Lösningsförslag TEN2 2021-06-11 MAA140

1. Låt $A=(2,0,2)$, $B=(1,0,6)$, $C=(1,1,1)$ och $D=(7,3,0)$ vara fyra punkter.

a) Ange på parameterform en ekvation för planet som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. En mall för en sådan ekvation är
$$(x,y,z)=A+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \quad \text{för } s,t\in\mathbb{R}.$$

Då $\overrightarrow{AB}=B-A=(1,0,6)-(2,0,2)=(-1,0,4)$ och
$\overrightarrow{AC}=C-A=(1,1,1)-(2,0,2)=(-1,1,-1)$ så blir det...

Svar: $(x,y,z)=(2,0,2)+s(-1,0,4)+t(-1,1,-1)$ för $s,t\in\mathbb{R}$.

b) Ange på parameterfri form en ekvation för planet som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning: Punkt-normal-form för planets ekvation behöver en punkt, till exempel A, och en normal, till exempel $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Den senare behöver räknas ut:
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-\bar{e}_1+4\bar{e}_3)\times(-\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3)=-\bar{e}_1\times\bar{e}_2+\bar{e}_1\times\bar{e}_3+$$
$$+4\bar{e}_3\times-\bar{e}_1+4\bar{e}_3\times\bar{e}_2=-\bar{e}_3-\bar{e}_2-4\bar{e}_2-4\bar{e}_1=(-4,-5,-1)$$

$(4,5,1)$ blir aningen mindre att skriva, så vi tar den normalen istället. En ekvation är
$$0=(4,5,1)\bullet((x,y,z)-(2,0,2))=(4,5,1)\bullet(x-2,y,z-2)=$$
$$=4(x-2)+5y+(z-2)=4x-8+5y+z-2=4x+5y+z-10.$$

Svar: Det planets ekvation är $4x+5y+z=10$.

Koll: För $(x,y,z)=A$ blir $4x+5y+z = 4\cdot 2+5\cdot 0+2 = 8+0+2 = 10$.
För $(x,y,z)=B$ blir $4x+5y+z = 4\cdot 1+5\cdot 0+6 = 4+0+6 = 10$.
För $(x,y,z)=C$ blir $4x+5y+z = 4\cdot 1+5\cdot 1+1 = 4+5+1 = 10$.
Alla stämmer!

c) Beräkna avståndet till punkten D från planet som innehåller A, B och C.

Lösning. Det avståndet kan beräknas som längden av den komposant av en vektor från planet till D, till exempel $\overrightarrow{AD} = D-A = (7,3,0)-(2,0,2) = (5,3,-2)$, som är vinkelrät mot planet och alltså parallell med normalen $\bar{n}=(4,5,1)$. Den komposanten beräknas lätt genom projektion.

$$\text{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AD}\bullet\bar{n}}{\bar{n}\bullet\bar{n}}\bar{n} = \frac{(5,3,-2)\bullet(4,5,1)}{(4,5,1)\bullet(4,5,1)}\bar{n} = \frac{20+15-2}{16+25+1}\bar{n} = \frac{33}{42}\bar{n}$$

Alltså är det sökta avståndet

$$\|\text{proj}_{\bar{n}}(\overrightarrow{AD})\| = \left\|\frac{33}{42}\bar{n}\right\| = \frac{33}{42}\|\bar{n}\| = \frac{33}{42}\sqrt{42} = \frac{33}{\sqrt{42}}$$

Svar: Avståndet till D från planet som innehåller A, B och C är $\frac{33}{\sqrt{42}} = \frac{11}{14}\sqrt{42}$.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$ Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösning. Finns λ så att $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$? Det är bara att sätta in och räkna efter.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+6 \\ 6-7 \\ 10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Egenvektor, med $\lambda = -1$.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13-6+6 \\ 13+6-7 \\ 22+10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \\ 23 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Inte alls en egenvektor.

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13+6+6 \\ 13-6-7 \\ 22-10-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ Inte heller någon egenvektor.

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26+18+12 \\ 26-18-14 \\ 44-30-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Egenvektor, med $\lambda = 2$.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39+30+12 \\ 39-30-14 \\ 66-50-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \bar{u}_5.$$ Egenvektor med $\lambda = 1$.

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} -13 & -6 & -6 \\ 13 & 6 & 7 \\ 22 & 10 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13-12+12 \\ 13+12-14 \\ 22+20-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ 24 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Inte någon egenvektor.

Svar: Egenvektorerna är $\bar{u}_1$ med egenvärde -1, $\bar{u}_4$ med egenvärde 2 och $\bar{u}_5$ med egenvärde 1.

3a) Beräkna $\det(A)$, om

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Det är bara att räkna. Matrisen är rätt tät, men några kolumnoperationer kan glesa ur den betydligt.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & -13 & 4 \\ -2 & -4 & 16 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 6 & -13 & 4 \\ -2 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 6 & -13 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -13 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -13 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -13 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-13 \cdot 5 - 4 \cdot 3) - (6 \cdot 5 - 4 \cdot 4) + (6 \cdot 3 - 4 \cdot -13) =$$

$$= -65 - 12 - 30 + 16 + 18 + 52 = -65 - 30 + 16 - 12 + 18 + 52 =$$

$$= -95 + 4 + 70 = -91 + 70 = -21$$

Svar: $\det(A) = -21$

b) Är A inverterbar? Motivera ditt svar.

Svar: Eftersom $\det(A) \neq 0$ så är A inverterbar.

c) Är vektorerna $\bar{v}_1 = (4,3,-4,4)$, $\bar{v}_2 = (1,-4,4,2)$ och $\bar{v}_3 = (3,1,3,1)$ linjärt beroende? Motivera ditt svar.

Svar: Eftersom $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är de tre första raderna i A, som är inverterbar, så måste de vara linjärt oberoende. Svaret är alltså nej, de är inte linjärt beroende.

4. Låt $\bar{v}_1 = 6\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = -\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a) Kontrollera att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal.

Lösning. Det blir till att räkna ut skalärprodukterna $\bar{v}_i \circ \bar{v}_j$ för att bekräfta de påståendena.

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_1 \circ \bar{v}_2 &= (6,1,1) \circ (-1,3,3) = -6+3+3 = 0 \\ \bar{v}_1 \circ \bar{v}_3 &= (6,1,1) \circ (0,2,-2) = 0+2-2 = 0 \\ \bar{v}_2 \circ \bar{v}_3 &= (-1,3,3) \circ (0,2,-2) = 0+6-6 = 0 \end{aligned}\right\} \text{Alla 0, så ortogonala.}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_1 \circ \bar{v}_1 &= 6^2+1^2+1^2 = 36+1+1 = 38 \\ \bar{v}_2 \circ \bar{v}_2 &= (-1)^2+3^2+3^2 = 1+9+9 = 19 \\ \bar{v}_3 \circ \bar{v}_3 &= 0^2+2^2+(-2)^2 = 0+4+4 = 8 \end{aligned}\right\} \text{Inte alla 1, så inte normerad följd.}$$

b) Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att

$$r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = 9\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 + 15\bar{e}_3. \qquad (*)$$

Lösning. Genom att multiplicera $(*)$ med var och en av $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ fås ekvationer där bara en av de obekanta återstår, och därför lätt går att lösa ut.

$$38r = r\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = (r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3) \cdot \bar{v}_1 = (9,7,15) \cdot (6,1,1) = 54 + 7 + 15 = 76$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{76}{38} = 2$$

$$19s = s\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 = (r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3) \cdot \bar{v}_2 = (9,7,15) \cdot (-1,3,3) = -9 + 21 + 45 = 57$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{57}{19} = 3$$

$$8t = t\bar{v}_3 \cdot \bar{v}_3 = (r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3) \cdot \bar{v}_3 = (9,7,15) \cdot (0,2,-2) = 0 + 14 - 30 = -16$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-16}{8} = -2$$

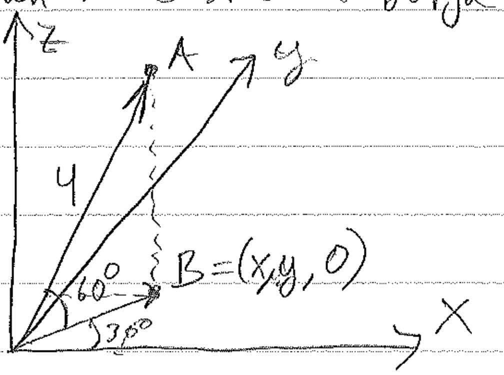
Koll: $2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 - 2\bar{v}_3 = 2(6,1,1) + 3(-1,3,3) - 2(0,2,-2) =$
$= (12,2,2) + (-3,9,9) + (0,-4,4) = (9,7,15)$

Stämmer.

Svar: $(r,s,t) = (2,3,-2)$.

5 Punkten $A=(x,y,z)$ har alla koordinaten >0 (dvs. den ligger i första oktanten av rummet) och dess projektion $B=(x,y,0)$ på xy-planet ligger i första kvadranten. $O=(0,0,0)$ är koordinatsystemets origo. Vad har A för koordinater (x,y,z), om $\|\vec{OA}\|=4$, vinkeln mellan $\vec{OA}$ och $\vec{OB}$ är $\frac{\pi}{3}=60^\circ$, och vinkeln mellan $\vec{OB}$ och x-axeln är $\frac{\pi}{6}=30^\circ$?

Lösning. Kan vara bra att börja med en liten figur



Vanlig trigonometri säger att $\frac{y}{x}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, så $x=\sqrt{3}y$.

Vidare så är $\vec{BA}=(0,0,z)$ ortogonal mot $\vec{OB}=(x,y,0)$, så OBA är en rätvinklig triangel med vinkeln $\frac{\pi}{3}$ vid O och kateter 4.
Då säger lite mera trigonometri att

$$z=\|\vec{BA}\|=\|\vec{OA}\|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$\|\vec{OB}\|=\|\vec{OA}\|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

Alltså är $4=2^2=\|\vec{OB}\|^2=x^2+y^2=(\sqrt{3}y)^2+y^2=3y^2+y^2=4y^2$
och därför $y=1$ (eftersom $y>0$) och $x=\sqrt{3}$.

Svar: $A=(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$.

6 Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(a) $-\bar{u} \times \bar{v} = \bar{v} \times \bar{u}$ SANT ($\times$ är antikommutativ)

(b) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$ FALSKT ($\times$ är inte associativ)

(c) $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$ SANT

(d) $-\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ FALSKT

Istället gäller att $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$.

(e) $(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = (\bar{w} \times \bar{u}) \cdot \bar{v}$ SANT

Den vektoriella trippelprodukten går ju att skriva som en determinant

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{w} = \begin{vmatrix} -\bar{u}- \\ -\bar{v}- \\ -\bar{w}- \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -\bar{u}- \\ -\bar{w}- \\ -\bar{v}- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\bar{w}- \\ -\bar{u}- \\ -\bar{v}- \end{vmatrix}.$$