}$.

(c) $y = (-x)^4$. Då man upphöjer i ett jämnt tal så ”försvinner” tecknet, så att man byter tecken på x har ingen inverkan. Den här ser likadan ut som $y = x^4$, och motsvarar också $\boxed{\text{II}}$.

(d) $y = (1/x)^4 = 1/x^4$: Samma som (b), alltså $\boxed{\text{V}}$.

(e) $y = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$. Fjärde roten ur x. Ska se ut som en liggande variant av halva $y = x^4$. Motsvarar $\boxed{\text{VI}}$.

(f) $y = (-x)^{1/4} = \sqrt[4]{-x}$.Byt tecken på x, och ta sedan fjärde roten. Då ska det hända samma saker för negativa x som det i föregående fall hände med positiva: $\boxed{\text{III}}$.

(g) $y = 4^x$: exponentialfunktion med bas större än 1: kurva som lutar uppåt: $\boxed{\text{IV}}$.

(h) $y = 4^{-x} = 1/4^x = (1/4)^x$: exponentialfunktion med bas mindre än 1: kurva som lutar neråt: $\boxed{\text{I}}$.

(i) $y = (1/4)^x$: samma som föregående, $\boxed{\text{I}}$.

(j) $y = (1/4)^{-x} = 4^x$: också $\boxed{\text{IV}}$.

Rättningsnorm: Se frågan. Motivering behövs ej. Svar som det inte går att begripa vilken av frågorna de hör till räknas som felaktiga.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.22

2. Vilken av symbolerna ⇒, ⇐, ⇔ och ”ingen av dem” passar bäst mellan följande utsagor?

(a) ”Ett heltal slutar på 5” ”Heltalet är delbart med 5”

(b) ”Ett heltal slutar på 0” ”Heltalet är delbart med 5”

(c) ”Ett heltal slutar på 0” ”Heltalet är delbart med 10”

(d) ”Ett heltal slutar på 3” ”Heltalet är delbart med 3”

1 rätt: 1p. 2–3 rätt: 2p. 4 rätt: 3p. Motivering behövs ej. Utgå från att det vanliga siffersystemet används. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 1.3 ur *Grundlig matematik*. Vi motiverar även om det inte var obligatoriskt:

(a) Om ett heltal slutar på 5 så är det garanterat delbart med 5, men det finns tal som inte slutar på 5 men som ändå är delbara med 5 (10, t.ex.). $\boxed{\Rightarrow}$.

(b) Om ett heltal slutar på 0 så är det garanterat delbart med 5, men det finns tal som inte slutar på 0 men som ändå är delbara med 5 (15, t.ex.). $\boxed{\Rightarrow}$.

(c) Om ett heltal slutar på 0 så är det garanterat delbart med 10, och tvärtom; det finns inga heltal som är delbara med 10 och som *inte* slutar på 0. $\boxed{\Leftrightarrow}$

(d) Det finns heltal som är delbara med 3 och som slutar med 3 (t.ex. 33) och sådana som inte gör det (t.ex. 6), och tal som slutar med 3 som inte är delbara med 3 (t.ex. 13). Så delbarhet med 3 och slutsiffra 3 har inget med varandra att göra. $\boxed{\text{Ingen av dem}}$

Observera att svaren är beroende av vilket siffersystem man använder. Arbetar man t.ex. med det 16-siffriga talsystemet kan delbarhet med 5 inte avgöras ur slutsiffran.

Rättningsnorm: Se frågan. Svar som det inte går att begripa vilken av frågorna de hör till räknas som felaktiga.

Referenser: Detta var en rekommenderad uppgift! Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$6/(5/(4/3)) - 6/((5/4)/3) + (6/5)/(4/3) - (6/(5/4))/3 + ((6/5)/4)/3 \quad \text{(3p)}$$

Lösning:

Som talet är skrivet här är det i princip oläsligt. I det här fallet kan en kombination av horisontella och sneda bråkstreck bli tydligast:

$$6\Big/\frac{5}{4/3} - 6\Big/\frac{5/4}{3} + \frac{6/5}{4/3} - \frac{6}{5/4}\Big/3 + \frac{6/5}{4}\Big/3$$

Vi kan börja med att hantera de ”horisontella” bråken ett i taget:

$$\frac{5}{4/3} = 5\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{4} \qquad \frac{5/4}{3} = \frac{5}{4\cdot 3} = \frac{5}{12} \qquad \frac{6/5}{4/3} = \frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$\frac{6}{5/4} = 6\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5} \qquad \frac{6/5}{4} = \frac{6}{5\cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Detta insatt i de fyra ”sneda” bråken ger:

$$6\Big/\frac{5}{4/3} = 6\Big/\frac{15}{4} = 6\cdot\frac{4}{15} = \frac{24}{15} \qquad 6\Big/\frac{5/4}{3} = 6\Big/\frac{5}{12} = 6\cdot\frac{12}{5} = \frac{72}{5}$$

$$\frac{6}{5/4}\Big/3 = \frac{24}{5}\Big/3 = \frac{24}{5\cdot 3} = \frac{24}{15} \qquad \frac{6/5}{4}\Big/3 = \frac{3}{10}\Big/3 = \frac{3}{10\cdot 3} = \frac{1}{10}$$

Nu kan helheten monteras ihop:

$$6\Big/\frac{5}{4/3} - 6\Big/\frac{5/4}{3} + \frac{6/5}{4/3} - \frac{6}{5/4}\Big/3 + \frac{6/5}{4}\Big/3 = \cancel{\frac{24}{15}} - \frac{72}{5} + \frac{9}{10} - \cancel{\frac{24}{15}} + \frac{1}{10}$$

$$= -\frac{72}{5} + \frac{10}{10} = -\frac{72}{5} + \frac{5}{5} = \boxed{-\frac{67}{5}}$$

Kommentar 1: Det här är ett fall där enbart horisontella bråkstreck inte är det mest läsbara. Skrivet med den notationen blir det något i den här stilen:

$$\frac{6}{\frac{5}{\frac{4}{3}}} - \frac{6}{\frac{\frac{5}{4}}{3}} + \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}} - \frac{\frac{6}{\frac{5}{4}}}{3} + \frac{\frac{\frac{6}{5}}{4}}{3}$$

Här är ett alternativt sätt att skriva, som också är hyfsat läsbart:

$$\frac{6}{5\Big/\frac{4}{3}} - \frac{6}{\frac{5}{4}\Big/3} + \frac{6}{5}\Big/\frac{4}{3} - \frac{6\Big/\frac{5}{4}}{3} + \frac{\frac{6}{5}\Big/4}{3}$$

Kommentar 2: Division är ett exempel på ett icke-associativt räknesätt; det spelar roll i vilken ordning man gör divisionerna om det ingår flera stycken. De här fem termerna demonstrerar samtliga sätt som man kan stoppa in parenteser på i ett uttryck med tre divisioner. Googla på *Catalan numbers* om ni vill veta mer om hur man beräknar hur många möjligheter det finns.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som +, −, · och /) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. Övning 3.10, Övning 3.25–3.29

4. Faktorisera polynomet $p(x) = x^4 - 30{\cdot}x^2 + 125$. (3p)

Lösning:

Ekvationsangrepp: Faktorer motsvarar nollställen, så man kan lika gärna satsa på att lösa ekvationen $x^4 - 30{\cdot}x^2 + 125 = 0$.

$$
\begin{aligned}
x^4 - 30{\cdot}x^2 + 125 &= 0 \\
(x^2)^2 - 30{\cdot}x^2 + 125 &= 0 && \text{Potensregel} \\
t^2 - 30{\cdot}t + 125 &= 0 && \text{Substituera } x^2 = t \\
t^2 - 2{\cdot}15{\cdot}t + 15^2 - 15^2 + 125 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(t-15)^2 - 225 + 125 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera} \\
(t-15)^2 - 100 &= 0 && \text{Addera} \\
(t-15)^2 - 10^2 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat} \\
(t-15+10){\cdot}(t-15-10) &= 0 && \text{Konjugatregeln} \\
(t-5){\cdot}(t-25) &= 0 && \text{Addera}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rclcrcll}
t-5 &=& 0 & \vee & t-25 &=& 0 & \text{Nollfaktorlagen} \\
x^2-5 &=& 0 & & x^2-25 &=& 0 & \text{Återsubstituera} \\
x^2 &=& 5 & & x^2 &=& 25 & \text{"Flytta över"} \\
x &=& \pm\sqrt{5} & & x &=& \pm 5 &
\end{array}
$$

Nollställena är $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, 5 och −5, vilket motsvarar faktorerna $x - \sqrt{5}$, $x + \sqrt{5}$, $x - 5$ och $x + 5$.

Polynomangrepp: Om ett polynom med heltalskoefficienter har ett heltalsnollställe *så* är detta heltal en faktor i konstanttermen. Konstanttermen är här $125 = 5^3$, så det är värt att testa ±1, ±5, ±25 och ±125.

$$
\begin{aligned}
x = \pm 1: &\quad p(\pm 1) = (\pm 1)^4 - 30{\cdot}(\pm 1)^2 + 125 = 1 - 30 + 125 = 96 \neq 0 \\
x = \pm 5: &\quad p(\pm 5) = (\pm 5)^4 - 30{\cdot}(\pm 5)^2 + 125 = 625 - 750 + 125 = 0
\end{aligned}
$$

Så vi har hittat två nollställen och därmed också två faktorer. Dividerar vi med dessa kommer vi att ha ett andragradspolynom kvar, och sådana vet vi hur man faktoriserar. $(x-5){\cdot}(x+5) = x^2 - 25$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5 \\
\hline
x^2 - 25 & x^4 - 30{\cdot}x^2 + 125 \\
 & -(x^4 - 25{\cdot}x^2) \\
\hline
 & -5{\cdot}x^2 + 125 \\
 & -(-5{\cdot}x^2 + 125) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Så $x^4 - 30{\cdot}x^2 + 125 = (x^2-25){\cdot}(x^2-5) = (x+5){\cdot}(x-5){\cdot}(x^2 - (\sqrt{5})^2)$
$= (x+5){\cdot}(x-5){\cdot}(x+\sqrt{5}){\cdot}(x-\sqrt{5})$.

$\boxed{\textit{Svar: } (x+5){\cdot}(x-5){\cdot}(x+\sqrt{5}){\cdot}(x-\sqrt{5})}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Valt en fungerande metod: 1p. Kommit åtminstone halvvägs: 2p.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • ..., faktoriserad form, ... Du ska kunna göra följande: • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck... • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Exempel 8.5, Övning 7.14, Övning 8.19

5. **(a)** Vad innebär det att lösa en ekvation *fullständigt*? (1p)

Lösning:

Att hitta *alla* lösningarna till ekvationen.

(b) När man testar ett svar till en ekvation så ska man alltid göra detta test i ursprungsekvationen. Varför då? (1p)

Lösning:

Om man gör ett räknefel i första steget men räknar rätt resten av vägen så kommer det/de svar man får fram att passa i alla versioner av ekvationen *utom* ursprungsekvationen. Så test i de senare stegen är inte garanterade att fånga felräkningar eller falska rötter. (Falska rötter är de som inte passar, inte för att man räknat fel utan för att man använt någon operation som gav en ny ekvation med fler svar än den gamla.)

(c) När man löst en ekvation är det alltid bra att testa alla svaren. Det brukar man inte göra då man löst en olikhet. Varför inte? (1p)

Lösning:

Därför att olikheter oftast har oändligt många svar, och att testa alla dessa kan ta oändligt lång tid.

Rättningsnorm: (Gäller alla deluppgifterna:) Något som går att tolka som korrekt definition eller relevant synpunkt får poäng.

Referenser: Svaren till de här frågorna finns i texten på kapitel 8 och 9, och (b) och (c) kan också lösas med allmän förståelse för principerna vid ekvations- och olikhetslösning.

6. Bestäm medelpunkt och radie på nedanstående cirkel:

$$x^2 + y^2 + 0{,}2\cdot x - 0{,}4\cdot y - 0{,}2 = 0 \qquad (3p)$$

Se till att det klart framgår vad svaret är!

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i $x = a$, $y = b$ och radie r kan skrivas som $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, så vi ska försöka skriva om ekvationen till den formen. Detta görs med hjälp av kvadratkomplettering:

På decimalform:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 0{,}2\cdot x - 0{,}4\cdot y - 0{,}2 &= 0 \\ x^2 + 2\cdot 0{,}1\cdot x + 0{,}1^2 - 0{,}1^2 + y^2 - 2\cdot 0{,}2\cdot y + 0{,}2^2 - 0{,}2^2 - 0{,}2 &= 0 \\ (x+0{,}1)^2 - 0{,}01 + (y-0{,}2)^2 - 0{,}04 - 0{,}2 &= 0 \\ (x+0{,}1)^2 + (y-0{,}2)^2 - 0{,}25 &= 0 \\ (x - \underbrace{(-0{,}1)}_{a})^2 + (y - \underbrace{0{,}2}_{b})^2 &= \underbrace{0{,}5}_{r}{}^2 \end{aligned}$$

På bråkform: Många problem är lättare att lösa på bråkform, så det kan vara värt att testa:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \tfrac{1}{5}\cdot x - \tfrac{2}{5}\cdot y - \tfrac{1}{5} &= 0 \\ x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot x + (\tfrac{1}{10})^2 - (\tfrac{1}{10})^2 + y^2 - 2\cdot\tfrac{1}{5}\cdot y + (\tfrac{1}{5})^2 - (\tfrac{1}{5})^2 - \tfrac{1}{5} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+\tfrac{1}{10})^2 - \tfrac{1}{100} + (y-\tfrac{1}{5})^2 - \tfrac{1\cdot 4}{25\cdot 4} - \tfrac{1\cdot 20}{5\cdot 20} &= 0\\ (x+\tfrac{1}{10})^2 + (y-\tfrac{1}{5})^2 - \tfrac{25}{100} &= 0\\ (x+\tfrac{1}{10})^2 + (y-\tfrac{1}{5})^2 &= \tfrac{1}{4}\\ (x-\underbrace{(-\tfrac{1}{10})}_{a})^2 + (y-\underbrace{\tfrac{1}{5}}_{b})^2 &= (\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{r})^2\end{aligned}$$

Kommentar: Notera att man *inte* kan förenkla vidare genom att ”stryka” upphöjt i 2. Ekvationen man då får motsvarar en rät linje, vilket absolut inte är samma sak som en cirkel, och man har då också tillämpat två icke-existerande räkne”regler”:

$$\sqrt{a+b} \stackrel{\text{☠}}{=} \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{a^2} \stackrel{\text{☠}}{=} a$$

Den första ”regeln” fungerar i princip bara om något av de två talen är noll, och den andra enbart för icke-negativa tal.

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{Medelpunkt: } (-0{,}1,\ 0{,}2),\ \text{radie: } 0{,}5\ \text{l.e.}}$

Rättningsnorm: Korrekt och tydligt svar, utan omskrivning till linje: 3p. Två av föregående krav: 2p. Åtminstone haft visat att man vet vad som ska göras: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.23

7. Funktionen f definieras enligt: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + 1 & \text{om } -1 \le x < 2 \\ -x + 4 & \text{om } \ \ 2 \le x < 5 \end{cases}$

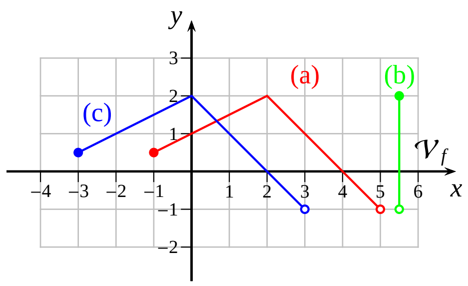
(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

(c) Rita kurvan $y = f(x+2)$. (1p)

Lösning:

Alla deluppgifterna:



Värdemängden (markerat i grönt) är alla y-värden på kurvan, vilket blir allt mellan lägsta och högsta punkten: $\boxed{\mathcal{V}_f = \{y \mid -1 < y \le 2\}}$

$y = f(x+2)$ ser ut som $y = f(x)$ flyttad 2 steg åt vänster, så att det som förut hände vid $x = 0$ nu händer redan vid $x = -2$ (eftersom $-2+2 = 0$). Alternativt kan man få fram detta genom att sätta in $x+2$ på <u>alla</u> ställen där det står x i formeln:

$$f(x+2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot(x+2)+1 & \text{om } -1 \le x+2 < 2 \\ -(x+2)+4 & \text{om } \ \ 2 \le x+2 < 5 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + 2 & \text{om } -3 \le x < 0 \\ -x+2 & \text{om } \ \ 0 \le x < 3 \end{cases}$$

Rättningsnorm: (a) kan bara bli rätt eller fel, men inget avdrag om det är fel sorts plupp i ändarna på linjen. (b) och (c) ska vara konsistenta med (a) (så att om man ritat något med annan värdemängd så ger den värdemängd som stämmer med bild poäng).

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd • Värdemängd • Styckvis definierad funktion. Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$ ..., givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. Övning 4.18, Övning 4.21

8. Lös följande olikhet: $(2^x - 1)\cdot(3^x - 3) < 0$. (3p)

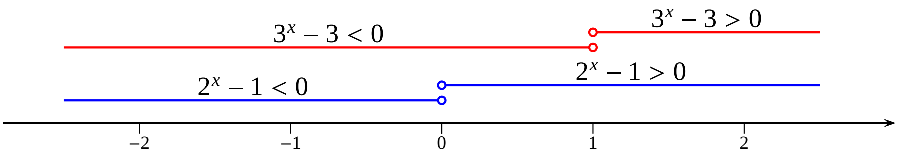
Uppgiften går att lösa med hjälp av det vi gått igenom i den här kursen, men kan kräva att du tänkter självständigt.

Lösning:

En produkt blir negativ om den ena faktorn är positiv och den andra negativ. Vi kan börja med att se efter var de två faktorerna passerar noll:

$$2^x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
$$3^x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

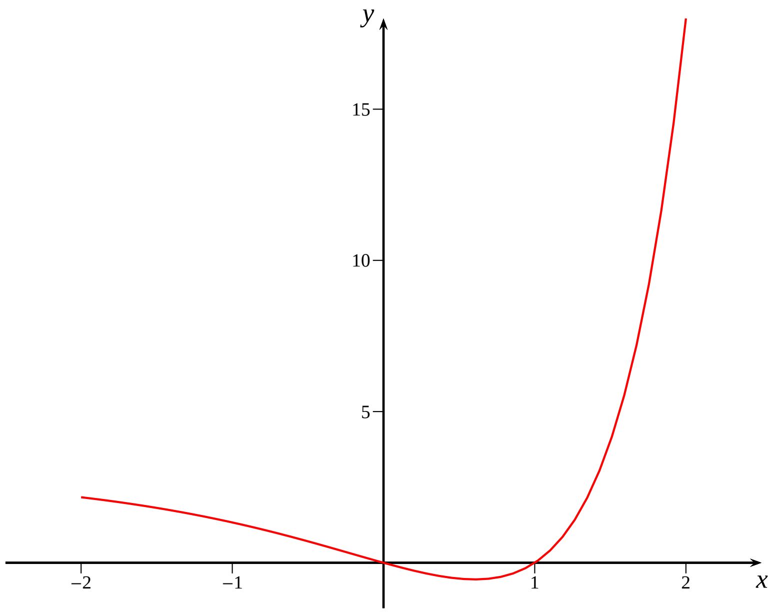
Både 2^x och 3^x är växande (större x ger större resultat), så värdena är negativa till vänster om brytpunkten och positiva till höger.



Mellan $x = 0$ och $x = 1$ är $2^x - 1$ positiv men $3^x - 3$ negativ, och då är produkten negativ.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in (0, 1)}$

Kommentar: Kurvan $y = (2^x - 1)\cdot(3^x - 3)$ ser ut så här:



Den gör en liten sväng nere i det negativa området mellan $x = 0$ och $x = 1$. Multiplicerar man ihop parenteserna får man $y = 2^x\cdot 3^x - 3^x - 3\cdot 2^x + 3 = 6^x - 3^x - 3\cdot 2^x + 3$. För negativa x blir alla potenserna snabbt i stort sett noll, så åt vänster blir $y \approx 3$. För positiva x kommer termen 6^x snart att helt dominera över de andra, så åt höger gäller $y \approx 6^x$. Och här mittpå kämpar termerna om vem som bestämmer.

Rättningsnorm: Eftersom frågetypen är ny är det svårt att förutsäga vad som kommer att hända. Preliminärt: Helt rätt: 3p. Visat förståelse för frågan: 1p. Mellanting: 2p.

Referenser: Den här uppgiften matchade inte någonting exakt, men testade om man kunde tillämpa de principer man lärt sig för olikhetsräkning på en delvis ny situation.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2019.03.26 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Förenkla följande potensuttryck maximalt:

$$\frac{\sqrt[5]{x^5 \cdot y} \cdot z^{-5}}{x^5 \cdot (y \cdot z^{-5})^5}$$

Utgå från att alla variablerna är positiva tal. Även ”slarvfel” räknas som fel vid poängsättningen. (3p)

Lösning:

Kan göras på flera sätt, här är ett:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{x^5 \cdot y} \cdot z^{-5}}{x^5 \cdot (y \cdot z^{-5})^5} &= ((x^5 \cdot y)^{1/5} \cdot z^{-5}) \cdot (x^5 \cdot (y \cdot z^{-5})^5)^{-1} \\
&= (x^{5 \cdot 1/5} \cdot y^{1/5} \cdot z^{-5}) \cdot (x^5 \cdot y^5 \cdot z^{-5 \cdot 5})^{-1} \\
&= (x \cdot y^{1/5} \cdot z^{-5}) \cdot (x^5 \cdot y^5 \cdot z^{-25})^{-1} \\
&= x \cdot y^{1/5} \cdot z^{-5} \cdot x^{-5} \cdot y^{-5} \cdot z^{25} \\
&= x^{1-5} \cdot y^{(1/5)-5} \cdot z^{-5+25} \\
&= \boxed{x^{-4} \cdot y^{-24/5} \cdot z^{20} = \frac{z^{20}}{x^4 \cdot y^{24/5}}}
\end{aligned}$$

Båda de sista svaren kan anses ”maximalt förenklade”; det beror på tillämpningen vilket av dem som är mest funktionellt.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll).

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 5.10

2. Vi har intervallen $A = (-1{,}5,\ 1{,}2]$ och $B = [-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$.

(a) Markera intervallen på tallinjen. Var noga med att använda korrekta markeringar i intervallens ändpunkter. (1p)

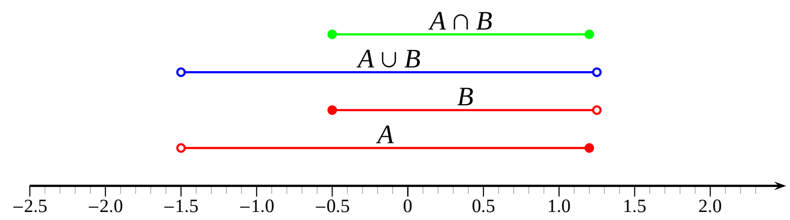
(b) Bestäm $A \cup B$. Skriv svaret med mängdnotation. (1p)

(c) Bestäm $A \cap B$. Skriv svaret med mängdnotation. (1p)

Lösning:

Tillhör alla deluppgifterna:

Det hela kan bli enklare om vi antingen skriver om A med bråk eller B med decimaler; det är besvärligt att jämföra tal skrivna med olika notation. $A = (-\frac{3}{2}, \frac{6}{5}]$, $B = [-0{,}5,\ 1{,}25)$. Hakparentes betyder ”ändpunkten ingår”, vilket i bild markeras med en fylld cirkel. Böjd parentes betyder ”ändpunkten ingår ej”, vilket i bild markeras med en ofylld cirkel.



(b) Unionen av två mängder är allt som tillhör den ena, andra eller båda. Det blir allt från vänster ända på A till höger ända på B, markerat i blått i bild. Mängdnotation är det där med måsvingeparenteser och ett signalemente på de element som tillhör mängden. (Det som användes i själva frågan är intervallnotation.)

$\boxed{\textit{Svar: } A \cup B = \{x \mid -1{,}5 < x < 1{,}25\}}$

(c) Snittet av två mängder är allt som tillhör båda. Det blir allt från och med vänster ända på B till och med höger ända på A, markerat i grönt i bild:

$\boxed{\textit{Svar: } A \cap B = \{x \mid -0{,}5 \le x \le 1{,}2\}}$

Rättningsnorm: Eftersom det uttryckligen står att man ska ha rätt sorts markeringar på intervallmarkeringen så krävs detta för poäng. Om alla uppgifterna är halvrätt utdelas en sammanfattningspoäng.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Union, snitt; Du ska kunna göra följande: • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt. • Utnyttja tallinjen för att illustrera exempelvis intervall och räkneoperationer. Exempel 2.1, Övning 2.9

3. Lös ekvationen $(x + 100)^2 + 4{\cdot}(x + 95) = 1$. (3p)

Lösning:

Med substitution: Ser ut att vara obehagligt stora tal att arbeta med. Om vi provar att sätta $x + 100 = t$ får vi ner storleksordningen lite grand, vilket borde förenkla:

$$
\begin{aligned}
(x+100)^2 + 4{\cdot}(x+95) &= 1 \\
t^2 + 4{\cdot}(t - 100 + 95) &= 1 && \text{Sätt } x + 100 = t \text{ (och } x = t - 100\text{)} \\
t^2 + 4{\cdot}(t - 5) &= 1 \\
t^2 + 4{\cdot}t - 20 &= 1 && \text{Multiplicera in} \\
t^2 + 2{\cdot}2{\cdot}t + 2^2 - 2^2 - 20 &= 1 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(t+2)^2 - 4 - 20 &= 1 && \text{Skriv som kvadrat} \\
(t+2) &= 25 && \text{Addera} \\
(t+2)^2 &= 5^2 && \text{Skriv som kvadrat} \\
t + 2 &= \pm 5 && \text{Tecknen kan vara olika}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rcrl}
t + 2 = 5 & \vee & t + 2 = -5 & \text{Nollfaktorlagen} \\
t = 3 & & t = -7 & \text{Subtrahera} \\
x + 100 = 3 & & x + 100 = -7 & \text{Återsubstituera} \\
x = -97 & & x = -107 & \text{Subtrahera}
\end{array}
$$

Utan substitution: Kommer man inte på något bättre är det bara att börja råräkna och hoppas på det bästa:

$$\begin{aligned}
(x+100)^2+4\cdot(x+95) &= 1\\
x^2+200\cdot x+10000+4\cdot x+380 &= 1\\
x^2+204\cdot x+10380 &= 1\\
x^2+2\cdot 102\cdot x+102^2-102^2+10380 &= 1\\
(x+102)^2-10404+10380 &= 1\\
(x+102)^2-24 &= 1\\
(x+102)^2 &= 25\\
(x+102)^2 &= 5^2\\
x+102 &= \pm 5\\
x+102=5 \quad &\vee\ x+102=-5\\
x=-97 \quad &\quad\ \ x=-107
\end{aligned}$$

Gissning: Ekvationen är av andra graden, så den kan inte ha mer än två lösningar. Hittar vi det så vet vi att vi hittat alla. Vad ska man gissa på? Om x är positiv blir vänsterledet väldigt stort, så det fungerar inte. Vi kan testa med något lätträknat negativt värde som borde ge något i närheten av 1 som resultat. $x=-100$ kan vara en bra start; gör kvadreringen enkel. Ger

$$\text{VL}=(-100+100)^2+4\cdot(-100+95)=0^2+4\cdot(-5)=-20$$

Fungerade inte; prova något en bit bort, säg $x=-90$:

$$\text{VL}=(-90+100)^2+4\cdot(-90+95)=10^2+4\cdot 5=120$$

Det här var fel åt andra hållet; prova något lite mitt emellan. Fortsätter man så kan man identifiera allt smalare intervall som svaret måste ligga i, och eftersom svaren i det här fallet var heltal bör man kunna hitta dem.

$\boxed{\textit{Svar: } x\in\{-97,-107\}}$

Rättningsnorm: Rätt svar med beräkning: 3p. Rätt svar med gissning och kontroll: 2p. Genomfört en användbar substitution: minst 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Metod 8.8, Övning 8.18

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{\frac{9}{4}+\frac{15}{8}}{\frac{4}{9}+\frac{8}{15}}$$ (3p)

Lösning:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{9}{4}+\frac{15}{8}=\frac{9\cdot 2}{4\cdot 2}+\frac{15}{8}=\frac{18+15}{8}=\frac{33}{8}$$

Nämnaren:

$$\frac{4}{9}+\frac{8}{15}=\frac{4\cdot 5}{9\cdot 5}+\frac{8\cdot 3}{15\cdot 3}=\frac{20+24}{45}=\frac{44}{45}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{9}{4}+\frac{15}{8}}{\frac{4}{9}+\frac{8}{15}}=\frac{\frac{33}{8}}{\frac{44}{45}}=\frac{33}{8}\cdot\frac{45}{44}=\frac{3\cdot\cancel{11}\cdot 45}{8\cdot 4\cdot\cancel{11}}=\boxed{\frac{135}{32}}$$

Allt på en gång: Minsta gemensamma nämnare för alla bråken är $360 = 4\cdot 90 = 8\cdot 45 = 9\cdot 40 = 15\cdot 24$. Förlänger vi dubbelbråket med 360 får vi

$$\frac{\frac{9}{4}+\frac{15}{8}}{\frac{4}{9}+\frac{8}{15}}=\frac{\left(\frac{9}{4}+\frac{15}{8}\right)\cdot 360}{\left(\frac{4}{9}+\frac{8}{15}\right)\cdot 360}=\frac{\frac{9\cdot\cancel{4}\cdot 90}{\cancel{4}}+\frac{15\cdot\cancel{8}\cdot 45}{\cancel{8}}}{\frac{4\cdot\cancel{9}\cdot 40}{\cancel{9}}+\frac{8\cdot\cancel{15}\cdot 24}{\cancel{15}}}=\frac{810+675}{160+192}=\frac{1485}{352}=\frac{135\cdot\cancel{11}}{32\cdot\cancel{11}}=\boxed{\frac{135}{32}}$$

Att man här ska få syn på förkortningsmöjligheten i sista steget är väl mindre troligt, men i en del andra fall ger den här metoden enklast räkningar. Man kan faktorisera talen genom att utnyttja regler som ”slutsiffra 5, delbar med 5”, ”slutsiffra jämn, delbar med 2” och ”siffersumma delbar med 3, delbar med 3”, vilket ger

$$\begin{aligned}1485 &= 5\cdot 297 = 5\cdot 3\cdot 99 = 5\cdot 3\cdot 9\cdot 11 = 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 11\\ 352 &= 2\cdot 176 = 2\cdot 2\cdot 88 = 2\cdot 2\cdot 8\cdot 11 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 11\end{aligned}$$

ut vilket man ser att det finns den gemensamma faktorn 11 att förkorta bort.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

5. Polynomfunktionen p definieras enligt $p(x) = -4\cdot x^2+4\cdot x-2$. Bestäm funktionens värdemängd. (Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Värdemängden för en andragradsfunktion kan utläsas ur den kvadratkompletterade formen. Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}&-4\cdot x^2+4\cdot x-2\\
&= -4\cdot x^2-(-4)\cdot x+(-4)\cdot\tfrac{1}{2} && \text{Faktorisera}\\
&= -4\cdot(x^2-x+\tfrac{1}{2}) && \text{Bryt ut}\\
&= -4\cdot(x^2-2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x+(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2}) && \text{Kvadratkomplettera}\\
&= -4\cdot((x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1\cdot 2}{2\cdot 2}) && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera}\\
&= -4\cdot((x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}) && \text{Addera}\\
&= -4\cdot(x-\tfrac{1}{2})^2-1 && \text{Multiplicera in}\end{aligned}$$

Det lägsta värde $(x-\frac{1}{2})^2$ kan anta är 0, och då är det högsta värde $-4\cdot(x-\frac{1}{2})^2$ kan anta 0, och då är det högsta värde uttrycket som helhet kan anta -1. Sedan kan det anta alla värden lägre än detta, det är bara att stoppa in ett tillräckligt stort värde på x.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_p = \{y \mid y \le -1\} = (-\infty, -1]}$

Alternativ: Parabelns symmetriska form gör att extrempunkten ligger mitt emellan nollställen, så ett sätt att hitta extrempunkten och extremvärdet är att hitta nollställena. Det fungerar dock bara om nollställen existerar, vilket de inte gör här. Kurvan ligger helt och hållet nedanför x-axlen. Derivararesonemanget, som inte fick användas, går ut på att man hittar extrempunkten genom att derivera och lösa den ekvation man får om man sätter derivatan lika med noll.

Rättningsnorm: Rätt svar med acceptabel metod: 3p. Rätt till största delen: 2p. Åtminstone visat förståelse för frågan: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma värdemängden för en mycket enkel funktion (exempelvis en andragradsfunktion) ur beräkningsformeln. • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. Metod 6.2, Övning 6.17.

6. Du och din kompis har avslutat ett fysikexperiment, där ni varierat värdet på en variabel och läst av värdet på en annan. Resultatet har ni skrivit ner i en tabell:

invärde	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
utvärde	2,2	1,1	0,73	0,55	0,44	0,37	0,31	0,28	0,24	0,22

Ni har demonterat utrustningen och håller på att sammanställa rapporten då din kompis upptäcker att det uttryckligen står att ni skulle kontrollera utvärdet för invärdet 420. Ni har inte lust att montera ihop alltihop igen, så du föreslår att ni ska räkna ut ett troligt värde och föra in i tabellen. ”OK”, säger kompisen. ”Hur gör vi det?”

Beräkna ett troligt utvärde till invärdet 420.

Lösning:

Vi kan hoppas att sambandet mellan värdena inte alltför mycket avviker från en rät linje i närheten av det efterfrågade invärdet. Då kan vi ta fram en rät linje baserad på mätvärdena närmast det efterfrågade, och så ta fram ett utvärde baserat på linjen. De punkter vi har att utgå ifrån är invärde = 400, utvärde=0,55 och invärde = 500, utvärde = 0,44.

Mycket formellt: Vi kallar invärdena för x och utvärdena för y. Vi söker den linje som passerar punkterna $(x_1, y_1) = (400, 0{,}55)$ och $(x_2, y_2) = (500, 0{,}44)$. Först tar vi fram riktningskoefficienten med tvåpunktsformeln:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}44 - 0{,}55}{500 - 400} = \frac{-0{,}11}{100} = -0{,}0011$$

(Negativt värde innebär att ökade x ger minskade y, vilket verkar stämma med tabellen.) Nu kan vi ta fram ett uttryck för linjen med enpunktsformeln:

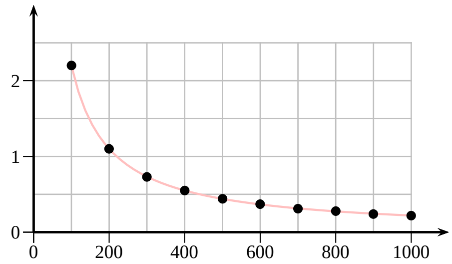
$$\begin{aligned} y - y_1 &= k \cdot (x - x_1) \\ y - 0{,}55 &= -0{,}0011 \cdot (x - 400) \quad \Leftrightarrow \quad y = -0{,}0011 \cdot (x - 400) + 0{,}55 \end{aligned}$$

(Eftersom vi bara ska använda formeln för att ta reda på ett enda värde är det inte värt att lägga tid på att förenkla den.) Med det aktuella x-värdet insatt får vi

$$\begin{aligned} y &= -0{,}0011 \cdot (420 - 400) + 0{,}55 = -0{,}0011 \cdot 20 + 0{,}55 \\ &= -0{,}022 + 0{,}55 = 0{,}528 \approx \boxed{0{,}53} \end{aligned}$$

Mycket informellt: 420 ligger på 20 % av sträckan mellan 400 och 500. På denna sträcka minskar utvärdena med 0,11. 20 % av detta är 0,022. Minskar man 0,55 med detta har man kvar $0{,}55 - 0{,}022 = 0{,}528 \approx \boxed{0{,}53}$.

Rimlighetskontroll (och möjlig lösningsmetod): Genom att plotta värdena i ett koordinatsystem och skissa en kurva kan man få en uppfattning om ifall det där med att anse att den nog inte avviker alltför mycket från en linje var rimligt:



Det verkar inte troligt att det ska finnas några häftiga värdeändringar mellan 400 och 500. (Däremot ser vi att vi skulle få ett mycket konstigt värde om vi baserade beräkningen på första och sista mätpunkten istället.) Ritar man figuren i större skala och skissar in en kurva så kan man ta fram det saknade värdet med avläsning.

Mycket stor observans: Då invärdet ökade med en faktor 10 så minskade utvärdet med en faktor 10. Det ser ut som att utvärdet är erhållet genom *division* med invärdet. Och om division med 100 ger 0,22 som resultat borde täljaren ha varit 220. Kan sambandet ha varit

$$\text{utvärde} = \frac{220}{\text{invärde}}$$

Testar man denna formel ser man att den matchar tabellen precis (med reservation för avrundningsfel). I så fall ska det saknade värdet vara

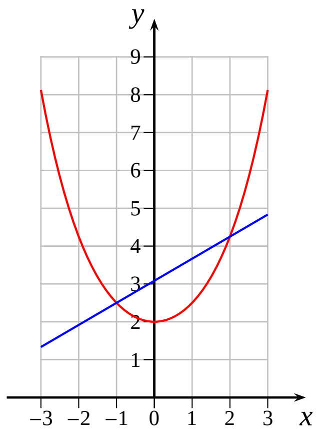
$$\frac{220}{420} = \frac{11}{21} \approx \boxed{0{,}52}$$

Ser man det så här bör man också kunna gissa vad fysikexperimentet handlade om: att mäta strömmen i en krets med spänningen 220 V och ett reglerbart motstånd. Ohms lag: $I = U/R$.

Rättningsnorm: Rimligt svar med förnuftig metod: 3p. Åtminstone visat förståelse för frågan: 1p. Mellanting: 2p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient. • Genomföra en linjär interpolation. Metod 4.4

7. **(a)** I koordinatsystemet nedan finns kurvorna $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$ och $y = \frac{7}{12} \cdot x + \frac{37}{12}$:



Lös olikheten $2^x + (\frac{1}{2})^x > \frac{7}{12} \cdot x + \frac{37}{12}$. Du behöver inte göra någon uträkning, utan det går bra att läsa ut svaret ur bilden, bara du förklarar hur du kunde se vad det blev. (1p)

Lösning:
$y = \frac{7}{12}\cdot x + \frac{37}{12}$ är den räta linjen, så den böjda saken måste vara $y = 2^x + (\frac{1}{2})^x$. ”Större än” motsvarar i y-led ”ligger ovanför”. Så frågan är ”i vilket/vilka områden ligger den böjda kurvan ovanför linjen?”. Det verkar den göra fram till $x = -1$. Sedan ligger linjen överst fram till $x = 2$, och sedan är den böjda överst igen. Så lösningsmängden är:

$\boxed{\textit{Svar: } \{x \mid x < -1 \vee x > 2\} = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)}$

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som en förklaring: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tolka en olikhet grafiskt. Övning 9.4

(b) Lös följande olikhet: $(5 - 2\cdot x)\cdot(5\cdot x - 2) \geq 0$ (2p)

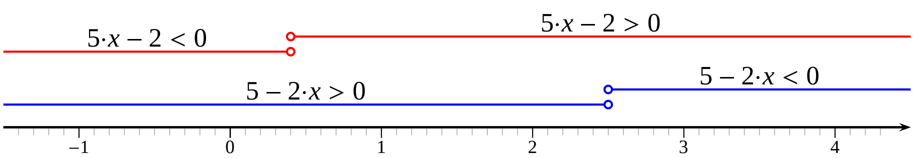
Lösning:

Standardlösning: Alla omskrivningar som är nödvändiga är redan gjorda; det enda som återstår är att göra en teckenanalys av vänsterledet. Första faktorn byter tecken då vi passerar $5-2\cdot x =$, vilket är då $5/2 = x$; andra faktorn byter tecken då $5\cdot x - 2 = 0$, vilket är då $x = 2/5$. $5/2 = 2{,}5$, $2/5 = 0{,}4$, så $5/2 > 2/5$. Tabell:

	$x < 0{,}4$	$x = 0{,}4$	$0{,}4 < x < 2{,}5$	$x = 2{,}5$	$x > 2{,}5$
$5 - 2\cdot x$	+	+	+	0	−
$5\cdot x - 2$	−	0	+	+	+
VL	−	0	+	0	−

Vi ville att uttrycket i vänsterledet skulle vara positivt eller noll, vilket det är från och med $x = 0{,}4$ till och med $x = 2{,}5$.

Alternativlösning: En produkt av två faktorer blir positiv om faktorerna har samma tecken och negativ om de har olika tecken. (Och teckenlös, noll, om någon av dem saknar tecken.) Vi kan på en tallinje illustrera faktorernas tecken:



Mellan $x = 0{,}4$ och $x = 2{,}5$ har faktorerna samma tecken (båda positiva), så produkten är positiv. Något område där båda är negativa finns inte.

$\boxed{\textit{Svar: } \{x \mid 2/5 \leq x \leq 5/2\} = [0{,}4,\ 2{,}5]}$

Kommentar: Notera att det inte finns någon som helst anledning att multiplicera ihop faktorerna – det gör bara problemet mycket svårare att analysera!

Rättningsnorm: Kommit till rätt svar: 2p. Använt fungerande metod men med något fel i utförandet: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Metod 9.1, Övning 9.9.

8. (a) En matematiklärare får en enkät, där en fråga är ”Hur stor andel av din tjänst är forskning?”. Matematikläraren fyller i ”0 %”. Nästa fråga är ”Hur stor andel av denna forskning är externfinansierad?”. Matematikläraren skriver ”Frågan är inte matematiskt möjlig att besvara.”. Varför skrev läraren det? (1p)

Lösning:

Om det är 0 % forskning i min tjänst innebär det att jag antas forska 0 timmar.

0 % av 0 timmar är 0 timmar. 100 % av 0 timmar är 0 timmar. Vilken annan procentsats som helst av 0 timmar är 0 timmar. Så uppenbarligen kan man svara precis vad som helst; allt är lika korrekt! Det verkar som att frågeställarna väntade sig ett klart bestämt svar, och i så fall var frågan felformulerad.

Annorlunda uttryckt: om jag antas forska 200 timmar, varav 20 är externfinansierade, kan jag beräkna andelen som $20/200$. Om jag antas forska 0 timmar, varav 0 är externfinansierade, är andelen alltså $0/0$. Vilket är odefinierat.

Rättningsnorm: Begriplig förklaring av problemet: 1p.

Referenser: Motsvarar inte någon punkte exakt, men testar om man har förstått innebörden i division.

(b) En 12-åring i din bekantskapskrets frågar dig varför att dividera med ett bråk av typ ”ett delat med ett heltal” är samma sak som att multiplicera med heltalet:

$$a\Big/\frac{1}{b} = a\cdot b$$

Förklara för 12-åringen. Hen kan inga bråkräkningsregler, så du kan inte använda dem i förklaringen, men hen vet vad division med heltal innebär. Observera att förklaringen ska förklara **varför** regeln gäller! (2p)

Lösning:

”Du vet vad division är. Då man till exempel delar 10 med 5 så får man 2, därför att det ryms 2 stycken 5-tal i 10. Så division är att se hur många av en grej det ryms i en annan. Så att dela något med en halv måste vara att se efter hur många halvor det ryms i den. Hur många halvor ryms i en hel?”

”Två.”

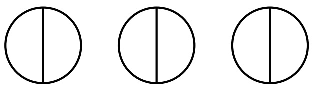
”Så hur många ryms i två hela?”

”Fyra.”

”Och i tre hela?”

”Sex.”.

”Precis! Vi kan rita det så här: Här har vi 3 hela. Här har vi en halva. Vi ser efter hur många halvor vi får plats med.



Och så gör man med alla andra sådana här tal också. Hänger du med?”

Rättningsnorm: Förklaring som inte utnyttjar mer komplicerade regler, som förklarar varför och som det verkar troligt att 12-åringen skulle förstå: 2p. Förklaring som uppfyller två av dessa krav: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Motivera bråkräkningsreglerna.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2019.06.11 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. **(a)** Är 10^{2^3} lika med 1 000 000 eller med 100 000 000? (±1p)

(b) Är -4^2 lika med -16 eller med 16? (±1p)

(c) Är $5{\cdot}2^3$ lika med 40 eller med 1000? (±1p)

OBS! Rätt svar ger +1 poäng, fel svar ger −1 poäng (och blankt svar ger 0 poäng). Motivering behövs ej.

Lösning:

Tema: prioritetsordning i potensuttryck. Vi motiverar ändå

(a) a^{b^c} ska tolkas som $a^{(b^c)}$, så $10^{2^3} = 10^8 = \boxed{100\,000\,000}$. (Däremot är $(10^2)^3 = 100^3 = 1\,000\,000$.)

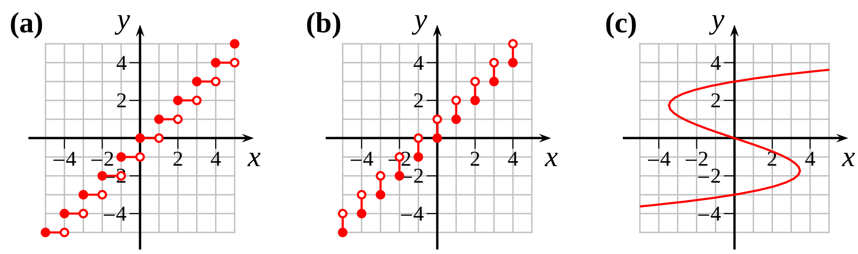
(b) Potens går före även unärt minus, så uttrycket ska tolkas som ”upphöj 4 i 2 och byt därefter tecken”; $-4^2 = \boxed{-16}$. (Vill man att ”byt tecken” ska ske innan potensberäkningen måste man skriva $(-4)^2$.)

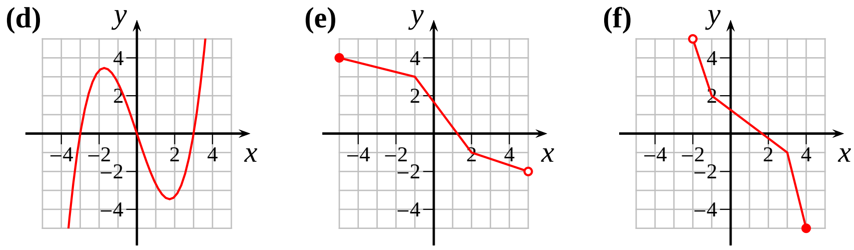
(c) Potens går även före gånger, så $5{\cdot}2^3 = 5{\cdot}8 = \boxed{40}$. (Vill man att multiplikationen ska göras innan potensberäkningen måste man skriva $(5{\cdot}2)^3$.)

Rättningsnorm: Se frågan. Obegripliga svar ger 0p, och vid negativ poängsumma ges 0p totalt.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 5.5

2. Nedan finns sex kurvor avbildade. Ange för varje kurva om den representerar en funktion av x eller inte. Motivering behövs ej. 0,5 poäng per kurva; summan avrundas neråt. (3p)





Lösning:

Rekommenderad uppgift 4.11, lätt omformulerad för att möjliggöra poängsättning.

(a) Funktion, för till varje x hör ett och endast ett y. Funktionen i fråga är avrundning till närmast lägre heltal, samma funktion som används vid poängräkningen här.

(b) Ej funktion. Exempelvis är $x = 1$ kopplat till alla y i intervallet $[1, 2)$.

(c) Ej funktion. Exempelvis är $x = 0$ kopplat till $y = -3$, $y = 0$ och $y = 3$.

(d) Funktion. (Formeln är $\frac{1}{3}\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+3)$.)

(e) Funktion (styckvis definierad).

(f) Funktion (styckvis definierad).

Rättningsnorm: Se frågan.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Funktion; Du ska kunna göra följande: • Avgöra om en kurva är en funktionsgraf. Metod 4.2, Övning 4.11.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right)\Big/\frac{5}{4}+\frac{7}{2}$$

(3p)

Lösning:

Prioritetsordningen, division går före addition, gör att divisionen med $5/4$ ska genomföras innan additionen med $7/2$. Subtraktionen däremot står inom parentes och ska därför göras först. Skrivet med horisontella bråkstreck (mer lättläst) ser uttrycket ut som

$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}}+\frac{7}{2}$$

Två sätt att lägga upp arbetet:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}-\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{4-9}{24}=-\frac{5}{24}$$

Stora bråket:

$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{-\frac{5}{24}}{\frac{5}{4}}=-\frac{\cancel{5}}{24}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=-\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 6}=-\frac{1}{6}$$

Alltihop:

$$\frac{\frac{1}{6}-\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}}+\frac{7}{2}=-\frac{1}{6}+\frac{7\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{-1+21}{6}=\frac{20}{6}=\frac{\cancel{2}\cdot 10}{\cancel{2}\cdot 3}=\boxed{\frac{10}{3}}$$

Mer på en gång: Minsta gemensamma nämnare för alla bråken i det stora bråket är $24 = 6{\cdot}4 = 3{\cdot}8$. Förlänger vi med detta plattar bråket ut sig:

$$\frac{\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{8}\right)\cdot 24}{\frac{5}{4}\cdot 24} = \frac{\frac{1\cdot 4\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}}-\frac{3\cdot 3\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}}}{\frac{5\cdot 6\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}} = \frac{4-9}{30} = \frac{-\cancel{5}}{6\cdot\cancel{5}} = -\frac{1}{6}$$

Avslutningen blir likadan som i det andra förslaget.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

4. Lös ekvationen $x - 3\cdot\sqrt{x} - 4 = 0$. (3p)

Lösning:

Substitution: Sätter vi $x = (\sqrt{x})^2$, $\sqrt{x} = t$ får vi en vanlig andragradsekvation:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x})^2 - 3\cdot\sqrt{x} - 4 &= 0 && \text{Skriv som rötter}\\
t^2 - 3\cdot t - 4 &= 0 && \boxed{\text{Sätt } \sqrt{x} = t}\\
t^2 - 2\cdot 1{,}5\cdot t + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 4 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera}\\
(t-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 4 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera}\\
(t-1{,}5)^2 &= 6{,}25 && \text{Slå ihop; ”flytta över”}\\
(t-1{,}5)^2 &= 2{,}5^2 && \text{Skriv som kvadrat}\\
t - 1{,}5 &= \pm 2{,}5 && \text{”Ta bort” kvadraten}\\
t - 1{,}5 = 2{,}5 \;&\vee\; t - 1{,}5 = -2{,}5 && \text{Falluppdela}\\
t = 4 \qquad&\qquad t = -1 && \text{”Flytta över”}\\
\sqrt{x} = 4 \qquad&\qquad \sqrt{x} = -1 && \text{Återsubstituera}\\
x = 4^2 \qquad&\qquad \text{olösbar i } \mathbb{R}\\
x = 16 \qquad&
\end{aligned}$$

Kvadrering: Vi kan kvadrera för att få bort rottecknet, men då måste vi komma ihåg att kontrollera svaren eftersom operationen kan generera falska rötter. Vi måste också ”flytta över” rotuttrycket så att det hamnar ensamt på ena sidan likhetstecknet:

$$\begin{aligned}
x - 3\cdot\sqrt{x} - 4 &= 0\\
x - 4 &= 3\cdot\sqrt{x} && \text{”Flytta över”}\\
(x-4)^2 &= (3\cdot\sqrt{x})^2 && \text{Kvadrera; KOLLA SVAREN!}\\
x^2 - 8\cdot x + 16 &= 9\cdot x && \text{Utveckla}\\
x^2 - 17\cdot x + 16 &= 0 && \text{”Flytta över”}\\
x^2 - 2\cdot 8{,}5\cdot x + 8{,}5^2 - 8{,}5^2 + 16 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera}\\
(x-8{,}5)^2 - 72{,}25 + 16 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera}\\
(x-8{,}5)^2 - 56{,}25 &= 0 && \text{Slå ihop}\\
(x-8{,}5)^2 - 7{,}5^2 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat}\\
((x-8{,}5)+7{,}5)\cdot((x-8{,}5)-7{,}5) &= 0 && \text{Konjugatregeln}\\
(x-1)\cdot(x-16) &= 0 && \text{Förenkla}\\
x - 1 = 0 \;&\vee\; x - 16 = 0 && \text{Nollfaktorlagen}\\
x = 1 \qquad&\qquad x = 16 && \text{”Flytta över”}
\end{aligned}$$

Kontroll i ursprungsekvationen:

$$x = 16: \quad \begin{cases} \text{VL} = 16 - 3\cdot\sqrt{16} - 4 = 16 - 3\cdot 4 - 4 = 16 - 12 - 4 = 0 \\ \text{HL} = 0 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$$x = 1: \quad \begin{cases} \text{VL} = 1 - 3\cdot\sqrt{1} - 4 = 1 - 3\cdot 1 - 4 = 1 - 3 - 4 = -6 \\ \text{HL} = 0 \end{cases} \quad \text{ej OK}$$

$x = 1$ var tydligen en falsk rot, orsakad av kvadreringen.

$\boxed{\textit{Svar: } x = 16}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Gjort något icketrivialt och konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Metod 8.9, Övning 8.23–26.

5. Bestäm kvot och rest vid division av $x^2 - 3\cdot x + 5$ med $x - 7$.

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Genomför en polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l} & x + 4 \\ \hline x - 7 & x^2 - 3\cdot x + 5 \\ & -(x^2 - 7\cdot x) \\ \hline & \quad 4\cdot x + 5 \\ & \quad -(4\cdot x - 28) \\ \hline & \qquad 33 \end{array}$$

Det som står uppe på är kvoten, det som blev över nertill är resten. Svaret kan kontrolleras genom att man utvecklar $(x - 7)\cdot(x + 4) + 33$; det ska bli andragradaren.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Kvot: } x + 4\text{; rest: } 33}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Nästan helt rätt (t.ex. slarvfel eller oklart svar): 2p. Mer fel än så, men inte helfel: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision. Metod 7.2, övning 7.7

6. Studera följande: $x = -4 \ \square \ 16 = x^2$

(a) Vilken av symbolerna $=$, $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$ ska stå i den tomma rutan? (1p)

(b) Förklara varför den symbolen passar. (1p)

(c) Förklara varför de andra två symbolerna inte passar. (1p)

Lösning:

(a) $\Rightarrow$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Detta innebär att vi skrivit ”*om* x är talet minus fyra *så* är talet 16 lika med kvadraten på x”, vilket väl stämmer, eftersom $16 = (-4)\cdot(-4)$.

(c) Sätter vi in likhetstecknet = har vi skrivit att -4 och 16 är samma tal. Det är de inte! Och ekvivalenspilen $\Leftrightarrow$ skulle innebära att vi påstår att -4 är det *enda* tal vars kvadrat är 16. Men även 4 har kvadraten 16, så det skulle ju vara fel!

Rättningsnorm: (b) och (c): Om man klart visat att man förstår innebörden i något av tecknen så kan 1p ges totalt på uppgiften.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation • Ekvivalens; Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen $=$, $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$ korrekt. • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 1.3–4, Övning 8.4.

7. Multiplicera in konstanten:

(a) $9 \cdot (a-3)^2$ (1p)

(b) $9 \cdot \sqrt{1+b}$ (1p)

Bryt ut en konstant:

(c) $(2 \cdot c^2 + 4 \cdot c)^3$ (1p)

Lösning:

(a) $9 \cdot (a-3)^2 = 3^2 \cdot (a-3)^2 = (3 \cdot (a-3))^2 = \boxed{(3 \cdot a - 9)^2}$

(b) $9 \cdot \sqrt{1+b} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{1+b} = \sqrt{81 \cdot (1+b)} = \boxed{\sqrt{81 + 81 \cdot b}}$

Rättningsnorm: Gäller även (a): Även steget innan det inramade accepteras som svar.

(c) $(2 \cdot c^2 + 4 \cdot c)^3 = (2 \cdot (c^2 + 2 \cdot c))^3 = 2^3 \cdot (c^2 + 2 \cdot c)^3 = \boxed{8 \cdot (c^2 + 2 \cdot c)^3}$

Rättningsnorm: Även lösningar som brutit ut variabeln c accepteras som svar.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • [. . .] tillämpa distributiva lagen. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. Övning 6.13–14

8. Din kompis har analyserat olikheten $\dfrac{(3 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x - 2)}{x - 10} \leq 0$ med hjälp av denna teckentabell:

x	0	1	2	3	4	5
$3 \cdot x - 1$	−	+	+	+	+	+
$3 \cdot x - 2$	−	+	+	+	+	+
$x - 10$	−	−	−	−	−	−
VL	−	−	−	−	−	−

☠

och har fått svaret till

Svar: Alla x går bra. ☠

(a) Förklara för din kompis vad som är fel i upplägget av tabellen. (Det räcker inte att säga ”för att den ska se ut så här”, utan du måste klargöra vad det är som gör att den här tabellen inte fungerar.) (1p)

(b) Visa kompisen hur man korrekt ställer upp en teckentabell för olikheten och läs ut det korrekta svaret. (2p)

Lösning:

(a) ”Du, det finns mer i världen än de där talen! De två första faktorerna, de måste passera noll någonstans *mellan* 0 och 1, eftersom de har olika tecken i de punkterna. Och nämnaren, den måste väl börja vara positiv någon gång? Du måste identifiera de punkter där det händer något intressant, och så kolla vad som händer *i* de punkterna och i områdena *mellan* dem!”

Rättningsnorm: Förklaring som pekar ut något av felen i lösningen och som verkar begriplig för en kurskompis ger poäng.

(b) ”Vi ser att $3 \cdot x - 1$ passerar 0 vid $x = 1/3$, och $3 \cdot x - 2$ passerar 0 vid $x = 2/3$. Och $x - 10$ passerar 0 vid $x = 10$. Så där har vi våra intressanta punkter. Nu ställer vi upp en användbar tabell:

x	$x < 1/3$	$x = 1/3$	$1/3 < x < 2/3$	$x = 2/3$	$2/3 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
$3 \cdot x - 1$	−	0	+	+	+	+	+
$3 \cdot x - 2$	−	−	−	0	+	+	+
$x - 10$	−	−	−	−	−	0	+
VL	−	0	+	0	−	odef	+

Så uttrycket är tillfälligt positivt på en kort sträcka mellan 0 och 1, och det är positivt efter 10. Det korrekta svaret är

$\boxed{\textit{Svar: } x \leq 1/3 \lor 2/3 \leq x < 10}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Någon liten detalj fel: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Metod 9.1, Övning 9.9.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2019.08.13 14.30-17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

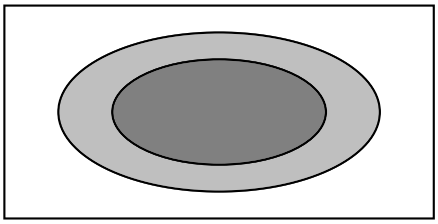
Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. (a) Illustrera begreppet *delmängder* med hjälp av Venndiagram. (1p)

Lösning:

Halva rekommenderade uppgift 1.13.

En mängd är en delmängd i en annan mängd om den helt och hållet ingår i den andra. Mängden barn är en delmängd i mängden människor, mängden heltal är en delmängd i mängden rationella tal, och så vidare. Bild:



Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Delmängd; Exempel 1.13, Övning 1.13.

Rättningsnorm: Bild med någon form av potatis inuti större potatis ger poäng.

(b) Skriv upp med ord vad det står här: $\{x \mid (x < -2) \vee ((x > 4{,}5) \wedge (x < 6))\}$ (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 1.9(b).

”Mängden av alla x sådana att x är mindre än minus två *eller* så att x är större än fyra komma fem och mindre än sex” eller kortare ”alla tal före minus två ihop med alla tal mellan fyra komma fem och sex”.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Och, eller, inte (i logisk mening); Du ska kunna göra följande: • Tolka en enkel mängdbeskrivning; Övning 1.9.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Något mindre fel: 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$(7/2 + 5/4 - 3)/(6 + 1/8)$$ (3p)

Lösning:

Läsbarheten ökas om man övergår till horisontella bråkstreck. Divisioner går före additioner och subtraktioner; parenteser binder ihop saker till en enhet:

$$\frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{4}-3}{6+\frac{1}{8}}$$

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{7\cdot 2}{2\cdot 2}+\frac{5}{4}-3\cdot\frac{4}{4}=\frac{14+5-12}{4}=\frac{7}{4}$$

Nämnaren:

$$6\cdot\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=\frac{48+1}{8}=\frac{49}{8}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{4}-3}{6+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{7}{4}}{\frac{49}{8}}=\frac{7}{4}\cdot\frac{8}{49}=\frac{\cancel{7}\cdot 2\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 7\cdot\cancel{7}}=\boxed{\frac{2}{7}}$$

Notera att det bara skulle ha gjort beräkningarna svårare att räkna ut 7·8 och 4·49!

Allt på en gång: Förlänger man dubbelbråket med dess minsta gemensamma nämnare $8 = 2\cdot 4$ plattar det ut sig:

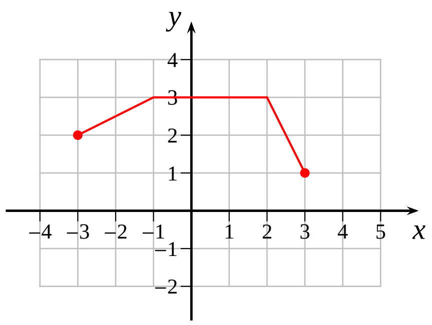
$$\frac{\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{4}-3\right)\cdot 8}{\left(6+\frac{1}{8}\right)\cdot 8}=\frac{\frac{7\cdot 4\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}+\frac{5\cdot 2\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}}-3\cdot 8}{6\cdot 8+\frac{1\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}}}=\frac{28+10-24}{48+1}=\frac{14}{49}=\frac{2\cdot\cancel{7}}{7\cdot\cancel{7}}=\boxed{\frac{2}{7}}$$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

3. Här har vi grafen för en funktion f:



Ange hur $f(x)$ beräknas. (Om du läser ut svaret direkt ur bilden, tala om vad det var du tittade på.) (3p)

Lösning:

Funktionen är uppenbarligen styckvis definierad, ihopskarvad av tre räta linjestycken.

Mellan $x = -3$ och $x = -1$ går den en ruta uppåt på två rutor framåt, vilket ger riktningskoefficient $k = 1/2$. Gör man en tänkt förlängning av linjestycket fram till y-axlen så skär det på höjden $y = 3{,}5 = 7/2$.

Mellan $x = -1$ och $x = 2$ har den det konstanta värdet 3.

Mellan $x = 2$ och $x = 3$ går den två rutor neråt på en ruta framåt, vilket ger riktningskoefficient $k = -2$. Förlänger man det linjestycket (och y-axeln) ser man en skärning på höjden $y = 7$.

Man kan också använda tvåpunktsformeln och enpunktsformeln för att ta fram uttryck för linjerna.

Totalt: $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot x + \frac{7}{2} & \text{om } -3 \le x < -1 \\ 3 & \text{om } -1 \le x < 2 \\ -2\cdot x + 7 & \text{om } \ \ 2 \le x \le 3 \end{cases}}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter; Övning 4.22

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

4. Lös följande olikhet: $\dfrac{3}{x+1} \ge \dfrac{1}{x}$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1} &\ge \frac{1}{x} \\ \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x} &\ge 0 && \text{"Flytta över"} \\ \frac{3\cdot x}{(x+1)\cdot x} - \frac{(x+1)\cdot 1}{(x+1)\cdot x} &\ge 0 && \text{Gör liknämnigt} \\ \frac{3\cdot x - (x+1)}{(x+1)\cdot x} &\ge 0 && \text{Gemensamt bråkstreck} \\ \frac{2\cdot x - 1}{(x+1)\cdot x} &\ge 0 \end{aligned}$$

$2\cdot x - 1$ byter tecken vid $x = 1/2$; $x + 1$ byter tecken vid $x = -1$; x byter tecken vid $x = 0$. Se efter vad som händer *i* dessa punkten och *mellan* dessa punkter. Tabell:

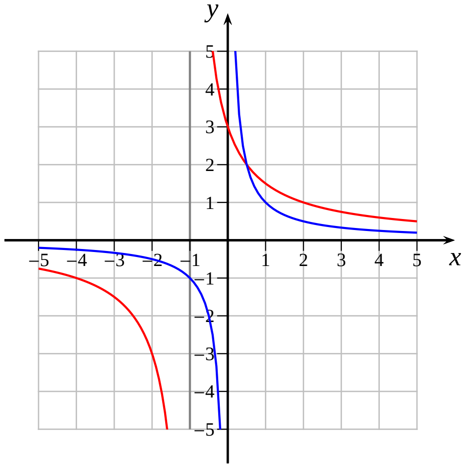
	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$2\cdot x - 1$	−	−	−	−	−	0	+
$x + 1$	−	0	+	+	+	+	+
x	−	−	−	0	+	+	+
VL	−	odef	+	odef	−	0	+

Vi ville att vänsterledet i det omskrivna uttrycket skulle vara minst noll, vilket det är mellan −1 och 0, samt från och med $1/2$.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in (-1, 0) \ \vee \ x \in [1/2, \infty)}$

Notation: Det ska *inte* vara likhetstecken mellan de utsagor som här är skrivna på separata rader; om man vill kan man ha ekvivalenspil.

Illustration: Uppritat ser problemet ut så här:



Den röda kurvan motsvarar vänsterledet och den blåa högerledet i ursprungsversionen. Frågan motsvarar "i vilka områden ligger den röda kurvan *ovanför* den röda?". Inledningsvis ligger den blåa överst; efter $x = -1$ startar den röda om ovanifrån, och ligger överst fran till $x = 0$, varefter den blåa startar om och åter är överst. Sedan skär kurvorna i $x = 1/2$, och den röda ligger överst efter denna punkt.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Metod 9.1, Exempel 9.4, Övning 9.9–11

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

5. Faktorisera följande polynom: $-2{\cdot}x^3 - x^2 + 3{\cdot}x$. (3p)

Lösning:

3:e-gradare, kan (om man har tur) brytas isär i 3 förstagradsfaktorer. (Får man använda icke-reella tal så går det garanterat, är bara reella tillåtna kan man köra fast vid andragradsfaktorerna.) En faktor ser man direkt: alla termerna innehåller x, vilket alltså kan brytas ut. Då finns det en andragradare kvar, som kan angripas med kvadratkomplettering:

$$
\begin{aligned}
-\,&2{\cdot}x^3 - x^2 + 3{\cdot}x \\
&= x{\cdot}(-2{\cdot}x^2 - x + 3) && \text{Bryt ut} \\
&= x{\cdot}(-2){\cdot}(x^2 + 0{,}5{\cdot}x - 1{,}5) && \text{Bryt ut} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}(x^2 + 2{\cdot}0{,}25{\cdot}x + 0{,}25^2 - 0{,}25^2 - 1{,}5) && \text{Kvadratkomplettera} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}((x + 0{,}25)^2 - 0{,}0625 - 1{,}5) && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}((x + 0{,}25)^2 - 1{,}5625) && \text{Slå ihop} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}((x + 0{,}25)^2 - 1{,}25^2) && \text{Skriv som kvadrat} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}((x + 0{,}25) + 1{,}25){\cdot}((x + 0{,}25) - 1{,}25) && \text{Konjugatregeln} \\
&= -2{\cdot}x{\cdot}(x + 1{,}5){\cdot}(x - 1) && \text{Slå ihop}
\end{aligned}
$$

Om man vill kan man multiplicera in 2:an i den mittre parentesen, så slipper man decimaler. Beräkningen är för övrigt enklare att genomföra på bråkform, för det är lättare att se att $25/16 = (5/4)^2$ än vad det är att se att $1{,}5625 = 1{,}25^2$.

$\boxed{\textit{Svar: } -2{\cdot}x{\cdot}(x + 1{,}5){\cdot}(x - 1)}$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen; poängen är att det man har hela tiden representerar samma värde, men skrivet på lite olika sätt.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • [. . .], faktoriserad form [. . .]; Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.17, 7.12, 7.14

Rättningsnorm: Om det är klart att man faktiskt försöker faktorisera: Utbrytning 1p, kvadratkomplettering 1p, faktorisering 1p.

6. Uppgiften saknade upplysning om poäng, men det var 1p per deluppgift (annars stämmer inte totalpoängen för tentan).

(a) Om en uppgift innehåller instruktionen ”räkna exakt”, vad betyder det? (1p)

Lösning:

$\boxed{\text{Avrunda inte}}$ Skriv 1/3 och inte 0,33, π och inte 3,14, $\sqrt{2}$ och inte 1,414, och så vidare. (I praktiken innebär det också ”använd inte miniräknare”, eftersom miniräknare brukar arbeta med avrundade värden.)

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Exakt värde

Rättningsnorm: Svar som kan tolkas som avrunda inte/använd inte räknare får poäng.

(b) Vilken typ av problem kan man lösa med hjälp av ”linjär interpolation”? (1p)

Lösning:

Problem där det man har är en tabell, och det värde man vill ha reda på ligger mellan två givna värden i tabellen. Man tänker sig att man drar en rät linje mellan de två punkter som är givna på ömse sidor om den sökta, och så tar man värdet från denna linje. (Det finns ännu tjusigare former av interpolation, där man utnyttjar fler punkter för att bedöma hur pass böjd den verkliga kurvan är.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en linjär interpolation (vilket får anses inkludera att veta vilken sorts problem man gör detta med).

Rättningsnorm: Förklaringen behöver inte vara välformulerad, men ska antyda att man vet svaret.

(c) Vilka tal ingår i talmängden de ”rationella talen”? (1p)

Lösning:

Tal som kan skrivas som en kvot mellan heltal (dock ej med nämnare noll).

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: [. . .], rationellt tal, [. . .].

Rättningsnorm: ”Kvot mellan heltal” räcker.

7. Funktionen f beräknas med formeln $f(x) = (4-x)^{1/2} + x^{-1} + (4+x)^{1/2}$. Vad har f för definitionsmängd? (3p)

Lösning:

Om inget annat sägs får definitionsmängden antas vara alla x som inte ger svaret ERROR då man försöker beräkna $f(x)$. Formeln för $f(x)$ är, skriven mer läsbart

$$f(x) = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x} + \sqrt{4+x}$$

Rotfunktionen är definierad för ickenegativa reella tal, vilket ger

- $4 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 4$
- $4 + x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4$

Vidare kan man inte dividera med noll, så

- $x \neq 0$.

Skärningen mellan de för de olika termerna fungerande områdena ger de områden där allt fungerar: från och med −4 till och med 4, med undantag för 0.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = [-4, 0) \cup (0,4]}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd; Du ska kunna göra följande: • Bestämma definitionsmängden för en enkel funktion ur beräkningsformeln;

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

8. Lös följande ekvation: $25^x - 26{\cdot}5^{x-1} + 1 = 0$ (3p)

(Tips: använd substitution.)

Lösning:

25 är en 5-potens, och genom att skriva om allt till 5-potenser bör det gå att förenkla situationen med hjälp av substitution. $25^x = (5^2)^x = 5^{2\cdot x} = (5^x)^2$, och $5^{x-1} = 5^x{\cdot}5^{-1} = 5^x{\cdot}\frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
25^x - 26{\cdot}5^{x-1} + 5 &= 0 \\
(5^x)^2 - 26{\cdot}5^x{\cdot}\frac{1}{5} + 1 &= 0 && \text{Skriv som potenser} \\
t^2 - \frac{26}{5}{\cdot}t + 1 &= 0 && \boxed{\text{Sätt } 5^x = t} \\
t^2 - 2{\cdot}\frac{13}{5}{\cdot}t - \left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{13}{5}\right)^2 + 1 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
\left(t - \frac{13}{5}\right)^2 - \frac{169}{25} + \frac{25}{25} &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; utveckla} \\
\left(t - \frac{13}{5}\right)^2 - \frac{144}{25} &= 0 && \text{Slå ihop} \\
\left(t - \frac{13}{5}\right)^2 &= \left(\frac{12}{5}\right)^2 && \text{"Flytta över"; skriv som kvadrat} \\
t - \frac{13}{5} &= \pm\frac{12}{5} && \text{Glöm ej } \pm! \\
t - \frac{13}{5} = \frac{12}{5} \quad &\vee \quad t - \frac{13}{5} = -\frac{12}{5} \\
t = \frac{25}{5} \quad &\quad t = \frac{1}{5} \\
t = 5 \quad &\quad 5^x = 5^{-1} \\
5^x = 5^1 \quad &\quad x = -1 \\
x = 1 \quad &
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-1, 1\}}$

Kommentar: På denna uppgift var det väldigt många fel i omskrivningarna av potenserna.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Exempel 8.6, Övning 8.20

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Gjort något icketrivialt och konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2019.10.02 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{8}\right)\Big/\frac{5}{4}$$ (3p)

Lösning:

Bråktal brukar bli lättare att få överblick över om de skrivs med enbart horisontella bråkstreck. Division går före addition och subtraktion, om inte parenteser säger något annat. Subtraktionen inom parentesen ska göras innan divisionen, medan additionen ska göras efter:

$$\frac{5}{2}+\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{8}}{\frac{5}{4}}$$

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}-\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{20-15}{24}=\frac{5}{24}$$

Stora bråket:

$$\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{5}=\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 6\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{6}$$

Helheten:

$$\frac{5}{2}+\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{8}}{\frac{5}{4}}=\frac{5\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1}{6}=\frac{15+1}{6}=\frac{16}{6}=\frac{\cancel{2}\cdot 8}{\cancel{2}\cdot 3}=\boxed{\frac{8}{3}}$$

Mer på en gång: Genom att förlänga dubbelbråket med minsta gemensamma nämnare för samtliga ingående bråk, $24 = 6{\cdot}4 = 8{\cdot}3$, kan man få bråket att platta ut sig:

$$\frac{(\frac{5}{6}-\frac{5}{8})\cdot 24}{\frac{5}{4}\cdot 24} = \frac{\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} - \frac{5\cdot 3\cdot \cancel{8}}{\cancel{8}}}{\frac{5\cdot 6\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}}} = \frac{20-15}{5\cdot 6} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 6} = \frac{1}{6}$$

Fortsättning enligt föregående förslag.

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

2. **(a)** Din kompis undrar varför man ska ”vända” tecknet om man multiplicerar en olikhet med ett negativt tal. Förklara för kompisen! (Det räcker inte att säga ”för att regeln är sådan”, kompisen kan redan regeln. Frågan är *varför* regeln är sådan.) (1p)

Lösning:

”Säg att $a > b$. Det betyder att a ligger till höger om b på tallinjen. Om vi skulle byta tecken på talen, vilket är samma sak som att multiplicera dem med -1, så speglas de i noll; om de låg till höger om noll flyttar de till vänstersidan, och tvärtom, fast fortfarande på samma avstånd. Och då kommer det som tidigare låg längst åt höger att ligga längst åt vänster istället. Så $-a < -b$. Och multiplicerar man med något annat negativt än just -1 så kommer dessutom avstånden att tänjas ut eller dras ihop, men eftersom det gör proportionellt så påverkar det inte vilket som ligger längst till vänster, utan bara hur långt åt vänster det ligger.”

Kan formuleras på många andra sätt.

Rättningsnorm: Svaret måste försöka utreda *varför* för poäng.

(b) Lös följande olikhet: $(x - 1/4)\cdot(1/2 - x) > 0$ (2p)

Lösning:

$x - 1/4$ byter tecken då $x = 1/4$, $1/2 - x$ byter tecken då $x = 1/2$, och $1/4 < 1/2$. Baserat på detta kan vi ställa upp en teckentabell:

	$x < 1/4$	$x = 1/4$	$1/4 < x < 1/2$	$x = 1/2$	$x > 1/2$
$x - 1/4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1/2 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
VL	$-$	0	$+$	0	$-$

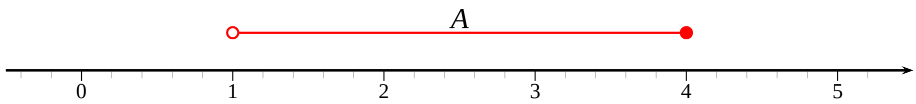
$\boxed{\textit{Svar: } x \in (1/4, 1/2)}$

Kommentar: Notera att man inte har minsta nytta av att inleda med att multiplicera ihop parenteserna!

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Metod 9.1, Exempel 9.3, Övning 9.9–11

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Något mindre fel i utförandet men korrekt princip: 1p.

3. Här är en bild av ett intervall A:



(a) Vilken av följande beteckningar beskriver intervallet?

(i) $(1, 4)$ (ii) $[1, 4]$ (iii) $\{1, 4\}$ (iv) $[1, 4)$ (v) $(1, 4]$

(vi) Flera av svarsförslagen är korrekta. (1p)

Lösning:

Ofylld plupp: ingår ej. Fylld plupp: ingår. Böjd parentes: ingår ej. Hakparentes: ingår. $\boxed{\text{Alternativ (v)}}$ stämmer. (Krullparenteser runt två tal betyder "dessa två tal och inget annat", vilket inte är ett intervall.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Ange något rationellt tal som ligger i A. (1p)

Lösning:

Vilket heltal eller bråktal som helst som är större än 1 men inte större än 4 går bra!

Rättningsnorm: Om flera tal angivits så måste *samtliga* vara korrekta för poäng.

(c) Ange något icke-rationellt tal som ligger i A. (1p)

Lösning:

Exempelvis $\sqrt{2}$, e och π. Observera alltså att heltal är rationella, och inte går att använda som exempel här.

Referenser: (gäller alla deluppgifterna): Du ska kunna förklara vad följande betyder:
• Heltal, rationellt tal, reellt tal • Intervall

Rättningsnorm: Se (b).

Motiveringar fordras ej.

4. Funktionen f definieras enligt: $f(x) = \begin{cases} -2{\cdot}x - 3 & -3 \le x < -2 \\ 1 & -2 \le x < 1 \\ 4{\cdot}x - 3 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

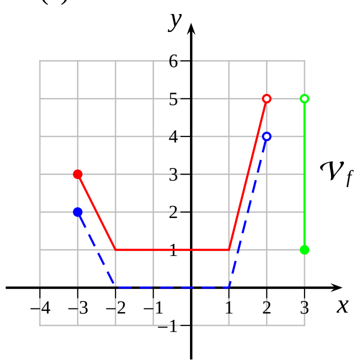
(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

(c) Rita kurvan $y = f(x) - 1$. (1p)

Lösning:

(a) Styckvis definierad funktion. Man kan göra en värdetbell, men enklare är att bara lägga linjalen rätt i koordinatsystemet. Linjen $y = -2{\cdot}x - 3$ skär y-axeln på höjden -3, och går 2 steg neråt för varje steg framåt. Vi sak ha den delen av linjen som ligger mellan $x = -3$ och $x = -2$. $y = 1$ är en horisontell linje. $y = 4{\cdot}x - 3$ skär också y-axeln på höjden -3, men går 4 steg uppåt för varje steg framåt. Bilden innehåller även motiveringar till (b) och (c).



Rättningsnorm: Fel sorts plupp i ändarna accepteras, men i övrigt ska kurvan vara helt korrekt (vilket inte går att avgöra om inte koordinatsystemet är graderat) för poäng.

(b) Värdemängden är alla de y-värden som finns på kurvan. Lägsta punkten ligger på höjden $y = 1$, högsta punkten nästan på höjden $y = 5$ (kurvan når inte riktigt upp dit, utan slutar "hur nära som helst" denna höjd). Alla värden däremellan finns också med på kurvan. (Markerat med grönt i bild.) Så

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = \{y \mid 1 \le y < 5\} = [1,\ 5)}$

Rättningsnorm: Svaret ska vara konsistent med vad-man-nu-ritade-på-(a) för poäng. Felaktig notation accepteras så länge det går att förstå vad som menades.

(c) Kurvan $y = f(x) - 1$ ligger ett steg längre ner än $y = f(x)$, för alla y-värdena har minskats med 1 efter att beräkningen körts. Inritat streckat i blått i bild.

Rättningsnorm: Svaret ska vara konsistent med vad-man-nu-ritade-på-(a) för poäng.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Koordinatsystem • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. • Skissa kurvorna [...] $y = f(x) + c$ [...] givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Rita en rät linje [...]; Övning 4.18, 4.21.

5. (a) Beräkna $4^4 \cdot 125^2$ (1p)

Lösning:

Rekommendera uppgift 5.9(a). Enklast verkar vara att notera att ena basen är en 2-potens och den andra en 5-potens, och att $2 \cdot 5 = 10$, som är extremt enkelt att räkna med (åtminstone så länge man använder det decimala talsystemet):

$$4^4 \cdot 125^2 = (2^2)^4 \cdot (5^3)^2 = 2^8 \cdot 5^6 = 2^{2+6} \cdot 5^6 = 2^2 \cdot (2 \cdot 5)^6 = \boxed{4 \cdot 10^6 = 4\,000\,000}$$

Rättningsnorm: Rätt svar krävs för poäng (rekommenderad uppgift med fokus på räknefärdighet).

(b) Beräkna $(-32)^{-2/5}$ (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.8(d). Också här verkar det användbart att primfaktorisera basen: $32 = 2 \cdot 16 = 2 \cdot 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$.

$$(-32)^{-2/5} = \frac{1}{(-32)^{2/5}} = \frac{1}{((-2^5)^2)^{1/5}} = \frac{1}{(2^{10})^{1/5}} = \frac{1}{2^2} = \boxed{\frac{1}{4} = 0{,}25}$$

Referenser: (gäller båda uppgifterna) Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Exempel 5.1. Och detta var alltså rekommenderade uppgifter.

Notation: Se uppgift 1.

Rättningsnorm: Rätt svar: 2p. Gjort minst tre korrekta saker, men ej kommit till svar: 1p

Svaren ska vara maximalt förenklade.

6. Lös ekvationen $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{6}$ (3p)

Lösning:

Inspektion: Reciproken av ett tal minus reciproken av närmast större tal ska bli $1/6$. Ett av de första tal man brukar få räkna då man ska lära sig ”förläng till gemensam nämnare” är $1/2 - 1/3 = 3/6 - 2/6 = 1/6$. Så $x = 2$, $x + 1 = 3$ passar! Fast finns det fler möjliga lösningar?

Skriv som ett bråk: Vi sätter vänsterledet på gemensamt bråkstreck, och ser vart det leder:

$$\mathrm{VL} = \frac{1\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)} - \frac{x\cdot 1}{x\cdot(x+1)} = \frac{x+1-x}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{x\cdot(x+1)}$$

Så

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{6} \qquad \Leftrightarrow \qquad x\cdot(x+1) = 6$$

Hmm... Ett tal gånger närmast större tal ska vara 6. 2 och 3 verkar passa in på det signalementet! Men detta är en andragradare, så det bör finnas två lösningar. -3 och -2 funkar också.

Och om vi inte ser detta kan vi kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
x\cdot(x+1) &= 6 && \\
x^2 + x &= 6 && \text{multiplicera ihop}\\
x^2 + 2\cdot 0{,}5\cdot x + 0{,}5^2 &= 6 + 0{,}5^2 && \text{kvadratkomplettera}\\
(x+0{,}5)^2 &= 6{,}25 && \text{skriv som kvadrat; räkna ut}\\
(x+0{,}5)^2 &= 2{,}5^2 && \text{skriv som kvadrat}\\
x + 0{,}5 &= \pm 2{,}5 && \text{samma kvadrat, kan ha olika tecken}
\end{aligned}$$

$$x = -0{,}5 \pm 2{,}5 = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

(Beräkningen är för övrigt bättre att genomföra på bråkform; det är mer uppenbart att $^{25}\!/_4 = (^5\!/_2)^2$ än att $6{,}25 = 2{,}5^2$.)

Uppmultiplicering: Vi ”multiplicerar upp” nämnarna, och noterar att detta bara är lagligt om $x \neq 0$ och $x \neq -1$, för i de fallen motsvarar operationen att förlänga med noll. Får vi något av dessa tal som resultat får vi slänga det.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} &= \frac{1}{6} && \\
6\cdot x\cdot(x+1)\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) &= 6\cdot x\cdot(x+1)\cdot\frac{1}{6} && \text{multiplicera}\\
\frac{6\cdot\cancel{x}\cdot(x+1)}{\cancel{x}} - \frac{6\cdot x\cdot\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} &= \frac{\cancel{6}\cdot x\cdot(x+1)}{\cancel{6}} && \text{förkorta}\\
\cancel{6\cdot x} + 6 - \cancel{6\cdot x} &= x^2 + x && \text{utveckla}\\
6 &= x^2 + x &&
\end{aligned}$$

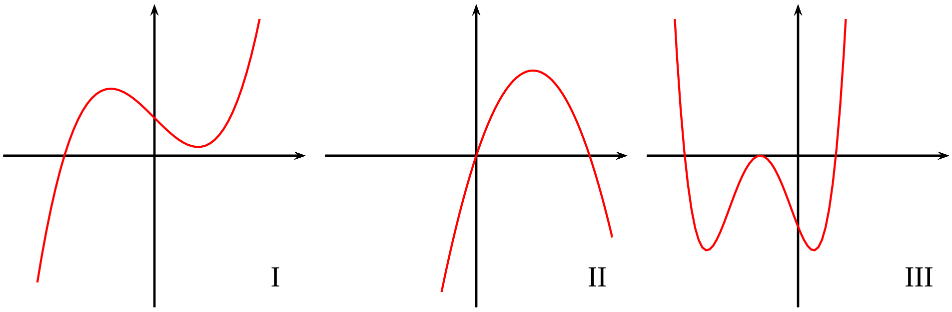
Fortsättning enligt förra lösningsförslaget.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-3, 2\}}$

Notation: Man kan, om man vill, ha implikation- eller ekvivalenspilar mellan stegen, även om detta anses underförstått om de är placerade under varandra. Men man får absolut inte ha likhetstecken mellan dem!

Rättningsnorm: Ekvationen var av en typ som inte tidigare varit med på en tenta, och det är därför lite svårt att förutspå vad som kan gå snett. Preliminärt: svar via inspektion, kontrollerat: 1p. Helt rätt: 3p. Annars poäng efter hur stor andel av en komplett lösning man tagit fram.

7. Här är tre grafer, som allihop avbildar polynom.



(a) Ett av polynomen är av udda grad. Vilket, och hur såg du det? (1p)

(b) Ett av polynomen har positiv konstantterm. Vilket, och hur såg du det? (1p)

(c) Ett av polynomen är av grad högre än 3. Vilket, och hur såg du det? (1p)

OBS! Samma polynom kan vara svar på flera av frågorna.

Lösning:

(a) Ett polynom av udda grad antar positiva värden i ena ändan och negativa i andra, medan polynom av jämn grad har samma tecken i båda ändarna. Det ser ut som att $\boxed{\text{bild I}}$ passar in på signalementet ”udda”, vilket de andra inte gör.

(b) Konstanttermen avgör utvärdet vid invärdet noll, vilket grafiskt innebär skärning med *y*-axeln. $\boxed{\text{Bild I}}$ visar något som skär axeln i det positiva området, medan de andra två gör det nere i det negativa eller vid noll.

(c) $\boxed{\text{Bild III}}$ avbildar något med tre nollställen, vill säga grad *minst* tre, och jämn grad. Detta ihop ger att graden är minst fyra, vilket är högre än tre. (Den första kan vara en tredjegradare; udda grad, ett nollställe, och helt klart inte grad ett, för grad ett ger en rät linje. Den andra ser mest ut som en andragradare.)

Om man låter ”1 enhet” var unit[1]cm på båda axlarna så är kurvorna I. $x^3 - x + 0{,}5$; II. $-2{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x$; III. $5{\cdot}x^4 + \frac{25}{2}{\cdot}x^3 + \frac{35}{4}{\cdot}x^2 + \frac{15}{8}{\cdot}x - \frac{5}{2}$

Kommentar: I många fall där 0p delats ut beror det inte på att motiveringen varit uppenbart felaktig, utan på att vi inte lyckats förstå den. Om du begär omprövning ska du då i din begäran förklara vad du menade med det du skrev.

Man kan inte få poäng för t.ex. ”bild I har udda grad, för kurvan är röd”, eftersom detta dels inte har med det efterfrågade att göra och dels eftersom de andra bilderna har samma egenskap.

Referenser: (gäller alla delfrågorna) Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. • Utnyttja faktorsatsen. Exempel 6.7, 7.3.

Rättningsnorm: (gäller alla delfrågorna) rätt svar med något som kan tolkas som en relevant motivering krävs för poäng. Derivataresonemang accepteras, eftersom de ingår i gymnasiekursen.

8. Bestäm medelpunkt och radie på nedanstående cirkel:

$$x^2 + y^2 - 0{,}2{\cdot}x + 0{,}6{\cdot}y = 0{,}15 \qquad (3p)$$

Se till att det klart framgår vad svaret är!

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i $x = a$, $y = b$ och radie r kan skrivas som $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, så vi ska försöka skriva om ekvationen till den formen. Detta görs med hjälp av kvadratkomplettering:

På decimalform:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 0{,}2\cdot x + 0{,}6\cdot y &= 0{,}15 \\
x^2 - 2\cdot 0{,}1\cdot x + 0{,}1^2 - 0{,}1^2 + y^2 + 2\cdot 0{,}3\cdot y + 0{,}3^2 - 0{,}3^2 &= 0{,}15 \quad \text{kvadratkomplettera} \\
(x - 0{,}1)^2 - 0{,}01 + (y + 0{,}3)^2 - 0{,}09 &= 0{,}15 \quad \text{skriv som kvadrater} \\
(x - 0{,}1)^2 + (y + 0{,}3)^2 &= 0{,}25 \quad \text{"flytta över"} \\
(x - 0{,}1)^2 + (y - (-0{,}3))^2 &= 0{,}5^2 \quad \text{skriv på standardform}
\end{aligned}$$

På bråkform: Har man svårt att placera decimalkommat rätt vid multiplikation så kan det vara säkrare att räkna på bråkform.

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - \tfrac{2}{10}\cdot x + \tfrac{6}{10}\cdot y &= \tfrac{15}{100} \\
x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot x + (\tfrac{1}{10})^2 - (\tfrac{1}{10})^2 + y^2 + 2\cdot\tfrac{3}{10}\cdot y + (\tfrac{3}{10})^2 - (\tfrac{3}{10})^2 &= \tfrac{15}{100} \\
(x - \tfrac{1}{10})^2 - \tfrac{1}{100} + (y + \tfrac{3}{10})^2 - \tfrac{9}{100} &= \tfrac{15}{100} \\
(x - \tfrac{1}{10})^2 + (y + \tfrac{3}{10})^2 &= \tfrac{25}{100} \\
(x - \tfrac{1}{10})^2 + (y + \tfrac{3}{10})^2 &= \tfrac{1}{4} \\
(x - \tfrac{1}{10})^2 + (y - (-\tfrac{3}{10}))^2 &= (\tfrac{1}{2})^2
\end{aligned}$$

Svar: Medelpunkt: $(0{,}1;\ -0{,}3) = (1/10, -3/10)$; radie: $0{,}5 = 1/2$ l.e.

Kommentar: Notera att man *inte* kan förenkla vidare genom att "stryka" upphöjt i 2. Ekvationen man då får motsvarar en rät linje, vilket absolut inte är samma sak som en cirkel, och man har då också tillämpat två icke-existerande räkne"regler":

$$\sqrt{a+b} \overset{☠}{=} \sqrt{a} + \sqrt{b} \qquad\qquad \sqrt{a^2} \overset{☠}{=} a$$

Den första "regeln" fungerar i princip bara om något av de två talen är noll, och den andra enbart för icke-negativa tal.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.23

Rättningsnorm: Korrekt beräkning och tydligt svar, utan omskrivning till linje: 3p. Två av föregående krav: 2p. Åtminstone haft visat att man vet vad som ska göras: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: "Systematiskt fel" är samma fel på flera ställen. Kravet om "minst hälften" är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Det vanligaste felet är utelämnade likhetstecken. På delad andraplats kommer pilar istället för likhetstecken och likhetstecken mellan saker som inte är lika.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2019.12.04 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. (a) Är $x = -4$ en lösning till ekvationen $8 + x = \sqrt{x^2}$? (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.2(c).

Snabb lösning: Sätt in värdet och kontrollera:

$$\begin{cases} \text{VL} = 8 + (-4) = 4 \\ \text{HL} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$$

Eftersom vänster led blev lika med höger led är detta en lösning.

Inte fullt så snabb lösning: Lös ekvationen och se om något av svaren är -4.

$$\begin{aligned} 8 + x &= \sqrt{x^2} \\ (8 + x)^2 &= (\sqrt{x^2})^2 \\ 64 + 16\cdot x + \cancel{x^2} &= \cancel{x^2} \\ 16\cdot x &= -64 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Eftersom kvadrering använts måste svaret kontrolleras, vilket motsvarar den snabba lösningen.

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{Ja}}$

Kommentar: Notera att högerledet *inte* kan förenklas till x, eftersom man då tillämpat en potensräkningsregel som bara är garanterad för positiva tal. Och att man, om man löser ekvationen, måste komma ihåg att använda kvadreringsregel då man kvadrerar vänsterledet.

Referenser: (Vad man behöver beror lite på hur man valt att angripa problemet.) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Lösning; Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter.

(b) Är $x - 1$ en faktor i polynomet $p(x) = x^4 - 5\cdot x^2 + 4$? (1p)

Lösning:
Snabb lösning: Enligt faktorsatsen så är $x-1$ en faktor om och endast om 1 är ett nollställe. Testa!

$$p(1) = 1^4 - 5 \cdot 1^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$$

Nollställe!
Något långsammare lösning: Genomför en polynomdivision och se om det går jämnt ut:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 + x^2 - 4 \cdot x \;\; - 4 \\
\hline
x-1 & x^4 \qquad - 5 \cdot x^2 \qquad + 4 \\
 & -(x^4 - x^3) \\
 & \qquad x^3 - 5 \cdot x^2 \\
 & \qquad -(x^3 - \;\; x^2) \\
 & \qquad\qquad -4 \cdot x^2 \\
 & \qquad\qquad -(-4 \cdot x^2 + 4 \cdot x) \\
 & \qquad\qquad\qquad -4 \cdot x + 4 \\
 & \qquad\qquad\qquad -(-4 \cdot x + 4) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Inget blev över – det här var en faktor!
Definitivt inte snabb lösning: Faktorisera polynomet förutsättningslöst, och se efter om någon av faktorerna är $x-1$.

$$\begin{aligned}
& x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 \\
&= (x^2)^2 - 5 \cdot x^2 + 4 && \text{skriv som kvadrater} \\
&= t^2 - 5 \cdot t + 4 && \text{sätt } x^2 = t \\
&= t^2 - 2 \cdot \tfrac{5}{2} \cdot t + (\tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2 + 4 && \text{kvadratkomplettera} \\
&= (t - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{25}{4} + \tfrac{4 \cdot 4}{4} && \text{skriv som kvadrat; kvadrera, gör liknämnigt} \\
&= (t - \tfrac{5}{2})^2 - \tfrac{9}{4} && \text{slå ihop} \\
&= (t - \tfrac{5}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2 && \text{skriv som kvadrat} \\
&= (t - \tfrac{5}{2} + \tfrac{3}{2}) \cdot (t - \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}) && \text{konjugatregeln} \\
&= (t - \tfrac{2}{2}) \cdot (t - \tfrac{8}{2}) && \text{slå ihop} \\
&= (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) && \text{sätt tillbaka } x^2\text{, förkorta} \\
&= (x^2 - 1^2) \cdot (x^2 - 2^2) && \text{skriv som kvadrater} \\
&= (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-2) && \text{konjugatregeln}
\end{aligned}$$

Ja, en av faktorerna var den efterfrågade!
Lösning som inte fungerar här men som kan fungera i andra fall: En sats säger att *om* ett polynom med heltalskoefficienter och högstagradskoefficient 1 har ett heltalsnollställe *så* är detta nollställe en faktor i konstanttermen. Tyvärr är talet 1 faktor i alla heltal, så det hjälper oss inte här. Men om vi fått i uppdrag att kontrollera ett annat tal hade det kanske gått att direkt svara nej därför att talet inte var en faktor i konstanttermen.

$\boxed{\textit{Svar:} \text{ Ja}}$

Referenser: (Beroende på metod.) Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. • [...] tillämpa distributiva lagen. Övning 7.2, 7.7, 7.14.

(c) En student (som ska övertyga en lärare om att en uppgift är korrekt löst) säger följande:

> Om man multiplicerar två jämna tal så blir produkten jämn, och den här produkten *är* jämn, så talen måste ha varit jämna!

Är studentens resonemang korrekt? (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 1.6(c). Nej, för det är visserligen sant att produkten av två jämna tal är jämn, men det finns en massa andra produkter som också är det. Vid heltalsräkning krävs bara att en av faktorerna är jämn, och lämnar man heltalen har man exempel som $\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5} = 10$ och $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, där produkten är jämn utan att någon faktor varit det.

Formulerat i logiska termer har studenten förväxlat en implikation med dess omvändning: ”jämna faktorer $\Rightarrow$ jämn produkt” är sant, men det innebär inte att ”jämn produkt $\Rightarrow$ jämna faktorer” behöver vara det.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Nej}}$

Kommentar: Många svar diskuterade egenskaperna hos positiva och negativa tal, vilket det inte fanns någonting om i frågan. (Ett jämnt tal kan vara positivt, som 2, negativt, som -2, och ingendera, som 0.)

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation • Ekvivalens • [...] faktor, produkt [...] Övning 1.6.

Rättningsnorm: (gäller alla deluppgifterna) Begripligt och korrekt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering krävs för poäng. Om (a) och (b) båda har korrekt tankegång men fel i utförandet kan 1p ges för de två uppgifterna sammantaget.

Motiveringar krävs!

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9} = \frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}+\frac{1}{9} = \frac{3+1}{9} = \frac{4}{9}$$

Nämnaren:

$$\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{6\cdot 2} = \frac{5-3+2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}} = \frac{1}{3}$$

(Om man inte observerar att parentesen innebär att minustecknet gäller även den sista termen får man här resultatet noll, vilket inte alls är bra att dividera med.) Helheten:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}\cdot 3 = \frac{4\cdot\cancel{3}}{3\cdot\cancel{3}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Mer på en gång: Genom att förlänga dubbelbråket med minsta gemensamma nämnare för samtliga ingående bråk, $36 = 3\cdot 12 = 6\cdot 6 = 9\cdot 4$, kan man få bråket att platta ut sig:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\cdot 36}{\left(\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right)\cdot 36} = \frac{\frac{1\cdot\cancel{3}\cdot 12}{\cancel{3}}+\frac{1\cdot\cancel{9}\cdot 4}{\cancel{9}}}{\frac{5\cdot\cancel{12}\cdot 3}{\cancel{12}}-\frac{1\cdot\cancel{4}\cdot 9}{\cancel{4}}+\frac{1\cdot\cancel{6}\cdot 6}{\cancel{6}}} = \frac{12+4}{15-9+6} = \frac{16}{12} = \frac{4\cdot\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel.

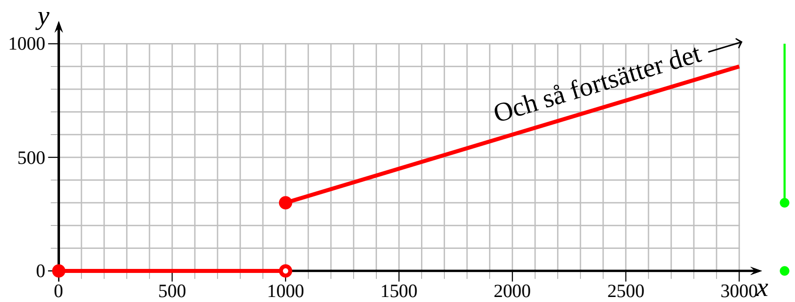
3. I ett land beräknas arbetsgivaravgiften $f(x)$ på ett utbetalat arvode på x valutaenheter med följande formel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1000 \\ 0{,}3 \cdot x & x \ge 1000 \end{cases}$$

(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Rita omsorgsfullt; det ska gå att beräkna en arbetsgivaravgift med hjälp av din bild! (2p)

Lösning:

Det går uppenbart inte att låta 1 ruta på pappret motsvara 1 valutaenhet, för då går det inte att få in något av intresse på pappret. 10 rutor till 1000 valutaenheter borde fungera; då får man plats med hela första biten av kurvan och så mycket av andra att det går att inse hur den fortsätter. Vid $x = 1000$ ska $y = 0{,}3 \cdot 1000 = 300$, och sedan ökar värdena så mycket för varje ytterligare 1000-steg. Bild:



Den ofyllda pluppen vid $(1000, 0)$ anger att $f(1000) \neq 0$, fast det kan se så ut, medan den fyllda pluppen vid $(1000, 300)$ anger att $f(1000) = 300$.

Man kan också utnyttja en värdetabell. Eftersom det händer konstiga saker vid $x = 1000$ kan det vara bra att ta med värdet $x = 999$:

x	0	500	999	1000	1500	2000	2500	3000
$f(x)$	0	0	0	300	450	600	750	900

Kommentar: Uppgiften är baserad på svenska skattesystemet. Om man deltar som försöksperson, t.ex. i en konsumentpanel, kan man märka att de slutar anlita en då arvodet man fått under året börjar närma sig 1000:-.

Rättningsnorm: Välritat koordinatsystem med väl vald skala på axlarna och välritad korrekt graf ger 2p. 1p för något dåligt ritat där det dock framgår att personen förstått hur grafen ska se ut. Inget avdrag för fel sorts ”pluppar” på grafen.

(b) Vad har funktionen f för värdemängd? (1p)

Lösning:

Utvärdena verkar vara dels talet 0, dels alla tal från 300 och uppåt, markerat med grönt i figuren. (I praktiken finns väl en övre gräns, eftersom det inte finns hur mycket pengar som helst i omlopp, men det är knappast skatteverkets problem.)

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = \{0\} \cup [300, \infty)}$

Referenser: (Gäller båda deluppgifterna) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. • Rita en rät linje [. . .]; Övning 4.12, 4.18, 4.21.

Rättningsnorm: Svar som stämmer med formeln och svar som stämmer med det man ritade på (a) ger poäng. Det gör inget om notationen är felaktig så länge det går att förstå vad som menades.

4. Lös följande ekvation: $\frac{1}{4}\cdot u^2 + u = \frac{1}{4}$ (3p)

Lösning:

Kvadratkomplettera:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4}\cdot u^2 + u &= \tfrac{1}{4} && \\
u^2 + 4\cdot u &= 1 && \text{Multiplicera med 4}\\
u^2 + 2\cdot 2\cdot u + 2^2 &= 1 + 2^2 && \text{Kvadratkomplettera}\\
(u+2)^2 &= 5 && \text{Skriv som kvadrat}\\
(u+2)^2 &= (\sqrt{5})^2 && \text{Skriv som kvadrat}\\
u + 2 &= \pm\sqrt{5} && \text{Glöm inte } \pm!\\
u &= \boxed{-2 \pm \sqrt{5}} && \text{Subtrahera 2}
\end{aligned}$$

Kommentar: I det här fallet verkade det mer effektivt att lägga till samma sak till båda led än att lägga till och dra bort från ena ledet.

Notation: Här ska man *inte* ha likhetstecken mellan stegen; värdet i början på en rad är i de flesta fallen inte samma som värdet i slutet på föregående. Vill man ha en symbol så går implikationspil och ekvivalenspil bra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck [. . .] • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.17, 8.14.

Rättningsnorm: pq-formeln: 0p. Annars: helt rätt: 3p. Visat förståelse för kvadratkompletteringens princip: 1p. Mellanting: 2p.

5. Förenkla följande uttryck maximalt. Utgå från att alla talen är positiva.

$$\frac{(\sqrt{a}\cdot b)^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot\sqrt[3]{b^{-1}\cdot c^4}}$$

Även ”slarvfel” räknas som fel vid poängsättningen. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.10(f). Tillämpa potensreglerna (som bara är garanterade att fungera för positiva tal, därav kommentaren om att man får utgå från att talen är positiva).

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{a}\cdot b)^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot\sqrt[3]{b^{-1}\cdot c^4}} &= \frac{(a^{1/2}\cdot b)^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot(b^{-1}\cdot c^4)^{1/3}} && \sqrt[n]{x} = x^{1/n}\\
&= \frac{(a^{1/2})^{1/4}\cdot b^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot(b^{-1})^{1/3}\cdot(c^4)^{1/3}} && (x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n\\
&= \frac{a^{(1/2)\cdot(1/4)}\cdot b^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot b^{(-1)\cdot(1/3)}\cdot c^{4\cdot(1/3)}} && (x^m)^n = x^{m\cdot n}\\
&= \frac{a^{1/8}\cdot b^{1/4}\cdot c^{-2/3}}{a^2\cdot b^{-1/3}\cdot c^{4/3}} && \text{multiplicera}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^{1/8}\cdot b^{1/4}\cdot b^{1/3}}{a^2\cdot c^{4/3}\cdot c^{2/3}} \qquad x^{-n} = 1/x^n$$

$$= \frac{b^{1/4+1/3}}{a^{2-1/8}\cdot c^{4/3+2/3}} \qquad x^m\cdot x^n = x^{m+n};\ x^m/x^n = x^{m-n}$$

$$= \boxed{\frac{b^{7/12}}{a^{15/8}\cdot c^2}} \qquad \text{addera/subtrahera}$$

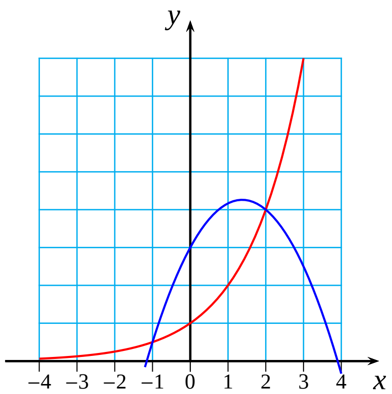
Det finns andra sätt att gå till väga, men svaret är det här. Uttrycket kan lika gärna skrivas som en produkt med negativa exponenter på a och c. (Det beror på tillämpningen om detta är mer eller mindre funktionellt än att skriva som en kvot.)

Notation: Se uppgift 2.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 5.10.

Rättningsnorm: 1p för varje korrekt potens i svaret. (Ursprungliga normen var att dra 1p för varje enskilt fel. Om man har fel i alla variablerna måste man ha gjort minst tre fel, så detta är något mer ”generöst”.)

6. Här är kurvorna $y = a^x$ och $y = b\cdot x^2 + c\cdot x + d$.



(a) Är a större än 1 eller mindre än 1, och hur såg du det? (1p)

Lösning:

Den röda kurvan måste vara exponentialfunktionen, och eftersom värdena ökar då x ökar måste basen a vara $\boxed{\text{större än 1}}$.

(b) Är b större än 0 eller mindre än 0, och hur såg du det? (1p)

Lösning:

Den blå kurvan ser ut som en parabel, en andragradskurva. För x långt från noll är inverkan från förstagradstermen och konstanttermen försumbara. Värdena kommer helt klart att bli negativa för x långt från noll, och eftersom x^2 inte kan vara negativ måste det vara b som är det. (Eller kortare: negativ – ledsen mun.) $\boxed{\text{Mindre än än 0}}$.

Kommentar: Om man antar att y-axeln har samma gradering som x-axeln så är kurvan $y = -\frac{2}{3}\cdot x^2 + \frac{11}{3}\cdot x + 3$. (Den andra kurvan är $y = 2^x$.) Anledningen till att y-axeln är ograderad är att frågorna går att besvara ändå, och gradering skulle locka till slöseri med tid med att försöka ta fram formlerna.

(c) Vad är lösningsmängden till olikheten $a^x < b\cdot x^2 + c\cdot x + d$, och hur såg du det? (1p)

Lösning:

Olikheten motsvarar ”var ligger den uppåtgående kurvan nedanför parabeln” vilket den förefaller göra $\boxed{\text{mellan } x = -1 \text{ och } x = 2}$.

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. • Tolka en olikhet grafiskt. Övning 5.22, 6.17, 9.4.

Rättningsnorm: (gäller alla deluppgifterna) Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering krävs för poäng. ("Ledsen mun" duger som motivering på (b).)

7. (a) En cirkel har ekvationen $(x+7)^2 + (y-0{,}8)^2 = 0{,}09$. Vad har cirkeln för medelpunkt och radie? (1p)

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r kan skrivas $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Om vi skriver den givna ekvationen på det formatet, $(x-(-7))^2 + (y-0{,}8)^2 = 0{,}3^2$ ser vi att svaret är

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Medelpunkt: } (x, y) = (-7,\ 0{,}8), \text{ radie: } 0{,}3 \text{ längdenheter}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel[. . .] Övning 6.23.

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(b) Din kompis tycker att man borde kunna förenkla ekvationen genom att dra roten ur allting så att man får

$$(x+7) + (y-0{,}8) = 0{,}3$$

Förklara för kompisen varför man inte kan göra så. (Det räcker inte med att säga "för att fröken sagt det", utan kompisen ska förstå varför detta inte fungerar.) (2p)

Lösning:

"För det första, det vi hade från början motsvarar en <u>cirkel</u>. Det vi har sedan du skrivit om det är en <u>rät linje</u>; man kan skriva om det till $y = -x + 0{,}3 - 7 + 0{,}8$. En cirkel och en rät linje är inte samma sak, så det du velat göra *måste* vara felaktigt!

Jag tror jag ser var du tänker fel. Kom ihåg att man då man löser ekvationer ska göra *exakt* samma sak i båda led; annars kan man inte vara säker på att de omskrivna leden kommer att vara lika med varandra. Titta nu:

$$\begin{aligned} (x+7)^2 + (y-0{,}8)^2 &= 0{,}3^2 \\ \sqrt{(x+7)^2 + (y-0{,}8)^2} &= \sqrt{0{,}3^2} \end{aligned}$$

Högerledet går att förenkla till 0,3. Men i vänsterledet har vi roten ur en summa. Roten ur en summa brukar *inte* bli samma sak som summan av rötterna; roten ur ett plus ett är roten ur två, och roten ur ett plus roten ur ett är två, och roten ur två och två är inte samma tal. Så du kan inte göra om

$$\sqrt{(x+7)^2 + (y-0{,}8)^2}$$

till

$$\sqrt{(x+7)^2} + \sqrt{(y-0{,}8)^2}$$

Dessutom kan man inte utan vidare utgå från att kvadrera och kvadratrot tar ut varandra; det stämmer för positiva tal (så det gick bra att göra med 0,3, som ju är positivt) men det stämmer inte för negativa; man blir av med minustecknet. Och $x + 7$ kan väl vara både positivt och negativt; det beror på vad x är!"

Kommentar: Uppgiften är i likhet med alla "din kompis"-uppgifter inspirerad av ett vanligt förekommande fel på tidigare tentor. Och det räcker inte att säga "för att det blir en annan ekvation", eftersom kompisen uppenbarligen tycker att det är samma som förut. Man måste klargöra *varför* det inte är samma.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Redogöra för och motivera potensräkningsreglerna. Övning 5.1.

Rättningsnorm: Det räcker att ordentligt förklara ett av de felresonemang som kompisen gjort. Förklaring som verkar som att den skrivande förstår men som en kurskamrat med problem inte skulle förstå får 1p.

8. Lös följande olikhet: $x^3 \geq 100 \cdot x$ (3p)

Lösning:

Skyffla över, faktorisera, teckenanalysera:

$$
\begin{aligned}
x^3 &\geq 100 \cdot x \\
x^3 - 100 \cdot x &\geq 0 && \text{Subtrahera } 100 \cdot x \\
x \cdot (x^2 - 100) &\geq 0 && \text{Bryt ut} \\
x \cdot (x + 10) \cdot (x - 10) &\geq 0 && \text{Konjugatregeln}
\end{aligned}
$$

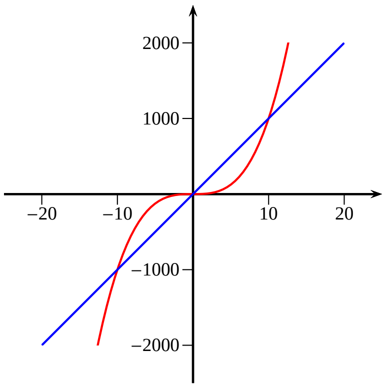
Teckenbyten vid $x = 0$, $x = -10$ och $x = 10$. Tabell:

	$x < -10$	$x = -10$	$-10 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
x	–	–	–	0	+	+	+
$x + 10$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 10$	–	–	–	–	–	0	+
VL	–	0	+	0	–	0	+

Vi vill att vänsterledet ska vara noll eller större, vilket det är från och med -10 till och med 0 samt från och med 10.

$\boxed{\textit{Svar: } -10 \leq x \leq 0 \;\vee\; x \geq 10}$

Kommentar: Situationen ser ut så här:



Frågan innebär ”för vilka x ligger tredjegradskurvan minst lika högt upp som linjen?”, vilket den gör från och med -10 till och med 0, och sedan från och med 10.

Notation: Se uppgift 4.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [. . .] bryta ut gemensamma faktorer. • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Lösa olikheter innehållande polynom [. . .] Metod 9.1, Exempel 9.4, Övning 9.9–11

Rättningsnorm: Helt rätt (inklusive att svaret är tydligt angivet): 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2020.01.10 08.30–11.30

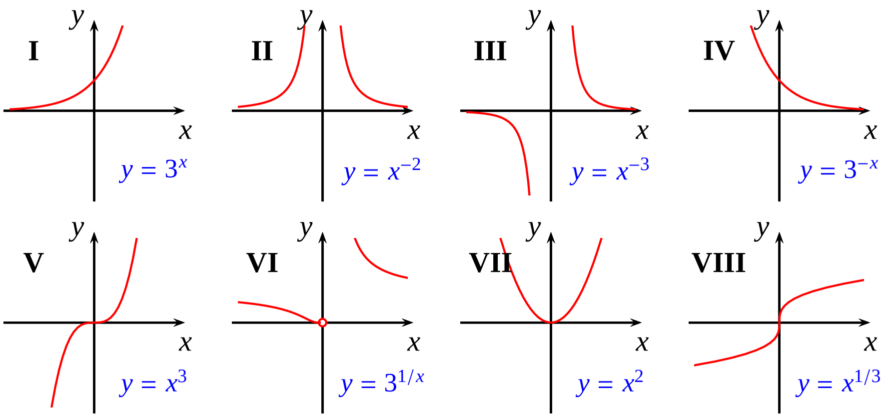
Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Här är åtta kurvor:



Här är sex ekvationer:

(a) $y = x^3$ **(b)** $y = x^{-3}$ **(c)** $y = x^{1/3}$ **(d)** $y = 3^x$ **(e)** $y = 3^{-x}$ **(f)** $y = 3^{1/x}$

Ange för varje ekvation vilken av kurvorna den motsvarar. (Två av kurvorna ska bli över.) Motivering behövs ej, men se till att det framgår vilket svar som hör till vilken fråga.

0–1 rätt: 0p. 2–3 rätt: 1p. 4–5 rätt: 2p. 6 rätt: 3p.

Lösning:

Ett sätt är att för varje ekvation tänka efter hur tillhörande kurva bör se ut, och så leta rätt på den bild som passar in.

(a) $y = x^3$: udda positiv potens. Ska vara en S-kurva, ganska plan vid 0 och brantare mot kanterna. $\boxed{\text{V}}$

(b) $y = x^{-3} = 1/x^3$: udda negativ potens. x nära noll ska ge y långt från noll och tvärtom; negativa x ska ge negativa y. $\boxed{\text{III}}$

(c) $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$: liggande version av $y = x^3$. $\boxed{\text{VIII}}$

(d) $y = 3^x$: exponentialfunktion med bas större än ett. Värdena ska öka då man går åt höger, och vara nära noll i vänsterändan. $\boxed{\text{I}}$

(e) $y = 3^{-x} = (1/3)^x$: exponentialfunktion med bas mindre än ett. Värdena ska öka då man går åt vänster, och vara nära noll i högerändan. $\boxed{\text{IV}}$

(f) $y = 3^{1/x}$: inget vi tittat på i den här kursen, vilket innebär att inte heller kurvan borde se ut som något vi har tittat på i den här kursen. Kurva VII ser ut som potensfunktion med positiv jämn exponent och kurva II som potensfunktion med negativ jämn exponent, så enligt uteslutningsmetoden måste svaret vara kurva $\boxed{\text{VI}}$

Extra rimlighetskontroll: Eftersom $1/x$ inte är definierat då $x = 0$ ska det inte finnas något värde för $x = 0$. Då x är lite större än noll är $1/x$ ett stort positivt tal, och 3 upphöjt i ett stort positivt tal är enormt. Då x är lite mindre än noll är $1/x$ ett ”stort negativt” tal, och 3 upphöjt till ett stort negativt tal är lika med ett delat med 3 upphöjt till ett stort positivt tal, vilket är ett delat med något enormt, vilket är praktiskt taget noll. Så värdena ska vara enorma strax till höger om noll och praktiskt taget noll strax till vänster. Detta uppfyller kurva VI.

Om man inte alls kommer ihåg hur kurvorna ska se ut kan man göra en grov värdetabell:

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
x^3	-8	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	8
x^{-3}	$-1/8$	-1	-8	odef	8	1	$1/8$
$x^{1/3}$	?	-1	?	0	?	1	0
3^x	$1/9$	$1/3$	?	1	?	3	9
3^{-x}	9	3	?	1	?	$1/3$	$1/9$
$3^{1/x}$	?	$1/3$	$1/9$	odef	9	3	?

(De värden som är markerade med ? är sådana som fordrar att man räknar en smula för att få fram ett approximativt värde.) Ur raden för x^3 ser man att man kan utesluta alla kurvor som inte passerar origo. Den U-formade kurvan kan också uteslutas, och av de två kurvor som är kvar verkar den som blir allt brantare mot kanterna matcha värdena här bäst. På samma sätt kan övriga kurvor identifieras.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.22.

Rättningsnorm: Se frågan. Svar som det inte går att förstå vilken fråga de hör till får 0p.

2. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{3\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 7}{x + 4}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Rekommendera övning 7.7(b). Polynomdivision. Det finns ingen förstagradsterm i täljaren, men vi kommer ändå att behöva reservera plats för en sådan i uppställningen, eftersom det förmodligen kommer att uppstå en under arbetet. I steget där man skulle ha ”flyttat ner” förstagradstermen får man låta bli att flytta ner något (eller så kan man se det som att man flyttat ner $0\cdot x$, vilket är osynligt).

$$\begin{array}{r|l l}
 & 3\cdot x^2 - x + 4 & \\ \hline
x + 4 & 3\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 0\cdot x + 7 & \\
 & -(3\cdot x^3 + 12\cdot x^2) & 3\cdot x^2\cdot(x+4) \\
 & \qquad -x^2 + 0\cdot x & \\
 & \qquad -(-x^2 - 4\cdot x) & -x\cdot(x+4) \\
 & \qquad\qquad 4\cdot x + 7 & \\
 & \qquad\qquad -(4\cdot x + 16) & 4\cdot(x+4) \\
 & \qquad\qquad\qquad -9 &
\end{array}$$

Kvoten är står nu överst i beräkningen, resten nederst.

Kontroll: Sätt tillbaka på ett bråkstreck:

$$3{\cdot}x^2 - x + 4 - \frac{9}{x+4} = \frac{(3{\cdot}x^2 - x + 4){\cdot}(x+4)}{x+4} - \frac{9}{x+4}$$
$$= \frac{3{\cdot}x^3 - x^2 + 4{\cdot}x + 12{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x + 16 - 9}{x+4} = \frac{3{\cdot}x^3 + 11{\cdot}x^2 + 7}{x+4}$$

Rätt räknat! (Det är mycket lätt att göra slarvfel i de här beräkningarna, så en kontroll är en bra försiktighetsåtgärd.)

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Kvot: } 3{\cdot}x^2 - x + 4\text{; rest: } -9}$

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Genomföra en polynomdivision. Övning 7.7.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Nästan helt rätt (t.ex. slarvfel eller oklart svar): 2p. Mer fel än så, men inte helfel: 1p.

3. Lös ekvationen $1 - x = \sqrt{26 - x}$. (3p)

Lösning:

Kommentar: En siffra hade fallit bort ur frågan, vilket gjorde att svaret inte blev riktigt så snyggt som avsett..

Inledande observation: lösningen måste var högst 1; för tal större än så blir vänsterledet negativt medan högerledet blir positivt.

$$\begin{aligned}
1 - x &= \sqrt{26 - x} & \\
(1 - x)^2 &= (\sqrt{26 - x})^2 & &\text{Kvadrera; KOLLA SVAREN}\\
1 - 2{\cdot}x + x^2 &= 26 - x & &\text{Utveckla}\\
x^2 - x &= 25 & &\text{"Flytta över"}\\
x^2 - 2{\cdot}\tfrac{1}{2}{\cdot}x + (\tfrac{1}{2})^2 &= 25 + (\tfrac{1}{2})^2 & &\text{Kvadratkomplettera}\\
(x - \tfrac{1}{2})^2 &= \tfrac{100+1}{4} & &\text{Skriv som kvadrat; gemensamt bråkstreck}\\
x - \tfrac{1}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{101}{4}} & &\text{Glöm inte } \pm!\\
x &= \tfrac{1\pm\sqrt{101}}{2} & &\text{"Flytta över"}
\end{aligned}$$

Så *om* ekvationen är lösbar *så* är svaret något av dessa två tal, eventuellt båda. Den inledande observationen säger oss att det positiva alternativet inte kan fungera, men vi gör hur som helst en ordentlig kontroll, i *ursprungs*ekvationen:

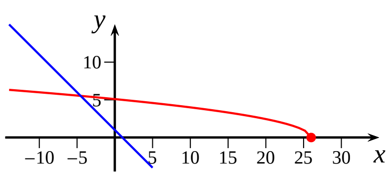
$$x = \tfrac{1+\sqrt{101}}{2}: \begin{cases} \text{VL} = 1 - \tfrac{1+\sqrt{101}}{2} = \tfrac{1-\sqrt{101}}{2} \approx \tfrac{1-10}{2} = -4{,}5 \\ \text{HL} = \sqrt{26 - \tfrac{1+\sqrt{101}}{2}} = \sqrt{\tfrac{51-\sqrt{101}}{2}} \approx \sqrt{\tfrac{51-10}{2}} > 0 \end{cases} \quad \text{ej OK}$$

$$x = \tfrac{1-\sqrt{101}}{2}: \begin{cases} \text{VL} = 1 - \tfrac{1-\sqrt{101}}{2} = \tfrac{1+\sqrt{101}}{2} \approx \tfrac{1+10}{2} = 5{,}5 \\ \text{HL} = \sqrt{26 - \tfrac{1-\sqrt{101}}{2}} = \sqrt{\tfrac{51+\sqrt{101}}{2}} \approx \sqrt{\tfrac{51+10}{2}} = \sqrt{30{,}5} \end{cases} \quad \text{OK(?)}$$

Det positiva alternativet var mycket riktigt en falsk rot, en konsekvens av kvadreringen. Det negativa svaret verkar rimligt; $\sqrt{30{,}5}$ måste ligga någonstans mellan $\sqrt{25} = 5$ och $\sqrt{36} = 6$.

$\boxed{\textit{Svar: } x = \tfrac{1-\sqrt{101}}{2}}$

Grafisk rimlighetskontroll: $y = 1 - x$ är en rät linje, som skär y-axeln på höjden 1 och som går snett neråt. $y = \sqrt{26 - x}$ bör se ut som $y = \sqrt{x}$, men spegelvänd och med start i $x = 26$ istället för i origo:



Även ur en ganska grov skiss kan man se att ekvationen har precis en lösning, och att denna lösning är negativ.

Notation: Här ska man *inte* ha likhetstecken mellan stegen; värdet i början på en rad är i de flesta fallen inte samma som värdet i slutet på föregående. Vill man ha en symbol så går implikationspil och ekvivalenspil bra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Övning 8.23–24.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone börjat rätt: 1p. Mellanting: 2p. Om någon drar slutsatsen "olika" ur ett i övrigt korrekt genomfört test av den negativa lösningen så accepteras detta, då det var mer svårt än avsett att se att resultaten är lika.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även "slarvfel" klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{4+2/3}{6/5-2}+\frac{7}{3} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Bråk brukar bli lättare att läsa med enbart horisontella bråkstreck. Prioritetsordningen är att divisioner går före additioner och subtraktioner:

$$\frac{4+\frac{2}{3}}{\frac{6}{5}-2}+\frac{7}{3}$$

(Tar man fel i prioritet blir dubbelbråket det inte speciellt spännande uttrycket $\frac{6}{3}/\frac{6}{3}=1$.)

Bit för bit: Täljaren:

$$4\cdot\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=\frac{12+2}{3}=\frac{14}{3}$$

Nämnaren:

$$\frac{6}{5}-2\cdot\frac{5}{5}=\frac{6-10}{5}=-\frac{4}{5}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{4+\frac{2}{3}}{\frac{6}{5}-2}=\frac{\frac{14}{3}}{-\frac{4}{5}}=\frac{14}{3}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{\cancel{2}\cdot 7\cdot 5}{3\cdot 2\cdot\cancel{2}}=-\frac{35}{6}$$

Helheten:

$$\frac{4+\frac{2}{3}}{\frac{6}{5}-2}+\frac{7}{3}=-\frac{35}{6}+\frac{7\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{-35+14}{6}=-\frac{21}{6}=-\frac{\cancel{3}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot 2}=\boxed{-\frac{7}{2}}$$

Mer på en gång: Multiplicerar man dubbelbråket med den gemensamma nämnaren $15=3\cdot 5$ plattar det ut sig:

$$\frac{\left(4+\frac{2}{3}\right)\cdot 15}{\left(\frac{6}{5}-2\right)\cdot 15}=\frac{4\cdot 15+\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}}}{\frac{6\cdot 3\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}-2\cdot 15}=\frac{60+10}{18-30}=\frac{70}{-12}=-\frac{\cancel{2}\cdot 35}{\cancel{2}\cdot 6}=-\frac{35}{6}$$

Sedan fortsätter man enligt det andra lösningsförslaget.

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra.

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på prioriteten *är* ett fel.

5. (a) Du har löst ett problem med miniräknare, och fått svaret 4,000000001. Vad bör du dra för slutsats? (1p)

Avgör om följande utsagor är sanna eller falska. (Alla bokstäver antas representera reella tal.) Motivering behövs ej.

(b) $(a = b) \wedge (b = c) \quad \Rightarrow \quad a = c$ (0,5p)

(c) $(a \neq b) \wedge (b \neq c) \quad \Rightarrow \quad a \neq c$ (0,5p)

(d) $(a < b) \wedge (b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c$ (0,5p)

(e) $a \nless b \quad \Leftrightarrow \quad a > b$ (0,5p)

Poängsumman avrundas neråt.

Lösning:

(a) Rekommenderad uppgift 2.15(a). Med största sannolikhet är svaret exakt 4, och 1:an på slutet är accumulerade avrundningsfel. (Det brukar vara ganska lätt att kontrollera detta.)

Referenser: DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Exakt värde, approximativt värde. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Detta (eller annat rimligt svar): 1p.

(b) Denna och efterföljande är rekommenderad uppgift 2.3. Vi motiverar även om det inte behövs.

Om a är samma tal som b, och b är samma tal som c så, ja, vi kan dra slutsatsen att a och c är samma tal. $\boxed{\text{Sant}}$

(c) Om a är ett annat tal än b, och b är ett annat tal än c så är det inte garanterat att a och c är olika tal; de kan mycket väl vara samma! (Antagligen inte, men det är inte *omöjligt*.) $\boxed{\text{Falskt}}$

(d) Om a ligger till vänster om b på tallinjen, och b ligger till vänster om c så, ja, vi kan dra slutsatsen att a ligger till vänster om c. $\boxed{\text{Sant}}$

(e) Om det inte är sant att a är mindre än b så är det inte garanterat att b är mindre än a; de kan vara samma tal också! $\boxed{\text{Falskt}}$

Referenser: DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Implikation • Ekvivalens • Större än, mindre än, lika med; DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Använda tecknen $=$, $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$ korrekt. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Gäller (b)–(e): Kan bara bli rätt eller fel, men svar som inte går att tolka eller där det inte framgår vilken uppgift de hör till får 0p.

6. Polynomfunktionen p definieras enligt $p(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}03 \cdot x - 0{,}01$. Bestäm funktionens värdemängd. (Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Värdemängden hos en andragradsfunktion kan utläsas ur den kvadratkompletterade formen:

$$
\begin{aligned}
&0{,}1\cdot x^2 + 0{,}03\cdot x - 0{,}01 \\
&\quad = 0{,}1\cdot(x^2 + 0{,}3\cdot x - 0{,}1) && \text{bryt ut} \\
&\quad = 0{,}1\cdot(x^2 + 2\cdot 0{,}15\cdot x + 0{,}15^2 - 0{,}15^2 - 0{,}1) && \text{kvadratkomplettera} \\
&\quad = 0{,}1\cdot((x + 0{,}15)^2 - 0{,}0225 - 0{,}1) && \text{skriv som kvadrat; kvadrera} \\
&\quad = 0{,}1\cdot((x + 0{,}15)^2 - 0{,}1225) && \text{lägg ihop} \\
&\quad = \underbrace{0{,}1\cdot(x + 0{,}15)^2}_{\text{0 eller större}} \underbrace{- 0{,}01225}_{\text{lägsta värdet}} && \text{multiplicera in}
\end{aligned}
$$

Så lägsta värdet är $-0{,}01225$, och alla värden större än så är möjliga.

Om man vill kan man gå vidare till faktoriserad form, ur denna läsa ut nollställena, och så utnyttja att extrempunkten för en andragradsfunktion ligger mitt emellan nollställena. Och har man extrempunkten så kan man sätta in den och få ut extremvärdet. Då får man samma svar med en dubbelt så lång beräkning.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_p = [-0{,}01225, \infty)}$

Testa gärna att rita upp funktionens graf med dator, så ser du att resultatet av beräkningen stämmer.

Notation: Se uppgift 4.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Värdemängd; Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Bestämma värdemängden för en mycket enkel funktion (exempelvis en andragradsfunktion) ur beräkningsformeln. • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. Metod 6.2, Övning 6.17.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Räknefel eller felaktiga slutsatser ur korrekt behandlat uttryck: 2p. Åtminstone visat förståelse för antingen innebörden i värdemängde eller för kvadratkompletteringens teknik: 1p.

7. Din kompis har bett dig om hjälp med några räkneproblem.

”Titta, den här sa läraren att var fel: $\boxed{\dfrac{x - \cancel{1}}{x^2 - \cancel{1}} = \dfrac{x}{x^2} \quad ☠}$

Men den här var tydligen rätt: $\boxed{\dfrac{\cancel{2}\cdot(x+3)}{\cancel{2}\cdot(x+4)} = \dfrac{x+3}{x+4}}$

Jag fattar inte varför den första är fel och den andra är rätt! Jag tycker att det är samma sak jag gör!”

Du förklarar för kompisen att i det första fallet är det en *term* hen förkortar bort, och det kan man inte göra. I det andra fallet är det en *faktor* hen förkortar bort, och det får man.

”Men varför får man förkorta bort faktorer men inte termer?” undrar kompisen.

Förklara för kompisen varför det är fel att förkorta bort termer men fungerar att förkorta bort faktorer. Det räcker inte att säga ”reglerna är sådana”, utan du ska förklara **varför** de är sådana. Det behöver inte vara helt formellt, men kompisen ska förstå. (3p)

Lösning:

”Egentligen behöver vi inte förklara vaför man inte får förkorta bort termer; allt som inte är tillåtet är förbjudet!

Men Vi börjar ändå med att visa att man inte kan förkorta bort en term så där. Vi kan säga att x är talet 2; det är lättare att visa med siffror. Det du börjar med är då

$$\mathrm{VL} = \frac{2-1}{2^2-1} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$$

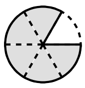
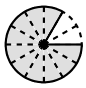
Det du slutar med är

$$\mathrm{HL} = \frac{2}{2^2} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$

Det är inte samma sak! En tredjedels timme är 20 minuter, två kvart är 30 minuter. Så man kan inte bara ta bort den sådan där sak och hoppas på att man har samma tal som nyss.

Nu kan vi titta på varför man *får* förkorta bort en faktor. Det är egentligen lättare att förklara varför man får förlänga med en faktor; är det lika från höger till vänster så måste det vara lika åt andra hållet också.

Vi säger att x fortfarande är 2. Då har vi

$$\mathrm{HL} = \frac{2+3}{2+4} = \frac{5}{6} =$$  $=$  $$= \frac{2\cdot 5}{2\cdot 6} = \frac{10}{12} = \mathrm{VL}$$

”Fem sjättdelar”, det betyder att vi delat varje hel i 6 bitar och har tagit 5 av bitarna. Om vi nu delar varje bit i två, så får vi dubbelt så många bitar, både av helheten och antalet vi tagit. Så vi har tio tolftedelar. Men vi har lika mycket som nyss; det är samma tal.

Att multiplicera täljare och nämnare med ett tal är att göra en sådan här uppdelning i fler, mindre bitar; man har lika mycket som nyss. Och förkortning är samma operation, fast baklänges.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Motivera bråkräkningsreglerna.

Rättningsnorm: Behöver inte vara fullt så här detaljerat. Gemensam term: 1p. Gemensam faktor: 2p, 1p för förklaring som verkar som att den skrivande förstår men som en kompis nog inte skulle förstå.

8. Lös följande olikhet: $\dfrac{121}{10-x} \geq x + 12$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera:

$$\begin{aligned}
\frac{121}{10-x} &\geq x + 12 \\
\frac{121}{10-x} - (x+12) &\geq 0 && \text{Subtrahera (”flytta över”)} \\
\frac{121 - (10-x)\cdot(x+12)}{10-x} &\geq 0 && \text{Gemensamt bråkstreck} \\
\frac{121 - 10\cdot x + x^2 - 120 + 12\cdot x}{10-x} &\geq 0 && \text{Utveckla} \\
\frac{x^2 + 2\cdot x + 1}{10-x} &\geq 0 && \text{Förenkla} \\
\frac{(x+1)^2}{10-x} &\geq 0 && \text{Faktorisera}
\end{aligned}$$

Notera att täljaren inte behövde kvadrat*kompletteras*, eftersom den redan var en komplett kvadrat.

Det verkar hända saker i $x = -1$ (där täljaren blir noll) och i $x = 10$ (där nämnaren blir noll). Teckentabell:

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 10$	$x = 10$	$x > 10$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$10 - x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
VL	$-$	0	$-$	odef	$+$

Vi ville att uttrycke skulle vara positivt eller noll, vilket det är i -1 och efter 10.

$\boxed{\textit{Svar: } x = -1 \ \vee \ x > 10}$

Kommentar: Svaret på olikhetsproblem är *oftast* ett eller flera intervall, men ibland får man enstaka punkter. Rita gärna problemet på dator – kurvorna tangerar vid $x = -1$.

Notation: Se uppgift 3.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Metod 9.1, Exempel 9.4, Övning 9.9–11.

Rättningsnorm: Helt rätt (vilket inbegriper att det framgår vad svaret är): 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2020.08.11 14.30–17.30

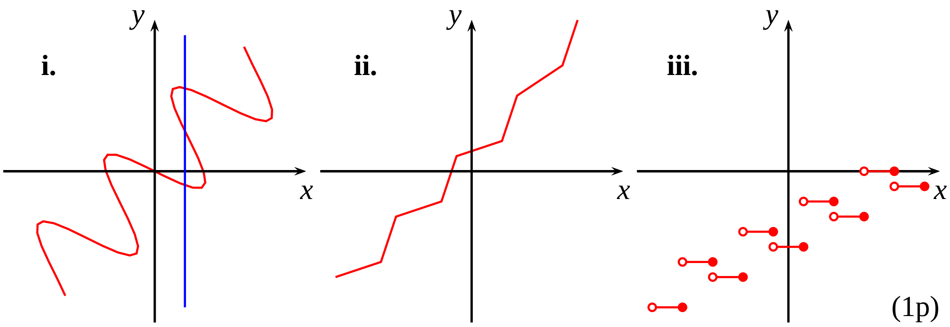
Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. (a) I en av nedanstående bilder är y inte en funktion av x. Vilken av bilderna är det?



(1p)

Lösning:

Även om motivering inte efterfrågades så är detta tankegången bakom svaret: y är en funktion av x om och endast om det till varje x-värde i definitionsmängden hör ett och endast ett y-värde. Den vertikala linjen som är inritad i figur **i** skär kurvan på tre ställen, så just det x-värdet är kopplat till tre y-värden, vilket är förbjudet. De andra kurvorna ser ganska konstiga ut, men de bryter inte mot förbudet mot flera y till samma x. Så svaret är $\boxed{\textbf{i}}$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Funktion • Graf; Du ska kunna göra följande: • Avgöra om en kurva är en funktionsgraf. Övning 4.11.

(b) Vilket av nedanstående uttryck är $\sqrt{48{\cdot}b+16}$ lika med?

i. $4{\cdot}\sqrt{3{\cdot}b+1}$

ii. $16{\cdot}\sqrt{3{\cdot}b+1}$

iii. $256{\cdot}\sqrt{3{\cdot}b+1}$

iv. Inget av förslagen (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.14(b), lätt omformulerad för att passa in i frågeformatet.

Ej efterfrågad motivering:

$$\sqrt{48{\cdot}b+16} = \sqrt{16{\cdot}(3{\cdot}b+1)} = \sqrt{16}{\cdot}\sqrt{3{\cdot}b+1} = 4{\cdot}\sqrt{3{\cdot}b+1}$$

så svaret är $\boxed{\textbf{i}}$.

Om man är osäker kan man testa med något lättväknat värde på b, t.ex. $b=0$. Då har vi $\sqrt{48{\cdot}0+16} = \sqrt{16} = 4$, $4{\cdot}\sqrt{3{\cdot}0+1} = 4{\cdot}\sqrt{1} = 4$, $16{\cdot}\sqrt{3{\cdot}0+1} = 16{\cdot}\sqrt{1} = 16$ och $256{\cdot}\sqrt{3{\cdot}0+1} = 256{\cdot}\sqrt{1} = 256$, så ii och iii är helt klart fel. (Detta visar inte att i är rätt, för det brukar alltid finnas något värde som ger likhet. Här blir exempelvis i, ii och iii lika då $b = -1/3$. Men det är ganska troligt att vi hittat den korrekta matchningen.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. Detta var som sagt en rekommenderad uppgift.

(c) Uppgift 2 nedan handlar om att förenkla ett bråkuttryck. Skriv detta bråkuttryck med enbart sneda bråkstreck (som om du skulle mata in det i en miniräknare eller skriva in det i ett datorprogram), och skriv bara parenteser där det är nödvändigt. (1p)

Lösning:

”Onödiga” parenteser är sådana som inte påverkar resultatet. Multiplikation och division går automatiskt före addition och subtraktion. Eftersom vi vill att additionen ska göras innan stora divisionen måste den omges med parentes. Vidare menar vi att vi ska dividera med elva fjortondelar, och inte först med elva och sedan med fjorton. I miniräknaren bör vi mata in

$$\boxed{(1/6+2/21)/(11/14)-1/12}$$

vilket den borde få till 0,25.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser. Övning 3.12.

Rättningsnorm: (gäller alla deluppgifterna) Kan bara bli rätt eller fel. Svar som inte går att tolka klassas som ”fel”.

Motiveringar behövs ej.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{21}}{\frac{11}{14}}-\frac{1}{12}$$ (3p)

Lösning:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{1\cdot 7}{6\cdot 7}+\frac{2\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{7+4}{42}=\frac{11}{42}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{21}}{\frac{11}{14}}=\frac{\cancel{11}}{42}\cdot\frac{14}{\cancel{11}}=\frac{\cancel{14}}{3\cdot\cancel{14}}=\frac{1}{3}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{2}{21}}{\frac{11}{14}}-\frac{1}{12}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{1}{12}=\frac{4-1}{12}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Om man inte utnyttjar de förkortningsmöjligheter som finns på vägen får man ganska tunga beräkningar.

Mer på en gång: Dubbelbråket kan också förlängas med den för täljare och nämnere gemensamma nämnaren $42 = 6{\cdot}7 = 3{\cdot}14 = 2{\cdot}21$:

$$\frac{\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{21}\right){\cdot}42}{\frac{11}{14}{\cdot}42} = \frac{\frac{\cancel{6}{\cdot}7}{\cancel{6}}+\frac{2{\cdot}2{\cdot}\cancel{21}}{\cancel{21}}}{\frac{11{\cdot}3{\cdot}\cancel{14}}{\cancel{14}}} = \frac{7+4}{11{\cdot}3} = \frac{\cancel{11}}{\cancel{11}{\cdot}3} = \frac{1}{3}$$

Sedan avslutar man som i den tidigare lösningen.

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel. (Att inte utnyttja förkortningsmöjligheterna räknas inte som ett fel, utan mer som ett fall av synden straffar sig själv.)

3. Lös följande ekvation: $4{\cdot}x^2 = 8{\cdot}x + 5$ (3p)

Lösning:

Eftersom pq-formeln inte är tillåten att använda får det bli kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
4{\cdot}x^2 &= 8{\cdot}x+5 && \\
4{\cdot}x^2 - 8{\cdot}x - 5 &= 0 && \text{"Flytta över" (subtrahera)}\\
x^2 - 2{\cdot}x - \tfrac{5}{4} &= 0 && \text{Dela med 4}\\
x^2 - 2{\cdot}1{\cdot}x + 1^2 - 1^2 - \tfrac{5}{4} &= 0 && \text{Kvadratkomplettera}\\
(x-1)^2 - \tfrac{9}{4} &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; lägg ihop}\\
(x-1)^2 - (\tfrac{3}{2})^2 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat}\\
((x-1)+\tfrac{3}{2}){\cdot}((x-1)-\tfrac{3}{2}) &= 0 && \text{Konjugatregeln}\\
(x+\tfrac{1}{2}){\cdot}(x-\tfrac{5}{2}) &= 0 && \text{Lägg ihop}\\
x+\tfrac{1}{2} = 0 \quad &\vee\; x-\tfrac{5}{2} = 0 && \text{Nollfaktorlagen}\\
x = -\tfrac{1}{2} \quad &\quad\; x = \tfrac{5}{2} && \text{"Flytta över"}
\end{aligned}$$

Det går också att räkna på decimalform. Om man inte vill använda konjugatregeln kan man avsluta beräkningen enligt

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 &= (\tfrac{3}{2})^2 && \text{"Flytta över"}\\
x-1 &= \pm\tfrac{3}{2} && \text{Samma kvadrat, tecknet kan skilja}\\
x &= 1 \pm \tfrac{3}{2} && \text{"Flytta över"}
\end{aligned}$$

Kontroll: Om man vill kontrollera svaret så sätter man in de beräknade värdena i *ursprungs*ekvationen:

$$x = -\tfrac{1}{2}: \quad \begin{cases} \mathrm{VL} = 4{\cdot}(-\tfrac{1}{2})^2 = 4{\cdot}\tfrac{1}{4} = 1 \\ \mathrm{HL} = 8{\cdot}(-\tfrac{1}{2}) + 5 = -\tfrac{8}{2} + 5 = -4 + 5 = 1 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$$x = \tfrac{5}{2}: \quad \begin{cases} \mathrm{VL} = 4{\cdot}(\tfrac{5}{2})^2 = 4{\cdot}\tfrac{25}{4} = 25 \\ \mathrm{HL} = 8{\cdot}\tfrac{5}{2} + 5 = \tfrac{40}{2} + 5 = 20 + 5 = 25 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

(Vi har inte gjort några operationer som kan introducera falska rötter, men inget säger att vi inte räknat fel! Stämmer det inte så måste talet räknas om.)

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}}$

Notation: Det ska definitivt inte vara likhetstecken mellan rad 1 och 2, för det som står i slutet på rad 1 är inte samma sak som står i början på rad 2.

Referenser: (Exakt vad som behövs beror lite på hur man lägger upp beräkningen) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • [...] tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges). • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck [...], • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning.

Rättningsnorm: pq-formeln: 0p. Annars på ett ungefär: kvadratkompletterat: 1p. Faktoriserat: +1p. Tagit fram svar: 1p.

4. **(a)** Är $x > 18 \Rightarrow x \geq 19$ sant? Motivera! (1p)

(b) Är $x > 18 \Leftarrow x \geq 19$ sant? Motivera! (1p)

(c) Är $x > 18 \Leftrightarrow x \geq 19$ sant? Motivera! (1p)

Utgå från att vi arbetar med reella tal.

Lösning:

(a) ”Om ett tal är mer än 18 så är det garanterat minst 19”. Falskt, för t.ex. 18,5 är mer än 18 men mindre än 19. (En implikation räknas som sann om sanning vid pilens början garanterar sanning vid pilens slut.)

(b) ”Om ett tal är 19 eller mer så är det garanterat mer än 18”. Sant, alla tal på tallinjen som ligger på eller till höger om 19 ligger till höger om 18.

(c) Nej. Ekvivalens råder om det är implikation åt båda håll, och det är det inte här.

Notera att om vi arbetat med *heltal* så skulle även (a) och (c) ha varit sanna, eftersom det inte finns några heltal mellan 18 och 19. Men reella tal finns det!

Kommentar: Uppgiften är inspirerad av ett mycket vanligt missförstånd, som kan sabotera räkningarna i de flesta matematikrelaterade ämnen. Om det inte är givet att man räknar med heltal så finns det oändligt många tal mellan 18 och 19. (Om någon sagt åt en att komma efter 18 så har man följt instruktionen om man anländer t.ex. 18:01, man behöver inte vänta till 19.)

Referenser: DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Implikation • Ekvivalens • Heltal, rationellt tal, reellt tal • Större än, mindre än, lika med; Övning 1.3–4.

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering krävs för poäng. Har man svarat sant på både (a) och (b) så ska man svara sant på (c) för att få poäng där.

5. Lös följande ekvation: $\dfrac{0{,}25 - x^2}{2\cdot x + 1} = 0$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.16(c).

Ett bråk blir noll om och endast om täljaren är noll samtidigt som nämnaren *inte* är det. Så vi har:

$$0{,}25 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5^2 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (0{,}5 + x)\cdot(0{,}5 - x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0{,}5 + x = 0 \ \vee \ 0{,}5 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -0{,}5 \ \vee \ x = 0{,}5$$
$$2\cdot x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -0{,}5$$

Så x är något av talen 0,5 och −0,5, och −0,5 kan det inte vara. Återstår

$\boxed{\textit{Svar: } x = 0{,}5}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Lösa ekvationer innehållande rationella uttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Hittat båda lösningsförslagen: 2p. Slängt bort det som inte fungerar: 1p.

6. Då man dimensionerar inglasningar av balkonger så måste man ta hänsyn till ett stort antal faktorer. En faktor för utvändig vindlast beror av takets lutning, och sambandet finns givet med en tabell:

Taklutning	5°	15°	30°	45°	60°	75°
Formfaktor	−2,3	−2,5	−1,1	−0,6	−0,5	−0,5

Lutningen på det tak som du ska dimensionera efter är 40°. Vilket värde bedömer du att du ska ta på formfaktorn? (3p)

Lösning:

Om man vill ha ett värde som inte finns med i en tabell brukar enda lösningen vara att använda interpolation, då oftast linjär interpolation. Man tar de två tabellvärden som ligger närmast det man söker, tänker sig att man prickar in dessa i ett koordinatsystem och drar en linje genom punkterna, och så läser av värdet från linjen.

Högst informellt: 40° ligger på $^2/_3$ av vägen mellan 30° och 45°. Då borde den korrekta formfaktorn ligga $^2/_3$ av vägen mellan formfaktorn för dessa två vinklar. Så vi bör använda värdet

$$\text{Formfaktor} = -1{,}1+\frac{2}{3}\cdot(-0{,}6-(-1{,}1)) = -1{,}1+\frac{2}{3}\cdot 0{,}5 = -1{,}1+\frac{1}{3} \approx -1{,}1+0{,}33 = \boxed{-0{,}77}$$

Högst formell: Vi kalla vinkeln för x och formfaktorn för y. Vi söker den linje som går genom punkterna $(x_1, y_1) = (30, -1{,}1)$ och $(x_2, y_2) = (45, -0{,}6)$.

Riktningskoefficienten kan tas fram med tvåpunktsformeln:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-0{,}6 - (-1{,}1)}{45 - 30} = \frac{0{,}5}{15} = \frac{1}{30}$$

Sedan kan vi med enpunktsformeln ta fram ett uttyck för linjen:

$$y - y_1 = k\cdot(x - x_1) y - (-1{,}1) = \tfrac{1}{30}(x - 30) y = \tfrac{1}{30}(x - 30) - 1{,}1$$

Det y-värde som hör till $x = 40$ är då

$$y = \tfrac{1}{30}40 - 30 - 1{,}1 = \tfrac{1}{3} - 1{,}1 \approx 0{,}33 - 1{,}1 = \boxed{-0{,}77}$$

Grafiskt: Pricka ut de givna värdena i ett koordinatsystem, fyll i en kurva som ser rimligt ut, läs av.

Approximativt: 40° är inte så långt från 45°, så tar vi värdet som hör till 45° är det förhoppningsvis inte så värst fel.

Kommentar: Tabellen är plockad från en skrift med tekniska anvisningar för balkonger, `http://www.uniglas.se/media/1142/bf_se_juni_2012.pdf`, sidan 17. I anvisningarna står också ”För mellanliggande taklutningar kan linjär interpolation mellan värden med samma tecken tillämpas”. (Jag råkade hitta den här tabellen då jag hjälpte en bekant, som ville glasa in sin balkong. Genom att använda den slapp jag hitta på något sammanhang där linjär interpolation används – det står ju uttryckligen i anvisningen att man ska använda det.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient. • Genomföra en linjär interpolation.

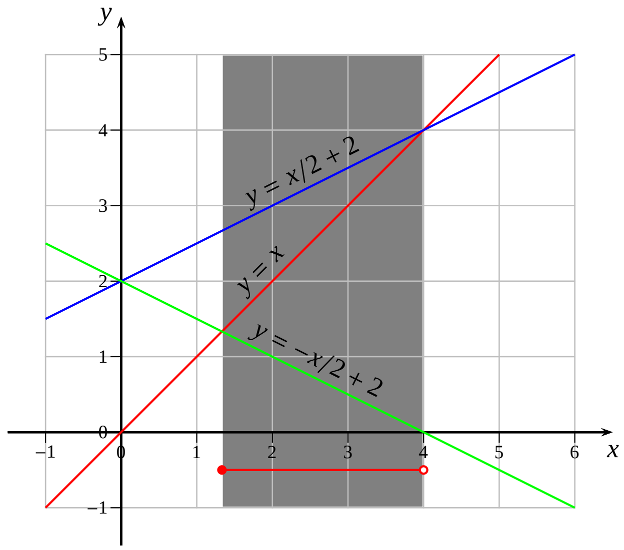
Rättningsnorm: Approximativt svar: 1p. Korrekt genomförd linjär interpolation: 3p. Rätt idé men ej korrekt genomförd: 2p. Välgjord grafisk lösning: 3p.

7. Lös den dubbla olikheten $-\frac{1}{2}\cdot x + 2 \leq x < \frac{1}{2}\cdot x + 2$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.13(d).

Grafisk lösning: Vi söker det område där linjen $y = x$ ligger *ovanför* (eller på) linjen $y = -\frac{1}{2}\cdot x + 2$ samtidigt som den ligger *nedanför* linjen $y = \frac{1}{2}\cdot x + 2$. Rita in linjerna i ett koordinatsystem:



Lösningsmängden är markerad. Skärningen mellan de två uppåtgående linjerna ligger uppenbart vid $x = 4$. Skärningen mellan den uppåtgående och den nedåtgående linjen bör beräknas:

$$x = -\frac{1}{2}\cdot x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\cdot x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3} \approx 1{,}3$$

Beräkningslösning: Olikheten är egentligen en konjunktion av två olikheter:

$$-\frac{1}{2}\cdot x + 2 \leq x \quad \wedge \quad x < \frac{1}{2}\cdot x + 2$$

Lös olikheterna var för sig, och ta skärningen mellan lösningsmängderna; det blir den mängd där båda utsagorna är sanna.

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\cdot x + 2 &\leq x \\ 2 &\leq x + \tfrac{1}{2}\cdot x \\ 2 &\leq \tfrac{3}{2}\cdot x \\ \tfrac{2}{3}\cdot 2 &\leq x \\ \tfrac{4}{3} &\leq x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &< \tfrac{1}{2}\cdot x + 2 \\ x - \tfrac{1}{2}\cdot x &< 2 \\ \tfrac{1}{2}\cdot x &< 2 \\ x &< 2\cdot 2 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

Så x ska vara $4/3$ eller större, men måste vara mindre än 4.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in [\frac{4}{3}, 4)}$

Kommentar: Notera att multiplikationerna har gjorts med *positiva* tal, vilket innebär att olikheten inte behövt vändas.

Referenser: (beror på hur man väljer att lösa uppgiften) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Intervall • Större än, mindre än, lika med; Du ska kunna göra följande: • Tolka en olikhet grafiskt. • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Visad förståelse för frågeställningen: 1p. Kommit största delen av vägen, eller gjort räknefel: 2p.

8. Din kompis säger följande:

Jag gjorde så här:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \qquad ☠$$

men det säger läraren är fel. Varför kan man inte göra så?

Förklara för kompisen

(a) Varför kompisens lösning inte är korrekt. (Det räcker inte att säga ”för att man ska göra så här”, det är (b)-uppgiften, utan kompisen ska förstå varför detta inte fungerar.)

(b) Hur man ska göra.

(c) Varför det rätta sättet fungerar.

Uppgiften bedöms som en helhet, och svaret kan ges som en helhet, bara alla delfrågorna besvaras i det. Notera att kompisen ska kunna förstå din förklaring. (3p)

Lösning:

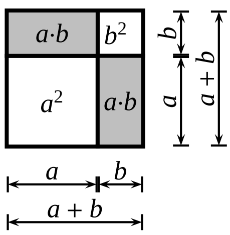
Vi kan börja med att visa att det du vill göra inte ger rätt svar, och det kan man göra med siffror. Du vet att 12 är 10 + 2? Och att 12 i kvadrat är 144?. OK, enligt din beräkning ska 10 + 2 i kvadrat vara 10 i kvadrat plus 2 i kvadrat, vill säga 104. Så antingen är 144 och 104 samma tal, eller så är det något fel på din beräkning.

Så vi kan titta på hur man ska göra. Kvadrera, det är att ”gångra” ihop två lika faktorer. Vi kan testa vad som händer, och jag säger i varje steg vad jag gör:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && \text{Skriv kvadreringen som multiplikation}\\ &= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b && \text{Multiplicera ihop med distributeiva lagen}\\ &= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 && \text{Skriv som kvadrater och använd kommutativa lagen.}\\ &= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 && \text{Lägg ihop de två blandade termerna}\end{aligned}$$

Känner du igen den här? Första kvadreringsregeln! Du har missat den där ”$2\cdot a\cdot b$”. Och om inget av a och b är noll så kommer den termen att påverka.

Man kan också titta på det grafiskt. Kvadrera motsvarar att beräkna arean av en kvadrat, så vi kan titta på hur stor en kvadrat med sidlängd $a+b$ är:



Du ser att i ditt $a^2 + b^2$ så har du bara fått med de vita områdena; de två gråa ingår också.

(Det feltänk du har gjort är att använda distributiva lagen, där man multiplicerar in i en parentes, för något som faktiskt inte är multiplikation.)

Kommentar: Även studenter som utmärkt väl kan första kvadreringsregeln gör ofta ”kompisens” beräkning om den kvadrerade summan ingår som ett deluttryck i en större beräkning. Speciellt vanligt är det då man själv lägger in kvadreringen (t.ex. vid lösande av rotekvationer), eftersom man då gärna gör det steget i huvudet och därmed inte ser i klartext vad man egentligen har gjort.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Härleda [. . .] kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges).

Rättningsnorm: En förklaring som täcker de tre punkterna och som det verkar sannolikt att en kurskamrat skulle förstå: 3p. I övrigt poäng efter hur mycket av föregående man täckt.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2020.10.02 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. Vi har intervall $A = (-1{,}6,\ 2{,}7)$ och intevall $B = [2{,}5,\ 3{,}4]$.

(a) Intervallen är skrivna med olika sorteras parenteser: () och []. Vad är skillnaden i betydelse mellan dessa? (1p)

Lösning:

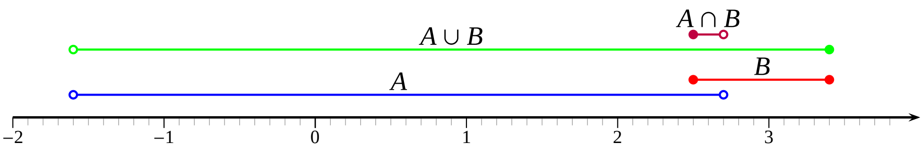
De böjda parenteserna innebär "ändpunkten ingår ej" (öppet intervall), hakparenteserna betyder "ändpunkten ingår" (slutpunkten ingår). Så i intervallet $(0, 1)$ ingår inte talet 1, medan det ingår i intervallet $[0, 1]$.

Rättningsnorm: Det räcker med orden öppet/slutet för poäng.

(b) Bestäm $A \cup B$. (1p)

Lösning:

Illustration (till både (b) och (c)):



Unionen är mängderna i förening, vilket här är det område som täcks av minst ett av intervallen:

$\boxed{\textit{Svar: } A \cup B = (-1{,}6,\ 3.4] = \{x \mid 1{,}6 < x \le 3{,}4\}}$

(c) Bestäm $A \cap B$. (1p)

Lösning:

Snittet är det som mängderna har gemensamt, vilket här är det område där intervallen överlappar:

$\boxed{\textit{Svar: } A \cap B = [2{,}5,\ 2{,}7) = \{x \mid 2{,}5 \le x < 2{,}7\}}$

Notera för övrigt att både unionen och snittet innehåller *oändligt* många tal.

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Intervall • Union, snitt, komplement, kardinalitet; Du ska kunna göra följande: • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt. Övning 2.9.

Rättningsnorm: (gäller både (b) och (c)) Kan nog bara bli rätt eller fel, men svarar man med unionen på (c) och snittet på (b) ges 1p för uppgifterna ihop. Och om man visar att man vet vad union och snitt är, men missat att intervall inte bara består av heltal, så ges också 1p för uppgifterna ihop.

2. **(a)** Lös följande ekvation genom att rita upp problemet: $3^x = 1 + 3{\cdot}x - x^2$. (2p)

(b) Förklara hur du kan känna dig säker på att ekvationen inte har fler lösningar än den/de som du hittat. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.3(d).

(a) Rita kurvorna $y = 3^x$ och $y = 1 + 3{\cdot}x - x^2$ i samma koordinatsystem, och se var de skär varandra.

- $y = 3^x$ är en exponentialfunktionskurva, en allt brantare backe. Grov värdetabell:

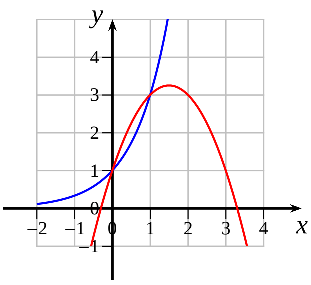
x	-2	-1	0	1	2
3^x	$1/9$	$1/3$	1	3	9

- $y = 1+3{\cdot}x-x^2$ är en parabel, med kröken uppåt (”negativ – ledsen mun”). Grov värdetabell:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$1+3{\cdot}x-x^2$	-9	-3	1	3	3	1	-3

Av symmetriskäl måste toppen på parabeln ligga vid $x = 1{,}5$ (eftersom värdena är lika för $x = 2$ och $x = 3$). Toppvärdet är $y = 1+3\cdot 1{,}5-1{,}5^2 = 1+4{,}5-2{,}25 = 3{,}25$.
Man kan också utnyttja kvadratkomplettering: $1 + 3{\cdot}x - x^2 = -(x^2 - 3{\cdot}x - 1) = -(x^2 - 2{\cdot}1{,}5{\cdot}x + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 1) = -((x-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 1) = -(x-1{,}5)^2 + 3{,}25$.
Detta motsvarar parabeln $y = x^2$ flyttad 1,5 steg åt höger, vänd upp-och-ner, och slutligen uppflyttad så att kröken hamnar på höjden 3,25.

Bild:



Av bild och tabeller att döma råder likhet för $\boxed{x = 0 \text{ och } x = 1}$

Referenser: Du ska kunna göra följande:

• Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Tolka en ekvation grafiskt. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Korrekt bild: 1p. Korrekt resultat ur bilden: 1p. 0p för lösning som inte ritat bild, även om svaret är rätt.

(b) Ändarna på parabeln är nere i det negativa området då vi är till vänster om vänstra nollstället eller till höger om högra, medan exponentialkurvan helt och hållet ligger i det positiva området. Så det kan omöjligt finnas några skärningar till vänster om vänstra nollstället eller till höger om det högra. Så det kan inte finnas några lösningar utanför det område som vi ritat upp. (Och det kan inte heller finnas några som vi inte fått med för att vi haft för få värden i våra tabeller, eftersom kurvorna är snyggt böjda åt ett håll. För att de ska kunna skära på fler punkter måste de slingra sig, och det vet vi att dessa kurvtyper inte gör.)

Rättningsnorm: Det räcker att ta upp det där om positiva-negativa, och även mycket illa formulerade förklaringar godtas.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{\frac{7}{25}-\frac{7}{15}}{\frac{21}{50}}-\frac{2}{9}$$ (3p)

Lösning:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{7\cdot 3}{25\cdot 3}-\frac{7\cdot 5}{15\cdot 5}=\frac{21-35}{75}=-\frac{14}{75}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{7}{25}-\frac{7}{15}}{\frac{21}{50}}=\frac{-\frac{14}{75}}{\frac{21}{50}}=-\frac{14}{75}\cdot\frac{50}{21}=-\frac{2\cdot\cancel{7}\cdot 2\cdot\cancel{25}}{3\cdot\cancel{25}\cdot 3\cdot\cancel{7}}=-\frac{4}{9}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{7}{25}-\frac{7}{15}}{\frac{21}{50}}-\frac{2}{9}=-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=-\frac{6}{9}=-\frac{2\cdot\cancel{3}}{3\cdot\cancel{3}}=\boxed{-\frac{2}{3}}$$

Notera att om man inte utnyttjar möjligheterna till att förkorta under gång blir sifferhanteringen *mycket* besvärlig.

Mer på en gång: Dubbelbråket kan också hanteras genom att man förlänger med minsta gemensamma nämnare för samtliga tre inblandade bråk: $150 = 6\cdot 25 = 10\cdot 15 = 3\cdot 50$.

$$\frac{\left(\frac{7}{25}-\frac{7}{15}\right)\cdot 150}{\frac{21}{50}\cdot 150}=\frac{\frac{7\cdot 6\cdot\cancel{25}}{\cancel{25}}-\frac{7\cdot 10\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}{\frac{21\cdot 3\cdot\cancel{50}}{\cancel{50}}}=\frac{42-70}{63}=\frac{-28}{63}=-\frac{4\cdot\cancel{7}}{9\cdot\cancel{7}}$$

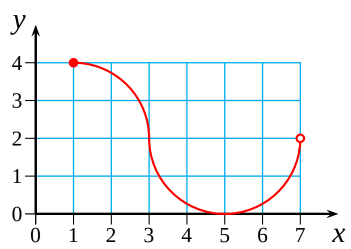
Sedan fortsätter man från steget *helheten* ovan.

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen i varje enskild beräkning, för poängen med det hela är att alla uttrycken i beräkningen motsvarar samma tal; de *är lika med* varandra. Att använda implikations- eller ekvivalenspilar är felaktigt, eftersom dessa är logiska symboler som handlar sanningshalter. Och bråkuttryck har inget sanningsvärde; de representerar tal.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheterna under gång räknas dock som ”synden straffar sig själv”.

4. Här har vi grafen för en funktion f:



Rita kurvorna

(a) $y = f(x+2)$

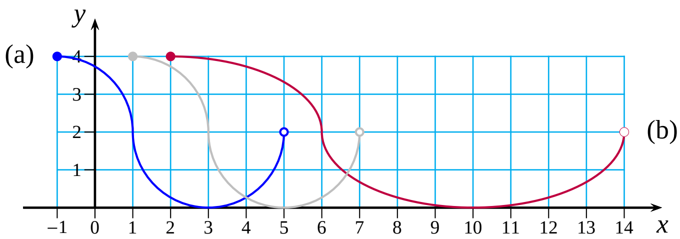
(b) $y = f(\frac{x}{2})$

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 4.19(a) och (e). Att som i (a) addera 2 innan beräkningen innebär att alla effekter kommer två steg tidigare än vanligt; det som förut hände vid $x = 1$ kommer nu att hända redan vid $x = -1$, eftersom $-1 + 2 = 1$. Konkret så flyttar kurvan två steg åt vänster.

Att som i (b) halvera innan beräkningen innebär att allt händer hälften så fort; det förlopp som tidigare rymdes på 6 längdenheter är nu utdraget över 12. Detta inkluderar startpunkten; kurvan börjar nu först vid $x = 2$; x-värden innan detta värde kommer efter halvering att ligga utanför definitionsmängden.



Om man inte kommer ihåg de här principerna kan man analysera det hela med en grov värdetabell:

x	$f(x)$
$(-\infty, 1)$	odef
1	4
3	2
5	0
nästan 7	nästan 2
$[7, \infty)$	odef

Nu kan vi fundera på vad x ska vara om $x + 2$ respektive $x/2$ ska anta de värden som vi vet hur f ska hantera:

x	$x+2$	$f(x+2)$
$(-\infty, -1)$	$(-\infty, 1)$	odef
-1	1	4
1	3	2
3	5	0
nästan 5	nästan 7	nästan 2
$[5, \infty)$	$[7, \infty)$	odef

x	$x/2$	$f(x/2)$
$(-\infty, 2)$	$(-\infty, 1)$	odef
2	1	4
6	3	2
10	5	0
nästan 14	nästan 7	nästan 2
$[14, \infty)$	$[7, \infty)$	odef

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa kurvorna $y = f(x+c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c\cdot x)$ och $y = c\cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: 1p för korrekt kurva för (a). För (b) 1p för kurvans form och 1p för dess startpunkt.

5. Studera uttrycket $\dfrac{12\cdot x^2 + 6\cdot x}{2\cdot x + 1}$

(a) Förkorta uttrycket. (2p)

(b) Ange för vilket/vilka x förkortningen inte är giltig. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 7.20(c)

$$\frac{12\cdot x^2 + 6\cdot x}{2\cdot x + 1} = \frac{6\cdot x\cdot\cancel{(2\cdot x + 1)}}{\cancel{2\cdot x + 1}} = 6\cdot x$$

Förkortningen är dock inte giltig om $2\cdot x + 1 = 0$, dvs. om $x = -1/2$, för i det fallet är startuttrycket lika med $0/0 =$ error medan slututtrycket är $6\cdot(-1/2) = -3$. -3 och ”detta blev totalkatastrof” är inte samma sak.

(Däremot är det inte det minsta problem om $x = 0$. Då blir det oförkortade uttrycke $(12\cdot 0^2 + 6\cdot 0)/(2\cdot 0 + 1) = 0/1 = 0$, och det förkortade $6\cdot 0 = 0$. Det är inga problem att dela *på* noll, det är att dela *med* noll som är bekymmersamt.)

Svar: (a) $6\cdot x$ (b) $x = -1/2$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [...] bryta ut gemensamma faktorer. • Förenkla rationella uttryck och kunna ange under vilka omständigheter förenklingarna är giltiga.

Rättningsnorm: (a) Helt rätt: 2p. Slarvfel: 1p. (b) Kan nog bara bli rätt eller fel.

6. Lös följande olikhet: $x^4 + 18\cdot x^3 - 19\cdot x^2 \geq 0$ (3p)

Lösning:

Lättare att göra om vänsterledet är faktoriserat, så vi kan börja med det:

$$\begin{aligned}
&x^4 + 18\cdot x^3 - 19\cdot x^2 \\
&= x^2\cdot(x^2 + 18\cdot x - 19) && \text{Bryt ut} \\
&= x^2\cdot(x^2 + 2\cdot 9\cdot x + 9^2 - 9^2 - 19) && \text{Kvadratkomplettera} \\
&= x^2\cdot((x+9)^2 - 81 - 19) && \text{Skriv som kvadrat} \\
&= x^2\cdot((x+9)^2 - 100) && \text{Snygga upp} \\
&= x^2\cdot((x+9)^2 - 10^2) && \text{Skriv som kvadrat} \\
&= x^2\cdot((x+9)+10)\cdot((x+9)-10) && \text{Konjugatregeln} \\
&= x^2\cdot(x+19)\cdot(x-1) && \text{Snygga upp}
\end{aligned}$$

Så det kommer att hända saker med uttrycket tecken i $x = 0$, $x = -19$ och $x = 1$. Teckentabell:

	$x < -19$	$x = -19$	$-19 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
x^2	+	+	+	0	+	+	+
$x + 19$	−	0	+	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	−	−	0	+
VL	+	0	−	0	−	0	+

Vi ville att uttrycket skulle vara positivt eller noll, vilket det är fram till och med -19, tillfälligt i 0, och så från och med 1.

Svar: $x \leq -19 \vee x = 0 \vee x \geq 1$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [...] bryta ut gemensamma faktorer. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Lösa olikheter innehållande polynom[...] Övning 9.9–11

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår uppgiften: 1p. Största delen av en korrekt lösning: 2p.

7. Förenkla följande uttryck maximalt. Utgå från att alla talen är positiva.

$$\frac{\sqrt[4]{a^4\cdot b\cdot c^{-4}}}{a\cdot b^4\cdot c}$$

Även ”slarvfel” kommer att räknas som fel vid rättningen. (3p)

Lösning:

Tillämpa potensreglerna:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt[4]{a^4\cdot b}\cdot c^{-4}}{a\cdot b^4\cdot c}\\
&\quad = \frac{(a^4\cdot b)^{1/4}}{a\cdot b^4\cdot c\cdot c^4} && \sqrt[n]{x} = x^{1/n};\ x^{-n} = 1/x^n\\
&\quad = \frac{(a^4)^{1/4}\cdot b^{1/4}}{a\cdot b^4\cdot c^5} && (x{\cdot}y)^n = x^n{\cdot}y^n;\ x^m{\cdot}x^n = x^{m+n}\\
&\quad = \frac{a^{4\cdot 1/4}}{a\cdot b^{4-1/4}\cdot c^5} && (x^m)^n = x^{m\cdot n};\ x^m/x^n = x^{m-n}\\
&\quad = \frac{a}{a\cdot b^{15/4}\cdot c^5} && \text{Bråkräkning}\\
&\quad = \boxed{\frac{1}{b^{15/4}\cdot c^5}}
\end{aligned}
$$

Svaret kan lika korrekt skrivas som $b^{-15/4}\cdot c^{-5}$; det beror på tillämpningen vilketdera som är mest funktionellt.

Notation: Se fråga 3.

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 5.10.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll).

8. Du håller på att hjälpa din kompis med olikhetsproblemet $-2{\cdot}(x+3) > 4$.

Kompisen börjar

$$\frac{-2{\cdot}(x+3)}{-2} > \frac{4}{-2} \qquad ☠$$

”Stopp!” säger du. ”Om du multiplicerar eller dividerar med ett negativt tal måste du vända olikheten.”
Kompisen ändrar till

$$\frac{-2{\cdot}(x+3)}{-2} < \frac{4}{-2} \qquad \Leftrightarrow \qquad x+3 < -2$$

Kompisen fortsätter

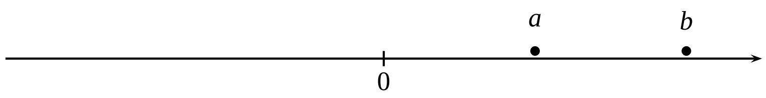
$$x+3-3 > -2-3 \qquad ☠$$

”Stopp!” säger du. ”Du ska inte vända olikheten då du *lägger till* ett negativt tal.”
”Varför ska man vända ibland och ibland inte?” undrar kompisen.

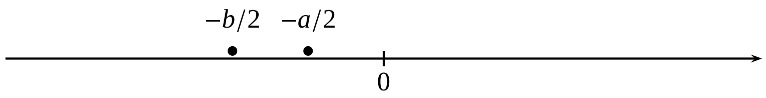
Förklara för kompisen **varför** man *ska* vända olikheten om man multiplicerar med ett negativt tal men *inte* om man adderar ett negativt tal. (Det räcker inte att säga ”för att reglerna är sådana”, utan kompisen ska förstå *varför* de är som de är.) (3p)

Lösning:

Exempelvis: Vi kan ta två tal, säg a och b, där a är mindre än b. Det betyder att de ligger så här på tallinjen:

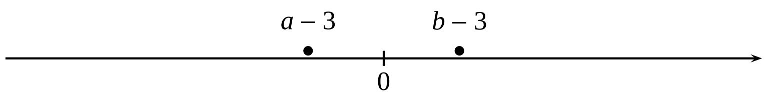


Om vi multiplicerar båda talen med $-1/2$, som vi gjorde här i uträkningen, så blir det så här:



Du ser att de flippat om när det gäller vem som är längst åt vänster? Multiplicerar man med något negativt så byts tecknet, och då flyger produkten över till andra sidan om noll. Och då ändras höger-vänster-förhållandet. Det där med ”vänd tecknet” innebär att man tar hänsyn till det.

Om vi istället skulle ha adderat ett negativt tal, så innebär det att båda grejerna flyttar lika långt åt vänster. I så fall ändrar man inte vem som var längst åt vänster.



Olikhetstecknet, som säger vem som är längst åt vänster, ska vara som förut.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Större än, mindre än, lika med • Positivt tal, negativt tal; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja tallinjen för att illustrera exempelvis intervall och räkneoperationer. • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten.

Rättningsnorm: Förklaring som är korrekt och som det är sannolikt att en medstudent skulle förstå: 3p. Delpoäng för lösningar som inte når hela vägen.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2021.01.08 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

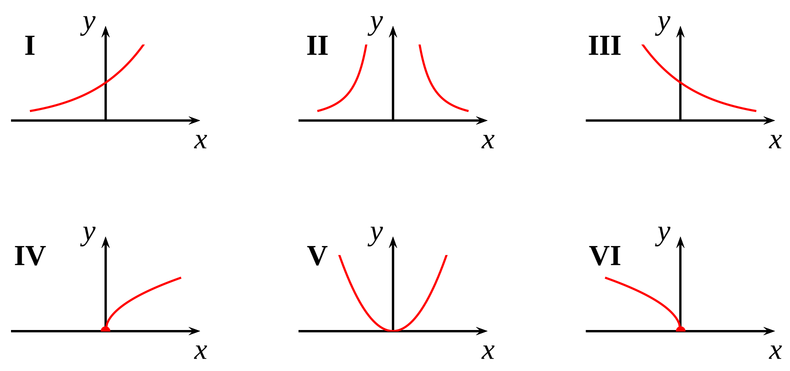
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Här är sex kurvor:



Här är tio ekvationer:

(a) $y = x^2$ **(b)** $y = 2^x$ **(c)** $y = x^{-2}$ **(d)** $y = 2^{-x}$ **(e)** $y = (-x)^2$

(f) $y = (1/x)^2$ **(g)** $y = (1/2)^x$ **(h)** $y = x^{1/2}$ **(i)** $y = (1/2)^{-x}$ **(j)** $y = (-x)^{1/2}$

Ange för varje ekvation vilken av kurvorna den motsvarar. Några av kurvorna hör till flera av ekvationerna; det är därför antalen inte stämmer överens. Motivering behövs ej, men se till att det framgår vilken delfråga svaren hör till! (3p)

0–2 rätt: 0p. 3–5 rätt: 1p. 6–8 rätt: 2p. 9–10 rätt: 3p.

Lösning:

Ett sätt är att för varje ekvation tänka efter hur tillhörande kurva bör se ut, och så leta rätt på den bild som passar in.

(a) $y = x^2$: jämn positiv potens ska vara en U-kurva, vilket stämmer med $\boxed{\text{V}}$.

(b) $y = 2^x$: exponentialfunktion med bas större än 1: kurva som lutar uppåt: $\boxed{\text{I}}$.

(c) $y = x^{-2} = 1/x^2$. Ska avvika starkt från noll då x är nära noll, och närma sig noll då x är långt ifrån. Stämmer med $\boxed{\text{II}}$.

(d) $y = 2^{-x} = 1/2^x = (1/2)^x$: exponentialfunktion med bas mindre än 1: kurva som lutar neråt: $\boxed{\text{III}}$.

(e) $y = (-x)^2 = x^2$. Då man upphöjer i ett jämnt tal så ”försvinner” tecknet, så att man byter tecken på x har ingen inverkan. Den här motsvarar också $\boxed{\text{V}}$.

(f) $y = (1/x)^2 = 1^2/x^2 = 1/x^2$: Samma som (c), alltså $\boxed{\text{II}}$.

(g) $y = (1/2)^x$: samma som (d), $\boxed{\text{III}}$.

(h) $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$. Roten ur x. Ska se ut som en liggande variant av halva $y = x^2$. Motsvarar $\boxed{\text{IV}}$.

(i) $y = (1/2)^{-x} = 2^x$: samma som (b), $\boxed{\text{I}}$.

(j) $y = (-x)^{1/2} = \sqrt{-x}$.Byt tecken på x, och ta sedan roten roten. Då ska det hända samma saker för negativa x som det i (h) hände med positiva: $\boxed{\text{VI}}$.

Man kan också ta hjälp av en värdetabell, och beräkna y för ett förhoppningsvis representativt antal x-värden. Det kan räcka för en grovskiss att matcha mot bild:

	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
x^2	4	1	$1/4$	0	$1/4$	1	4
2^x	$1/4$	$1/2$	?	1	?	2	4
x^{-2}	$1/4$	$1/$	4	!	4	1	$1/4$
2^{-x}	4	2	?	1	?	$1/2$	$1/4$
$(-x)^2$	4	1	$1/4$	0	$1/4$	1	4
$(1/x)^2$	$1/4$	$1/2$	4	!	4	1	$1/4$
$(1/2)^x$	4	2	?	1	?	$1/2$	$1/4$
$x^{1/2}$	!	!	!	0	?	1	?
$(1/2)^{-x}$	$1/4$	$1/2$	?	1	?	2	4
$(-x)^{1/2}$	?	1	?	0	!	!	!

(”?” betecknar ”något med massor av decimaler, som vi förhoppningsvis inte behöver veta för att förstå hur kurvan ser ut”, och ”!” betecknar ”odefinierat”.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.22.

Rättningsnorm: Se frågan. Svar som det inte går att begripa vilken deluppgift de hör till räknas som felaktiga.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$1/2 - (2/3)/(3/4 - 5/6) \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Läsbarheten ökar om man byter till horisontella bråkstreck. Division går före subtraktion, om inte parenteser ingriper:

$$1/2 - (2/3)/(3/4 - 5/6) = \frac{1}{2} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{5}{6}}$$

Notera att inga parenteser behövs sedan man bytt lay-out!

Bit för bit: Nämnaren:

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9 - 10}{12} = -\frac{1}{12}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{12}} = -\frac{2}{3}\cdot 12 = -\frac{2\cdot 4\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = -8$$

Helheten:

$$\frac{1}{2}-(-8) = \frac{1}{2}+\frac{8\cdot 2}{2} = \frac{1+16}{2} = \boxed{\frac{17}{2}}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel; att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheter under gång räknas dock som "synden straffar sig själv".

3. Lös följande olikhet: $\dfrac{1010}{10\cdot x-1} \leq \dfrac{100}{x}$ (3p)

Lösning:

Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera:

$$\frac{1010}{10\cdot x-1} \leq \frac{100}{x}$$

$$\frac{1010}{10\cdot x-1} - \frac{100}{x} \leq 0 \qquad \text{"Flytta över" (subtrahera)}$$

$$\frac{1010\cdot x}{(10\cdot x-1)\cdot x} - \frac{100\cdot(10\cdot x-1)}{x\cdot(10\cdot x-1)} \leq 0 \qquad \text{Gör liknämnigt}$$

$$\frac{1010\cdot x - 1000\cdot x + 100}{(10\cdot x-1)\cdot x} \leq 0 \qquad \text{Sätt på gemensamt bråkstreck}$$

$$\frac{10\cdot x + 100}{(10\cdot x-1)\cdot x} \leq 0 \qquad \text{Subtrahera}$$

$$\frac{\cancel{10}\cdot(x+10)}{\cancel{10}\cdot(x-{}^1\!/_{10})\cdot x} \leq 0 \qquad \text{Bryt ut}$$

$$\frac{x+10}{(x-{}^1\!/_{10})\cdot x} \leq 0 \qquad \text{Förkorta}$$

Täljaren byter tecken vid $x = -10$, nämnaren vid $x = 0$ och $x = {}^1\!/_{10}$. Dessa tre punkter dela tallinjen (x-axeln) i fyra delar. Tabell:

	$x < -10$	$x = -10$	$-10 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < {}^1\!/_{10}$	$x = {}^1\!/_{10}$	$x > {}^1\!/_{10}$
$x+10$	–	0	+	+	+	+	+
x	–	–	–	0	+	+	+
$x-{}^1\!/_{10}$	–	–	–	–	–	0	+
VL	–	0	+	odef	–	odef	+

Vi ville att uttrycket skulle vara negativt eller noll, vilket det är fram till och med -10 och mellan 0 och ${}^1\!/_{10}$.

Kommentar 1: Notera att $x - {}^1\!/_{10}$ är definierad för $x = {}^1\!/_{10}$. Värdet är noll. Däremot är uttrycket som helhet odefinierat, eftersom nollan står i nämnaren. (Samma sak gäller faktorn x.)

Kommentar 2: Om man försöker analysera problemet genom att testräkna med några heltal i närheten av noll så missar man förmodligen teckenskiftet vid $x = -10$, och man missar garanterar det som händer mellan $x = 0$ och $x = {}^1\!/_{10}$.

$\boxed{\textit{Svar: } x \leq -10 \vee 0 < x < 1/10}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Förenkla rationella uttryck[...] • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Använda och tolka teckentabeller. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Övning 9.9–11.

Rättningsnorm: Visat att man förstår hur man bör skriva om olikheten: 1p. Visat att man förstår hur man analyserar det omskrivna uttrycket: 1p (även om själva omskrivningen var felaktig). Visat att man kan se vilket svar man kommit fram till: 1p.

4. Är följande sant?

(a) $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \in \mathbb{Z}$

(b) $a \notin \mathbb{Z} \wedge b \notin \mathbb{Z} \Rightarrow (a+b) \notin \mathbb{Z}$

Motivera! Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

(a) ”Om a är ett heltal och b också är ett heltal så är summan av a och b ett heltal”. Stämmer bra: $\boxed{\text{Sant}}$

(b) ”Om a inte är ett heltal och b inte heller ett heltal så är summan av a och b inte ett heltal”. Stämmer dåligt, t.ex. är $1{,}5 + 2{,}5 = 4$; ingen av termerna var ett heltal men summan var det. $\boxed{\text{Falskt}}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation • Heltal, rationellt tal, reellt tal • $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt. Övning 1.2, 1.3.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Om man kan se att den skrivande missuppfattat vad $\mathbb{Z}$ är men resonerar korrekt: 2p. Om det är klart att den skrivande förstår innebörden i åtminstone några av symbolerna: 1p.

5. Din kompis håller på att lösa en ekvation, och vill skriva om $\sqrt{x-4}$ till $\sqrt{x} - \sqrt{4}$.

(a) Förklara för din kompis med hjälp av ett exempel att man inte är garanterad att $\sqrt{a-b}$ blir samma sak som $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. (1p)

Lösning:

Det går bra med att hugga ungefär vilka tal som helst och prova med. Ett lätträknat exempel är $a = 4$, $b = 1$:

$$\sqrt{4-1} = \sqrt{3} \approx 1{,}7 \qquad \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

Eftersom 1,7 och 1 inte är samma tal så råder inte likhet.

(Egentligen är det korrekta argumentet i en sådan här situation ”varför skulle det fungera?”. De flesta idéer fungerar inte, så det är den som fått idén som har ansvaret för att visa att den är bra, inte övriga som ska visa att den inte är det.)

Kommentar: Uppgiften är i likhet med alla andra ”din kompis”-uppgifter inspirerad av frekvent förekommande fel på tidigare tentor.

Referenser: Detta är mer generella principer för räkneregler, och motsvarar inte någon punkt exakt, men den berör bland annat Du ska kunna förklara vad följande betyder: • [...] lika med

Rättningsnorm: Ett exempel som visar att det inte blir likhet: 1p

(b) ”OK,” säger kompisen. ”Jag är med på att det oftast inte blir samma. Men kan det inte bli samma ibland?”

Ja, det kan det. Hitta de talpar (a, b) där det faktiskt blir likhet. För full poäng ska det vara uppenbart att du hittat alla svar; delpoäng om du hittar några. (2p)

Lösning:
Det är relativt lätt att se att om $b = 0$ blir båda uttrycken $\sqrt{a}$ och därmed lika, och om $a = b$ blir båda uttrycken 0 (förutsatt att talen inte är negativa, för då blir det problem med $\sqrt{a} - \sqrt{b}$). Frågan är om det finns några fler, mindre uppenbara lösningar? Vi kan helt enkelt göra en ekvationslösning:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-b} &= \sqrt{a} - \sqrt{b} \\
(\sqrt{a-b})^2 &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 && \text{Kvadrera; kolla svaren} \\
a - b &= a - 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + b && \text{Utveckla} \\
0 &= 2\cdot b - 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} && \text{"Flytta över"} \\
0 &= 2\cdot(\sqrt{b})^2 - 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} && \text{Skriv som kvadrat} \\
0 &= 2\cdot\sqrt{b}\cdot(\sqrt{b} - \sqrt{a}) && \text{Bryt ut} \\
\sqrt{b} = 0 &\vee \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 && \text{Nollfaktorlagen} \\
b = 0 & \qquad \sqrt{a} = \sqrt{b} \\
& \qquad a = b
\end{aligned}$$

”Kolla lösningarna” innebär att vi inte ska tro på detta svar innan vi sett att det passar i ursprungsekvationen. Det resonemang vi förde då vi tog fram lösningar med inspektion säger att de här fungerar, förutsatt att talen inte är negativa.

Referenser: • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck.

Rättningsnorm: Hittat åtminstone ett svar med inspektion: 1p. Hittat alla svaren och visat att de verkligen är alla: 2p. Börjat bra men kört fast: 1p.

6. Funktionen f definieras enligt:

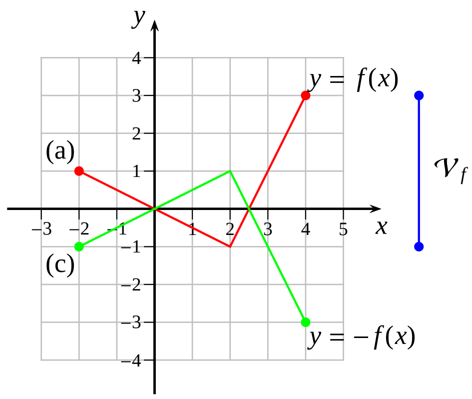
$$f(x) = \begin{cases} -x/2 & -2 \le x < 2 \\ 2\cdot x - 4 & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

(c) Rita kurvan $y = -f(x)$. (1p)

Lösning:
Styckvis definierad funktion. Man kan göra en värdetbell, men enklare är att bara lägga linjalen rätt i koordinatsystemet. Linjen $y = -\frac{1}{2}\cdot x + 0$ skär y-axeln på höjden 0 (dvs. i origo) och går 1 steg neråt på 2 steg framåt. Vi ska ha den del av denna linje som ligger mellan $x = -2$ och $x = 2$. Linjen $y = 2\cdot x - 4$ skär y-axeln på höjden -4 och går 2 steg uppåt på 1 steg framåt. Vi ska ha den del av denna linje som ligger mellan $x = 2$ och $x = 4$. Bild:



Värdemängden är alla y-värden på kurvan. Lägsta värde är $y = -1$, högsta är $y = 3$, och alla värden däremellan antas.

$\boxed{\textit{Svar:} \text{ (b) } \mathcal{V}_f = [-1, 3]}$

$y = -f(x)$ innebär att vi ska byta tecken på alla funktionsvärdena. De positiva blir negativa och de negativa positiva. Rent praktiskt innebär det att vi vänder kurvan upp-och-ner,

(a) och (c)-uppgifterna kan också analyseras med hjälp av en värdetabell:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	odef	1	$1/2$	0	$-1/2$	-1	1	3	odef
$-f(x)$	odef	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	-1	-3	odef

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Värdemängd • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. • Skissa kurvorna $y = f(x+c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c \cdot x)$ och $y = c \cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Rita en rät linje utan att ta hjälp av värdetabell. Övning 4.12, 4.18, 4.21.

Rättningsnorm: (a) Kan bara bli rätt eller fel. (b) Svar konsistent med det man ritade på a ger poäng, och inga avdrag för felaktig notation så länge det går att förstå vad som menas. (c) Svar konsistent med det man ritade på a ger poäng.

7. (a) Utveckla $(x+y+z)^2$ (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.11:

Med distributiva lagen:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+y+z)\cdot(x+y+z)\\ &= x\cdot x + x\cdot y + x\cdot z + y\cdot x + y\cdot y + y\cdot z + z\cdot x + z\cdot y + z\cdot z\\ &= \boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot x\cdot y + 2\cdot x\cdot z + 2\cdot y\cdot z}\end{aligned}$$

Med först kvadreringsregeln:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+(y+z))^2\\ &= x^2 + 2\cdot x\cdot(y+z) + (y+z)^2\\ &= \boxed{x^2 + 2\cdot x + 2\cdot x\cdot z + y^2 + 2\cdot y\cdot z + z^2}\end{aligned}$$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Potens; Du ska kunna göra följande: • Motivera och tillämpa distributiva lagen. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges).

Beräkna:

(b) $-81^{3/4}$ (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.8(b). Potenser går före unärt minus, så vi kan låta det stå utanför diskussionen. 81 känner vi igen som kvadraten på 9, och 9 som kvadraten på 3.

$$-81^{3/4} = -(81^{3/4}) = -(81^{1/4})^3 = -((3^4)^{1/4})^3 = -3^3 = \boxed{-27}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna.

(c) $\dfrac{3^3 \cdot 35^2}{21^2 \cdot 5^3}$ (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.9(d). Det verkar inte som en bra idé att inleda med att multiplicera ihop något, utan mer funktionellt att faktorisera:

$$\frac{3^3\cdot 35^2}{21^2\cdot 5^3} = \frac{3^3\cdot(5\cdot 7)^2}{(3\cdot 7)^2\cdot 5^3} = \frac{3^3\cdot 5^2\cdot \cancel{7^2}}{3^2\cdot 5^3\cdot \cancel{7^2}} = \frac{3\cdot \cancel{3^2}\cdot \cancel{5^2}\cdot 7^2}{\cancel{3^2}\cdot 5\cdot \cancel{5^2}\cdot 7^2} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna.

Rättningsnorm: Gäller alla deluppgifterna: Uppgifterna kan egentligen bara bli rätt eller fel, men är det småfel i flera av dem dras bara en poäng.

8. Lös följande ekvation: $x^4 - 7\cdot x^2 + 10 = 0$. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.19(a).

Substitutionsangrepp: Ekvationen är av grad 4, men saknar 1:a-gradsterm och 3:e-gradsterm. Då kan den hanteras som en 2:a-gradare.

$$\begin{aligned}
x^4 - 7\cdot x^2 + 10 &= 0 \\
(x^2)^2 - 7\cdot x^2 + 10 &= 0 && \text{Potensregel} \\
t^2 - 7\cdot t + 10 &= 0 && \boxed{\text{Sätt } x^2 = t} \\
t^2 - 2\cdot\tfrac{7}{2}\cdot t + (\tfrac{7}{2})^2 - (\tfrac{7}{2})^2 + 10 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(t - \tfrac{7}{2})^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{10\cdot 4}{4} &= 0 && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera} \\
(t - \tfrac{7}{2})^2 &= \tfrac{9}{4} && \text{"Flytta över"} \\
(t - \tfrac{7}{2})^2 &= (\tfrac{3}{2})^2 && \text{Skriv som kvadrat} \\
t - \tfrac{7}{2} &= \pm\tfrac{3}{2} && \text{Samma kvadrat; samma "siffror", inte säkert samma tecken} \\
t = \tfrac{7}{2} - \tfrac{3}{2} \ &\vee \ t = \tfrac{7}{2} + \tfrac{3}{2} \\
t = \tfrac{4}{2} \ & \ t = \tfrac{10}{2} \\
x^2 = 2 \ & \ x^2 = 5 \\
x = \pm\sqrt{2} \ & \ x = \pm\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Polynomangrepp: **Om** ett polynom med heltalskoefficienter och högstagradskoefficient 1 har några heltalsnollställen **så** är dessa faktorer i konstanttermen. Polynomet i vänsterledet uppfyller förledet i implikationen, så satsen kan utnyttjas. Konstanttermen är 10, med faktorerna ±1, ±2, ±5, ±10. Vi kan testa om något av dessa tal är nollställe till polynomet.

$$\begin{aligned}
x = \pm 1: &\ (\pm 1)^4 - 7\cdot(\pm 1)^2 + 10 = 1 - 7\cdot 1 + 10 = 1 - 7 + 10 \neq 0 \\
x = \pm 2: &\ (\pm 2)^4 - 7\cdot(\pm 2)^2 + 10 = 16 - 7\cdot 4 + 10 = 1 - 28 + 10 \neq 0 \\
x = \pm 5: &\ (\pm 5)^4 - 7\cdot(\pm 5)^2 + 10 = 625 - 7\cdot 25 + 10 = 625 - 175 + 10 \neq 0 \\
x = \pm 10: &\ (\pm 10)^4 - 7\cdot(\pm 10)^2 + 10 = 10000 - 7\cdot 100 + 10 = 10000 - 700 + 10 \neq 0
\end{aligned}$$

Tyvärr inte. Då kommer vi inte vidare på detta spår, som dock i andra fall kunde ha visat sig utomordentligt användbart.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-\sqrt{5}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}}$

Referenser: • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Substituerat: 1p, resten 2p. Undersökning av potentiella heltalsnollställen: 1p, även om den inte leder vidare.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2021.03.23 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Bestäm kvot och rest vid divisionen $\dfrac{6\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 14}{2\cdot x - 3}$ (3p)

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten!

Lösning:

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 \\ \hline
2\cdot x - 3 & 6\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 0\cdot x + 14 \\
 & -(6\cdot x^3 - 9\cdot x^2) \\ \cline{2-2}
 & \quad -4\cdot x^2 \\
 & \quad -(-4\cdot x^2 + 6\cdot x) \\ \cline{2-2}
 & \qquad -6\cdot x + 14 \\
 & \qquad -(-6\cdot x + 9) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 5
\end{array}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Kvot: } 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3;\ \text{rest: } 5}$

Kontroll: Det är lätt att göra slarvfel i den här typen av beräkning, så en kontroll är bra. Sätt tillbaka på bråkstreck:

$$
\begin{aligned}
3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 + \frac{5}{2\cdot x - 3} &= \frac{(3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3)\cdot(2\cdot x - 3) + 5}{2\cdot x - 3} \\
&= \frac{3\cdot x^2\cdot 2\cdot x - 3\cdot x^2\cdot 3 - 2\cdot x\cdot 2\cdot x + 2\cdot x\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot x + 3\cdot 3 + 5}{2\cdot x - 3} = \frac{6\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 14}{2\cdot x - 3}
\end{aligned}
$$

Vi har räknat rätt!

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision. Övning 7.7.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Rätt räknat, men ej angett vad som är kvot repektive rest: 2p. Enstaka räknefel: 2p. Rätt grundtanke, men ett flertal räknefel: 1p.

2. **(a)** I bild I nedan visas graferna för två exponentialfunktioner: f_1 och f_2. Vilken av dem har störst bas? Motivera. (1p)

Lösning:
Den blåa streckade kurvan är den med störst bas, för värdena är större i det positiva området, och lägre i det negativa. (Om $a < b$ och $x > 0$ gäller att $a^x < b^x$, och tvärtom för negativa x.)

(b) I bild II visas grafera för två potensfunktioner: f_3 och f_4. Vilken av dem har störst exponent? Motivera. (1p)

Lösning:
Den blåa streckade kurvan är den med störst bas, för värdena är lägre nära noll och högre en bit bort; plattare krök och brantare sidor.

(c) I bild II visas graferna för två potensfunktioner: f_5 och f_6. Den ena av dem har udda exponent och den andra jämn. Vilken är vilken? Motivera. (1p)

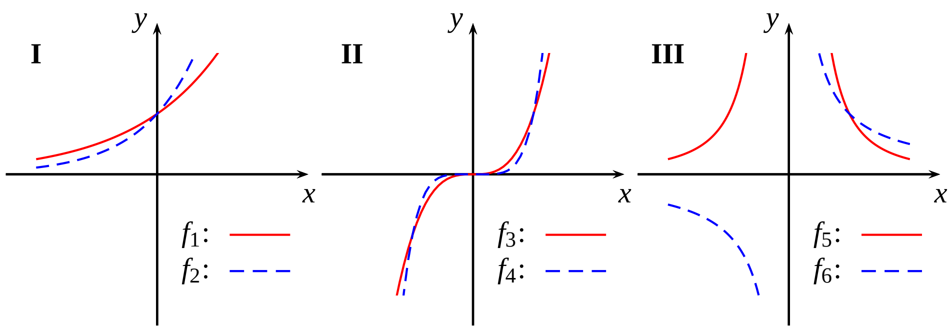
Lösning:
OBS: feltryck i frågan, ska stå bild III.

Den röda heldragna är den jämna (samma värden för positiva och negativa x) medan den blåa streckade är den udda (negativa värden för negativa x).

Kommentar: (gäller alla deluppgifterna) Om man inte kommer ihåg så kan man testa att rita ett par kurvor baserat på en värdetabell, och se hur det blir. För II bör man se att exponenten är udda, och om man testar att rita $y = x^3$ och $y = x^5$ (vilket för övrigt ger kurvorna i bild) med en tabell som innehåller x både efter 1 och mellan 0 och 1 ser man att kurvan för den högsta exponenten ska ligga nedanför den andra mellan 0 och 1 och ovanför efter 1.

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.22.

Rättningsnorm: (gäller alla deluppgifterna) Ingen motivering – ingen poäng. Annars: rätt svar ihop med något som kan tolkas som en korrekt motivering: 1p.



Motiveringarna förväntas vara ungefär en mening.

3. (a) Om någon skriver $1 - 4 \cdot 9 - 16$, vilket av de fem uttrycken nedan avses?

i. $(1 - 4) \cdot (9 - 16)$ **ii.** $((1 - 4) \cdot 9) - 16$ **iii.** $(1 - (4 \cdot 9)) - 16$
iv. $1 - (4 \cdot (9 - 16))$ **v.** $1 - ((4 \cdot 9) - 16)$ (1p)

Lösning:
Rekommenderad uppgift 3.10(f). Multiplikationer går före subtraktioner, subtraktioner ska göras från vänster till höger. Så först multiplikationen, sedan vänstra subtraktionen, sist högra subtraktionen. $\boxed{\text{iii}}$

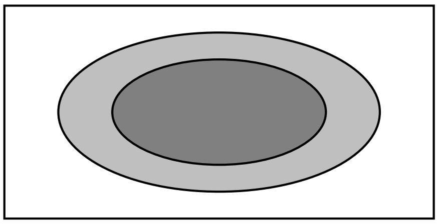
Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel.

(b) Illustrera begreppet *delmängd* med hjälp av Venndiagram. (1p)

Lösning:

Halva rekommenderad uppgift 1.13.



Ramen definierar ”universum”, allt som vi just nu anser existerar. Den mörkgrå mängden ingår helt och hållet i den omslutande, och är därmed en delmängd i den.

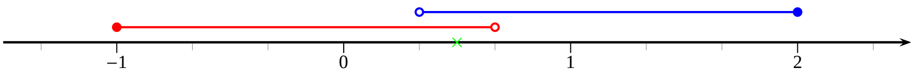
Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Mängd • Delmängd Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Räcker med bild, text behövs ej.

(c) Ange något tal som ligger i $[-1,\ \frac{2}{3}) \cap (\frac{1}{3},\ 2]$. (1p)

Lösning:

Skärningen mellan två intervall är det som tillhör båda intervallen.



De överlappar mellan $1/3$ och $2/3$. Ett exempel på ett tal i detta område är $\boxed{1/2}$. (Det finns oändligt många andra korrekta svar, eftersom det finns oändligt många tal mellan $1/3$ och $2/3$.)

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Union, snitt, komplement, kardinalitet; Du ska kunna göra följande: • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt. • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). Övning 2.9.

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel.

Motiveringar behövs ej, det räcker med svar.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{5}{48}\Big/\frac{3}{40} - \frac{5}{6} + \frac{4}{9} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Division går före addition och subtraktion. Ingen större vits att börja fundera på minsta gemensamma nämnare innan man förenklat dubbelbråket.

Dubbelbråket:

$$\frac{5}{48}\Big/\frac{3}{40} = \frac{5}{48}\cdot\frac{40}{3} = \frac{5\cdot 5\cdot \cancel{8}}{6\cdot\cancel{8}\cdot 3} = \frac{25}{18}$$

(Räkningarna blir ganska arbetsamma om man inte utnyttjar möjligheten att förkorta bort 8 innan multiplikationen.)

Helheten:

$$\frac{5}{48}\Big/\frac{3}{40} - \frac{5}{6} + \frac{4}{9} = \frac{25}{18} - \frac{5\cdot 3}{6\cdot 3} + \frac{4\cdot 2}{9\cdot 2} = \frac{25-15+8}{18} = \frac{18}{18} = \boxed{1}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel i prioritet *är* ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheterna under gång räknas dock som "synden straffar sig själv".

5. I en beräkning behöver du vattnets densitet vid temperaturen 43°C. Till din hjälp har du nedanstående tabell. Bestäm värdet så noga du kan. (3p)

T (°C)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ (kg/m²)	999,8	999,8	998,3	995,8	992,3	988,1	983,2	977,7	971,4	965,1

Lösning:

Värden är tagna ur *Värmetekniska tabeller*, `http://web.abo.fi/fak/tkf/vt/Common/Docs/tabeller.pdf`, och gäller vid trycket 1 bar.

Ultraformellt: Vi kallar temperaturen för x och trycket för y. Vi konstruerar en linje genom punkterna (40, 992,3) och (50, 988,1) och läser av y-värdet vid $x = 43$. Tvåpunktsformeln:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{988{,}1 - 992{,}3}{50 - 40} = \frac{-4{,}2}{10} = -0{,}42$$

Enpunktsformeln:

$$y - y_0 = k\cdot(x - x_0) \quad\Rightarrow\quad y - 992{,}3 = -0{,}42\cdot(x - 40) \quad\Leftrightarrow\quad y = -0{,}42\cdot(x-40) + 992{,}3$$

(INgen mening att förenkla en formel som bara ska användas en gång.) Med vårt x-värde insatt får vi

$$y = -0{,}42\cdot(43-40) + 992{,}30 - 0{,}42\cdot 3 + 992{,}3 = -1{,}26 + 992{,}3 = 991{,}04 \approx \boxed{991{,}0\ \text{kg/m}^3}$$

Informellt: 43°C ligger vid 30 % av sträckan mellan 40°C och 50°C. Då borde 30 % av densitetsförändringen mellan dessa temperaturer ha hunnit inträffa. Förändringen $\Delta\rho = 988{,}1 - 992{,}3 = -4{,}2$ kg/m³. Densiteten bör då vara

$$992{,}3 + 0{,}3\cdot(-4{,}2) = 992{,}3 = 992{,}3 - 1{,}26 = 991{,}04 \approx \boxed{991{,}0\ \text{kg/m}^3}$$

(Avrundningen följer konventionen att man inte ska ge svar med fler siffrors noggrannhet än vad informationen man startade med hade.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient. • Rita en rät linje utan att ta hjälp av värdetabell. • Genomföra en linjär interpolation.

Rättningsnorm: Helt korrekt: 3p. Åtminstone visat att man förstår uppgiften: 1p. Mellanting: 2p.

6. Los följande olikhet: $\dfrac{4}{5-x} \leq \dfrac{3}{(5-x)^2}$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.11(f). Standardtaktik: skyffla över allt på ena sidan, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera.

$$\frac{4}{5-x} \leq \frac{3}{(5-x)^2}$$
$$\frac{4}{5-x} - \frac{3}{(5-x)^2} \leq 0$$

$$\frac{4\cdot(5-x)}{(5-x)\cdot(5-x)} - \frac{3}{(5-x)^2} \le 0$$
$$\frac{20-4\cdot x-3}{(5-x)^2} \le 0$$
$$\frac{17-4\cdot x}{(5-x)^2} \le 0$$
$$\frac{4\cdot(4{,}25-x)}{(5-x)^2} \le 0$$

$4{,}25 - x$ byter tecken i $x = 4{,}25$, $(5-x)^2$ blir tillfälligt noll i $x = 5$. Dessa två punkter delar tallinjen (x-axeln)i tre delar. Tabell:

	$x < 4{,}25$	$x = 4{,}25$	$4{,}25 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
4	+	+	+	+	+
$4{,}15 - x$	+	0	–	–	–
$(5-x)^2$	+	+	+	0	+
VL	+	0	–	odef	–

Vi ville att uttrycket skulle vara negativt eller noll, vilket det är från och med 4,25 fram till 5, samt efter 5.

$\boxed{\textit{Svar: } 4{,}25 \le x < 5 \;\vee\; x > 5}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Förenkla rationella uttryck[. . .] • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. • Använda och tolka teckentabeller. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Övning 9.9–11.

Rättningsnorm: Visat att man förstår hur man bör skriva om olikheten: 1p. Visat att man förstår hur man analyserar det omskrivna uttrycket: 1p (även om själva omskrivningen var felaktig). Visat att man kan se vilket svar man kommit fram till: 1p.

7. (a) Din kompis har löst en rotekvation, och konstaterar att en av de två lösningar hen räknat fram inte stämmer i ekvationen, och vill ha din hjälp att hitta felet i beräkningen.

> ”Det är inte säkert att det är fel räknat,” säger du. ”Det kan vara en falsk rot.”
> ”Vad är det?” säger kompisen.

Förklara för kompisen **vad** en falsk rot är, och **varför** man kan få sådana då man löser ekvationer med kvadratrötter i. (2p)

Lösning:

Uppgiften är till innehållet identisk med rekommenderad uppgift 8.11, men ställer lite högre krav på formuleringsförmågan.

”En falsk rot, det är en lösning som inte stämmer i ursprungsekvationen därför att man på vägen gjort något som gav en ny ekvation med fler lösningar än den man började med. Som här, där du kvadrarar. Två tal kan vara olika men ändå ha samma kvadrat Kvadrerar man leden i en ekvation så kommer allt som var lösningar innan dess fortfarande att vara lösningar, men finns det några tal som gör vänsterledet lika med minus högerledet i den okvadrerade så kommer de nu också att vara lösningar i den kvadrerade. Och fortsätter du räkna så står du där med några lösningar som inte stämmer.”

(b)

> ”OK,” säger kompisen. ”Jag hade tänkt be dig om hjälp med den här andragradaren också. Men det kanske är en falsk rot det här med?”
> ”Nej,” säger du. ”Om du löst en vanlig andragradsekvation med hjälp av kvadratkomplettering så är enda förklaringen om svaret inte stämmer att du räknat fel någonstans.”
> ”Varför då?” säger kompisen.

Förklara varför kvadratkomlettering inte kan ge falska rötter. (1p)

Lösning:

”Titta på de operationer du använder då du kvadratkompletterar. Du adderar, subtraherar, bryter ut, och så skriver du om med kvadreringsregel och konjugatregel. Alla de operationerna kan man backa; man kan inte råka ut för att något som inte var en lösning innan man gjorde det plötsligt är en lösning efter.”

Referenser: Bland annat: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Ekvation • Lösning, lösningsmängd • Falsk rot; Du ska kunna göra följande: • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. • Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges). • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck[...] • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 8.11.

Rättningsnorm: Uppgiften får i viss mån bedömas som en helhet. För full poäng krävs att förklaringen är korrekt och sådan att en ”kompis” skulle ha möjlighet att förstå den.

Observera att förklaringarna ska vara sådana att kompisen kan förstå.

8. $f(x) = 5{\cdot}x^2 - 14{\cdot}x + 10$. Bestäm f:s värdemängd. (3p)

Obs! Derivataresonemang får ej användas.

Lösning:

Värdemängden för en andragradsfunktion kan läsas ut ur den kvadratkompletterade formen;

$$\begin{aligned} f(x) &= 5{\cdot}x^2 - 14{\cdot}x + 10 \\ &= 5{\cdot}(x^2 - \tfrac{14}{5}{\cdot}x + 2) && \text{Bryt ut} \\ &= 5{\cdot}(x^2 - 2{\cdot}\tfrac{7}{5}{\cdot}x + (\tfrac{7}{5})^2 - (\tfrac{7}{5})^2 + 2) && \text{Kvadratkomplettera} \\ &= 5((x - \tfrac{7}{5})^2 - \tfrac{49}{25} + \tfrac{2\cdot 25}{25}) && \text{Skriv som kvadrat; kvadrera; förläng} \\ &= 5((x - \tfrac{7}{5})^2 + \tfrac{1}{25}) && \text{Lägg ihop} \\ &= 5(x - \tfrac{7}{5})^2 + 5{\cdot}\tfrac{1}{25} && \text{Multiplicera in} \\ &= 5(x - \tfrac{7}{5})^2 + \boxed{\tfrac{1}{5}} \end{aligned}$$

Det lägsta värde kvadratuttrycket kan anta är noll (vilket det blir för $x = 7/5$), och då blir hela uttryckets värde $1/5$. För alla andra värden på x blir uttryckets värde större än så, och det kan göras hur stort som helst genom att man stoppar in tillräckligt stora x. Så värdemängden är allt från och med $1/5$ och uppåt.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = [1/5, \infty) = \{\, y \mid y \geq 1/5 \,\}}$

Kommentar: Om en andragradsfunktion har nollställen så ger symmetrin att extrempunkten befinner sig mitt emellan nollställena. Detta är dock oanvändbart i det här fallet, eftersom nollställen saknas. (Det förbjudna derivataresonemanget är att man tar fram derivatan – tangentens lutning – och utnyttjar att i den punkt där kurvan vänder måste lutningen vara noll.)

Referenser: • Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Värdemängd; Du ska kunna göra följande:Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges). • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. Övning 6.17.

Rättningsnorm: Kvadratkomplettering: 2p. Värdemängd konsistent med beräkningen: 1p. 0p för svar ur värdetabell med heltal.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag*

2021.06.08 14:30–17:30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Ange för varje påstående nedan om det är sant eller falskt:

(a) Noll är ett jämnt tal

(b) Noll är ett positivt tal

(c) $\sqrt{4} = \pm 2$

(d) $-9^2 = -81$

(e) $[\,5, 6\,]$ innehåller exakt två tal

(f) $\{\,5, 6\,\}$ innehåller exakt två tal

(g) $\pi \in \mathbb{Q}$

(h) $3{,}14 \in \mathbb{R}$

(i) Nollpolynomet har grad noll

För varje delfråga gäller att rätt svar ger $+1/3$ poäng, fel svar ger $-1/3$ poäng, och inget svar ger 0 poäng. Delpoängen summeras och avrundas till närmsta ickenegativa heltal. Motivering behövs ej. (3p)

Förtydligande: På fråga (e) är det hakparenteser, på fråga (f) är det ”måsvingeparenteser”.

Lösning:

Svar inklusive motivering.

(a) $\boxed{\text{Sant}}$ Ett tal är jämnt om det kan skrivas som två gånger ett heltal, och eftersom $0 = 2{\cdot}0$ uppfyller noll detta.

(b) $\boxed{\text{Falskt}}$ Ett tal är positivt om det är *större* än noll, och noll är inte större än sig självt.

(c) $\boxed{\text{Falskt}}$ ”Roten ur” definieras som ”det *icke-negativa* tal som i kvadrat är…”, $\sqrt{4} = 2$ och inget annat.

(d) $\boxed{\text{Sant}}$ Potenser har högre prioritet än minustecken, så man ska kvadrera nio och därefter byta tecknet.

(e) $\boxed{\text{Falskt}}$ Ett intervall innehåller alla reella tal *mellan* ändpunkterna, och det finns oändligt många (icke-hela) tal mellan 5 och 6.

(f) $\boxed{\text{Sant}}$ Detta är en mängd, och den innehåller de uppräknade objekten och inget annat.

(g) $\boxed{\text{Falskt}}$ $\mathbb{Q}$ är de rationella talen, tal som kan skrivas som kvot mellan två heltal, tal som har periodisk decimalutveckling. π är inte rationellt.

(h) $\boxed{\text{Sant}}$ 3,14 ligger på tallinjen.

(i) $\boxed{\text{Falskt}}$ Alla konstanta polynom *utom* nollpolynomet har grad noll. Nollpolynomet har så helt andra egenskaper än övriga polynom att det inte tilldelas någon grad.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Mängd • Heltal, rationellt tal, reellt tal • $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ • Intervall • Positivt tal, negativt tal • Grad; Du ska kunna göra följande: • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt.

Rättningsnorm: Pluspoäng för korrekta svar, minuspoäng för felaktiga. Svar som man inte kan begripa vad de antas betyda alternativt vilken uppgift de hör till får noll poäng.

2. Förenkla följande uttryck maximalt. Utgå från att alla talen är positiva.

$$\frac{(\sqrt{r}\cdot s)^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot\sqrt[3]{s^{-1}\cdot t^4}}$$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.10(f) med utbytta variabelnamn.

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{r}\cdot s)^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot\sqrt[3]{s^{-1}\cdot t^4}} &= \frac{(r^{1/2}\cdot s)^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot(s^{-1}\cdot t^4)^{1/3}} && \sqrt[n]{a}=a^{1/n}\\
&= \frac{(r^{1/2})^{1/4}\cdot s^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot(s^{-1})^{1/3}\cdot(t^4)^{1/3}} && (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n\\
&= \frac{r^{(1/2)\cdot(1/4)}\cdot s^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot s^{-1\cdot(1/3)}\cdot t^{4\cdot(1/3)}} && (a^m)^n=a^{m\cdot n}\\
&= \frac{r^{1/8}\cdot s^{1/4}\cdot t^{-2/3}}{r^2\cdot s^{-1/3}\cdot t^{4/3}} && \text{Bråkräkning}\\
&= \frac{s^{1/3}\cdot s^{1/4}}{r^2\cdot r^{-1/8}\cdot t^{4/3}\cdot t^{2/3}} && a^{-n}=1/a^n\\
&= \frac{s^{1/3+1/4}}{r^{2-1/8}\cdot t^{4/3+2/3}} && a^m\cdot a^n=a^{m+n}\\
&= \frac{s^{4/12+3/12}}{r^{16/8-1/8}\cdot t^{6/3}} && \text{Bråkräkning}\\
&= \boxed{\frac{s^{7/12}}{r^{15/8}\cdot t^2}} && \text{Bråkräkning}
\end{aligned}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll).

3. Din kompis lillebror, som pluggar till nationella provet i matematik 4, har på ett illegalt erhållet gammalt prov hittat en fråga som handlar om att lösa en ekvation genom att rita upp problemet med hjälp av miniräknaren. Tyvärr har han inget illegalt facit, och kan därför inte kontrollera hur det var meningen att man ska göra.

Förklara för lillebrodern hur man löser ekvationer grafiskt.

- Vad är det man ska rita?
- Vad är det man ska titta efter i bilden?
- Varför får man fram svaret på frågan genom att göra detta?

Observera att lillebrodern ska kunna förstå förklaringen! (3p)

Lösning:

”Då du löser en ekvation *vänster-led-som-innehåller-x* = *höger-led-som-innehåller-x*, då söker du ju de tal som, om man sätter in dem på x:s plats i de två leden, ger samma värde. Om du ritar kurvan y = *vänster-led-som-innehåller-x* så har du ritat vilket värde vänsterled får för olika värden på x; det är vad y-värdet är. Och gör du samma sak med *y = höger-led-som-innehåller-x* så får du högerledets värde. När de värdena är lika så går kurvorna ihop. Så du ska titta efter var kurvorna skär eller tangerar varandra; där har du ett *x*-värde som ger samma resultat i båda led.”

Kommentar 1: Uppgiften är inspirerad av verkliga händelser, både det att det finns spridda illegala nationella prov, att den här typen av uppgift ibland finns med på de nationella proven och att det inte är alla som fått lära sig det i undervisningen.

Kommentar 2: Notera alltså att frågan handlar om en *ekvation*, något med en obekant och ett likhetstecken, och problemställningen ”för vilka värden på den obekanta är det som står här sant?”. Många av svaren beskrev istället hur man studerar en funktions egenskaper, vilket också är bra att kunna men inte det som frågan handlade om.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Funktion • Ekvation • Lösning, lösningsmängd; Du ska kunna göra följande: • Tolka en ekvation grafiskt; Uppgift 8.3, och alla uppgifter där det ingår att rita upp problemet och jämföra med den beräknade lösningen.

Rättningsnorm: Lösningen som svarar på alla tre punkterna och är sådan att den verkar begriplig för en gymnasist: 3p. 3 av dessa saker: 2p. 2 eller 1 sak: 1p.

4. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\left(\frac{9}{14}+\frac{4}{21}\right)\Big/\frac{25}{12}-\frac{1}{10} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Läsbarheten ökar om man byter till horisontella bråkstreck. Division går före subtraktion, om inte parenteser ingriper:

Skriv horisontellt:

$$\left(\frac{9}{14}+\frac{4}{21}\right)\Big/\frac{25}{12}-\frac{1}{10}=\frac{\frac{9}{14}+\frac{4}{21}}{\frac{25}{12}}-\frac{1}{10}$$

Täljaren:

$$\frac{9\cdot 3}{14\cdot 3}+\frac{4\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{27+8}{42}=\frac{35}{42}=\frac{5\cdot\cancel{7}}{6\cdot\cancel{7}}=\frac{5}{6}$$

Dubbelbråket

$$\frac{\frac{9}{14}+\frac{4}{21}}{\frac{25}{12}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{25}{12}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{25}=\frac{\cancel{5}\cdot 2\cdot\cancel{6}}{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{5}}=\frac{2}{5}$$

Helheten:

$$\left(\frac{9}{14}+\frac{4}{21}\right)\Big/\frac{25}{12}-\frac{1}{10}=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 2}-\frac{1}{10}=\frac{4-1}{10}=\boxed{\frac{3}{10}}$$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan de olika stegen i varje deluträkning.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel; att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheter under gång räknas dock som ”synden straffar sig själv”.

5. (a) Förklara varför man kan vara säker på att ett polynom med udda grad har minst ett nollställe. (Utgå från att vi räknar med reella värden.) (1p)

Lösning:

För x långt från noll är den term som har högst grad helt dominerande. (Om $x = 1000$ så är $x^2 = 1\,000\,000$ och $x^3 = 1\,000\,000\,000$, t.ex.) Så utzoomat ser $y = a_n{\cdot}x^n + a_{n-1}{\cdot}x^{n-1} + \cdots + a_1{\cdot}x + a_0$ ungefär som $y = a_n{\cdot}x^n$. Och $x^{\text{udda tal}}$ är positiv för positiva x och negativ för negativa. Så ena ändan på kurvan har positiva y-värden och andra ändan negativa. Eftersom en sådan här kurva är sammanhängande måste den passera noll någonstans på vägen mellan positivt och negativt.

(Behövs inte ett så här utförligt svar; något som tyder på att man förstår principen räcker.)

Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”positivt i ena ändan och negativt i andra” får poäng.

(b) Är $x - 5$ en faktor i $p(x) = x^3 - 3{\cdot}x^2 - 13{\cdot}x + 16$? Motivera noga. (2p)

Lösning:

Snabbt: OM $x - 5$ är en faktor SÅ är 5 ett nollställe. OM ett polynom med heltalskoefficienter (vilket detta har) har ett heltalsnollställe SÅ är detta heltal en faktor i konstanttermen. Konstanttermen är 16, och 5 är **inte** en faktor i detta tal.

Mellan: OM $x - 5$ är en faktor SÅ är 5 ett nollställe. Vi sätter in 5 på x:s plats och ser vad vi får:

$$p(5) = 5^3 - 3{\cdot}5^2 - 13{\cdot}5 + 16 = 125 - 3{\cdot}25 - 65 + 16 = 125 - 75 - 65 + 16 = 1 \neq 0$$

Det blev **inte** noll.

Långsam: OM $x - a$ är en faktor SÅ ska vi få rest noll om vi dividerar. Gör det:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2{\cdot}x - 3 \\
\hline
x - 5 & x^3 - 3{\cdot}x^2 - 13{\cdot}x + 16 \\
 & -(x^3 - 5{\cdot}x^2) \\
\cline{2-2}
 & \quad 2{\cdot}x^2 - 13{\cdot}x \\
 & \quad -(2{\cdot}x^2 - 10{\cdot}x) \\
\cline{2-2}
 & \qquad -3{\cdot}x + 16 \\
 & \qquad -(-3{\cdot}x + 15) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 1
\end{array}$$

Vi fick **inte** resten noll.

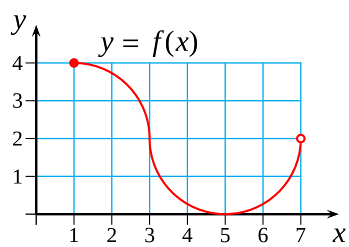
Ogörligt: Försök att förutsättningslöst faktorisera polynomet, för att sedan se om någon av faktorerna råkar vara $x - 5$. Detta var svårare än vad mitt (svindyra) matematikprogram klarar av att göra, så jag kan inte skriva in denna lösning (som teoretiskt sett fungerar). Med numeriska metoder finner man att nollställena till polynomet på ett ungefär är $-3{,}0309$, $1{,}06252$ och $4{,}9684$, så 5 är nära ett nollställe men inte exakt där.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Nej}}$

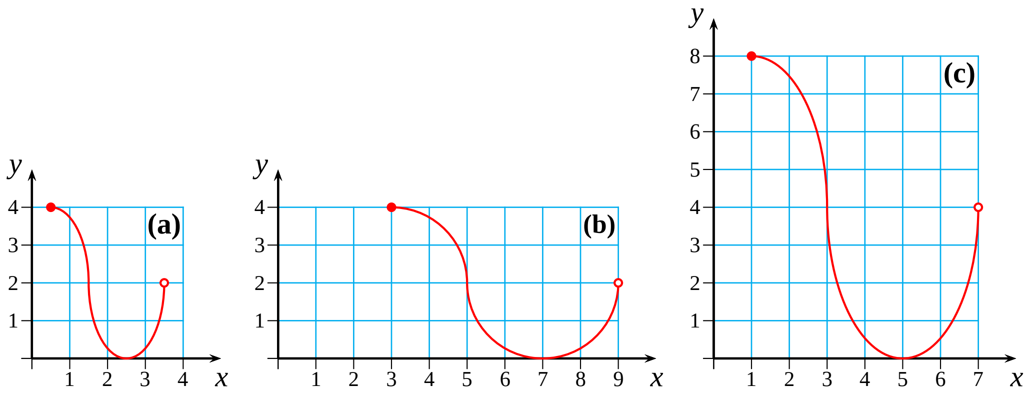
Referenser: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter.

Rättningsnorm: 1p för korrekt använd metod, 1p för slutsats konsistent med resultatet.

6. Här bredvid finns kurvan $y = f(x)$. Nedan finns tre bilder, och under dem 8 formler. Ange för var och en av bilderna vilken av formlerna kurvan motsvarar, och motivera med ungefär en mening hur du såg detta.



En poäng per deluppgift. (3p)



(i) $y = f(x) + 2$ **(ii)** $y = f(x) - 2$ **(iii)** $y = f(x + 2)$ **(iv)** $y = f(x - 2)$

(v) $y = 2 \cdot f(x)$ **(vi)** $y = f(x)/2$ **(vii)** $y = f(2 \cdot x)$ **(viii)** $y = f(x/2)$

Lösning:

Baklängesvariant av rekommenderad uppgift 4.18.

(a) Hoptryckt till halva bredden – allt händer dubbelt så fort: $y = f(2 \cdot x)$. $\boxed{\text{vii}}$

(b) Flyttat två steg åt höger – allt händer två enheter senare än förut: $y = f(x - 2)$. $\boxed{\text{iv}}$

(c) Utdragen till dubbla höjden – det händer dubbelt så mycket: $y = 2 \cdot f(x)$. $\boxed{\text{v}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c \cdot x)$ och $y = c \cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt.

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering ger poäng.

7. Bestäm medelpunkt och radie på nedanstående cirkel:

$$x^2 + y^2 + 20 \cdot x - 40 \cdot y = 9500 \qquad (3p)$$

Se till att det klart framgår vad svaret är!

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r har ekvationen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, så vi får skriva om den givna ekvationen till det formatet, vilket vi gör med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 20 \cdot x - 40 \cdot y &= 9500 \\
x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x + 10^2 + y^2 - 2 \cdot 20 \cdot y + 20^2 &= 9500 + 10^2 + 20^2 \\
(x + 10)^2 + (y - 20)^2 &= 9500 + 100 + 400 \\
(x + 10)^2 + (y - 20)^2 &= 10\,000 \\
(x - (-10))^2 + (y - 20)^2 &= 100^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Medelpunkt: } (-10, 20)\text{; radie: } 100 \text{ l.e.}}$

Obs! Ekvationen kan inte förenklas till $(x + 10) + (y - 20) = 100$ genom att man ”stryker tvåorna”. Denna nya ekvation motsvarar en rät linje, vilket inte är samma sak som en cirkel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.23

Rättningsnorm: *Helt* rätt: 3p. Nästan helt rätt: 2p (och ”skrivit om till linje räknas in i det här alternativet). Åtminstone visat att man förstår vad uppgiften går ut på: 1p.

8. Funktionen f beräknas enligt $f(x) = \sqrt{(\frac{3}{4} + x) \cdot (x - \frac{4}{5}) \cdot (\frac{5}{6} - x)}$.
Bestäm f:s definitionsmängd. (3p)

Lösning:

Den i uppgiften erhållna olikheten är rekommenderad uppgift 9.9(e).

Om inget annat sägs så är definitionsmängden den största mängd som inte innehåller något som ger resultatet ERROR om man försöker mata in det i beräkningen. Addition, subtraktion och multiplikation går att göra med alla tal, men kvadratrot fungerar bara på ickenegativa (reella) tal. Så definitionsmängden är lika med lösningsmängden till olikheten

$$0 \leq (\tfrac{3}{4} + x)\cdot(x - \tfrac{4}{5})\cdot(\tfrac{5}{6} - x)$$

Eftersom högerledet redan är faktoriserat kan man gå direkt på teckenanalys. Första faktorn byter tecken då $x = -3/4$, andra då $x = 4/5$ och tredje då $x = 5/6$. Dessa tal ligger i ordningen $-3/4$, $4/5$, $5/6$ på tallinjen. Tabell:

	$x < -3/4$	$x = -3/4$	$-3/4 < x < 4/5$	$x = 4/5$	$4/5 < x < 5/6$	$x = 5/6$	$x > 5/6$
$\frac{3}{4} + x$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x - \frac{4}{5}$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$\frac{5}{6} - x$	+	+	+	+	+	0	$-$
HL	+	0	$-$	0	+	0	$-$

Notera att det inte är något problem om *faktorerna* är negativa så länge *produkten* av dem inte är negativ, eftersom det är produkten som man drar roten ur. Vänster om $-3/4$ är t.ex. två av faktorerna negativa, men helheten positiv.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = \{\, x \mid x \leq -3/4 \vee 4/5 \leq x \leq 5/6 \,\}}$

Kommentar: Ganska vanligt på den här typen av uppgifter är att börja med att multiplicera ihop alla parenteserna, och sedan lägga en timme och ett antal sidor papper på att faktorisera det hela igen. Detta är onödigt!

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd • Rot; Du ska kunna göra följande: • Bestämma definitionsmängden för en enkel funktion ur beräkningsformeln. • Använda och tolka teckentabeller. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Övning 4.16, övning 9.9

Rättningsnorm: Insett att man ska lösa olikheten: 1p. Löst den korrekt: +2p. Gjort något som är till största delen korrekt: +1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2021.08.17 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Anta att vi vet att $a < b$. Vad kan vi dra för slutsatser om förhållandet mellan

(a) a^2 och b^2?

(b) a^3 och b^3?

(c) $\sqrt{a}$ och $\sqrt{b}$?

(d) 2^a och 2^b?

(e) $0{,}5^a$ och $0{,}5^b$?

(f) a^{-1} och b^{-1}?

Motivering krävs ej. 6 rätt: 3p; 4–5 rätt: 2p; 1–3 rätt: 1p. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.3. Vi tar motiveringar.

(a) $\boxed{\text{Går inte att säga}}$ Om vi dessutom vet att talen är *positiva* vet vi att $a^2 < b^2$, men är båda negativa blir det tvärtom, och har de olika tecken kan vad som helst hända.

(b) $\boxed{a^3 < b^3}$ eftersom kubikkurvan lutar uppåt överallt.

(c) $\boxed{\sqrt{a} < \sqrt{b}}$ förutsatt att uttrycken är definierade (samma motivering).

(d) $\boxed{2^a < 2^b}$ (samma motivering).

(e) $\boxed{0{,}5^a > 0{,}5^b}$ (för den kurvan lutar neråt).

(f) $\boxed{\text{Går inte att säga}}$ $a^{-1} > b^{-1}$ om talen har samma tecken, $a^{-1} < b^{-1}$ om talen har olika tecken. Odefinierat om något av dem är 0.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Tolka en olikhet grafiskt. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Svar som inte går att tolka och svar som det inte går att förstå vilken deluppgift de hör till får 0p.

2. **(a)** Förklara vad det är för skillnad på innebörden i symbolerna $\Leftrightarrow$ och $=$. (1p)

(b) Vilken av de två symbolerna passar i rutan nedan?

$$x > -2 \ \boxed{}\ 2 > -x \qquad (1p)$$

(c) Förklara varför den andra av symbolerna inte kan användas här. (1p)

Lösning:

(a) $\Leftrightarrow$, *ekvivalenspil*, sätts mellan två utsagor som alltid har samma sanningshalt; är den vänstra sann så är den högra också sann, är den vänstra falsk så är den högra också falsk.

$=$, *likhetstecknet*, sätts mellan två uttryck som motsvarar samma ”grej”, t.ex. samma tal (eller samma mängd, eller samma funktion, eller ...). Om det som står till vänster motsvarar talet 4 så ska det till höger också motsvara talet 4.

Rättningsnorm: Poäng om det förefaller som att författaren förstått skillnaden, även om det är illa formulerat.

(b) Ekvivalenspilen. Om det är sant att talet x är större än talet -2 så kommer det också att vara sant att talet 2 är större än talet minus x.

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel; motivering behövs ej.

(c) I så fall har vi skrivit ”talet x är större än två som är samma tal som minus två som är större än talet minus x”. Då påstår vi bland annat att två och minus två är samma tal! Det är de inte.

Kommentar: Många av svaren påpekar att man inte sätter likhetstecken mellan utsagor, vilket är sant. Men det är helt lagligt att skriva t.ex $4+5 > 4+4 = 8 > 7$ om man skulle vilja det. Det tolkas som en konjunktion av de tre (sanna) utsagorna $4+5 > 4+4$, $4+4 = 8$ och $8 > 7$. Problemet här var att man får en falsk utsaga i mitten om man petar in ett likhetstecken.

Rättningsnorm: Se (a).

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen $=$, $\Rightarrow$ och $\Leftrightarrow$ korrekt. Övning 8.4.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{(3/5)/4}{3/(5/4)} + \frac{7/(8\cdot 6)}{(7/8)\cdot 6} \qquad (3p)$$

Lösning:

Det verkar handla om att kunna tolka parenteser korrekt...

Första täljaren:

$$(3/5)/4 = \frac{3}{5}\Big/4 = \frac{3}{5\cdot 4}$$

Första nämnaren:

$$3/(5/4) = 3\Big/\frac{5}{4} = 3\cdot\frac{4}{5} = \frac{3\cdot 4}{5}$$

Första termen:

$$\frac{(3/5)/4}{3/(5/4)} = \frac{\frac{3}{5\cdot 4}}{\frac{3\cdot 4}{5}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}\cdot 4}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot 4} = \frac{1}{16}$$

Andra täljaren:

$$7/(8{\cdot}6) = \frac{7}{8{\cdot}6}$$

Andra nämnaren:

$$(7/8){\cdot}6 = \frac{7}{8}{\cdot}6 = \frac{7{\cdot}6}{8}$$

Andra termen:

$$\frac{7/(8{\cdot}6)}{(7/8){\cdot}6} = \frac{\dfrac{7}{8{\cdot}6}}{\dfrac{7{\cdot}6}{8}} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}{\cdot}6}\cdot\frac{\cancel{8}}{\cancel{7}{\cdot}6} = \frac{1}{36}$$

Summan:

$$\frac{(3/5)/4}{3/(5/4)} + \frac{7/(8{\cdot}6)}{(7/8){\cdot}6} = \frac{1}{16} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4{\cdot}4} + \frac{1}{4{\cdot}9} = \frac{9}{4{\cdot}4{\cdot}9} + \frac{4}{4{\cdot}4{\cdot}9} = \frac{9+4}{144} = \boxed{\frac{13}{144}}$$

Man kan också angripa dubbelbråken genom att multiplicera med den gemensamma nämnaren för täljare och nämnare, enligt

$$\frac{\dfrac{3}{5{\cdot}4}{\cdot}20}{\dfrac{3{\cdot}4}{5}{\cdot}20} + \frac{\dfrac{7}{8{\cdot}6}{\cdot}48}{\dfrac{7{\cdot}6}{8}{\cdot}48} = \frac{\dfrac{3{\cdot}\cancel{20}}{\cancel{20}}}{\dfrac{3{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}\cancel{5}}{\cancel{5}}} + \frac{\dfrac{7{\cdot}\cancel{48}}{\cancel{48}}}{\dfrac{7{\cdot}6{\cdot}6{\cdot}\cancel{8}}{\cancel{8}}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}{\cdot}16} + \frac{\cancel{7}}{\cancel{7}{\cdot}36}$$

och så fortsätter man enligt ovanstående.

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan de olika stegen i varje deluträkning, däremot inte mellan de separata deluträkningarna.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel; att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel (men vi drar bara 1p även för flera stycken fel av den typen). Att inte utnyttja förkortningsmöjligheter under gång räknas som ”synden straffar sig själv”. *Den faktiska rättningen blev lite ”snällare” än så här, och blev mer ”hur stor andel av den korrekta lösningen har man fått ihop?”.*

4. Lös ekvationen $1 - \frac{1}{2}{\cdot}x = \sqrt{5-x}$ (3p)

Lösning:

Starta med att kvadrera, för att få bort rottecknet.

$$\begin{aligned}
1 - \tfrac{1}{2}{\cdot}x &= \sqrt{5-x} && \\
(1 - \tfrac{1}{2}{\cdot}x)^2 &= (\sqrt{5-x})^2 && \text{Kvadrera; \textit{kolla svaren!}} \\
1 - 2{\cdot}\tfrac{1}{2}{\cdot}x + (\tfrac{1}{2}{\cdot}x)^2 &= 5 - x && \text{Utveckla (kvadreringsregel)} \\
1 - x + \tfrac{1}{4}{\cdot}x^2 &= 5 - x && \text{Förenkla} \\
4 - 4{\cdot}x + x^2 &= 20 - 4{\cdot}x && \text{Fyrdubbla} \\
x^2 &= 16 && \text{"Flytta över"} \\
x &= \pm\sqrt{16} && \text{Glöm inte } \pm! \\
x &= \pm 4 &&
\end{aligned}$$

Kvadrering använd, så kontrollera lösningarna i ursprungsekvationen:

$$x = 4: \begin{cases} \text{VL} = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 1 - 2 = -1 \\ \text{HL} = \sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1 \end{cases} \qquad \text{VL} \neq \text{HL}$$

$$x = -4: \begin{cases} \text{VL} = 1 - \tfrac{1}{2}\cdot(-4) = 1 + 2 = 3 \\ \text{HL} = \sqrt{5-(-4)} = \sqrt{9} = 3 \end{cases} \qquad \text{VL} = \text{HL}$$

4 stämmer inte i ursprungsekvationen, utan är en *falsk rot* som uppkom vid kvadreringen. Notera att även om vänster och höger led får olika värde så har de samma kvadrat, så 4 är en lösning till den kvadrerade ekvationen (men inte till ursprungsekvationen).

$\boxed{\textit{Svar: } x = -4}$

Kommentar: De allra flesta felen i de inlämnade lösningarna låg mellan det som här är andra och tredje raden: i kvadreringen. Se till så att ni kan kvadreringsreglerna!

Notation: Här ska man *inte* ha likhetstecken mellan stegen; värdet i början på en rad är i de flesta fallen inte samma som värdet i slutet på föregående. Vill man ha en symbol så går implikationspil och ekvivalenspil bra. I första steget måste det då vara en implikationspil, eftersom det är möjligt att det på andra raden är sant (vilket det är för $x = 4$) utan att det på första raden är det. Dessa utsagor är alltså inte ekvivalenta.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Övning 8.23–24.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone börjat rätt: 1p. Mellanting: 2p.

5. Studera uttrycket $\dfrac{2\cdot x^4 - x^3}{0{,}25\cdot x - x^3}$

(a) Förkorta uttrycket maximalt. (2p)

(b) Ange för vilket/vilka x förkortningen inte är giltig. (1p)

Lösning:

(a) Förkortning fordrar faktorisering:

$$\begin{aligned} \frac{2\cdot x^4 - x^3}{0{,}25\cdot x - x^3} &= \frac{(2\cdot x - 1)\cdot x^3}{(0{,}25 - x^2)\cdot x} && \text{Bryt ut} \\ &= \frac{2\cdot(x-0{,}5)\cdot x^2\cdot \cancel{x}}{(0{,}5+x)\cdot(0{,}5-x)\cdot\cancel{x}} && \text{Bryt ut, bryt upp, konjugatregel, ”stryk”} \\ &= \frac{-2\cdot\cancel{(0{,}5-x)}\cdot x^2}{(0{,}5+x)\cdot\cancel{(0{,}5-x)}} && \text{”Vänd” tecken, ”stryk”} \\ &= \boxed{-\frac{2\cdot x^2}{0{,}5+x}} \end{aligned}$$

Kommentar: Det var många skrivande som förkortade bort den gemensamma termen x^3 från täljare och nämnare. Observera att man bara kan förkorta bort gemensamma faktorer, dvs. saker som man ”gångrat” med.

(b) Bråkförlängnings/förkortning är giltig förutsatt att faktorn som man förlänger eller förkortar med inte är noll; $a/b = (a\cdot c)/(b\cdot c)$ förutsatt att $c \neq 0$. Så här krävs att $x \neq 0$ och att $0{,}5 - x \neq 0$, dvs. att $x \neq 0{,}5$.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Förkortningarna är giltiga om } x \notin \{\,0, 0{,}5\,\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [...] bryta ut gemensamma faktorer. • Förenkla rationella uttryck och kunna ange under vilka omständigheter förenklingarna är giltiga. Metod 7.5, övning 7.20

Rättningsnorm: (a) Helt rätt: 2p. Slarvfel: 1p. (b) Kan nog bara bli rätt eller fel, men inget avdrag för följdfel.

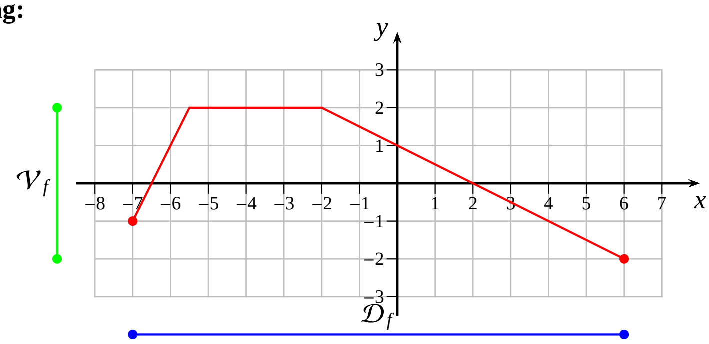
6. Funktionen f definieras enligt $f(x) = \begin{cases} 2\cdot x + 13 & \text{om } x \in [-7;\ -5{,}5) \\ 2 & \text{om } x \in [-5{,}5;\ -2) \\ -0{,}5\cdot x + 1 & \text{om } x \in [-2;\ 6] \end{cases}$

(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat, och använd linjal (eller kanten på skrivningsomslaget) då du ritar. (1p)

(b) Vad har f för definitionsmängd? Motivera! (1p)

(c) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

Lösning:



(a) Kurvan består av tre linjestycken, det ser man på formlerna. Genom att t.ex. räkna ut två punkter på varje linjestycke kan de sedan ritas. Eftersom både start- och slutpunkt enligt formlerna ingår ska kurvan börja och sluta med en fylld blupp.

Rättningsnorm: Systemet måste vara graderat, man måste ha använt någon form av linjal, det måste vara en funktionsgraf och den ska vara någorlunda korrekt för poäng.

(b) Definitionsmängden är alla x-värden som det är meningfullt att stoppa in i beräkningsanvisningarna, vilket är alla tal mellan −7 och 6.

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = \{\, x \mid -7 \le x \le 6 \,\} = [-7,\ 6]}$

Rättningsnorm: Inga avdrag för följdfel, och inte heller för notationsfel så länge det går att se vad som avsågs.

(c) Värdemängden är alla y-värden som beräkningsanvisningarna kan spotta ut, vilket blir allt från lägsta värdet på kurvan, −2, till högsta värdet på kurvan, 2 (eftersom alla värden däremellan finns med).

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{V}_f = \{\, y \mid -2 \le y \le 2 \,\} = [-2,\ 2]}$

Rättningsnorm: Se b.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd • Värdemängd • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. • Rita en rät linje[...]. Övning 4.12, 4.21.

7. Faktorisera följande andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering:

$$-3\cdot x^2 + 2\cdot x + 8 \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.17 med utbytt variabelnamn.

$$\begin{aligned} &-3\cdot x^2 + 2\cdot x + 8 \\ &\quad = -3\cdot(x^2 - \tfrac{2}{3}\cdot x - \tfrac{8}{3}) && \text{Bryt ut} \\ &\quad = -3\cdot(x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{3}\cdot x + (\tfrac{1}{3})^2 - (\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{8}{3}) && \text{Kvadratkomplettera} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -3\cdot((x-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{8\cdot 3}{3\cdot 3}) && \text{Skriv som kvadrat, kvadrera, förläng}\\
&= -3\cdot((x-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{25}{9}) && \text{Lägg ihop}\\
&= -3\cdot((x-\tfrac{1}{3})^2 - (\tfrac{5}{3})^2) && \text{Skriv som kvadrat}\\
&= -3\cdot((x-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{5}{3})((x-\tfrac{1}{3}) - \tfrac{5}{3}) && \text{Konjugatregeln}\\
&= -3\cdot(x+\tfrac{4}{3})\cdot(x-\tfrac{6}{3}) && \text{Lägg ihop}\\
&= \boxed{-3\cdot(x+\tfrac{4}{3})\cdot(x-2)}
\end{aligned}$$

Kommentar: Många skrivande la till ett ” $= 0$” på uttrycket, och försökte sedan lösa den ekvation de då hade. Man *kan* ta fram faktoriseringen den vägen också, men det är en onödig omväg. ”Faktorisera” är ”skriv det här med gångertecken”.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Utvecklad form, faktoriserad form, kvadratkompetterad form; Du ska kunna göra följande: • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Exempel 6.7. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Använt pq-formeln: 0p. Faktoriserat med något som varken är pq eller kvadratkomplettering: 1p. Annars: Visat att man kan kvadratkomplettering: 1p; räknat rätt: +1p; gått vidare till faktoriserad form: +1p.

8. **(a)** Din kompis löser olikheten $\dfrac{x-3}{x-1} \leq 0$ så här:

$$\begin{aligned}
(x-1)\cdot\frac{x-3}{x-1} &\leq (x-1)\cdot 0\\
x-3 &\leq 0\\
x &\leq 3
\end{aligned}$$

Förklara för kompisen varför detta ger fel svar. (Det räcker inte att visa hur man ska göra, det är nästa uppgift, utan det handlar om att förklara varför denna metod inte ger korrekt svar.) (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.6, tidigare använd 2015.

Exempelvis: ”Om man multiplicerar en olikhet med ett *negativt* tal så ska man vända på olikheten. $x - 1$ kan vara både positivt och negativt, beroende på värdet på x, så efter multiplikationen så vet du inte längre åt vilket håll olikhetstecknet ska vara vänt!”

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. Rekommenderad uppgift.

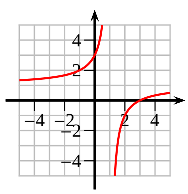
Rättningsnorm: Det måste framgå att problemen är kopplade till tecknet på nämnaren.

(b) Lös olikheten $\dfrac{x-3}{x-1} \leq 0$ på ett *korrekt* sätt. (2p)

Lösning:

Räkningarna är i princip klara; det vi behöver göra är att studera tecknet. Täljaren byter tecken i $x = 3$ och nämnaren i $x = 1$. Teckentabell:

	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$x>3$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-1}$	$+$	odef	$-$	0	$+$



Så innan $x = 1$ är både täljare och nämnare negativa, och kvoten därmed positiv, och efter $x = 3$ är båda positiva och kvoten positiv. Mellan dessa punkter är täljaren negativ och nämnaren positiv, och kvoten därför negativ (vilket vi vill att den ska vara).

Lösningen är alltså $1 < x \leq 3$.

Alternativt kan man använda kompisens metod, men med modifikation:

$\boxed{\text{Fall 1:}}$ $x-1<0$	$\boxed{\text{Fall 2:}}$ $x-1>0$
$(x-1)\cdot\dfrac{x-3}{x-1} \geq (x-1)\cdot 0$	$(x-1)\cdot\dfrac{x-3}{x-1} \leq (x-1)\cdot 0$
$x-3 \geq 0$	$x-3 \leq 0$
$x \geq 3$	$x \leq 3$

Vilket innebär att av talen mindre än 1 kan vi använda de som är minst 3 (och några sådana tal finns inte) och av talen större än 1 kan vi använda de som dessutom är som störst 3. Detta blir talen från 1 till och med 3. (Samma svar men krångligare uträkning.)

Kommentar: Bredvid teckentabellen finns kurvan $y = (x-3)/(x-1)$ utritad. Vi ser att den ligger ovanför x-axeln (så att y-värdena är positiva) fram till $x = 1$, där den börjar om nerifrån för att passera x-axeln vid $x = 3$. y-värdena är icke-positiva från 1 till och med 3. Bilden stämmer överens med den korrekta lösningen (men inte med kompisens lösning). Uppgiften är, i likhet med alla ”din kompis”-uppgifter inspirerad av ett mycket vanligt förekommande resonemangsfel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Använda och tolka teckentabeller. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Exempel 9.3, övning 9.9.

Rättningsnorm: Löst olikheten och klart angett vad som är lösningsmängden: 2p. 1p för till största delen korrekt lösning.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2021.09.29 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{2}{3} + \frac{30}{49}\Big/\frac{45}{14} - \frac{6}{7} \qquad (3p)$$

Lösning:

Prioritet: divisionen i mitten går före additionen och subtraktionen, så skrivet med horisontella bråkstreck är uttrycket:

$$\frac{2}{3} + \frac{\frac{30}{49}}{\frac{45}{14}} - \frac{6}{7}$$

Vill man använda enbart sneda bråkstreck så blir det så här:

$$2/3 + (30/49)/(45/14) - 6/7$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{30}{49}}{\frac{45}{14}} = \frac{30}{49}\cdot\frac{14}{45} = \frac{2\cdot\cancel{15}\cdot 2\cdot\cancel{7}}{7\cdot\cancel{7}\cdot 3\cdot\cancel{15}} = \frac{4}{21}$$

(Om man inte utnyttjar möjligheterna till förkortning blir det hela ganska arbetsamt. Det förenklar att förenkla!) Alternativt förlänger man med minsta gemensamma nämnare för både täljare och nämnare: $98 = 2\cdot 49 = 7\cdot 14$, vilket får bråket att platta ut sig:

$$\frac{\frac{30}{49}}{\frac{45}{14}} = \frac{\frac{30}{49}\cdot 98}{\frac{45}{14}\cdot 98} = \frac{\frac{30\cdot 2\cdot\cancel{49}}{\cancel{49}}}{\frac{45\cdot 7\cdot\cancel{14}}{\cancel{14}}} = \frac{2\cdot\cancel{15}\cdot 2}{3\cdot\cancel{15}\cdot 7} = \frac{4}{21}$$

Helheten:

$$\frac{2}{3} + \frac{\frac{30}{49}}{\frac{45}{14}} - \frac{6}{7} = \frac{2\cdot 7}{3\cdot 7} + \frac{4}{21} - \frac{6\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{14+4-18}{21} = \frac{0}{21} = \boxed{0}$$

Vanlig felräkning: Om man räknat som om det varit en parentes runt addition och en runt subtraktionen så ska man få svaret 376/693. (Detta svar är alltså fel, och motsvarar en felaktighet i lösningen.)

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan de olika stegen i varje deluträkning, däremot inte mellan de separata deluträkningarna. Vitsen med det hela är ju att alla versioner motsvarar samma tal, de är *lika med* varandra. Pilar är direkt felaktigt.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel; att ta fel på prioritet *är* ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheter under gång räknas som ”synden straffar sig själv”.

2. (a) Illustrera begreppet *disjunkta mängder* med hjälp av Venndiagram. (1p)

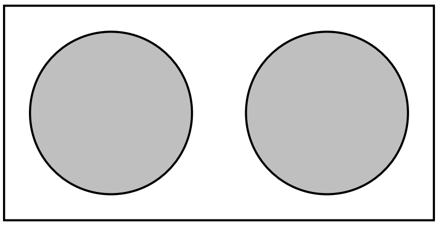
Vi har intervallen $A = [-1{,}5;\ 2]$ och $B = \{\, x \mid -2 < x < 1{,}5 \,\}$.

(b) Vad är $A \cup B$? Ge svaret med intervallnotation (på samma sätt som intervall A är angett). (1p)

(c) Vad är $A \cap B$? Ge svaret med mängdnotation (på samma sätt som intervall B är angett). (1p)

Lösning:

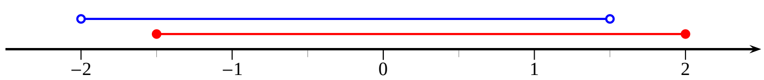
(a) Halva rekommenderade uppgift 1.13. Disjunkta mängder är mängder som inte har något gemensamt; Venndiagram är den typ av bilder där man representerar mängder med slutna kurvor. En ram (”universum”) med två icke-överlappande ringar bör visa begreppet:



Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Disjunkta mängder. Rekommenderad uppgift!
Rättningsnorm: Två åtskilda potatisar (även utan ram) ger poäng.

De nästföljande uppgifterna underlättas av en bild:

A nertill i rött, B upptill i blått.



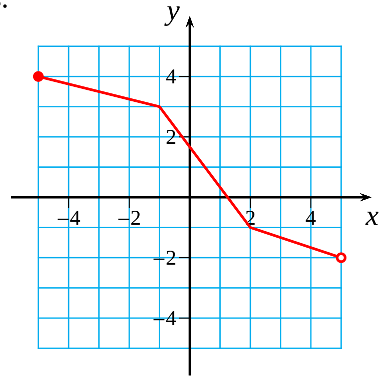
(b) $\cup$ betecknar unionen, allt som är i ena eller andra eller båda: $\boxed{A \cup B = (-2,\ 2]}$

(c) $\cap$ betecknar skärningen, allt som tillhör båda: $\boxed{A \cap B = \{\, x \mid -1{,}5 \le x < 1{,}5 \,\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tolka en enkel mängdbeskrivning. • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). • Tolka och använda intervallbeteckningar korrekt. Övning 2.9.

Rättningsnorm: (b) och (c) får i viss mån sambedömas. Om t.ex. svarena är rätt men skrivsätten fel, eller unionen hamnat på snitt och tvärtom, så kan 1p ges för de två uppgifterna i kombination.

3. Figuren nedan beskriver en styckvis definierad funktion f av x. Skriv upp hur denna funktion beräknas.



Se till att det framgår hur du resonerar! (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 4.22(a), med utbytt funktionsnamn.

Kurvan består av ett antal räta linjestycken, som alla har formler av typ $y = k \cdot x + m$. Vi visar två sätt att gå till väga:

Första biten: Startar i $x = -5$ och slutar vid $x = -1$. Går en ruta neråt på fyra rutor framåt, så riktningskoefficienten k är $-1/4$. Förlänger man linjen fram till y-axeln kommer man att hamna en fjärdedel under ändpunktens höjd, vilket blir vid $y = 2{,}75 = 11/4$, vilket är konstanttermen m.

(”Se till att det framgår hur du resonerar!” är för att en tränad person kan göra denna typ av analys helt i huvudet och direkt skriva ner svaret utan beräkning. Men det går då inte att se att svaret inte kom via en fusklapp från en kompis.)

Andra biten: Startar i $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ och slutar i $(x_2, y_2) = (2, -1)$. Då är riktningskoefficienten

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-3}{2-(-1)} = -\frac{4}{3}$$

Då uppfyller första punkten

$$y - 3 = -\tfrac{4}{3} \cdot (x - (-1)) \quad \Leftrightarrow \quad y - 3 = \tfrac{4}{3} \cdot x - \tfrac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{4}{3} \cdot x + \tfrac{5}{3}$$

Tredje biten: Samma typ ar resonemang ger att det linjestycket beskrivs av ekvationen $y = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{3}$.

$$\boxed{\textit{Svar:}\quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{3} & 2 < x < 5 \\ -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{5}{3} & -1 < x \le 2 \\ -\frac{1}{4} \cdot x + \frac{11}{4} & -5 \le x \le -1 \end{cases}}$$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Styckvis definierad funktion; Du ska kunna göra följande: • Bestämma riktningskoefficienten för en rät linje ur två punkter. • Bestämma ekvationen för en linje ur en punkt och riktningskoefficient. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Rätt metod, men räknefel: 2p. Åtminstone visat att man förstått uppgiften: 1p.

4. Lös följande olikhet: $\dfrac{100 \cdot x^2 - 1}{x^3 - 100 \cdot x} \ge 0$ (3p)

Lösning:

Tecknet hos ett rationellt uttryck är lätt att läsa ut om uttrycket är skrivet faktoriserat, så det gör vi:

$$\text{VL} = \frac{100\cdot x^2 - 1}{x^3 - 100\cdot x} = \frac{(10\cdot x)^2 - 1^2}{x\cdot(x^2 - 10^2)} = \frac{(10\cdot x + 1)\cdot(10\cdot x - 1)}{x\cdot(x + 10)\cdot(x - 10)}$$

Täljaren har nollställen då $10\cdot x + 1 = 0$ och då $10\cdot x - 1 = 0$, dvs. då $x = \pm 0{,}1$. Nämnaren har nollställen för $x = 0$ och $x = \pm 10$.

Tabell:

		-10		$-0{,}1$		0		$0{,}1$		10	
$10\cdot x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$10\cdot x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 10$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
VL	$-$	odef	$+$	0	$-$	odef	$+$	0	$-$	odef	$+$

Vi önskade att vänsterledet skulle vara noll eller större, vilket det är i

$\boxed{\textit{Svar: } (-10,\ -0{,}1] \cup (0,\ 0{,}1] \cup (10,\ \infty)}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Härleda och tillämpa kvadreringsreglerna och konjugatregeln (framlänges och baklänges). • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Övning 9.9–9.11.

Rättningsnorm: Korrekt skrivit om vänsterledet: 1p. Korrekt teckenanalyserat det man fick: +1p. Gett ett tydligt svar som stämmer med analysen: +1p.

5. Vi har polynomet $p(x) = 8\cdot x - 6 + x^4 - 2\cdot x^3$

Besvara följande frågor:

(a) Vad är polynomets gradtal?

(b) Vad är polynomets tredjegradskoefficient?

(c) Vad är polynomets andragradskoefficient?

(d) Vad är polynomets förstagradsterm?

(e) Är $p(987\,654\,321)$ positiv eller negativ?

(f) Om vi undrar ifall polynomet har något heltalsnollställe, vilka heltal ska vi testa innan vi kan dra slutsatsen att heltalsnollställe saknas?

Motiveringar behövs ej, men se till att det framgår vilket svar som hör till vilken fråga. 6 rätt: 3p. 4–5 rätt: 2p. 2–3 rätt: 1p. 0–1 rätt: 0p. (3p)

Lösning:

Lätt uppsnyggat: $p(x) = 1\cdot x^4 + (-2)\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 8\cdot x - 6$.Vi motiverar ändå:

(a) $\boxed{4}$, för x^4 är potensen med det högsta gradtalet som syns i polynomet. (Högre potenser än så finns det noll stycken av, så de räknas inte.)

(b) $\boxed{-2}$, för det är det tal som x^3 är multiplicerat med om vi skriver det hela med plustecken. (Polynom definieras som en *summa*, dvs. något med plustecken.)

(c) $\boxed{0}$, för det syns inte till någon x^2-term.

(d) $\boxed{8\cdot x}$, för *term* är en grej som adderas, och det är produkten av de här två som ingår i additionen.

(e) $\boxed{\text{Positiv}}$, för då man räknar med stora värden (vilket väl det här får anses vara) är termerna av lägre grad försumbara utan resultatet domineras av högstagradstermens värde. $987\,654\,321^4$ är helt klart positivt; det finns ingen anledning att räkna ut exakt vad det är!

(f) $\boxed{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6}$, för det är heltalsfaktorerna i konstanttermen 6. Om ett polynom har högstagradskoefficient 1 och heltalskoefficienter för övrigt så kommer eventuella heltalsnollställen att vara faktorer i konstanttermen. Om inget av dessa tal är ett nollställe så vet vi att polynomet saknar heltalsnollställen.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Term [...] • Grad • Koefficient; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. Övning 7.1, 7.14.

Rättningsnorm: 6 rätt: 3p. 4–5 rätt: 2p. 2–3 rätt: 1p. 0–1 rätt: 0p. Svar som man inte förstår vilken fråga de tillhör betraktas som felaktiga.

6. Lös följande ekvation: $(x + 26)^2 = (28 + x)^2$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.18(b). Kan angripas på flera sätt:

Råräkning:

$$\begin{aligned}
(x+26)^2 &= (28+x)^2 \\
x^2 + 2\cdot 26\cdot x + 26^2 &= 28^2 + 2\cdot 28\cdot x + x^2 && \text{Utveckla (kvadreringsregel)} \\
52\cdot x + 676 &= 784 + 56\cdot x && \text{Beräkna, förenkla} \\
676 - 784 &= (56-54)\cdot x && \text{"Flytta över"} \\
4\cdot x &= -108 && \text{Beräkna} \\
x &= -27 && \text{Dela med 4}
\end{aligned}$$

Substitution: $x + 26$ och $28 + x$ är ganska lika. Om vi tillfälligt kallar $x + 26$ för t åker vi ner i talområdet och får lättare räkningar.

$$\begin{aligned}
(x+26)^2 &= (28+x)^2 \\
(x+26)^2 &= (x+26+2)^2 \\
t^2 &= (t+2)^2 && \boxed{\text{Sätt } x+26=t} \\
t^2 &= t^2 + 4\cdot t + 4 && \text{Utveckla} \\
0 &= 4\cdot t + 4 && \text{Förenkla} \\
4\cdot t &= -4 && \text{"Flytta över"} \\
t &= -1 && \text{Dela med 4} \\
x + 26 &= -1 && \boxed{\text{Sätt } t = x+26} \\
x &= -27 && \text{"Flytta över"}
\end{aligned}$$

”Ta bort” kvadreringen: Två tal med samma kvadrat har samma ”siffror” men kan ha olika tecken.

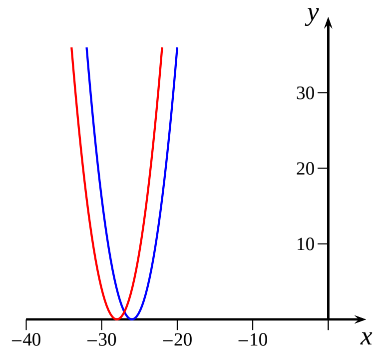
$$\begin{aligned}
(x+26)^2 &= (28+x)^2 \\
x+26 &= \pm(28+x) \\
x+26 = 28+x \;&\vee\; x+26 = -(28+x) \\
26 = 28 \qquad & \qquad x+26 = -28-x \\
\text{olöslig} \qquad & \qquad 2\cdot x = -54 \\
& \qquad x = -27
\end{aligned}$$

Observera $\pm$! Man kan inte ”stryka 2:orna”; man tappar då möjligheten att talen, trots att de har samma kvadrat, skulle kunna ha olika tecken.

Konjugatregeln: Lämnades in av några studenter; jag hade inte kommit att tänka på denna möjlighet.

$$\begin{aligned}(x+26)^2 &= (28+x)^2\\ (x+26)^2-(28+x)^2 &= 0\\ ((x+26)+(28+x))\cdot((x+26)-(28+x)) &= 0\\ (2\cdot x+54)\cdot(-2) &= 0\\ 2\cdot x+54 &= 0\\ 2\cdot x &= -54\\ x &= -27\end{aligned}$$

Grafiskt: $y=(x+26)^2$ är den vanliga parabeln, men flyttad 26 steg åt vänster. $y=(x-28)^2$ är samma parabel, men flyttad 28 steg. Uppritat blir det:



Kurvorna skär mitt emellan minpunkterna, vilket blir i $x=-27$. För resten är de parallella och skär inte på något annat ställe.

Inspektion: Det är fullt möjligt att man direkt ser att $x=-27$ ger kvadraten på -1 respektive 1. Man måste dock motivera hur man kan vara säker på att ekvationen inte har fler lösningar än så.

Kontroll:

$$x=-27:\begin{cases}\mathrm{VL}=(-27+26)^2=(-1)^2=1\\ \mathrm{HL}=(28-(-27))^2=1^2=1\end{cases}\quad \text{OK!}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x=-27}$

Notation: Här ska det *inte* vara några likhetstecken mellan stegen, för det som står i slutet på en rad är i de flesta fall inte samma tal som i början på nästa. Implikations- eller ekvivalenspilar går bra (men krävs ej).

Referenser: (beror lite på hur man valde att göra) Du ska kunna göra följande: • Härleda och[. . .] tillämpa kvadreringsreglerna [. . .]. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Preliminärt: helt rätt: 3p. Påbörjat en fungerande lösning: 1p. Mellanting: 2p. Strukit 2:orna: 0p.

7. Din kompis kommer till dig och vill ha hjälp.

”Jag använde den här regeln, men läraren gav mig 0 poäng för det.”

$$a^m\cdot a^n = a^{m\cdot n} \qquad ☠$$

> ”Den där regeln finns inte!” säger du. ”$a^m \cdot a^n$ är inte lika med med $a^{m \cdot n}$!”
>
> ”Varför inte?” undrar kompisen.

Förklara för kompisen

- Varför det kompisen vill göra inte fungerar.
- Vad $a^m \cdot a^n$ faktiskt är lika med.
- Varför det du påstår är rätt.

Det räcker inte med att säga ”regeln är sådan”, utan kompisen ska förstå *varför* det är så. (3p)

Lösning:

Uppgiften är (som alla ”din kompis”-uppgifter) inspirerad av ett vanligt förekommande fel. Detta är vanligt då omskrivningen ingår i en mycket större beräkning, så att man inte har fokus på detaljnivå.

Exempelvis:

”Man kan alltid börja med att testa med ett sifferexempel. $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$, och $2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$. Så antingen är 128 och 4096 samma tal (och i så fall: vill du låna mig 4096 kronor, och så kan jag betala tillbaka 128?) eller så fungerar inte din regel.

Nu kan vi kolla på hur regeln faktiskt är: a^m är m stycken a:n ihopgångrade[1]. Och a^n är n stycken a:n ihopgångrade. Och multiplicerar man dem med varandra får man först m stycken a:n med gångertecken emellan, och så ett gångertecken, och så n stycken a:n med gångertecken emellan. Då har man $m+n$ stycken a:n med gångertecken emellan, och det är a^{m+n}. Så den riktiga regeln är

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Om vi testar med sifferexemplet så har vi

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 stycken 2:or}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{4 stycken 2:or}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{3 + 4 = 7 stycken 2:or}} = 2^7$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och motivera potensräkningsreglerna.

Rättningsnorm: Lösning som täcker alla tre punkterna och som det verkar sannolikt att en ”kompis” skulle förstå: 3p. Annars poäng efter hur stor procent av detta man åstadkommit.

8. Vi har funktionen f, där $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x + 0{,}13$. Vad är det lägsta värde $f(x)$ kan anta?

(Derivataresonemang får ej användas.) (3p)

Lösning:

Extremvärdet för en andragradsfunktion kan utläsas ur den kvadratkompletterade formen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}1 \cdot x + 0{,}13 \\
&= 0{,}5 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot x + 0{,}5 \cdot 0{,}26 && \text{Förbered utbrytning} \\
&= 0{,}5 \cdot (x^2 - 0{,}2 \cdot x + 0{,}26) && \text{Genomför utbrytning} \\
&= 0{,}5 \cdot (x^2 - 2 \cdot 0{,}1 \cdot x + 0{,}1^2 - 0{,}1^2 + 0{,}26) && \text{Kvadratkomplettera} \\
&= 0{,}5 \cdot ((x - 0{,}1)^2 - 0{,}01 + 0{,}26) && \text{Skriv som kvadrat; beräkna} \\
&= 0{,}5 \cdot ((x - 0{,}1)^2 + 0{,}25) && \text{Beräkna}
\end{aligned}$$

[1]”Gångrade” är inte strikt formell matematisk terminologi, men jag har själv inget problem med ordet – det är omöjligt att missförstå, vilket är det viktiga.

$$= 0{,}5\cdot(x - 0{,}1)^2 + 0{,}125 \qquad \text{Multiplicera in}$$

Det lägsta värde det kvadrerade parentesuttrycket kan anta är 0, och det innebär att det lägsta värde uttrycket som helhet kan anta är

$\boxed{\textit{Svar: } 0{,}125}$

Tycker man att decimalerna är svåra att hantera kan man göra om det hela till bråk:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}5\cdot x^2 - 0{,}1\cdot x + 0{,}13 \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{1}{10}\cdot x + \tfrac{13}{100} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot x^2 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{13}{50} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot(x^2 - \tfrac{1}{5}\cdot x + \tfrac{13}{50}) \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot(x^2 - 2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot x + (\tfrac{1}{10})^2 - (\tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{13}{50}) \\
&= \tfrac{1}{2}((x - \tfrac{1}{10})^2 - \tfrac{1}{100} + \tfrac{13\cdot 2}{50\cdot 2}) \\
&= \tfrac{1}{2}((x - \tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{25}{100}) \\
&= \tfrac{1}{2}((x - \tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{\cancel{25}}{4\cdot\cancel{25}}) \\
&= \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} \\
&= \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

Eftersom $1/8 = 0{,}125$ är detta samma svar, fast skrivet på ett annat sätt.

En skrivande insåg att man kunde inleda med att söka lägsta värdet hos $100\cdot f(x) = 50\cdot x^2 - 10\cdot x + 13$, så fick man över det hela till heltal.

Här ej fungerande metod: Extrempunkten ligger mitt emellan nollställena, så ett angreppsätt är att sätta det hela lika med noll och försöka lösa den erhållna ekvationen. I det här fallet blir dock ekvationen olösbar i $\mathbb{R}$, så man kommer inte vidare den vägen. Funktionen saknar nollställen. I annat fall kan man sedan se vilket x som ligger mitt emellan nollställena, sätta in det i formeln, och så se vad man får.

Kommentar: En stor mängd skrivande uppgav att lägsta värdet var 0,13; konstanttermen. Konstanttermen är det man får ut då man sätter in $x = 0$ i beräkningsformeln, och visar var kurvan skär y-axeln. Det är bara om kurvan ligger symmetriskt kring $x = 0$ som detta också är lägsta värdet. Om andragradsuttrycket har annan förstagradskoefficient än 0 kommer parabeln att ligga förskjutet i sidled, och skär då y-axeln på annan höjd än den där extremvärdet sitter.

En hel del hade också använt prövning, vilket kan fungera om minimun ligger i eller mitt emellan heltal. Av resultaten man får här bör man dock kunna dra slutsatsen att minimum ligger någonstans mellan 0 och 1, och att det är svårt att hitta med denna metod.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. Övning 6.17.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat förståelse för frågan: 1p. Mellanting (t.ex. rena sifferräkningsfel) 2p. Derivering: 0p. Prövning: 0p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2021.12.03 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. (a) Multiplicera in konstanten: $(a+3)^3{\cdot}27$ (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.13(b) med utbytt variabelnamn.

$$(a+3)^3{\cdot}27 = (a+3)^3{\cdot}3^3 = ((a+3){\cdot}3)^3 = \boxed{(3{\cdot}a+9)^3}$$

(Även det näst sista uttrycket är ett acceptabelt svar.)

Kommentar: Många skrivande utvecklade potensen innan de multiplicerade in, men nästan ingen av dessa gjorde detta korrekt. Den uträkningen skulle bli

$$\begin{aligned}(a+3)^3{\cdot}27 &= (a^3 + 3{\cdot}3{\cdot}a^2 + 3{\cdot}3^2{\cdot}a + 3^3){\cdot}27\\ &= (a^3 + 9{\cdot}a^2 + 27{\cdot}a + 27){\cdot}27 = 27{\cdot}a^3 + 243{\cdot}a^2 + 729{\cdot}a + 729\end{aligned}$$

(Och även om man gör det korrekt så motsvarar det inte instruktionen.) Observera att man **inte** kan utveckla $(a+3)^3$ till a^3+3^3. Testa med t.ex. $a=1$ och jämför värdena.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Motivera och tillämpa distributiva lagen. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Bryt ut en konstant: $\sqrt{25{\cdot}b-100}$ (1p)

Lösning:

Som ovan fast baklänges:

$$\sqrt{25{\cdot}b-100} = \sqrt{25{\cdot}b-25{\cdot}4} = \sqrt{25{\cdot}(b-4)} = \sqrt{25}{\cdot}\sqrt{b-4} = \boxed{5{\cdot}\sqrt{b-4}}$$

Kommentar: Observera att man **inte** kan skriva om $\sqrt{25{\cdot}b-100}$ till $\sqrt{25{\cdot}b}-\sqrt{100}$.

Referenser: Se föregående uppgift, och övning 6.13.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(c) Bestäm en approximation med två värdesiffror för $\sqrt{50}$ (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.15(c).

Vi söker ett tal som i kvadrat ska ge 50. Vi vet att $7^2 = 49$ (lågstadiet). Talet ska vara större än 7, men inte *mycket* större. Kan testa med 7,1:

$$7{,}1^2 = (7 + 0{,}1)^2 = 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 = 49 + 1{,}4 + 0{,}01 = 50{,}41$$

Detta var för mycket (så sanningen ligger någonstans mellan 7,0 och 7,1), men det var mer rätt än 49. Vi accepterar detta som tillräckligt bra.

$\boxed{\textit{Svar: } \sqrt{50} \approx 7{,}1}$

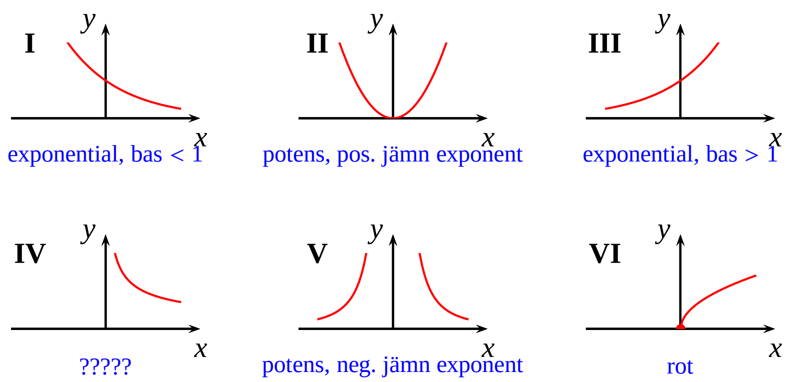
Alternativlösning: Linjär interpolation. $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $64-49 = 15$. 50 ligger på $1/15$ av sträckan mellan 49 och 64, och då bör dess rotvärde motsvara ungefär $1/15$ av skillnaden mellan $\sqrt{49}$ och $\sqrt{64}$. Så

$$\sqrt{50} \approx 7 + \tfrac{1}{15} = 7{,}0666\cdots \approx 7{,}1$$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Rot; Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Rätt svar med någon form av motivering: 1p.

2. Här är sex kurvor:



Här har vi sex formler:

(a) $y = 2^x$ **(b)** $y = x^2$ **(c)** $y = (1/2)^x$ **(d)** $y = x^{1/2}$ **(e)** $y = x^{-2}$ **(f)** $y = x^{-1/2}$

Skriv upp vilken bild som hör till vilken formel. Motivering behövs inte, men felaktiga svar ger minuspoäng.

Poängsättning: Varje korrekt par ger +0,5p, varje felaktigt par ger −0,5p. Om poängsumman blir negativ sätts 0p på uppgiften. I övrigt avrundas summan neråt till närmsta heltal. (3p)

Lösning:

Under bilderna står en kommentar om vilken typ av funktion det ser ut att vara.

(a) $\boxed{\text{III}}$ Exponentialfunktion med bas större än 1: ska ge kurva som ligger ovanför x-axeln, nära 0 långt åt vänster, växer i allt snabbare takt.

(b) $\boxed{\text{II}}$ Potensfunktion med positiv, jämn exponent: ska ge U-kurva.

(c) $\boxed{\text{I}}$ Exponentialfunktion med bas mindre än 1: ska ge kurva som ligger ovanför x-axeln, nära 0 långt åt höger, avtar i allt långsammare takt.

(d) $\boxed{\text{VI}}$ Jämn rot, ska ge liggande version av högerhalvan av motsvarande heltalspotens (här av $y = x^2$, som var kurva II).

(e) $\boxed{\text{V}}$ Potensfunktion med negativ, jämn exponent. Negativ ger odefinierad för $x = 0$, jämn ger att höger- och vänsterhalvorna är identiska.

(f) $\boxed{\text{IV}}$ enligt uteslutningsmetoden; övriga bilder var redan tagna. $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$ har vi inte tittat på, men definitionsmängden måste vara $(0, \infty)$, och om x är nära noll bör värdet bli stort, och för x långt från noll bör värdet bli nära noll. Så inget motsäger att det skulle vara denna kurva.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en potensfunktion. • Skissa grafen för en exponentialfunktion. • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.4.

Rättningsnorm: Se frågan. Svar som man inte kan begripa vad de antas betyda/vilken uppgift de hör till får 0p.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right) \Big/ \frac{5}{4} - \frac{7}{2} \qquad \text{(3p)}$$

Lösning:

Skrivet horisontellt (där vi noterar att division går före addition och subtraktion om inte parenteser ingriper, vilket de gör till vänster om det stora divisionstecknet men inte till höger):

$$\frac{\frac{1}{12} + \frac{3}{8}}{\frac{5}{4}} - \frac{7}{2}$$

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{1}{12} + \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{2 + 9}{24} = \frac{11}{24}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{1}{12} + \frac{3}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{\frac{11}{24}}{\frac{5}{4}} = \frac{11}{24} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11 \cdot \cancel{4}}{6 \cdot \cancel{4} \cdot 5} = \frac{11}{30}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{1}{12} + \frac{3}{8}}{\frac{5}{4}} - \frac{7}{2} = \frac{11}{30} - \frac{7 \cdot 15}{2 \cdot 15} = \frac{11 - 105}{30} = -\frac{94}{30} = -\frac{\cancel{2} \cdot 47}{\cancel{2} \cdot 15} = \boxed{-\frac{47}{15}}$$

Mer på en gång: Dubbelbråket kan också angripas med förlängning med minsta gemensamma nämnare för alla de inblandade bråken: $24 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3$:

$$\frac{\left(\frac{1}{12} + \frac{3}{8}\right) \cdot 24}{\frac{5}{4} \cdot 24} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot \cancel{12}}{\cancel{12}} + \frac{3 \cdot \cancel{8} \cdot 3}{\cancel{8}}}{\frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 6}{\cancel{4}}} = \frac{2 + 9}{30} = \frac{11}{30}$$

Sedan fortsätter man enligt föregående lösningsförslag.

Vanlig felräkning: Om man räknat som om det varit en parentes även runt subtraktionen (så att man stoppat in $7/2$ under det stora bråkstrecket) så ska man få svaret $-11/54$. (Detta svar är alltså fel, och motsvarar en felaktighet i lösningen.)

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan de olika stegen i varje deluträkning, däremot inte mellan de separata deluträkningarna. Vitsen med det hela är ju att alla versioner motsvarar samma tal, de är *lika med* varandra. Pilar är direkt felaktigt.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel; att ta fel på prioritet *är* ett fel. Att inte utnyttja förkortningsmöjligheter under gång räknas som ”synden straffar sig själv”.

4. Lös ekvationen $9^x - 3^{x+2} = 0$ (3p)

Tips: använd substitution!

Lösning:

Detta ser ut att kunna angripas med substitution, eftersom 9 är en 3-potens.

$$\begin{aligned}
9^x - 3^{x+2} &= 0 \\
(3^x)^2 - 3^x \cdot 3^2 &= 0 && \text{Skriv som 3-potenser} \\
t^2 - t \cdot 9 &= 0 && \boxed{\text{Sätt } 3^x = t} \\
t \cdot (t-9) &= 0 && \text{Bryt ut} \\
t = 0 \quad &\vee \quad t - 9 = 0 && \text{Nollfaktorlagen} \\
3^x = 0 \quad &\quad\quad t = 9 \\
\text{Olösbar} \quad &\quad\quad 3^x = 9 \\
&\quad\quad 3^x = 3^2 \\
&\quad\quad x = 2
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x = 2}$

Inspektion: Det är möjligt att man lyckas se att $x = 2$ är en lösning utan att räkna, eftersom $9^2 = 3^4$. Man kan dock inte vara säker på att detta är *enda* lösningen utan att utreda vidare.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. Övning 8.19.

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Åtminstone visat att man vet vad substitution går ut på: 1p. Mellanting: 2p. Inspektion: 1p.

5. Vi har två funktioner f och g, där $f(x) = 1/(x+1)$ och $g(x) = 2 \cdot x$. Beräkna

(a) $(f \circ g)(0)$

(b) $(g \circ f)(0)$

Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 4.16(c)(d). Symbolen $\circ$ betecknar funktionssammansättning.

(a) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(2 \cdot 0) = f(0) = \dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$

(b) $(g \circ f)(0) = g(\frac{1}{0+1}) = g(\frac{1}{1}) = g(1) = 2 \cdot 1 = \boxed{2}$

Referenser: Matchar ingen punkt exakt, men får anses ingå i ett stort antal punkter (som ”Skissa grafen för en enkel funktion”, vilket kräver att man kan beräkna värden). Rekommenderad uppgift!

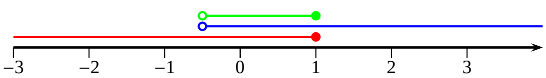
Rättningsnorm: Frågetypen har inte funnits på någon tidigare tenta, så det är svårt att exakt förutspå vilka fel som kommer att göras. Preliminärt: Helt rätt: 3p. Åtminstone förstått uppgiften: 1p. Mellanting (inklusive lösa b på a och tvärtom): 2p.

6. Lös den dubbla olikheten $2 \cdot x + 1 \leq 3 < 2 \cdot x + 4$. (3p)

Lösning:

Räkna var för sig och kombinera: Detta är egentligen en konjunktion av två utsagor: $2 \cdot x + 1 \leq 3$ och $3 < 2 \cdot x + 4$. Det vi söker är de x som gör båda utsagorna sanna. Löser vi olikheterna var för sig så kan vi sedan ta skärningen av deras lösningsmängder.

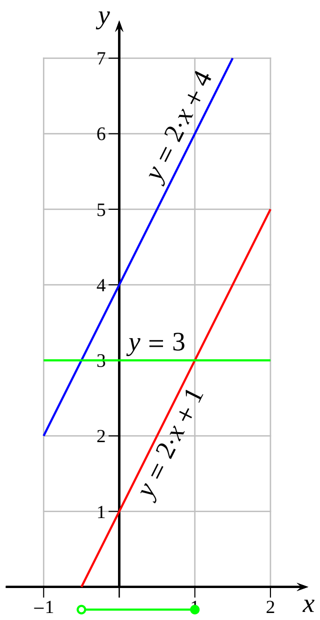
$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 1 &\leq 3 \\ 2 \cdot x &\leq 2 \\ x &\leq 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3 &< 2 \cdot x + 4 \\ -1 &< 2 \cdot x \\ -1/2 &< x \end{aligned}$$



Allt samtidigt: Normalt gör man samma operation i båda led. Här har vi tre led, men om vi gör samma operation i alla tre så borde det fungera:

$$\begin{gathered} 2 \cdot x + 1 \leq 3 < 2 \cdot x + 4 \\ 2 \cdot x + 1 - 2 \cdot x \leq 3 - 2 \cdot x < 2 \cdot x + 4 - 2 \cdot x \\ 1 \leq 3 - 2 \cdot x < 4 \\ 1 - 3 \leq 3 - 2 \cdot x - 3 < 4 - 3 \\ -2 \leq -2 \cdot x < 1 \\ \frac{-2}{-2} \geq \frac{-2 \cdot x}{-2} > \frac{1}{-2} \\ 1 \geq x > -1/2 \end{gathered}$$

Grafiskt: $y = 2 \cdot x + 1$ är en (sned) linje. $y = 3$ är en (horisontell) linje. $y = 2 \cdot x + 4$ är en (sned) linje. Olikheten innebär konkret ”i vilket område ligger den första linjen under den andra, samtidigt som den andra ligger under den tredje?”.



Den första (röd) ligger under den andra (grön) fram till $x = 1$. Den andra ligger under den tredje (blå) från $x = -1/2$.

$\boxed{\textit{Svar: } -1/2 < x \leq 1}$

Referenser: (beror lite på hur man valt att lösa uppgiften) DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Lösning, lösningsmängd; DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall). • Tolka en olikhet grafiskt. • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. Övning 9.13.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p.

7. Ett nollställe till polynomet $x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 4$ är -4. Faktorisera polynomet fullständigt. (3p)

Lösning:

Polynomet är av grad 3, så det är möjligt att det går att bryta ner i tre förstagradsfaktorer.

Faktorsatsen säger att om a är ett nollställe så är $x - a$ en faktor. Så en faktor i polynomet är $x - (-4) = x + 4$. Om vi dividerar med denna bör vi få en andragradare kvar, och sådana kan vi faktorisera med kvadratkomplettering.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2 \cdot x - 1 \\
\hline
x + 4 & x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 4 \\
 & -(x^3 + 4 \cdot x^2) \\
 & -2 \cdot x^2 - 9 \cdot x \\
 & -(-2 \cdot x^2 - 8 \cdot x) \\
 & -x - 4 \\
 & -(-x - 4) \\
 & 0
\end{array}
$$

Inget blev över, så det stämde att detta var en faktor. Nu till andragradaren:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2 \cdot x - 1 &= x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2 - 1 \\
&= (x - 1)^2 - 2 = (x - 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = ((x - 1) + \sqrt{2}) \cdot ((x - 1) - \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } (x + 4) \cdot (x - 1 + \sqrt{2}) \cdot (x - 1 - \sqrt{2})}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Utvecklad form, faktoriserad form, kvadratkompetterad form; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Övning 6.17, 7.12, 7.14.

Rättningsnorm: Korrekt angreppssätt: 1p. Kommit till svar: 3p. Mellanting: 2p. Använt pq-formeln: 1p om divisionen är korrekt.

8. **(a)** Din kompis håller på och löser ekvationen $2{\cdot}x = 4$, och har skrivit

$$2{\cdot}x = 4 = x = 2 \qquad ☠$$

Förklara för kompisen varför detta är fullständigt fel.

(b) Din kompis ändrar i uppgiften, så att det i stället står

$$2{\cdot}x \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 2 \qquad ☠$$

Förklara för kompisen varför detta också är fullständigt fel.

(c) Visa kompisen hur man skriver lösningen på ett korrekt sätt.

Observera att det inte räcker att visa hur man ska göra, utan att kompisen verkligen ska förstå varför det hen gjorde var fel. Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.4, tidigare partiellt använd 2017.06.07.

(a) Exempelvis: ”Du har skrivit att $2{\cdot}x$ är samma tal som 4, som är samma tal som x, som är samma tal som 2. Så du har bland annat skrivit att 4 och 2 är samma tal. Och det är de ju inte, så det du skrivit är ren lögn!”

(b) ”Nu står det att två gånger x är lika sant som 4, som är lika sant som x, som är lika sant som 2. Och ingen av de här sakerna är väl vare sig sann eller falsk; de står för tal och inte för utsagor! Så det du skrivit är rent nonsens.”

(c) $2{\cdot}x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$. (Det fungerar också med implikationspil, om man inte är intresserad av att läsa sambandet baklänges, och det är också OK att skriva utsagorna ovanför varandra för då anses det implicita förhållande implicit givet.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Korrekta svar på alla tre frågorna och begripligt för en ”kompis”: 3p. 3 av dessa saker: 2p. 2 av dessa saker: 1p. Mindre än så: 0p

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN1 – *Lösningsförslag* 2022.01.07 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på 021–10,1601

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Bestäm kvot och rest vid divisionen

$$\frac{3{\cdot}x^4 - 5{\cdot}x^3 + 7{\cdot}x - 9}{x+1}$$

Se till att det av svaret klart framgår vad som är kvoten och vad som är resten! (3p)

Lösning:

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r|l}
 & 3{\cdot}x^3 - 8{\cdot}x^2 + 8{\cdot}x - 1 \\
\hline
x+1 & 3{\cdot}x^4 - 5{\cdot}x^3 + 0{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x - 9 \\
 & -(3{\cdot}x^4 + 3{\cdot}x^3) \\
\cline{2-2}
 & -8{\cdot}x^3 \\
 & -(-8{\cdot}x^3 - 8{\cdot}x^2) \\
\cline{2-2}
 & 8{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x \\
 & -(8{\cdot}x^2 + 8{\cdot}x) \\
\cline{2-2}
 & -x - 9 \\
 & -(-x - 1) \\
\cline{2-2}
 & -8
\end{array}$$

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Kvot: } 3{\cdot}x^3 - 8{\cdot}x^2 + 8{\cdot}x - 1\text{; rest: } -8}$

Svaret kan lätt kontrolleras, genom att man sätter tillbaka kvoten på bråkstrecket igen. (Det är därför slarvfel ger poängavdrag.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en polynomdivision. Metod 5.1, Exempel 7.6, Övning 7.7.

Rättningsnorm: Begriplig uträkning med klart och tydligt svar: 3p. Slarvfel eller otydlighet i svaret: 2p. Systematiskt fel i beräkningen, men rätt grundtanke: 1p.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas.

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}-\frac{8}{19}$$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 3.30(c), tidigare använd 2015.12.01.

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{4}{5}+\frac{7}{10}=\frac{4\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{7}{10}=\frac{8+7}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3\cdot\cancel{5}}{2\cdot\cancel{5}}=\frac{3}{2}$$

Nämnaren:

$$\frac{1}{20}-1=\frac{1}{20}-\frac{20}{20}=\frac{1-20}{20}=-\frac{19}{20}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{19}{20}}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{20}{19}=-\frac{3\cdot\cancel{2}\cdot 10}{\cancel{2}\cdot 19}=-\frac{30}{19}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}-\frac{8}{19}=-\frac{30}{19}-\frac{8}{19}=-\frac{30+8}{19}=-\frac{38}{19}=-\frac{2\cdot\cancel{19}}{\cancel{19}}=\boxed{-2}$$

Mer på en gång: Minsta gemensamma nämnare för dubbelbråket är $20 = 2{\cdot}10 = 4{\cdot}5$. Multiplicerar vi med den plattar bråket ut sig:

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{7}{10}}{\frac{1}{20}-1}=\frac{\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{10}\right)\cdot 20}{\left(\frac{1}{20}-1\right)\cdot 20}=\frac{\frac{4\cdot 4\cdot\cancel{5}}{\cancel{5}}+\frac{7\cdot 2\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}}}{\frac{1\cdot\cancel{20}}{\cancel{20}}-1\cdot 20}=\frac{16+14}{1-20}=-\frac{30}{19}$$

I det här fallet verkar denna metod varit mer effektiv än den föregående. (Vilken metod som är ”bäst” beror på de ingående talen.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel.

3. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet.

$$x^2+y^2+10{\cdot}x-14{\cdot}y=7$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r i xy-planet i ett ortonormerat koordinatsystem har ekvationen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, så vi får skriva om den givna ekvationen till det formatet, vilket vi gör med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 10{\cdot}x - 14{\cdot}y &= 7 \\
x^2 + 2{\cdot}5{\cdot}x + 5^2 + y^2 - 2{\cdot}7{\cdot}y + 7^2 &= 7 + 5^2 + 7^2 \\
(x + 5)^2 + (y - 7)^2 &= 7 + 25 + 49 \\
(x + 5)^2 + (y - 7)^2 &= 81 \\
(x - (-5))^2 + (y - 7)^2 &= 9^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Medelpunkten har koordinaterna } (-5, 7) \text{ och radien är } 9 \text{ längdenheter.}}$

Kommentar: Notera att ekvationen **inte** kan skrivas om till $(x - (-5)) + (y - 7) = 9$, genom att man ”stryker tvåorna”. Man har då tillämpat minst två icke existerarnde potensräknings”regler” och det man då får är ekvationen för en rät linje.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering.

Rättningsnorm: Helt rätt (vilket inkluderar ”ej strukit tvåorna”): 3p. Åtminstone visat att man förstår vad uppgiften går ut på: 1p. Största delen av en korrekt lösning: 2p.

4. Är följande sant?

(a) $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Z}$

(b) $a \notin \mathbb{Z} \wedge b \notin \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Z}$

Motivera kortfattat! Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

(a) $\boxed{\text{Falskt}}$ ”Om a och b båda är heltal så kommer kvoten mellan dem garanterat också att vara ett heltal”. Enkelt motexempel: 1 är ett heltal, 2 är också ett heltal, $^1/_2$ är *inte* ett heltal.

(b) $\boxed{\text{Falskt}}$ ”Om varken a eller b är heltal så kommer kvoten melland dem garanterat att inte vara ett heltal den heller”. Enkelt motexempel: $^1/_2$ är inte ett heltal, $^1/_4$ är inte hellet ett heltal, men $(^1/_2)/(^1/_4) = 2$ vilket är ett heltal.

Notera att kvoten mellan två heltal ibland är ett heltal, och att kvoten mellan två icke-hela tal oftast är ett icke-helt tal. Men implikation innebär att det som står efter pilen *alltid* är sant om det innan pilen är det; sant ibland räcker inte för att implikation ska gälla.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Utsaga • Och, eller, inte (i logisk mening) • Implikation • Mängd • Element • Heltal, rationellt tal, reellt tal • $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ Övning 1.3–4, 2.2–3

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som en korrekt motivering: 3p. Uppenbart missuppfattat innebörden i någon av symbolerna, men resonerat korrekt utgående från denna tolkning: 2p. Missuppfattat mer än så, men fortfarande resonerat korrekt: 1p. Felaktigt eller obegripligt resonemang: 0p.

5. Lös ekvationen $\sqrt{0{,}05{\cdot}x + 0{,}01} = 0{,}1 - 0{,}5{\cdot}x$ (3p)

Lösning:

Ganska standardmässig ekvation, men det gäller att hålla tungan rätt i mun då man placerar decimalkommat.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{0{,}05\cdot x + 0{,}01} &= 0{,}1 - 0{,}5\cdot x \\
(\sqrt{0{,}05\cdot x + 0{,}01})^2 &= (0{,}1 - 0{,}5\cdot x)^2 && \boxed{\text{Kvadrera; Kolla svaren!}} \\
0{,}05\cdot x + 0{,}01 &= 0{,}1^2 - 2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}5\cdot x + (0{,}5\cdot x)^2 && \text{Utveckla} \\
0{,}05\cdot x + 0{,}01 &= 0{,}01 - 0{,}1\cdot x + 0{,}25\cdot x^2 && \text{Beräkna} \\
0{,}25\cdot x^2 - 0{,}15\cdot x &= 0 && \text{"Flytta över"} \\
x^2 - 0{,}6\cdot x &= 0 && \text{Multiplicera med 4} \\
x\cdot(x - 0{,}6) &= 0 && \text{Bryt ut} \\
x = 0 \lor x &= 0{,}6 && \text{Nollfaktorlagen}
\end{aligned}
$$

Kvadreringen gör att vi behöver kontrollera svarsförslagen:

$$
x = 0 : \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{0{,}05\cdot 0 + 0{,}01} = \sqrt{0 + 0{,}01} = \sqrt{0{,}01} = 0{,}1 \\ \text{HL} = 0{,}1 - 0{,}5\cdot 0 = 0{,}1 - 0 = 0{,}1 \end{cases}
$$

$$
x = 0{,}6 : \begin{cases} \text{VL} = \sqrt{0{,}05\cdot 0{,}6 + 0{,}01} = \sqrt{0{,}03 + 0{,}01} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2 \\ \text{HL} = 0{,}1 - 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}1 - 0{,}3 = -0{,}2 \end{cases}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } x = 0}$

Om man inte vill strula med decimaler kan man börja med att skriva om det hela till bråk:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{5}{100}\cdot x + \frac{1}{100}} &= \frac{1}{10} - \frac{5}{10}\cdot x && \text{Skriv som bråk} \\
\frac{1}{10}\cdot\sqrt{5\cdot x + 1} &= \frac{1}{10} - \frac{5}{10}\cdot x && \text{Bryt ut ur roten} \\
\sqrt{5\cdot x + 1} &= 1 - 5\cdot x && \text{Multiplicera med 10} \\
(\sqrt{5\cdot x + 1})^2 &= (1 - 5\cdot x)^2 && \boxed{\text{Kvadrera; Kolla svaren!}} \\
5\cdot x + 1 &= 1^2 - 2\cdot 1\cdot 5\cdot x + (5\cdot x)^2 && \text{Utveckla} \\
5\cdot x + 1 &= 1 - 10\cdot x + 25\cdot x^2 && \text{Beräkna} \\
25\cdot x^2 - 15\cdot x &= 0 && \text{"Flytta över"} \\
5\cdot x\cdot(5\cdot x - 3) &= 0 && \text{Bryt ut} \\
x = 0 \lor 5\cdot x - 3 &= 0 && \text{nollfaktorlagen} \\
5\cdot x &= 3 \\
x &= 3/5
\end{aligned}
$$

Sedan testar man svarsförslagen på samma sätt som ovan.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • [. . .] tillämpa kvadreringsreglerna [. . .] • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. Metod 8.9; Övning 8.24.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Mindre räknefel alt. ej slängt den falska roten: 2p. Åtminstone angripit problemet på rätt sätt: 1p.

6. Din kompis kommer och är förbryllad.

Kolla! I den här uppgiften ska man skriva de här bråken med ”enbart horisontella bråkstreck”. Men det står ju precis samma sak på alla uppgifterna?!

(a) $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\Big/\frac{5}{6}-\frac{9}{10}$ **(b)** $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)\Big/\frac{5}{6}-\frac{9}{10}$

(c) $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\Big/\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{10}\right)$ **(d)** $\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{8}\right)\Big/\left(\frac{5}{6}-\frac{9}{10}\right)$

Förklara för kompisen (i) att det inte alls står samma sak på alla uppgifterna, (ii) vad som är skillnaden på dem och (iii) hur det påverkar beräkningen. Observera att kompisen ska förstå förklaringen! (3p)

Lösning:

”Titta ordentligt! (i) Det är en skillnade på vad som står: parenteserna! (ii) De står inte på samma ställen. (iii) Division går före addition och subtraktion om man inte har parenteser. Har man en parentes så ska det som står inuti den räknas ut innan det som står utanför.

Så på (a) ska vi först dividera $7/8$ med $5/6$, och sedan addera och subtrahera. På (b) ska vi först göra additionen, sedan stora divisionen, och sist subtrahera $9/10$. På (c) ska vi först subtrahera, sedan dividera $7/8$ med det vi då fick, och sist lägga det resultatet till $3/4$. Och på (d) ska vi göra additionen och subtraktionen, och sist dividera de två tal vi då fick. Så det är helt olika ordning på det man ska göra.”

Kommentar: detta innebär att svaret på bokens fråga är:

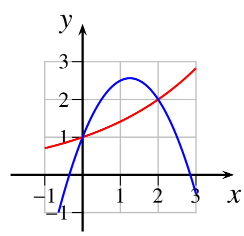
(a) $\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}}-\frac{9}{10}$ **(b)** $\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}}-\frac{9}{10}$ **(c)** $\frac{3}{4}+\frac{\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{9}{10}}$ **(d)** $\frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{5}{6}-\frac{9}{10}}$

Detta behöver inte ingå i svaret på kompisen; hen är mer behjälpt av en förklaring av hur man ska resonera så att hen själv kan försöka lösa uppgiften för att se om hen har fattat.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som $+$, $-$, $\cdot$ och $/$) korrekt, och korrekt använda parenteser. Övningen som ”kompisen” kört fast på är en rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: För full poäng ska det framgå att det är parenteserna som skiljer, och att de påverkar i vilken ordning stegen i beräkningen ska göras. Och förklaringen ska verka vara sådan att en medstudent som fick det skrivna pappret i sin hand skulle förstå det hela. (Att bara skriva upp lösningen utan att påpeka att det handlar om parenteser och prioritet ger ej full poäng.)

7. **(a)** I bilden finns kurvorna $y=-x^2+\frac{5}{2}\cdot x+1$ och $y=(\sqrt{2})^x$.



Lös olikheten $-x^2+\frac{5}{2}\cdot x+1\geq(\sqrt{2})^x$ med hjälp av bilden.

Du ska inte ha med någon beräkning, men du ska förklara vad du tittade på. (1p)

Lösning:

Den upp-och-ner-vända U-kurvan (en paragel) måste vara andragradsuttrycket, vänsterledet, och den uppåtlutande högerledet ($\sqrt{2} \approx 1{,}4 > 1$, så denna exponentialfunktion ska ge en kurva som lutar uppåt.). Frågan är "Var är vänsterledets värde högst?", vilket grafiskt motsvarar "i vilka områden ligger vänsterledskurvan ovanför högerledskurvan?". Det förefaller den göra mellan 0 och 2.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in [0, 2]}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. • Tolka en olikhet grafiskt. Övning 9.4.

Rättningsnorm: För poäng krävs rätt svar (där det måste vara uppenbart att författaren menade ett intervall) ihop med något som kan tolkas som en förklaring.

(b) Lös följande olikhet: $\dfrac{(x+2)^2}{x-2} < 0$ (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.9(f). Allt räknearbete är klart, det är bara teckenstudium som återstår. Det förefaller hända saker i $x = -2$ och $x = 2$:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+
VL	–	0	–	odef	+

Vi ville att uttrycket skulle vara negativt, vilket det är i alla punkter till vänster om $x = 2$ *utom* i $x = -2$.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{\, x \mid x < 2 \wedge x \neq -2 \,\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Fungerande angreppssätt och korrekt svar: 2p. Till stor del korrekt: 1p.

8. Funktionen f definieras enligt $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{om } -2 \le x < -1 \\ 1 & \text{om } -1 \le x < 2 \\ -x+3 & \text{om } \ \ 2 \le x < 4 \end{cases}$

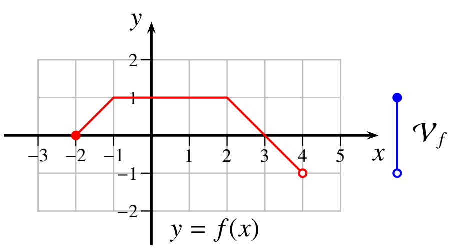
(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat! (1p)

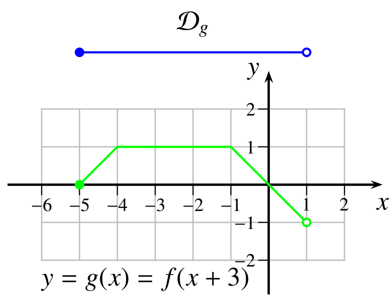
(b) Vad har f för värdemängd? Motivera! (1p)

(c) Vi gör en ny funktion g, där $g(x) = f(x+3)$. Vad har g för definitionsmängd? Motivera! (1p)

Lösning:

Vi gör alla deluppgifterna ihop:





(c)-uppgiften kan alternativt lösas genom att man ser att definitionsmängden för f är intervallet $-2 \le x < 4$, och det ger att, för att $g(x)$ ska gå att beräkna måste x uppfylla

$-2 \leq x+3 < 4$, och subtraherar man 3 från alla led får man ett uttryck för definitionsmängden.

$\boxed{\textit{Svar:} \text{ (a) Se bild. (b) } \mathcal{V}_f = (-1,1] \text{ (c) } \mathcal{D}_g = [-5,1)}$

Rättningsnorm: Inga avdrag för fel i öppet/slutet, och inte heller för notationsfel så länge det går att förstå vad som avsågs. På (b) och (c) ska svaren stämma med det man ritade på (a).

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Mälardalens universitet **Akademin för utbildning, kultur och kommunikation**	**MAA121** Matematik grundkurs Tentamen TEN1 – *Lösningsförslag* 2022.03.22 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

1. Sant eller falskt? Motivera dina svar kortfattat!

(a) $x = -4$ är en lösning till ekvationen $0 = \dfrac{x^2 + 8{\cdot}x + 16}{x^2 - 16}$. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.2(e).

Snabbt: Sätt in lösningsförslaget i högerledet och se om det blir vänsterledet. (Eftersom vänsterledet inte innehåller x behöver vi inte göra något där.)

$$\frac{(-4)^2 + 8{\cdot}(-4) + 16}{(-4)^2 - 16} = \frac{16 - 32 + 16}{16 - 16} = \frac{0}{0} = \text{odefinierat}$$

Inte fullt så snabbt: Lös ekvationen och se om -4 ingår i lösningsmängden.

En kvot är lika med noll om täljaren är noll samtidigt som nämnaren *inte* är det:

$$\begin{aligned} x^2 + 8{\cdot}x + 16 &= 0 \\ x^2 + 2{\cdot}4{\cdot}x + 4^2 &= 0 \\ (x+4)^2 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 - 16 &\neq 0 \\ x^2 - 4^2 &\neq 0 \\ (x+4){\cdot}(x-4) &\neq 0 \\ x \neq -4 &\wedge x \neq 4 \end{aligned}$$

x måste vara -4 och får samtidigt inte vara -4 eller 4. I så fall saknar ekvationen lösning, och -4 ingår inte i lösningsmängden.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Nej}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. Rekommenderad uppgift!

(b) 17 är ett rationellt tal. (1p)

Lösning:

Ett tal är rationellt om (och endast om) det kan skrivas som ett heltal dividerat med ett heltal, och $17 = 17/1$ och därmed rationellt.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Ja}}$

Kommentar: Alla heltal är också rationella tal (men inte tvärtom); $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Heltal, rationellt tal, reellt tal Övning 2.2.

(c) $4{\cdot}(a-6)^2 = (4{\cdot}a - 24)^2$ (1p)

Lösning:

Nej. Om vi t.ex. testar med $a = 0$ får vänsterledet värdet $4{\cdot}(-6)^2 = 4{\cdot}36 = 144$, medan högerledet får värdet $(-24)^2 = 576$. Dessa tal är inte lika!

En korrekt omskrivning av vänsterledet är

$$4{\cdot}(a-6)^2 = 2^2{\cdot}(a-6)^2 = (2{\cdot}(a-6))^2 = (2{\cdot}a-12)^2$$

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{Nej}}$

Kommentar: Detta är en mycket vanlig typ av felaktig omskrivning.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Större än, mindre än, lika med; Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer.

Rättningsnorm: Gäller samtliga deluppgifter: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering ger poäng.

2. Lös följande ekvation: $0 = 0{,}1{\cdot}x^2 + 0{,}03{\cdot}x - 0{,}004$ (3p)

Lösning:

Decimalform: Blir snyggare om man kastar om vänster och höger led:

$$\begin{aligned}
0{,}1{\cdot}x^2 + 0{,}03{\cdot}x - 0{,}004 &= 0 \\
x^2 + 0{,}3{\cdot}x - 0{,}04 &= 0 && \text{Multiplicera med 10} \\
x^2 + 2{\cdot}0{,}15{\cdot}x + 0{,}15^2 - 0{,}15^2 - 0{,}04 &= 0 && \text{Kvadratkomplettera} \\
(x+0{,}15)^2 - 0{,}0225 - 0{,}04 &= 0 && \text{Skriv som kvadrat, kvadrera} \\
(x+0{,}15)^2 &= 0{,}0625 && \text{Lägg ihop, "flytta över"} \\
(x+0{,}15)^2 &= 0{,}25^2 && \text{Skriv som kvadrat} \\
x + 0{,}15 &= \pm 0{,}25 && \text{Obs! } \pm \\
x &= -0{,}15 \pm 0{,}25 \\
x = 0{,}1 &\vee x = -0{,}4
\end{aligned}$$

Bråkform: De flesta räkningar är lättare att genomföra på bråkform än på decimalform:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{10}{\cdot}x^2 + \tfrac{3}{100}{\cdot}x - \tfrac{4}{1000} &= 0 \\
x^2 + \tfrac{3}{10}{\cdot}x - \tfrac{4}{100} &= 0 \\
x^2 + 2{\cdot}\tfrac{3}{20}{\cdot}x + (\tfrac{3}{20})^2 - (\tfrac{3}{20})^2 - \tfrac{4}{100} &= 0 \\
(x+\tfrac{3}{20})^2 - \tfrac{9}{400} - \tfrac{4\cdot4}{100\cdot4} &= 0 \\
(x+\tfrac{3}{20})^2 - \tfrac{9}{400} - \tfrac{16}{400} &= 0 \\
(x+\tfrac{3}{20})^2 &= \tfrac{25}{400} \\
(x+\tfrac{3}{20})^2 &= (\tfrac{5}{20})^2 \\
x + \tfrac{3}{20} &= \pm\tfrac{5}{20} \\
x &= -\tfrac{3}{20} \pm \tfrac{5}{20} \\
x = \tfrac{2}{20} &\vee x = -\tfrac{8}{20} \\
x = \tfrac{1}{10} &\vee x = -\tfrac{2}{5}
\end{aligned}$$

Substitution: De flesta räkningar är lättare att genomföra med heltal än med bråk:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{10}{\cdot}x^2 + \tfrac{3}{100}{\cdot}x - \tfrac{4}{1000} &= 0 \\
1000{\cdot}(\tfrac{1}{10}{\cdot}x^2 + \tfrac{3}{100}{\cdot}x - \tfrac{4}{1000}) &= 1000{\cdot}0 \\
100{\cdot}x^2 + 30{\cdot}x - 4 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(10{\cdot}x)^2 + 3{\cdot}10{\cdot}x - 4 &= 0 \qquad \boxed{\text{Sätt } 10{\cdot}x = t}\\
t^2 + 3{\cdot}t - 4 &= 0\\
t^2 + 2{\cdot}\tfrac{3}{2}{\cdot}t + (\tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{3}{2})^2 - 4 &= 0\\
(t + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} - 4{\cdot}\tfrac{4}{4} &= 0\\
(t + \tfrac{3}{2})^2 &= \tfrac{25}{4}\\
(t + \tfrac{3}{2})^2 &= (\tfrac{5}{2})^2\\
t + \tfrac{3}{2} &= \pm\tfrac{5}{2}\\
t = \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2} \;\vee\; & \quad t = -\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}\\
t = \tfrac{2}{2} \quad & \quad t = -\tfrac{8}{2}\\
t = 1 \quad & \quad t = -4\\
10{\cdot}x = 1 \quad & \quad 10{\cdot}x = -4\\
x = \tfrac{1}{10} \quad & \quad x = -\tfrac{4}{10}
\end{aligned}$$

(Detta lösningsförlag är inspirerat av några inlämnade lösningar, där den lösande försökt använda en metod som varken är pq-formeln eller kvadratkomplettering och som är enkel att använda på heltal men mindre lämpad för mer komplicerade situationer. Med denna omskrivning blir ekvationen möjlig att lösa med den metoden, som jag dock inte rekommenderar av beskrivninga skäl.)

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{\,0{,}1;\ -0{,}4\,\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning.

Rättningsnorm: pq-formeln: 0p. Provat sig fram: 0p. Helt rätt: 3p. Något mindre räknefel: 2p. Åtminstone klart visat att man behärskar kvadratkomplettering: 1p.

3. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även "slarvfel" klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{7}{6} - \frac{5}{9}\bigg/\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) \qquad (3p)$$

Lösning:

Bråket är mer lättläst om man skriver alla bråkstreck horisontellt. Division går före addition och subtraktion om inte parenteser ingriper, vilket de gör till höger om det sneda bråkstrecket men inte till vänster:

$$\frac{7}{6} - \frac{5}{9}\bigg/\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{6} - \frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}}$$

Bit för bit: Nämnaren:

$$\frac{1{\cdot}3}{8{\cdot}3} + \frac{1{\cdot}2}{12{\cdot}2} = \frac{3+2}{24} = \frac{5}{24}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{12}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{24}} = \frac{5}{9}\cdot\frac{24}{5} = \frac{\cancel{5}{\cdot}\cancel{3}{\cdot}8}{\cancel{3}{\cdot}3{\cdot}\cancel{5}} = \frac{8}{3}$$

Helheten:

$$\frac{7}{6}-\frac{\frac{5}{9}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}=\frac{7}{6}-\frac{8\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{7-16}{6}=-\frac{9}{6}=-\frac{3\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

Mer på en gång: Man kan också förlänga dubbelbråket med minsta gemensamma nämnare för alla inblandade bråk: $72 = 8\cdot 9 = 6\cdot 12$:

$$\frac{\left(\frac{5}{9}\right)\cdot 72}{\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)\cdot 72}=\frac{\frac{5\cdot 8\cdot\cancel{9}}{\cancel{9}}}{\frac{1\cdot\cancel{8}\cdot 9}{\cancel{8}}+\frac{1\cdot 6\cdot\cancel{12}}{\cancel{12}}}=\frac{40}{9+6}=\frac{40}{15}=\frac{\cancel{5}\cdot 8}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{8}{3}$$

Sedan fortsätter man enligt föregående förslag. Det beror på exakt vilka de ingående talen är om denna metod är enklare eller krångligare än ”bit för bit”.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

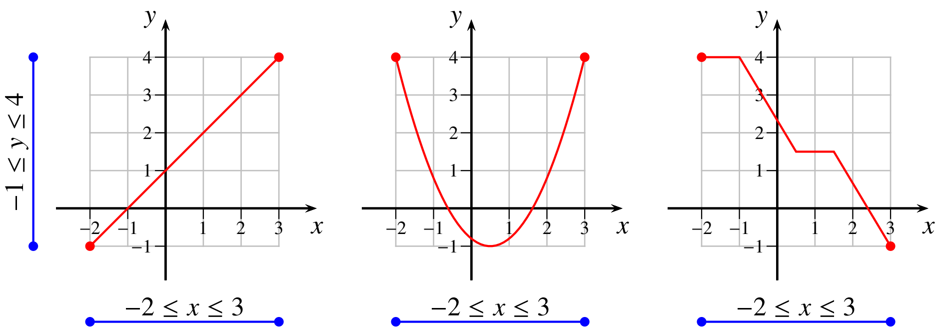
Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

4. Rita grafen för en funktion f där $\mathcal{D}_f = [-2, 3]$ och $\mathcal{V}_f = [-1, 4]$. (3p)

Lösning:

Vi säger att den oberoende variabeln heter x och den beroende y. Vi ska alltså rita en kurva som startar där $x = -1$ och slutar där $x = 3$ (information från definitionsmängden); vars lägsta punkt ligger där $y = -3$ och vars högsta punkt ligger där $y = 2$ och där alla y-värden däremellan finns med (information från värdemängden); där inget x har flera y medan det är tillåtet för ett y att höra till flera x (information ur ordet ”funktion”).

Det finns oändligt många korrekta lösningar (och oändligare många inkorrekta). Här är tre exempel, där det första nog är enklast möjliga lösning:



Bilden måste innehålla ett koordinatsystem, annars är det omöjligt att se om defintions- och värdemängderna är rätt.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Funktion • Graf • Definitionsmängd • Värdemängd; Du ska kunna göra följande: • Avgöra om en kurva är en funktionsgraf. • Bestämma definitions- och värdemängden för en funktion ur dess graf. (Dessa tillämpas här baklänges.)

Rättningsnorm: Preliminärt: funktion: 1p; rätt definitionsmängd: 1p; rätt värdemängd: 1p.

5. Lös följande olikhet: $\dfrac{1}{x-1} \le \dfrac{2}{x+3}$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 9.11(e).

Standardtaktik: skyffla över allt på samma sida om olikhetstecknet, sätt på gemensamt bråkstreck, faktorisera, teckenstudera.

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{x+3}$$
$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+3} \leq 0$$
$$\frac{(x+3)-2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{x+3-2\cdot x+2}{(x-1)\cdot(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{-x+5}{(x-1)\cdot(x+3)} \leq 0$$

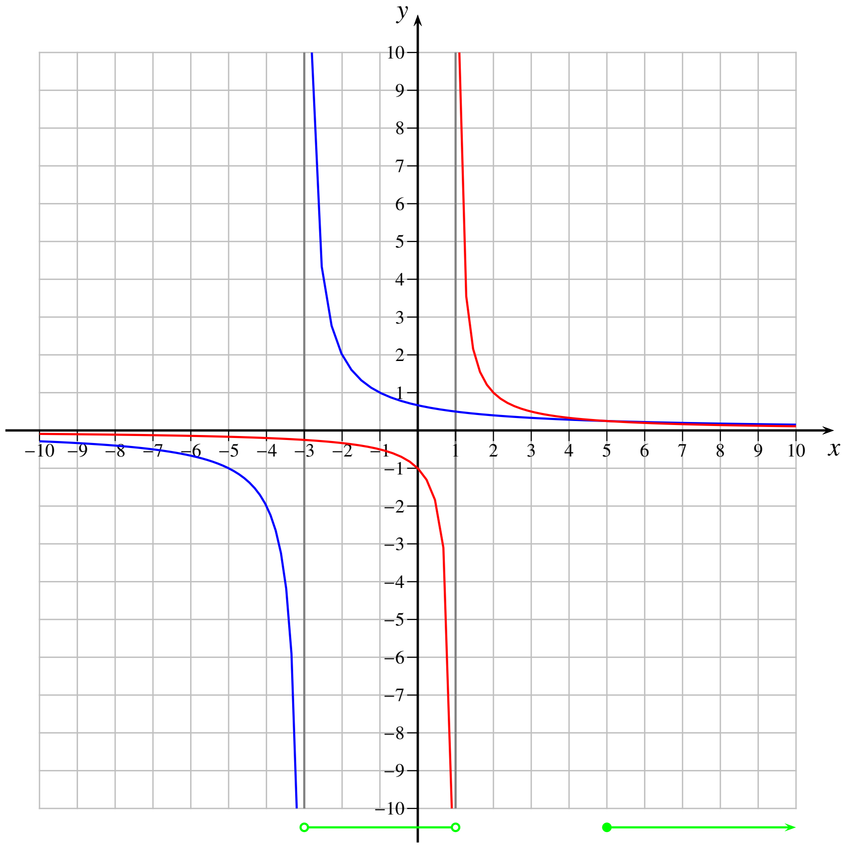
Teckenskiften då man passerar $-x+5=0$, $x-1=0$ och $x+3=0$, dvs. för $x \in \{5, 1, -3\}$. Teckentabell:

	$x<-3$	$x=-3$	$-3<x<1$	$x=1$	$1<x<5$	$x=5$	$x>5$
$-x+5$	+	+	+	+	+	0	−
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$x+3$	−	0	+	+	+	+	+
VL	+	odef	−	odef	+	0	−

Vi ville att uttrycket skulle vara negativt eller noll, vilket det verkar vara mellan −3 och 1 samt från och med 5.

$\boxed{\textit{Svar: } -3 < x < 1 \ \vee \ x \geq 5}$

Kommentar relaterad till uppgift 8: Ritar man upp $y = 1/(x-1)$ och $y = 2/(x+3)$ i samma koordinatsystem ser det ut så här:



Frågan motsvarar ”i vilka områden ligger den röda kurvan *lägre* än (eller på samma höjd som) den blåa kurvan?”. Fram till $x = -3$ ligger den blåa kurvan lägst. Efter $x = -3$ börjar den om ovanifrån, och ligger ovanför den röda fram till $x = 1$ där den röda börjar om ovanifrån. Vid $x = 5$ skär kurvorna varandra (likhet), och den röda ligger lägst efter denna punkt. Bilden överensstämmer alltså med det framräknade svaret.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något mindre räknefel, eller oklart vad svaret är: 2p. Åtminstone visat förståelse för problemet: 1p.

6. På samtliga deluppgifter här finns det oändligt många korrekta svar.

(a) Skriv upp ett fjärdegradspolynom som har nollställena 1 och -1 men inga andra reella nollställen. (1p)

Lösning:

Exempel: $(x+1)^2 \cdot (x-1)^2$ har de två dubbla nollställena -1 och 1. (Det kan anses ha fyra nollställen, där två är -1 och två är 1, så det är bara två olika.)

$(x^2+1) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$ har de två reella nollställena -1 och 1 (och desssutom de två icke-reella nollställena $\pm i$, från andragradsfaktorn.)

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • [. . .] reellt tal • Polynom • Grad • Nollställe • Nollfaktorlagen

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Ange två mängder som är disjunkta. (1p)

Lösning:

”Disjunkta” betyder ”har ingenting gemensamt”. Enklaste svaret är { } och { }, tomma mängden och tomma mängden. Eftersom tomma mängden inte innehåller någonting är den per definition disjunkt från varje mängd, sig själv inberäknad!

Något mindre konstiga exempel är de udda talen och de jämna talen, de positiva talen och de negativa talen, svenska 100-åringar och svenska 10-åringar, och icke överlappande intervall.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Disjunkta mängder

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel (och exemplen måste vara mängder).

(c) Skriv upp en sann implikation. (1p)

Lösning:

En implikation är ett påstående med strukturen ”om . . . så . . . ”. Absolut enklaste typen är ”om det regnar så regnar det”, ”om ett tal är jämnt så är det jämnt” och liknande.

Mer intressant är sådant som ”om ett tal slutar på 5 så är det delbart med 5”, ”om ett tal är större än 10 så är det större än 0”, ”om ett tal är delbart med 4 så är det delbart med 2”, ”om ett tal är ett heltal så är det ett rationellt tal”, ”om jag får minst 14 poäng så blir jag godkänd på tentan” och liknande.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. Men om flera av deluppgifterna är felaktiga på så sätt att man kan se att begreppet det handlade om var misstolkat, men där lösningen är god utgående från en felaktig tolkning, så kan en sammanfattningspoäng ges.

7. Förenkla följande uttryck maximalt. Utgå från att alla talen är positiva.

$$\frac{\sqrt{a \cdot b^4} \cdot c^3}{a \cdot \sqrt[3]{b \cdot c^2}}$$

Även ”slarvfel” kommer att räknas som fel vid rättningen. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 5.10(d)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{a\cdot b^4}\cdot c^3}{a\cdot\sqrt[3]{b\cdot c^2}} &= \frac{(a\cdot b^4)^{1/2}\cdot c^3}{a\cdot(b\cdot c^2)^{1/3}} && \color{blue}{\sqrt[n]{x}=x^{1/n}}\\
&= \frac{a^{1/2}\cdot(b^4)^{1/2}\cdot c^3}{a\cdot b^{1/3}\cdot(c^2)^{1/3}} && \color{blue}{(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n}\\
&= \frac{a^{1/2}\cdot b^{4\cdot1/2}\cdot c^3}{a\cdot b^{1/3}\cdot c^{2\cdot1/3}} && \color{blue}{(x^m)^n = x^{m\cdot n}}\\
&= \frac{a^{1/2}\cdot b^2\cdot c^3}{a\cdot b^{1/3}\cdot c^{2/3}}\\
&= a^{1/2-1}\cdot b^{2-1/3}\cdot c^{3-2/3} && \color{blue}{x^m/x^n = x^{m-n}}\\
&= a^{1/2-2/2}\cdot b^{6/3-1/3}\cdot c^{9/3-2/3}\\
&= \boxed{a^{-1/2}\cdot b^{5/3}\cdot c^{7/3} = \frac{b^{5/3}\cdot c^{7/3}}{a^{1/2}}}
\end{aligned}
$$

Båda sätten att skriva svaret är lika rätt, och även svar skrivna med rottecken går bra.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll).

8. Din kompis (som har rest på sina inlämningar) kommer till dig och ber om hjälp.

> Kolla, jag har löst den här olikheten och fått det här svaret. Och jag har ritat upp vänsterledet och högerledet i samma figur med dator, och bilden blev så här. Men nu ska jag använda bilden för att kontrollera om jag har räknat rätt. Vad är det jag ska titta på i bilden för att se det?

Förklara för din kompis vad man tittar efter i bild då man undersöker en olikhet. (3p)

För full poäng fordras att det känns sannolikt att din kompis skulle kunna lösa en uppgift av denna typ baserat på din förklaring. Delpoäng om det verkar som att du själv vet hur man ska göra men det är tveksamt om någon som inte redan kan det kan tolka förklaringen.

Lösning:

Exempelvis:

”Du ville veta för vilka x som högerledet är större än vänsterledet. ”Större än” är samma sak som ”har högre värde än”. Du ska titta efter i vilka områden som högerledskurvan ligger ovanför vänsterledskurvan. Om de områdena i bilden är samma som intervallen som du tog fram i din beräkning så har du räknat rätt. Annars har du räknat fel, och ska göra om uppgiften innan du lämnar in den.”

Kommentar 1: Uppgiften är i likhet med alla ”din kompis”-frågor baserad på verkliga, vanliga studentproblem. Just det här kommer från olikhetsproblemet på inlämningsuppgifterna, där det är mycket vanligt att få in en korrekt löst olikhet, en korrekt ritad bild, men ingen förklaring till vad bilden har med lösningen av olikheten att göra.

Kommentar 2: En mycket stor del av lösningarna här förklarade för kompisen hur man löser olikheter beräkningsvägen. Men det kompisen frågade efter var hur man läser ut svaret ur en bild. (Kompisen hade redan räknat och ritat.) Av de som diskuterade bilden var det många som angav att man ska titta efter skärningar. Skärningarna visar var det råder *likhet* och är det man ska titta efter då man kontrollerar en ekvation. För olikheter är det mer än så som måste kontrolleras.

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tolka en olikhet grafiskt. Övning 9.9–9.13.

Rättningsnorm: Om det verkar troligt att ”kompisen” skulle kunna göra den efterfrågade kontrollen baserat på förklaringen: 3p. Om förklaringen bara är begriplig för personer som redan vet hur man gör: 1p. Mellanting: 2p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Mälardalens universitet

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

Tentamen TEN1 – *Lösningsförslag*

2022.06.07 14.30-17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Vi har följande mängder:

$$A = \{2,\ 3\} \qquad B = (2,\ 3) \qquad C = [2,\ 3]$$

(a) Ange ett tal som ingår i B men inte i A. (1p)

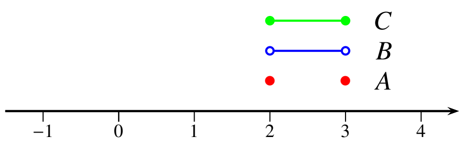
(b) Ange ett tal som ingår i C men inte i B. (1p)

(c) Ange ett tal som inte ingår i C. (1p)

Inga motiveringar behövs.

Lösning:

Det som skiljer uttrycken åt är parentestyperna. A är en mängd, och består av de två uppräknade talen och inget annat. B är en mängd av typen öppet interall, och består av alla reella tal mellan de två talen (själva talen exkluderade). C är ett slutet intervall, och består av de två talen och alla rella tal däremellan. I det här fallet är $C = A \cup B$. Illustrerat på tallinjen ser det ut så här:



(a) Vilket tal som helst som ligger mellan 2 och 3, t.ex. $\boxed{2{,}5}$

(b) Här är det bara de två ändpunkterna som är möjliga svar, t.ex. $\boxed{3}$

(c) Vilket tal som helst som ligger utanför området, t.ex. $\boxed{100}$

Rättningsnorm: Det här kan nog bara bli rätt eller fel.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{\frac{3}{10}-\frac{2}{15}}{\frac{5}{14}-\frac{4}{21}}$$ (3p)

Lösning:

Bit för bit: Täljaren:

$$\frac{3\cdot 3}{10\cdot 3}-\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{9-4}{30}=\frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\cdot 6}=\frac{1}{6}$$

Nämnaren

$$\frac{5\cdot 3}{14\cdot 3}-\frac{4\cdot 2}{21\cdot 2}=\frac{15-8}{42}=\frac{\cancel{7}}{6\cdot\cancel{7}}=\frac{1}{6}$$

Helheten:

$$\frac{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}{\frac{3}{14}-\frac{1}{21}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}=\boxed{1}$$

Notera att ”ett tal delat med sig självt” alltid blir 1 (utom om talet ifråga är noll) så det behövs inga steg mellan $\frac{1}{6}/\frac{1}{6}$ och 1.

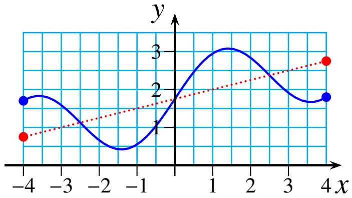
Mer på en gång: Minsta gemensamma nämnare för bråket som helhet är $210 = 10\cdot 21 = 14\cdot 15$. Förlänger vi med den plattar bråket ut sig:

$$\frac{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right)\cdot 210}{\left(\frac{3}{14}-\frac{1}{21}\right)\cdot 210}=\frac{\frac{1\cdot\cancel{10}\cdot 21}{\cancel{10}}+\frac{1\cdot 14\cdot\cancel{15}}{\cancel{15}}}{\frac{3\cdot\cancel{14}\cdot 15}{\cancel{14}}-\frac{1\cdot 10\cdot\cancel{21}}{\cancel{21}}}=\frac{21+14}{45-10}=\frac{35}{35}=\boxed{1}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel.

3. I bilden finns graferna för funktionen f (heldragen) och funktionen g (prickad). Besvara följande frågor, och motivera ditt svar. (Motiveringarna förutsätts bestå av en mening.)



(a) För vilka värden på x är $f(x) = g(x)$?

(b) För vilka värden på x är $f(x) > g(x)$?

(c) För vilka värden på x är $f(x) < g(x)$?

(d) Om vi vet att $x_1 < x_2$, kan vi då vara säkra på att $f(x_1) < f(x_2)$?

(e) Samma fråga för g!

1–2 rätt: 1p. 3–4 rätt: 2p. 5 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 4.13. Funktionerna beräknas för övrigt enligt $f(x) = \sin(2{\cdot}\pi{\cdot}x/5) + x/4 + 7/4$ respektiva $g(x) = x/4 + 7/4$

(a) Likhet innebär att kurvorna ligger på samma höjd; de skär varandra.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-2{,}5,\ 0,\ 2{,}5\}}$

(b) Större än innebär högre värde, innebär ligger ovanför:

$\boxed{\textit{Svar: } x \in [-4,\ -2{,}5) \cup (0,\ 2{,}5)}$

(c) Se ovan, fast nu är det den andra kurvan som ska ligga högst:

$\boxed{\textit{Svar: } x \in (-2{,}5,\ 0) \cup (2{,}5,\ 4]}$

(d) Kurvan går omväxlande uppåt och neråt, så det verkar bero på exakt vilka tal vi tittar på.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Nej}}$

(e) Kurvan lutar uppåt, ju större x är, ju större blir y.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Ja}}$

Kommentar till (d) och (e): Ett mycket vanligt felresonemang är att utgå från att större indata automatiskt genererar större utdata. Det stämmer ju för en del funktioner, men definitivt inte för alla, och är därför något som man aldrig ska ta för givet utan att kontrollera hur den funktion man arbetar med faktiskt ser ut.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Större än, mindre än, lika med; Du ska kunna göra följande: • Tolka en ekvation grafiskt. • Tolka en olikhet grafiskt. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering ger poäng.

4. Lös följande olikhet: $\dfrac{(x-0{,}3)\cdot(x-5)\cdot(x+70)}{(x-20)\cdot(x+4)\cdot(x-0{,}6)} \geq 0$ (3p)

Lösning:

Allt beräkningsarbete är redan klart, så man kan gå direkt på teckenanalys. Uttrycket kommer att byta tecken i $x - 0{,}3 = 0$, $x - 5 = 0$, $x + 70 = 0$, $x - 20 = 0$, $x + 4 = 0$ och $x - 0{,}6 = 0$, dvs för $x \in \{0{,}3; 5; -70; 20; -4; 0{,}6\}$. Dessa 6 punkter kommer att dela tallinjen i 7 delar. Tabellen måste skrivas med punkterna i den ordning de ligger på tallinjen:

		−70		−4		0,3		0,6		5		20	
$x-0{,}3$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$x-5$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
$x+70$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-20$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$x+4$	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x-0{,}6$	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
VL	+	0	−	odef	+	0	−	odef	+	0	−	odef	+

$\boxed{\textit{Svar: } x \in (-\infty, -70] \cup (-4, 0{,}3] \cup (0{,}6, 5] \cup (20, \infty)}$

Kommentar: Notera att det inte finns någon anledning att multiplicera ihop parenteserna! Uppgiften är inspirerad av diskussion med studenter som använder en annan metod än denna, en metod som (enligt mig) fungerar bra på mindre problem men blir ohanterlig på större problem. Det var dock ingen som valde att använda denna metod, så jag fick inte se hur pass krångligt det blev.

Notera också att ”kompisen” från fråga 8 skulle fått problem även här. Testar man med några lätträknade heltal så missar man det som händer mellan 0,3 och 0,6, och man missar förmodligen också att tecknet slår om vid −70 och 20.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. Övning 9.9

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Börjat rätt: 1p. Mellanting: 2p.

5. Sant eller falskt? Motivera dina svar kortfattat!

(a) $x + 2$ är en faktor i $x^3 - 7{\cdot}x^2 + 7{\cdot}x + 15$. (1p)

(b) ”Ett heltal är delbart med 5” $\Rightarrow$ ”heltalet slutar på 5” (1p)

(c) Ekvationen $x + 3 = 3 + x$ har flera stycken lösningar. (1p)

Lösning:

(a) Faktorsatsen säger att $x - a$ är en faktor i polynomet $p(x)$ om och endast om $p(a) = 0$, så man kan lika gärna undersöka om −2 är ett nollställe.

Snabbast: Sats 7.6: ”Om ett polynom med högstagradskoefficient 1 och heltalskoefficienter i övrigt har ett heltalsnollställe så är detta heltal en faktor i konstanttermen.” Detta polynom har heltalskoefficienter, konstanttermen är 15, och 2 är **inte** en faktor i det udda talet 15.

Snabbt: Faktorsatsen: kolla vad som händer om man sätter in −2 på x:s plats:

$$(-2)^3 - 7{\cdot}(-2)^2 + 7{\cdot}(-2) + 15 = -8 - 7{\cdot}4 - 14 + 15 = -8 - 28 - 14 + 15 \neq 0$$

Halvsnabbt: Om något är en faktor i något annat så ska man få rest noll då man dividerar. Testa!

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 9{\cdot}x \;\; + 25 \\ \hline
x+2 & x^3 - 7{\cdot}x^2 + \;\; 7{\cdot}x + 15 \\
 & -(x^3 + 2{\cdot}x^2) \\ \cline{2-2}
 & \quad -9{\cdot}x^2 + \;\; 7{\cdot}x \\
 & \quad -(-9{\cdot}x^2 - 18{\cdot}x) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 25{\cdot}x + 15 \\
 & \qquad\quad -(25{\cdot}x + 50) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad -35
\end{array}
$$

Långsamt: Faktorisera polynomet förutsättningslöst, och se om någon av faktorerna visar sig vara $x + 2$. Faktoriseringen är $(x + 1){\cdot}(x - 3){\cdot}(x - 5)$

Svar: Nej

(b) En variant av rekommenderad uppgift 1.3(a). Falskt, för det är inte *alla* med 5 delbara heltal som slutar på 5; det är lika många som slutar på 0 (som 10). En implikation är bara sann om sanning i pilens början garanterar sanning i pilens slut. (En skrivande beskrev utsagan som en ”halvsanning”, vilket jag tycker beskriver den bra!)

Svar: Nej

(c) Förenklar man ekvationen får man kvar den högst sanna utsagan $0 = 0$, och den är sann oavsett vad x är. *Alla* tal är lösningar till ekvationen, och det måste väl klassas som ”flera stycken”.

Några skrivande demonstrerade genom att sätta in två slumpvalda x och visa att de var lösningar, vilket ju på ett övertygande sätt visade att det finns flera stycken.

Svar: Ja

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Implikation • Lösning, lösningsmängd; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter.

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en relevant motivering ger poäng.

6. Studera uttrycket $\dfrac{6{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2}{9{\cdot}x^3 - x}$

(a) Förkorta uttrycket. (2p)

(b) Ange för vilket/vilka x förkortningen inte är giltig. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 7.20(e).

(a) Förkortning fordrar faktorisering:

$$\begin{aligned}
\frac{6{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2}{9{\cdot}x^3 - x} &= \frac{2{\cdot}x^2{\cdot}(3{\cdot}x+1)}{x{\cdot}(9{\cdot}x^2-1)} \\
&= \frac{2{\cdot}x{\cdot}\cancel{x}{\cdot}(3{\cdot}x+1)}{\cancel{x}{\cdot}((3{\cdot}x)^2 - 1^2)} \\
&= \frac{2{\cdot}x{\cdot}\cancel{(3{\cdot}x+1)}}{\cancel{(3{\cdot}x+1)}{\cdot}(3{\cdot}x-1)} \\
&= \boxed{\frac{2{\cdot}x}{3{\cdot}x-1}}
\end{aligned}$$

Kommentar: På denna uppgift förekom mycket ”kreativ bråkräkning”. Observera att det är samma bråkräkningsregler för ”bokstäver” som för ”siffror”. Man kan t.ex. inte göra

$$\frac{6{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2}{9{\cdot}x^3 - x} = \frac{6{\cdot}x^3 + 2{\cdot}x^2}{6{\cdot}x^3 + 3{\cdot}x^2 - x} \overset{☠}{=} \frac{2{\cdot}x^2}{3{\cdot}x^2 - x}$$

lika lite som man man kan göra

$$\frac{3}{4} = \frac{1+2}{1+3} \overset{☠}{=} \frac{2}{3}$$

Man kan ”stryka” gemensamma *faktorer* men inte gemensamma *termer*. Och faktorerna ifråga måste vara faktorer i *hela* täljaren och *hela* nämnaren. $6{\cdot}x^3$ i täljaren och $9{\cdot}x^3$ i nämnaren innehåller båda faktorn 3, men den kan inte förkortas bort eftersom den inte ingår i termerna $2{\cdot}x^2$ och $-x$.

(b) Bråkförlängnings/förkortningregeln är giltig förutsatt att faktorn som man förlänger eller förkortar med inte är noll. Så här krävs att $x \neq 0$ och att $3{\cdot}x + 1 \neq 0$, dvs. att $x \neq -1/3$. För dessa värden på x är det oförenklade uttrycket odefinierat medan det förenklade är definierat, så de är inte *lika med* varandra. (För $x = 1/3$ är ingendera uttrycket definierat, vilket är en annan typ av problem.)

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Förkortningarna är giltiga om } x \notin \{0, -1/3\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • [. . .] bryta ut gemensamma faktorer. • Förenkla rationella uttryck och kunna ange under vilka omständigheter förenklingarna är giltiga.

Rättningsnorm: (a) Helt rätt: 2p. Slarvfel: 1p. (b) Kan nog bara bli rätt eller fel, men inget avdrag för följdfel.

7. Lös följande ekvation: $x + 2 = -2{\cdot}\sqrt{x+2}$ (3p)

Lösning:

Standardlösning: Kvadrera för att ”bli av med” rottecknet, men kom ihåg att detta kan introducera falska rötter.

$$\begin{aligned}
x + 2 &= -2{\cdot}\sqrt{x+2} \\
(x+2)^2 &= (-2{\cdot}\sqrt{x+2})^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2\cdot 2\cdot x + 2^2 &= (-2)^2\cdot(x+2)\\
x^2 + 4\cdot x + 4 &= 4\cdot x + 8\\
x^2 - 4 &= 0\\
x &= \pm\sqrt{4} = \pm 2
\end{aligned}
$$

Så talen 2 och −2 *kan* vara lösningar (vilket inga andra tal kan vara). Är de det?

$$
x = 2 \quad \begin{cases} \mathrm{VL} = {\color{red}2} + 2 = 4 \\ \mathrm{HL} = -2\cdot\sqrt{{\color{red}2} + 2} = -2\cdot\sqrt{4} = -2\cdot 2 = -4 \end{cases}
$$

$$
x = -2 \begin{cases} \mathrm{VL} = {\color{red}-2} + 2 = 0 \\ \mathrm{HL} = -2\cdot\sqrt{{\color{red}-2} + 2} = -2\cdot\sqrt{0} = -2\cdot 0 = 0 \end{cases}
$$

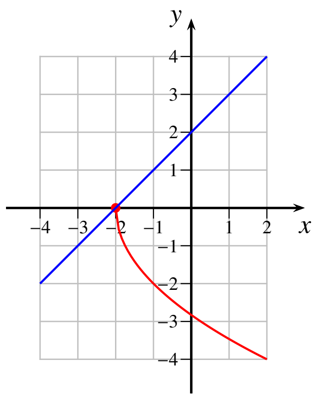
Så $x = -2$ funkar, medan $x = 2$ var en falskt rot introducerad av kvadreringen. (Notera att *kvadraten* på vänster och höger led är lika för detta x-värde.)

Substitution: Man kan också notera att $x + 2$ finns med på flera ställen, och se om det blir enklare om man kallar detta uttryck för t:

$$
\begin{aligned}
{\color{blue}x + 2} &= -2\cdot\sqrt{{\color{blue}x+2}}\\
{\color{blue}t} &= -2\cdot\sqrt{t}\\
t^2 &= (-2\cdot\sqrt{t})^2\\
t^2 &= 4\cdot t\\
t^2 - 4\cdot t &= 0\\
t\cdot(t-4) &= 0\\
t = 0 \quad &\vee \quad t - 4 = 0\\
x + 2 = 0 \quad & \qquad t = 4\\
x = -2 \quad & \quad x + 2 = 4\\
& \qquad x = 2
\end{aligned}
$$

Man vann kanske ingenting på detta; kvadreringen var enklare men det blev fler steg i beräkningen. Men i andra fall kan sådant här underlätta rejält.

Grafiskt: $y = x + 2$ är en rät linje. $y = -2\cdot\sqrt{x+2}$ ser ut som $y = \sqrt{x}$, fast flyttat 2 steg åt vänster, uttöjd med en faktor 2 på höjden samt upp-och-nervänd. Uppritat:



Rotkurvans startpunkt $x = -2$ ligger på linjen; däremot finns ingen skärning vid $x = 2$.

$\boxed{\textit{Svar: } x = -2}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Utnyttja substitution vid ekvationslösning. (• Lösa ekvationer innehållande rotuttryck.) • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Övning 8.24.

Rättningsnorm: Fungerande angreppssätt: 1p. Korrekt genomfört: 1p. Kastat den falska roten: 1p.

8. Du och din kompis söker det lägsta värdet hos en andragradsfunktion p, där $p(x) = x^2 + \frac{1}{5}\cdot x + \frac{1}{5}$

(a) Din kompis har ställt upp följande värdetabell:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$121/5$	$77/5$	$43/5$	$19/5$	1	$1/5$	$7/5$	$23/5$	$49/5$	17	$131/5$

”Lägsta värdet är $1/5$”, säger kompisen.

Förklara snabbt för kompisen vad som är fel i resonemanget. (Det räcker inte med att lösa (b)-uppgiften och säga ”för att det är det här som är rätt svar”, utan det väsentliga är vad som är fel med att göra så här.) (1p)

Lösning:

”Du har bara testat med heltal. Om det lägsta värdet antas i ett x som inte är ett heltal så hittar du det inte med den här metoden.”.

Lägsta värdet för ett andragradsuttryck antas för övrigt på symmetrilinjen, så om lägsta värdet hade varit vid $x = 0$ skulle y-värdena vid $x = 1$ och $x = -1$ ha varit lika. Så det går direkt att se att kompisens svar omöjligt kan vara korrekt.

Referenser: ingår i så många olika punkter att det verkar hopplöst att räkna upp allihop!

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Ta fram det lägsta värdet.

(Derivataresonemang får ej användas.) (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.17(f), med utbytt variabelnamn och första steget genomfört.

Extremvärdet kan utläsas ur den kvadratkompletterade formen:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + \tfrac{1}{5}\cdot x + \tfrac{1}{5} \\ &= x^2 + 2\cdot\tfrac{1}{10}\cdot x + (\tfrac{1}{10})^2 - (\tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{1}{5} \\ &= (x + \tfrac{1}{10})^2 - \tfrac{1}{100} + \tfrac{1\cdot 20}{5\cdot 20} \\ &= (x + \tfrac{1}{10})^2 + \tfrac{19}{100} \end{aligned}$$

Lägsta värdet som kvadratuttrycket kan anta är 0 (och det antas för $x = -1/10$), så lägsta värdet hos uttrycket som helhet ges av den andra termen: $19/100$.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{Det lägsta värdet är } 19/100}$

Kommentar: Vi ser här ett exempel på ett andragradsproblem som inte kan lösas med ”pq-formeln”, men där kvadratkomplettering tar fram svaret. (Dessutom ett exempel på ett problem där heltalsresonemang inte fungerar.)

Det är inte heller korrekt att ställa upp det hela som ekvationen $x^2 + \frac{1}{5}\cdot x + \frac{1}{5} = 0$. Det kan man göra om man undrar *var* y-värdena är noll (vilket i det här fallet är ingenstans). Det vi vill veta är *vad* det lägsta y-värdet är.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Kvadratkomplettera ett andragradsuttryck, och läsa ut extrempunkt och extremvärde ur den kvadratkompletterade formen. Del av rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Kommit halvvägs: 1p.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Mälardalens universitet
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

Tentamen TEN1 – *Lösningsförslag*

2022.08.16 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

1. Här är en värdetabell för en funktion f:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,13	0,20	0,30	0,44	0,67	1,0	1,5	2,2	3,4	5,1	7,6

(Värdena är avrundade till två värdesiffror.)

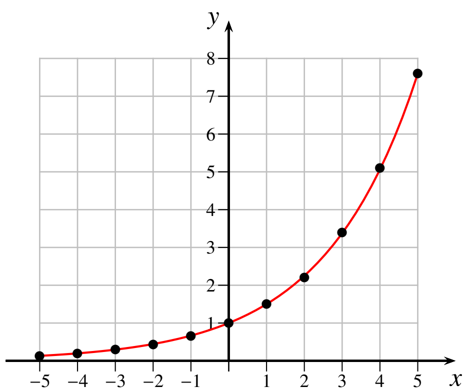
(a) Skissa funktionens graf. (1p)

(b) Vilken typ av funktion bedömer du att detta är? (1p)

(c) Du behöver ha tag på värdet på $f(0{,}5)$, vilket inte finns med i tabellen. Bestäm värdet på ett ungefär, och förklara hur du gör. (1p)

Lösning:

(a)



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en enkel funktion. Ingår som delmoment i ganska många rekommenderade uppgifter.

Rättningsnorm: Kurvan ska vara så tydlig att det skulle vara möjligt att återskapa värdetabellen ur den (vilket kräver att koordinatsystemet är graderat).

(b) Det här ser ut som en $\boxed{\text{exponentialfunktion}}$. Ska man vara ännu mer precis så ser det ut som att $f(x) = 1{,}5^x$.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bedöma vad en graf motsvarar för typ av funktion. Övning 5.22.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel (ordet ”exponentialfunktion” räcker.)

(c) I brist på bättre idéer: $x = 0{,}5$ ligger mitt emellan $x = 0$ och $x = 1$ som vi har information om. Vi kan anta att funktionsvärdet då ligger ungefär mitt emellan $f(0) = 1$ och $f(1) = 1{,}5$. Så $f(0{,}5) \approx 1{,}25$ verkar rimligt. Ska vi avrunda åt något håll verkar avrundning neråt mest korrekt givet hur kurvan är böjd.

Om man vill gå efter den uppskattade formeln har vi $f(0{,}5) = (1{,}5)^{0{,}5} = \sqrt{1{,}5}$. $1{,}2^2 = 1{,}44 < 1{,}5$, $1{,}3^2 = 1{,}69 > 1{,}5$. Så svaret ligger mellan 1,2 och 1,3, och närmare 1,2 än 1,3.

$\boxed{\textit{Svar: } f(0{,}5) \approx 1{,}2}$

Kommentar: Frågan betyder alltså ”x är 0,5; vad är y?”, men en stor andel av de skrivande tolkade den som ”y är 0,5; vad är x?”. Ni får gärna tala om för mig hur ni tänkte, för detta tyder på att det är något som behöver lyftas tydligare i kursen.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra en linjär interpolation.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

2. Förenkla följande bråk maximalt. Vid additioner och subtraktioner ska minsta gemensamma nämnare användas. Även ”slarvfel” klassas som fel vid poängsättningen.

$$\frac{9}{8} - \frac{21}{20}\Big/\left(\frac{7}{6} - \frac{7}{15}\right) \qquad (3p)$$

Lösning:

Bråket är mer lättläst om man skriver alla bråkstreck horisontellt. Division går före addition och subtraktion om inte parenteser ingriper, vilket de gör till höger om det sneda bråkstrecket men inte till vänster:

$$\frac{9}{8} - \frac{21}{20}\Big/\left(\frac{7}{6} - \frac{7}{15}\right) = \frac{9}{8} - \frac{\frac{21}{20}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{15}}$$

Observera att man inte behöver använda några parenteser då bråket är skrivet med horisontella bråkstreck; det att subtraktionen står under det långa bråkstrecket indikerar att den måste genomföras innan divisionen som bråkstrecket visar.

Bit för bit: Nämnaren:

$$\frac{7}{6} - \frac{7}{15} = \frac{7\cdot 5}{6\cdot 5} - \frac{7\cdot 2}{15\cdot 2} = \frac{35-14}{30} = \frac{21}{30} = \frac{\cancel{3}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot 10} = \frac{7}{10}$$

Dubbelbråket:

$$\frac{\frac{21}{20}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{15}} = \frac{\frac{21}{20}}{\frac{7}{10}} = \frac{21}{20}\cdot\frac{10}{7} = \frac{3\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{10}}{2\cdot\cancel{10}\cdot\cancel{7}} = \frac{3}{2}$$

Helheten:

$$\frac{9}{8} - \frac{\frac{21}{20}}{\frac{7}{6} - \frac{7}{15}} = \frac{9}{8} - \frac{3\cdot 4}{2\cdot 4} = \frac{9-12}{8} = \boxed{-\frac{3}{8}}$$

Mer på en gång: Dubbelbråket kan också hanteras genom att man multiplicerar med minsta gemensamma nämnare för både täljare och nämnare, $60 = 6\cdot 5 = 15\cdot 4 = 20\cdot 3$, så att bråket plattar ut sig:

$$\frac{\frac{21}{20}\cdot 60}{\left(\frac{7}{6}-\frac{7}{15}\right)\cdot 60} = \frac{\frac{21\cdot\cancel{20}\cdot 3}{\cancel{20}}}{\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot 10}{\cancel{6}} - \frac{7\cdot\cancel{15}\cdot 4}{\cancel{15}}} = \frac{63}{70-28} = \frac{63}{42} = \frac{3\cdot\cancel{21}}{2\cdot\cancel{21}} = \frac{3}{2}$$

och så avslutar man enligt föregående förslag.

Notation: Det **ska** vara likhetstecken mellan stegen i de olika beräkningarna, för själva poängen är att uttrycker representerar samma tal, de är *lika med* varandra. Däremot ska det inte vara likhetstecken mellan de separata beräkningarna.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma minsta gemensamma nämnare för två bråk som kan hanteras med huvudräkning. Exempel 3.1, Övning 3.25–29.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll). Att inte använda mgn räknas som ett fel, och att ta fel på bråkets uppbyggnad *är* ett fel.

3. Ange korrekt svarsalternativ.

(a) $1/2 + 1$ är lika med
i) $1/3$ ii) $3/2$

(b) $\sqrt{4\cdot x + 12}$ är lika med
i) $2\cdot\sqrt{x+3}$ ii) $4\cdot\sqrt{x+3}$ iii) $16\cdot\sqrt{x+3}$

(c) -10^2 är lika med
i) 100 ii) -100

(d) $[2,4]\cup[3,5]$ är lika med
i) $[2,5]$ ii) $[3,4]$ iii) $[2,3,4,5]$

(e) $\sqrt{25}$ är lika med
i) 5 ii) -5 iii) ± 5

Endast svar behövs. 1–2 rätt: 1p;2–4 rätt: 2p. 5 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

Vi motiverar ändå:

(a) $\boxed{\text{ii}}$ Division går före addition, så $\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}+\frac{2}{2}=\frac{3}{2}$.

(b) $\boxed{\text{i}}$ $\sqrt{4\cdot x+12} = \sqrt{4\cdot(x+3)} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{x+3} = 2\cdot\sqrt{x+3}$. Är man osäker kan man kolla med något enkelt värde, som $x = 1$:

$$\sqrt{4\cdot 1+12} = \sqrt{16} = 4 \qquad 2\cdot\sqrt{1+3} = 2\cdot\sqrt{4} = 2\cdot 2 = 4$$
$$4\cdot\sqrt{1+3} = 4\cdot\sqrt{4} = 4\cdot 2 = 8$$
$$16\cdot\sqrt{1+3} = 16\cdot\sqrt{4} = 16\cdot 2 = 32$$

Testet utesluter ii och iii som rimliga svar. (Lösning inlämnad av tentand, så bra att jag ville visa det.)

(c) $\boxed{\text{ii}}$ Exponentiering går före det mesta, unärt minus inberäknat. Vill man ha med minustecknet i kvadreringen måste man skriva $(-10)^2$.

(d) $\boxed{\text{i}}$ $\cup$ står för union, hakparenteser för slutna intervall (alla tal från och med det första till och med det andra). Alla tal mellan 2 och 4 ihop med alla tal mellan 3 och 5 blir alla tal mellan 2 och 5. Alternativ ii hade varit rätt om det stått $\cap$ istället för $\cup$. Alternativ iii vet jag inte vad det skrivna formellt betyder, men det ser ut som något skrivet av en person som tror att intervallet $[2, 4]$ bara består av talen 2 och 4 och inte av alla tal däremellan också. (Om det varit måsvingar istället för hakparenteser hade detta varit korrekt, för då hade uttrycket stått för ”de uppräknade talen och inget annat”.)

(e) $\boxed{\text{i}}$ Kvadratroten ur ett tal är definierad som ”det *ickenegativa* tal som i kvadrat blir. . . ”. (Det är därför man har ”plus/minus roten” i pq-formeln; om rottecknet representerat båda talen hade plus/minus inte behövts.)

Referenser: Bland annat Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Rot • Union [. . .]; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som +, −, · och /) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Snabb och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. • Multiplicera ihop uttryck och bryta ut gemensamma faktorer. • Räkna med okomplicerade mängder (exempelvis intervall).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, och poängsättningen framgår av frågan. Svar som inte går att begripa vilket alternativ de antas betyda eller vilken deluppgift de hör till räknas som felaktiga.

4. Funktionen f definieras enligt $f(x) = \sqrt{0{,}25 - x^2}$. Bestäm f:s definitionsmängd. (3p)

Lösning:

Om inte annat sägs är definitionsmängden de x som inte ger resultatet *error* då man sätter in dem i formeln. Det går inte bra att dra roten ur negativa tal, så definitionsmängden är de x som uppfyller $0{,}25 - x^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 0{,}25 - x^2 &\geq 0 \\ 0{,}5^2 - x^2 &\geq 0 \\ (0{,}5 + x)\cdot(0{,}5 - x) &\geq 0 \end{aligned}$$

Detta kan antagligen lösas med inspektion, men formell analys är:

	$x < -0{,}5$	$x = -0{,}5$	$-0{,}5 < x < 0{,}5$	$x = 0{,}5$	$x > 0{,}5$
$0{,}5 + x$	−	0	+	+	+
$0{,}5 - x$	+	+	+	0	−
$0{,}25 - x^2$	−	0	+	0	−

$\boxed{\textit{Svar: } \mathcal{D}_f = [-0{,}5; 0{,}5]}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Definitionsmängd • Rot; Du ska kunna göra följande: • Bestämma definitionsmängden för en enkel funktion ur beräkningsformeln. • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck.

Rättningsnorm: Kommit till olikheten: 1p. Löst olikheten korrekt: +2p. Åtminstone visat förståelse för vad olikheten innebär: +1p.

5. Nedanstående ekvation beskriver en cirkel i xy-planet:

$$x^2 - 50\cdot x + y^2 + 60\cdot y - 500 = 0$$

Ange cirkelns radie och medelpunkt. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.23(b), senast använd 2018.06.05, och här uppskalad med en faktor 10 (så att om versionen i boken ger svar i centimeter så får man här svar i millimeter).

En cirkel med medelpunkt i (a, b) och radie r i xy-planet i ett ortonormerat koordinatsystem har ekvationen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, så vi får skriva om den givna ekvationen till det formatet, vilket vi gör med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
x^2 - 50{\cdot}x + y^2 + 60{\cdot}y - 500 &= 0\\
x^2 - 2{\cdot}25{\cdot}x + y^2 + 2{\cdot}30{\cdot}y &= 500\\
x^2 - 2{\cdot}25{\cdot}x + 25^2 + y^2 + 2{\cdot}30{\cdot}y + 30^2 &= 500 + 25^2 + 30^2\\
(x - 25)^2 + (y + 30)^2 &= 500 + 625 + 900\\
(x - 25)^2 + (y + 30)^2 &= 2025\\
(x - 25)^2 + (y - (-30))^2 &= 45^2
\end{aligned}$$

Svar: Medelpunkten har koordinaterna $(25, -30)$ och radien är 45 längdenheter.

Kommentar 1: För att hitta att $2025 = 45^2$ kan man resonera så här: Borde vara heltalssvar, eftersom det är en tenta. Slutar på 25, så talet bör sluta på 5. $40^2 = 1600$, vilket är för lite. $50^2 = 2500$, vilket är för mycket. Så svaret ligger mellan 40 och 50. Det enda tal som ligger mellan 40 och 50 och som slutar på 5 är 45. Kolla om det är rätt!

Kommentar 2: Notera att ekvationen **inte** kan skrivas om till $(x - 25) + (y - (-30)) = 45$ genom att man ”stryker tvåorna”. Man har då tillämpat minst två icke existerarnde potensräknings”regler” och det man då får är ekvationen för en rät linje.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma radie och medelpunkt hos en cirkel med hjälp av kvadratkomplettering. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt (vilket inkluderar ”ej strukit tvåorna”): 3p. Åtminstone visat att man förstår vad uppgiften går ut på: 1p. Största delen av en korrekt lösning: 2p.

6. Du sitter och hjälper din kompis att plugga till omtentan.

(a) Din kompis har löst en enkel ekvation och har skrivit

$$3{\cdot}x = 6 = x = 2 \quad ☠$$

Förklara för kompisen varför man inte kan skriva så.

(b) Din kompis har löst en olikhet kommit till ”$x > 10 \vee x < 5$”. Kompisen sammanfattar detta som

$$10 < x < 5 \quad ☠$$

Förklara för kompisen varför man inte kan skriva så.

För full poäng fordras att det verkar troligt att din kompis skulle förstå förklaringen. Du ska inte visa hur man ska göra istället, utan förklara varför det här inte fungerar. Det räcker med ett par meningar. (3p)

Lösning:

Exempelvis:

”På (a) skriver du ’tre x är samma tal som sex som är samma tal som x som är samma tal som två’. I så fall måste sex och två vara samma tal, och det är de ju inte!

Och på (b) skriver du att x ska vara mer än tio och samtidigt mindre än fem. Det går inte! Om man är mer än tio så är man inte mindre än fem, och tvärtom.”

Referenser: Kursplanen: • Muntligt och skriftligt förmedla resonemang och lösningar av sådana problem som behandlas i kursen, allt i enlighet med övriga lärandemål. Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Större än, mindre än, lika med. Övning 8.5.

Rättningsnorm: 1p vardera om det verkar som den skrivande själv förstår (a) och (b). +1p om förklaringen skulle vara begriplig för kompisen.

7. Förenkla följande uttryck maximalt. Utgå från att alla talen är positiva.

$$\frac{\sqrt[3]{a \cdot b^3} \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot (b \cdot c^3)^{1/3}}$$

Även "slarvfel" kommer att räknas som fel vid rättningen. (3p)

Lösning:

Exempelvis:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{a \cdot b^3} \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot (b \cdot c^3)^{1/3}} &= \frac{(a \cdot b^3)^{1/3} \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot (b \cdot c^3)^{1/3}} && \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \\
&= \frac{a^{1/3} \cdot (b^3)^{1/3} \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot b^{1/3} \cdot (c^3)^{1/3}} && (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \\
&= \frac{a^{1/3} \cdot b^{3 \cdot 1/3} \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot b^{1/3} \cdot c^{3 \cdot 1/3}} && (x^m)^n = x^{m \cdot n} \\
&= \frac{a^{1/3} \cdot b \cdot c^{-3}}{a^3 \cdot b^{1/3} \cdot c} && \text{Bråkräkning} \\
&= \frac{b \cdot b^{-1/3}}{a^3 \cdot a^{-1/3} \cdot c \cdot c^3} && x^{-n} = 1/x^n \\
&= \frac{b^{1-1/3}}{a^{3-1/3} \cdot c^{1+3}} && x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\
&= \frac{b^{3/3-1/3}}{a^{9/3-1/3} \cdot c^{1+3}} && \text{Bråkräkning} \\
&= \boxed{\frac{b^{2/3}}{a^{8/3} \cdot c^4} = a^{-8/3} \cdot b^{2/3} \cdot c^{-4}}
\end{aligned}$$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan stegen.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Snabbt och säkert tillämpa potensräkningsreglerna. Övning 5.10.

Rättningsnorm: Starta med 3p, och dra 1p för varje felaktig åtgärd och varje nödvändig åtgärd som ej vidtagits (med stopp då poängen är nere på noll).

8. Lös ekvationen $(5^x - 1) \cdot (\frac{1}{x} - 5) \cdot (x^5 - 1) = 0$. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 8.13. En produkt är noll om och endast om någon av dess faktorer är noll, så ekvationen sönderdelar sig i tre enklare ekvationer:

$$\begin{aligned} 5^x - 1 &= 0 \\ 5^x &= 1 \\ 5^x &= 5^0 \\ x &= 0 \end{aligned} \quad \vee \quad \begin{aligned} \frac{1}{x} - 5 &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 5 \\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad \vee \quad \begin{aligned} x^5 - 1 &= 0 \\ x^5 &= 1 \\ x &= \sqrt[5]{1} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Att börja med att multiplicera ihop parenteserna är att skjuta sig själv i foten, för då har man gjort något som visserligen är matematiskt korrekt men som resulterar i en ekvation som är mycket mer svårlöst än den man hade från början.

Svar: $x \in \{ 0, 1/5, 1 \}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Nollfaktorlagen; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorisering vid ekvationslösning. • Lösa ekvationer innehållande rationella uttryck. • Lösa ekvationer innehållande rotuttryck. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: 1p för att ha delat upp ekvationen. +1p om en eller två av delekvationerna är korrekt lösta, +2p om alla delekvationerna är korrekt lösta.

9. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.