Lösningar TEN2 2022-06-10 MAA140

1 Låt $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad u_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \bar{u}_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösning. Det är bara att se om $A\bar{u}_k$ blir på formen $\lambda \bar{u}_k$.

$$A\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21+6+18 \\ 12+1+36 \\ -3+0-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 49 \\ -15 \end{pmatrix} \neq \lambda \bar{u}_1,$$ så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_2 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-18-6 \\ 12-3-12 \\ -3+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{u}_2,$$ så egenvektor med $\lambda = 1$.

$$A\bar{u}_3 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+24+6 \\ -12+4+12 \\ 3+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \lambda \bar{u}_3,$$ så ej egenvektor.

$$A\bar{u}_4 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42+24+6 \\ -24+4+12 \\ 6+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$ så egenvektor med $\lambda = -2$.

$$A\bar{u}_5 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+24+6 \\ -20+4+12 \\ 5+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$ så egenvektor med $\lambda = -1$.

$$A\bar{u}_6 = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35+18+6 \\ -20+3+12 \\ 5+0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$ så ej egenvektor.

Svar: $\bar{u}_2$ är egenvektor med egenvärde $\lambda = 1$.

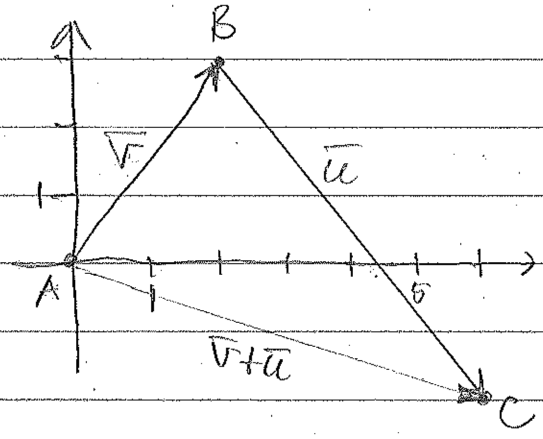
$\bar{u}_3$ —— " —— $\lambda = -2$.

$\bar{u}_5$ —— " —— $\lambda = -1$.

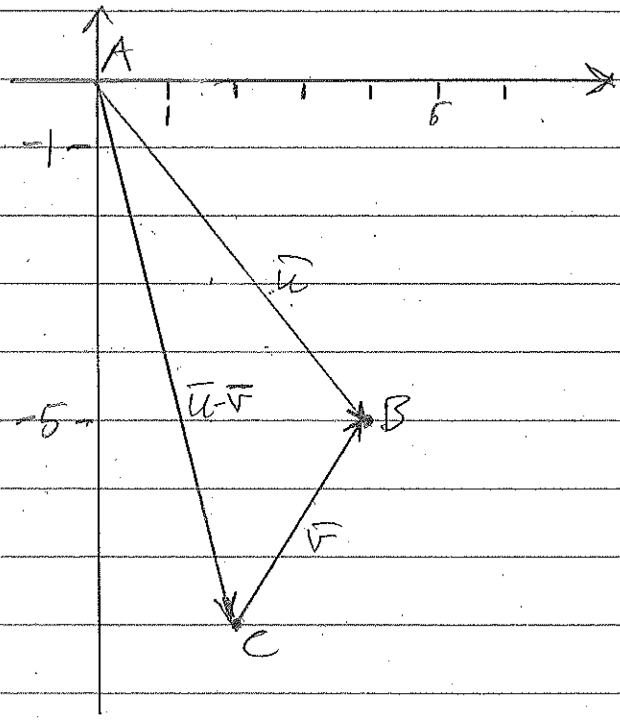
Övriga är ej egenvektorer.

2. Låt $\bar{u} = (4,-5)$ och $\bar{v} = (2,3)$. Illustrera i två separata figurer vektoroperationerna $\bar{v}+\bar{u}$ och $\bar{u}-\bar{v}$ genom att ansätta $\bar{u}$ och $\bar{v}$ från lämpligt valda punkter.

Svar.



Om $\overrightarrow{AB} = \bar{v}$ och $\overrightarrow{BC} = \bar{u}$ så är $\bar{v}+\bar{u} = \overrightarrow{AC}$.



Om $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ och $\overrightarrow{CB} = \bar{v}$ så är $\bar{u}-\bar{v} = \overrightarrow{AC}$.

3 Låt $A=(1,5,1)$, $B=(4,3,3)$, $C=(10,0,5)$ och $D=(3,7,-4)$ vara fyra punkter.

a) Ange en ekvation på parameterform för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. Allmän form för en sådan ekvation är t.ex.

$$(x,y,z) = A + s\vec{AB} + t\vec{AC} \text{ för } s,t \in \mathbb{R}$$

så det som behöver räknas ut är vad $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$ är.

$\vec{AB} = B-A = (4,3,3)-(1,5,1) = (3,-2,2)$

$\vec{AC} = C-A = (10,0,5)-(1,5,1) = (9,-5,4)$.

Svar: $(x,y,z) = (1,5,1) + s(3,-2,2) + t(9,-5,4)$ för $s,t \in \mathbb{R}$.

Alt.svar: $(x,y,z) = (1+3s+9t, 5-2s-5t, 1+2s+4t)$ för $s,t \in \mathbb{R}$.

b) Ange en ekvation på parameterfri form för det plan som innehåller punkterna A, B och C.

Lösning. För parameterfri form behövs en punkt (vi kan ta A) och en normal. En normal kan beräknas som $\vec{AB}\times\vec{AC}$, så vad blir det?

Sarrus-uppställning:

$$\begin{array}{ccccc} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z & \bar{e}_x & \bar{e}_y \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 9 & -5 & 4 & 9 & -5 \end{array}$$

$\vec{AB}\times\vec{AC} = -8\bar{e}_x + 18\bar{e}_y - 15\bar{e}_z +$

$+ 18\bar{e}_z + 10\bar{e}_x - 12\bar{e}_y =$

$= (-8+10, 18-12, -15+18) = (2,6,3)$

$\bar{n} = (2,6,3)$ verkar vara en utmärkt enkel normal.

Ekvationen på punkt-normal-form är då

$$
\begin{aligned}
0 &= \left((x,y,z) - A\right) \cdot \bar{n} = \\
&= \left((x,y,z) - (1,5,1)\right) \cdot (2,6,3) = \\
&= (x-1, y-5, z-1) \cdot (2,6,3) = \\
&= 2(x-1) + 6(y-5) + 3(z-1) = 2x + 6y + 3z - 2 - 30 - 3
\end{aligned}
$$

Svar: Planets ekvation är $2x + 6y + 3z = 35$.

Koll: Insättning

$(x,y,z) = A$ ger $VL = 2\cdot 1 + 6\cdot 5 + 3\cdot 1 = 2 + 30 + 3 = 35 = HL$

$(x,y,z) = B$ ger $VL = 2\cdot 4 + 6\cdot 3 + 3\cdot 3 = 8 + 18 + 9 = 35 = HL$

$(x,y,z) = C$ ger $VL = 2\cdot 10 + 6\cdot 0 + 3\cdot 5 = 20 + 0 + 15 = 35 = HL$

Stämmer med alla punkter!

c Avgör om punkten D ligger i samma plan som A, B och C.

Lösning. Insättning i ekvationen från (b) ger svaret.

$(x,y,z) = D = (3,7,-4)$ ger $VL = 2\cdot 3 + 6\cdot 7 + 3\cdot -4 = 6 + 42 - 12 = 36$, inte $35 = HL$. Alltså ligger D inte i samma plan (även om det är nära).

Svar: D ligger inte i samma plan som A, B och C.

d Beräkna $\cos(\beta)$, där β är vinkeln mellan yz-planet och planet som innehåller A, B och C.

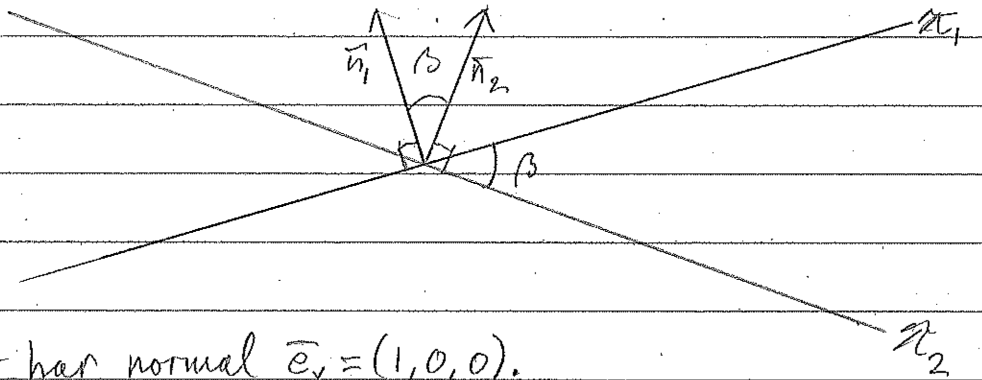
Lösning. yz-planet är det plan som innehåller både y-axeln och z-axeln, så på parameterform är det

$$(x,y,z) = (0,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) \text{ för } s,t \in \mathbb{R}$$

och på parameterfri form är det

$$x = 0.$$

För att mäta vinklar mellan plan mäter man istället lämpligen vinkeln mellan deras normalvektorer, för den är samma vinkel (bara vriden $90°$):



yz-planet har normal $\bar{e}_x = (1,0,0)$.
Vinkeln mellan två vektorer mäts lämpligen med skalärprodukt:

$$\cos(\beta) = \frac{\bar{e}_x \bullet \bar{n}}{\|\bar{e}_x\| \cdot \|\bar{n}\|} = \frac{(1,0,0)\bullet(2,6,3)}{1 \cdot \sqrt{2^2+6^2+3^2}} = \frac{2+0+0}{\sqrt{4+36+9}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

Svar: $\cos(\beta) = \frac{2}{7}$ (så $\beta \approx 73{,}4°$, men det är ingen av standardvinklarna)

4 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Lösning.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \; (-2) = \begin{vmatrix} 0^{+} & 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0^{-} & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1^{+} & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0^{-} & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0^{+} & 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \; (-4) = \begin{vmatrix} 2^{+} & -4^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 0 & 2 & 1 & 1^{+} \\ 1 & -4 & -4 & 0^{-} \\ 4 & 1 & 1 & 0^{+} \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \; (-2)\,(-4) = \begin{vmatrix} 0^{+} & 4 & 9 \\ 1^{-} & -4 & -4 \\ 0^{+} & 17 & 17 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 17 & 17 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{17} =$$

$$= -1 \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -17 \cdot (4 - 9) = -17 \cdot -5 = 85$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$$

Svar: 85

5 Låt $\bar{v}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{v}_2 = 11\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$ och $\bar{v}_3 = \bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3$, där $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

a Kontrollera att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ utgör en ortogonal följd av vektorer, men att denna följd inte är ortonormal.

Lösning. Detta ser man på de parvisa skalärprodukterna.

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 &= (1,-1,2)\cdot(11,1,-5) = 11-1-10 = 0\\ \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_3 &= (1,-1,2)\cdot(1,9,4) = 1-9+8 = 0\\ \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_3 &= (11,1,-5)\cdot(1,9,4) = 11+9-20 = 0\end{aligned}\right\}\ \text{Alla 0, så ortogonala.}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 &= 1^2+(-1)^2+2^2 = 1+1+4 = 6\\ \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2 &= 11^2+1^2+(-5)^2 = 121+1+25 = 147\\ \bar{v}_3 \cdot \bar{v}_3 &= 1^2+9^2+4^2 = 1+81+16 = 98\end{aligned}\right\}\ \text{Inte alla 1, så ej normaliserat.}$$

b Bestäm skalärer $r, s, t \in \mathbb{R}$ sådana att

$$r\bar{v}_1 + s\bar{v}_2 + t\bar{v}_3 = -5\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3$$

Lösning. Tack vare ortogonalitet kan dessa koefficienter beräknas med skalärprodukt. Låt $\bar{u} = -5\bar{e}_1 - 7\bar{e}_2 + 17\bar{e}_3$. Då är

$$r = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1} = \frac{(-5,-7,17)\cdot(1,-1,2)}{6} = \frac{-5+7+34}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$s = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}_2}{\bar{v}_2\cdot\bar{v}_2} = \frac{(-5,-7,17)\cdot(11,1,-5)}{147} = \frac{-55-7-85}{147} = \frac{-147}{147} = -1$$

$$t = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}_3}{\bar{v}_3\cdot\bar{v}_3} = \frac{(-5,-7,17)\cdot(1,9,4)}{98} = \frac{-5-63+68}{98} = \frac{0}{98} = 0$$

$17 \cdot 4 = 68$

Svar: $(r, s, t) = (6, -1, 0)$

Koll: $6\bar{v}_1 - 1\cdot\bar{v}_2 + 0\cdot\bar{v}_3 = 6(1,-1,2) - (11,1,-5) =$
$= (6,-6,12) - (11,1,-5) = (6-11, -6-1, 12-(-5)) = (-5,-7,17)$
Stämmer!

6 Låt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ vara vektorer med tre element. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

a $\|\bar{u}+\bar{v}\| = \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$ FALSKT

Anm. Det närmaste man kommer är triangelolikheten
$\|\bar{u}+\bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$, men det är bara om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ har samma riktning som det faktiskt blir likhet, annars är VL mindre.

b $\|\bar{u}\times\bar{v}\| = |\bar{u}\cdot\bar{v}|$ FALSKT

Anm. $\|\bar{u}\times\bar{v}\| = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|\cdot\sin(\theta)$, men $|\bar{u}\cdot\bar{v}| = \|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|\cdot|\cos(\theta)|$.

c $\bar{u}\times\bar{u} = \bar{0}$ SANT

d $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w} = \bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$ SANT

Associativa lagen för vektoraddition.

e $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w} = \bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w})$ FALSKT

Vektorprodukten är inte alls associativ.