Mälardalens universitet
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

Extentasamling: TEN2 – *Lösningsförslag*

2022–2023

Detta är ett samlingsdokument med alla de TEN2 som gått i kursen under sedan den grundades 2014 och fram t.o.m. augusti 2022, med lösningsförslag och rättningsnormer. (Detta med undantag för de specialutformade tentor som gavs på distans då campus var stängt av Coronaskäl under vårterminen 2020. Dessa ligger i ett separat dokument.)

Varning! Det är fel lite här och var i lösningarna. Detta upptäcker man i samband med rättningen av tentan, men man glömmer ofta(st) att korrigera i filen i datorn. Så verkar något konstigt så fråga en lärare.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS
Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* Demo

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Någon person, som nås på ett eller annat telefonnummer

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Detta är en demonstration av hur TEN2 kommer att vara upplagd. ”Formelsamlingen” kommer alltid att finnas med. Däremot är det inte säkert att den behövs.

1. Förklara, exempelvis med hjälp av enhetscirkeln:

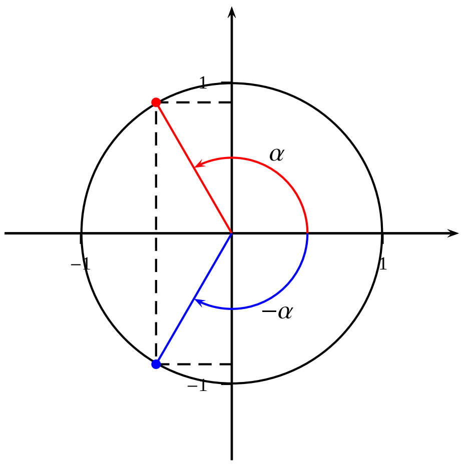
(a) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ för alla vinklar α. (1p)

(b) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ för alla vinklar α. (1p)

(c) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ för alla vinklar α som uttrycket är definierat för. (1p)

Lösning:

Vi ritar en enhetscirkel och markerar en vinkel α och vinkeln $-\alpha$ i den:



Vi går medsols respektive motsols lika mycket med start från samma ställe (positiva x-axeln). Då kommer vi att landa på motsvarande punkter på över- respektive underhalvan av cirkeln. I dessa punkter är x-koordinaterna, som ger cosinusvärdena, lika, medan y-värdena (sinusvärdena) är till beloppen lika men har olika tecken. Detta ger sambanden i (a) och (b).

Tangensvärdena motsvarar riktningskoefficienterna (k-värdena) för strålarna, som lutar lika mycket men åt varsitt håll, vilket ger att det är samma belopp men olika tecken. Alternativt utnyttjar vi att vi redan vet hur sambanden för sinus och cosinus ser ut, vilket ger

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

2. Vi har talen $z = 2 - 3i$ och $w = -4 + 5i$. Beräkna

(a) $z + w$ (1p)

Lösning:

$z + w = (2 - 3i) + (-4 + 5i) = (2 - 4) + (-3 + 5)i = -2 + 2i$

(b) $z \cdot w$ (1p)

Lösning:

$z \cdot w = (2-3i)\cdot(-4+5i) = 2(-4)+2\cdot 5i-3i(-4)-3i\cdot 5i = -8+10i+12i+15 = 7+22i$

(c) z/w (1p)

Lösning:

$$\frac{z}{w} = \frac{(2-3i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \frac{-8-10i+12i-15}{16+25} = \frac{-23+2i}{41}$$

3. En av lösningarna till ekvationen $z^3 - 3z^2 + 9z + 13 = 0$ är $z = 2 + 3i$. Bestäm de övriga lösningarna. (3p)

Lösning:

Inledning Polynomet är av tredje graden och ska därför ha tre nollställen (om man räknar komplext och med multiplicitet).

Om z är ett nollställe till ett polynom med reella koefficienter (vilket vi har här) så är konjugatet till z också ett nollställe. Så en av de återstående två rötterna är $\bar{z} = 2 - 3i$.

Summan av nollställena Om ett polynom har högstagradskoefficienten 1 (vilket det här har) så är summan av nollställena lika med näst högstagradskoefficienten med omvänt tecken. Koefficienten ifråga är -3, och om vi kallar det tredje nollstället för z_3 har vi att

$$(2+3i) + (2-3i) + z_3 = -(-3) \quad\Leftrightarrow\quad 4 + z_3 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad z_3 = -1$$

Produkten av nollställena Om ett polynom har högstagradskoefficienten 1 så är produkten av nollställena lika med konstanttermen, med minustecken om gradtalet är udda (vilket det här är). Så $(2 + 3i)(2 - 3i)z_3 = -13$, ur vilket vi kan lösa ut $z_3 = -1$.

Faktorsatsen Vi har alltså att både $z - (2 + 3i)$ och $z - (2 - 3i)$ är faktorer i polynomet. Då är också $(z - (2 + 3i))(z - (2 - 3i)) = z^2 - 4z + 13$ en faktor. Dividerar vi med denna andragradsfaktor ska vi få en förstagradsfaktor som resultat, och den ger det tredje nollstället.

POLYNOMDIVISION (Besvärlig att skriva in, så det har jag inte orkat göra ännu)

Den tredje faktorn är $x + 1$.

Gissning Polynomet har heltalskoefficienter, och om det har ett heltalsnollställe så är detta delare i konstanttermen, som är 13. Genom att testa med ± 1 och ± 13 hittar man att -1 är ett nollställe; det sista vi behövde.

Alternativt Om man inte inser att även $z = 2-3i$ är en rot kan man dividera med $z-(2+3i)$ vilket ger kvoten $z^2 + (-1 + 3i)z + (-2 + 3i)$. Nollställena till denna kan sökas genom kvadratkomplettering och ansats, se *Kompletterande kompendium* REFERENS.

Om man dessutom gissar sig fram till roten -1 kan man dividera med $(z-(2+3i))(z+1)$, vilket ger den tredje faktorn $z - (2 - 3i)$.

4. Vi studerar funktionen f, där $f(x) = \log_2(-x^2 - 5x)$.

(a) Bestäm $f(-1)$. (1p)

Lösning:

$f(-1) = \log_2(-(-1)^2 - 5(-1)) = \log_2(-1+5) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

(b) Vad är definitionsmängden för f? (2p)

Lösning:

Det är bara möjligt att beräkna logaritmer för positiva tal, så definitionsmängden är samma som lösningsmängden för nedanstående olikhet:

$$-x^2 - 5x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x(x+5) > 0$$

Parabel med toppen uppåt och nollställen $x = 0$ och $x = -5$; positiva värden på intervallet $(-5, 0)$.

(c) Lös ekvationen $f(x) = -1$. (2p)

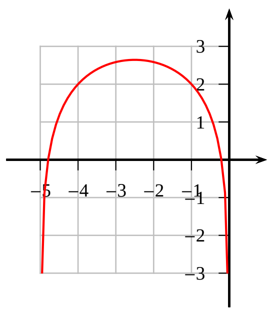
Lösning:

Utnyttja att $\log_a b = c$ är ekvivalent med $b = a^c$:

$$\begin{aligned}
\log_2(-x^2 - 5x) &= -1 \\
-x^2 - 5x &= 2^{-1} \\
x^2 + 5x + 1/2 &= 0 \\
x^2 + 2 \cdot 5/2x + (5/2)^2 - (5/2)^2 + 1/2 &= 0 \\
(x + 5/2)^2 - 23/4 &= 0 \\
(x + 5/2 + \sqrt{23}/2)(x + 5/2 - \sqrt{23}/2) &= 0
\end{aligned}$$

$x = -5/2 \pm \sqrt{23}/2$ är de två lösningarna.

Grafen ser för övrigt ut så här:



Lösningarna till ekvationen är på decimalform $x \approx -4{,}9$ respektive $x \approx -0{,}1$.

5. (a) Lös olikheten $|x - 1| > 2|x - 2|$. För full poäng måste det finnas med en fullständig beräkning av lösningen. (3p)

Lösning:

Detta är rekommenderad uppgift 2.23b ur *Mot bättre vetande*.

Beräkningslösning $x - 1$ byter tecken i $x = 1$. $x - 2$ byter tecken i $x = 2$. Dessa två brytpunkter delar tallinjen i tre delar och ger oss tre separata fall att räkna på:

$x < 1$:	$1 \leq x < 2$:	$x \geq 2$:
$-(x-1) > 2(-(x-2))$	$x - 1 > 2(-(x-2))$	$x - 1 > 2(x-2)$
$-x + 1 > -2x + 4$	$x - 1 > -2x + 4$	$x - 1 > 2x - 4$
$x > 3$	$3x > 5$	$3 > x$
Funkar ej	$x > 5/3$	

Så av talen mindre än 1 duger inget; av talen mellan 1 och 2 duger de som är större än $5/3 \approx 1{,}67$; och av talen från och med 2 duger de som är mindre än 3. Totalt sett ger det att intervallet $5/3 < x < 3$ är lösningen till olikheten.

Geometrisk tolkning Olikheten kan utläsas som ”avståndet mellan x och 1 är mer än dubbelt så stort som avståndet mellan x och 2”. Avståndet mellan 1 och 2 är en längdenhet; när man är $2/3$ ifrån 1 och $1/3$ från 2 (dvs. i $5/3$) är avståndet till 1 precis dubbelt så långt som till 2. När man sedan närmar sig 2 ökar avståndet till 1 samtidigt som det till 2 minskar. När man väl passerat 2 börjar båda avstånden öka, och i 3 är avståndet till 1 precis dubbelt så långt som till 2 igen. Efter denna punkt börjar skillnaden bli för liten.

(b) Rita kurvorna $y = |x-1|$ och $y = 2|x-2|$ i samma koordinatsystem och förklara hur man kan se svaret till föregående fråga i bilden. (2p)

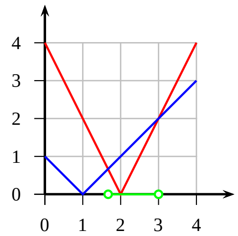
Lösning:

Skriv förslagsvis uttrycken som styckvis definierade funktioner och rita sedan:

$$|x-1| = \begin{cases} -(x-1) = -x+1 & \text{om } x < 1 \\ x-1 & \text{om } x \geq 1 \end{cases}$$

$$2|x-2| = \begin{cases} 2(-(x-2)) = -2x+4 & \text{om } x < 2 \\ 2(x-2) = 2x-4 & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

Vi ritar den första kurvan i blått och den andra i rött.



Det aktuella området är det där den blåa kurvan ligger ovanför den röda.

6. (a) I en triangel är en vinkel $2\pi/3$, motstående sida har längden $\sqrt{3}$ längdenheter och en av de anslutande sidorna har längden 1 längdenhet.

Bestäm övriga sidor och vinklar i triangeln. (3p)

Lösning:

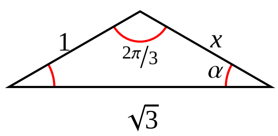
Sinussatsen: Om vi kalla vinkeln som står emot sidan med längden 1 l.e. för α så ger sinussatsen att

$$\frac{\sin 2\pi/3}{\sqrt{3}} = \frac{\sin \alpha}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 1/2$$

De enda i en triangel möjliga vinklarna med detta sinusvärde är $\pi/6$ (30°) och $5\pi/6$ (150°). Givet att vinkelsumman i en triangel är π (180°) och att vi redan har en vinkel som är $2\pi/3$ (120°) kan den större av vinklarna strykas som alternativ. Triangelns tredje vinkel måste vara $\pi - 2\pi/3 - \pi/6 = \pi/6$. Triangeln har alltså två lika vinklar och är likbent, och den tredje sidan måste ha längden 1 längdenhet den också.



Cosinussatsen: Vi kallar den tredje sidans längd för x, och då ger cosinussatsen att

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}^2 &= 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cos {}^{2\pi}/_3 \\
3 &= 1 + x^2 + x \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
x^2 + 2 \cdot {}^1/_2 x + ({}^1/_2)^2 - ({}^1/_2)^2 - 2 &= 0 \\
(x + {}^1/_2)^2 - {}^9/_4 &= 0 \\
(x + 2)(x - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Att längden x skulle vara negativ kan vi förkasta, så $x = 1$ är den enda geometriskt rimliga lösningen. I så fall är triangeln likbent och basvinklarna lika. Om vi drar den kända vinkeln från vinkelsumman och halverar får vi deras storlek: ${}^1/_2(\pi - {}^{2\pi}/_3) = {}^\pi/_6$.

Om man inte inser sambandet mellan likbenthet och lika basvinklar kan de resterande värdena tas fram beräkningsvägen antingen med hjälp av sinussatsen eller cosinussatsen.

(b) Lös ekvationen $\sin x = {}^1/_2$ fullständigt. (2p)

Lösning:

Detta är samma ekvation som i sinussatslösningen, men utan bivillkoret att vinkeln ska ingå i den beskrivna triangeln. Den fullständiga lösningen är

$$x = {}^\pi/_6 + n2\pi \qquad x = {}^{5\pi}/_6 + n2\pi$$

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 14.30-17.30 2014.11.05

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Anna Fedyszak-Koszela, som nås på telefon 073–409 85 83.

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1. Skriv som *en* logaritm (på maximalt förenklad form)

$$2\ln(x^2-1) - 4\ln(x+1) \qquad (3p)$$

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 3.20b ur *Mot bättre vetande*. Vi använder logaritmlagarna, och därefter algebraiska regler och bråkräkningsregler:

$$2\ln(x^2-1) - 4\ln(x+1) = \ln(x^2-1)^2 - \ln(x+1)^4 = \ln\frac{(x^2-1)^2}{(x+1)^4}$$
$$= \ln\frac{((x+1)(x-1))^2}{(x+1)^4} = \ln\frac{(x+1)^2(x-1)^2}{(x+1)^4} = \ln\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$$

Man kan, om man så vill, veckla ut kvadraterna, men det är svårt att säga vad det skulle vara för vits med det.

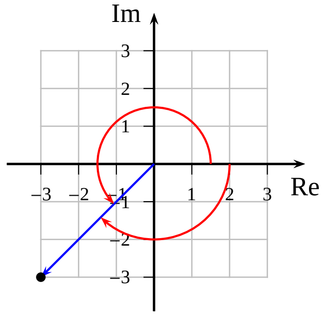
Observera att det förenklade uttrycket är definierat för betydligt fler värden på x än vad det oförenklade är. (Det förenklade är definierat för allt utom $x = \pm 1$, som ger division med noll respektive logaritm av noll, medan det oförenklade uttrycket fordrar att $x^2 - 1 > 0$ och att $x + 1 > 0$.) Denna komplikation behövde dock inte hanteras här.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något steg felaktigt, men ungefär samma svårighetsgrad i övrigt: 2p. Inte helt felaktigt: 1p.

2. (a) Markera talet $z = -3 - 3i$ i det komplexa talplanet. (1p)

Lösning:

Vi markerar talet och passar också på att markera argumentet, som behövs i nästa uppgift. FIXA KOMPLEXTALSGRADERING



Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. Pil eller punkt går lika bra.

(b) Skriv z på polär form. (2p)

Lösning:

Som argument kan vi enligt bild antingen ta $^{5\pi}/_{4}$ (om vi gillar positiva tal) eller $-^{3\pi}/_{4}$ (om vi gillar tal nära noll). Linjen går så pass uppenbart på diagonalen över rutorna att vinkeln inte behöver motiveras. Beloppet blir enligt Pythagoras sats $\sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\cdot 2} = 3\sqrt{2}$ (smaksak vilken form man föredrar). Utskrivet på polär form får vi

$$z = 3\sqrt{2}(\cos {}^{5\pi}/_{4} + i\sin {}^{5\pi}/_{4})$$

(eller på något motsvarande sätt, beroende på vilken form av beloppet och vilken vinkel man valde).

Rättningsnorm: Rätt belopp, rätt argument, ihopsatt på rätt sätt: 2p. Två av dessa tre saker rätt: 1p.

3. (a) Om man skriver att $\log_a b = c$, exakt vad menar man? (Vi vill alltså ha definitionen av logaritmbegreppet.) (1p)

Lösning:

Man menar att $a^c = b$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

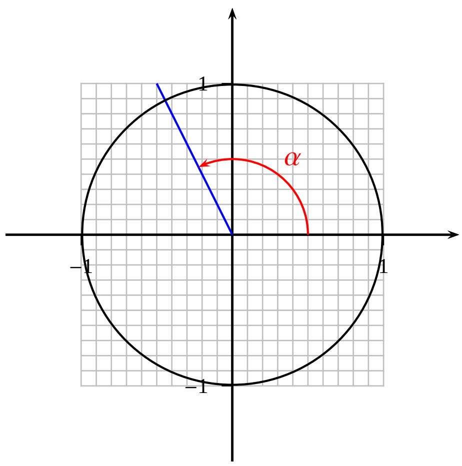
(b) Exakt vad menas med det *komplexa konjugatet* till ett komplext tal z? (Vi vill ha definitionen.) (1p)

Lösning:

Det tal man får om man byter tecken på imaginärdelen på talet. Så om $z = 2+3i$ så är konjugatet $\bar{z} = 2-3i$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel; exempel accepteras.

(c) Läs av tangensvärdet för den i nedanstående enhetscirkel markerade vinkeln α så noga som möjligt. Tala om vad det var som du tittade på för att avgöra det. (1p)



Lösning:
Ur lutning: Tangensvärdet för en vinkel motsvarar riktningskoefficienten (”k-värdet”) för strålen. Ur rutorna ser man att strålen går två rutor neråt för varje ruta framåt, vilket motsvarar lutning -2. $\tan\alpha = -2$, alltså.

Ur skärningspunkt: Tangensvärdet är kvoten mellan sinus- och cosinusvärdena för vinkeln; dessa värden är y- och x-koordinaterna för skärningen mellan strålen och cirkeln. Det ser ut som att $\sin\alpha \approx 0{,}9$ och $\cos\alpha \approx -0{,}45$, vilket ger $\tan\alpha \approx {}^{0,9}/_{(-0,45)} = -2$.

Rättningsnorm: Rimligt svar med begriplig och korrekt motivering: 1p. Ingen motivering, ingen poäng.

4. (a) I en triangel är en vinkel $\alpha = {}^{\pi}/_{4}$, motstående sida har längden $a = 5\,\text{cm}$ och en av de närliggande sidorna har längden $b = 7\,\text{cm}$. Bestäm längden på den tredje sidan c. (Svaret blir inte ett heltal.) (4p)

Lösning:
Verkar vara ett fall för cosinussatsen:

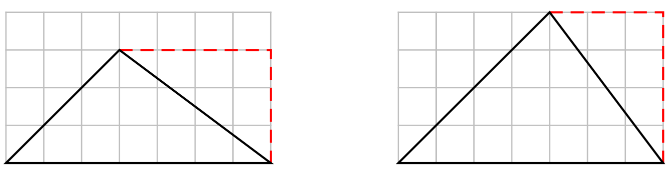
$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
5^2 &= 7^2 + c^2 - 2\cdot 7c\cos\frac{\pi}{4} \\
25 &= 49 + c^2 - 14c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
c^2 - 7\sqrt{2}c + 24 &= 0 \\
c^2 - 2\cdot\frac{7\sqrt{2}}{2}c + \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 24 &= 0 \\
\left(c - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{98}{4} + \frac{96}{4} &= 0 \\
\left(c - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \frac{2}{4} \\
\left(c - \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
c - \frac{7\sqrt{2}}{2} &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\
c &= \frac{7\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \begin{cases} 4\sqrt{2} \approx 4{,}8 \\ 3\sqrt{2} \approx 3{,}6 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Approximationerna (baserade på $\sqrt{2} \approx 1{,}4$) kan vara bra för rimlighetskontroll av svaret med hjälp av linjal. Frågan hade alltså *två* rimliga svar!

Rättningsnorm: På ett ungefär: Korrekt formel: 1p. Korrekt trigonomeriskt värde: 1p. Korrekt lösning av ekvationen: 2p, 1p vid mindre misstag (eller användning av pq-formeln). Se också (b)-uppgiften.

(b) Rita en (någorlunda) korrekt bild på hur triangeln ser ut. (1p)

Lösning:
Bilden går att rita hyfsat även om man inte lyckas lösa (a)-uppgiften. 45°-vinklar kan lätt ritas på rutat papper. Om man gör en 7 cm horisonell sida, ritar ett streck i 45° vinkel i ena ändan, och så lägger an linjalen (eller en bit papper som man markerat 5 cm på) i andra ändan och lutar den så att avståndet blir 5 cm så får man triangeln. Och vid det experimentet bör man märka att problemet har två olika lösningar.



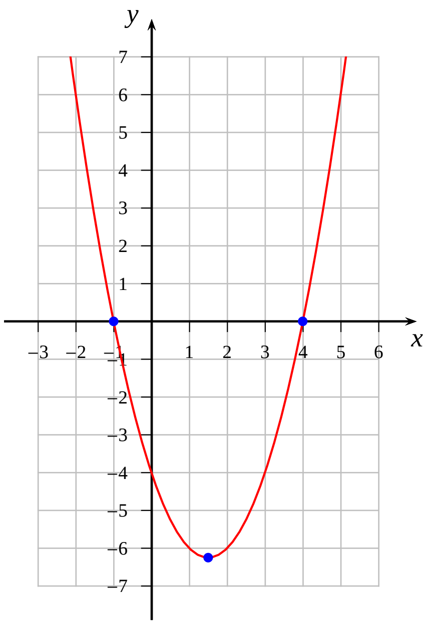
(Bilderna är ritade i halv skala.) Ur en bra ritad bild går det faktiskt att läsa ut svaret exakt – den med streckade linjer markerade triangeln är rätvinklig, och med Pythagoras sats kan man bekräfta att dess hypotenusa, som motsvarar sidan a, verkligen är *exakt* 5 cm. Och då kan man (också med Pythagoras) ta fram den tredje sidans längd.

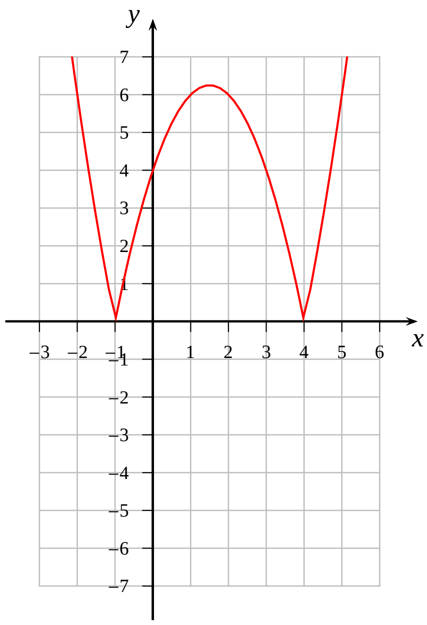
Rättningsnorm: Någorlunda korrekt bild som inte uttryckligen motsäger det svar man beräknat på (a) ger 1p. En lösning här som innehåller bekräftande av exakta placeringen av toppen på trianglarna och en exakt beräkning av tredje sidan och som tar med båda lösningarna ger full poäng på uppgiften som helhet.

5. (a) Rita kurvan $y = |x^2 - 3x - 4|$. Ta ett tillräckligt stort område för att man ska kunna förstå hur den del av kurvan som du *inte* ritat ser ut. (2p)

Lösning:

Börja utan belopp: $y = x^2 - 3x - 4$ blir en parabel med botten neråt. Sådana vet man hur de ser ut. Uttrycket kan skrivas om som $y = (x - 3/2)^2 - 25/4 = (x + 1)(x - 4)$, vilket ger att nollställena är vid $x = -1$ och $x = 4$, och minpunkten vid $x = 3/2$ med minvärdet $-25/4 = -6{,}25$. Prickar man in dessa punkter kan man sedan skissa upp parabeln. Absolutbeloppets inverkan ger att den del av parabeln som hänger nedanför x-axeln viks upp i det positiva området.





Värdetabell: Genom att beräkna y för ett representativt antal x-värden kan man få tillräckligt med punkter för att rita en hyfsad kurva. Viktigt är dock att kurvan är snyggt böjd på alla ställen utom i nollpunkterna, där den har skarpa hörn. (Absolutbelopp har typiskt den effekten.)

x	y
−2	6
−1	0
0	4
1	6
2	6
3	4
4	0
5	6

Vid beräkningen av y-värdena använder man $x^2 - 3x - 4$ och stryker eventuella minustecken i resultaten.

Formel: Beloppets inverkan beror på om det som står innanför beloppstecknet är positivt eller negativt, vilket kan avgöras ur faktorisering och teckentabell. $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$, så det är teckenbyten vid $x = -1$ och $x = 4$:

		-1		4	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Detta gör att formeln kan skrivas utan beloppstecken enligt

$$|x^2 - 3x - 4| = \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & \text{om } x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 3x - 4) & \text{om } x^2 - 3x - 4 < \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 3x - 4 & \text{om } x \leq -1 \text{ eller } x \geq 4 \\ -(x^2 - 3x - 4) & \text{om } -1 < x < 4 \end{cases}$$

Denna formel kan sedan användas som grund för uppritning eller för värdetabell.

Rättningsnorm: Kurva som har spetsar i nollpunkterna, är snyggt böjd i övrigt och som omfattar mer än intervallet $[-1, 4]$ får 2p. Något som uppfyller det mesta får 1p.

(b) Lös ekvationen $|x^2 - 3x - 4| = 6$. För full poäng måste en fullständig beräkning av lösningen finnas med. (3p)

Lösning:

Enligt analysen med rubriken ”formel” på (a) delar problemet upp sig i två eller tre fall, beroende på om man vill ta delarna i den ordning de står på tallinjen eller tar båda ”positiv-fallen” på en gång.

$$\begin{array}{cc}
\text{Fall 1: } x \leq -1 \vee x \geq 4 & \text{Fall 2: } -1 < x < 4 \\
x^2 - 3x - 4 = 6 & -(x^2 - 3x - 4) = 6 \\
x^2 - 3x - 10 = 0 & x^2 - 3x + 2 = 0 \\
(x-5)(x+2) = 0 & (x-1)(x-2) = 0 \\
x = -2 \vee x = 5 & x = 1 \vee x = 2
\end{array}$$

I båda fallen uppfyller lösningsförslagen kraven för att vara tillåtna lösningar enligt definitionen av fallen. Ritar man in linjen $y = 6$ i figuren för (a) kan man se att de beräknade lösningarna är korrekta. Om man gjort en värdetabell har man förmodligen också fått med de aktuella punkterna. (Ur enbart tabell är det dock svårt att argumentera för att det inte finns fler lösningar än dessa fyra.) Faktoriseringarna behöver här inte motiveras, eftersom man kan gissa sig till hur de ska vara ur figuren och bekräfta det med huvudräkning.

Rättningsnorm: Fullständigt svar baserat på figur eller tabell: 1p. Beräkningslösning: Falluppdelning 1p, sedan 1p per korrekt analyserat fall.

6. (a) Lös ekvationen $\sin x + 2\sin x \cos x = 0$ fullständigt. (4p)

Lösning:

Nollfaktorlagen: Bryt ut en gemensam faktor och dela beräkningen i två:

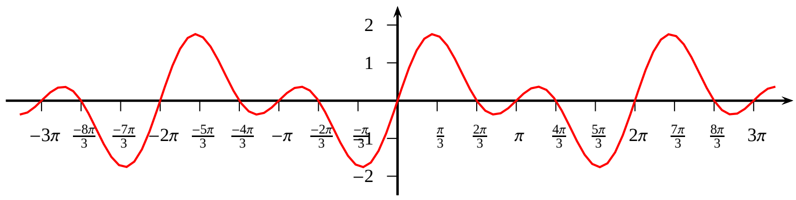
$$\begin{aligned}
\sin x + 2\sin x\cos x &= 0 \\
\sin x(1 + 2\cos x) &= 0 \\
\sin x = 0 \quad &\vee \quad 1 + 2\cos x = 0 \\
x = n\pi \quad & \qquad \cos x = -1/2 \\
& \qquad x = \pm 2/3\pi + n2\pi
\end{aligned}$$

Dubbla vinkeln: Den formeln kan man ta fram ur den i formelsamlingen givna additionsformeln för sinus, genom att sätta in $2\alpha = \alpha + \alpha$ och förenkla.

$$\sin x + 2\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x + \sin 2x = 0$$
$$\sin x = -\sin 2x$$
$$\sin x = \sin(-2x)$$
$$x = -2x + n2\pi \quad \vee \quad x = \pi - (-2x) + n2\pi$$
$$3x = n2\pi \qquad x = 2x + (2n+1)\pi$$
$$x = \frac{n2\pi}{3} \qquad -x = (2n+1)\pi$$
$$x = -(2n+1)\pi$$

Kommentar: Denna ekvation dök upp som ett delmoment i en uppgift i *Grundläggande kalkyl* härom året. Uttrycket var då derivatan till en funktion som skulle analyseras, och ekvationslösningen var till för att lokalisera max- och minpunkter på grafen. Kurvan $y = \sin x + \sin 2x$ ser ut så här:

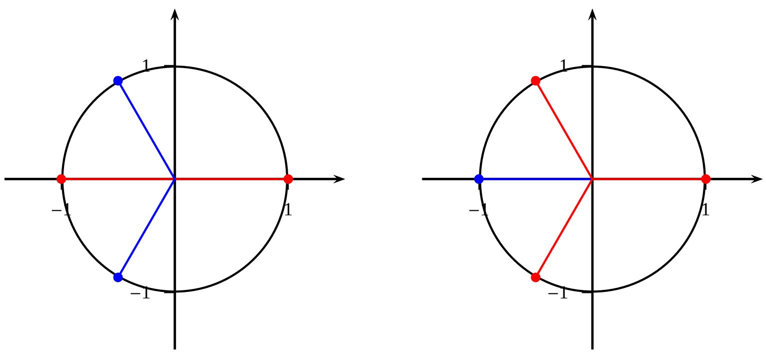


Rättningsnorm: Helt rätt: 4p. ”Förkortat bort” $\sin x$ men räknat korrekt på resterande del: 2p. I övrigt poäng efter hur stor andel av en korrekt lösning man har åstadkommit.

(b) Markera lösningarna i en enhetscirkel eller på en tallinje. (1p)

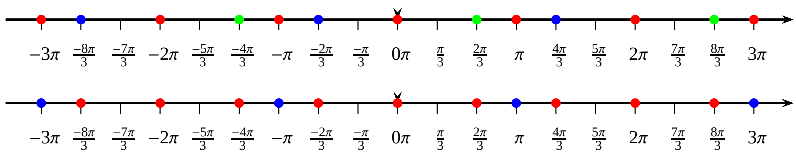
Lösning:

Enhetscirkel: Första bilden är baserad på första lösningsförslaget, första dellösningen i rött och andra dellösningen i blått. (Själva *lösningarna* är de vinklar som får oss att landa på de markerade ställena.)



Andra bilden är baserat på andra lösningsförslaget, första dellösningen i rött och andra i blått.

Tallinje: Första bilden är baserad på första lösningsförslaget, med första dellösningen i rött, de lösningar som är baserade på det positiva alternativet i andra dellösningen i grönt och de som är baserade på det negativa alternativet i blått.



Rättningsnorm: Begriplig bild, konsistent med i (a) framtaget svar och innefattande åtminstone ett varv ger 1p.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2015.01.14 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Förenkla följande uttryck maximalt:

$$\lg 20 - 2\lg 4 + \lg 80$$

(lg x är samma sak som $\log_{10} x$.) (3p)

Lösning:

Använd logaritmreglerna:

$$\begin{aligned}\lg 20 - 2\lg 4 + \lg 80 &= \lg 20 - \lg 4^2 + \lg 80 \\ &= \lg\frac{20\cdot 80}{4^2} = \lg\frac{1600}{16} = \lg 100 = \lg 10^2 = 2\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Hanterat logaritmerna korrekt, men ej gjort sista steget: 2p. Gjort åtminstone två korrekta saker, och ingen felaktig logaritmhantering: 1p.

2. Lös ekvationen $|x-3| + x = 5$. (3p)

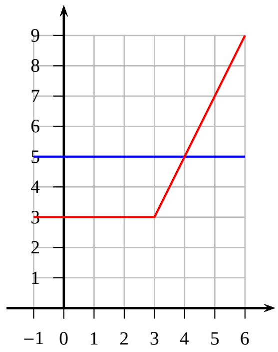
Lösning:

Rekommenderad uppgift 2.22(a) ur *Mot bättre vetande*.

Grafisk lösning: Beloppsuttrycket byter uppförande då $x-3$ växlar tecken, dvs. i $x = 3$. Vänsterledet kan skrivas

$$|x-3| + x = \begin{cases}(x-3)+x & \text{om } x-3 \geq 0\\ -(x-3)+x & \text{om } x-3 < 0\end{cases} = \begin{cases}2x-3 & \text{om } x \geq 3\\ 3 & \text{om } x < 3\end{cases}$$

Uppritat ser problemet ut som



Kurvorna $y = |x - 3| + x$ och $y = 5$ ser ut att skära vid $x = 4$, och lösningen kan lätt verifieras:

$$|4 - 3| + 4 = |1| + 4 = 1 + 4 = 5$$

Beräkningslösning: Även här skrivs uttrycket om:

$$|x - 3| + x = \begin{cases} (x-3) + x & \text{om } x - 3 \geq 0 \\ -(x-3) + x & \text{om } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{om } x \geq 3 \\ 3 & \text{om } x < 3 \end{cases}$$

Beräkningen får nu fortsätta med falluppdelning:

$$x < 3 :$$
$$\begin{aligned} |x - 3| + x &= 5 \\ 3 &= 5 \end{aligned}$$
olöslig

$$x \geq 3 :$$
$$\begin{aligned} |x - 3| + x &= 5 \\ 2x - 3 &= 5 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$
$4 \geq 3$ OK

Svar: $x = 4$

Rättningsnorm: Lösning som bara plockar bort beloppet utan kommentar: 0p, även om den ger rätt svar! Redigt skriven lösning som korrekt analyserar båda fallen och tar fram rätt svar: 3p. Lösning som korrekt hanterar två fall men där det inte framgår vilka fallen är, eller som satt gränsen mellan fallen fel, eller som räknar fel (svaret är lätt att kontrollera!): 2p. Flera av föregående problem i kombination, men inte helt fel: 1p.

3. Lös nedanstående ekvation fullständigt:

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

Tips: använd substitution. (3p)

Lösning:

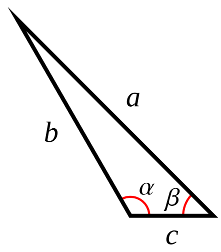
Uttrycket $\log_2 x$ finns på flera ställen i ekvationen, så vi kan inleda med att kalla det för t och se om ekvationen blir trevligare av det:

$$\begin{aligned} (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 &= 0 \qquad \text{sätt } \log_2 x = t \\ t^2 - t - 2 &= 0 \\ t^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}t + (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 - 2 &= 0 \\ (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4} &= 0 \\ (t - \frac{1}{2})^2 &= (\frac{3}{2})^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t - \frac{1}{2} &= \pm\frac{3}{2} \\
t = 2 \quad &\vee \quad t = -1 \\
\log_2 x = 2 \quad &\quad \log_2 x = -1 \\
x = 2^2 \quad &\quad x = 2^{-1} \\
x = 4 \quad &\quad x = 1/2
\end{aligned}
$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Till största delen rätt: 2p. Kommit en bit på väg: 1p.

4. I den avbildade triangeln är vinkeln $\alpha = 120^\circ$, vinkeln $\beta = 45^\circ$ och sidan $a = 3\sqrt{6}$ cm. (Bilden är ritad i halv skala.)



(a) Bestäm längden på sidan b. (2p)

Lösning:

Två sidor och motstående vinklar inblandade – perfekt för sinussatsen:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{3\cancel{\sqrt{3}}\cancel{\sqrt{2}}\cdot 1/\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{3}}/2} = 6\,\text{cm}$$

Rimligheten kan kontrolleras med linjal i figuren.

Rättningsnorm: Ställt upp sinussatsen korrekt: 1p. Kommit vidare till svar (med korrekta trigonometriska värden men inte nödvändigtvis förkortat): +1p.

(b) Bestäm längden på sidan c. (Svaret blir inte särskilt snyggt, men det går att räkna ut.) (3p)

Lösning:

Eftersom vinkelsumman i en triangel är 180° måste den tredje vinkeln (som vi kan kalla γ) vara 15°.

Sinussatsen: Om vi fortsätter med sinussatsen har vi problemet att $\sin 15^\circ$ inte ingått bland de värden som man ska memorera. Det är dock möjligt att ta fram det genom att kreativt tillämpa additionsformeln för sinus:

$$
\begin{aligned}
\sin 15^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\
&= \sin(60^\circ + (-45^\circ)) \\
&= \sin 60^\circ \cos(-45)^\circ + \cos 60^\circ \sin(-45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}
\end{aligned}
$$

Nu kan vi tillämpa sinussatsen. Eftersom sidan b har enklast längd använder vi den, men det skulle gå lika bra (men bli lite mer sifferhantering) om vi tog sidan a istället:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{6\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4}{\sqrt{2}/2} = 3(\sqrt{3}-1) \approx 2{,}2\,\text{cm}$$

Cosinussatsen: Om vi istället tar cosinussatsen är en version

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos\gamma$$

vilket ger precis samma problem som sinussatslösningen: vi måste räkna ut ett trigonometriskt värde för 15°. Väljer man att göra det får man på samma sätt

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ + (-45^\circ)) = \ldots = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Detta ger

$$c^2 = (3\sqrt{6})^2 + 6^2 - 2\cdot 3\sqrt{6}\cdot 6\cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \ldots = 36 - 18\sqrt{3}$$

$$c = \sqrt{36 - 18\sqrt{3}} = \sqrt{9 - 18\sqrt{3} + 27} = \sqrt{3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\sqrt{3} + (3\sqrt{3})^2}$$

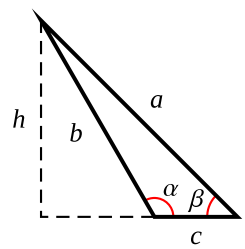
$$= \sqrt{(3 - 3\sqrt{3})^2} = |3 - 3\sqrt{3}| \approx 2{,}2\,\text{cm}$$

(Den här intressanta omskrivningen som tar bort det yttre rottecknet förväntar jag mig inte att någon ska ha gjort, men jag ville visa att det är möjligt att skriva om uttrycket till samma sak som i den förra lösningen.)
Om vi istället utgår från vinkeln α, vars cosinusvärde vi känner till, får vi

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
(3\sqrt{6})^2 &= 6^2 + c^2 - 2\cdot 6c\cos 120^\circ \\
54 &= 36 + c^2 + 6c \\
c^2 + 6c - 18 &= 0 \\
c^2 + 2\cdot 3c + 3^2 - 3^2 - 18 &= 0 \\
(c+3)^2 &= 27 \\
c + 3 &= \pm\sqrt{27} = \pm\sqrt{9\cdot 3} = \pm 3\sqrt{3} \\
c &= -3 \pm 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Minusaternativet ger ett negativt svar som förkastas, så den enda geometrisk möjliga lösningen är $c = 3\sqrt{3} - 3$ cm.
Man kan också utgå från $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\gamma$, men det ger en snarlik lösning som jag inte orkar skriva in.
Rätvinkliga trianglar: Vi kan rita in en höjd h i figuren. Sambanden för rätvinkliga trianglar ger att

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{h}{a} \\
h &= a\sin\beta \\
&= 3\sqrt{6}\sin 45^\circ \\
&= 3\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{3}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \\
&= 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\,\text{cm}
\end{aligned}$$



Eftersom den stora rätvinkliga triangeln är en halv kvadrat har den horisontella kateten samma längd. Pythagoras sats ger att den horisontella kateten i den mindre rätvinkliga triangeln (den som har b som hypotenusa) har längden

$$\sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3\,\text{cm}$$

(Detta mått kan också erhållas genom att man utnyttjar ”cosinusvärdet är närliggande genom hypotenusan” eller genom att man inser att triangeln är en halv liksidig triangel, så att sidan ifråga är exakt hälften av sidan b.)
Längden på sidan c är skillnaden mellan längderna på de horisontella kateterna i de rätvinkliga trianglarna, så

$$c = 3\sqrt{3} - 3 \approx 2{,}2\,\text{cm}$$

(Det finns ett antal varianter av den här lösningsmetoden.)

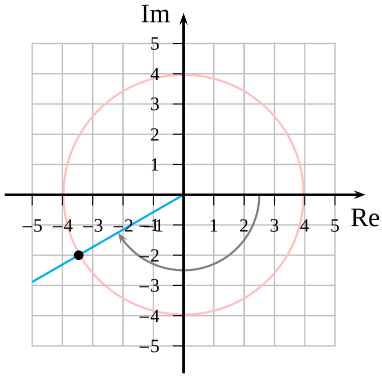
Rättningsnorm: Kommit till korrekt svar (som inte behöver vara förenklat): 3p. Åtminstone ställt upp en korrekt användbart samband (sinussatsen med rätt vinkel, cosinussatsen i någon korrekt form, eller något konstruktivt med rätvinkliga trianglar): 1p. 2p för att ha kommit en bra bit på vägen genom uträkningen, men inte kommit ända fram.

5. Talet z uppfyller att $|z| = 4$ och att $\arg z = -{}^{5\pi}/_{6}$.

(a) Markera talet z i det komplexa talplanet. För poäng måste bilden vara helt korrekt. (1p)

Lösning:

Talet ska ligga på avståndet 4 från origo i riktningen $-{}^{5\pi}/_{6}$ (mätt mot positiva x-axeln:



(Jag orkade inte leta rätt på manualen och se efter hur det är man gör för att få in i på imaginäraxeln.)

Rättningsnorm: Eftersom varken linjal eller gradskiva är obligatorisk utrustning får ”helt korrekt” tolkas lite flexibelt, utan rimlig ögonmåtts–frihandsritnings-precision får gälla. Talplanet måste dock vara graderat.

(b) Skriv talet z på rektangulär form (det vill säga på formen $a + bi$). (2p)

Lösning:

$z = 4(\cos(-{}^{5\pi}/_{6}) + i\sin(-{}^{5\pi}/_{6})) = 4((-{}^{\sqrt{3}}/_{2}) + i(-{}^{1}/_{2})) = -2\sqrt{3} - 2i$. (Stämmer bra med bilden; $2\sqrt{3} \approx 2 \cdot 1{,}7 = 3{,}4$.)

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat att man vet vad man ska göra, men rört till någon detalj i utförandet: 1p.

(c) Beräkna z^2. (Polär och rektangulär form går lika bra.) (2p)

Lösning:

Rektangulär form: Använd förslagsvis kvadreringsregeln:

$$z^2 = (-2\sqrt{3} - 2i)^2 = (-2\sqrt{3})^2 + 2(-2\sqrt{3})(-2i) + (2i)^2$$
$$= 12 + 8\sqrt{3}i + 4i^2 = 8 + 8\sqrt{3}i$$

(Man kan också skriva det som en produkt av två likadana faktorer och använda distributiva lagen.)

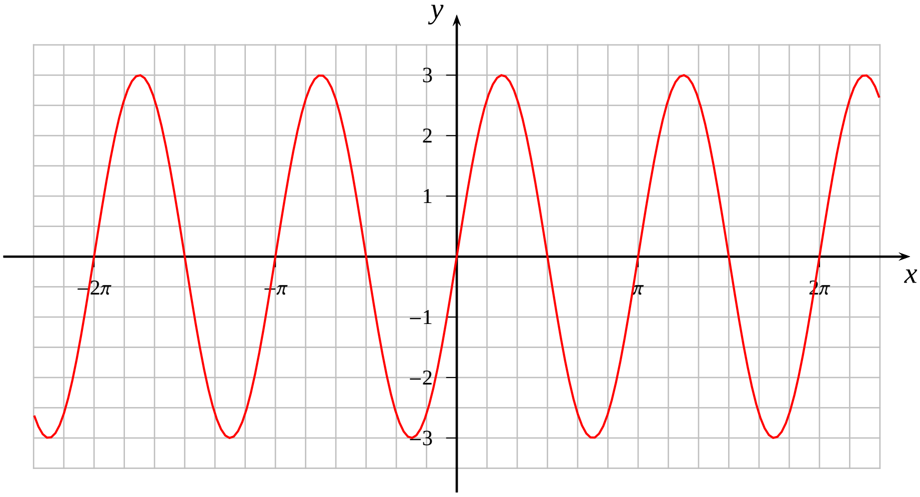
Polär form: Använd förslagsvis De Moivres formel:

$$z^2 = (4(\cos(-{}^{5\pi}/_{6}) + i\sin(-{}^{5\pi}/_{6})))^2$$
$$= 4^2(\cos(-{}^{5\pi}/_{6} \cdot 2) + i\sin(-{}^{5\pi}/_{6} \cdot 2)) = 16(\cos(-{}^{5\pi}/_{3}) + i\sin(-{}^{5\pi}/_{3}))$$

(Man kan också skriva det som en produkt av två likadan faktorer och använda metoden för multiplikation på polär form.)

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt metod men något fel i utförandet, alternativt inte avlägsnat i^2: 1p.

6. Här är kurvan $y = f(x)$.



(a) Skriv upp en formel för funktionen f. Förklara också hur du resonerar för att få fram formeln. (3p)

Lösning:

Den här vågformen säger att det är en trigonometrisk funktion. Kurvan passerar genom origo, vilket stämmer med sinus men inte med cosinus (som har en topp vid $x = 0$). Perioden är π, vilket är hälften av vad den är för $\sin x$. Amplituden är 3, vilket är 3 gånger så mycket som den är för $\sin x$. Formeln $3 \sin 2x$ ger precis det resultatet.

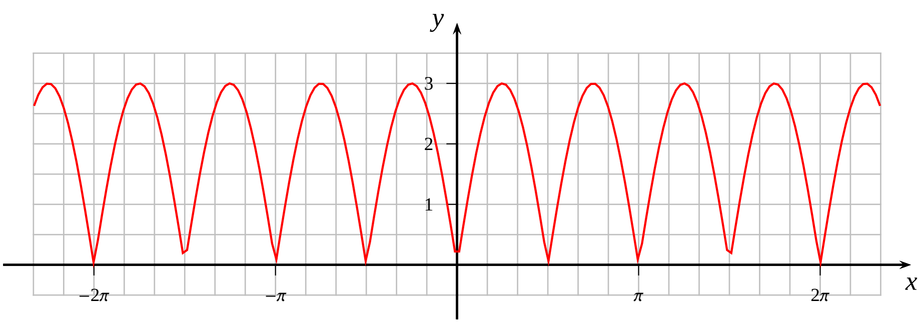
Det finns andra, krångligare formler som också ger den här kurvan, som $y = 6 \sin x \cos x$ och $y = 3 \cos(x - \pi/2)$, men det här är den mest uppenbara. (Det är hur som helst därför som det står ”skriv upp en formel” och inte ”skriv upp formeln”.)

Rättningsnorm: Rätt funktion (sinus): 1p. Rätt period: 1p. Rätt amplitud: 1p. Om inte någon form av förklaring finns med minskas poängen med 1.

(b) Rita kurvan $y = |f(x)|$. (Går att göra även om man inte löst (a)-uppgiften.) (1p)

Lösning:

Effekten av beloppstecknet är att ta bort minustecknet från de y-värden som har sådana. Grafiskt leder detta till att de bitar av kurvan som hänger under x-axeln viks upp så att de istället ligger ovanför.



Här ser vi för övrigt ett bra exempel på en situation där en datorritad bild inte blir helt korrekt. Datorn gör upp en värdetabell, och förbinder punkterna i tabellen med varandra. Man kan exempelvis se att den tog en punkt strax till vänster om $x = 0$ och en strax till höger, men inte beräknade värdet i $x = 0$. Det gör att spetsen som ska vara vid $(0, 0)$ kommit bort. Detaljer av den här sorten blir ofta felaktigt återgivna, och det bör man veta om.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel!

(c) Den kurva som du ritade på (b)-uppgiften, vilken periodlängs har den? (1p)

Lösning:
Biten mellan 0 och $\pi/2$ upprepas om och om igen, så periodlängden är $\pi/2$.
Rättningsnorm: Svaret ska vara konsistent med vad-man-nu-ritade på (b).

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2015.03.25 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

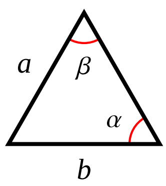
Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. I den avbildade triangeln har sidan a längden $5\sqrt{2}$ cm och sidan b längden $5\sqrt{3}$ cm. Vinkeln α är 45°. Bestäm vinkeln β.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra! (3p)



Lösning:

Två vinklar och motstående sidor inblandade: fall för sinussatsen.

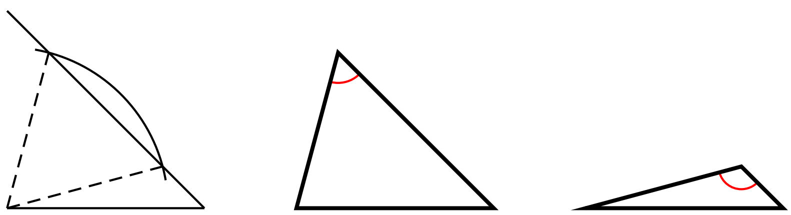
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}/2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta = \begin{cases} 60° + n\cdot 360° \\ 120° + n\cdot 360° \end{cases}$$

Att lägga till eller dra ifrån ett antal hela varv ger inga vinklar som är möjliga i en triangel, men både 60° och 120° är rimliga svar på frågan. (I det första fallet är den tredje vinkeln 75°, i det andra fallet 15°. Man måste kontrollera detta, för i många fall måste ett av lösningsförslagen kastas eftersom graderna inte räcker till.)

Försöker man konstruera triangeln grafiskt, t.ex. genom att rita upp sidan b, rita in en linje i 45° vinkel och så måtta in sidan a med hjälp av passare så finner man också att frågan har två lösningar:



Rättningsnorm: Korrekt funnit båda lösningarna, och visat att de är möjliga: 3p. Funnit den ena av lösningarna: 2p. Åtminstone visat att man vet hur man använder sinussatsen: 1p.

2. Lös ekvationen $|x-1|+|x-3|=x$ fullständigt. (3p)

Lösning:

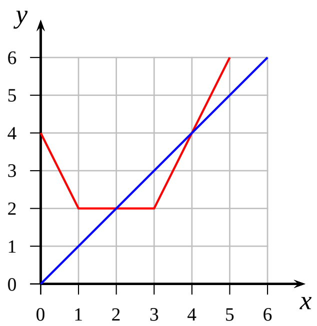
Det första beloppet ändrar uppförande vid $x = 1$ (då uttrycket innanför beloppstecknet blir 0), det andra vid $x = 3$. Vi har att

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 & x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & x-3 < 0 \end{cases}$$

Grafisk lösning: Vi skriver uttrycker vänsterledet utan beloppstecken:

$$|x-1|+|x-3| = \begin{cases} -(x-1)-(x-3) & x < 1 \\ (x-1)-(x-3) & 1 \leq x < 3 \\ (x-1)+(x-3) & x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+4 & x < 1 \\ 2 & 1 \leq x < 3 \\ 2x-4 & x \geq 3 \end{cases}$$

Vi ritar nu in kurvorna $y = \text{VL}$ och $y = \text{HL}$ i samma koordinatsystem, och läser av skärningspunkterna:



Det är av bilden klart att det finns två skärningspunkter, belägna vid $x = 2$ och $x = 4$. (Snabbkontroll i formlerna bekräftar att det är *exakt* dessa värden som gäller; blick i bilden visar att det inte kommer att finnas några skärningspunkter bortanför det område som vi ritat; linjerna divergerar.)

Beräkningslösning: De två brytpunkterna delar tallinjen i tre delar, och vi måste göra en separaträkning på varje del:

$$\begin{array}{ccc} x < 1: & 1 \leq x < 3: & x \geq 3: \\ -(x-1)-(x-3) = x & (x-1)-(x-3) = x & (x-1)+(x-3) = x \\ -2x+4 = x & 2 = x & 2x-4 = x \\ 4 = 3x & 1 \leq 2 < 3 & x = 4 \\ x = 4/3 \approx 1{,}3 & & 4 \geq 3 \\ 1{,}3 \not< 1 & & \end{array}$$

Den första lösningen måste förkastas, eftersom den inte uppfyllde förutsättningarna i beräkningen. (Den motsvarar skärningspunkten mellan den blåa linjen och en förlängning av första stycket av den röda kurvan.) De andra två lösningarna är det inga problem med.

Test: För säkerhets skull kan man testa lösningarna, och måste då observera att de ska testas i *ursprungsekvationen*, inte i de versioner som man har varit inne och klottrat i:

$$x = 4/3: \quad \begin{array}{l} \text{VL} = |4/3-1|+|4/3-3| = |1/3|+|-5/3| = 1/3+5/3 = 6/3 \\ \text{HL} = 4/3 \end{array} \quad \text{Ej lika!}$$

$$x = 2: \quad \begin{array}{l} \text{VL} = |2-1|+|2-3| = |1|+|-1| = 1+1 = 2 \\ \text{HL} = 2 \end{array} \quad \text{Lika!}$$

$$x = 4: \quad \begin{array}{l} \text{VL} = |4-1|+|4-3| = |3|+|1| = 3+1 = 4 \\ \text{HL} = 4 \end{array} \quad \text{Lika!}$$

Svar: $x = 2$, $x = 4$

Rättningsnorm: Lösning som tar fram båda svaren och klart visar att det inte finns fler än så: 3p. Lösning med något mindre fel: 2p. Lösning som åtminstone visar att man vet vad ett absolutbelopp är: 1p.

3. Zainab har funnit att en ekvation har lösningen $x = n \cdot 120°$, $x = 180° + n \cdot 360°$.

Maha har fått svaret $x = \pm 120° + n \cdot 360°$, $x = n \cdot 180°$ på samma fråga.

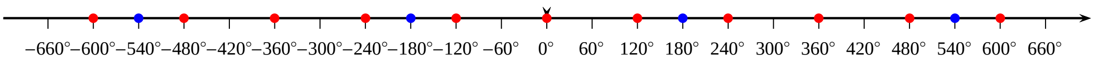
Kan de ha rätt båda två? Motivera noga! (3p)

Lösning:

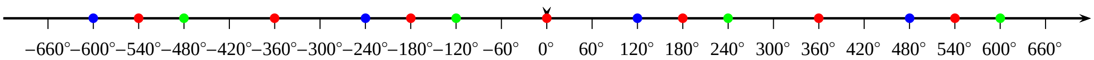
Rekommenderad uppgift 5.209 ur *Tal & Rum*.

En given ekvation har en och endast en lösningsmängd (som innehåller alla lösningarna till ekvationen). Det är möjligt att detta är två olika sätt att beskriva samma mängd. Enklaste sättet att jämföra svaren är att pricka in dem på en tallinje.

Zainabs första lösning motsvarar en prick var 120:e grad, åt båda hållen från 0° (vilket motsvarar $n = 0$). Dessa tal prickar vi in i rött. Den andra lösningen är en prick var 360:e grad, med start i 180°. Dessa tal prickar vi in i blått. Det ger:

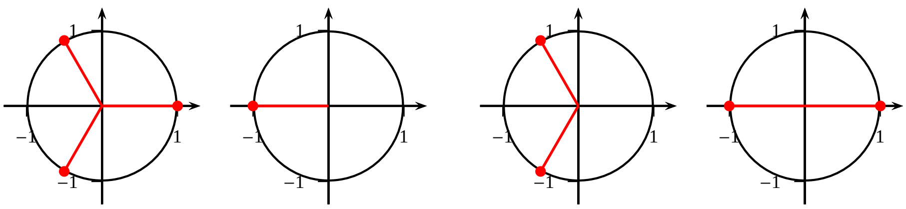


Mahas första lösning ger dels en prick var 360:e grad med start i 120°, vilket vi markerar i blått, dels en prick var 360:e grad med start i −120°, vilket vi markerar i grönt. Den andra lösningen motsvarar en prick var 180:e grad, med start i 0°, vilket vi markerar i rött. Det ger:



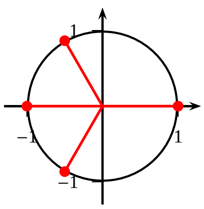
Detta är exakt samma lösningar, så det är ganska troligt att de har rätt båda två. (Annars har de fel båda två, men eftersom de uppenbarligen löst problemet på olika sätt verkar det osannolikt att de ska ha räkat fel på exakt samma sätt.)

Ett alternativt sätt att illustrera lösningsmängderna är att markera de platser vinklarna för en till i enhetscirkeln:



$n \cdot 120°$ $180° + n \cdot 360°$ $\pm 120° + n \cdot 360°$ $n \cdot 180°$

Båda dessa kan sammanfattas som



(Illustrationen är tagen från en av de inlämnade tentorna.)

Kommentar: Det här är lösningsmängden till ekvationen $\sin x + \sin 2x = 0$. Zainab har löst ekvationen genom att skriva om den till $\sin x = \sin(-2x)$, vilket ger $x = -2x + n \cdot 360°$ eller $x = (180° - (-2x)) + n \cdot 360°$. Maha har löst den genom att skriva om med dubbla vinkeln och faktorisera, $\sin x(1 + 2\cos x) = 0$, varefter hon utnyttjat nollfaktorlagen och separatlöst de två ekvationerna $\sin x = 0$ (som ger $x = n \cdot 180°$) och $\cos x = -1/2$ (som ger $x = \pm 120° + n \cdot 360°$). Detta är korrekta lösningar av samma ekvation, och är samma svar (fast skrivet på två olika sätt).

Rättningsnorm: Ett välmotiverat ”de har åtminstone kommit till samma resultat”: 3p. Förnuftigt upplagd undersökning med något fel i kombinerad med ”de kan inte ha rätt båda två”: 2p. Mer fel än så, men fortfarande klart att man förstår frågan och att det handlar om två oändliga mängder: 1p.

4. (a) Beräkna $(\log_2 8)^2$ (1p)

Lösning:

$(\log_2 8)^2 = (\log_2 2^3)^2 = 3^2 = 9$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men om man klart visar att man vet vad som menas med logaritm men gör felräkningar på både (a) och (b) ges 1p totalt för dessa två uppgifter.

(b) Beräkna $\log_2(8^2)$ (1p)

Lösning:

$\log_2(8^2) = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$

Rättningsnorm: Se (a).

(c) Om man skriver ”$\log_2 8^2$” (utan några parenteser), menar man då uttrycket i (a) eller uttrycket i (b)? (1p)

Lösning:

Uttrycket i (b). Potensberäkning går före i stort sett alla andra räknesätt i prioritetsordningen. (Jag kommer uppriktigt sagt inte på något räknesätt som det *inte* går före, men det är alltid säkrast att säga ”i stort sett”.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(d) Lös ekvationen $\log_2 x^2 = 4$. (2p)

Lösning:

Gå på definitionen av logaritm:

$$\log_2 x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4$$

Notara att om man skriver om ekvationen till $2\log_2 x = 4$ så kommer man bara att få fram den positiva lösningen. Alla logaritmlagarna gäller under *förutsättningen* att alla inblandade uttryck är definierade, och det är inte $\log_2(-4)$.

Om man anser att korrekta tolkningen av uttrycket är enligt (a) får man följande ekvationslösning:

$$(\log_2 x)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 x = \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^2 \vee x = 2^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \vee x = \frac{1}{4}$$

Detta är alltså inte korrekt svar på den givna ekvationen.

Rättningsnorm: Helt korrekt lösning: 2p. (Har man gett fel svar på (c) så ger lösning enligt det felaktiga alternativet full poäng, för då är man åtminstone konsekvent.) Delvis korrekt lösning, som åtminstone visar att man kan utnyttja sambandet mellan logaritmer och potenser: 1p.

5. Vi har talet $z = -2 + 3i$.

(a) Markera talet z i det komplexa talplanet. (1p)

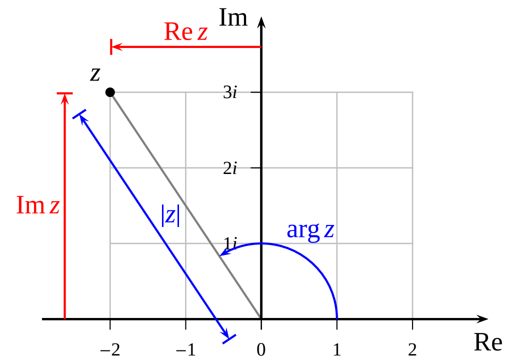
Lösning:
Bild på nästa uppgift.
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Markera i figuren

- $\operatorname{Re} z$ • $\operatorname{Im} z$ • $|z|$ • $\arg z$

Markeringarna ska vara så pass tydliga ett en person som inte läst komplexa tal skulle kunna besvara motsvarande frågor för ett annat tal baserat på din bild. (2p)

Lösning:
Något i den här vägen:



(Pilspets i bara ena ändan antas innebära att riktningen är relevant, dvs. att man ska ha med tecken.)

Rättningsnorm: Rättningen blir ganska subjektiv, för det är svårt att beskriva vad som menas med ”tydligt”. Bra och korrekt bild: 2p. Svårläst men korrekt bild alternativt lättläst bild med något fel i: 1p.

(c) Vi har också talet $w = -5 + 6i$. Beräkna $\dfrac{z}{w}$. (2p)

Lösning:
Förläng med komplexa konjugatet av nämnaren:

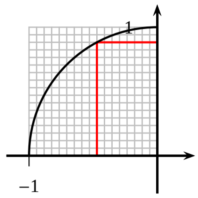
$$\frac{z}{w} = \frac{-2+3i}{-5+6i} \cdot \frac{-5-6i}{-5-6i} = \frac{2\cdot 5 + 2\cdot 6i - 3\cdot 5i - 3\cdot 6i^2}{(-5)^2 - (-6i)^2}$$
$$= \frac{10 + 12i - 15i + 18}{25 + 36} = \frac{28 - 3i}{61}$$

Rättningsnorm: Inga avdrag för rena sifferräkningsfel, däremot för teckenfel. Helt rätt i övrigt: 2p. Huvudsakligen rätt: 1p.

6. (a) För vinkeln α gäller att $\sin\alpha = {}^{15}/_{17}$ och att $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Bestäm $\cos\alpha$. Svaret ska vara maximalt förenklat. (2p)

Lösning:
Intervallet $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ger att vinkeln för oss till andra kvadranten. Där är x-koordinaterna negativa, så vi vet att $\cos\alpha < 0$. Trigonometriska ettan ger:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$= 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{289}{289} - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}$$



$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{64}{289}} = \pm\frac{8}{17}$$

Enligt diskussion ovan är det det negativa svaret som gäller; $\cos\alpha = -8/17$.

Rättningsnorm: Helt rätt (både siffror och tecken): 2p. Huvudsakligen rätt: 1p. ”Förenklat” $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ till $\cos\alpha = 1-\sin\alpha$: 0p (för det är ett grovt principfel).

(b) För vinkeln β gäller att $\tan\beta = 2$ och att $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$. Bestäm $\sin\beta$. (3p)
(Vi har inte tagit upp någon uppgift som ser exakt ut så här i undervisningen, men den går att lösa med hjälp av de saker som vi *har* tagit upp.)

Lösning:

Beräkningslösning: Vi vet att $\tan\beta = (\sin\beta)/(\cos\beta)$ (definitionen av tangens) och att $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ (trigonometriska ettan). Ur den senare får vi att

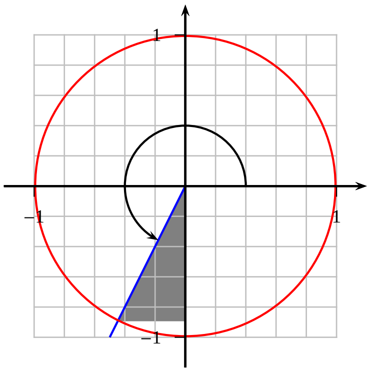
$$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

Eftersom vi är i tredje kvadranten är det minustecknet som gäller. Ihopsatt har vi nu

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\beta}{\cos\beta} &= 2\\
\frac{\sin\beta}{-\sqrt{1-\sin^2\beta}} &= 2\\
\sin\beta &= -2\sqrt{1-\sin^2\beta}\\
(\sin\beta)^2 &= (2\sqrt{1-\sin^2\beta})^2 \qquad \text{Kolla svaren!}\\
\sin^2\beta &= 4(1-\sin^2\beta)\\
5\sin^2\beta &= 4\\
\sin^2\beta &= \frac{4}{5}\\
\sin\beta &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

Den positiva lösningen passar inte i den okvadrerade ekvationen, vilket stämmer med att sinusvärden är negativa i tredje kvadranten.

Geometrisk lösning 1: Vi kan rita in vinkeln i en enhetscirkel. Tangensvärdet för vinkeln motsvarar k-värdet för strålen, som alltså ska gå 2 steg uppåt för varje steg framåt:



Om vi nu lyfter ut den markerade triangeln så är längden på den längre kateten dubbelt så stor som längden på den kortare, och hypotenusan är 1. Om vi kallar längden på den kortare kateten för x så ger Pythagoras sats att

$$x^2+(2x)^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Den längre kateten har då längden $2/\sqrt{5}$, och eftersom den går neråt är y-koordinaten för punkten $-2/\sqrt{5}$.

Geometrisk lösning 2: Om vi till att börja med struntar i det där med kvadranter (som avgör tecknen) utan fokuserar på att få siffrorna rätt så är tangensvärdet lika med motstående katets längd delat med närliggandes i en rätvinklig triangel (vilket innebär att den studerade vinkeln ligger mellan 0 och $\pi/2$). Denna kvot blir 2 exempelvis då motstående katet har längden 2 l.e. och närliggande 1 l.e. Pythagoras sats ger då att hypotenusan är $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ l.e.. Sinusvärdet på vinkeln är motstående katets längd genom hypotenusan, här $2/\sqrt{5}$. Om vi nu tittar på enhetscirken ser vi att den vinkel vi har har ett motsvarande sinusvärde, fast med minustecken.

Svar: $\sin\beta = -2/\sqrt{5}$.

Rättningsnorm: Helt rätt (både siffror och tecken): 3p. Åtminstone gjort någonting korrekt och konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p. Vid teckenfel på både (a) och (b) men rätt i övrigt ges 4p på uppgiften som helhet.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2015.06.12 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1. (a) Förklara vad som menas med *absolutbeloppet* av ett reellt tal a. (1p)

Lösning:

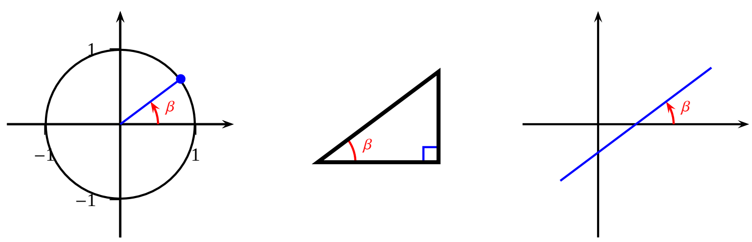
Talet med eventuellt minustecken bortkastat / siffrorna i talet (utan tecken) / avståndet mellan talet och origo på tallinjen (den sista varianten funkar även för icke-reella tal). Eller mer formellt:

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{om } a \geq 0 \\ -a & \text{om } a < 0 \end{cases}$$

(b) Förklara vad som menas med *tangensvärdet* för en vinkel β. (1p)

Lösning:

Kvoten mellan x-koordinaten och y-koordinaten för den punkt man hamnar i om man startar vid positiva x-axeln på enhetscirkeln och så rör sig vinkeln β moturs utmed cirkeln



Alternativt: sinusvärdet delat med cosinusvärdet (fordrar att man vet vad sinus och cosinus är) / motstående katet delad med närliggande katet i en rätvinklig triangel med spetsvinkel β (funkar bara för vinklar mellan 0 och 90°) / k-värdet för en linje som går i vinkel β mot x-axeln (fordrar att man vet vad k-värde är).

(c) Förklara vad som menas med *två-logaritmen* för ett tal c. (1p)

Lösning:

Det tal man ska upphöja 2 i om man vill få c som resultat. Exempelvis är två-logaritmen för åtta tre, eftersom man ska upphöja två i tre om man vill få åtta. Eller mer formellt:

$$a = \log_2 c \quad \Leftrightarrow \quad 2^a = c$$

Rättningsnorm: (Gäller alla deluppgifterna:) Kan nog bara bli rätt eller fel, men formuleringarna tolkas relativt snällt.

2. (a) Rita kurvan $y = |x-2| - 1$ (2p)

Lösning:

Kända kurvor och transformationer: $y = |x|$ ser ut som ett V med spetsen i origo och sidor i 45° vinkel. -2 flyttar denna kurva 2 steg åt höger (så att spetsen hamnar vid $x = 2$); -1 flyttar den kurvan ett steg neråt (så att spetsen hamnar vid $y = -1$).

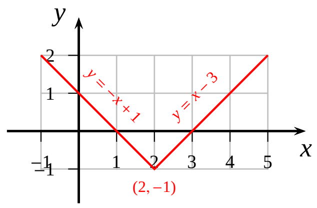
Absolutbeloppets definition:

$$|x-2| - 1 = \begin{cases} (x-2) - 1 & \text{om } x - 2 \geq 0 \\ -(x-2) - 1 & \text{om } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x \geq 2 \\ -x + 1 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

Värdetabell: Räkna ut y-värdet för ett representativt antal x-värden, och försök förstå hur kurvan ser ut ur dessa data. Eftersom heltal är lätta att räkna med börjar vi med ett antal sådana, och medan vi ändå håller på beräknar vi värdena för (b)-uppgiften också:

x	$x-2$	$\lvert x-2\rvert$	$\lvert x-2\rvert-1$	$\lvert\lvert x-2\rvert-1\rvert$
-5	-7	7	6	6
-4	-6	6	5	5
-3	-5	5	4	4
-2	-4	4	3	3
-1	-3	3	2	2
0	-2	2	1	1
1	-1	1	0	0
2	0	0	-1	1
3	1	1	0	0
4	2	2	1	1
5	3	3	2	2

Bild: Oavsett hur man resonerar blir bilden densamma:



Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt tänkt, men något fel i utförandet: 1p.

(b) Rita kurvan $y = \big||x-2| - 1\big|$ (1p)

Lösning:

Kända effekter av absolutbelopp: Om man vet hur $y = f(x)$ ser ut så kan man direkt rita $y = |f(x)|$; det är bara att vika upp de delar av kurvan som ligger under x-axeln, i det här fallet området $1 < x < 3$.

Absolutbeloppets definition: Vi får separaträkna på de två delarna av grafen:

$$x \geq 2 : \big||x-2| - 1\big| = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x - 3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{om } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{om } x < 3 \end{cases}$$

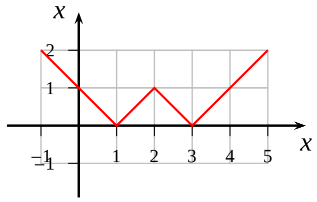
$$x < 2 : \big||x-2| - 1\big| = |-x + 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{om } -x + 1 \geq 0 \\ -(-x+1) & \text{om } -x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & \text{om } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{om } x > 1 \end{cases}$$

Detta kan sammanfattas som

$$\big||x-2| - 1\big| = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{om } 2 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{om } 1 < x < 2 \\ -x + 1 & \text{om } x \leq 1 \end{cases}$$

Värdetabell: Se (a)-uppgiften.

Bild: Oavsett hur man resonerar blir bilden densamma:



Rättningsnorm: Svar som överensstämmer med vad-man-nu-ritade på (a)-uppgiften ger poäng.

3. Lös ekvationen $x^{3-\lg(x)} = 10^2$. (”lg(x)” är samma sak som ”$\log_{10}(x)$”.) (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 6.d2 från gamla kursens inlämingsuppgifter.

Logaritmera: Om man här tar 10-logaritmen av båda led så får man lg(x) på flera ställen istället för att ha lg(x) på ett och bara x på ett annat:

$$\begin{aligned}
x^{3-\lg(x)} &= 10^2 \\
\lg(x^{3-\lg(x)}) &= \lg(10^2) \\
(3-\lg(x))\cdot\lg(x) &= 2 \qquad \text{Sätt } \lg(x) = t \\
(3-t)t &= 2 \\
t^2 - 3t - 2 &= 0 \\
t^2 - 2\cdot 1{,}5t + 1{,}5^2 - 1{,}5^2 - 2 &= 0 \\
(t-1{,}5)^2 - 2{,}25 - 2 &= 0 \\
(t-1{,}5)^2 &= 0{,}25 \\
t - 1{,}5 &= \pm 0{,}5 \\
t = 2 \quad &\vee \quad t = 1 \\
\lg(x) = 2 \quad &\quad \lg(x) = 1 \\
x = 10^2 \quad &\quad x = 10^1 \\
x = 100 \quad &\quad x = 10
\end{aligned}$$

Substituera: En annan metod att slippa ha x på en del ställen och lg x på andra är att sätta att $x = 10^t$ och se vad det ger:

$$\begin{aligned}
(10^t)^{3-\lg 10^t} &= 10^2 \\
10^{t(3-t)} &= 10^2 \\
t(t-3) &= 2 \\
t^2 - 3t - 2 &= 0 \\
&\vdots \\
t = 2 \quad &\vee \quad t = 1 \\
x = 10^2 \quad &\quad x = 10^1 \\
x = 100 \quad &\quad x = 10
\end{aligned}$$

(Vi förutsatte här att $x > 0$, vilket vi kan göra eftersom lg x annars inte går att räkna ut. Och får man samma resultat då man upphöjer 10 i två exponenter så måste exponenterna vara lika.)

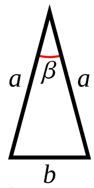
Kontroll: Man bör kontrollera sina svar i ursprungsekvationen:

$$\begin{aligned}
x = 10: &\quad \text{VL} = 10^{3-\lg(10)} = 10^{3-1} = 10^2 = 100 \\
x = 100: &\quad \text{VL} = 100^{3-\lg(100)} = 100^{3-2} = 100^1 = 100
\end{aligned} \qquad \text{HL} = 10^2 = 100$$

Observera att kontroller bara kan visa att de lösningar man hittat är korrekta, inte att man hittat *alla* lösningarna.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Största delen av en korrekt lösning: 2p. Åtminstone gjort något konstruktivt och korrekt: 1p. Hittat en lösning med inspektion och kontrollerat den: 1p.

4. (a) Vi har en likbent triangel. Spetsvinkeln β är 30°, och basen b har längden 2 cm. Bestäm längden på de övriga sidorna. Räkna exakt. (Svaret blir inte särskilt snyggt, men det går att räkna ut.) (3p)



Lösning:
Tre sidor och en vinkel inblandade – fall för cosinussatsen, som i det här fallet blir

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + a^2 - 2aa\cos\beta \\
b^2 &= a^2(2 - 2\cos\beta) \\
a^2 &= \frac{b^2}{2 - 2\cos\beta} \\
&= \frac{2^2}{2 - 2\sqrt{3}/2} = \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \\
a &= \sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 3{,}9\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

(Den negativa lösningen kan förkastas, eftersom det är en längd det handlar om.)

Om man glömt cosinussatsen så kan man börja med att lösa nästa uppgift med hjälp av additionsformeln, och sedan lösa ut a ur sambandet

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

vilket ger

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sin 75^\circ}{1/2} = 4\sin 75^\circ = \ldots$$

Rättningsnorm: Ställt upp sats korrekt: 1p. Korrekt angett standardvinklarnas trigonometriska värden: 1p. Korrekt tagit fram a ur det hela: 1p. Inga avdrag för felräknade värden på $\sin 75^\circ$ från (b)-uppgiften.

(b) Bestäm $\sin 75^\circ$ exakt. (2p)

Lösning:
Kan göras på flera sätt. Man kan utnyttja föregående uppgift, eftersom basvinklarna i triangeln är 75°. (Fås ur vinkelsumman.)

Rätvinklig triangel: Delar vi triangeln med en höjd har vi en rätvinklig triangel med hypotenusa a, närliggande katet 1 cm och vinkel 75°. Längden på motstående katet h är enligt Pythagoras sats

$$h = \sqrt{a^2 - 1^2} == \sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{3}} - 1} = \sqrt{\frac{4-(2-\sqrt{3})}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$$

och sinusvärdet för vinkeln

$$\sin 75^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}}{\sqrt{\frac{4}{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Sinussatsen: Vi har att

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$$

vilket ger

$$\sin 75^\circ = \frac{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\sin 30^\circ}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Additionsformel: Om vi struntar i (a)-uppgiften kan vi istället utnyttja att $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, och då har vi

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\end{aligned}$$

Jämförelse av svaren: Vi har här via tre olika resonemang fått tre till synes olika svar. Kan man visa att de i själva verket är lika?

$$\begin{aligned}\boxed{\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}} &= \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}{2\cdot(4-3)} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})\cdot(4+4\sqrt{3}+3)}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{8+8\sqrt{3}+6-4\sqrt{3}-12-3\sqrt{3}}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4}}{4} = \frac{\sqrt{2(4+2\sqrt{3})}}{4} = \frac{\sqrt{2(3+2\sqrt{3}+1)}}{4} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+1)^2}}{4} \\ &= \boxed{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}\end{aligned}$$

Det kan vara en mycket nyttig övning att gå igenom alla steg i den här beräkningen och kontrollera att de är fullt lagenliga. En lärdom man kan dra av det hela är att rotuttryck kan skrivas om på *många* sätt!

Rättningsnorm: 0p om man använt icke-existerande regler för trigometriska värden. Kommit till ett korrekt svar: 2p (inga avdrag för följdfel från föregående uppgift, inte heller för rena sifferräknefel i förenklingar). Påbörjat en fungerande lösning men ej kommit till svar: 1p.

5. Vi har talet $z = -6 + 8i$.

(a) Rita ett komplext talplan och markera talet z i detta. (1p)

Beräkna

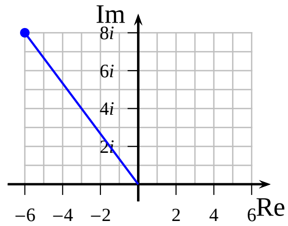
(b) $\bar{z}$ (1p)

(c) $\frac{1}{z}$ (2p)

(d) $|z|$ (1p)

Lösning:

(a)



Rättningsnorm: Bilden ska vara så pass tydlig att en person som inte vet vad z har för värde skulle kunna läsa av det.

(b) $\bar{z} = \overline{-6+8i} = -6-8i$ (komplext konjugat – byt tecken på imaginärdelen).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel

(c) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1\cdot(-6-8i)}{(-6+8i)\cdot(-6-8i)} = \dfrac{-6-8i}{(-6)^2-(8i)^2} = \dfrac{-6-8i}{36+64} = \dfrac{-6-8i}{100} = \dfrac{-3-4i}{50}$ (visar vad man kan ha det komplexa konjugatet till).

Rättningsnorm: Helt korrekt: 2p. Rätt idé men med teckenfel: 1p.

(d) $|z| = |-6+8i| = \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ (talets avstånd från origo, se 1(a) – kan kontrollmätas med linjal i figuren).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

6. (a) Rita kurvan $y = \cos^2 x$ i ett graderat koordinatsystem. (2p)

Lösning:

Om man inte kommer på något bättre sätt att rita kan man ställa upp en värdetabell. Den förenklas av att man har en kolumn för mellanresultatet $\cos x$, som hur som helst är relevant i ekvationen. Eftersom cosinus är periodisk bör det räcka att undersöka intervallet $-\pi \le x \le \pi$ (skulle gå lika bra med $0 \le x \le 2\pi$; det viktiga är att man tar en hel period), och de x-värden man undersöker få bli de som man klarar av:

x	$\cos x$	$\cos^2 x$
$-\pi$	-1	1
$-5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$3/4$
$-3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/2$
$-2\pi/3$	$-1/2$	$1/4$
$-\pi/2$	0	0
$-\pi/3$	$1/2$	$1/4$
$-\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
$-\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$3/4$
0	1	1
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$3/4$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$
$\pi/3$	$1/2$	$1/4$
$\pi/2$	0	0
$2\pi/3$	$-1/2$	$1/4$
$3\pi/4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/2$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$3/4$
π	-1	1

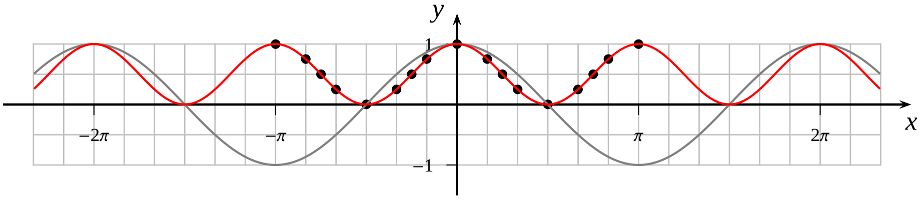
Dessa värden är ju ganska lätta att pricka in, och så drar man en snygg kurva genom punkterna. Sedan är det bara att kopiera bilden ett antal gånger.

Alternativt utnyttjar man formel för dubbla vinkeln (som kan härledas ur additionsformeln för cosinus):

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$y = \cos 2x$ ser ut som $y = \cos x$, men med hälften så lång period. $y = \cos 2x + 1$ blir föregående kurva uppflyttad en enhet (vilket gör att minpunkterna hamnar på x-axeln). $y = (\cos 2x + 1)/2$ blir föregående kurva ihoptryckt med en faktor 2 på höjden.

Hur man än gör så ser kurvan ut som



Kurvan $y = \cos x$ är inritad som referens i grått.

Rättningsnorm: Kurva som har max och min på rätt ställen och ser ut som någon form av våg ger 2p. Fungerande metod men något fel i utförandet: 1p

(b) Lös ekvationen $\cos x = \cos^2 x$ fullständigt. (3p)

Lösning:

Grafiskt: Lösningarna till ekvationen kan läsas ut direkt i bilden: de är x-koordinaterna för de punkter där kurvorna överlappar. Det verkar finnas två kategorier av skärningspunkter: De tangerar vid varje topp på cosinuskurvan, vilket blir vid varje jämnt antal π. Vidare skär de vid varje nollställe för cosinuskurvan, vilket blir vid varje udda antal halva π. Detta kan dubbelkollas mot värdetabellen.

Beräkning: Väljer man att lösa ekvationen beräkningsvägen är det bästa att utnyttja nollfaktorlagen:

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2 x \\ \cos x - \cos^2 x &= 0 \\ \cos x(1 - \cos x) &= 0 \\ \cos x = 0 \quad &\vee \quad 1 - \cos x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad & \qquad \cos x = 1 \\ & \qquad\quad x = n2\pi \end{aligned}$$

(Den vänstra ekvationens lösning kunde lika gärna skrivas $x = \pm\pi/2 + n2\pi$; det motsvarar precis samma punkter. Den högra ekvationen är ett av undantagen från regeln att sinus- och cosinusekvationer brukar ha två olika grundlösningar.)

Rättningsnorm: Grafisk lösning: full poäng om man kan se att svaren är kontrollerade mot tabell eller genom insättning i formel. Beräkningslösning: 1p för att ha separerat upp i två ekvationer, 1p vardera för lösandet av ekvationerna.

Använd radianer i båda uppgifterna.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2015.08.19 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

1. (a) Räkna om 18° till radianer. Svaret ska vara maximalt förenklat. (1p)

Lösning:

180° motsvarar π radianer:

$$18^\circ = \frac{18^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{10}$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Räkna om $\log_9(16)$ till 3-logaritmer. Svaret ska vara maximalt förenklat. (2p)

Lösning:

Använd basbytesmetoden för logaritmer:

$$\log_9 16 = \frac{\log_3 16}{\log_3 9} = \frac{\log_3 16}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 16}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\log_3 16 = \log_3 16^{1/2} = \log_3 \sqrt{16} = \log_3 4 = \log_3 2^2 = 2\log_3 2$$

Det är lite en smaksak vilken version man tycker är snyggast förenklad.

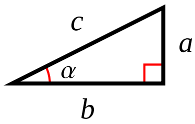
Om man glömt denna metod kan man lösa problemet genom att kalla svaret x och skriva om:

$$x = \log_9 16 \quad\Leftrightarrow\quad 9^x = 16 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{9^x} = \sqrt{16}$$
$$\Leftrightarrow\quad 3^x = 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_3 4$$

Vill man göra ett överslag på siffervärdet så kan man se att 4 är något större än $3^1 = 3$ och ganska mycket mindre än $3^2 = 9$, så värdet ligger mellan 1 och 2, troligen närmare 1. Räknare säger att det är ungefär 1,26.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat att man kan basbytesformel eller visat att man kan tillämpa definitionen av logaritm, men ej fått ihop det helt: 1p.

2. I den avbildade triangeln är kateten b 6 cm lång och för vinkeln α gäller att $\tan\alpha = 2/3$.



(a) Rita en måttriktig bild av triangeln. (Använd skrivningsomslaget eller legitimationen som linjal om du inte har någon linjal med dig.) (2p)

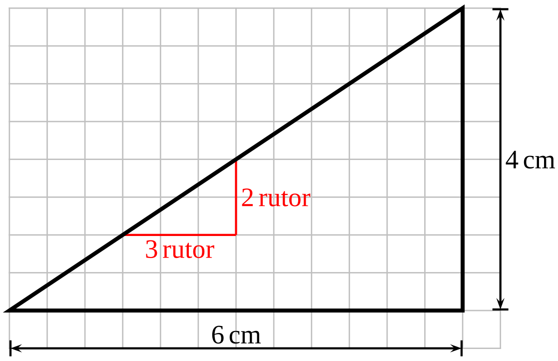
Lösning:

Beräkningslösning: Ur sambanden mellan trigonometriska värden och sidlängder i rätvinkliga trianglar får vi

$$\tan\alpha = \frac{\text{motstående}}{\text{närliggande}} \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3} = \frac{a}{6} \quad\Rightarrow\quad a = 6\cdot\frac{2}{3} = 4\,\text{cm}$$

Med dessa mått kan man på det rutade pappret rita triangeln.

Rent grafisk lösning: Tangensvärdet motsvarar k-värdet för den linje som ger hypotenusan, och ett k-värde på $2/3$ innebär att på 3 steg framåt går man 2 steg uppåt. Det är lätt att lägga ut på det rutade pappret med linjalens hjälp:



Rättningsnorm: Helt korrekt bild: 2p. Lösning som innehåller korrekta tankegångar: 1p.

(b) Hur lång är hypotenusan c? Svara exakt! (1p)

Lösning:

Hypotenusan kan nu tas fram med Pythagoras sats:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad\Rightarrow\quad c = \pm\sqrt{6^2 + 4^2} = \pm\sqrt{36 + 16} = \pm\sqrt{52}\,\text{cm}$$

Den negativa lösningen kan slängas, eftersom det handlar om en sträcka. 52 är lite mer än $49 = 7^2$, så hypotenusan bör vara lite mer än 7 cm lång, vilket kan kontrollmätas i figuren.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel; ska stämma överens med svaret från (a).

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

3. Skriv som *en* logaritm (på maximalt förenklad form)

$$2\lg(x+5) + \lg(x) - \lg(x^2 + 5x)$$ (3p)

Lösning:

Använd logaritmlagarna:

$$2\lg(x+5) + \lg(x) - \lg(x^2+5x) = \lg(x+5)^2 + \lg(x) - \lg(x^2+5x)$$

$$= \lg \frac{(x+5)^2 x}{x^2+5x} = \lg \frac{(x+5)^2 x}{(x+5)x} = \lg(x+5)$$

Alternativt

$$\begin{aligned} &2\lg(x+5) + \lg(x) - \lg(x^2+5x) = 2\lg(x+5) + \lg(x) - \lg(x(x+5)) \\ &= 2\lg(x+5) + \lg(x) - (\lg(x) + \lg(x+5)) \\ &= \cancel{\lg(x+5)} + \lg(x+5) + \cancel{\lg(x)} - \cancel{\lg(x)} - \cancel{\lg(x+5)} = \lg(x+5) \end{aligned}$$

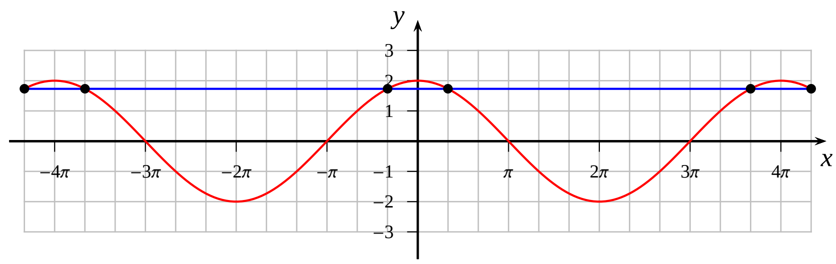
Rättningsnorm: Starta med 3p och minska 1p för varje felaktigt genomför åtgärd och varje nödvändig åtgärd som inte genomförts. Sluta när poängen är nere på noll. Om felen varit mindre avancerade än de korrekt genomförda åtgärderna kan dock någon poäng ges.

4. **(a)** Lös ekvationen $2\cos\frac{1}{2}x = \sqrt{3}$ fullständigt. Svaret ska ges i radianer. (3p)

(b) Rita kurvan $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ i ett graderat koordinatsystem, och markera lösningarna till ekvationen på kurvan. Välj skala så att åtminstone två perioder av kurvan kommer med. (Tips: vrid pappret, så får du mera plats. $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.) (2p)

Lösning:

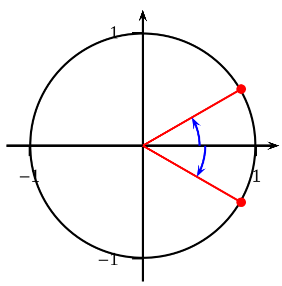
Vi tar båda uppgifterna på en gång. En vanlig cosinuskurva har amplituden 1 och perioden 2π, och en maxpunkt vid $x = 0$. 2:an ökar amplituden till 2, och $\frac{1}{2}$:an fördubblar perioden till 4π.



Ekvationens lösningar är x-koordinaterna för de punkter där kurvan $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ skär linjen $y = \sqrt{3}$. (Det går alltså utmärkt att markera lösningarna utan att ha löst ekvationen.)

Ekvationen kan lösas enligt

$$\begin{aligned} 2\cos\frac{x}{2} &= \sqrt{3} \\ \cos\frac{x}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x}{2} &= \pm\frac{\pi}{6} + n2\pi \\ x &= \pm\frac{\pi}{3} + n4\pi \end{aligned}$$



Om man tycker illa om negativa tal kan lösningsmängden lika gärna skrivas som $x = \pi/3 + n2\pi$, $x = 11\pi/3 + n2\pi$; det ger samma punktmängd med en annan formel.

Detta stämmer mycket bra med bilden: det finns en lösning till höger och en till vänster om den centrala toppen, och sedan kommer det nya lösningar vid varje ny vågtopp, och dessa ligger på avståndet 4π från varandra.

Rättningsnorm: Ekvationen: 3p för helt korrekt, delpoäng efter hur pass stor andel av en korrekt lösning man fått ihop. Bilden: 1p för cosinuskurvan, 1p för resten. Om markerade lösningar inte alls stämmer överens med beräknade lösningas ska detta kommenteras.

5. Lös nedanstående ekvation:

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| = x$$

För full poäng måste en fullständig beräkning av lösningen finnas med. (5p)

(Vi har inte tagit upp någon uppgift som ser exakt ut så här i undervisningen, men den går att lösa med hjälp av de saker som vi *har* tagit upp.)

Lösning:

Absolutbeloppsproblem brukar nästan alltid få hanteras med falluppdelning, och den gör man genom att stoppa in det aktuella uttrycket i absolutbeloppets definition:

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{om } \dfrac{x}{x-2} \geq 0 \\ -\dfrac{x}{x-2} & \text{om } \dfrac{x}{x-2} < 0 \end{cases}$$

För att få fallen i klartext måste vi teckenanalysera bråket i villkoret (och hur man gör det lärde vi oss i första delen av kursen). Täljaren x byter tecken i $x = 0$ och nämnaren $x - 2$ i $x = 2$. En teckentabell ger

		0		2	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x}{x-2}$	$+$	0	$-$	odef	$+$

Beloppsuttrycket kan alltså skrivas som

$$\left|\frac{x}{x-2}\right| = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{om } x \leq 0 \text{ eller } x > 2 \\ -\dfrac{x}{x-2} & \text{om } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Vi kan nu separaträkna på dessa två fall, och kasta bort eventuella svar som inte uppfyller förutsättningarna:

Fall 1: $x \leq 0$ *eller* $x > 2$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} &= x \\ x &= x(x-2) \\ x &= x^2 - 2x \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x &= 0 \lor x = 3 \end{aligned}$$

Bägge svaren är acceptabla enligt förutsättningen.

Fall 2: $0 < x < 2$

$$\begin{aligned} -\frac{x}{x-2} &= x \\ -x &= x(x-2) \\ -x &= x^2 - 2x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x &= 0 \lor x = 1 \end{aligned}$$

$x = 0$ uppfyller inte förutsättningarna, men det spelar ingen större roll eftersom det svaret passade i den andra varianten. $x = 1$ ligger mellan 0 och 2 och funkar utmärkt.

Kontroll: Det är alltid lämpligt att kontrollera de svar man fått fram, och det gör man genom att sätta in dem i ursprungsekvationen och se om det stämmer.

$$x = 0: \quad \begin{array}{l} \mathrm{VL} = \left|\dfrac{0}{0-2}\right| = |0| = 0 \\ \mathrm{HL} = 0 \end{array}$$

$$x = 1: \quad \begin{array}{l} \mathrm{VL} = \left|\dfrac{1}{1-2}\right| = |-1| = 1 \\ \mathrm{HL} = 1 \end{array}$$

$$x = 3: \quad \begin{array}{l} \mathrm{VL} = \left|\dfrac{3}{3-2}\right| = |3| = 3 \\ \mathrm{HL} = 3 \end{array}$$

Svar: $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$

Rättningsnorm: Helt korrekt lösning: 5p. I övrigt poäng efter hur stor andel av en korrekt lösning man åstadkommit.

6. Polynomet $x^4 + 3x^2 - 6x + 10$ har nollstället $-1 + 2i$. Bestäm alla nollställena till polynomet. (5p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift nr 8 ur kapitel 3 i *Kompletterande kompendium*.

Eftersom det angivna nollstället är icke-reellt är tydligen den typen av svar acceptabla. Räknar man komplext har en 4:e-gradare alltid 4 nollställen. Polynomet har reella koefficienter. Om ett polynom har reella koefficienter är konjugatet till ett nollställe också ett nollställe. Så $\overline{-1 + 2i} = -1 - 2i$ är ytterligare ett nollställe.

Om α är ett nollställe så är $x - \alpha$ en faktor. Så både $x - (-1 + 2i)$ och $x - (-1 - 2i)$ är faktorer. Vi skulle kunna dividera polynomet med dessa två faktorer en i taget, men det går betydligt fortare att dela med båda på en gång:

$$(x-(-1+2i))(x-(-1-2i)) = x^2-((-1+2i)+(-1-2i))x+(-1+2i)(-1-2i) = x^2+2x+5$$

Division:

$$\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -2x & +2 & \\ \hline
x^2+2x+5) & x^4 & +3x^2 & -6x+10 & \\
 & -x^4-2x^3-5x^2 & & & \\ \hline
 & -2x^3-2x^2 & -6x & & \\
 & 2x^3+4x^2+10x & & & \\ \hline
 & 2x^2 & +4x+10 & & \\
 & -2x^2 & -4x-10 & & \\ \hline
 & & 0 & &
\end{array}$$

Så nu vet vi att

$$x^4 + 3x^2 - 6x + 10 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 2)$$

Återstår bara att hitta nollställena till den andra faktorn, vilket kan göras med kvadratkomplettering:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 - (-1) = (x-1)^2 - i^2 = (x - 1 + i)(x - 1 - i)$$

Ur faktoriseringen ser vi att $1 - i$ och $1 + i$ är nollställen.

Återvändsgränd: Om ett polynom med högstagradskoefficient 1 och heltalskoefficienter i övrigt har ett heltalsnollställe så är detta nollställe en delare i konstanta termen. Detta innebär att det kan vara värt ett försök att se om någon av delarna i 10 (vilket är talen ± 1, ± 2, ± 5 och ± 10) är ett nollställe. Tyvärr är ingen av dem det. (Satsen säger att *om* det finns ett heltalsnollställe så måste det vara ett av dessa tal, inte *att* det nödvändigtvis finns något sådant nollställe.)

Rättningsnorm: På ett ungefär: 1p för varje sak man visar att kan behärskar (som konjugatet till nollställe, faktorsatsen, polynomdivision, kvadratkomplettering. . .).

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2015.11.04 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. (a) Din kompis löser en ekvation så här:

$$\frac{\sin x}{\sin(\pi/6)} = 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\cancel{\sin}\, x}{\cancel{\sin}\,(\pi/6)} = 2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\pi/6} = 2 \quad\Rightarrow\quad x = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Förklara varför detta är fel. (1p)

Lösning:

Man får i bråk förkorta bort faktorer (något som man multiplicerat med) som är gemensamma för täljare och nämnare. Detta är den omvända operationen till att förlänga bråket (som motsvarar att om man delar upp de bitar som man redan har så får man fler bitar men de är samtidigt en mindre andel av helheten). ”Sinus” är inte ett tal som man har multiplicerat med utan en operation som ska utföras, och det finns ingenting som säger att den kommer ändra täljare och nämnare på ett proportionellt sätt.

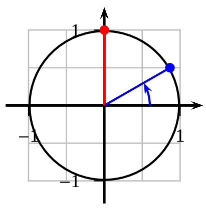
Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”det här är inte multiplikation” ger poäng.

(b) Lös ekvationen $\dfrac{\sin x}{\sin(\pi/6)} = 2$ på ett korrekt sätt. (2p)

Lösning:

Sinusvärdet för $\pi/6$ känner vi, och ekvationen kan skrivas om enligt

$$\frac{\sin x}{\sin(\pi/6)} = 2$$
$$\sin x = 2\sin(\pi/6) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n2\pi \qquad n\in\mathbb{Z}$$



Det här är en av de få sinus- och cosinusekvationer som bara har en enda grundlösning. I enhetscirkeln är vinkeln $\pi/6$ markerad, och vi kan notera att den vinkel som har dubbelt så stort sinusvärde är tre gånger så stor.

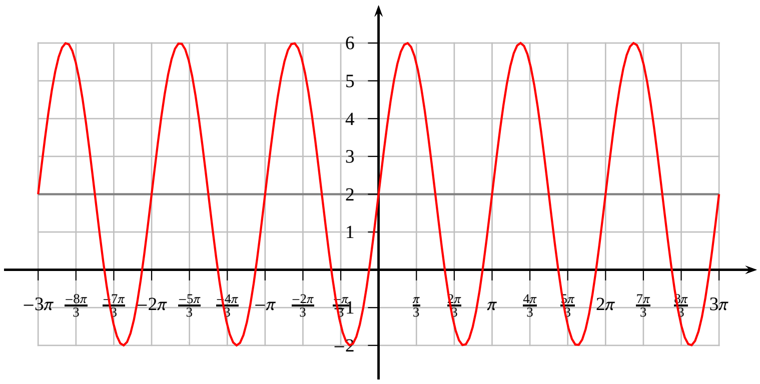
Rättningsnorm: Kommit till korrekt ekvation: 1p. Korrekt löst den ekvation man har kommit till: 1p.

2. Funktionen f definieras enligt $f(x) = 2 + 4\sin(2x)$.

(a) Rita kurvan $y = f(x)$. Gör ett tillräckligt stort koordinatsystem så att man kan se detaljerna. (2p)

Lösning:

”Sinus” ger att kurvan har en topp till höger om y-axeln och en dal till vänster. 2:an vid x:et gör att kurvan dras ihop med en faktor 2 horisontellt, så att perioden blir hälften av den vanliga (som är 2π). 4:an gör att kurvan dras ut med en faktor 4 vertikalt, så att amplituden blir 4 gånger den vanliga (som är 1). 2:an utanför flyttar upp kurvan 2 steg vertikalt. Sammantagna effekten blir



Rättningsnorm: Rätt kurvform, period, amplitud och placering i höjdled: 2p. Tre grejer rätt: 1p.

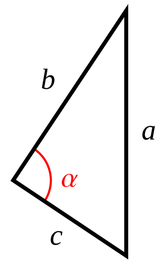
(b) Vad har funktionen f för värdemängd? Motivera! (1p)

Lösning:

Värdemängden motsvarar y-värdena på kurvan, och dessa är allt mellan -2 och 6, så vi har intervallet $[-2, 6]$.

Rättningsnorm: Om svaret stämmer med kurvan som man ritade på (a) får man poäng.

3. **(a)** I den avbildade triangeln är sidan a 6 cm, sidan b 4 cm och sidan c 3 cm. Bestäm cosinusvärdet för vinkeln α. (Du ska alltså inte ta fram själva vinkeln; den är inte en standardvinkel.)



OBS! Den avbildade triangeln är inte skalenlig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra! (2p)

Lösning:

Cosinussatsen säger

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

vilket med insatta siffror ger

$$6^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha = \frac{16 + 9 - 36}{24} = -\frac{11}{24}$$

Rättningsnorm: Visat att man kan cosinussatsen: 1p. Tagit fram värdet korrekt: 1p.

(b) Är vinkeln α spetsig (dvs. mindre än 90°), trubbig (dvs. större än 90°) eller rät? Motivera. (1p)

Lösning:

Trubbig, eftersom cosinusvärdet är negativt (vilket det är för vinklar mellan 90° och 180°).

Alternativt: Om vinkeln varit rät hade $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Som nu är är $a^2 = 36$, vilket innebär att sidan a är längre än den hade varit i en rätvinklig triangel, och det kan man se som att den bänt ut vinkeln så att den är mer än 90°.

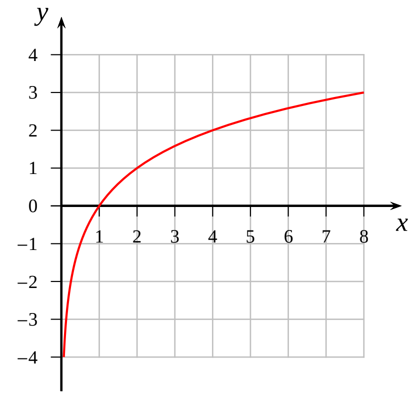
Alternativt: rita triangeln skalenligt med hjälp av passare och linjal, och mät vinkeln med gradskiva. Den är ungefär 117°, alltså trubbig.

Rättningsnorm: Motivering krävs för poäng. Räknade man fel så att man fick ett negativt svar på (a) ska man svara ”spetsig”.

4. (a) Skissa kurvan $y = \log_2 x$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

Definitionsmängden är alla $x > 0$. Ett lagom stort koordinatsystem kan ha en x-axel från 0 till 8, och y-axel från -4 till 4. (Värdemängden är ju hela $\mathbf{R}$, så det behövs både positiva och negativa y.)



Rättningsnorm: Lämpligt böjd kurva som verkar börja i nederändan av y-axeln och passerar $(1, 0)$ och $(2, 1)$ ger poäng.

(b) Lös ekvationen $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$. (4p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 3.23(c) ur *Mot bättre vetande*.

Vi kan börja med att utnyttja logaritmlagarna:

$$\begin{aligned}
\log_2(x+1) + \log_2(x-1) &= 3 \\
\log_2((x+1)(x-1)) &= 3 \quad \text{Kolla svaren!} \\
(x+1)(x-1) &= 2^3 \\
x^2 - 1 &= 8 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren:

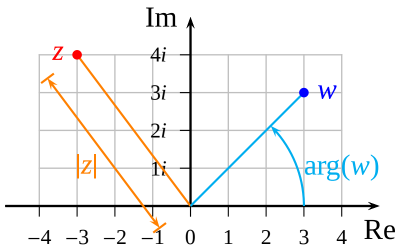
$$\begin{aligned}
x = 3: \quad \mathrm{VL} &= \log_2(3+1) + \log_2(3-1) = \log_2 4 + \log_2 2 \\
&= \log_2 2^2 + \log_2 2^1 = 2 + 1 = 3 \\
x = -3: \quad \mathrm{VL} &= \log_2(-3+1) + \log_2(-3-1) = \log_2(-2) + \log_2(-4) \\
&= \text{Odefinierat}
\end{aligned}$$

Kontrollen var nödvändig, eftersom den använda logaritmlagen bara gäller för positiva tal, och en produkt kan vara positiv utan att någon av de ingående faktorerna är det. (Och man kan inte bara kasta bort alternativet $x = -3$ med argumentet ”man kan inte ta logaritmen av negativa tal”, eftersom x-värdet ska ingå i en beräkning innan logaritmeringen, och beräkningar på negativa tal mycket väl kan ge positiva resultat.)

Svar: $x = 3$ är ekvationens enda lösning.

Rättningsnorm: Använda logatimlagar: 1p. Avlägsna logaritmen: 1p. Lösa andragradaren fullständigt: 1p. Kontrollera svaren: 1p.

5. I nedanstående komplexa talplan finns talen z och w markerade:



Beräkna eller läs ut ur bilden:

(a) $z \cdot w$ (1p)

Lösning:

$z \cdot w = (-3+4i)\cdot(3+3i) = -9-9i+12i+12i^2 = -9-9i+12i-12 = -21+3i$

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(b) z/w (2p)

Lösning:

$$\frac{z}{w} = \frac{-3+4i}{3+3i} = \frac{(-3+4i)(3-3i)}{(3+3i)(3-3i)} = \frac{-9+9i+12i-12i^2}{9-9i^2} = \frac{-9+9i+12i+12}{9+9} = \frac{3+21i}{18} = \frac{3(1+7i)}{3\cdot 6} = \frac{1+7i}{6}$$

Rättningsnorm: Förlängt med konjugatet: 1p. Räknat rätt: 1p.

(c) $|z|$ (1p)

Lösning:

$|z| = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^3+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. (Motsvarar avståndet mellan z och origo.)

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(d) $\arg(w)$ (1p)

Lösning:

$\arg(w) = \pi/4$. Argumentet är vinkeln mellan linjen mellan origo och w och positiva realaxeln, och den är helt klart $45°$ (eftersom linjen går på diagonalen över rutnätet).

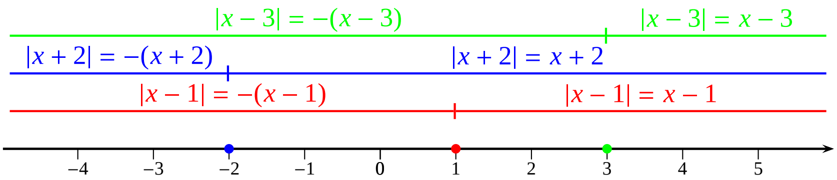
Rättningsnorm: Korrekt svar med någon form av motivering krävs för poäng. Även $45°$ accepteras.

Om du läser ut svaret ur bilden så skriv en förklaring till hur du såg det.

6. Lös ekvationen $|x-1| - |x+2| + |x-3| = 3$. (5p)

Lösning:

Beräkningslösning: Uttrycket innanför det första beloppstecknet byter tecken vid $x = 1$, andra vid $x = -2$ och tredje vid $x = 3$. Dessa tre brytpunkter delar upp tallinjen i fyra delar, så vi får fyra fall att räkna på:



Räkning:

$$x < -2: \quad \begin{aligned} -(x-1) - (-(x+2)) + (-(x-3)) &= 3 \\ -x + 1 + x + 2 - x + 3 &= 3 \\ -x + 6 &= 3 \\ x &= 3 \\ 3 &> -2 \text{ ej OK!} \end{aligned}$$

$$-2 \leq x < 1: \quad \begin{aligned} -(x-1) - (x+2) + (-(x-3)) &= 3 \\ -x + 1 - x - 2 - x + 3 &= 3 \\ -3x + 2 &= 3 \\ x &= -1/3 \\ -2 \leq -1/3 &< 1 \text{ OK!} \end{aligned}$$

$$1 \leq x < 3: \quad \begin{aligned} (x-1) - (x+2) + (-(x-3)) &= 3 \\ x - 1 - x - 2 - x + 3 &= 3 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \\ -3 &< 1 \text{ ej OK!} \end{aligned}$$

$$x \geq 3: \quad \begin{aligned} (x-1) - (x+2) + (x-3) &= 3 \\ x - 1 - x - 2 + x - 3 &= 3 \\ x - 6 &= 3 \\ x &= 9 \\ 9 &\geq 3 \text{ OK!} \end{aligned}$$

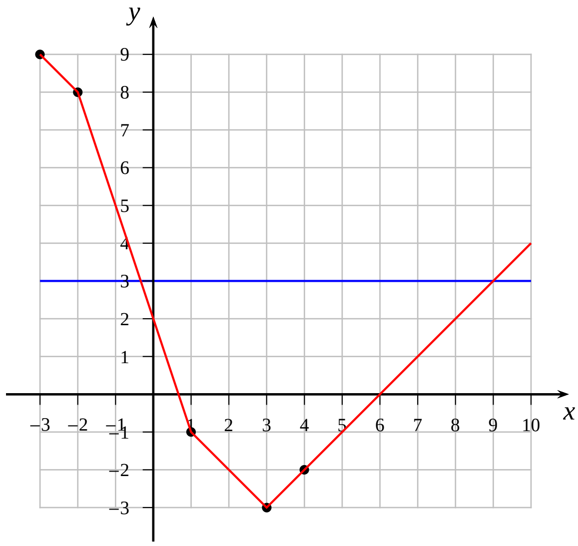
Vi kontrollerar för säkerhets skull de erhållna lösningarna och de värden vi förkastat i originalekvationen:

$$\begin{aligned} x = 3: &\quad |3-1| - |3+2| + |3-3| = |2| - |5| + |0| = 2 - 5 + 0 = -3 \neq 3 \\ x = -1/3: &\quad |-1/3 - 1| - |-1/3 + 2| + |-1/3 - 3| = |-4/3| - |5/3| + |-10/3| = 4/3 - 5/3 + 10/3 = 9/3 = 3 \\ x = -3: &\quad |-3-1| - |-3+2| + |-3-3| = |-4| - |-1| + |-6| = 4 - 1 + 6 = 9 \neq 3 \\ x = 9: &\quad |9-1| - |9+2| + |9-3| = |8| - |11| + |6| = 8 - 11 + 6 = 3 \end{aligned}$$

Lösningsförslagen som klassats som OK var OK, och de som var ej OK funkade inte.

Grafisk lösning: Vi sätter $f(x) = |x-1| - |x-2| + |x-3|$ och ritar kurvan $y = f(x)$ och ser var y-värdena är 3. Vi kan göra en värdetabell, men det blir enklare om vi noterar att oavsett tecken så blir uttrycket en summa av tre förstagradsuttryck, vilket gör att grafen blir sammansatt av ett antal linjestycken. En linje kan ritas ut två punkter. Om vi tar fram två punkter på varje del är vi klara, och vi sparar jobb på att ta skarvpunkterna mellan delarna, eftersom dessa kan anses ingå i två delar var.

x	y
-3	9
-2	8
1	-1
3	-3
4	-2



Genom att markera punkterna och dra linjer får vi kurvan. Det går också att skriva funktionen som en styckvis definierad funktion, uppdelad enligt samma principer som i beräkningslösningen:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(-(x+2))+(-(x-3)) & x < -2 \\ -(x-1)-(x+2)+(-(x-3)) & -2 \leq x < 1 \\ (x-1)-(x+2)+(-(x-3)) & 1 \leq x < 3 \\ (x-1)-(x+2)+(x-3) & x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x+6 & x < -2 \\ -3x+2 & -2 \leq x < 1 \\ -x & 1 \leq x < 3 \\ x-6 & x \geq 3 \end{cases}$$

Sedan ritar man de olika linjestyckena och läser av lösningarna. (Man kan notera att beräkningslösningens två falska rötter motsvarar skärningar mellan tänkta förlängningar av första och tredje linjestycket och den horisontella linjen.)

Rättningsnorm: Lösning som tar fram de två svaren och klart visar att det inte finns fler: 5p. Annars poäng efter hur stor del av en korrekt lösning man har tagit fram. Minst 1p om man klart visar att behärskar innebörden i absolutbeloppet.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

16.01.12 14.30–16.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

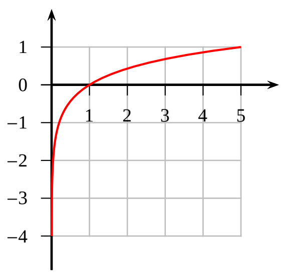
Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. (a) Skissa kurvan $y = \log_5(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

Man kan börja med att ställa upp en värdetabell för $5^y = x$ (enklare att beräkna), och rita utgående från den:

y	5^y
-4	0,0016
-3	0,008
-2	0,04
-1	0,2
0	1
1	5



Rättningsnorm: Kurvan ska passera $(1,0)$ och $(5,1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

(b) Förenkla uttrycket $\log_5(75) - \log_5(0{,}12)$ maximalt. (2p)

Lösning:

Slå ihop:

$$\log_5(75) - \log_5(0{,}12) = \log_5\left(\frac{75}{0{,}12}\right) = \log_5\left(\frac{75\cdot 100}{12}\right)$$
$$= \log_5\left(\frac{\cancel{3}\cdot 25\cdot \cancel{4}\cdot 25}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\right) = \log_5(5^2\cdot 5^2) = \log_5(5^4) = 4$$

Ta isär:

$$\log_5(75) - \log_5(0{,}12) = \log_5(3 \cdot 25) - \log_5(3 \cdot 0{,}04)$$
$$= (\log_5(3) + \log_5(25)) - (\log_5(3) + \log_5(0{,}04))$$
$$= \cancel{\log_5(3)} + \log_5(5^2) - \cancel{\log_5(3)} - \log_5(5^{-2}) = 2 - (-2) = 4$$

Det finns säkert flera sätt; alla ska sluta med resultatet 4.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Klart visat att man kan något relevant (logaritmregler eller tillämpning av logaritmdefinitionen): 1p.

2. (a) Förklara vad som menas med det *komplexa konjugatet* till ett komplext tal z. (1p)

Lösning:

Talet med omkastat tecken på imaginärdelen; talets spegling i realaxeln; om $z = x+yi$ (där x och y är reella) så är z:s konjugat $x - yi$.

Konjugat brukar för övrigt betecknas $\bar{z}$.

Rättningsnorm: Exempel godtas.

(b) Skissa det område i det komplexa talplanet som ges av $|z + i| > 1$. (2p)

Lösning:

Detta var Rekommenderad uppgift 2.17 i *Kompletterande kompendium*.

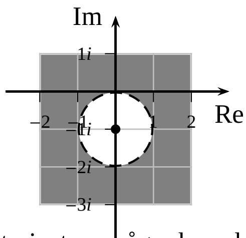
Rent grafisk tolkning: $|z - a|$ kan tolkas som avståndet mellan z och a. $|z - (-i)| > 1$ betyder att avståndet mellan z och $-i$ ska vara större än 1, vilket innebär att vi ska vara utanför en cirkel med radien 1 och medelpunkt i $-i$.

Beräkningslösning: Vi kan utgå från att $z = x + yi$ (där x och y är realdel respektive imaginärdel för z.) Definition av belopp av komplexa tal ger då

$$|z + i| = |(x + yi) + i| = |x + (y + 1)i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} > 1$$

Om ett rotuttryck är större än 1 måste det som står under rottecknet också vara det, så vi har $x^2 + (y + 1)^2 > 1$. Om det varit likhetstecken hade detta varit uttrycket för en cirkel med medelpunkt i $x = 0$, $y = -1$ och med radien 1. Större-än ger att vi ska vara utanför denna cirkel.

Bild:



Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Åtminstone några korrekta idéer: 1p.

3. (a) Din kompis håller på och löser en cosinusekvation, och skriver

$$”-\frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}”$$

Förklara för kompisen varför man inte får skriva så. (1p)

Lösning:

För att talen inte är lika. På decimalform har vi

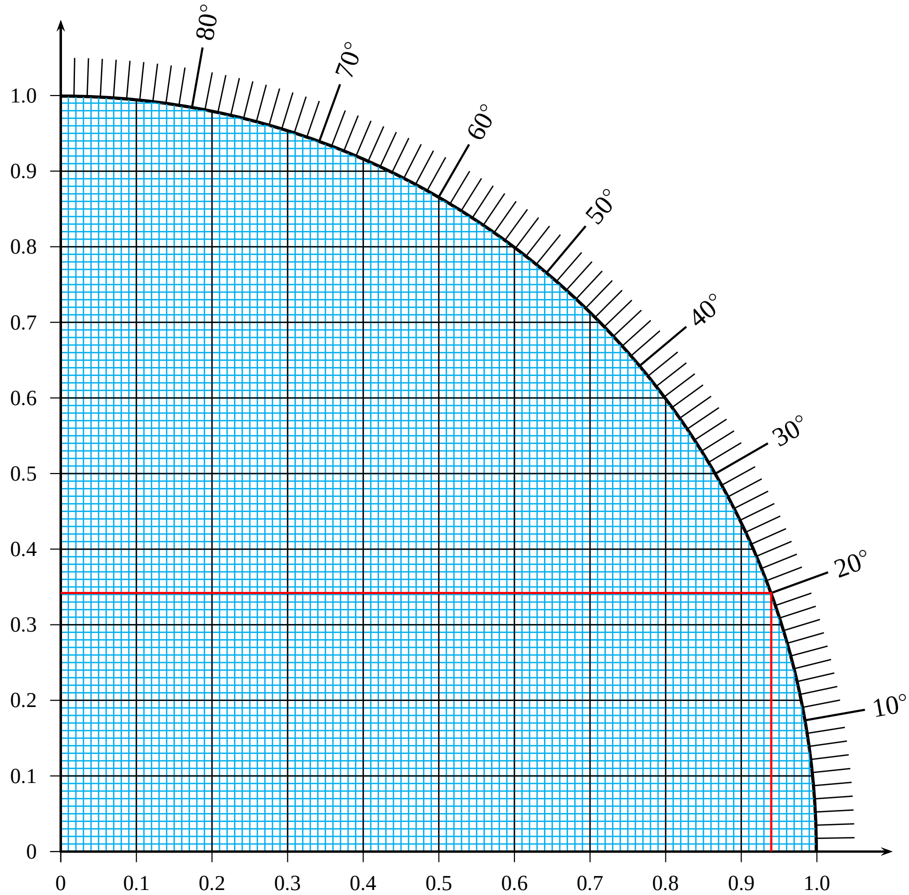
$$-\frac{1}{2} = -0{,}5 \qquad \text{och} \qquad \frac{2\pi}{3} \approx \frac{2 \cdot 3{,}14}{3} = \frac{6{,}28}{3} \approx 2{,}09$$

Dessa två tal är ju inte det minsta lika varandra!

(Det kompisen förmodligen menade var ”$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.)

Rättningsnorm: Poäng för svar som kan tolkas som ”talen är inte lika”.

(b) Här nedan avbildas första kvadranten av enhetscirkeln. Bestäm med hjälp av bilden och med två decimalers noggrannhet värdet på $\cos(20°)$. (1p)



Lösning:

Cosinusvärdet är x-koordinaten för den punkt på cirkeln som ligger 20° från x-axeln. Den avläses till ungefär 0,94. (Dator ger 0,9396926208.)

(c) Bestäm på samma sätt $\sin(20°)$ (1p)

Lösning:

Sinusvärdet är y-koordinaten för samma punkt. Den avläses till ungefär 0,34. (Dator ger 0,3420201433.)

Rättningsnorm: Gäller båda uppgifterna: Svar inom en hundradel från det angivna accepteras. Om man kastar om svaren ges 1p för (b)+(c) tillsammans.

4. (a) Skissa kurvan $y = \tan(x + \frac{\pi}{8})$. (2p)

Lösning:

Just nu orkar jag inte kolla upp i manualen hur det var man gjorde den här typen av grafer, men den ser ut som en normal tangensgraf flyttad $\pi/8$ steg åt vänster.

Rättningsnorm: Helt rätt (vilket inkluderar att det ska vara gradering på axlarna): 2p. Rätt i huvuddragen: 1p.

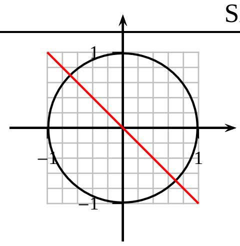
(b) Lös ekvationen $\tan(x + \frac{\pi}{8}) = -1$ (3p)

Lösning:

Substitution kan eventuellt underlätta:

$$\tan(x + \frac{\pi}{8}) = -1 \quad \text{Sätt } x + \frac{\pi}{8} = t$$
$$\tan t = -1$$
$$t = -\frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$
\begin{aligned}
x + \frac{\pi}{8} &= -\frac{\pi}{4} + n\pi \\
x &= -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + n\pi \\
&= -\frac{3\pi}{8} + n\pi
\end{aligned}
$$

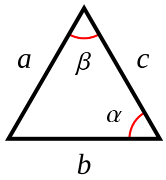


Det går lika bra att utgå från $\frac{3\pi}{4}$, vilket ger svaret på formatet $x = \frac{5\pi}{8} + n\pi$ (vilket är ett annat sätt att beskriva exakt samma mängd av lösningar).

Rättningsnorm: Rätt grundlösning ($-\pi/4$): 1p. Rätt period: 1p. Korrekt hantering av $\pi/8$: 1p.

5. I den avbildade triangeln har sidan a längden 2 cm, sidan b har längden $\sqrt{2}$ cm och vinkeln α är 45°.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



(a) Bestäm vinkeln β. (2p)

Lösning:

Två vinklar och de två motstående sidorna inblandade: fall för sinussatsen:

$$
\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}
$$

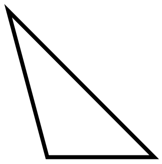
$$
\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}
$$

$$
\beta = 30^\circ + n\cdot 360^\circ \quad \vee \quad \beta = 150^\circ + n\cdot 360^\circ
$$

Negativa lösningar kan förkastas; lösningar på mer än 180° kan förkastas, och även 150° kan förkastas för den ger en vinkelsumma på mer än 180°. Kvar finns ett svar:

Svar: $\beta = 30^\circ$

En måttriktig uppritning av triangeln ser ut så här, och kan utan större besvär tas fram med hjälp av rutat papper och linjal (om man vill dubbelkolla beräkningen):



Rättningsnorm: Ställt upp ett korrekt samband: 1p. Ur sambandet fått fram svar: 1p. Inga avdrag för att man inte diskuterar alternativlösningar.

(b) Bestäm sidan c. (Svaret blir inte så snyggt, men det går att räkna ut.) (3p)

Lösning:

Cosinussatsen: Vi kan köra cosinussatsen baserad på vinkeln α, vilket ger

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
2^2 &= \sqrt{2}^2 + c^2 - 2\sqrt{2}c\cos(45^\circ) \\
4 &= 2 + c^2 - 2\sqrt{2}c\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c^2 - 2c - 2 &= 0 \\
c^2 - 2\cdot 1c + 1^2 - 1^2 - 2 &= 0 \\
(c-1)^2 &= 3 \\
c &= 1 \pm \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Minusalternativet kan förkastas då det blir negativt, så $c = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}7$ cm.
Eller så kan vi köra den baserad på vinkeln β:

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\
\sqrt{2}^2 &= 2^2 + c^2 - 2 \cdot 2c\cos(30^\circ) \\
2 &= 4 + c^2 - 2 \cdot 2c \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \\
c^2 - 2\sqrt{3}c + 2 &= 0 \\
c^2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 - \sqrt{3}^2 + 2 &= 0 \\
(c - \sqrt{3})^2 &= 1 \\
c &= \sqrt{3} \pm 1
\end{aligned}$$

Här är båda lösningsalternativen positiva. Det kortare av dem, $\sqrt{3} - 1 \approx 0{,}7$ cm, stämmer dock inte ihop med 45°-vinkeln som vi också vet att triangeln har.

Sinussatsen: Vinkelsumman i en triangel är 180°, vilket ger att den tredje vinkeln $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$. Ska vi använda sinussatsen behöver vi sinusvärdet för denna vinkel, vilket vi inte kan utantill men kan ta fram med additionssatsen:

$$\begin{aligned}
\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) &= \sin(60^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(60^\circ)\sin(45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

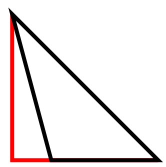
Sinussatsen utgående från vinkel α ger

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\gamma)}{c} \\
c &= \frac{a\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{2\sin(105^\circ)}{\sin(45^\circ)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}/4}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{3} + 1
\end{aligned}$$

Utgår man från vinkel β istället får man

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\beta)}{b} &= \frac{\sin(\gamma)}{c} \\
c &= \frac{b\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{\sqrt{2}\sin(105^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}/4}{1/2} = \sqrt{3} + 1
\end{aligned}$$

Kreativ geometri: Vi kan rita till lite detaljer på triangeln:



Eftersom det var givet att vinkel $\alpha = 45^\circ$ är den rätvinkliga triangel vi ritat en halv kvadrat. Om vi kallar kateterna i den för x så är hypotenusan, den sökta sidan c, $\sqrt{2}x$. (Kan fås ur trigonometriska värden eller Pythagoras sats.) Den smalare rätvinkliga triangeln har sidan a som hypotenusa, en katet som är x och en katet som är $x - b$. Pythagoras ger oss då

$$\begin{aligned}
x^2 + (x - b)^2 &= a^2 \\
x^2 + x^2 - 2bx + b^2 &= a^2 \\
2x^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}^2 &= 2^2 \\
x^2 - \sqrt{2}x - 1 &= 0 \\
x^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 &= 0
\end{aligned}$$

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

Minusalternativet är negativt och kan kastas, och vi har att

$$c = \sqrt{2}x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

Rättningsnorm: Kommit till rätt svar: 3p. Gjort någonting konstruktivt som är mer avancerat än att skriva upp sinussatsen en gång till: 1p. Inga poängavdrag för följdfel från (a).

6. Lös ekvationen $|x(x-4)| = 3x - 6$.

För full poäng fordras att lösningen klart visar att man har hittat *alla* ekvationens lösningar. (Uppgiften går att lösa med hjälp av det vi gått igenom i den här kursen, men den kan kräva viss kreativitet.) (5p)

Lösning:

Beräkningslösning: Vi får utnyttja absolutbeloppets definition:

$$|x(x-4)| = \begin{cases} x(x-4) & \text{om } x(x-4) \geq 0 \\ -(x(x-4)) & \text{om } x(x-4) < 0 \end{cases}$$

Olikheterna är lättare att analysera i klartext, och en teckentabell ger

	$x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$x>4$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

så högerledet kan beskrivas som

$$|x(x-4)| = \begin{cases} x(x-4) & \text{om } x \leq 0 \text{ eller } x \geq 4 \\ -x(x-4) & \text{om } 0 < x < 4 \end{cases}$$

Vi kan nu angripa ekvationen med falluppdelning:

Fall 1: $x \leq 0 \vee x \geq 4$

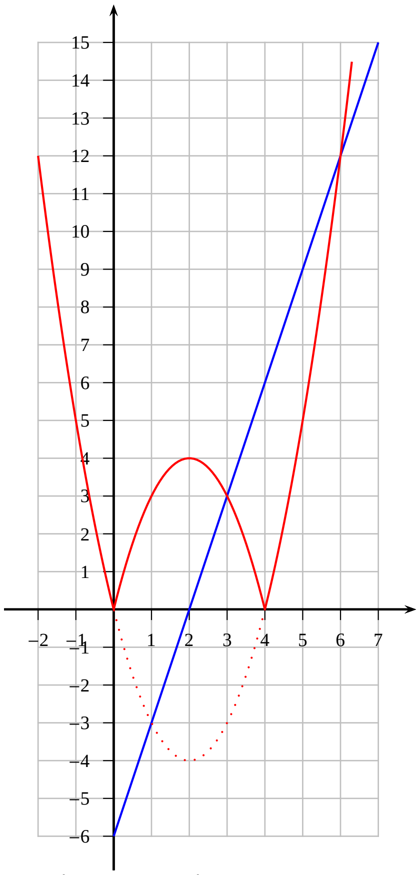
$$x(x-4) = 3x - 6$$
$$x^2 - 4x = 3x - 6$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$(x-1)(x-6) = 0$$
$$x = 1 \text{ ej OK} \quad x = 6 \text{ OK}$$

Fall 2: $0 < x < 4$

$$-x(x-4) = 3x - 6$$
$$-x^2 + 4x = 3x - 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x-3)(x+2) = 0$$
$$x = 3 \text{ OK} \quad x = -2 \text{ ej OK}$$

Grafisk lösning:

$y = |x(x-4|)$ ser ut som $y = x(x-4)$ med delarna under x-axeln uppvikta. Och $y = x(x-4)$ är en parabel med botten neråt och nollställen vid $x = 0$ och $x = 4$. Genom att beräkna ytterligare några lätta punkter kan man skissa kurvan. $y = 3x - 6$ är en rät linje som skär y-axeln vid $y = -6$ och som går 3 steg uppåt för varje steg framåt. Inritat i samma figur har vi:



x	$x(x-4)$
-2	12
-1	5
0	0
1	-3
2	-4
3	-3
4	0
5	5
6	12
7	21

Av bilden att döma så finns det två skärningar mellan kurvorna: $x = 3$ och $x = 6$. Det finns uppenbart inga till vänster om $x = 2$, eftersom linjen försvinner ner i det negativa området medan den andra kurvan genomgående ligger ovanför detta. Vidare ser man att kurvorna separerar bortanför $x = 6$, så det finns inga skärningar utanför det område som vi ritat.

Testning: Man kan prova att sätta in ett antal tal i ekvationen, och hoppas att något av den fungerar. I och med att det två lösningarna är heltal nära noll är det relativt troligt att man hittar dem med denna metod. Men utan att komplettera den med antingen bild eller beräkningar eller resonemang kan man inte garantera att man hittat *alla* lösningar – hur många tal man än testar finns det ju oändligt många kvar som man inte testat!

Rättningsnorm: Lösning som tar fram de två svaren och klart visar att det inte finns fler: 5p. Åtminstone visat att man kan räkna ut värdet på absolutbeloppsuttryck både för positiva och negativa tal: 1p. I övrigt poäng efter hur stor procent av en fullständig lösning man åstadkommit.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2016.03.23 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Lös ekvationen $\tan(2x) = \sqrt{3}$. Svaret ska ges i radianer. (3p)

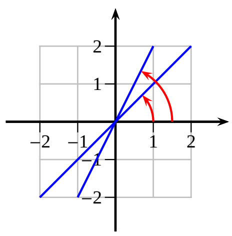
Lösning:

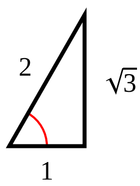
Om man inte memorerat tangensvärdena för standardvinklarna är första åtgärden att försöka komma på vilken standardvinkel det är som har tangensvärdet $\sqrt{3}$.

Kan man sinus och cosinus kan man tabellera:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
0	0	1	$0/1 = 0$
$\pi/6$ $(30°)$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$(1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}$
$\pi/4$ $(45°)$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2)/(\sqrt{2}/2) = 1$
$\pi/3$ $(60°)$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$(\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}$
$\pi/2$ $(90°)$	1	0	$1/0 =$ odefinierat

Kan man tangensvärdets geometriska innebörd så kan man skissa: tangensvärdet för en vinkel motsvarar k-värdet för en linje som går i den angivna vinkeln (mätt relativt positiva x-axeln moturs). $\sqrt{3}$ ligger någonstans mellan 1 och 2 (huvudräkning), så vinkeln ligger någonstans mellan de i koordinatsystemet illustrerade. En kvalificerad gissning baserad på ögonmått är att det rör sig om vinkeln 60°, $\pi/3$ radian.





Kan man sambanden i trianglar så vet man att tangensvärdet för spetsvinkeln i en rätvinklig triangel är motstående katet delat med närliggande katet. Vill man ha tangensvärdet $\sqrt{3}$ kan man ge motstående katet längden $\sqrt{3}$ längdenheter och närliggande längden 1 längdenhet (vilket är lätt att dela med). I så fall är hypotenusans längd

$\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ längdenheter. Tittar man på dessa mått ser man att man har en halv liksidig triangel, och hörnvinkeln i en liksidig triangel är $180°/3 = 60°$.

Och kunde man tangensvärdet utantill var inget av detta nödvändigt!

Tangens är periodisk med periodlängd π (ett halvt varv), och inget värde återkommer under perioden. Detta ger

$$\begin{aligned}
\tan(2x) &= \sqrt{3} \\
2x &= \frac{\pi}{3} + n\pi \quad \text{där } n \in \mathbb{Z} && \text{identifiera vinklar} \\
\frac{2x}{2} &= \frac{\frac{\pi}{3} + n\pi}{2} && \text{halvera} \\
x &= \frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{2} && \text{förenkla}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Rätt vinkel ($\pi/3$): 1p. Rätt period: 1p. Korrekt hantering av 2:an: 1p.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • tangens. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna • Lösa en trigonometrisk ekvation.

2. (a) Funktionen f definieras enligt $f(x) = |x+3| + |x-1| + |1-x|$. Beräkna värdet på $f(-2)$. (1p)

Lösning:

Det är bara att sätta in -2 på alla ställen där det står x och se vad det blir. Absolutbeloppen får stå kvar tills det är helt klart vilket tecken talet innanför har:

$$f(-2) = |-2+3| + |-2-1| + |1-(-2)| = |1| + |-3| + |3| = 1 + 3 + 3 = 7$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem.

(b) Din kompis håller på med att lösa ett absolutbeloppsproblem, och har skrivit följande:

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{om } x \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Förklara för kompisen <u>varför</u> detta är fel, och <u>vad</u> det borde stå istället. (2p)

Lösning:

Det viktiga är inte om x är positiv eller negativ, utan om <u>det som står innanför beloppstecknet</u> är det. Beloppets funktion är ju att ta bort eventuella minustecken från det som man tar beloppet av. Det ska stå

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{om } x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{om } x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{om } x \leq -1 \text{ eller } x \geq 1 \\ -(x^2 - 1) & \text{om } -1 < x < 1 \end{cases}$$

(Den högra varianten är vad man bör skriva om det till i nästa steg, men den accepteras som svar.)

Rättningsnorm: Varför: 1p. Vad: 1p.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem.

3. Visa att för alla v gäller $\cos 3v = 4\cos^3 v - 3\cos v$. (3p)

Du får, om du vill, utnyttja formlerna för dubbla vinkeln:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \qquad & \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ && &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ && &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{aligned}}$$

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 4.25(c) ur *Mot bättre vetande*.

$3v = 2v + v$, så det blir att använda additionsformel ihop med dubbla vinkeln:

$$\begin{aligned} \cos(3v) &= \cos(2v + v) \\ &= \cos(2v)\cdot\cos(v) - \sin(2v)\cdot\sin(v) && \text{additionsformel} \\ &= (\cos^2(v) - \sin^2(v))\cdot\cos(v) - 2\cdot\sin(v)\cdot\cos(v)\cdot\sin(v) && \text{dubbla vinkeln} \\ &= \cos^3(v) - \sin^2(v)\cdot\cos(v) - 2\cdot\sin^2(v)\cdot\cos(v) && \text{multiplicera in} \\ &= \cos^3(v) - 3\cdot\sin^2(v)\cdot\cos(v) && \text{samla ihop} \\ &= \cos^3(v) - 3\cdot(1 - \cos^2(v))\cdot\cos(v) && \text{trigettan} \\ &= \cos^3(v) - 3\cdot\cos(v) + 3\cdot\cos^3(v) && \text{multiplicera in} \\ &= 4\cdot\cos^3(v) - 3\cdot\cos(v) && \text{samla ihop} \end{aligned}$$

Notera att man bara får använda formler som faktiskt existerar. Det går inte att hävda t.ex. att $\cos(3v)$ kan skrivas om till $3\cos(v)$ eller att dubbla-vinkeln-formeln också ger att $\cos(3v)$ blir samma sak som $\cos^3(v) - \sin^3(v)$, för ingen av de sakerna är sanna. (Testa med att sätta in någon lätträknad vinkel och se vad som händer.)

Rättningsnorm: 3p för helt korrekt; 1p om man klart visat att man fattar vad uppgiften går ut på och inte gjort något grovt felaktigt; 2p för nästan helt korrekt.

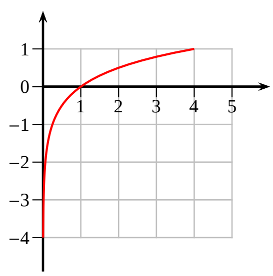
Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa trigonometriska räkneregler.

4. (a) Skissa kurvan $y = \log_4(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

Man kan börja med att ställa upp en värdetabell för $4^y = x$ (enklare att beräkna), och rita utgående från den:

y	4^y
-4	≈ 0
-3	≈ 0
-2	0,0625
-1	0,25
0	1
1	4



Rättningsnorm: Kurvan ska passera $(1, 0)$ och $(4, 1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion.

(b) Lös ekvationen $\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) = 2$. (4p)

Lösning:

$$\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) = 2$$

Utnyttja logaritmlag. Denna lag gäller dock bara om alla inblandade uttryck är definierade, så vi kommer att behöva kolla svaren då vi kommit så långt att det går att undersöka den saken:

$$\begin{aligned}
\log_4((3-x)(3-x)) &= 2 && \text{logaritmregel}\\
(3-x)(-3-x) &= 4^2 && \text{logaritm motsats till potens}\\
-9+x^2 &= 16 && \text{konjugatregeln}\\
x^2 &= 16+9 && \text{”flytta över”}\\
x^2 &= 25 && \text{räkna ut}\\
x &= \pm 5 && \text{lös andragradaren}
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren i <u>ursprungs</u>ekvationen:

$$x = 5: \begin{cases} \mathrm{VL} = \log_4(3-5) + \log_4(-3-5) \\ \quad\;\; = \log_4(-2) + \log_4(-8) = \text{odefinierat} \\ \mathrm{HL} = 2 \end{cases}$$

$$x = -5: \begin{cases} \mathrm{VL} = \log_4(3-(-5)) + \log_4(-3-(-5)) \\ \quad\;\; = \log_4(2) + \log_4(8) = \log_4(4^{1/2}) + \log_4(4^{3/2}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ \mathrm{HL} = 2 \end{cases}$$

Den negativa lösningen $x = -5$ stämmer, den positiva var en falsk rot som uppkommit under lösningsarbetet.

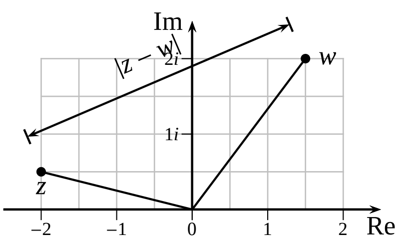
Rättningsnorm: Logaritmregel: 1p. Avlägsnande av logaritm: 1p. Lösning av andragradare (med båda svaren): 1p. Val av rätt svar: 1p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. .

5. Vi har de komplexa talen $z = -2 + \frac{1}{2}i$ och $w = 1{,}5 + 2i$.

(a) Rita ett komplext talplan och markera z och w i det. (1p)

Lösning:



Koordinatsystemet måste vara graderat, för annars går det inte att avgöra om markeringarna sitter på rätt ställen.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet.

(b) Beräkna $|z - w|$. (2p)

Lösning:

Beloppet av skillnaden mellan två tal är avståndet mellan dem, och beräknas med Pythagoras sats.

Av praktiska skäl bör vi skriva båda talen på samma format, antingen med decimaler eller bråk, att kombinera är ingen bra idé. I övrigt är det bara att räkna; uttrycket går inte att förenkla:

$$|z-w| = \big|(-2+0{,}5i)-(1{,}5+2i)\big| = |-3{,}5-1{,}5i| = \sqrt{(-3{,}5)^2+(-1{,}5)^2} = \sqrt{14{,}5}$$

alternativt

$$|z-w| = \left|(-2+\frac{1}{2}i)-(\frac{3}{2}+2i)\right| = \left|-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(-\frac{7}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{\frac{49+9}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

Med huvudräkning kan man komma fram till att detta är knappt 4, vilket kan kontrollmätas med linjal i figuren.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Huvudsakligen rätt: 1p

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form • Redogöra för och tillämpa räknereglerna för [. . .] belopp.

(c) Beräkna $\left|\frac{z}{w}\right|$. (2p)

Lösning:

Här har vi viss valfrihet, för $|z/w| = |z|/|w|$. Vi kan alltså antingen genomföra en division av icke-reella tal och därefter en beloppsräkning, eller två beloppsräkningar och därefter en division med reella tal.

Kvot först:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{w}\right| &= \left|\frac{-2+\frac{1}{2}i}{1{,}5+2i}\right| \\
&= \left|\frac{-4+i}{3+4i}\right| && \text{förläng med 2} \\
&= \left|\frac{(-4+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}\right| && \text{förläng med konjugatet} \\
&= \left|\frac{-12+16i+3i-4i^2}{9-16i^2}\right| && \text{multiplicera ihop} \\
&= \left|\frac{-8+19i}{25}\right| && \text{räkna ut} \\
&= \sqrt{(-\frac{8}{25})^2+(\frac{19}{25})^2} && \text{Pythagoras} \\
&= \sqrt{\frac{64+361}{25^2}} && \text{räkna ut} \\
&= \sqrt{\frac{425}{25^2}} = \sqrt{\frac{17}{25}} = \frac{\sqrt{17}}{5}
\end{aligned}$$

Att förlänga bråket med 2 är inte nödvändigt men gör det hela väldigt mycket enklare.

Belopp först:

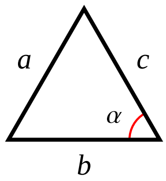
$$\begin{aligned}
|z| &= |-2+\tfrac{1}{2}i| = \sqrt{(-2)^2+(\tfrac{1}{2})^2} = \sqrt{4+\tfrac{1}{4}} = \sqrt{\tfrac{17}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\
|w| &= |1{,}5+2i| = \sqrt{1{,}5^2+2^2} = \sqrt{2{,}25+4} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5 \\
\frac{|z|}{|w|} &= \frac{\sqrt{17}/2}{2{,}5} = \frac{\sqrt{17}}{5}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Innehåller något icke-trivialt och korrekt och ingenting katastrofalt fel: 1p.

Mål: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form • Redogöra för och tillämpa räknereglerna för [. . .] belopp.

6. I den bredvidstående triangeln är längden på sidan $a = 6\,\text{cm}$, längden på sidan $b = 5\,\text{cm}$ och längden på sidan $c = 2\,\text{cm}$.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



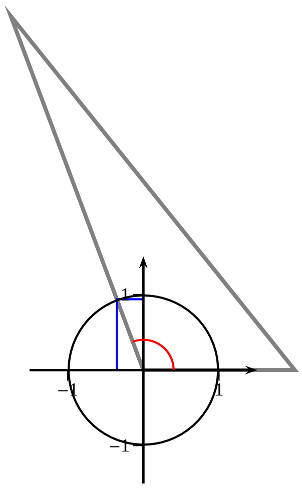
(a) Bestäm cosinusvärdet för vinkeln α. (Obs! Du ska inte ta fram själva vinkeln, det är ingen standardvinkel.) (2p)

Lösning:

Cosinussatsen ger

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) && \text{cosinussatsen}\\
6^2 &= 5^2 + 2^2 - 2\cdot 5\cdot 2\cdot\cos(\alpha) && \text{insatta siffror}\\
36 &= 25 + 4 - 20\cos(\alpha) && \text{kvadrera och multiplicera}\\
20\cos(\alpha) &= 25 + 4 - 36 && \text{"flytta över"}\\
\cos(\alpha) &= -\frac{7}{20} = -0{,}35 && \text{dividera}
\end{aligned}$$

Nedan finns en bild av en måttriktig uppritning av triangeln ihop med en enhetscirkel, för rimlighetskontroll:



Rättningsnorm: Korrekt uppställt samband (med rätt siffror på rätt platser): 1p. Korrekt utlösning av $\cos(\alpha)$ ur sambandet: 1p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen .

(b) Förklara hur du kan vara helt säker på att sinusvärdet för vinkeln α är positivt. (1p)

Lösning:

Vinkelsumman i en triangel är 180°, så alla vinklarna ligger mellan 0° och 180°. Vinklar i det området för oss till överhalvan av enhetscirkeln där y-koordinaterna är positiva, och eftersom sinusvärdet för vinkeln motsvarar den y-koordinaten är det positivt.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men svaren tolkas välvilligt.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln.

(c) Bestäm sinusvärdet för vinkeln α. (2p)

Lösning:

Trigonometriska ettan:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \text{trigettan}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) && \text{"flytta över"} \\
&= 1 - \left(-\frac{7}{20}\right)^2 = 1 - \frac{49}{400} = \frac{351}{400} && \text{siffror; räkna ut} \\
\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{\frac{351}{400}} = \pm\frac{\sqrt{351}}{20} && \text{lös andragradaren}
\end{aligned}$$

Enligt diskussion på uppgift (b) är det det positiva svaret som gäller.

Rättningsnorm: 1p för korrekt början. 1p för korrekt slutfört. Inga avdrag om man direkt går på det positiva svaret.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa trigonometriska räkneregler. (Trigonometriska ettan ska kunnas utantill [. . .]).

MÄLARDALENS HÖGSKOLA ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2016.06.10 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

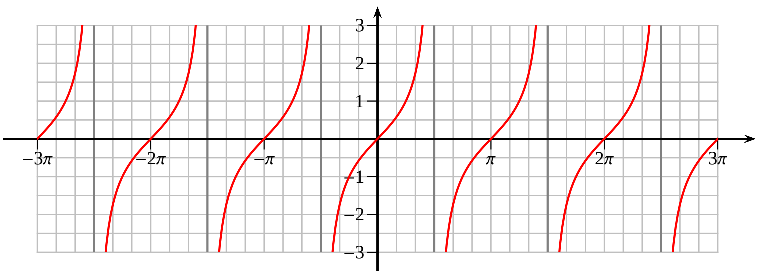
Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. (a) Skissa kurvan $y = \tan(x)$. x-axeln ska gå åtminstone mellan -3π och 3π, och ha gradering. (1p)

Lösning:



Rättningsnorm: För poäng måste samtliga dessa saker vara uppfyllda: graderad x-axel, $-3\pi \leq x \leq 3\pi$, rätt nollställen, rätt placerade ”odefinierat”, något-så-när rätt form.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion..

(b) Är det korrekt att skriva

$$\alpha = \beta \qquad \Rightarrow \qquad \tan(\alpha) = \tan(\beta)$$

eller är det fel? Motivera! (1p)

Lösning:

Det är korrekt. Om två vinklar är lika så måste de ha lika tangensvärden.

Rättningsnorm: För poäng krävs rätt svar och något som kan tolkas som en motivering. (Den behöver inte vara speciellt välformulerad.)

Mål: Du ska kunna göra följande: • Använda tecknen =, ⇒ och ⇔ korrekt..

(c) Är det korrekt att skriva

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta$$

eller är det fel? Motivera! (1p)

Lösning:
Det är fel. Två vinklar kan mycket väl ha samma tangensvärde men ändå inte vara lika, som π och 2π, som båda har tangensvärdet 0 men som definitivt inte är samma vinkel. (Ett halvt och ett helt varv är inte samma sak!)

Rättningsnorm: Se (b).

Mål: Se (b).

2. Lös ekvationen $|1+x| = 2x+3$. (3p)

Lösning:

Absolutbeloppets definition ger:

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x & 1+x \geq 0 \\ -(1+x) & 1+x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1+x & x \geq -1 \\ -1-x & x < -1 \end{cases}$$

Vi får alltså två olika fall att räkna på: vänster om -1 och höger om -1:

$\boxed{x < -1}$

$$-1 - x = 2x+3$$
$$-4 = 3x$$
$$x = -4/3$$
$$-4/3 < -1 \text{ OK!}$$

$\boxed{x \geq -1}$

$$1 + x = 2x+3$$
$$-2 = x$$
$$-2 \ngeq -1 \text{ ej OK}$$

Så det finns en lösning, $x = -4/3$. ($x = -2$ passar inte in i förutsättningarna och är inte en lösning.)

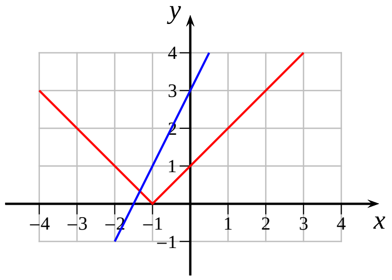
Kontroll (algebraisk): Vi sätter in lösningsförslagen i ursprungsekvationen och ser vad som händer:

$$x = -4/3 : \begin{cases} \text{VL} = |1 + (-4/3)| = |-1/3| = 1/3 \\ \text{HL} = 2(-4/3) + 3 = -8/3 + 9/3 = 1/3 \end{cases} \quad \text{VL} = \text{HL OK!}$$

$$x = -2 : \begin{cases} \text{VL} = |1 + (-2)| = |-1| = 1 \\ \text{HL} = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \end{cases} \quad \text{VL} \neq \text{HL ej OK}$$

Det stämmer att $x = -4/3$ är en lösning och att $x = -2$ inte är det.

Kontroll (grafisk): Vi ritar kurvorna $y = |1+x|$ och $y = 2x+3$ i ett koordinatsystem och ser var de skär varandra:



Det finns helt klart bara en skärningspunkt, och den är belägen mellan -2 och -1, så $x = -4/3 \approx -1{,}33$ verkar rimlig.

Rättningsnorm: Beräkningslösning: Korrekt avlägsnande av beloppstecknet: 1p. Korrekt lösning av de erhållna ekvationerna: 1p. Korrekt accepterande/förkastande av svar: 1p. 3p för korrekt bild ihop med korrekt avläsning av svaret. 2p vid ganska korrekt avläsning.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning.

3. Lös ekvationen $\cos(x) = \frac{1}{2}$ i intervallet $3\pi < x < 6\pi$. (3p)

Lösning:

Vi får ta fram samtliga lösningar till ekvationen, och så kasta bort de som inte ligger i det angivna intervallet. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, så vi har

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{\pi}{3} + n2\pi \qquad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Nu ska vi ha fram de heltsvärden på n som placerar oss mellan 3π och 6π. Det får bli separaträkning på de två fallen:

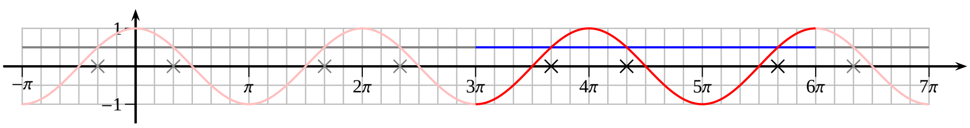
$$\begin{aligned} 3\pi < \frac{\pi}{3} + n2\pi &< 6\pi \\ 3 < \frac{1}{3} + 2n &< 6 && \text{dela med } \pi \\ \frac{8}{3} < 2n &< \frac{17}{3} && \text{subtrahera } 1/3 \\ \frac{4}{3} < n &< \frac{17}{6} && \text{dela med 2} \\ 1{,}333\ldots < n &< 2{,}833\ldots && \text{skriv på decimalform} \end{aligned}$$

Det enda heltalet i det här intervallet är $n = 2$, vilket motsvarar lösningen $x = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{13\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} 3\pi < -\frac{\pi}{3} + n2\pi &< 6\pi \\ 3 < -\frac{1}{3} + 2n &< 6 && \text{dela med } \pi \\ \frac{10}{3} < 2n &< \frac{19}{3} && \text{subtrahera } 1/3 \\ \frac{5}{3} < n &< \frac{19}{6} && \text{dela med 2} \\ 1{,}666\ldots < n &< 3{,}166\ldots && \text{skriv på decimalform} \end{aligned}$$

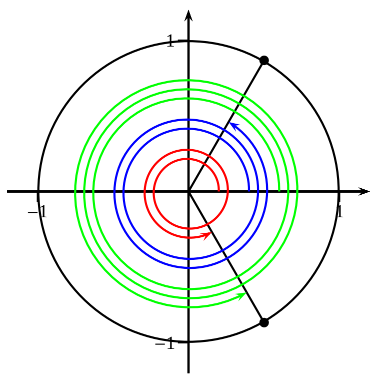
I det här intervallet finns heltalen $n = 2$ och $n = 3$, vilket motsvarar lösningarna $x = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$ respektive $x = -\frac{\pi}{3} + 3 \cdot 2\pi = \frac{17\pi}{3}$.

På en cosinuskurva ser problemet ut så här:



Vi ska ha tag de skärningspunkter mellan kurvan $y = \cos(x)$ och linjen $y = 1/2$ som ligger mellan 3π och 6π, vilket motsvarar de tre svarta kryssen.

Illustrerat i en enhetscirkel ser det ut så här:



Vi ska ta oss till en punkt på cirkeln med x-koordinaten $1/2$, och vi ska gå minst ett och ett halvt varv men inte mer än tre. Det finns de här tre sätten att göra detta på.

Rättningsnorm: Fullständig lösning till ekvationen: 1p. Framtagande av lösningar i rätt intervall: 2p, 1p vid rätt idé men felaktigheter i utförandet. Grafiska metoder är OK.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Lösa en trigonometrisk ekvation..

4. **(a)** Förklara skillnaden på $\dfrac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$ och $\log_a(\dfrac{x}{y})$. (2p)

Lösning:

Det första är ”beräkna logaritmerna för talen var för sig, och dividera sedan resultaten”. Det andra är ”dividera talen, och beräkna sedan logaritmen för resultatet”. Helt olika ordning på operationerna, och i normalfallet olika svar.

Exempel:

$$\frac{\log_{10}(1000)}{\log_{10}(100)} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \log_{10}(\frac{1000}{100}) = \log_{10}(10) = 1$$

Inte samma sak! (Provar man däremot med 10000 och 100 blir båda uttrycken 2, så ibland får man faktiskt likhet. Oftast inte, dock.)

Rättningsnorm: Svar som en medstudent skulle begripa: 2p. Svar som verkar som om att personen själv fattar men som inte skulle vara begripligt för någon annan: 1p.

Mål: Matchar inte något av målen exakt, men motsvarar ”kunna läsa matematisk notation”.

(b) Vilket av ovanstående två uttryck är lika med $\log_a(x) - \log_a(y)$? (1p)

Lösning:

Det andra.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna.

(c) Lös ekvationen $\log_x(7) = -2$. (2p)

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 3.17d ur *Mot bättre vetande*.

$$\begin{aligned} \log_x(7) &= -2 \\ 7 &= x^{-2} && \text{logaritmens definition} \\ 7 &= \frac{1}{x^2} && \text{skriv som bråk} \\ x^2 &= \frac{1}{7} && \text{”vänd” på det} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{7}} \end{aligned}$$

Det negativa svaret kan dock strykas, för det fungerar inte att räkna med exponentialfunktioner och logaritmer i negativa baser.

Rättningsnorm: Omskrivning till ekvation utan logaritm: 1p. Lösande av ekvationen: 1p. I det här fallet accepteras svaret även om man inte förklarar vart den negativa lösningen tog vägen, eftersom det går att direkt i frågan se att svaret ska vara posivt.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. .

5. Vi har de två komplexa talen $z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))$ och $w = 3 - 3i$.

(a) Skriv z på rektangulär form. (1p)

Lösning:
Bara att räkna ut:

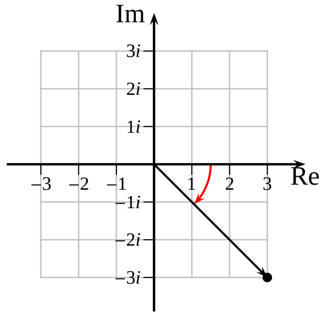
$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.
Mål: Du ska kunna göra följande: • Byta mellan rektangulär form och polär form.

(d) Skriv w på polär form. (2p)
Lösning:
Vi behöver belopp och argument. Beloppet tas med Pythagoras sats:

$$|w| = \sqrt{(\mathrm{Re}(w))^2 + (\mathrm{Im}(w))^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Vi ser om det går att läsa ut argumentet ut en bild:



Det verkar inte vara något som helst tvivel om att vinkeln är $-\frac{\pi}{4}$.

$$w = 3(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}))$$

(Det skulle gå lika bra att ta $\frac{7\pi}{4}$; den vinkeln placerar oss på samma ställe i planet.)
Rättningsnorm: Belopp: 1p. Argument: 1p.
Mål: Se (a).

(e) Beräkna z/w. Det går bra att svara både på rektangulär och på polär form. (2p)
Lösning:
Beräkningen fordrar att talen är skrivna på *samma* form, men båda formerna går bra:
Rektangulär form: Patenttrick: förläng med nämnarens konjugat:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{\sqrt{3}+i}{3-3i} && \text{sätt in den rektangulära formen}\\
&= \frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(3+3i)}{(3-3i)\cdot(3+3i)} && \text{förläng med konjugatet}\\
&= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i + 3i + 3i^2}{3^2 - (3i)^2} && \text{multiplicera ihop}\\
&= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i + 3i - 3}{9+9} && i^2 = -1\\
&= \frac{(3\sqrt{3}-3) + (3\sqrt{3}+3)i}{18} && \text{addera, sortera}\\
&= \frac{\cancel{3}((\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i)}{\cancel{3}\cdot 6} && \text{bryt ut}\\
&= \frac{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i}{6} && \text{förkorta}
\end{aligned}$$

Om man börjar med att skriva om nämnaren som $3(1-i)$ och nöjer sig med att förlänga med $\overline{1-i} = 1+i$ sparar man in förkortningen på slutet.

Polär form: Vid division på polär form dividerar man beloppen och subtraherar argumenten:

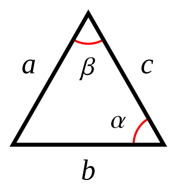
$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}))}{3(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))}\\ &= \frac{2}{3}\cdot(\cos(\tfrac{\pi}{6} - (-\tfrac{\pi}{4})) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} - (-\tfrac{\pi}{4})))\\ &= \frac{2}{3}\cdot(\cos(\tfrac{2\cdot\pi}{2\cdot 6} + \tfrac{3\cdot\pi}{3\cdot 4}) + i\sin(\cos(\tfrac{2\cdot\pi}{2\cdot 6} + \tfrac{3\cdot\pi}{3\cdot 4}))\\ &= \frac{2}{3}\cdot(\cos(\tfrac{5\pi}{12}) + i\sin(\tfrac{5\pi}{12}))\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Rektangulär form: korrekt förlängning: 1p. Korrekta räkningar: 1p. Polär form: beloppet: 1p. Argumentet: 1p. Förkortning av bråket krävs ej.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form • Multiplicera och dividera komplexa tal på polär form.

6. I den bredvidstående triangeln är längden på sidan $a = \sqrt{6}$ cm, längden på sidan $b = \sqrt{12}$ cm och vinkeln $\alpha = 45°$.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



(a) Bestäm vinkeln β.

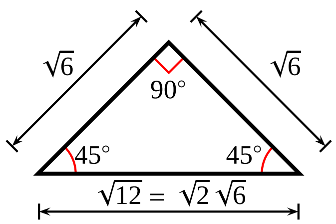
(b) Bestäm längden på sidan c.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (5p)

Lösning:

Anledningen till poängsättningen är att man kan använda svaret på (a) för att snabbt lösa (b), och tvärtom, så det mest korrekta verkar vara att ge den deluppgift man börjar med 3p och den man gör sedan 2p.

Supersnabblösning:
I en halv kvadrat är förhållandet mellan hypotenusa och katet $\sqrt{2}$, och vinkeln mellan dem är 45°. $\sqrt{12} = \sqrt{2\cdot 6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$, så detta är en halv kvadrat. I så fall är vinkeln β rät och sidan c har samma längd som sidan a.



(a) först:
Fall för sinussatsen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \qquad\Rightarrow\qquad \sin(\beta) = \frac{b\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sqrt{12}\cdot 1/\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}} = 1$$

Den enda i en triangel möjliga vinkel med detta sinusvärde är 90°, så triangeln är rätvinklig, med b som hypotenusa.

Baserat på detta kan man nu lösa (b) på ett antal olika sätt:

Identifiering av triangeln: De här vinklarna är de som man har i en halv kvadrat. Då är a och c lika långa.

Vinkelsumma: Den tredje vinkeln blir 180° − 90° − 45° = 45°. Om basvinklarna är lika så är triangeln likbent, och då är a och c lika långa.

(Man kan också stoppa in denna vinkel i sinussatsen.)

Pythagoras: Triangeln är rätvinklig, och då kan vi bestämma den tredje sidan med Pythagoras sats:

$$a^2 + c^2 = b^2 \qquad \Rightarrow \qquad c^2 = b^2 - a^2 = \sqrt{12}^2 - \sqrt{6}^2 = 12 - 6 = 6$$

I så fall är $c = \sqrt{6}$ cm (eftersom längden på en triangelsida inte kan vara negativ).

(b) först:
Fall för cosinussatsen:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\
(\sqrt{6})^2 &= (\sqrt{12})^2 + c^2 - 2 * \sqrt{12} * c * \cos(45^\circ) \\
6 &= 12 + c^2 - 2c * \sqrt{12} * \frac{1}{\sqrt{2}} \\
6 &= 12 + c^2 - 2c * \sqrt{\frac{12}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^2 - 2\sqrt{6}c + 6 &= 0 \\
(c - \sqrt{6})^2 &= 0 \\
c - \sqrt{6} &= 0 \\
c &= \sqrt{6}
\end{aligned}$$

Pythagoras: Vi misstänker att detta är en rätvinklig triangel. Pythagoras sats gäller om och endast om triangeln är rätvinklig. Vi kollar:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 = 6 + 6 = 12 \\ b^2 = (\sqrt{12})^2 = 12 \end{cases}$$

Likhet råder mellan summan av kvadraterna på två av sidorna och kvadraten på den tredje, så triangeln är rätvinklig och β, som står emot hypotenusan b, är rät.

Vinkelsumma: Likbent triangel så basvinklarna är lika. Två 45°-vinklar, så den tredje, β, blir $180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Cosinussatsen igen:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \qquad \Rightarrow \qquad 12 = 6 + 6 - 12\cos(\beta) \qquad \Rightarrow \qquad \cos(\beta) = 0$$

vilket ger att β är rät.

Sinussatsen: Samma lösning som ”(a) först”-versionen; utnyttjar inte det redan erhållna svaret.

Rättningsnorm: I och med att det finns så pass många olika sätt att ge sig på problemet är det svårt att sätta en exakt rättningsnorm, men på ett ungefär: Satt upp en korrekt trigonometrisk sats: 1p. Bestämt relevant sak ur satsen: 2p, 1p vid mindre fel. På konstruktivt sätt angripit andra frågan: 1p. Kommit till svar: 1p.

Mål: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Tillämpa Pythagoras sats. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen..

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2016.08.18 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 24 poäng. 0–12 poäng: U. 13–16 poäng: 3. 17–20 poäng: 4. 21–24 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

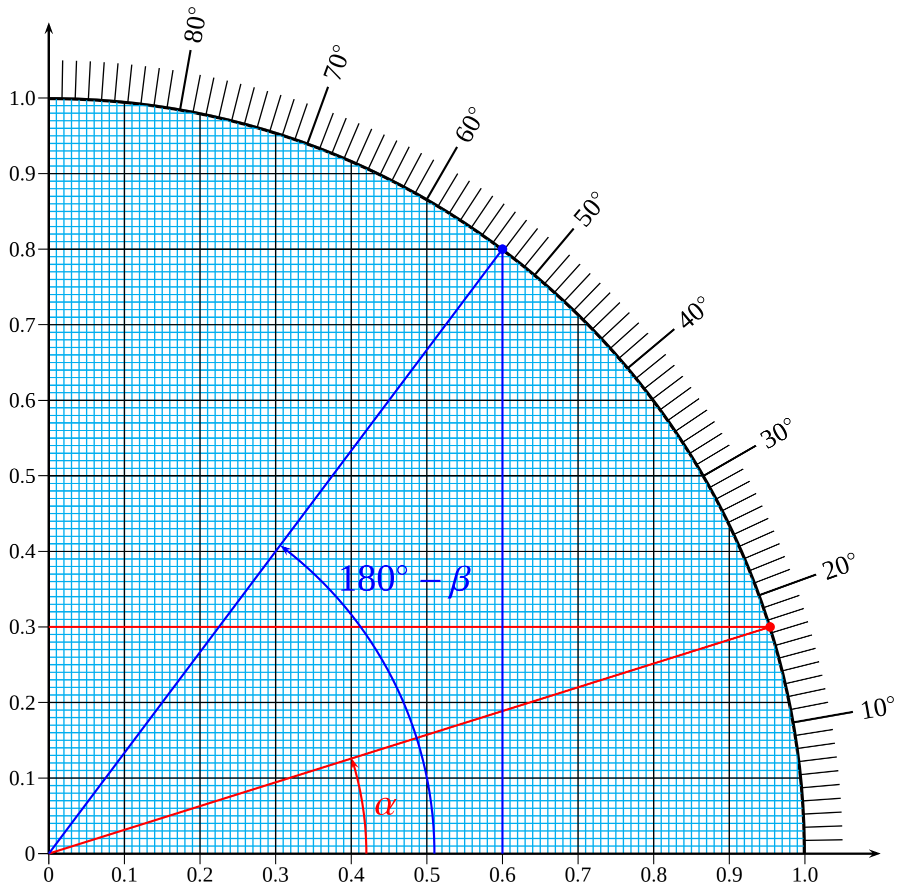
Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. (a) En vinkel α mellan 0° och 90° har sinusvärdet 0,3. Bestäm med bildens hjälp vinkeln α så noga du kan. (1p)

Lösning:

Hitta den punkt på cirkeln som har y-koordinaten 0,3 och läs av vinkeln. Ser ut som att $\alpha \approx 17{,}5^\circ$.

Rättningsnorm: Svar mellan 16° och 19° accepteras.



(b) En vinkel β mellan 90° och 180° har cosinusvärdet −0,6. Bestäm vinkeln β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Så vi ska hitta en punkt på cirkeln där x-koordinaten är −0,6. Tyvärr har vi bara fått den del av cirkeln som har positiva koordinater, men symmetri gör att vi kan utnyttja den vinkel som har cosinusvärdet +0,6. Ser ut som att $\cos(53°) \approx 0{,}6$, och då är $\cos(180° - 53°) \approx -0{,}6$. Så $\beta \approx 180° - 53° = 127°$.

Rättningsnorm: Läst av 53°: 1p. Gått vidare till 127°: 1p.

2. Lös ekvationen $4\sin^2(x) - 14\sin(x) + 6 = 0$ (3p)

Tips: Använd substitution.

Lösning:

Detta är rekommenderad uppgift 5e.1 från gamla kursens inlämningsuppgifter, med de första stegen i uträkningen redan genomförda.

Vi kallar $\sin(x)$ för t till att börja med:

$$4t^2 - 14t + 6 = 0 \qquad \text{sätt } \sin(x) = t$$

$$t^2 - \frac{7}{2}t + \frac{3}{2} = 0 \qquad \text{dela med 4}$$

$$t^2 - 2\cdot\frac{7}{4}t + (\frac{7}{4})^2 - (\frac{7}{4})^2 + \frac{3}{2} = 0 \qquad \text{kvadratkomplettera}$$

$$(t - \frac{7}{4})^2 - \frac{49}{16} + \frac{24}{16} = 0 \qquad \text{skriv som kvadrat; kvadrera; gem. nämnare}$$

$$(t - \frac{7}{4})^2 = (\frac{5}{4})^2 \qquad \text{”flytta över”; skriv som kvadrat}$$

$$t - \frac{7}{4} = \pm\frac{5}{4} \qquad \text{kan ha olika tecken, lika i övrigt}$$

$$t = \begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3 \\ -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{"flytta över"}$$

$\sin x = 3$ är inte möjligt. $\sin x = {}^1\!/_2$ har lösningarna $x = {}^{\pi}\!/_6 + n2\pi$, $x = {}^{5\pi}\!/_6 + n2\pi$.

Rättningsnorm: På ett ungefär: Genomfört substitution: 1p. Korrekt löst andragradaren: 1p. Korrekt löst de erhållna trigonometriska ekvationerna: 1p

3. Om det komplexa talet z vet vi följande två saker:

(1) $\mathrm{Re}(z) = -5$ (2) $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$

(a) Ange talet z på polär form.

(b) Ange talet z på rektangulär form.

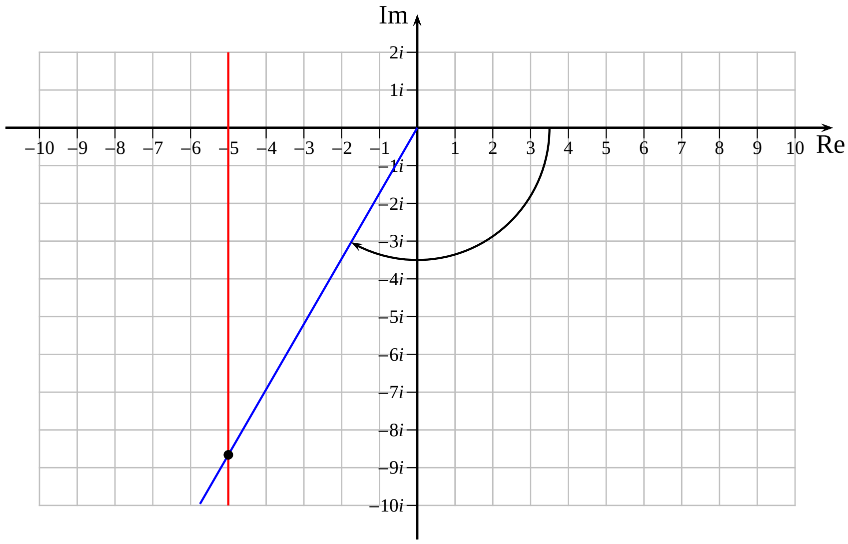
(Vi har inte tagit upp någon uppgift som ser exakt ut så här i undervisningen, men den går att lösa med hjälp av de saker som vi *har* tagit upp.)

Uppgiften poängsätts som en helhet. (3p)

Lösning:

Även lösningen går att göra som en helhet.

Geometrisk lösning: Realdelen motsvarar x-koordinaten för talet, så det ligger någonstans på den vertikala linjen $x = -5$ i talplanet. Argumentet anger i vilken riktning talet ligger, så det ligger någonstans på en linje som går från origo i riktning $-120°$.



z ligger där linjerna skär; det är den enda punkt som uppfyller båda kraven.

Vi ser i bilden en halv liksidig triangel. Den kortare kateten har längden 5, så hypotenusan har längden 10, och den längre kateten längden $\sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Hypotenusan ger z:s belopp och kateten siffrorna i imaginärdelen, som vi ser är negativ.

Algebraisk lösning: För att kunna skriva polär form behöver vi beloppet (för argumentet har vi redan). Sambandet mellan realdel och belopp/argument ger

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos(\theta) \qquad r = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\cos(\theta)} = \frac{-5}{\cos(-{}^{2\pi}\!/_3)} = \frac{-5}{-{}^1\!/_2} = 10$$

För att kunna skriva på rektangulär form behöver vi imaginärdelen, och den kan vi ta fram med hjälp av det nyss beräknade beloppet (eller med Pythagoras sats ur bilden):

$$\mathrm{Im}(z) = r\sin(\theta) = 10\sin(-2\pi/3) = 10\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -5\sqrt{3}$$

Svar: $z = 10(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3})) = -5 - 5\sqrt{3}i$

Rättningsnorm: Korrekt bestämt rektangulär och polär form: 3p. Åtminstone visat prov på förståelse för uppgiften: 1p. Åstadkommit största delen av en korrekt lösning: 2p.

4. **(a)** Om man skriver $y = \log_a(x)$, exakt vad menar man? (Vi vill alltså ha definitionen av logaritm.) (1p)

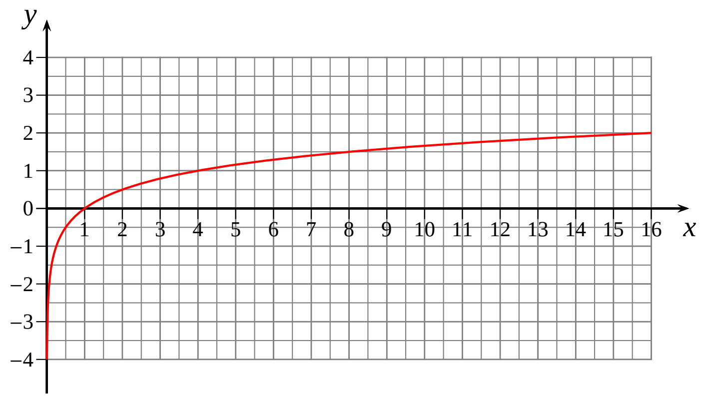
Lösning:

y är det tal man ska upphöja a i om man vill få x, eller med symboler:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Här är kurvan $y = \log_a(x)$:



Vad har a för värde, och hur avgör du det? (1p)

Lösning:

Då $y = 1$ är $x = 4$, så vi har $\log_a(4) = 1 \Leftrightarrow a^1 = 4$. Så $a = 4$. Kan dubbelkollas; alla lättberäknade punkter stämmer!

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som motivering: 1p

(c) Förenkla $\log_5(100) - 5\cdot\log_5(2) + \log_5(8)$ maximalt. (3p)

Lösning:

Taktik 1: slå ihop.

$$\begin{aligned}
&\log_5(100) - 5\cdot\log_5(2) + \log_5(8) \\
&= \log_5(100) - \log_5(2^5) + \log_5(8) && \text{ta in exponent} \\
&= \log_5(\frac{100\cdot 8}{2^5}) && \text{summa}\to\text{produkt; differens}\to\text{kvot} \\
&= \log_5(\frac{25\cdot 4\cdot 8}{2^5}) && \text{faktorisera} \\
&= \log_5(\frac{5^2\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^5}) && \text{skriv som potenser} \\
&= \log_5(5^2) && \text{förkorta} \\
&= 2 && \text{logaritmdefinitionen}
\end{aligned}$$

Taktik 2: ta isär.

$$\begin{aligned}
&\log_5(100) - 5\cdot\log_5(2) + \log_5(8) \\
&= \log_5(25\cdot 4) - 5\cdot\log_5(2) + \log_5(2^3) && \text{faktorisera} \\
&= \log_5(25) + \log_5(2^2) - 5\log_5(2) + \log_5(2^3) && \text{produkt}\to\text{summa} \\
&= \log_5(5^2) + 2\cdot\log_5(2) - 5\cdot\log_5(2) + 3\cdot\log_5(2) && \text{ta ut exponener} \\
&= 2\cdot\log_5(5) && \text{förenkla} \\
&= 2\cdot 1 = 2 && \text{logaritmdefinitionen}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Största delen av en korrekt lösning: 2p. Åtminstone redovisat kännedom om ett par logaritmräkneregler: 1p.

5. **(a)** Lös olikheten $|x+2| > 4\cdot|x-4|$. (3p)

(b) Rita en figur som illustrerar lösningen, och förklara hur figuren ska tolkas. (Om du ritade en figur då du löste (a)-uppgiften så går det bra att markera den och skriva dit en förklarande text.) (2p)

Lösning:

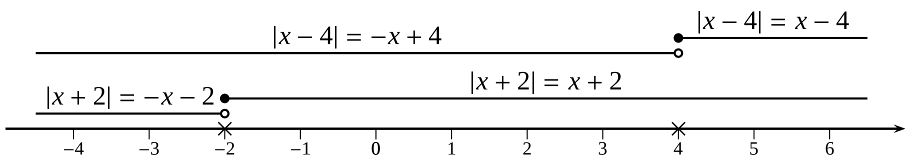
Kan göras på flera sätt:

Algebraisk lösning: Vi skriver om det hela utan beloppstecken:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -x-2 & x < -2 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ -x+4 & x < 4 \end{cases}$$

Detta kan illustreras på en tallinje:

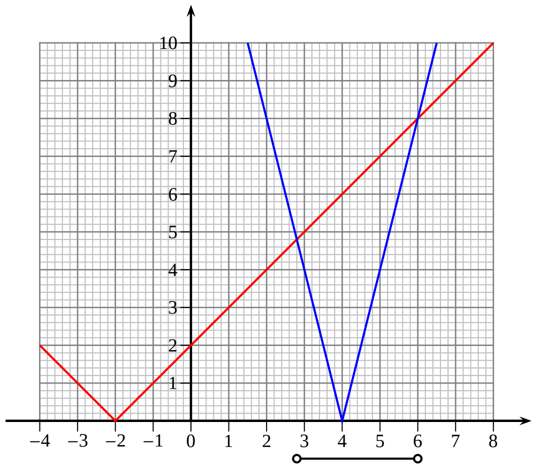


Detta ger oss tre fall att räkna på (till vänster om −2; mellan −2 och 4; efter 4):

$\boxed{x < -2}$	$\boxed{-2 \leq x < 4}$	$\boxed{x \geq 4}$
$-x-2 > 4\cdot(-x+4)$	$x+2 > 4\cdot(-x+4)$	$x+2 > 4\cdot(x-4)$
$-x-2 > -4x+16$	$x+2 > -4x+16$	$x+2 > 4x-16$
$3x > 18$	$5x > 14$	$18 > 3x$
$x > 6$	$x > 2{,}8$	$6 > x$
$6 \nless -2$ ej OK	$-2 \leq 2{,}8 < 4$ OK!	$6 > 4$ OK!

Så av talen mindre än −2 kan vi använda alla som är större än 6, och några sådana tal finns inte. Av talen mellan −2 och 4 kan vi använda alla som är större än 2,8. Av talen större än 4 kan vi använda alla som är mindre än 6. Totalt ger detta att vi kan använda talen mellan 2,8 och 6.

Grafisk lösning: Vi ritar kurvorna $y = |x+2|$ och $y = 4\cdot|x-4|$ i samma koordinatsystem. $y = |x+2|$ är den vanliga absolutbeloppskurvan flyttad 2 steg åt vänster, så att hörnet ligger vid −2. $y = 4\cdot|x-4|$ är absolutbeloppskurvan flyttad 4 steg åt höger, så att hörnet ligger vid 4, och dessutom utdragen med en faktor 4 på höjden, så att 1 steg horisontellt svarar mot 4 steg vertikalt:

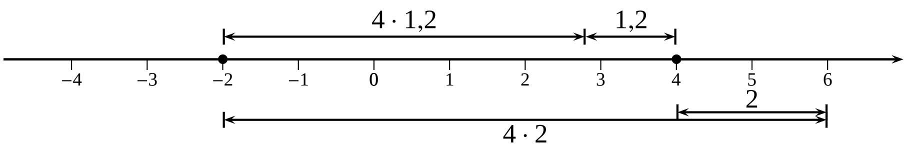


Olikheten innebär att vi söker det område där den blåa kurvan ligger *under* den röda. Det verkar vara mellan 2,8 och 6, ungefär, och de avläsningarna kan kontrolleras i formlerna.

Geometrisk lösning: $|x - a|$ innebär geometriskt avståndet mellan x och a. Olikheten $|x - (-2)| > 4\cdot|x - 4|$ betyder att avståndet mellan x och -2 ska vara mer än 4 gånger så stort som avståndet mellan x och 4.

Punkterna till vänster om -2 ligger *närmare* -2 än 4, och kan inte komma på fråga.

Den punkt som ligger på $4/5$ av sträckan mellan -2 och 4 ligger exakt 4 gånger så långt ifrån -2 som den ligger från 4. Sträckan är 6 enheter lång, och backar man $6/5 = 1{,}2$ enhet från 4 hamnar man i punkten ifråga. Då är man i $4 - 1{,}2 = 2{,}8$.



Om man sedan går motsvarande $1/3$ av denna mellansträcka åt höger från 4 så hamnar man igen i en punkt där avståndet till -2 är exakt 4 gånger så långt som avståndet till 4. Då är man i $4 + 6/3 = 6$.

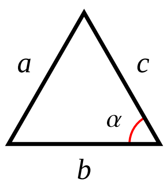
Mellan 2,8 och 6 är avståndet till -2 mer än 4 gånger så stort som avståndet till 4.

Svar: $(2{,}8;\ 6) = \{x : 2{,}8 < x < 6\}$

Rättningsnorm: (a): Helt rätt: 3p, annars delpoäng efter hur stor del av en korrekt lösning man åstadkommit. 0p om man bara tar bort beloppstecknen utan vidare åtgärder. (b): Bild som är klart relevant med förklaring: 2p. (De tre bilder som finns i lösningsförslaget är exempel på relevanta bilder.) Halvdan illustration/förklaring: 1p

6. I den bredvidstående triangeln är längden på sidan $a = \sqrt{20}$ cm, längden på sidan $b = 6$ cm och vinkeln $\alpha = 45°$.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



(a) Bestäm längden på sidan c. (3p)

Lösning:

Fall för cosinussatsen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha)$$
$$(\sqrt{20})^2 = 6^2 + c^2 - 2\cdot 6\cdot c\cdot \cos(45°)$$

$$20 = 36 + c^2 - 2\cdot 6\cdot c\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 - 6\cdot \sqrt{2}\cdot c = -16$$

$$c^2 - 2\cdot 3\cdot \sqrt{2}\cdot c + (3\cdot \sqrt{2})^2 = (3\cdot \sqrt{2})^2 - 16$$

$$(c - 3\cdot \sqrt{2})^2 = 9\cdot 2 - 16$$

$$(c - 3\cdot \sqrt{2})^2 = 2$$

$$c - 3\cdot \sqrt{2} = \pm \sqrt{2}$$

$$c = \begin{cases} 3\cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\cdot \sqrt{2} \\ 3\cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\cdot \sqrt{2} \end{cases}$$

Båda dessa svar är geometriskt rimliga.

Rättningsnorm: Korrekt cosinussats med data instoppade på rätt ställen: 1p. Korrekt lösning av den erhållna andragradaren: 2p. (Har man stoppat in data på fel ställen, så att man istället bestämmer a ges 1p, för den ekvationen är mycket enklare.)

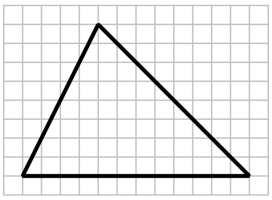
(b) Rita upp triangeln. Ritningen vara så korrekt som det är möjligt att få den med hjälp av papper, penna och någon form av linjal. (Använd kanten på skrivningsomslaget om du inte har någon linjal med dig.)

Obs! Detta är fullt möjligt att göra även om man inte lyckats lösa (a)-uppgiften! (2p)

Lösning:

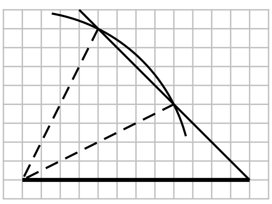
Våra hjälpmedel är ett papper med kvadratiska rutor med en sidlängd på 5 mm och något som kan användas för att rita rakt. Vi ska ha en sida med längd 6 cm, och den placeras enklast utmed rutnätet. Anslutande sida ska gå i 45° vinkel, vilket är diagonalt över rutorna.

Baserat på uträkning: Enligt Pythagoras sats är $\sqrt{2}$ diagonalen i en kvadrat med sidlängd 1, så den kortare lösningen motsvarar ”gå diagonalt över 4 rutor” och det längre ”gå diagonalt över 8 rutor”. Har man gjort det är det sedan enkelt att markera den tredje sidan.



Man kan kontrollera räkningarna genom att se efter att den tredje sidan verkligen är $\sqrt{20}$ cm lång. I båda fallen förflyttar den en 2 cm i en riktning och 4 cm i den vinkelräta, så dess längd är enligt Pythagoras $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$ cm. Allt stämmer alltså!

Rent grafiskt: Om vi inte lyckats räkna ut längden på sidan c får vi utnyttja den givna längden på sidan b. 20 ligger ganska mitt emellan $16 = 4^2$ och $25 = 5^2$, så en rimlig gissning är att $\sqrt{20} \approx 4{,}5$. Gissningen kan kontrolleras: $4{,}5^2 = 20{,}25$, vilket får betraktas som acceptabelt. Så vi ska från ändan på 6 cm-sidan till 45°-linjen, och vi ska gå 4,5 cm. Genom att markera 4,5 cm på en pappersbit eller något (eller använda en passare om vi har en) kan vi passa in sidan, och upptäcker då att det finns två sätt att göra det på:



Rättningsnorm: För poäng ska sidan b verkligen vara 6 cm, vinken α verkligen 45°.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2016.11.~~02~~01 14.40–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

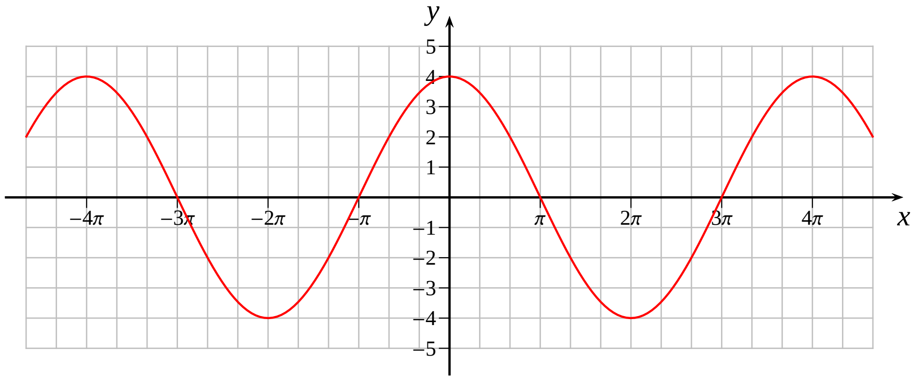
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Daniel Andrén, som nås på telefon 021–15 17 32 (Tentan är konstruerad av Hillevi Gavel, som dock var bortrest vid skrivningstillfället.)

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Här är kurvan $y = f(x)$.



Skriv upp en formel för funktionen f. Förklara också hur du resonerar för att få fram formeln. (3p)

Lösning:

Böljande linje: sinus eller cosinus. Topp vid $x = 0$: cosinus (sinus har ett nollställe där). Period $4{\cdot}\pi$, dubbelt så långt som normalt, så saker händer hälften så fort som vanligt. Så x halveras innan cosinusberäkningen. Amplitud 4, 4 gånger så hög som vanligt. Så värdet multipliceras med 4 efter cosinusberäkningen.

Svar: $f(x) = 4\cdot\cos(x/2)$.

(Det finns andra formler som också resulterar i den här kurvan, men den här är den enklaste.)

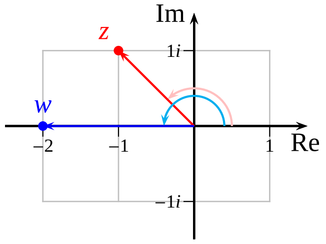
Rättningsnorm: Ingen motivering – ingen poäng. Annars: funktion: 1p. Period: 1p. Amplitud: 1p

2. Vi har de två komplexa talen $z = \sqrt{2}\cdot(\cos(\frac{3\cdot\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\cdot\pi}{4}))$ och $w = 2\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

(a) Rita ett komplext talplan, och markera z och w i detta. (1p)

Lösning:

$\sqrt{2}$ är sträckan diagonalt över en ruta, och $\frac{3\cdot\pi}{4}$ är 135°, vilket är riktning diagonalt över rutnätet. π är ett halvt varv:



Rättningsnorm: Helt rätt placering för poäng, och det kräver att systemet är graderat. Pilar och bågar behövs ej.

(b) Beräkna $z \cdot w$. Svaret kan ges på antingen rektangulär eller polär form. (2p)

Lösning:

Polärräkning:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \sqrt{2}\cdot(\cos(\tfrac{3\cdot\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\cdot\pi}{4})) \cdot 2\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) \\ &= \sqrt{2}\cdot 2(\cos(\tfrac{3\cdot\pi}{4} + \pi) + i\sin(\tfrac{3\cdot\pi}{4} + \pi)) \\ &= 2\cdot\sqrt{2}(\cos(\tfrac{7\cdot\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{7\cdot\pi}{4})) \end{aligned}$$

Rektangulärräkning (real- och imaginärdelarna går att läsa ut direkt ur bild, om man inte har lust att beräkna dem):

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (-1 + i)\cdot(-2) \\ &= 2 - 2i \end{aligned}$$

(Normalt är multiplikation enklare att utföra på polär form, men i just det här fallet var nog rektangulärräkningen enklare.)

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Något slarvfel: 1p.

3. Visa att för alla v gäller $\sin 4v = 4\sin v\cos v - 8\sin^3 v\cos v$. (3p)

Du får, om du vill, utnyttja formlerna för dubbla vinkeln:

$\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$	$\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
	$= 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1$
	$= 1 - 2\cdot\sin^2(\alpha)$

Lösning:

Detta var rekommenderad uppgift 4.25(d) ur *Mot bättre vetande*

Det vi ska göra är att steg för steg, enbart med hjälp av existerande räkneregler, skriva om vänsterledet så att det antar samma form som högerledet. (Man kan göra tvärtom också, men vänsterledet verkar lättare att jobba med.)

$$\begin{aligned} \sin(4\cdot v) &= \sin(2\cdot 2\cdot v) && \text{skriv som dubbel vinkel} \\ &= 2\cdot\sin(2\cdot v)\cdot\cos(2\cdot v) && \text{dubbla vinkeln} \\ &= 2\cdot 2\cdot\sin(v)\cdot\cos(v)\cdot(1 - 2\cdot\sin^2(v)) && \text{dubbla vinkeln} \end{aligned}$$

$$= 4\cdot\sin(v)\cdot\cos(v) - 4\cdot\sin(v)\cdot\cos(v)\cdot 2\cdot\sin^2(v) \quad \text{multiplicera in}$$
$$= 4\cdot\sin(v)\cdot\cos(v) - 8\cdot\sin^3(v)\cdot\cos(v) \quad \text{ordna om}$$

Man kan också utnyttja additionsformlerna genom att börja med omskrivningen $4\cdot v = v + 3\cdot v$, men den beräkningen blir längre.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åstadkommit en del, men inte kommit ända fram: 2p. Visat att man förstår vad som ska göras, men använt icke-existerande regler: 1p.

4. (a) Förenkla $\log_9(20) - \log_9(12) - \log_9(15)$ maximalt. (2p)

Lösning:

Kan läggas upp på lite olika sätt:

Slå ihop:

$$\log_9(20) - \log_9(12) - \log_9(15) = \log_9\left(\frac{20}{12\cdot 15}\right)$$
$$= \log_9\left(\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{5}\cdot 3}\right) = \log_9\left(\frac{1}{9}\right) = \log_9(9^{-1}) = -1$$

Notera att det bara skulle försvåra förenklingarna om man faktiskt multiplicerade ihop 12 och 15.

Ta isär:

$$\log_9(20) - \log_9(12) - \log_9(15)$$
$$= \log_9(4\cdot 5) - \log_9(4\cdot 3) - \log_9(5\cdot 3)$$
$$= \log_9(4) + \log_9(5) - (\log_9(4) + \log_9(3)) - (\log_9(5) + \log_9(3))$$
$$= \cancel{\log_9(4)} + \cancel{\log_9(5)} - \cancel{\log_9(4)} - \log_9(3) - \cancel{\log_9(5)} - \log_9(3)$$
$$= -2\cdot\log_9(9^{1/2}) = -2\cdot\frac{1}{2} = -1$$

Det finns många andra upplägg.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Inte kommit ända i mål (pga sifferräknefel eller inte kommit på vad som ska göras): 1p. Använt icke existerande logaritm"regler": 0p.

(b) Lös olikheten $\log_2(x^2) \leq 0$. (3p)

(Uppgiften går att lösa med hjälp av de saker vi tagit upp i kursen, men kan fordra viss kreativitet.)

Lösning:

Kan lösas på flera sätt.

Logaritmdefinition, och superformellt Logaritmer går bara att beräkna för positiva tal, och om basen är större än ett så blir värdena negativa om argumentet ligger mellan 0 och 1. Så olikheten kan skrivas om till den dubbla olikheten

$$0 < x^2 \leq 1$$

En dubbel olikhet kan lösas genom att man separatlöser de två olikheterna och tar skärningen mellan deras lösningsmängder:

$$0 < x^2 \qquad\qquad x^2 \leq 1$$
$$x \neq 0 \qquad\qquad x^2 - 1 \leq 0$$
$$(x+1)\cdot(x-1) < 0$$

Den andra olikheten kan analyseras med teckentabell (även om den inte är krångligare än att den kan lösas med inspektion):

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)\cdot(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Eftersom värdet skulle vara noll eller lägre är lösningsmängden här intervallet $[-1, 1]$. Lösningsmängden som helhet blir då

$$\begin{aligned}\{x \mid x \neq 0\} \cap \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} &= \{x \mid (x \neq 0) \wedge (-1 \leq x \leq 1)\} \\ &= \{x \mid (-1 \leq x < 0) \vee (0 < x \leq 1)\} = [-1, 0) \cup (0, 1]\end{aligned}$$

Sedan kan allt detta göras betydligt mer informellt.
Notera att om man gör omskrivningen $\log_2(x^2) = 2\log_2(x)$ så tappar man alla de negativa lösningarna, för den omskrivningen gäller bara om alla inblandade uttryck är definierade och det är $\log_2(x)$ inte för negativa x.
Rättningsnorm: Insett att svaret ska vara mindre än 1: 1p. Insett att svaret ska vara större än -1: 1p. Insett att svaret inte kan vara 0: 1p.

5. (a) Vad menas med *absolutbeloppet* av ett reellt tal x? (1p)

Lösning:
Talets avstånd från origo; talet med eventuellt minustecken borttaget; siffrorna i talet (utan tecken); x om x inte är negativt, x med omvänt tecken om x *är* negativt.
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel

(b) Vad menas med *absolutbeloppet* av ett komplext tal z? (1p)

Lösning:
Talets avstånd från origo; $\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel

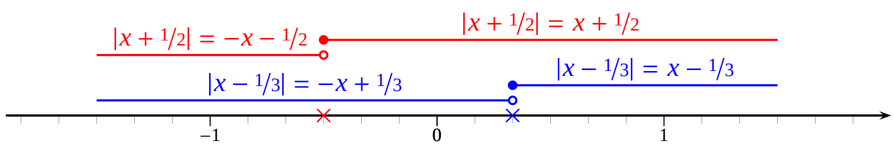
(c) Lös ekvationen $|x - \frac{1}{3}| = |x + \frac{1}{2}|$. ($x$ är ett reellt tal.) (3p)

Lösning:
Detaljerad analytisk lösning: Vi analyserar beloppsuttrycken var för sig:

$$|x - \tfrac{1}{3}| = \begin{cases} x - \frac{1}{3} & x - \frac{1}{3} \geq 0 \\ -(x - \frac{1}{3}) & x - \frac{1}{3} < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - \frac{1}{3} & x \geq \frac{1}{3} \\ -x + \frac{1}{3} & x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|x + \tfrac{1}{2}| = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ -(x + \frac{1}{2}) & x + \frac{1}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} & x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Om vi illustrerar sambanden på tallinjen ser det ut så här:



De två brytpunkterna $x = -\frac{1}{2}$ och $x = \frac{1}{3}$ delar tallinjen i tre delar, så vi får tre fall (innan, mellan, efter) att räkna på:

$\boxed{x < -\frac{1}{2}}$

$$-x + \tfrac{1}{3} = -x - \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{3} = -\tfrac{1}{2}$$

Olösligt!

$\boxed{-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{3}}$

$$-x + \tfrac{1}{3} = x + \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 2} - \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = 2\cdot x$$
$$x = -\tfrac{1}{6}/2 = -\tfrac{1}{12}$$
$$-\tfrac{1}{2} \leq -\tfrac{1}{12} < \tfrac{1}{3}$$

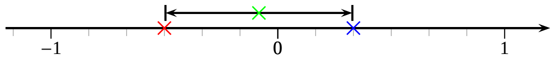
$\boxed{x \geq \frac{1}{3}}$

$$x - \tfrac{1}{3} = x + \tfrac{1}{2}$$
$$-\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}$$

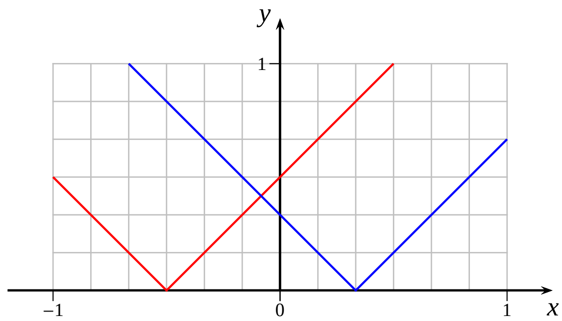
Olösligt!

Geometrisk lösning: Uttrycket kan utläsas som ”x ligger lika långt från $\frac{1}{3}$ som från $-\frac{1}{2}$. I så fall måste x ligga precis mitt emellan dessa punkter, och ”mitt emellan” kan vi få som medelvärdet:

$$x = \frac{\frac{1}{3} + (-\frac{1}{2})}{2} = \frac{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}}{2} = \frac{-\frac{1}{6}}{2} = -\frac{1}{12}$$



Grafisk lösning: Kurvan $y = |x|$ ser ut som ett V med spetsen i origo och sidor som sluttar i 45° vinkel. $y = |x - \frac{1}{3}|$ ser likadan ut, men flyttad i sidled så att spetsen ligger vid $x = \frac{1}{3}$. $y = |x + \frac{1}{2}|$ ser också sådan ut, men med spetsen vid $x = -\frac{1}{2}$. Uppritat har vi:



(Vi valde att låta ”en längdenhet” motsvara 6 rutor, eftersom det då var enkelt att placera ut både $-\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$.) Det är uppenbart att det inte finns några skärningar utanför det uppritade området, eftersom kurvorna där kommer att vara parallella linjer. Skärningen i bild ligger tveklöst mitt i rutan, vilket blir $\frac{1}{12}$ längdenhet till vänster om y-axeln.

Kontroll: Oavsett hur man gick till väga för att lösa ekvationen så är det en bra idé att kontrollera svaret:

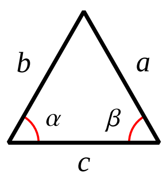
$$x = -\frac{1}{12} : \begin{cases} \text{VL} = |-\frac{1}{12} - \frac{1}{3}| = |-\frac{1}{12} - \frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}| = |-\frac{5}{12}| = \frac{5}{12} \\ \text{HL} = |-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}| = |-\frac{1}{12} + \frac{1\cdot 6}{2\cdot 6}| = |\frac{5}{12}| = \frac{5}{12} \end{cases}$$

Vänster och höger led lika: detta är en lösning. (Notera att $\frac{5}{12}$ är y-koordinaten för skärningspunkten i den grafiska lösningen, och det motsvarar geometriskt avståndet från punkterna till mittpunkten.)

Svar: $x = -\frac{1}{12}$

Rättningsnorm: Beräkningslösningen: uppdelning: 1p. Korrekt formulering av ekvationen i de olika fallen: 1p. Korrekt lösning av fallen: 1p. Övriga lösningstyper får bedömas individuellt, svårt att förutse på vilka sätt de skulle kunna gå snett.

6. I bredvidstående triangel har sidan a längden $\sqrt{32}$ cm, sidan b har längden 5 cm och cosinusvärdet för vinkeln α är $3/5$.



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

(a) Bestäm längden på sidan c.

(b) Bestäm vinkeln β.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (5p)

Lösning:

Det går att lösa uppgiften på ett par olika sätt, och att ta hjälp av lösningen på det man gjorde först när man löser resten.

(a) ur informationen i frågan: Helt klart fall för cosinussatsen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{32})^2 &= 5^2 + c^2 - 2\cdot 5\cdot c\cdot \tfrac{3}{5}\\
32 &= 25 + c^2 - 6\cdot c\\
c^2 - 6\cdot c &= 7\\
c^2 - 2\cdot 3\cdot c + 3^2 &= 7 + 3^2\\
(c-3)^2 &= 16\\
c - 3 &= \pm 4\\
c &= 3 \pm 4
\end{aligned}
$$

$c = -1$ kan förkastas, $c = 7\,\text{cm}$ är rimligt.

(b) med hjälp av svaret på (a): Cosinussatsen en gång till:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)\\
5^2 &= (\sqrt{32})^2 + 7^2 - 2\cdot \sqrt{32}\cdot 7\cdot \cos(\beta)\\
25 &= 32 + 49 - 14\cdot \sqrt{32}\cdot \cos(\beta)\\
14\cdot \sqrt{32}\cdot \cos(\beta) &= 56\\
\cos(\beta) &= \frac{56}{14\cdot\sqrt{32}}\\
&= \frac{4\cdot 14}{14\cdot\sqrt{32}}\\
&= \frac{4}{\sqrt{32}}\\
&= \sqrt{\frac{16}{32}}\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Den enda vinkel i intervallet 0°–180° som har detta cosinusvärde är $\beta = 45°$.

(b) ur informationen i frågan: Om vi hade haft sinusvärdet för α istället för cosinusvärdet skulle vi kunna ta fram $\sin(\beta)$ med sinussatsen. Med hjälp av trigonometriska ettan kan man ta fram ett sinusvärde ur ett cosinusvärde:

$$
\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1\\
\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \pm\sqrt{1-(3/5)^2} = \pm\sqrt{25/25 - 9/25} = \pm\sqrt{16/25} = \pm 4/5
\end{aligned}
$$

Vinklar i trianglar har inte negativa sinusvärden, så det positiva värdet är rätt. Sinussatsen ger nu

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\beta)}{b}\\
\sin(\beta) &= \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}\\
\sin(\beta) &= \frac{5\cdot 4/5}{\sqrt{32}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{16}{32}} = \sqrt{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

De enda vinklar med detta sinusvärde som är möjliga i en triangel är 45° och 135°. Dock ger $\cos(\alpha) = 0{,}6 < 0{,}7 \approx \cos(45°)$ att $\alpha > 45°$. Eftersom det bara finns 180° i en triangel kan svarsförslaget 135° skrotas.

(a) med hjälp av svaret på (b) Sidan c kan tas fram med hjälp av sinusvärdet från motstående vinkel γ. Vinklarna i en triangel summerar till 180°, så $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - \alpha - 45° = 135° - \alpha$. Nu kan vi utnyttja additionsformeln för sinus:

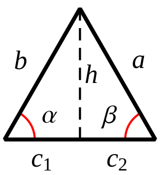
$$
\begin{aligned}
\sin(\gamma) &= \sin(135° - \alpha) = \sin(135°)\cdot\cos(\alpha) - \cos(135°)\cdot\sin(\alpha)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{4}{5} = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}
$$

Sinussatsen ger oss nu

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(\gamma)}{c} &= \frac{\sin(\alpha)}{a} \\
c &= \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \\
&= \frac{\sqrt{32} \cdot \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{10}}{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{7 \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}}{8} \\
&= \frac{7 \cdot \sqrt{64}}{8} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Beräkning utan hjälp av triangelsatserna: Om man glömt sinus- och cosinussatsen men kommer ihåg hur man räknar på rätvinkliga trianglar kan man dela upp triangeln med en höjd h, som då delar sidan c i delarna c_1 och c_2. I den vänstra triangeln är sidan b hypotenusa och c_1 närliggande katet. Vi har då

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{c_1}{b} \\
\frac{3}{5} &= \frac{c_1}{5} \\
c_1 &= 3
\end{aligned}
$$



Med hjälp av Pythagoras sats kan vi nu bestämma höjden h:

$$h^2 = b^2 - (c_1)^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

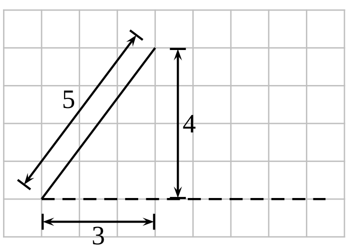
Då kan vi med hjälp av Pythagoras sats bestämma längden på c_2:

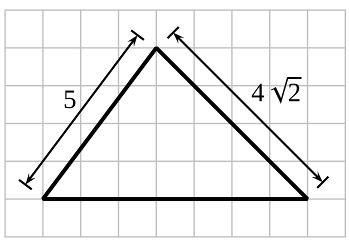
$$(c_2)^2 = a^2 - h^2 = (\sqrt{32})^2 - 16 = 32 - 16 = 16$$

så vi har $c_2 = 4$ cm. Då är sidan $c = c_1 + c_2 = 3 + 4 = 7$ cm.

Ur detta ser vi dessutom att den högra rätvinkliga triangeln är likbent, eftersom $h = c_2 = 4$ cm, och i så fall är den en halv kvadrat med vinkel $\beta = 45°$.

Grafisk lösning med observans: Vi känner igen cosinusvärdet $3/5 = 0{,}6$ som ett av värdena från den egyptiska triangeln, som har sidlängderna 3, 4 och 5 längdenheter. Det gör att vi kan börja rita i ett rutnät





$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$, och $\sqrt{2}$ känner vi igen som diagonalen i enhetskvadraten. Går vi diagonalt över 4 rutor med start i ändan av sidan b kommer vi ha gått lagom långt, och på köpet är vi nere på den höjd som sidan c ska ligga på. Nu är det bara att läsa ut måtten ur figuren!

Rättningsnorm: Eftersom det finns så många olika sätt att lösa uppgiften på får normen bli: poäng efter hur stor andel av en fullständig lösning man har åstadkommit.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2017.01.10 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

På denna tenta hade rutnätet i uppgift 3 blivit i det närmaste osynligt i kopieringen. Eftersom uppgiften var ganska obegriplig om man inte kunde se rutorna har följande betygsnorm använts: Om man har minst 14 poäng, fråga 3 medräknad eller minst 12 poäng, fråga 3 oräknad, så är tentan godkänd. (Båda dessa fall innebär att man har fått mer än hälften av de tillgängliga poängen.)

1. (a) Vi vet att $1/2 \cdot \pi < \alpha < \pi$ och att $\sin(\alpha) = 0{,}3$. Vad är $\cos(\alpha)$? (1p)

Lösning:

Intervallet ger oss att α placerar oss i andra kvadranten, vilket ger att cosinusvärdet är negativt. Trigonometriska ettan ger här

$$\cos(\alpha) = -\sqrt{1-\sin^2(\alpha)} = -\sqrt{1-0{,}3^2} = -\sqrt{1-0{,}09} = -\sqrt{0{,}91}$$

Rättningsnorm: Helt rätt, tecken inräknat, krävs för poäng.

(b) Vi vet att $0° < \beta < 90°$ och att $\tan(\beta) = 3$. Vad är $\sin(\beta)$? (2p)

Lösning:

Intervallet ger oss att β placerar oss i första kvadranten, vilket ger att sinusvärdet är positivt. Trigonometriska ger ettan här att $\cos(\beta) = \sqrt{1-\sin^2(\beta)}$, och tangensvärdet att $\sin(\beta) = 3\cdot\cos(\beta)$. Sätter vi ihop informationen och kallar $\sin(\beta)$ för y får vi sambandet

$$\begin{aligned} y &= 3\cdot\sqrt{1-y^2} \\ y^2 &= 9\cdot(1-y^2) \\ 10\cdot y^2 &= 9 \\ y^2 &= \frac{9}{10} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{9}{10}} \end{aligned}$$

Den negativa lösningen passar varken in i den okvadrerade ekvationen eller i det att vi vet att svaret ska vara positivt. Så vi har

Svar: $\sin(\beta) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Alternativt så utgår vi från en rätvinklig triangel. Om vi ger närliggande katet längden 1 och motstående längden 3 så blir tangensvärdet rätt. Pythagoras sats ger att hypotenusan då är $\sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, och "motstående genom hypotenusan" ger sinusvärdet för vinkeln.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat prov på användbara idéer, men inte nått svar: 1p.

2. Skriv som *en* logaritm: $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{2}{3}\ln(x^2-1)^{3/4}$ (3p)

(Du kan utgå från att alla deluttryck är definierade. "ln" är logaritmen i basen e.)

Lösning:

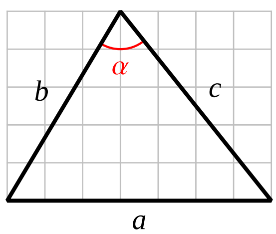
Rekommenderad uppgift 3.20(a) ur *Mot bättre vetande*. Använd logaritmreglerna.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + \frac{2}{3}\cdot\ln(x^2-1)^{3/4} \\
&= \ln(x^2+1)^{1/2} + \ln((x^2-1)^{3/4})^{2/3} && \text{multiplikation till potens} \\
&= \ln(x^2+1)^{1/2} + \ln(x^2-1)^{(3/4)\cdot(2/3)} && \text{potensregel} \\
&= \ln(x^2+1)^{1/2} + \ln(x^2-1)^{1/2} && \text{bråkförkortning} \\
&= \ln((x^2+1)^{1/2}\cdot(x^2-1)^{1/2}) && \text{summa till produkt} \\
&= \ln((x^2+1)\cdot(x^2-1))^{1/2} && \text{potensregel} \\
&= \ln(\sqrt{x^4-1}) && \text{konjugatregeln}
\end{aligned}
$$

Allt från och med den punkt där man är nere på en enda logaritm är godtagbart som svar.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Nästan kommit till svar, eller gjort räknefel som ej berör logaritmreglerna: 2p. Åtminstone redovisat kunskap om någon logaritmregel: 1p.

3. Här har vi en triangel:



Rutorna är 5×5 mm, och triangelns hörn ligger exakt där linjerna skär varandra. Bestäm $\cos(\alpha)$. Räkna exakt.

Observera att du ska ta fram *cosinusvärdet*, inte själva vinkeln! (Om du inte kan lösa problemet exakt så ger en god approximativ uppskattning delpoäng.) (3p)

Lösning:

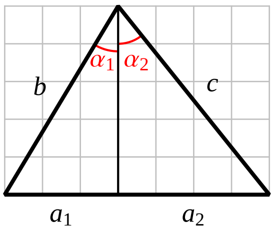
Cosinussatsen (exakt): Detta verkar vara ett fall för cosinussatsen, och för den behöver vi längderna på sidorna. Om vi vill slippa bråk/decimaler kan vi räkna i längdenheten "rutor". Vi ser direkt att $a = 7$ rutor, och Pythagoras sats ger oss $b = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$ rutor och $c = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ rutor. Cosinussatsen ger nu

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) \\
7^2 &= (\sqrt{34})^2 + (\sqrt{41})^2 - 2\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{41}\cdot\cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

$$\cos(\alpha) = \frac{34+41-49}{2\cdot\sqrt{34\cdot 41}} = \frac{13}{\sqrt{1394}}$$

Cosinussatsen (approximativ): Mät sidorna med linjal, och följ för övrigt föregående uträkning. (Denna lösning har getts 2 p, eftersom det är det naturliga sättet att lösa ett sådant här problem.)

Rätvinkliga trianglar: Om man glömt cosinussatsen kan man dela upp triangeln i två rätvinkliga trianglar, vilket delar upp vinkeln α i två delar, säg α_1 och α_2.



Med hjälp av sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i rätvinkliga trianglar får man

$$\sin(\alpha_1) = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \cos(\alpha_1) = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \sin(\alpha_2) = \frac{4}{\sqrt{41}} \qquad \cos(\alpha_2) = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

Additionsformeln för cosinus (som finns med på tentan) ger nu

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(\alpha_1+\alpha_2)\\
&= \cos(\alpha_1)\cdot\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\cdot\sin(\alpha_2)\\
&= \frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}} - \frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{4}{\sqrt{41}}\\
&= \frac{25-12}{\sqrt{34\cdot 41}}\\
&= \frac{13}{\sqrt{1394}}
\end{aligned}$$

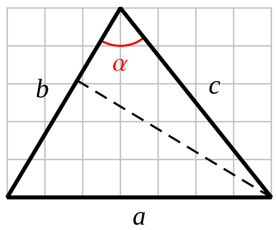
Alternativt kan man utgå från samma uppdelning, men ta fram de trigonometriska värdena för vinklarna β och γ (motstående till sidorna b och c), och så utnyttja att $\alpha+\beta+\gamma = 180°$:

$$\sin(\beta) = \frac{5}{\sqrt{41}} \qquad \cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{41}} \qquad \sin(\gamma) = \frac{5}{\sqrt{34}} \qquad \cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

Additions- och subtraktionsformlerna ger då

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos(180° - (\beta+\gamma))\\
&= \cos(180°)\cdot\cos(\beta+\gamma) + \sin(180°)\cdot\sin(\beta+\gamma)\\
&= (-1)\cdot\cos(\beta+\gamma) + 0\cdot\sin(\beta+\gamma)\\
&= -(\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) - \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma))\\
&= -\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} - \frac{5}{\sqrt{41}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}\right)\\
&\;\vdots\\
&= \frac{13}{1394}
\end{aligned}$$

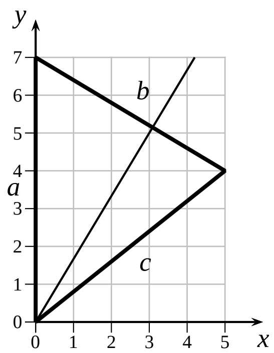
Approximativ lösning med hjälp av linjal: Om vi drar en höjd i rät vinkel mot antingen sidan b eller sidan c får vi en rätvinklig triangel, med vinkel α i ena hörnet. Sidorna i den kan mätas med linjal (vilket ger ett approximativt mått, med ca 2 siffrors noggrannhet), och så tar man fram ett approximativt cosinusvärde med ”närliggande genom hypotenusan”.



Denna metod kan förbättras genom att man ritar en uppförstoring av triangeln, så stor som ryms på pappret. (Uppförstoring med en faktor 8 ryms på en A4, med en faktor 7 får man plats på den rutade delen av skrivningspappret.) Mäter man i en sådan uppförstoring får man måtten med ca 3 siffrors noggrannhet.

Man kan också strunta i sidan a, och bara rita ett par linjer i sida b och c:s riktningar, och placera ut höjden t.ex. 1 dm ut på sidan. Då kan man mäta av cosinusvärdet direkt, utan att behöva dividera.

Exakt lösning baserad på föregående idé: Metoden med en höjd kan modifieras så att den ger ett exakt svar. Det hela blir enklast att utföra om vi roterar triangeln och placerar den med sidan a utmed y-axeln och ett hörn i origo i ett koordinatsystem:



Sidan b är en del av linjen $y = -\frac{3}{5}\cdot x + 7$ och sidan c en del av linjen $y = \frac{4}{5}\cdot x$. Om vi vill dra en höjd mot sidan b så ska denna höjd vara vinkelrät mot sidan, och det innebär att den motsvarar en linje med riktningskoefficient $\frac{5}{3}$ (detta ingår i gymnasiekursen). Den ska gå genom origo, så den har ekvationen $y = \frac{5}{3}\cdot x$.

x-koordinaten för skärningspunkten mellan $y = -\frac{3}{5}\cdot x + 7$ och $y = \frac{5}{3}\cdot x$ är lösningen till ekvationen

$$-\frac{3}{5}\cdot x + 7 = \frac{5}{3}\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{105}{34}$$

och den tillhörande y-koordinaten är

$$y = \frac{5}{3}\cdot\frac{105}{34} = \frac{175}{34}$$

Längden på närliggande katet är då

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(5 - \frac{105}{34}\right)^2 + \left(4 - \frac{175}{34}\right)^2} = \cdots = \frac{\sqrt{5746}}{34}$$

och med hjälp av hypotenusan c får vi

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{5746}}{34}}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{5746}}{34\cdot\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{169\cdot 34}}{34\cdot\sqrt{41}} = \frac{13}{\sqrt{34\cdot 41}}$$

(Just den här lösningen räknar jag inte med att någon ska komma på – jag tyckte bara att det var intressant att den approximativa metoden kan byggas ut till en exakt lösning på det här sättet.)

Kommentar: I verkliga tillämpningar är det relativt vanligt att den information man har är koordinaterna för hörnen på en figur, och då ingår att beräkna sidlängderna i det man måste göra.

Rättningsnorm: Cosinussatslösning: sidor 1p, värden instoppade på korrekt sätt i cosinussatsen 1p, svar 1p. Andra exakta lösningar: poäng efter proportion av fullständig lösning. Approximation genom direkt mätning: 1p. Approximation efter någon åtgärd för att förminska felen: 2p.

4. Vi har de två komplexa talen $z = -2i$ och $w = -4 + 3i$. Bestäm

(a) $\bar{z}$ (1p)

Lösning:

Kompext konjugat, byt tecken på imaginärdelen: $\bar{z} = \overline{0 - 2i} = 0 + 2i = 2i$. (Det är inte nödvändigt att skriva dit den "osynliga" realdelen, men det kan göra resonemanget klarare.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) $\dfrac{z}{w}$ (2p)

Lösning:

Användningsområde för komplext konjugat:

$$\frac{z}{w} = \frac{-2i}{-4+3i} = \frac{-2i\cdot(-4-3i)}{(-4+3i)\cdot(-4-3i)} = \frac{-2i\cdot(-4) - 2i\cdot(-3i)}{(-4)^2 - (3i)^2} = \frac{8i + 6i^2}{16 - 9i^2} = \frac{-6 + 8i}{25}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt teknik men med räknefel: 1p.

(c) $|w|$ (1p)

Lösning:

Belopp; använd Pythagoras sats:

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(d) $\arg(z)$ (1p)

Lösning:

Argumentet är vinkeln mellan positiva realaxeln och pilen till talet. $-2i$ ligger rakt ner, så $-\pi/2$ verkar rätt. (Det är lika rätt att ange $3\pi/2$; den vinkeln pekar också ut rätt riktning.)

Rättningsnorm: Någon form av motivering fordras.

Beräkning eller motivering krävs för poäng.

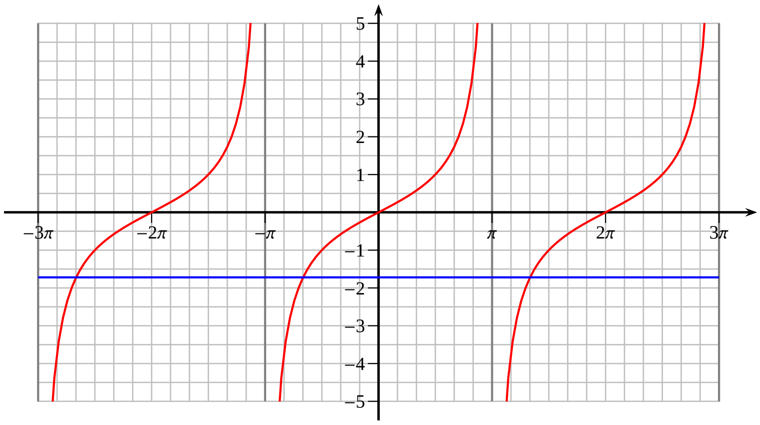
5. (a) Skissa kurvan $y = \tan(\frac{1}{2}\cdot x)$. x-axeln ska gå åtminstone mellan -3π och 3π, och ha gradering. (1p)

Lösning:

Effekten av halvan är att allt händer hälften så fort, vilket drar ut allt med en faktor två horisontellt. Det innebär bland annat att perioden fördubblas, från π till $2\cdot\pi$. Värdetabell för första positiva halvperioden (innehållande de vinklar vi klarar av):

x	0	$\frac{1}{3}\cdot\pi$	$\frac{1}{2}\cdot\pi$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$	π
$\frac{1}{2}\cdot x$	0	$\frac{1}{6}\cdot\pi$	$\frac{1}{4}\cdot\pi$	$\frac{1}{3}\cdot\pi$	$\frac{1}{2}\cdot\pi$
$\tan(\frac{1}{2}\cdot x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	odef

Om vi inte kommer ihåg tangensvärdena kan vi beräkna dem ur sinus- och cosinusvärdena (och kan vi inte dem så har vi pluggat för lite...)



Rättningsnorm: Rätt period och ungefär rätt form krävs för poäng.

(b) Lös ekvationen $\tan(\frac{1}{2}\cdot x) = -\sqrt{3}$. (3p)

Lösning:

Standard lösningsmetod:

$$\begin{aligned}\tan(\frac{1}{2}\cdot x) &= -\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}\cdot x &= -\frac{\pi}{3} + n\cdot\pi\\ x &= -\frac{2\cdot\pi}{3} + n\cdot 2\cdot\pi\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Rätt grundvinkel: 1p. Rätt hantering av period: 1p. Rätt hantering av halvan: 1p. Om period saknas ges max 1p på uppgiften.

(c) Förklara hur man med hjälp av bilden i (a) kan se att svaret på (b) är rimligt. (1p)

Lösning:

I figuren har vi ritat in en linje på höjden $y = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$. Den skär kurvan på ungefär två tredjedelar av avståndet mellan 0 och $-\pi$, så det verkar stämma att $-\frac{2}{3}\cdot\pi$ är en lösning. Och går man $2\cdot\pi$ steg så hamnar man på en annan lösning (medan det inte finns några lösningar på vägen mellan). Så det angivna avståndet mellan lösningarna verkar också rätt.

Rättningsnorm: Förklaring av hur man ser att en felaktig lösning är rätt får 0p.

Använd radianer i samtliga deluppgifter.

6. (a) Din kompis håller på att lösa ekvationen

$$|x-2| = |3\cdot x + 4| - 5$$

och har falluppdelat beräkningen så här:

$\boxed{\text{Fall 1:}}$

$$x - 2 = (3\cdot x + 4) - 5$$
$$\vdots$$

$\boxed{\text{Fall 2:}}$

$$x - 2 = -(3\cdot x + 4) - 5$$
$$\vdots$$

$\boxed{\text{Fall 3:}}$

$$-(x - 2) = (3\cdot x + 4) - 5$$
$$\vdots$$

$\boxed{\text{Fall 4:}}$

$$-(x - 2) = -(3\cdot x + 4) - 5$$
$$\vdots$$

Förklara för kompisen vad som är fel med det här. Du ska inte förklara vad man ska göra istället; det är nästa uppgift, utan du ska klargöra vad som är problematiskt. (2p)

Lösning:

$|x-2|$ blir $x-2$ om vi är till höger om 2. $|3\cdot x+4|$ blir $-(3\cdot x+4)$ om vi är till vänster om $-4/3$. Det är inte möjligt att *samtidigt* vara till höger om 2 och till vänster om $-4/3$, eftersom 2 ligger till höger om $-4/3$. Så det som du har satt som ”Fall 2” kan inte inträffa! Dessutom har du inte skrivit ut vad fallen innebär; hade du gjort det hade du antagligen själv sett att något var på tok.

(I och för sig kommer svar som man får fram då man räknar på en situation som inte kan inträffa att visa sig vara felaktiga om man provar dem i ursprungsekvationen, och kan då kastas. Men det är ändå en massa extrajobb att räkna ut saker som garanterat inte är rätt.)

Rättningsnorm: Full poäng för både en för kompisen begriplig förklaring av att man måste ange vad fallen inneär och en för att beräkningen täcker saker som inte kan inträffa. En förklaring som tyder på att den skrivande fattar men som skulle vara obegriplig för en som inte redan kan problemet får 1p.

(b) Lös ekvationen

$$|x-2| = |3\cdot x+4| - 5$$

på ett snyggt och tydligt sätt, så att kompisen ser hur man ska göra. (3p)

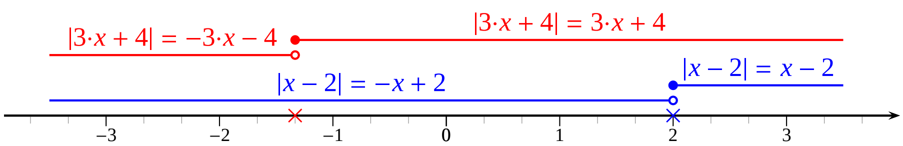
Lösning:

Vi börjar med att se exakt vad absolutbeloppen innebär:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

$$|3\cdot x+4| = \begin{cases} 3\cdot x+4 & \text{om } 3\cdot x+4 \geq 0 \\ -(3\cdot x+4) & \text{om } 3\cdot x+4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3\cdot x+4 & \text{om } x \geq -4/3 \\ -3\cdot x-4 & \text{om } x < -4/3 \end{cases}$$

Så det händer saker vid 2 och vid $-4/3$. Om vi markerar på en tallinje ser vi att vi har *tre* fall att studera:



Fallen är: till *vänster* om $-4/3$ (vilket samtidigt är till vänster om 2); *mellan* $-4/3$ och 2 (vilket är till höger om $-4/3$ och till vänster om 2); till *höger* om 2 (vilket samtidigt är till höger om $-4/3$). Räkning på dessa tre fall ger:

$$\boxed{x < -4/3}$$
$$\begin{aligned} -x+2 &= -3\cdot x - 4 - 5 \\ 2\cdot x &= -11 \\ x &= -11/2 \\ -11/2 &< -4/3 \end{aligned}$$
Behåll!

$$\boxed{-4/3 \leq x < 2}$$
$$\begin{aligned} -x+2 &= 3\cdot x + 4 - 5 \\ 3 &= 4\cdot x \\ x &= 3/4 \\ -4/3 &\leq 3/4 < 2 \end{aligned}$$
Behåll!

$$\boxed{x > 2}$$
$$\begin{aligned} x-2 &= 3\cdot x + 4 - 5 \\ -1 &= 2\cdot x \\ x &= -1/2 \\ -1/2 &\ngtr 2 \end{aligned}$$
Kasta!

Då vi avgör om svaret ska behållas eller kastas så jämför vi det med det som vi förutsatt i beräkningarna. För att kunna göra detta är det nödvändigt att vi skriver ut vilka förutsättningarna är, och inte bara kallar delberäkningarna för ”Fall 1” och så vidare.

Svar: $x = -11/2$ eller $x = 3/4$

Kontroll: Som vi har lagt upp beräkningen kan vi inte ha fått några falska rötter, så om något svar inte passar in i ursprungsekvationen så betyder det att vi har räknat *fel*.

$$x = -{}^{11}\!/_2 : \begin{cases} \text{VL} = |-{}^{11}\!/_2 - 2| = |-{}^{15}\!/_2| = {}^{15}\!/_2 \\ \text{HL} = |3\cdot(-{}^{11}\!/_2) + 4| - 5 = |-{}^{33}\!/_2 + {}^{8}\!/_2| - 5 \\ \quad\;\; = |-{}^{25}\!/_2| - 5 = {}^{25}\!/_2 - {}^{10}\!/_2 = {}^{15}\!/_2 \end{cases}$$

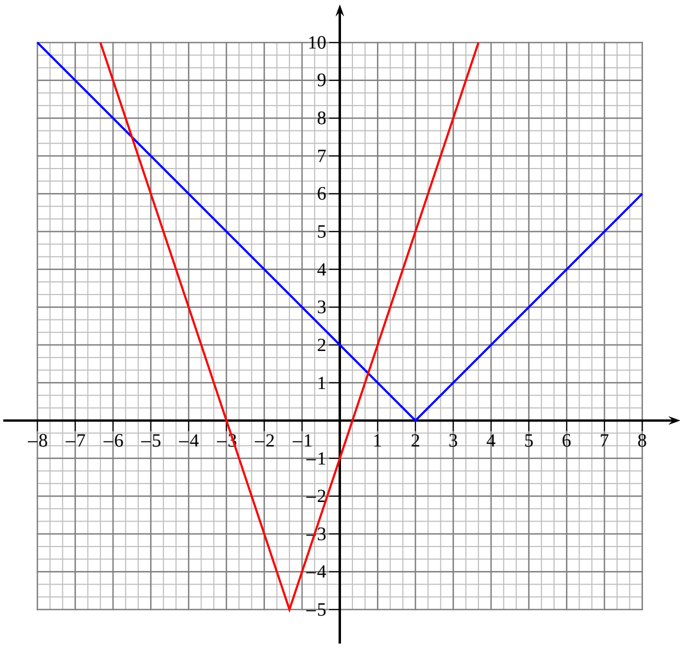
$$x = {}^{3}\!/_4 : \begin{cases} \text{VL} = |{}^{3}\!/_4 - 2| = |-{}^{5}\!/_4| = {}^{5}\!/_4 \\ \text{HL} = |3\cdot{}^{3}\!/_4 + 4| - 5 = |{}^{9}\!/_4 + {}^{16}\!/_4| - 5 = |{}^{25}\!/_4| - 5 = {}^{25}\!/_4 - {}^{20}\!/_4 = {}^{5}\!/_4 \end{cases}$$

Lösningarna är rätt räknade. Vi kan kontrollera att det var korrekt att kasta det tredje lösningsförslaget, när vi ändå håller på:

$$x = -{}^{1}\!/_2 : \begin{cases} \text{VL} = |-{}^{1}\!/_2 - 2| = |-{}^{5}\!/_2| = {}^{5}\!/_2 \\ \text{HL} = |3\cdot(-{}^{1}\!/_2) + 4| - 5 = |-{}^{3}\!/_2 + {}^{12}\!/_2| - 5 = |{}^{9}\!/_2| - 5 = {}^{9}\!/_2 - {}^{10}\!/_2 = -{}^{1}\!/_2 \end{cases}$$

Vänster- och höger led blir inte lika, så $x = -{}^{1}\!/_2$ var inte en lösning.

Grafisk kontroll: $y = |x-2|$ är lätt att rita; det blir vanliga absolutbeloppskurvan flyttad 2 steg åt höger. $y = |3\cdot x + 4| - 4 = |3\cdot(x + {}^{4}\!/_3)| - 5$ blir kurvan flyttad ${}^{4}\!/_3$ steg åt höger, hoptryckt med en faktor 3 i horisontalled, och nerflyttat 5 steg vertikalt. (Alternativt kan man ta hjälp av värdetabell.) Så vi får



I bilden ser man klart att kurvorna skär på två ställen: någonstans mellan −6 och −5, och någonstans mellan 0 och 1. Det stämmer bra med beräkningarna. (Att som här lägga 3 rutor på en längdenhet underlättar uppritningen.)

Rättningsnorm: Korrekt och tydlig lösning: 3p. Korrekt men otydlig lösning alternativt lätt inkorrekt men tydlig lösning: 2p. Inte helt fel: 1p. Kontroller krävs ej.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2017.06.07 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Vi har de komplexa talen $z = 7-3i$ och $w = 5i$. Beräkna, och förenkla maximalt:

(a) $z\cdot w$ (1p)

Lösning:

$z\cdot w = (7-3i)\cdot 5i = 35i - 15i^2 = 15 - 35i$

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(b) z/w (2p)

Lösning:

Standardmetod: Förläng med nämnarens konjugat. $\overline{w} = \overline{0+5i} = 0-5i = -5i$:

$$\frac{z}{w} = \frac{7-3i}{5i} = \frac{(7-3i)\cdot(-5i)}{5i\cdot(-5i)} = \frac{-35i+15i^2}{-25i^2} = \frac{-15-35i}{25} = \frac{(-3-7i)\cdot\cancel{5}}{5\cdot\cancel{5}} = \frac{-3-7i}{5}$$

Observans: Poängen med standardmetoden är att trolla om nämnaren så att den blir reell. Här verkar det gå att göra detta bara genom att multiplicera med i:

$$\frac{z}{w} = \frac{7-3i}{5i} = \frac{(7-3i)\cdot i}{5i\cdot i} = \frac{7i-3i^2}{5i^2} = \frac{3+7i}{-5}$$

Rättningsnorm: 1p vid räknefel och vid missad förenkling.

2. Bestäm värdet på $\cos(15°)$.

För full poäng fordras ett exakt svar, men du kan få delpoäng för en bra approximation (det vill säga: en ungefärlig uppskattning). (3p)

Lösning:

Detta är egentligen en rekommenderad uppgift, 4.24(b) ur *Mot bättre vetande*, fast formulerad i grader istället för i radianer.

Subtraktion $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, och båda dessa vinklar känner vi till de trigonometriska värdena för. Och additionsformlerna finns på frågepappret.

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) + \sin(45^\circ)\cdot\sin(30^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad (\approx 0{,}97)$$

Dubbla vinkeln 15° är hälften av 30°, en vinkel som vi känner värdena för. Och ur additionsformlerna kan man få fram en formel för dubbla vinkeln, och den kan man sedan backa:

$$\begin{aligned}\cos(2\cdot\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - (1-\cos^2(\alpha))\\ &= 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1\end{aligned}$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos(2\cdot\alpha)}{2}$$

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\cdot\alpha)}{2}}$$

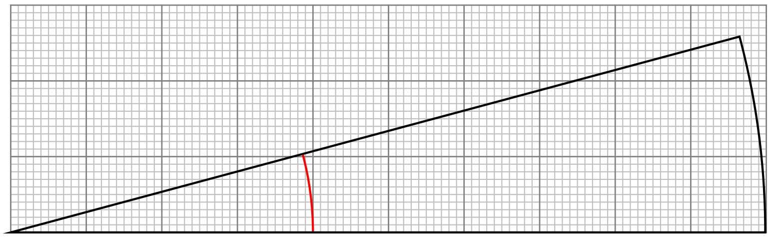
15° placerar oss i första kvadranten, där cosinusvärdena är positiva, så det är plusalternativet som gäller:

$$\cos(15^\circ) = \sqrt{\frac{1+\cos(30^\circ)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \quad (\approx 0{,}97)$$

Linjär approximation 15° ligger precis mitt emellan 0° och 30°, och båda dessa vinklar känner vi till de trigonometriska värdena för. $\cos(15^\circ)$ borde ligga ungefär mitt emellan $\cos(0^\circ)$ och $\cos(30^\circ)$:

$$\cos(15^\circ) \approx \frac{\cos(0^\circ)+\cos(30^\circ)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad (\approx 0{,}93)$$

Grafisk uppmätning Med hjälp av passare, linjal och gradskiva kan man man rita en enhetscirkel, markera vinkeln och läsa av cosinusvärdet. Beroende på hur stort och hur noga man ritar kan man få det olika noga:



Av denna bild att döma är $\cos(15^\circ) \approx 0{,}97$. (Det går för övrigt att göra en i det närmaste perfekt bild enbart med hjälp av linjal och rutnätet på pappret; passare och gradskiva är inte nödvändiga.)

Rättningsnorm: Korrekt subtraktionsformellösning: 3p. Linjär approximation: 2p. Uppmätning: 1–2p, beroende på hur pass exakt den är.

3. Lös ekvationen

$$|x-1|+|x-2|=3 \qquad (3p)$$

Lösning:

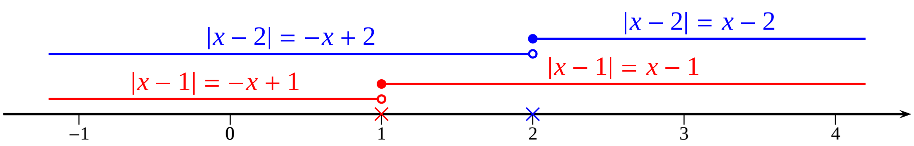
Detta är en rekommenderad uppgift, 2.22(b) ur *Mot bättre vetande*.

Skriv uttrycken utan beloppstecken:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{om } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{om } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{om } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{om } x < 1 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

Markerat på en tallinje ger detta



Detta ger oss tre fall att räkna på: innan, mellan och efter ”brytpunkterna”.

$\boxed{x<1}$

$$\begin{aligned} (-x+1)+(-x+2) &= 3 \\ -2\cdot x+3 &= 3 \\ -2\cdot x &= 0 \\ x &= 0 \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

Behåll!

$\boxed{1 \leq x < 2}$

$$\begin{aligned} (x-1)+(-x+2) &= 3 \\ 1 &= 3 \end{aligned}$$

Saknar lösning

$\boxed{x \geq 2}$

$$\begin{aligned} (x-1)+(x-2) &= 3 \\ 2\cdot x-3 &= 3 \\ 2\cdot x &= 6 \\ x &= 3 \\ 3 &\geq 2 \end{aligned}$$

Behåll!

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Något mindre fel: 2p. Åtminstone visat insikt om frågans innebörd: 1p. Struntat i beloppstecknen: 0p.

4. (a) Rita kurvan $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ i ett graderat koordinatsystem. x-axeln ska gå åtminstone mellan $-3\cdot\pi$ och $3\cdot\pi$, och kurvan ska ritas med omsorg. (1p)

(b) Lös ekvationen $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. (3p)

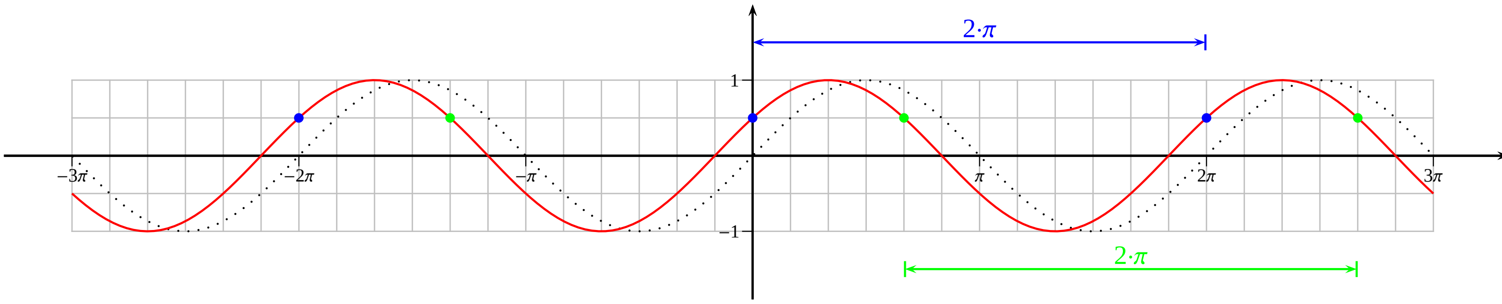
(c) Förklara hur man med hjälp av den ritade kurvan kan se att de beräknade lösningarna är korrekta. (1p)

Lösning:

(a) En sinuskurva är en våglinje som passerar genom origo, har våghöjden 1 och våglängden 2π. Tillägget ”$\pi/6$” flyttar kurvan $\pi/6$ åt vänster. För säkerhets skull kan vi göra upp en värdetabell för en bit av kurvan:

x	0 (0°)	$\pi/12$ (15°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$5\cdot\pi/12$ (75°)	$\pi/2$ (90°)
$x+\pi/6$	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ (60°)	$5\cdot\pi/12$ (75°)	$\pi/2$ (90°)	$7\cdot\pi/12$ (105°)	$2\cdot\pi/3$ (120°)
$\sin(x+\pi/6)$	$1/2 = 0{,}5$	$\sqrt{2}/2 \approx 0{,}7$	$\sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$	?	1	?	$\sqrt{3}/2 \approx 0{,}9$

Additionerna är betydligt lättare att göra i grader, eftersom man slipper bråkräkning.



Att, som här, låte π motsvara 6 rutor gör det enkelt att placera ut $\pi/6$ exakt.

Rättningsnorm: Graderat koordinatsystem med tillräckligt lång x-axel, nollställen och toppar på rätt ställen och något-så-när vågformad kurva krävs för poäng.

(b) Ekvationen:

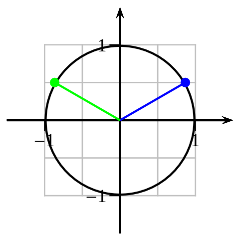
$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi \ \vee\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5{\cdot}\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

$$x = n{\cdot}2{\cdot}\pi \qquad x = \frac{5{\cdot}\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

$$x = \frac{4{\cdot}\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

$$x = \frac{2{\cdot}\pi}{3} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

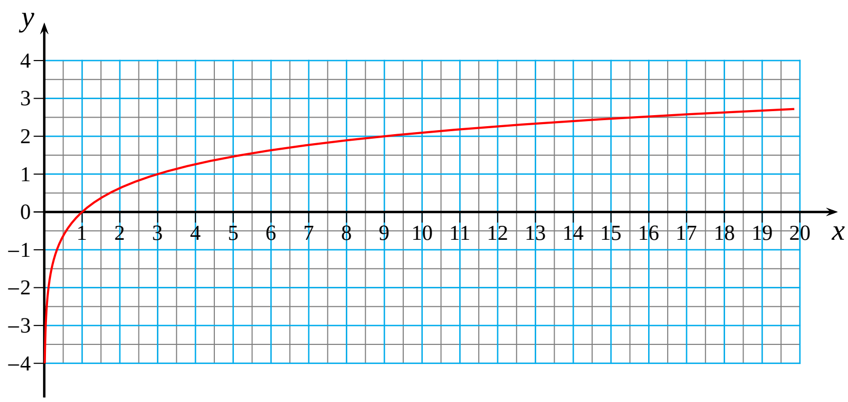


Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Missat perioden: högst 1p. Missat att det finns två grundlösningar: högst 2p

(c) Vi ser på kurvan att värdet blir $1/2$ vid $x = 0$ och att värdet sedan återkommer med $2{\cdot}\pi$:s mellanrum. (Detta är markerat i blått i figuren.) Värdet blir också $1/2$ vid $x = 2{\cdot}\pi/3$, och återkommer med $2{\cdot}\pi$:s mellanrum. (Detta är markerat med grönt)

Rättningsnorm: Någonslags förklaring som är konsistent med ritad kurva och ekvationens lösning krävs för poäng. Om sakerna inte stämmer överens så ger ett motiverat ”något är fel” poäng.

5. (a) Här är kurvan $y = \log_a(x)$:



Vad har a för värde, och hur avgör du det? (1p)

Lösning:
Då $y = 1$ är $x = 3$, så vi har $\log_a(3) = 1 \Leftrightarrow a^1 = 3$. Så $a = 3$. Kan dubbelkollas; alla lättberäknade punkter stämmer!
Rättningsnorm: Korrekt och motiverat svar: 1p

(b) Lös ekvationen $\log_2(2 - x) + \log_2(4 - x) = 3$ (4p)

Lösning:
Hur man än gör är det relevant att $\log_2(a) = b$ är ekvivalent med $a = 2^b$ och att logaritmlagarna bara gäller förutsatt att alla inblandade uttryck är definierade (vilket i ett sådant här fall är enklast att kontrollera i efterskott).
Börja med logaritmregler:

$$\begin{aligned}
\log_2(2 - x) + \log_2(4 - x) &= 3 \\
\log_2((2 - x)\cdot(4 - x)) &= 3 && \text{summa till produkt; KOLLA SVAREN} \\
(2 - x)\cdot(4 - x) &= 2^3 && \text{logaritmens definition} \\
8 - 2\cdot x - 4\cdot x + x^2 &= 8 && \text{multiplicera ihop} \\
x^2 - 6\cdot x &= 0 && \text{förenkla} \\
x\cdot(x - 6) &= 0 && \text{faktorisera} \\
x = 0 \quad \vee \quad x &= 6 && \text{nollfaktorlagen}
\end{aligned}$$

Så vi har två förslag på svar. Testa i ursprungsekvationen:

$$x = 0 : \begin{cases} \text{VL} = \log_2(2 - 0) + \log_2(4 - 0) = \log_2(2^1) + \log_2(2^2) = 1 + 2 = 3 \\ \text{HL} = 3 \end{cases} \quad \text{OK!}$$

$$x = 6 : \begin{cases} \text{VL} = \log_2(2 - 6) + \log_2(4 - 6) = \log_2(-4) + \log_2(-2) = \text{odefinierat} \\ \text{HL} = 3 \end{cases} \quad \text{ej OK}$$

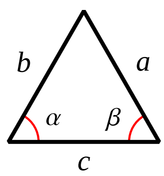
$x = 0$ är en fungerande lösning, $x = 6$ var en falsk rot som orsakats av logaritmregeln.
Börja med potenser:

$$\begin{aligned}
\log_2(2 - x) + \log_2(4 - x) &= 3 \\
2^{\log_2(2-x)+\log_2(4-x)} &= 2^3 && \text{exponentiera i leden} \\
2^{\log_2(2-x)} \cdot 2^{\log_2(4-x)} &= 8 && \text{potensregel} \\
(2 - x)\cdot(4 - x) &= 8 && \text{potens tar ut logaritm; KOLLA SVAREN} \\
&\vdots \\
x = 0 \quad \vee \quad x &= 6
\end{aligned}$$

(Logaritmregeln $a^{\log_a(b)} = b$ gäller bara om $b > 0$, annars blir det odefinierat; det är därför man behöver kolla svaren.)
Om man inte vill testa svaren så kan man från första början notera att de två logaritmuttrycken kräver att $2 - x > 0$ och att $4 - x > 0$, vilket totalt ger att x måste vara mindre än 2, vilket gör att svarsförlaget $x = 6$ direkt kan förkastas.
Observera för övrigt att det är *det man tar logaritmen av* som måste vara positivt; det är varken nödvändigt eller tillräckligt att x är det.
Rättningsnorm: Korrekt omskrivning till andragradare: 2p. Lösning av andragradare: 1p. Förkastande av falsk rot: 1p.

6. I bredvidstående triangel har sidan a längden $\sqrt{18}$ cm, sidan b har längden 5 cm och cosinusvärdet för vinkeln α är $4/5$.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



(a) Bestäm längden på sidan c.

(b) Bestäm vinkeln β.

Uppgiften poängsätts som en helhet. (5p)

Lösning:

Det går att lösa uppgiften på ett par olika sätt, och att ta hjälp av lösningen på det man gjorde först när man löser resten.

(a) ur informationen i frågan: Helt klart fall för cosinussatsen:

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha) \\
(\sqrt{18})^2 &= 5^2 + c^2 - 2\cdot 5\cdot c\cdot \tfrac{4}{5} \\
18 &= 25 + c^2 - 8\cdot c \\
c^2 - 8\cdot c &= -7 \\
c^2 - -2\cdot 4\cdot c + 4^2 &= -7 + 4^2 \\
(c-4)^2 &= 9 \\
(c-4)^2 &= 3^2 \\
c - 4 &= \pm 3 \\
c &= 4 \pm 3
\end{aligned}
$$

Både $c = 1$ cm och $c = 7$ cm är fullt rimliga svar, så det finns tydligen *två* trianglar som passar in på beskrivningen.

(b) baserat på svaret på (a): Cosinussatsen en gång till:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)$$

Om $c = 1$ cm:

$$
\begin{aligned}
5^2 &= (\sqrt{18})^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{18}\cdot 1\cdot \cos(\beta) \\
25 &= 18 + 1 - 2\cdot\sqrt{18}\cdot \cos(\beta) \\
\cos(\beta) &= \frac{18 + 1 - 25}{2\cdot\sqrt{18}} = \frac{-6}{2\cdot\sqrt{9\cdot 2}} = -\frac{6}{2\cdot 3\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Den enda i en triangel möjliga vinkeln med detta cosinusvärde är $\beta = 135°$. Om istället $c = 7$ cm får vi:

$$
\begin{aligned}
5^2 &= (\sqrt{18})^2 + 7^2 - 2\cdot\sqrt{18}\cdot 7\cdot \cos(\beta) \\
25 &= 18 + 49 - 14\cdot\sqrt{18}\cdot \cos(\beta) \\
\cos(\beta) &= \frac{18 + 49 - 25}{14\cdot\sqrt{18}} = \frac{42}{14\cdot\sqrt{9\cdot 2}} = \frac{42}{14\cdot 3\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Här blir istället $\beta = 45°$.

(b) baserad på informationen i frågan: Om vi hade haft sinusvärdet för α istället för cosinusvärdet skulle vi kunna ta fram $\sin(\beta)$ med sinussatsen. Med hjälp av trigonometriska ettan kan man ta fram ett sinusvärde ur ett cosinusvärde:

$$
\begin{aligned}
&\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \\
&\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \pm\sqrt{1 - (4/5)^2} = \pm\sqrt{25/25 - 16/25} = \pm\sqrt{9/25} = \pm 3/5
\end{aligned}
$$

Vinklar i trianglar har inte negativa sinusvärden, så det positiva värdet är rätt. Sinussatsen ger nu

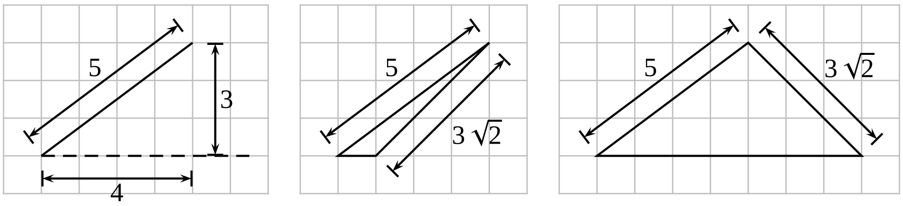
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a}$$

$$\sin(\beta) = \frac{5 \cdot 3/5}{\sqrt{18}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{9}{18}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

De enda vinklar med detta sinusvärde som är möjliga i en triangel är 45° och 135°. $\cos(\alpha) = 0{,}8 > 0{,}7 \approx \cos(45°)$ att $\alpha < 45°$. Det finns 180° i en triangel, och därmed ryms både den mindre och den större vinkeln.

Grafisk lösning med observans: Vi känner igen cosinusvärdet $3/5 = 0{,}6$ som ett av värdena från den egyptiska triangeln, som har sidlängderna 3, 4 och 5 längdenheter. Det gör att vi kan börja rita i ett rutnät



$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$, och $\sqrt{2}$ känner vi igen som diagonalen i enhetskvadraten. Går vi diagonalt över 3 rutor med start i ändan av sidan b kommer vi ha gått lagom långt, och på köpet är vi nere på den höjd som sidan c ska ligga på. Dock finns det två sätt att göra detta på; snett åt höger och snett åt vänster, så det finns två lösningar. Nu är det bara att läsa ut måtten ur figuren!

Rättningsnorm: Poäng efter hur stor del av en korrekt och fullständig lösning man har fått ihop till.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2017.08.16 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

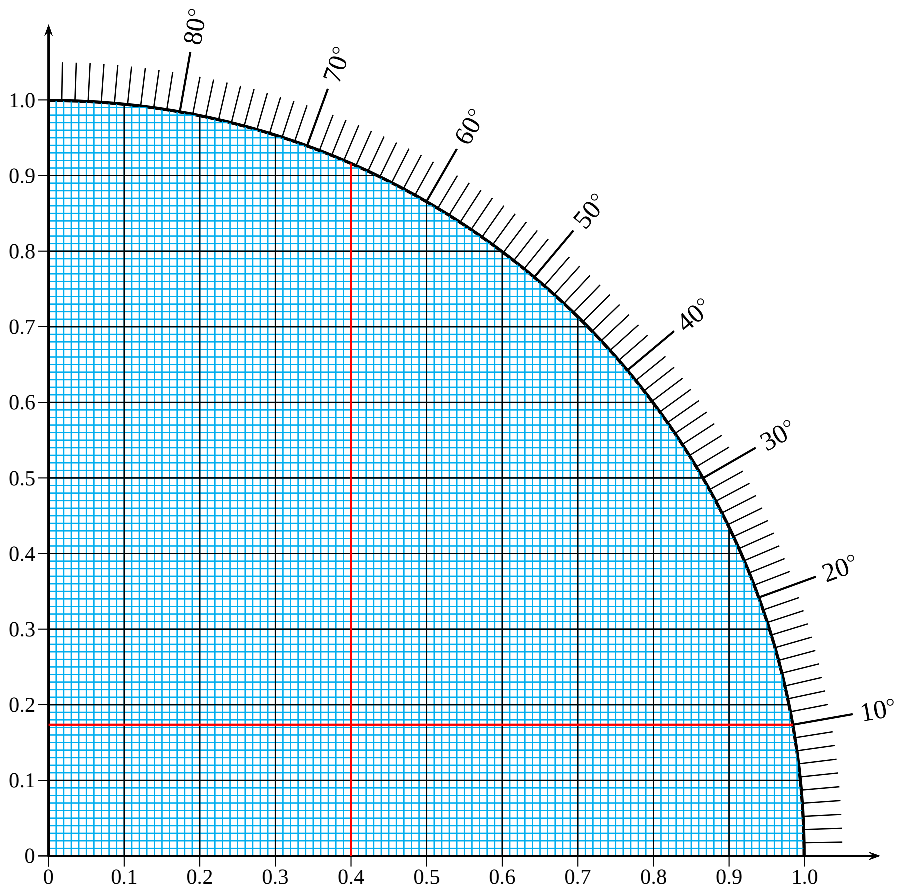
Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. (a) Bestäm med hjälp av bilden $\sin(10^\circ)$ så noga du kan. (1p)

Lösning:

y-koordinaten vid 10° verkar vara någonstans mellan 0,17 och 0,18, så vi kan säga $\sin(10^\circ) \approx 0{,}175$.

Rättningsnorm: Svar mellan 0,16 och 0,19 får anses godtagbara.



(b) En vinkel β mellan 270° och 360° har cosinusvärdet 0,4. Bestäm med bildens hjälp vinkeln β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Vinkeln β måste placera oss i 4:e kvadranten, och vi har bara 1:a kvadranten i bild. Men om vi hittar en passande vinkel mellan 0° och 90° så kan vi med hjälp av den hitta en i rätt intervall. Om vi letar rätt på en punkt med x-koordinat 0,4 på kvartscirkeln, så verkar den motsvara en vinkel mellan 66° och 67°. Drar vi bort detta från 360° får vi en vinkel i rätt intervall med rätt cosinusvärde: $\beta \approx 360° - 66{,}5° = 293{,}5°$.

Rättningsnorm: Helt rätt med förklaring: 2p. Halvrätta versioner får bedömas från fall till fall; svårt att förutse på vilket sätt de kan bli fel.

2. Lös olikheten $4 - |x+1| > |x-2|$ (3p)

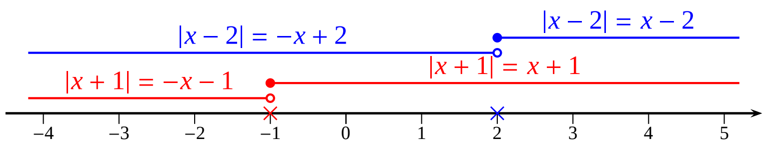
Lösning:

Beräkningslösning: Skriv uttrycken utan beloppstecken:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{om } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{om } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{om } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

Markerat på en tallinje ger detta

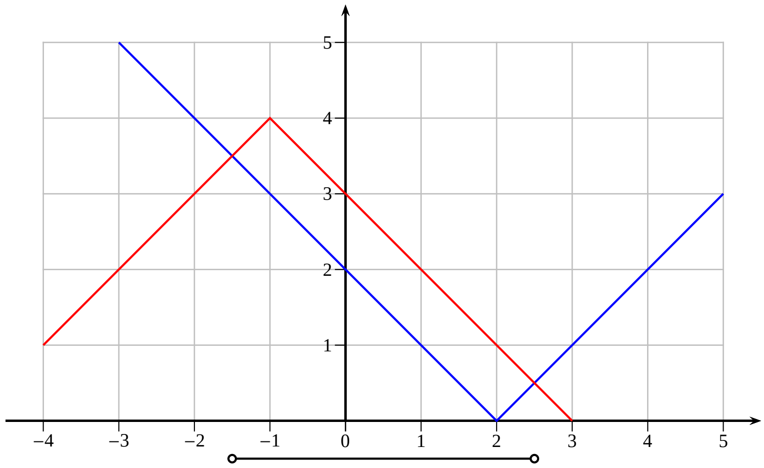


Detta ger oss tre fall att räkna på: innan, mellan och efter ”brytpunkterna”.

$\boxed{x < -1}$	$\boxed{-1 \leq x < 2}$	$\boxed{x \geq 2}$
$4 - (-x-1) > -x+2$	$4 - (x+1) > -x+2$	$4 - (x+1) > x-2$
$4 + x + 1 > -x+2$	$4 - x - 1 > -x-2$	$4 - x - 1 > x-2$
$2 \cdot x > -3$	$3 > 2$	$5 > 2 \cdot x$
$x > -1{,}5$		$2{,}5 > x$

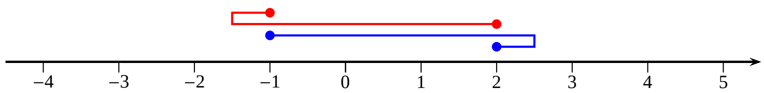
Så av talen till vänster om -1 kan vi använda de som ligger till höger om $-1{,}5$. Av talen mellan -1 och 2 kan vi använda alla som gör att det är sant att 3 ligger till höger om 2. Detta är ju alltid sant, oavsett vilket tal vi tittar på, vilket innebär att alla talen i intervallet går bra. Och av talen till höger om -2 kan vi använda de som ligger till vänster om 2,5. Totalt sett ger det att vi kan använda alla tal mellan $-1{,}5$ och 2,5.

Grafisk lösning: Kurvan $y = |x-2|$ ser ut som den vanliga beloppskurvan flyttad två steg åt höger. Kurvan $y = 4 - |x+1|$ kan vi få genom att ta en vanlig beloppskurva, flytta den ett steg åt vänster, vända den upp-och-ner, och så flytta upp den fyra steg. Detta ger följande bild:



Vi söker det område där uttrycket som beskrivs av den röda kurvan är *störst*, vilket innebär att den ska ligga *överst*. Det gör den helt klart mellan −1,5 och 2,5.

Geometrisk lösning: Vi kan skriva om olikheten till $4 > |x+1| + |x-2|$. Detta kan geometriskt tolkas som ”sammanlagda avståndet till −1 och 2 ska vara mindre än 4”. Om vi hittar var avståndet är *exakt* 4 så bör vi ur det kunna klura ut var avståndet är mindre än så. Punkterna ligger på avståndet 3 från varandra, vilket bör innebära att för att få avståndet 4 ska vi ge oss en halv enhet till höger om den högra punkten eller till vänster om den vänsta (man kan tänka sig att man knyter ett snöre med längden 4 mellan punkterna och sträcker ut det):



Avståndet är mindre än 4 mellan de två ”vändpunkterna”.

Svar: $-1{,}5 < x < 2{,}5$

Rättningsnorm: Beräkningslösning: Falluppdelat: 1p. Räknat fallen korrekt: 1p. Sammanställt svaret korrekt: 1p. Andra lösningsmetoder: poäng efter hur stor andel av uppgiften man fixat.

3. Vi har det komplexa andragradspolynomet $z^2 + (2-8i)\cdot z - (23+2i)$. Ett av polynomets nollställen är $2+3i$. Vad är det andra nollstället?

(Uppgiften går att lösa med det vi gjort i kursen, men kan kräva viss kreativitet.)

(3p)

Lösning:

Variant 1 Summan av nollställena i ett polynom med högstagradskoefficient 1 är lika med nästhögstagradskoefficienten med omvänt tecken. Om vi kallar det okända nollstället för z_2 så har vi att

$$(2+3i)+z_2 = -(2-8i) \quad \Rightarrow \quad z_2 = -(2-8i)-(2+3i) = -2+8i-2-3i = -4+5i$$

Variant 2 Produkten av nollställena i ett polynom med högstagradskoefficient 1 är lika med konstanttermen (med omvänt tecken om gradtalet är udda, vilket det inte är här). Om vi kallar det okända nollstället för z_2 så har vi att

$$(2+3i)\cdot z_2 = -(23+2i) \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{-(23+2i)}{2+3i} = \frac{-(23+2i)\cdot(2-3i)}{(2+3i)\cdot(2-3i)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-(46-69i+4i-6i^2)}{4-9i^2}\\
&= \frac{-(46-69i+4i+6)}{4+9}\\
&= \frac{-52+65i}{13} = \frac{-4\cdot\cancel{13}+5\cdot\cancel{13}i}{\cancel{13}} = -4+5i
\end{aligned}
$$

Variant 3 Om $2+3i$ är ett nollställe så är $z-(2+3i)$ en faktor, och dividerar vi med den så får vi den andra faktorn. Polynomdivision med komplexa tal görs på exakt samma sätt som med reella tal; det brukar bara gå åt mer kladdpapper för beräkningar vid sidan om.

$$
\begin{array}{r|l}
 & z \;+ (4-5i) \\
\hline
z-(2+3i) & z^2+(2-8i)z-(23+2i) \\
 & -(z^2-(2+3i)z) \\
\hline
 & \qquad (4-5i)z-(23+2i) \\
 & \quad -((4-5i)z-(23+2i)) \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Så $z^2+(2-8i)\cdot z-(23+2i) = (z-(2+3i))\cdot(z+(4-5i))$, så $-(4-5i) = -4+5i$ är det andra nollstället.

Variant 4 Om $2+3i$ är ett nollställe så är $z-(2+3i)$ en faktor. Anta att den andra faktorn är $z-(a+bi)$ (där a och b är real- och imaginärdel). Multiplicerar vi ihop får vi

$$(z-(2+3i))\cdot(z-(a+bi)) = \cdots = z^2+\underbrace{((-2-a)+(-b-3)i)}_{2-8i}\cdot z+\underbrace{(2\cdot a-3\cdot b)+(3\cdot a+2\cdot b)i}_{-23+2i}$$

Förstagradskoefficienten verkar ge att $-2-a=2$ och att $-b-3=-8$, dvs. $a=-4$ och $b=5$, och dessa värden passar in även på konstanttermen.

Variant 5 Vi försöker faktorisera med hjälp av kvadratkomplettering:

$$
\begin{aligned}
&z^2+(2-8i)\cdot z-(23+2i)\\
&\quad = z^2+2\cdot(1-4i)\cdot z+(1-4i)^2-(1-4i)^2-(23+2i)\\
&\quad = (z+(1-4i))^2-(1-2\cdot 4i+(4i)^2)-(23+2i)\\
&\quad = (z+(1-4i))^2-1+8i+16-23-2i\\
&\quad = (z+(1-4i))^2-(8-6i) = \star
\end{aligned}
$$

För att kunna komma vidare behöver vi nu skriva $8-6i$ som en kvadrat. Om man stirrar på uttrycket och misstänker att det ska finnas en lösning där det mesta är heltal kan man upptäcka

$$8-6i = 8-2\cdot 3i = 9-2\cdot 3i-1 = 3^2-2\cdot 3i+i^2 = (3-i)^2$$

(Läs det baklänges så ser ni att allt stämmer!) Utnyttjar vi detta har vi

$$
\begin{aligned}
\star = (z+(1-4i))^2-(3-i)^2 &= (z+(1-4i)+(3-i))\cdot(z+(1-4i)-(3-i))\\
&= (z+(4-5i))\cdot(z+(-2-3i))
\end{aligned}
$$

Nollställena är alltså $-4+5i$ och det redan givna $2+3i$.

Ett alternativt sätt att hitta vad $8-6i$ är kvadraten av är att sätta att det borde vara $(a+bi)^2$ och utnyttja det redan givna nollstället:

$$
\begin{aligned}
\star = (z+(1-4i))^2-(a+bi)^2 &= (z+(1-4i)+(a+bi))\cdot(z+(1-4i)-(a+bi))\\
&= (z+(1+a)+(-4+b)i))\cdot(z+(1-a)+(-4-b)i)
\end{aligned}
$$

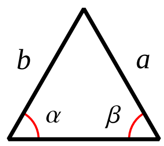
Om vi matchar detta mot att $z+(-2)+(-3)i$ är en faktor får vi att $1+a=-2$ och $-4+b=-3$, vilket ger $a=-3$ och $b=1$, vilket insatt ger faktoriseringen $(z+(-2-3i))\cdot(z+(4-5i))$.

Kommentar: Observera att det där om ”konjugatet till ett nollställe är ett nollställe” bara gäller om koefficienterna är *reella*, vilket de inte är här.

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Åtminstone kommit på någon användbar idé: 1p. Mellanting: 2p.

4. I bredvidstående triangel är sidan a 6 cm, sida b 5 cm, och <u>cosinus</u>värdet för vinkeln α är $-7/25$.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!



(a) Bestäm <u>sinus</u>värdet för vinkeln α. (2p)

(b) Bestäm sinusvärdet för vinkeln β. (2p)

(c) Är vinkeln β spetsig (mindre än 90°), trubbig (större än 90°) eller rät? Motivera! (1p)

Lösning:

(a) Trigonometriska ettan kan användas för att ”omvandla” ett cosinusvärde till ett sinusvärde:

$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 \\
\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \\
&= \pm\sqrt{1-(-\tfrac{7}{25})^2} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{625-49}{625}} \\
&= \pm\sqrt{\tfrac{576}{625}} \\
&= \pm\tfrac{24}{25}
\end{aligned}$$

Vinklar i trianglar ligger mellan 0° och 180°, och har därför positiva sinusvärden.

Svar: $\sin(\alpha) = \frac{24}{25}$

Rättningsnorm: Insett att man ska använda trigonometriska ettan: 1p. Utfört det korrekt: 1p.

(b) Sinussatsen kan användas här:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\beta)}{b} \\
\sin(\beta) &= \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} \\
&= \frac{5\cdot 24/25}{6} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Kommit till svar: 2p. Åtminstone tecknat sinussatsen korrekt: 1p.

(c) Vi kan se att vinkeln α är trubbig, eftersom cosinusvärdet är negativt, vilket det är för vinklar i intervallet $90° < \alpha < 180°$. Eftersom vinklarna i en triangel har totalt 180° att dela på kan inte vinkel β också vara trubbig, utan måste vara spetsig.

(Man kan också baserat på given information rita upp triangeln på ett ungefär, och så mäta vinkeln.)

Alternativmetod 1: Räkna ut sidan c med hjälp av cosinussatsen, och sedan cosinusvärdet för vinkeln β med hjälp av cosinussatsen igen. Cosinusvärdet är positivt, så vinkeln är spetsig.

Alternativmetod 2: (inlämnad av ett antal studenter). I en triangel hittar man den största vinkeln som motstående den längsta sidan. Sida a är längre än sida b, så vinkel α är större än vinkel β. En triangel kan inte innehålla mer än en trubbig vinkel, så eftersom β inte är den största vinkeln så kan den inte vara trubbig.

Rättningsnorm: Korrekt motiverat svar ger poäng.

5. (a) Om man skriver $y = \log_a(x)$, exakt vad menar man? (Vi vill alltså ha definitionen av logaritm.) (1p)

Lösning:

y är det tal man ska upphöja a i om man vill få x, eller med symboler:

$$y = \log_a x \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Vad är den *naturliga logaritmen* för något? (1p)

Lösning:

Logaritm i basen e; $\ln(x) = \log_e(x)$. (Talet e är det som ger en exponentialfunktionskurva som skär y-axeln i exakt 45° vinkel.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(c) Lös ekvationen $2^x \cdot 4^{1-x} = 5^{2-x}$ (3p)

Lösning:

Detta är rekommenderad uppgift 3.24(b) ur *Mot bättre vetande*.

Logaritmer: Det verkar opraktiskt att ha x:en uppe i exponenterna, och ett sätt att ”plocka ner” dem är att ta logaritmen av hela ekvationen. Det spelar egentligen ingen roll vilken typ av logaritm man tar, men eftersom två av baserna är två-potenser kan två-logaritmer vara fördelaktigt:

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 4^{1-x} &= 5^{2-x} \\
\log_2(2^x \cdot 4^{1-x}) &= \log_2(5^{2-x}) && \text{logaritmera} \\
\log_2(2^x) + \log_2(4^{1-x}) &= \log_2(5^{2-x}) && \text{produkt till summa} \\
x\cdot \log_2(2) + (1-x)\cdot \log_2(4) &= (2-x)\cdot \log_2(5) && \text{potens till produkt} \\
x\cdot 1 + (1-x)\cdot 2 &= (2-x)\cdot \log_2(5) && \text{räkna ut logaritmer} \\
-x + 2 &= 2\cdot \log_2(5) - x\cdot \log_2(5) && \text{multiplicera in} \\
-x + x\cdot \log_2(5) &= -2 + 2\cdot \log_2(5) && \text{”flytta över”} \\
(\log_2(5) - 1)\cdot x &= 2\cdot(\log_2(5) - 1) && \text{bryt ut} \\
x &= \frac{2\cdot\cancel{(\log_2(5) - 1)}}{\cancel{\log_2(5) - 1}} = 2 && \text{förkorta}
\end{aligned}$$

Man får samma svar men lite annan uträkning om man använder någon annan form av logaritmer.

Potenser: Om man glömt logaritmer kan man försöka samla ihop allt ”upphöjt till x” på ena sidan och allt annat på andra, och se om det leder till något:

$$\begin{aligned}
2^x \cdot 4^{1-x} &= 5^{2-x} \\
2^x \cdot \frac{4}{4^x} &= \frac{5^2}{5^x} && \text{potensregler} \\
\frac{2^x \cdot 5^x}{4^x} &= \frac{5^2}{4} && \text{multiplicera/dividera} \\
\left(\frac{2\cdot 5}{4}\right)^x &= \frac{5^2}{2^2} && \text{potensregler} \\
\left(\frac{5}{2}\right)^x &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 && \text{förkorta; potensregler} \\
x &= 2 && \text{exponentialfunktioner är injektiva}
\end{aligned}$$

Kontroll: Sätt in det beräknade värdet i ursprungsekvationen:

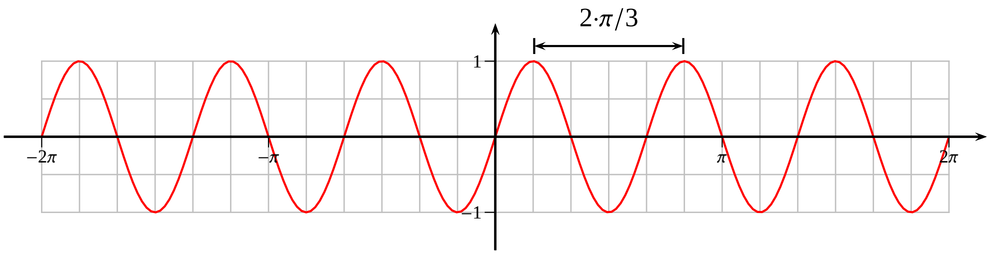
$$\begin{cases} \text{VL} = 2^2 \cdot 4^{1-2} = 4 \cdot 4^{-1} = 1 \\ \text{HL} = 5^{2-2} = 5^0 = 1 \end{cases} \qquad \text{OK!}$$

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Åtminstone visat någon kreativ idé: 1p. Mellanting: 2p.

6. (a) Rita kurvan $y = \sin(3{\cdot}x)$ i ett graderat koordinatsystem. Rita med omsorg! (1p)

Lösning:

3:an har effekten att allt händer 3 gånger så snabbt, så kurvan dras ihop med en faktor 3 på bredden. Så det går nu 3 perioder på den sträcka som normalt bara har en:



Rättningsnorm: Graderat, nollställen och extrempunkter på rätt ställen och något så när vågigt krävs för poäng.

(b) Vad har $\sin(3{\cdot}x)$ för period? Motivera! (1p)

Lösning:

Perioden (våglängden) har blivit en tredjedel av den vanliga, som är $2{\cdot}\pi$, och är alltså $2{\cdot}\pi/3$, se figuren.

Rättningsnorm: Rätt svar med någon form av motivering krävs för poäng.

(c) Visa att för alla v gäller $\sin(3{\cdot}v) = 3{\cdot}\sin(v) - 4{\cdot}\sin^3(v)$. (3p)

Du får, om du vill, utnyttja formlerna för dubbla vinkeln:

$$\boxed{\sin(2{\cdot}\alpha) = 2{\cdot}\sin(\alpha){\cdot}\cos(\alpha) \qquad \begin{aligned}\cos(2{\cdot}\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ &= 2{\cdot}\cos^2(\alpha) - 1\\ &= 1 - 2{\cdot}\sin^2(\alpha)\end{aligned}}$$

Lösning:

Det vi ska göra är att steg för steg, enbart med hjälp av existerande räkneregler, skriva om vänsterledet så att det antar samma form som högerledet. (Man kan göra tvärtom också, men vänsterledet verkar lättare att jobba med.)

$$\begin{aligned}
\sin(3{\cdot}v) &= \sin(v + 2{\cdot}v) && \text{skriv som addition}\\
&= \sin(v){\cdot}\cos(2{\cdot}v) + \cos(v){\cdot}\sin(2{\cdot}v) && \text{additionsformel}\\
&= \sin(v){\cdot}(\cos^2(v) - \sin^2(v))\\
&\quad + \cos(v){\cdot}2{\cdot}\sin(v){\cdot}\cos(v) && \text{dubbla vinkeln}\\
&= \sin(v){\cdot}\cos^2(v) - \sin^3(v) + 2{\cdot}\sin(v){\cdot}\cos^2(v) && \text{distributiva lagen m.m.}\\
&= 3{\cdot}\sin(v){\cdot}\cos^2(v) - \sin^3(v) && \text{samla ihop lika termer}\\
&= 3{\cdot}\sin(v){\cdot}(1 - \sin^2(v)) - \sin^3(v) && \text{trigonometriska ettan}\\
&= 3{\cdot}\sin(v) - 3{\cdot}\sin^3(v) - \sin^3(v) && \text{distributiva lagen}\\
&= 3{\cdot}\sin(v) - 4{\cdot}\sin^3(v) && \text{samla ihop lika termer}
\end{aligned}$$

Anmärkning Observera alltså att räknereglerna man använder måste existera! Många skrivande tyckte att eftersom $\sin(2{\cdot}\alpha) = 2{\cdot}\sin(\alpha){\cdot}\cos(\alpha)$ så borde $\sin(3{\cdot}\alpha)$ bli $3{\cdot}\sin(\alpha){\cdot}\cos(\alpha)$ (eller något ditåt). Men någon sådan regel finns inte i regelsamlingen, så vill man använda den så måste man i så fall bevisa den. Vilket inte går, eftersom den är felaktig (vilket går att kontrollera genom att sätta in något enkelt, som $\alpha = 90°$, i den). Additionsformlerna däremot existerar, och finns tryckta på tentan och bevisade i kursmaterialet, så dessa kan man utan risk använda. Och slår man lite på en multiplikation så kan man göra om den till addition. . .

Rättningsnorm: Korrekt lösning: 3p. Visat att man vet vad det handlar om: minst 1p. Kommit en bit på väg men inte ända fram *utan* att använda ”regler” som inte finns: 2p.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Jag kan till min glädje konstatera att lösningarna blivit mycket bättre inom det här området! Nästa alla fick full poäng här.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2017.10.31 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

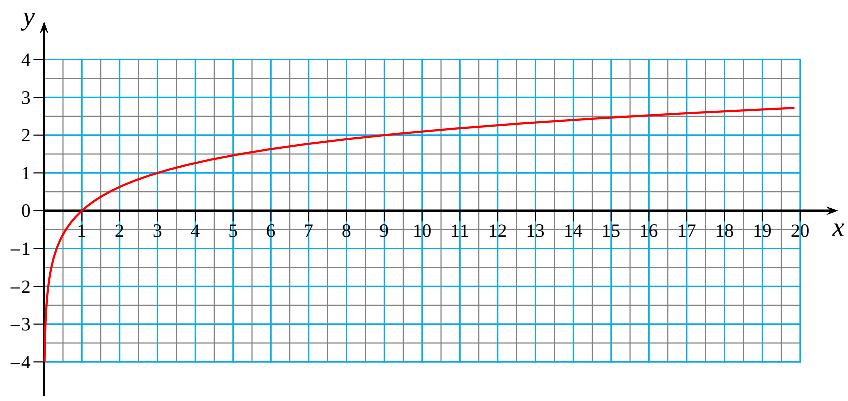
Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. (a) Skissa kurvan $y = \log_3(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

Man kan starta med en värdetabell för $x = 3^y$; den är lättare att sätta ihop än den för $y = \log_3(x)$:

y	-2	-1	0	1	2	3
x	$1/9$	$1/3$	1	3	9	27



Rättningsnorm: Kurvan måste passera $(1, 0)$ och $(3, 1)$ och ha ungefär rätt form för poäng.

(b) Bestäm $2\cdot\log_3(81) - 3\cdot\log_3(27)$ (2p)

Lösning:

Detta är förra årets rekommenderade uppgift 3.18(e) ur *Mot bättre vetande* (fast med parenteser och gångertecken utskrivna). Uppgiften kan lösas på ett par olika sätt.

Med observans:

$$2\cdot\log_3(81) - 3\cdot\log_3(27) = 2\cdot\log_3(3^4) - 3\cdot\log_3(3^3) = 2\cdot4 - 3\cdot3 = 8 - 9 = -1$$

Utan observans:

$$2\cdot\log_3(81) - 3\cdot\log_3(27) = \log_3(81^2) - \log_3(27^3) = \log_3(6561) - \log_3(19683)$$
$$= \log_3\left(\frac{6561}{19683}\right) = \log_3\left(\frac{\cancel{6561}}{3\cdot\cancel{6561}}\right) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3(3^{-1}) = -1$$

(Relativt troligt är väl att man kör fast i höjd med bråkförkortningen.)

Och så finns det ett stort antal hybridvarianter!

Svar: -1

Rättningsnorm: Kommit till svar: 2p. Gjort något icketrivialt och inget katastrofalt: 1p.

2. Är följande implikationer sanna eller falska? (Motivering behövs ej.)

(a) $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta$ (1p)

(b) $\ln(a) = \ln(b) \quad \Rightarrow \quad a = b$ (1p)

(c) $|a| = |b| \quad \Rightarrow \quad a = b$ (1p)

Lösning:

Vi motiverar ändå. En implikation är falsk om det är möjligt att göra förledet sant samtidigt som efterledet är falskt.

(a) $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{3\cdot\pi}{2})$, men $\frac{\pi}{2}(\approx 1{,}57) \neq \frac{3\cdot\pi}{2}(\approx 4{,}71)$, så FALSKT

(b) ln-kurvan lutar uppåt, så om $a > b$ så är $\ln(a) > \ln(b)$ och tvärtom. Så om logaritmerna är lika måste talen som man tog logaritmerna av också ha varit det. SANT

(c) $|-2| = |2|$, men $-2 \neq 2$, så FALSKT.

Rättningsnorm: Kan bara blir rätt eller fel. Svar som det inte framgår vilken uppgift de hör till får 0p.

3. I en rätvinklig triangel har en av vinklarna sinusvärdet $8/17$ och den närliggande kateten har längden 30 cm. Bestäm längderna på triangelns övriga sidor.

(Om du inte kan ta fram det exakta svaret så ger ett ungefärligt svar delpoäng.) (3p)

Lösning:

Detta var tänkt som tentans kluriga uppgift, eftersom den fordrar att man kombinerar ett antal saker.

Omräkning: Eftersom vi har information om den närliggande kateten hade det varit bra med *cosinusvärdet* istället för sinusvärdet. Med hjälp av trigonometriska ettan kan vi räkna om:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
$$\begin{aligned}
\cos^2(\alpha) &= \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} \\
&= \pm\sqrt{1 - (\tfrac{8}{17})^2} \\
&= \pm\sqrt{\frac{289 - 64}{289}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{225}{289}} \\
&= \pm\frac{15}{17}
\end{aligned}$$

Vinklar i rätvinkliga trianglar ligger mellan 0° och 90°, och har positiva cosinusvärden. Sambandet mellan närliggande katet och hypotenusa ger nu

$$\frac{15}{17} = \frac{30}{\text{hypotenusan}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{hypotenusan} = \frac{30}{15/17} = 34$$

Då är motstående katet

$$\frac{8}{17} = \frac{\text{motstående}}{34} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{motstående} = \frac{8 \cdot 34}{17} = 16$$

Ekvationssystem: Om vi kallar den motstående kateten för a och hypotenusan för c (och den närliggande kateten för b) så vet vi följande:

$$a^2 + 30^2 = c^2 \qquad \text{och} \qquad \frac{a}{c} = \frac{8}{17}$$

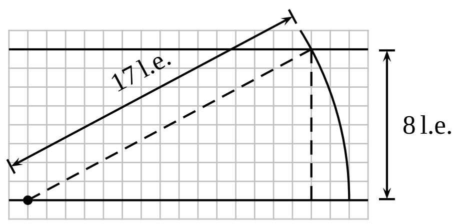
Det andra sambandet ger att $a = \frac{8}{17} \cdot c$, vilket insatt i det första ger

$$(\frac{8}{17} \cdot c)^2 + 30^2 = c^2$$
$$\frac{8^2}{17^2} \cdot c^2 + 30^2 = c^2$$
$$900 = c^2 - \frac{64}{289} \cdot c^2$$
$$900 = \frac{225}{289} \cdot c^2$$
$$c^2 = \frac{289 \cdot 900}{225}$$
$$c = \pm\sqrt{\frac{289 \cdot 900}{225}} = \pm\frac{17 \cdot 30}{15} = \pm 34$$

Det negativa alternativet kan slängas. Detta insatt ger

$$a = \frac{8}{17} \cdot 34 = 16$$

Grafisk lösning: Med hjälp av passare (eller i nödfall: en bit papper som man markerat längden på) kan man konstruera triangeln (förslagsvis i 50 % skala, så att den ryms på pappret). Sinusvärdet kan fås fram som ”motstående delat med hypotenusan”. Rita två parallella linjer, den ena 8 l.e. över den andra. Ställ in passaren på 71 l.e. och slå en båge från ena linjen till den andra:



Passarspetsens läge på den undre linjen får vara spetsen i triangeln, den punkt där bågen skär den övre linjen är ett annat hörn, och går vi rakt ner så har vi en rätvinklig triangel med korrekt sinusvärde. Den närliggande kateten visar sig ha en längd på ungefär 15 l.e., vilket var precis hälften av vad som efterfrågades. I så fall är längden på de andra sidorna också hälften av det efterfrågade, och det är bara att fördubbla dem. Man kan kontrollera avläsningen genom att se efter att de avlästa måtten passar in i Pythagoras sats. (Eftersom $15^2 + 8^2 = 17^2$ kan man efter denna kontroll vara säker på att man har de exakta måtten.)

Approximativ lösning:

$$\frac{8}{17} \approx \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = \sin(30°)$$

så spetsvinkeln är *ungefär* 30°. Då är sambandet mellan hypotenusan c och närliggande katet

$$\cos(30^\circ) \approx \frac{30}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c \approx \frac{30}{\sqrt{3}/2} = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60\cdot\sqrt{3}}{3} = 20\cdot\sqrt{3} \approx 20\cdot 1{,}7 = 34\,\text{cm}$$

Motstående katet a blir då

$$a \approx 34\cdot\sin(30^\circ) = 34\cdot\frac{1}{2} = 17\,\text{cm}$$

(Approximationen kan göras på många andra sätt.)

Svar: Den motstående kateten har längden 16 cm och hypotenusan har längden 34 cm

Kommentar: Sinussatsen och cosinussatsen är lämpliga om man har en triangel *utan* rät vinkel. I det här fallet är de onödigt komplicerade.

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Gjort någonting som är början på en fungerande lösning: 1p. Mellanting: 2p.

4. Vi har de två komplexa talen $z = -4$ och $w = 6\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\cdot\pi}{3}))$.

(a) Skriv z på polär form. (2p)

Lösning:

Negativt reellt tal. Ligger 4 enheter till vänster om origo, och man måste gå ett halvt varv från positiva realaxeln för att komma dit:

$$z = 4\cdot(\cos(\pi) + i\,\sin(\pi))$$

Rättningsnorm: Belopp: 1p. Argument: 1p.

(b) Skriv w på rektangulär form. (1p)

Lösning:

Bara att räkna ut:

$$6\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\cdot\pi}{3})) = 6\cdot(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = -3 + 3\cdot\sqrt{3}\,i$$

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(c) Beräkna z/w. Det går bra att svara både på rektangulär och på polär form, men svaret ska vara maximalt förenklat. (2p)

Lösning:

Även beräkningen går bra att göra på endra formen.

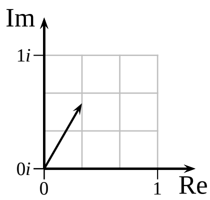
Polärt:

$$\frac{z}{w} = \frac{4\cdot(\cos(\pi) + i\,\sin(\pi))}{6\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i\,\sin(\frac{2\cdot\pi}{3}))} = \frac{4}{6}\cdot(\cos(\pi - \tfrac{2\cdot\pi}{3}) + i\,\sin(\pi - \tfrac{2\cdot\pi}{3})) = \frac{2}{3}\cdot(\cos(\tfrac{\pi}{3}) + i\,\sin(\tfrac{\pi}{3}))$$

Rektangulärt:

$$\frac{z}{w} = \frac{-4}{-3+3\cdot\sqrt{3}\,i} = \frac{-4\cdot(-3-3\cdot\sqrt{3}\,i)}{(-3+3\cdot\sqrt{3}\,i)\cdot(-3-3\cdot\sqrt{3}\,i)} = \frac{12+12\sqrt{3}\,i}{(-3)^2-(3\cdot\sqrt{3})^2\,i^2}$$
$$= \frac{12+12\sqrt{3}\,i}{9+27} = \frac{12\cdot(1+\sqrt{3}\,i)}{12\cdot 3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\,i$$

Anmärkning: Om man vill kolla att dessa svar representerar samma tal kan man markera dem i ett komplext talplan:



Rättningsnorm: Inget avdrag för följdfel från föregående uppgifter. Helt korrekt: 2p. Till största delen korrekt: 1p.

Beräkning eller motivering krävs!

5. **(a)** Lös ekvationen $|1 + x| + 2 \cdot |3 - x| = 4$ (3p)

(b) Lös olikheten $|1 + x| + 2 \cdot |3 - x| > 4$ (2p)

Lösning:

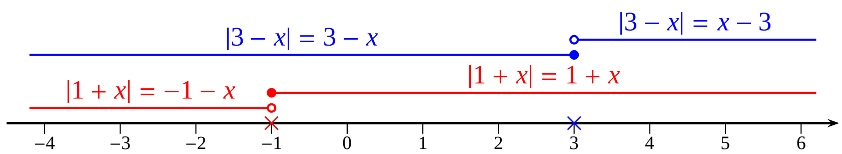
Vi tar båda uppgifterna ihop.

Analys av vänsterledet: Vi tittar först på beloppen var för sig:

$$|1 + x| = \begin{cases} 1 + x & \text{om } 1 + x \geq 0 \\ -(1 + x) & \text{om } 1 + x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 + x & \text{om } x \geq -1 \\ -1 - x & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

$$|3 - x| = \begin{cases} 3 - x & \text{om } 3 - x \geq 0 \\ -(3 - x) & \text{om } 3 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 - x & \text{om } 3 \geq x \\ x - 3 & \text{om } 3 < x \end{cases}$$

Två brytpunkter delar tallinjen i tre delar, med olika kombinationer av formler på de olika delarna:

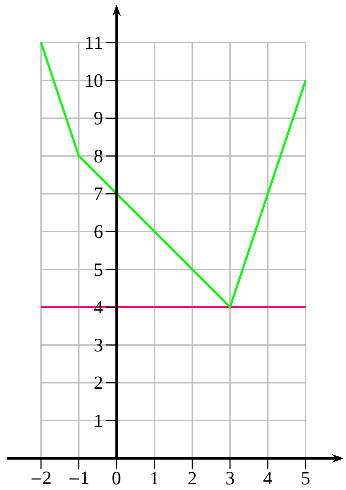


Sammantaget ger detta

$$|1 + x| + 2 \cdot |3 - x| = \begin{cases} (1 + x) + 2 \cdot (x - 3) & \text{om } x > 3 \\ (1 + x) + 2 \cdot (3 - x) & \text{om } -1 \leq x \leq 3 \\ (-1 - x) + 2 \cdot (3 - x) & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 \cdot x - 5 & \text{om } x > 3 \\ -x + 7 & \text{om } -1 \leq x \leq 3 \\ 5 - 3 \cdot x & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

Grafisk fortsättning: $y = |1 + x| + 2 \cdot |3 - x|$ är sammanfogad av tre linjestycken. Dessa inritade i ett koordinatsystem ihop med linjen $y = 4$ ger



(Om man är medveten om att oavsett hur tecknen slår så kommer kombinationerna av formlerna motsvara räta linjestycken så kan man hoppa över hela räknearbetet och bara räkna ut några styrpunkter att rita efter.)

Kurvorna sammanfaller i en enda punkt, $x = 3$, som är ekvationens enda lösning. Olikheten motsvarar frågan ”var ligger beloppskurvan *ovanför* linjen?”, vilket är överallt utom i just denna punkt.

Analytisk fortsättning: Vi får separaträkna på de tre versionerna av formeln:

$\boxed{x < -1}$	$\boxed{-1 \leq x \leq 3}$	$\boxed{x > 3}$
$5 - 3 \cdot x = 4$	$-x + 7 = 4$	$3 \cdot x - 5 = 4$
$1 = 3 \cdot x$	$3 = x$	$3 \cdot x = 9$
$x = 1/3$	$-1 \leq 3 \leq 3$	$x = 3$
$1/3 \not< -1$	Behåll!	$3 \not> 3$
Kasta!		Tja...

Det sista lösningsförslaget ligger visserligen inte i det angivna intervallet, men eftersom det fungerade i intervallet intill så ska det ändå inte kastas, därav ”Tja”.

Olikheten – tankelösning: Absolutbeloppskurvan och högerledskurvan har bara en punkt gemensam, ekvationens lösning $x = 3$. I så fall så måste kurvorna antingen skära varandra eller (mer ovanligt) tangera varandra. Hur som helst kan man se vad som händer genom att jämföra värdena i någon lättäknad punkt till vänster respektive höger om den gemensamma punkten. Undersök:

$$x = 0 : \begin{cases} \text{VL} = |1 + 0| + 2 \cdot |3 - 0| = |1| + 2 \cdot |3| = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ \text{HL} = 4 \end{cases}$$

$$x = 5 : \begin{cases} \text{VL} = |1 + 5| + 2 \cdot |3 - 5| = |6| + 2 \cdot |-2| = 6 + 2 \cdot 2 = 10 \\ \text{HL} = 4 \end{cases}$$

(Det hade gått lika bra med andra punkter, bara en är till vänster och en till höger.) Både till vänster och till höger har absolutbeloppsuttrycket högst värde, så den gemensamma punkten var en tangeringspunkt och beloppet har högst värde i alla andra punkter.

Olikheten – beräkning:

$\boxed{x < -1}$	$\boxed{-1 \leq x \leq 3}$	$\boxed{x > 3}$
$5 - 3 \cdot x > 4$	$-x + 7 > 4$	$3 \cdot x - 5 > 4$
$1 > 3 \cdot x$	$3 > x$	$3 \cdot x > 9$
$x < 1/3$		$x > 3$

Så av talen mindre än -1 kan vi använda alla som är mindre än $1/3$, vilket är allihop. Av talen mellan -1 och 3 kan vi använda alla som är mindre än 3 (vill säga alla utom just 3). Av talen som är större än 3 kan vi använda alla som är större än 3, vilket är allihop. Allt utom 3 kan användas.

Svar: (a) $x = 3$ (b) $x \neq 3$

Rättningsnorm: Helt rätt: 5p. Annars poäng efter hur stor andel av en korrekt lösning man åstadkommit. 0p om man struntat i beloppen.

6. Hitta de lösningar till ekvationen $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ som ligger i intervallet $[0,\ 2{\cdot}\pi]$. (5p)

Lösning:

Själva ekvationen är årets rekommenderade uppgift 12.52(a) ur *Grundlig matematik*. Bivillkoret är ett tillägg.

Beräkningslösning: Lös ekvationen fullständigt, och sortera sedan ut de av lösningarna som ligger i det givna intervallet:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Sätt } x + \frac{\pi}{4} = t$$

$$t = \frac{\pi}{4} + n{\cdot}2{\cdot}\pi \ \vee \qquad t = \frac{3{\cdot}\pi}{4} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n{\cdot}2{\cdot}\pi \qquad x + \frac{\pi}{4} = \frac{3{\cdot}\pi}{4} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

$$x = n{\cdot}2{\cdot}\pi \qquad x = \frac{\pi}{2} + n{\cdot}2{\cdot}\pi$$

Nu får vi bestämma n, vilket fordrar separaträkning på de två fallen:

$$0 \le n{\cdot}2{\cdot}\pi \le 2{\cdot}\pi$$

$$0 \le n \le 1$$

I detta intervall finns heltalen $n = 0$ och $n = 1$, som motsvarar lösningarna $x = 0{\cdot}2{\cdot}\pi = 0$ respektive $x = 1{\cdot}2{\cdot}\pi = 2{\cdot}\pi$.

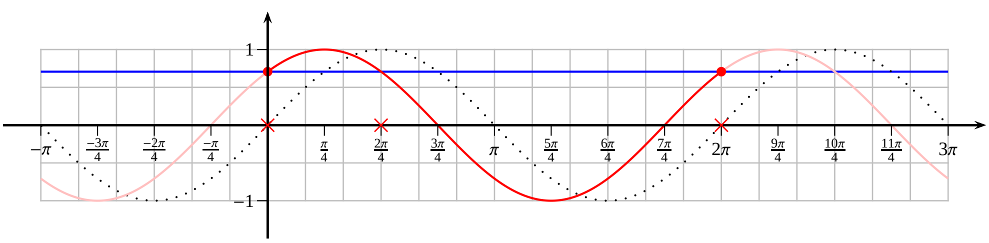
$$0 \le \frac{\pi}{2} + n{\cdot}2{\cdot}\pi \le 2{\cdot}\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \le n{\cdot}2{\cdot}\pi \le \frac{3{\cdot}\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \le n \le \frac{3}{4}$$

Det enda heltalet i detta intervall är $n = 0$, vilket ger lösningen $x = \frac{\pi}{2} + 0{\cdot}2{\cdot}\pi = \frac{\pi}{2}$.

Grafisk lösning: Kurvan $y = \sin(x)$ vet vi ´hur den ser ut. Kurvan $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ blir samma kurva flyttat $\frac{\pi}{4}$ steg bakåt. Vi är intresserade av den del av kurvan som ligger mellan 0 och $2{\cdot}\pi$.



Av bilden att döma har vi lösningar i $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ och $x = 2{\cdot}\pi$, vilket kan verifieras i ekvationen.

Rättningsnorm: Ekvationen: 3p; de relevanta lösningarna: 2p. Högst 1p totalt om man inte haft med $+n2\pi$.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2018.01.10 14.~~40~~30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. Vi har de komplexa talen $z = -6 + 10\,i$ och $w = 2{,}5 + 1{,}5\,i$. Beräkna

(a) $z \cdot w$ (1p)

Lösning:
Bara att räkna:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (-6+10\,i)\cdot(2{,}5+1{,}5\,i) = -6\cdot 2{,}5 + (-6)\cdot 1{,}5\,i + 10\,i\cdot 2{,}5 + 10\,i\cdot 1{,}5\,i \\ &= -15 - 9\,i + 25\,i + 15\,i^2 = (-15-15) + (-9+25)\,i = -30 + 16\,i \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt för poäng.

(b) z/w (2p)

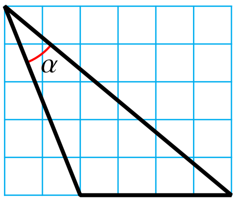
Lösning:
Förläng med nämnarens konjugat, är standardtricket. Här kan man dessutom förenkla beräkningarna genom att börja med att förlänga med 2, eftersom man då blir av med decimalerna i nämnaren. Heltal är lättare att räkna med än tal med decimaler.

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{(-6+10\,i)\cdot 2}{(2{,}5+1{,}5\,i)\cdot 2} = \frac{(-12+20\,i)\cdot(5-3\,i)}{(5+3\,i)\cdot(5-3\,i)} \\ &= \frac{-12\cdot 5 + (-12)\cdot(-3\,i) + 20\,i\cdot 5 + 20\,i\cdot(-3\,i)}{5^2-(3\,i)^2} = \frac{-60+36\,i+100\,i-60\,i^2}{25-9\,i^2} \\ &= \frac{(-60+60)+(36+100)\,i}{25+9} = \frac{136\,i}{34} = \frac{4\cdot\cancel{34}\,i}{\cancel{34}} = 4\,i \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Åtminstone rätt teknik: 1p. Om det har gjorts rena sifferräkningsfel men inte andra typer av fel på båda deluppgifterna så ges 2p totalt för uppgiften.

Svaren ska vara maximalt förenklade. Även ”slarvfel” räknas som fel.

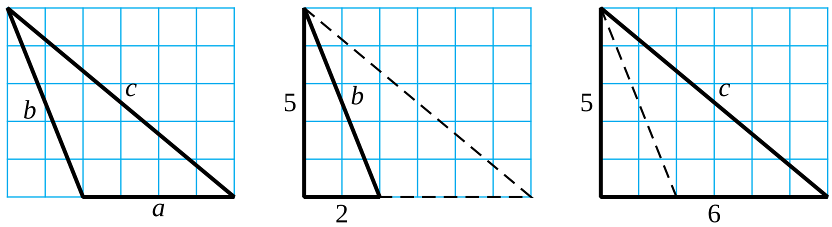
2. Bestäm cosinusvärdet för vinkeln α i triangeln nedan. (Svaret är inte så snyggt, men det går att räkna ut.)



Om du inte kan bestämma värdet exakt så ger en god approximation delpoäng. (3p)

Lösning:

Beräkning av sidlängder: För att hitta ett cosinusvärde verkar cosinussatsen lämpad. För att kunna tillämpa den behöver vi sidlängderna i triangeln. Vi kan lämpligen räkna i måttenheten "rutor". Vi döper sidorna till a, b och c. Sidan a är 4 rutor lång. Längden på de andra sidorna kan räknas ut med Pythagoras sats:



Detta ger (ty sidlängder är positiva):

$$b = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \quad (\approx 5{,}4\,\text{rutor}) \qquad c = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61} \quad (\approx 7{,}8\,\text{rutor})$$

Cosinussatsen (exakt): Cosinussatsen ger:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \qquad \Leftrightarrow \qquad \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Insatta värden ger nu

$$\cos(\alpha) = \frac{29 + 61 - 4^2}{2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = \frac{74}{2 \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{61}} = \boxed{\frac{37}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{61}}} \quad (\approx 0{,}88)$$

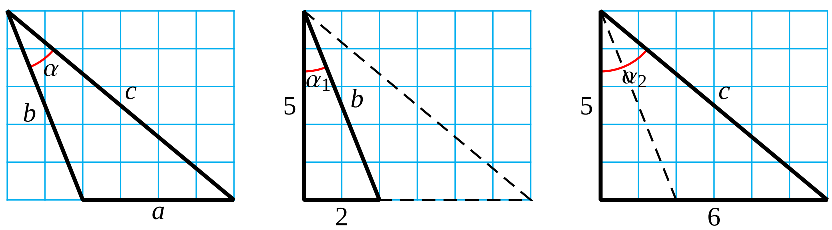
Cosinussatsen (approximativ): Vi mäter av sidorna med en linjal (eventuellt tillverkad av en remsa papper och måttsatt med hjälp av rutnätet):

$$a = 2\,\text{cm} = 4\,\text{rutor} \qquad b \approx 2{,}7\,\text{cm} = 5{,}4\,\text{rutor} \qquad c \approx 3{,}9\,\text{cm} = 7{,}8\,\text{rutor}$$

Resultaten sätts in i cosinussatsen.

(Ett förvånansvärt stort antal skrivande hävdade att sidan b hade längden 5 rutor och sidan c längden 6 rutor. De som kom fram till detta uppmanas att repetera vad ordet "längd" betyder och hur man använder en linjal.)

Rätvinkliga trianglar: Om vi glömt cosinussatsen men vet hur man hanterar rätvinkliga trianglar beräkna de trigonometriska värdena i de två rätvinkliga trianglarna:



$$\cos(\alpha_1) = \frac{5}{\sqrt{29}} \quad \sin(\alpha_1) = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad \cos(\alpha_2) = \frac{5}{\sqrt{61}} \quad \sin(\alpha_1) = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

Subtraktionsformeln för cosinus ger då

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos(\alpha_2)\cdot\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_2)\cdot\sin(\alpha_1)$$
$$= \frac{5}{\sqrt{61}}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{6}{\sqrt{61}}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{37}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{29}}$$

Sinussatsen (idé från en tentand): Sinusvärdet för vinkeln β (motstående till sidan b) går att ta fram ur den större rätvinkliga triangeln:

$$\sin(\beta) = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Sinussatsen ger

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(\alpha) = \frac{a\cdot\sin(\beta)}{b}$$

vilket med insatta värden ger

$$\sin(\alpha) = \frac{4\cdot 5/\sqrt{61}}{\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}}$$

Trigonometriska ettan ger

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{20}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{61}}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{1369}{29\cdot 61}} = \pm\frac{37}{\sqrt{29\cdot 61}}$$

Eftersom vinkeln α är spetsig är det det positiva svaret som är korrekt.

Enhetscirkel: En annan approximation kan göras genom att man slår en cirkel med radien 1 från triangelns spets och läser av cosinusvärdet. Blir mer exakt om man ritar av triangeln i större skala på skrivningspappret. Man kan också lägga in triangeln i enhetscirkeln som hör till nästa uppgift. Har man gradskiva kan man mäta vinkeln och också då utnyttja enhetscirkeln. $\alpha \approx 28°$, och ur det ser man att $\cos(\alpha) \approx 0{,}88$.

Rättningsnorm: Exakt svar: 3p. God approximation: 2p. Halvdan approximation: 1p. Goda idéer som inte räcker hela vägen: 1–2p.

3. Bestäm följande tal. Om du inte kan bestämma ett tal exakt så ange ett intervall som det ligger i.

(a) $\log_5(625)$ (1p)

(b) $\log_{1/3}(27)$ (1p)

(c) $\log_2(1000)$ (1p)

Lösning:

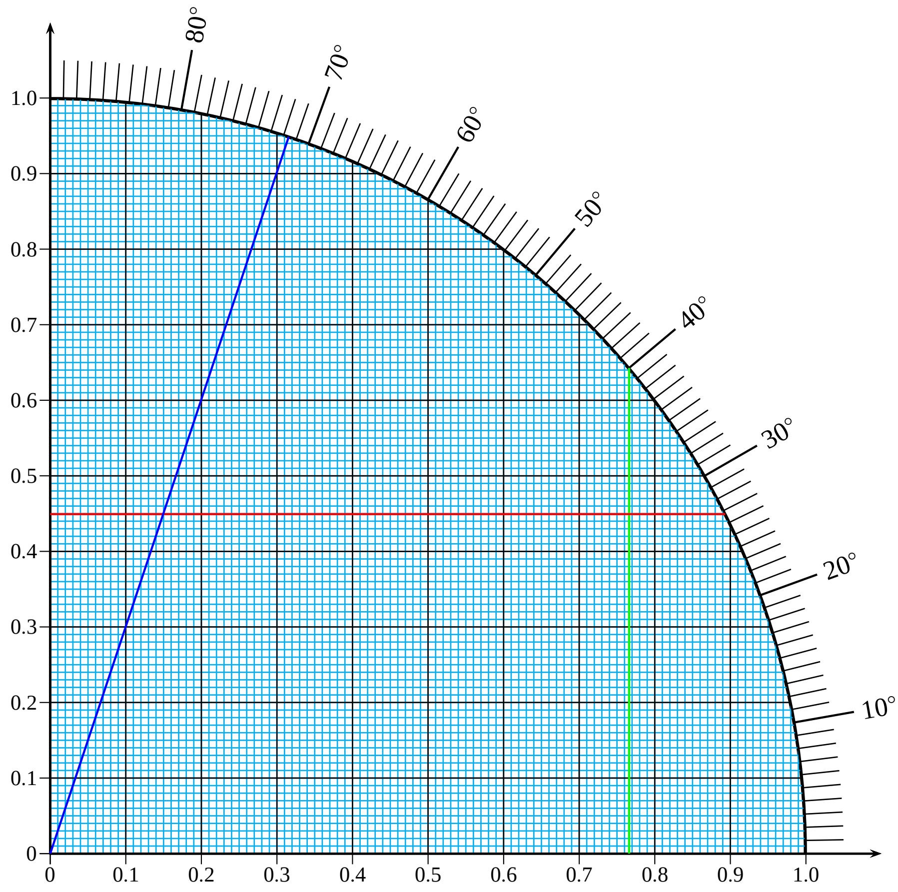
Detta är en delmängd av årets rekommenderade uppgift 11.7 ur *Grundlig matematik*.

(a) $625 = 25^2 = 5^4$, så $\log_5(625) = \boxed{4}$

(b) $27 = 3^3 = (3^{-1})^{-3} = (1/3)^{-3}$, så $\log_{1/3}(27) = \boxed{-3}$

(c) $2^9 = 512 < 1000$, $2^{10} = 1024 > 1000$, så $\boxed{9 < \log_2(1000) < 10}$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. Någon form av motivering fordras.



4. (a) Bestäm med bildens hjälp cos(40°) så noga du kan. (1p)

Lösning:

Läs av x värdet vid 40°-markeringen. Det verkar vara knappt $\boxed{0{,}77}$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) En vinkel β mellan 90° och 180° har sinusvärdet 0,45. Bestäm med bildens hjälp vinkeln β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

β ska placera oss i 2:a kvadranten, som vi inte har i bild. Men genom att hitta motsvarande vinkel β_1 i 1:a kvadranten kan vi få β som $180° - \beta_1$. Vid ungefär 27° är y-koordinaten 0,45, så β är ungefär $180° - 27° = \boxed{153°}$.

Rättningsnorm: Helt rätt (med motivering): 2p. Hittat 27° men inte kommit vidare: 1p.

(c) En vinkel γ mellan 0° och 90° har tangensvärdet 3. Bestäm med bildens hjälp vinkeln γ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Rita en stråle från origo med lutning 3, vilket innebär att den ska gå 3 rutor upp för varje ruta framåt. Strålen landar mellan markeringarna för 71° och 72°; säg $\boxed{71{,}5°}$.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Bra idéer: 1p.

5. (a) Vad menas med <u>absolutbeloppet</u> av ett reellt tal x? (Vi är ute efter definitionen.) (1p)

Lösning:

Talet med eventuellt minus borttaget; talets avstånd från origo på tallinjen; roten ur talet i kvadrat; talet oförändrat om det inte är negativt, teckenbytt om det är negativt.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Vad menas med absolutbeloppet av ett komplext tal $z = a + bi$? (a och b är realdelen respektive imaginärdelen för z.) (1p)

Lösning:

Talets avstånd från origo i talplanet; $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(c) Ett reellt tal är ju ett komplext tal med imaginärdelen 0. Om man ska beräkna beloppet, blir det någon skillnad om man gör det med hjälp av definitionen i uppgift (a) eller med definitionen i uppgift (b)? Förklara! (1p)

Lösning:

Det blir ingen skillnad på svaret. Talet ligger på realaxeln, så avståndet till origo i talplanet motsvarar avståndet på tallinjen. Vill man räkna ut beloppet får man $|a + 0\,i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$, vilket var en av versionerna för reella tal.

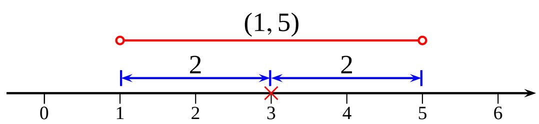
Rättningsnorm: ”Nej” kombinerat med något som kan tolkas som en motivering ger 1p.

(d) Lös olikheten $|x - 3| < 2$. (x är ett reellt tal.) (2p)

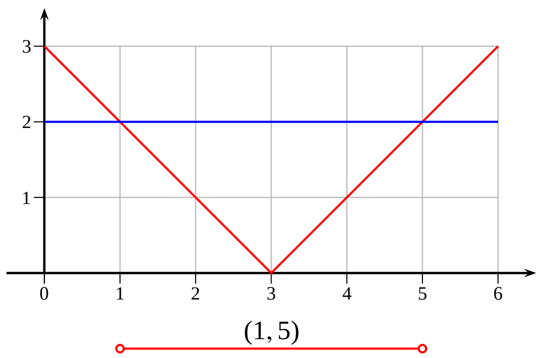
Lösning:

Förra läsårets rekommenderade uppgift 2.20(b) ur *Mot bättre vetande*.

Geometrisk lösning: Olikheten kan tolkas som ”avståndet mellan x och 3 ska vara mindre än 2 längdenheter”, vilket är lätt att markera på tallinjen:



Grafisk lösning: $y = |x - 3|$ ser ut som den V-formade kurvan $y = |x|$ flyttad 3 steg åt höger. $y = 2$ är en horisonell linje.



”Mindre än” betyder i vertikalled ”ligger nedanför”, vilket beloppskurvan gör i det markerade området.

Algebraisk lösning: Absolutbeloppets definition ger

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{om } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{om } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{om } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{om } x < 3 \end{cases}$$

Detta ger oss två fall att räkna på:

$\boxed{x < 3}$

$$-x + 3 < 2$$
$$-x < -1$$
$$x > 1 \quad \text{Teckenbyte: vänd olikheten!}$$

$\boxed{x \geq 3}$

$$x - 3 < 2$$
$$x < 5$$

Så av talen mindre än 3 kan vi använda de som är större än 1, vilket innebär intervallet $(1,\ 3)$. Och av talen från och med 3 kan vi använda de som är mindre än 5, vilket innebär intervallet $[3,\ 5)$. Skarvar vi ihop intervallen får vi $(1,\ 5)$.

Omskrivning till dubbel olikhet: Olikheten kan skrivas om till den dubbla olikheten

$$-2 < x-3 < 2 \quad\Leftrightarrow\quad -2+3 < x-3+3 < 2+3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 < x < 5$$

(Kom ihåg att man vid hantering av dubbla olikheter måste göra alla operationer i alla leden.)

$\boxed{\textit{Svar: } 1 < x < 5}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat förståelse för uppgiften men inte nått ända fram: 1p. Ignorerat beloppstecknen: 0p.

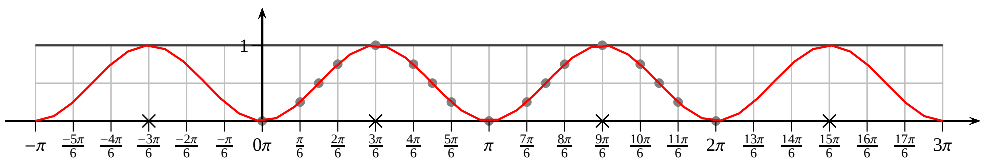
6. (a) Skissa kurvan $y = \sin^2(x)$ i ett graderat koordinatsystem. (2p)

Lösning:

Enklast är nog att utgå från en värdetabell för första perioden av sinusfunktionen. (Eftersom sinusvärdena upprepar sig så kommer alla resultat som baseras på dem också att göra det.) Tabellen får bli för de vinklar som vi känner till värdena för:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
$\sin^2(x)$	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1	$3/4$	$1/2$	$1/4$	0

Dessa värden verka enkla att pricka ut!



Om man råkar kunna dubbla-vinkeln-formlerna kan man också skriva om enligt

$$\cos(2\cdot x) = 1 - 2\cdot\sin^2(x) \qquad\Leftrightarrow\qquad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2\cdot x)}{2}$$

$y = \cos(2\cdot x)$ blir en cosinuskurva med halverad period (så att det är π enheter mellan topparna); $y = -\cos(2\cdot x)$ blir denna kurva upp-och-ner-vänd, så att det är en dal istället för en topp vid y-axeln; $y = 1-\cos(2\cdot x)$ blir denna kurva uppflyttad 1 steg (så att dalbottnarna tangerar x-axeln) och $y = (1-\cos(2\cdot x))/2$ blir denna kurva med halverad amplitud. Stämmer med bild!

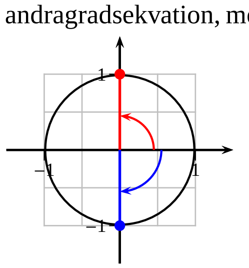
Rättningsnorm: Max och min på rätt ställen: 2p. Kommit en bit men inte ända fram: 1p.

(b) Lös ekvationen $\sin^2(x) = 1$ fullständigt. (Går att göra även om du inte löst a-uppgiften.) (3p)

Lösning:

Lösning helt från scratch: Till att börja med är detta en andragradsekvation, med två lösningar:

$$(\sin(x))^2 = 1$$
$$\sin(x) = \pm 1$$
$$\sin(x) = 1 \quad\vee\quad \sin(x) = -1$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n\cdot 2\cdot\pi \qquad x = -\frac{\pi}{2} + n\cdot 2\cdot\pi$$
$$n \in \mathbb{Z}$$



Detta blev de två undantagen bland sinusekvationerna som bara har en lösning per period.

Alternativt skriver man om med hjälp av trigonometriska ettan:

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= 1 \\
\sin^2(x) &= \sin^2(x) + \cos^2(x) \\
0 &= \cos^2(x) \\
\cos(x) &= 0 \\
x &= \pm\frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(Frågan är om det blev enklare för att man gjorde så här. Det var hur som helst ett stort antal tentander som var inne på det här spåret. Notera att vi här istället fick undantaget bland andragradsekvationerna: den som bara har en lösning.)

Om man gjort omskrivning med hjälp av dubbla vinkeln ser ekvationslösningen ut så här:

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= 1 \\
\frac{1 - \cos(2 \cdot x)}{2} &= 1 \\
1 - \cos(2 \cdot x) &= 2 \\
-\cos(2 \cdot x) &= 1 \\
\cos(2 \cdot x) &= -1 \\
2 \cdot x &= \pi + n \cdot 2 \cdot \pi \qquad n \in \mathbb{Z} \\
x &= \frac{\pi + n \cdot 2 \cdot \pi}{2}
\end{aligned}
$$

Notera att stegen i ekvationslösningen kommer i exakt motsatta ordningen mot stegen i resonemanget då man ritar kurvan baserad på den här formeln. Kurvritningen går från x-värde till y-värde; ekvationslösningen går från y-värde till x-värde. Notera också att vi här fick ett av undantagen bland cosinusekvationerna: en med bara en grundlösning.

Lösning inspirerad av värdetabellen: Det blev 1 i tabellen vid $x = \pi/2$ och $x = 3\pi/2$, så där har vi två lösningar. Det kan inte finnas fler lösningar på denna period, för man får bara 1 om sinusvärdet är 1 eller −1. Och sedan upprepar sig tabellen med en period om $2 \cdot \pi$.

Lösning ur bilden: Rita in linjen $y = 1$. Kurvan tangerar denna linje vid varje topp, och topparna verkar ligga på avståndet π från varandra, och den första positiva vid $x = \pi/2$.

$\boxed{\textit{Svar: } x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Ganska rätt: 2p. Inte helfel: 1p. (Detaljerna får fyllas i då vi ser hurdana lösningar vi fått in.)

Använd radianer i båda uppgifterna.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

Glädjande nog satt de flesta likhetstecken rätt den här gången. (Det är annars det mest populära systematiska felet.)

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Bedömningen här är ganska ”snäll”. Om någon missat poäng på en uppgift på grund av bristande motivering så är ju dessutom presentationen på den uppgiften otillräcklig. Men jag har tyckt att man inte ska bli ”dubbelbestraffad”, så här har jag mest tittat på sådant som inte poängpåverkat andra uppgifter. (Detta gäller för övrigt också notationen. Om felaktig notation lett till felaktigt resultat får det räcka med det; felaktig notation som inte påverkar resultatet kan ge tappad poäng på a.)

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2018.05.29 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. (a) Räkna om vinkeln 108° till radianer. Förenkla svaret maximalt. (1p)

Lösning:

$$\frac{108\cdot\pi}{180} = \frac{\cancel{36}\cdot 3\cdot\pi}{\cancel{36}\cdot 5} = \boxed{\frac{3\cdot\pi}{5}}$$

Om man har svårt att se hela förenklingen kan man ta det bitvis, och börja med att notera att båda heltalen är jämna:

$$\frac{108\cdot\pi}{180} = \frac{\cancel{2}\cdot 54\cdot\pi}{\cancel{2}\cdot 90} = \frac{\cancel{2}\cdot 27\cdot\pi}{\cancel{2}\cdot 45} = \frac{\cancel{9}\cdot 3\cdot\pi}{\cancel{9}\cdot 5\cdot\pi}$$

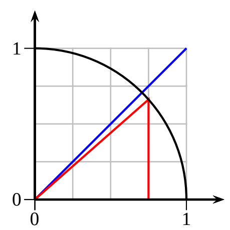
(När man är nere på nians tabell bör man inte ha fler problem.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) För vinkeln α gäller att $0° < \alpha < 90°$ och att $\cos(\alpha) = 0{,}75$. Är α större än 45° eller mindre än 45°? Motivera! (1p)

Lösning:

Då en vinkel ökar från 0° till 90° så minskar cosinusvärdena från 1 till 0. $\cos(45°) \approx 0{,}7$, så vi vet att $\cos(\alpha) > \cos(45°)$, vilket i detta område innebära att $\boxed{\alpha < 45°}$.



I figuren ovan är en linje som går i en vinkel med cosinusvärdet 0,75 markerad i rött, tillsammans med en linje i 45 graders vinkel i blått. Vi ser att den eftersökta vinkeln är något mindre än 45°. (Notera att man måste rita ganska noga. Jag har fått in ett antal bilder där 0,75 var utprickat på något som inte var tre fjärdedelar av avståndet mellan noll och ett. Då blir inte avläsningen korrekt.)

Rättningsnorm: Rätt svar med något som kan tolkas som en motivering ger poäng.

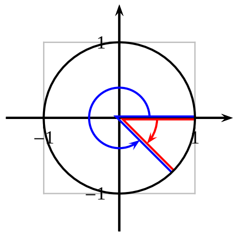
(c) Din kompis håller på med ett trigonometriskt problem, och skriver

$$-45^\circ = 315^\circ \qquad ☠$$

Förklara för din kompis varför det är fel att skriva så. (1p)

Lösning:

”-45° motsvarar *vrid något ett åttondels varv medurs*, som jag nu gör med det här dörrhantaget. 315° motsvarar *vrid något sju åttondels varv moturs*. Det kan jag inte göra med dörrhantaget (utan att ha sönder mekanismen), så uppenbarligen är det något annat än den första grejen. Och man sätter inte likhetstecken mellan olika saker! Vinklarna får oss att hamna på samma ställe på enhetscirkeln, så de har samma sinus-, cosinus- och tangensvärden, men de är olika vinklar!” (Kan formuleras på många andra sätt.)



Rättningsnorm: Allt som kan tolkas som ”de är inte lika” ger poäng.

Kommentar: Ett stort antal skrivande hävdade att man inte kan sätta minus på vinklar i grader. Men varför skulle man inte kunna det? Finns på ett antal exempel i boken!

2. Lös ekvationen $(\ln(x))^2 = \ln(x^2)$. (3p)

Lösning:

Förra läsårets rekommenderade uppgift 3.23(d) ur *Mot bättre vetande*.

Med logaritmregler och substitution: Det skulle vara till hjälp om man kunde separera ut $\ln(x)$ ut det hela, och det går att göra med en kombination av logaritmregler och substitution:

$$\begin{aligned}
(\ln(x))^2 &= \ln(x^2) && \\
(\ln(x))^2 &= 2\cdot\ln(x) && \text{logaritmregel} \\
t^2 &= 2\cdot t && \boxed{\text{SÄTT } \ln(x) = t} \\
t^2 - 2\cdot t &= 0 && \text{”flytta över”} \\
t\cdot(t-2) &= 0 && \text{faktorisera} \\
t = 0 \ &\vee\ t - 2 = 0 && \text{nollfaktorlagen} \\
\ln(x) = 0 \qquad & t = 2 && \text{Återsubstituera / ”flytta över”} \\
x = \mathrm{e}^0 \qquad & \ln(x) = 2 && \text{logaritm till potens / återsubstituera} \\
x = 1 \qquad & x = \mathrm{e}^2 && \text{förenkla / logaritm till potens}
\end{aligned}$$

Med hjälp av potenser: Man kan också försöka bli av med logaritmuttrycken genom att utnyttja att logaritmer och exponentialfunktioner är varandras inverser:

$$\begin{aligned}
(\ln(x))^2 &= \ln(x^2) \\
\mathrm{e}^{(\ln(x))^2} &= \mathrm{e}^{\ln(x^2)} \\
\mathrm{e}^{(\ln(x))\cdot(\ln(x))} &= x^2 \\
(\mathrm{e}^{\ln(x)})^{\ln(x)} &= x^2 \\
x^{\ln(x)} &= x^2
\end{aligned}$$

För att $\ln(x)$ ska vara definierad så fordras att $x > 0$. Om två potenser med samma positiva bas är lika så måste exponenterna vara lika – *utom* om basen är 1, för $1^{\text{vad som helst}} = 1$. Så det tycks finnas två möjliga lösningar här: antingen är $x = 1$, eller så är $\ln(x) = 2$. Det senare ger $x = e^2$.

Kontroll:

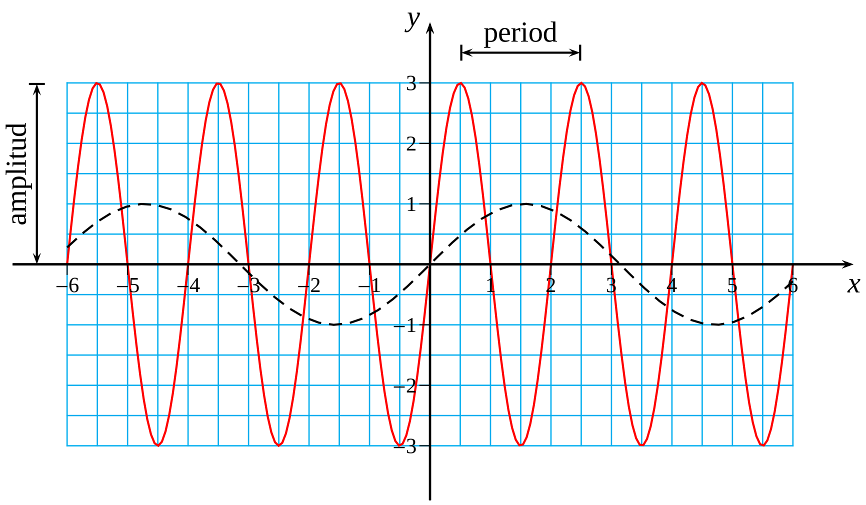
$$x = 1 : \begin{cases} \text{VL} = (\ln(1))^2 = 0^2 = 0 \\ \text{HL} = \ln(1^2) = \ln(1) = 0 \end{cases}$$

$$x = e^2 : \begin{cases} \text{VL} = (\ln(e^2))^2 = 2^2 = 4 \\ \text{HL} = \ln((e^2)^2) = \ln(e^4) = 4 \end{cases}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{1, e^2\}}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Gjort något konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p.

3. Här är kurvan $y = f(x)$.



Skriv upp en formel för funktionen f. Förklara också hur du resonerar för att få fram formeln. (3p)

Lösning:

Kurvan är vågig, så den är baserad på sinus eller cosinus. Den har ett nollställe vid $x = 0$, så det måste vara sinus (för cosinus har ett maximum där). Den vanliga sinuskurvan är inskissad i figuren.

Amplituden (våghöjden, mätt från mitten på kurvan) är 3, medan $y = \sin(x)$ har amplituden 1. Värdena är alltså multiplicerade med 3 *efter* beräkningen.

Perioden (våglängden, den sträcka det tar innan förloppet börjar om) är 2. $y = \sin(x)$ har perioden $2 \cdot \pi \approx 6{,}28$. Kurvan är alltså hopdragen med en faktor π horisontell, vilket motsvarar multiplikation med π *innan* beräkningen.

$\boxed{\textit{Svar: } f(x) = 3 \cdot \sin(\pi \cdot x)}$

(Det finns andra formler som också ger den här kurvan, men det här är nog den enklaste fungerande formeln.)

Rättningsnorm: Om det finns något som kan tolkas som motiveringar ger grundfunktion, period och amplitud 1p var.

4. **(a)** Lös ekvationen $|6 - x| = 2{\cdot}x + 3$. (3p)

(b) Rita en illustration till lösningen. Förklara också vad illustrationen föreställer. (2p)

Lösning:

Årets rekommenderade uppgift 10.15(b).

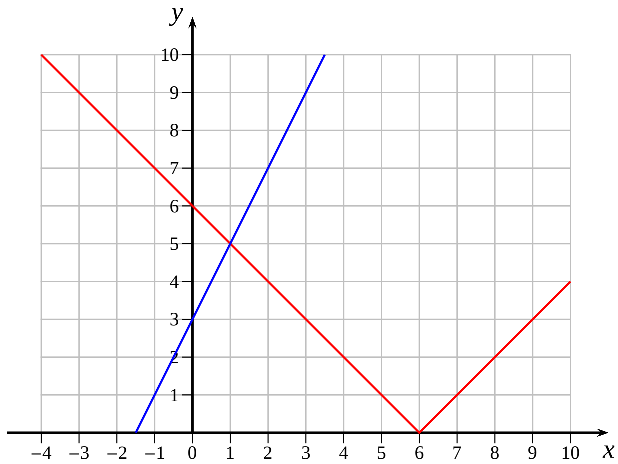
En användbar illustration till ett ekvationsproblem är kurvorna $y = \text{VL}$ och $y = \text{HL}$ inritade i samma koordinatsystem. Ekvationens lösningar motsvarar x-koordinaterna för kurvornas skärningspunkter.

Grafisk lösning: (På de flesta mateamtikkurser godtas inte rent grafiska lösningar, men i den här betraktas det att man förstår hur problem kan illustreras som så viktigt att det bör premieras.)

Eftersom beloppet av ett uttryck inte påverkas av om man teckenvänder uttrycket kan vänsterledet skrivas om enligt

$$\text{VL} = |6 - x| = |-(6 - x)| = |-6 + x| = |x - 6|$$

$y = |x - 6|$ är den vanliga absolutbeloppskurvan (ser ut som ett V) flyttad 6 steg åt höger. $y = 2{\cdot}x + 3$ är en rät linje som går 2 steg uppåt för varje steg framåt och som skär y-axeln på höjden 3. Rita detta i ett koordinatsystem:



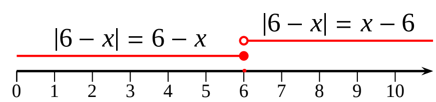
Det är uppenbart att det inte finns några skärningspunkter utanför bild, utan ekvationens enda lösning ges av skärningen vid $x = 1$.

Kontroll: För att bekräfta att skärningen ligger *exakt* vid $x = 1$ (och inte i t.ex. $x = 0{,}999$) sätter vi in värdet i ekvationen.

$$x = 1: \begin{cases} \text{VL} = |6 - 1| = |5| = 5 \\ \text{HL} = 2{\cdot}1 + 3 = 2 + 3 = 5 \end{cases} \quad \text{VL} = \text{HL} \quad \text{OK!}$$

Beräkningslösning: Med hjälp av absolutbeloppsfunktionens definition skriver vi om vänsterledet till en styckvis definierad funktion:

$$|6 - x| = \begin{cases} 6 - x & \text{om } 6 - x \geq 0 \\ -(6 - x) & \text{om } 6 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 6 - x & \text{om } 6 \geq x \\ x - 6 & \text{om } 6 < x \end{cases}$$



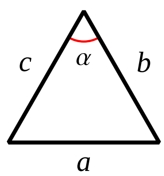
Vi får separaträkna på de två delarna av tallinjen:

$\boxed{6 \geq x}$	$\boxed{6 < x}$
$6 - x = 2{\cdot}x + 3$	$x - 6 = 2{\cdot}x + 3$
$3 = 3{\cdot}x$	$-9 = x$
$1 = x$	$6 \not< -9$
$6 \geq 1$	Kasta
Behåll	

$\boxed{\textit{Svar: } x = 1}$

Rättningsnorm: Inget försök att hantera beloppet: 0p. Annars: Kommenterad grafisk lösning: 5p. Beräkning: Omskrivning av belopp: 1p. Lösning av ekvationer: 1p. Bedömning av svar: 1p. Illustration: bild med någon form av koppling till problemet och förklarande text: 2p. Felritad bild som säger att den beräknade lösningen är inkorrekt men som är av en användbar typ ger 1p.

5. I bredvidstående triangel är längden på sidan a $\sqrt{17}$ cm, sida b 5 cm, och vinkeln α är 45°.



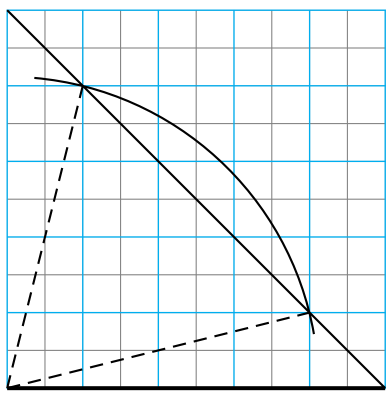
OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

(a) Bestäm längden på sidan c. (3p)

(b) Rita upp triangeln så exakt som möjligt. (Utnyttja rutnätet på pappret för mätning och kanten på skrivningsomslaget för att rita rakt om du inte har linjal med dig.) Detta går att göra även om man inte har löst (a)-uppgiften. (2p)

Lösning:

Grafiskt: Om man tar (b)-uppgiften först så noterar man att uppritningen blir enklare om man vrider triangeln så att sidan b, som har heltalslängd, placeras utmed rutnätet, och så att 45°-vinkeln lätt kan konstueras genom att man går över rutorna diagonalt. $\sqrt{17}$ måste vara lite mer än $\sqrt{16} = 4$, så säg $a \approx 4{,}1$ cm.



Det verkar finnas två möjliga lösningar, den ena ungefär en ruta fram och fyra rutor upp relativt ändan på sida a, och den andra fyra rutor fram och en ruta upp. Eftersom $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, vilket var den exakta längden på sidan a kan vi sluta oss till att detta är exakta värden. Då kan vi ta fram de två möjliga värdena på sidan c med Pythagoras sats. Det kortare alternativet är diagonal i en kvadrat med sidlängd 1 och det längre i en med sidlängd 4.

Cosinussatsen: Vi har två sidor och en vinkel, och söker längden på den tredje sidan. Cosinussatsen, som beskriver sambandet mellan en triangels tre sidor och en av dess vinklar, verkar lämplig.

Om man stoppar in de givna värdena i cosinussatsen kan man lösa ut längden på sidan c:

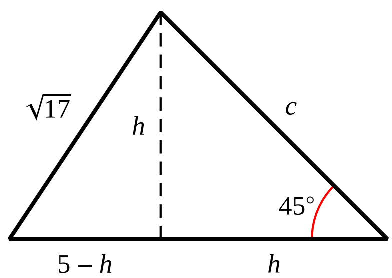
$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha) \\
(\sqrt{17})^2 &= 5^2 + c^2 - 2\cdot 5\cdot c\cdot \cos(45^\circ) \\
17 &= 25 + c^2 - \cancel{2}\cdot 5\cdot c\cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\
0 &= c^2 - 5\cdot\sqrt{2}\cdot c + 8 \\
0 &= c^2 - 2\cdot\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \\
0 &= \left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{25\cdot 2}{4} + \frac{8\cdot 4}{4} \\
0 &= \left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{18}{4} \\
0 &= \left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{9\cdot 2}{4}}\right)^2 \\
0 &= \left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
0 &= \left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(c - \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right) \\
0 &= (c - \sqrt{2})\cdot(c - 4\cdot\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Nollfaktorlagen ger

$\boxed{\textit{Svar: } c = \sqrt{2}\text{ cm eller } c = 4\cdot\sqrt{2}\text{ cm}}$

Sinussatsen: Sinussatsen, som beskriver sambandet mellan två vinklar och två sidor i en triangel, verkar inte lämpad för ändamålet. Men om man väldigt gärna vill använda den kan man ta fram sinusvärdet för vinkeln som står emot sidan b, sedan använda trigonometriska ettan för att få fram cosinusvärdet också, sedan använda vinkelsumman i triangeln och additionsformlerna för att få fram sinusvärdet för vinkeln som står emot sidan c, och så med detta och sinussatsen ta fram längden på sidan c. Detta verkar dock som en onödigt krånglig metod.

Rätvinkliga trianglar: Man kan dela upp triangeln i två rätvinkliga trianglar genom att dra en höjd. Man bör då inte dra höjden mot sidan a, eftersom man då delar den kända vinkeln i två okända delar, utan ta t.ex. sidan b som bas.



Högra deltriangeln är en halv kvadrat (eftersom den är rätvinklig med en 45°-vinkel), så kateterna är lika långa. Pythagoras sats i vänstra deltriangeln ger

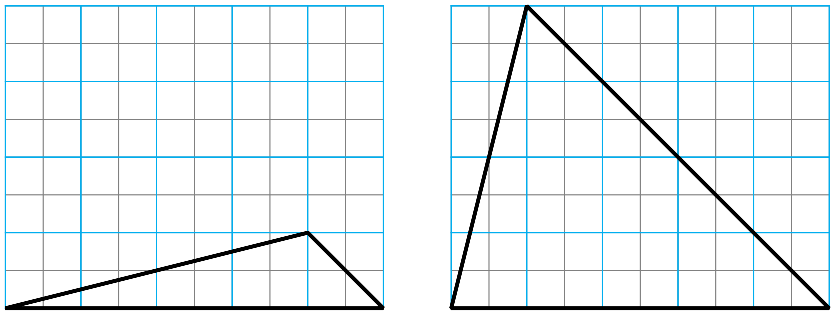
$$\begin{aligned}
h^2 + (5-h)^2 &= \sqrt{17}^2 \\
h^2 + 25 - 10\cdot h + h^2 &= 17 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$h = 2{,}5 \pm 1{,}5 = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

Sidan c, som är hypotenusa i den högra deltriangeln, är $\sqrt{2}$ gårger längre än kateterna, vilket ger

$\boxed{\textit{Svar: } c = 4 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm eller } c = \sqrt{2}\,\text{cm}}$

Uppritning efter beräkning: Samma betraktelser som i den grafiska uppritningen ger att det är bättre att vrida triangeln. $\sqrt{2}$ cm är längden diagonalt över en ruta med sidlängd 1 cm, vilket gör det hela lätt att rita upp.



Kommer man inte att tänka på att vrida triangeln samtidigt som man saknar gradskiva så är det enkelt att åstadkomma en 45°-vinkel genom att vika hörnet på ett skrivpapper. Därför fordras att vinkeln faktiskt är korrekt för full poäng.

Rättningsnorm: Grafisk lösning med kommentarer, exakt svar och båda lösningarna framtagna: 5p. Beräkning: Korrekt cosinussats: 1p. Resten: 2p. Uppritning: Inkorrekt triangel med korrekta mått utsatta: 0p. Halvkorrekt triangel: 1p.

Kommentar: (b)-uppgiften är inspirerad av det förvånansvärda antal felritade trianglar jag fått in på inlämningsuppgifterna.

6. Vi har talet $z = -1 + \sqrt{3}\,i$.

(a) Beräkna $\frac{1}{z}$. (2p)

(b) Beräkna z^3. (3p)

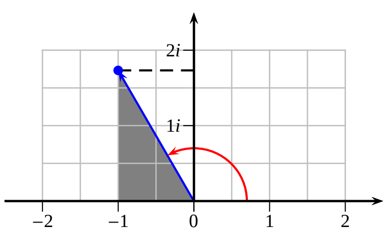
Svaret kan ges på valfri form.

Lösning:

Både division och potensberäkning är enklare att göra på polär form, men det fordrar att man räknar om till polär form.

Omräkning: Markerar man talet i ett komplext talplan (utgående från att $\sqrt{3} \approx 1{,}7$) ser argumentet ut att vara $\frac{2\cdot\pi}{3}$ (120°), och beloppet är

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$



Måtten i den skuggade triangeln visar att den är en halv liksidig triangel, så den med ögonmått uppskattade vinkeln är verkligen exakt det som lästes av. z kan då skrivas på polär form som $z = 2\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(\frac{2\cdot\pi}{3}))$.

(a) *På rektangulär form:* Standardtaktik: förläng med nämnarens komplexa konjugat:

$$\frac{1}{z} = \frac{1\cdot(-1-\sqrt{3}\,i)}{(-1+\sqrt{3}\,i)\cdot(-1-\sqrt{3}\,)} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{(-1)^2-(\sqrt{3}\,i)^2} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{1+3} = \boxed{-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\,i}$$

På polär form: Man kan se det som en potensberäkning:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = (2\cdot(\cos(\tfrac{2\cdot\pi}{2}) + i\ \sin(\tfrac{2\cdot\pi}{2})))^{-1}$$
$$= 2^{-1}\cdot(\cos(-1\cdot\tfrac{2\cdot\pi}{2}) + i\ \sin(-1\cdot\tfrac{2\cdot\pi}{2})) = \boxed{\tfrac{1}{2}\cdot(\cos(-\tfrac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(-\tfrac{2\cdot\pi}{3}))}$$

eller så skriver man om täljaren till polärform, enligt

$$1 = 1\cdot(1 + 0\,i) = 1\cdot(\cos(0) + i\ \sin(0))$$

vilket ger

$$\frac{1}{z} = \frac{1\cdot(\cos(0) + i\ \sin(0))}{2\cdot(\cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(\frac{2\cdot\pi}{3}))} = \tfrac{1}{2}\cdot(\cos(0-\tfrac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(0-\tfrac{2\cdot\pi}{3}))$$

vilket är samma svar som nyss.

Rättningsnorm: Rektangulär form: Helt rätt: 2p. Rätt metod men räknefel: 1p. Polär form: i viss mån sambedömning med (b)-uppgiften.

(b) *På rektangulär form:* Om man inte memorerat kuberingsregeln $(a+b)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$ så kan bryta isär potensen till multiplikation:

$$\begin{aligned}
z^3 &= z\cdot z^2\\
&= (-1+\sqrt{3}\,i)\cdot(-1+\sqrt{3}\,i)^2\\
&= (-1+\sqrt{3}\,i)\cdot((-1)^2+2\cdot(-1)\cdot\sqrt{3}\,i+(\sqrt{3}\,i))\\
&= (-1+\sqrt{3}\,i)\cdot(1-2\cdot\sqrt{3}\,i-3)\\
&= (-1+\sqrt{3}\,i)\cdot(-2-2\cdot\sqrt{3}\,i)\\
&= (-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2\cdot\sqrt{3}\,i)+\sqrt{3}\,i\cdot(-2)+\sqrt{3}\,i\cdot(-2\cdot\sqrt{3}\,i)\\
&= 2+2\cdot\sqrt{3}\,i-2\cdot\sqrt{3}\,i+6\\
&= \boxed{8}
\end{aligned}$$

Notera för övrigt att $(a+b)^3 \neq a^3+b^3$ (utom om $a = 0$, $b = 0$ eller $a = -b$).
På polär form: Potensen beräknas med de Moivres formel:

$$\begin{aligned}
z^3 &= (2\cdot(\cos(\tfrac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(\tfrac{2\cdot\pi}{3})))^3\\
&= 2^3\cdot(\cos(3\cdot\tfrac{2\cdot\pi}{3}) + i\ \sin(3\cdot\tfrac{2\cdot\pi}{3}))\\
&= 8\cdot(\cos(2\cdot\pi) + i\ \sin(2\cdot\pi))\\
&= 8\cdot(1+0\,i)\\
&= \boxed{8}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Rektangulär form: Helt rätt: 3p. Gjort något konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p. Polär form: i viss mån sambedömning med (a)-uppgiften.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken. Det vanligaste felet gäller användning av likhetstecken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras. (Man riskerar alltså inte några poäng på att vid tidsbrist lämna in en inte renskriven uppgift.)

Jag kör för övrig med policyn att om en dålig presentation redan resulterat i 0p för bristande motivering så ”drar” jag inte poäng på den här punkten också, utan det är dåliga presentationer och felaktig notation som inte lett till problem i övrigt som påverkar bedömningen här.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2018.08.13 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

DEN FORMELSAMLING MED DE TRIGONOMETRISKA ADDITIONSFORMLERNA SOM BORDE HA FUNNITS PÅ DENNA TENTA HADE FALLIT BORT. DEN SOM BEDÖMER ATT DETTA PÅVERKAT DESS RESULTAT OMBEDES KONTAKTA EXAMINATOR.

1. En trigonometrisk ekvation har lösningsmängden

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\cdot\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Skriv upp ekvationen. (Det finns flera möjliga svar, men ett av dem är betydligt enklare än de övriga.) Förklara hur du resonerar. (Du kan behöva använda din kreativitet.) (3p)

Lösning:

Vinklarna $\pi/3$ och $-\pi/3$ har samma cosinusvärde; $1/2$, medan deras sinusvärden är olika. Så det verkar vara en cosinusfunktion i botten. Periodlängd på 2π ger att det är den vanliga cosinusfunktionen. Det här är lösningsmängden till ekvationen $\boxed{\cos(x) = 1/2}$.

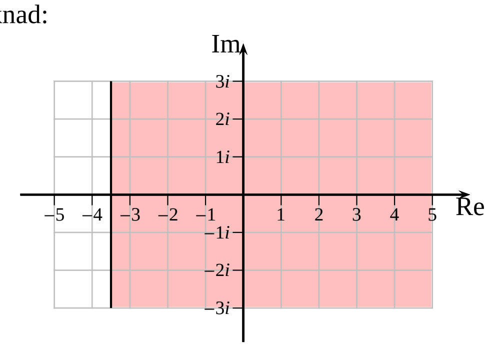
Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Visat förståelse för frågan: 1p. Mellanting: 2p

2. (a) Illustrera lösningsmängden till följande problem i det komplexa talplanet: $\mathrm{Re}(z) \geq -3{,}5$ (1p)

Lösning:

Årets rekommenderade uppgift 13.18(a) ur *Grundlig matematik*. (Hade nummer 13.13 förra läsåret, var rekommenderad då också.)

Realdelen för talet är x-koordinaten för den punkt som representerar talet i det komplexa talplanet. $x = -3{,}5$ är en vertikal linje, $x \geq -3{,}5$ är allt till höger om denna linje, linjen inberäknad:



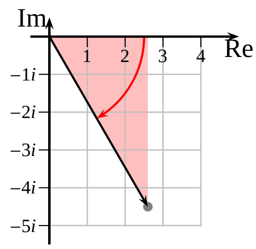
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Räkna om detta tal till polär form: $w = \dfrac{\sqrt{27}}{2} - \dfrac{9}{2}\,i$ (2p)

Lösning:

Årets rekommenderade uppgift 13.15(f). (Hade nummer 13.11 förra läsåret.)

Vi kan börja med att skissa in talet i ett komplext talplan. $\sqrt{27}$ måste vara lite mer än $\sqrt{25} = 5$, vilket borde räcka för att placera in talet på ett ungefär:



Talets belopp kan beräknas:

$$|w| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(x))^2} = \sqrt{(\frac{\sqrt{27}}{2})^2 + (-\frac{9}{2})^2} = \sqrt{\frac{27+81}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27}$$

Ögonmått säger att $\arg(z) \approx -\pi/3$ (för pilen verkar gå neråt i ungefär 60 graders vinkel). Vi kontrollerar:

$$\mathrm{Re}(w) = r\cdot\cos(\theta) \qquad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(w)}{r} = \frac{\sqrt{27}/2}{\sqrt{27}} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Im}(w) = r\cdot\sin(\theta) \qquad \sin(\theta) = -\frac{9/2}{\sqrt{27}} = -\frac{\sqrt{81/4}}{\sqrt{27}} = -\sqrt{\frac{3\cdot\cancel{27}}{4\cdot\cancel{27}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dessa värden känns igen som $\cos(-\pi/3)$ respektive $\sin(-\pi/3)$, så den med ögonmått utlästa vinkeln var korrekt. Alternativt noterar vi att i den med rosa markerade rätvinkliga triangeln vet vi från beloppsberäkningen att hypotenusan har längd $\sqrt{27}$ medan den närliggande kateten är precis hälften så lång. Då har vi en halv rätvinklig triangel, och vinkeln är 60°, riktat medurs.

$\boxed{\textit{Svar: } w = \sqrt{27}\cdot(\cos(-\tfrac{\pi}{3}) + i\,\sin(-\tfrac{\pi}{3}))}$

Rättningsnorm: Belopp: 1p. Argument: 1p

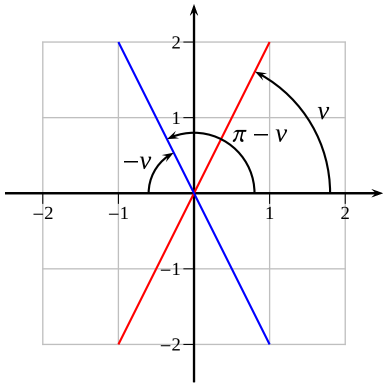
3. Visa att följande gäller för alla vinklar v: $\tan(\pi - v) = -\tan(v)$ (3p)

Lösning:

Algebraiskt: Utnyttja de formler för addition som *borde* ha varit med på tentan:

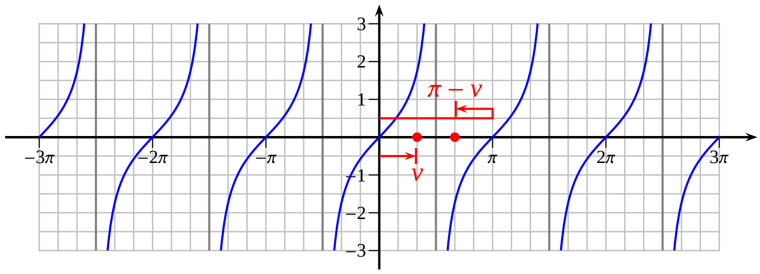
$$\tan(\pi - v) = \frac{\sin(\pi - v)}{\cos(\pi - v)} = \frac{\sin(\pi)\cdot\cos(v) - \cos(\pi)\cdot\sin(v)}{\cos(\pi)\cdot\cos(v) + \sin(\pi)\cdot\sin(v)}$$
$$= \frac{0\cdot\cos(v) - (-1)\cdot\sin(v)}{(-1)\cdot\cos(v) + 0\cdot\sin(v)} = \frac{\sin(v)}{-\cos(v)} = -\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$$

Definitionsmässigt: Tangensvärdet för en vinkel motsvarar riktningkoefficienten k för en linje som skär x-axeln i denna vinkel. Vi ritar en linje som går i vinklen v och en som går i vinkeln $\pi - v$ och jämför:



Linjerna är lika branta (ger samma siffror i k-värdena) men lutar åt varsitt håll (ger olika tecken i k-värdena), vilket ger att $\tan(\pi - v) = -\tan(v)$.

Graf: Grafen för tangens bör vara känd:



Om vi tittar på hur v och $\pi - v$ ligger relativt varandra så ser vi att de ligger lika långt från mittpunkten på en kurvdel, fast på olika sidor. Det gör att y-koordinaten (som här representerar tangensvärdet) kommer att ha samma siffror men olika tecken för de två vinklarna.

Omskrivning ur perioden: Att tangens är periodisk med period π bör vara känt. Detta ger att $\tan(\pi - v) = \tan(-v)$, och då kan man argumentera för att $\tan(-v) = -\tan(v)$ istället. Detta kan sedan göras ur formler eller enhetscirkel eller graf.

Rättningsnorm: Generell motivering: 3p. Konstruktiva idéer: 1p. Bara testat med en enda vinkel: 0p.

4. (a) Om man säger att $a = \log_2(b)$, exakt vad menar man? (Vi söker alltså definitionen av logaritm.) (1p)

Lösning:

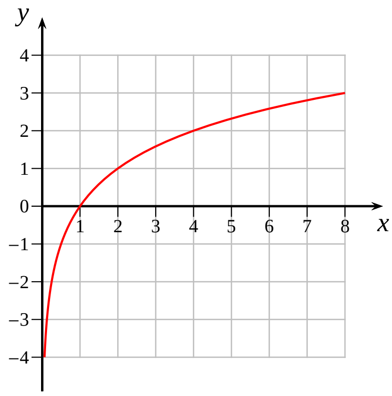
$a = \log_2(b) \quad \Leftrightarrow \quad 2^a = b$; a är det tal man ska upphöja 2 i om man vill få b.

(b) Skissa kurvan $y = \log_2(x)$ (1p)

Lösning:

Definitionsmängden är alla $x > 0$. Ett lagom stort koordinatsystem kan ha en x-axel från 0 till 8, och y-axel från -4 till 4. (Värdemängden är ju hela $\mathbb{R}$, så det behövs både positiva och negativa y.) En värdetabell kan börja med att man fyller i kolumnen med y-värden, eftersom det är enkelt att beräkna x-värdena givet y-värdena:

y	x
3	8
2	4
1	2
0	1
−1	0,5
−2	0,25
−3	0,125



Rättningsnorm: Lämpligt böjd kurva som verkar börja i nederändan av y-axeln och passerar $(1,0)$ och $(2,1)$ ger poäng.

(c) Bestäm värdet på $(\log_2(8))^2$ (1p)

Lösning:

$(\log_2(8))^2 = (\log_2(2^3))^2 = 3^2 = 9$

(d) Bestäm värdet på $\log_2(8^2)$ (1p)

Lösning:

$\log_2(8^2) = \log_2(64) = \log_2(2^6) = 6$

(e) Vilket av ovanstående uttryck är lika med $2 \cdot \log_2(8)$? (1p)

Lösning:

$\log_2(8^2)$, för $2 \cdot \log_2(8) = 2 \cdot \log_2(2^3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Kommentar: Uppgiften är inspirerad av ett vanligt fel på föregående tenta, där ett stort antal skrivande inte hade klart för sig skillnaden mellan $\log_2(x^2)$ och $(\log_2(x))^2$.

Rättningsnorm: Gäller alla deluppgifterna: Det mesta kan nog bara vara rätt eller fel, men har man "halvrätt" på flera deluppgifter kan detta ge någon sammanfattningspoäng på uppgiften som helhet.

5. Lös följande ekvation: $|x^2 - 4| = -x^2 + 5 \cdot x - 1$. (5p)

Lösning:

Alla detaljer: Vi skriver om absolutbeloppsuttrycket till en styckvis definierad funktion:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{om } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4) & \text{om } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

Detta fordrar att vi löser de två olikheterna $x^2 - 4 \geq 0$ och $x^2 - 4 < 0$, vilket kan göras samtidigt baserat på den via konjugatregeln erhållna faktoriseringen $x^2 - 2^2 = (x+2) \cdot (x-2)$, som visar att det finns nollställen i $x = \pm 2$:

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$x + 2$	−	0	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	0	+
$x^2 - 4$	+	0	−	0	+

så

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{om } x \leq -2 \text{ eller } x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{om } -2 < x < 2 \end{cases}$$

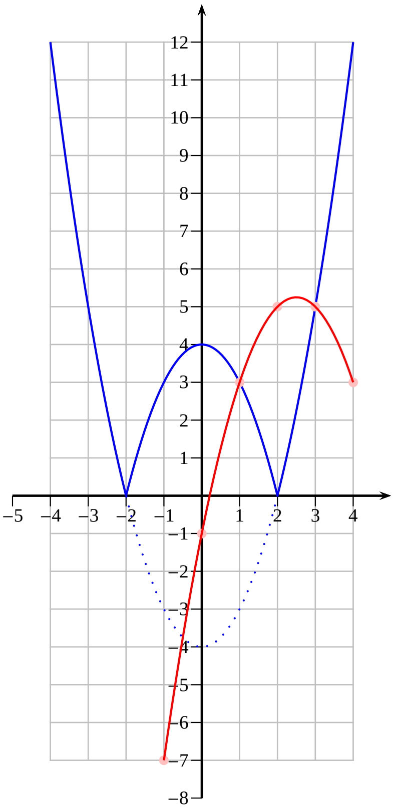
Ekvationen kan då lösas som två fall: ytterområden och innerområde:

$$\boxed{x \leq -2 \vee x \geq 2}$$
$$x^2 - 4 = -x^2 + 5 \cdot x - 1$$
$$2x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0$$
$$\vdots$$
$$x = 3 \vee \cancel{x = -\tfrac{1}{2}}$$

$$\boxed{-2 < x < 1}$$
$$-x^2 + 4 = -x^2 + 5 \cdot x - 1$$
$$5 = 5 \cdot x$$
$$x = 1$$

Grafiskt: Genom att rita kurvorna $y = |x^2 - 4|$ och $y = -x^2 + 5 \cdot x + 6$ och läsa av skärningspunkterna kan man lösa ekvationen.

$y = x^2$ vet vi hur den ser ut; $y = x^2 - 4$ är den kurvan nerflyttad 4 steg; $y^2 = |x^2 - 4$ är den kurvan med delen som hänger under x-axeln uppvikt. $y = -x^2 + 5 \cdot x - 1$ ska se ut som ”ledsen mun”, och kan skissas ur en värdetabell:



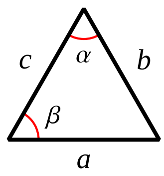
Kurvorna skär på två ställen: vid $x = 1$ och $x = 3$, och det är uppenbart att det inte finns några skärningar utanför bild. (Dessutom ser vi vad den förkastade lösningen i beräkningen innebär: skärningen mellan en ouppvikt variant av beloppskurvan och den andra parabeln.)

Testräkning: Genom att testa med diverse heltal nära noll kommer man här att hitta alla lösningarna. Denna teknik garanterar dock inte att man generellt sett hittat allt (det kan ju finnas lösningar som inte är heltal, och lösningar bortanför det område som man inte testat.) Om man inte kan motivera hur man vet att man inte missat något kan detta inte ses som en acceptabel metod.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{1,\ 3\}}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 5p. Testräkning: 1p. I övrigt poäng efter hur stor procent av en korrekt lösning man levererat.

6. I bredvidstående triangel är längden på sidan a $\sqrt{8}$ cm, längden på sida b $\sqrt{5}$ cm, och sinusvärdet för vinkeln α är $2/\sqrt{5}$.



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

(a) Bestäm vinkeln β.

(b) Bestäm längden på sidan c.

Uppgiften bedöms som en helhet. (5p)

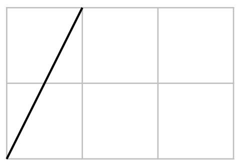
Lösning:

Grafiskt, exakt: Genom att skissa triangeln så korrekt som våra hjälpmedel tillåter oss kan vi bilda oss en uppfattning om svaret. Vi bör åtminstone ha tillgång till penna och rutat papper, och något (som kanten på skrivningsomslaget) som kan hjälpa oss att rita rakt.

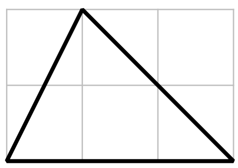
Hur ser vinkeln α ut? Om vinkeln är spetsig så motsvarar den vinkeln i en rätvinklig triangel med en motstående katet med längd 2 längdenheter och hypotenusa med längd $\sqrt{5}$ l.e.. En rätvinklig triangel är lätt att rita om man har tillgång till båda kateternas längder, och med Pythagoras sats kan vi få tag i den närliggande kateten:

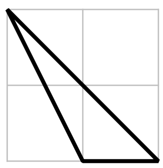
$$2^2 + x^2 = (\sqrt{5})^2 \qquad\qquad x^2 = 1$$

Eftersom sidlängder inte kan vara negativa måste den närliggande kateten ha längden 1 l.e.. Då kan vi börja rita:



Eftersom hypotenusan visade sig få den längd som sidan b skulle ha, $\sqrt{5}$ cm, verkar det bra att utse den till sidan b, och så får sidan c gå utmed rutnätet. Sidan a ska då gå från överändan av den ritade linjen och ner till botten på bilden. Längden $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ motsvarar längden på diagonalen över två centimeterrutor, och går vi den sträckan så stämmer allt!

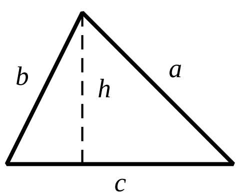




Men vinkeln α skulle också kunna vara trubbig, vilket innebär att linjen lutar åt andra hållet. Nu kan vi läsa ut de efterfrågade värdena ur bilden.

Approximativt: Om man har gradskiva, linjal och passare med sig kan man lösa uppgiften approximativt: $2/\sqrt{5} = \sqrt{4/5} = \sqrt{0{,}8} \approx 0{,}9$. Rita en stor enhetscirkel (t.ex. med radie 10 cm), mät av var y-koordinaten är 0,9, mät vinkeln (som är ungefär 64°), och rita. $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}4 = 2{,}8$, och $\sqrt{5} \approx 2{,}2$. Detta bör ge en något-så-när korrekt bild av triangeln, och sida och vinkel kan mätas. (Ger inte full poäng, men delpoäng.)

Rätvinkliga trianglar: Vi kan dela upp triangeln i två rätvinkliga trianglar. Eftersom det verkar dumt att dela upp någon av de kända sidorna i två bitar med okänd längd drar vi höjden mot sidan c:



Att sinusvärdet är lika med motstående (h) delat på hypotenusan (b) ger

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \qquad \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{h}{\sqrt{5}} \qquad h = 2$$

Pythagoras sats ger nu att den närliggande kateten (kalla den c_1) har längden

$$c_1 = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1\,(\text{cm})$$

Den horisontella kateten i den högra triangeln (kalla den c_2) har på samma sätt längden

$$c_2 = \sqrt{(\sqrt{8})^2 - 2^2} = \sqrt{8-4} = \sqrt{4} = 2\,(\text{cm})$$

Detta innebär att den högra triangeln är likbent; en halv kvadrat, och då är vinkeln $\beta = 45°$.

Denna beräkning baserades på bilden, där triangeln var ritad spetsvinklig. Samma sorts analys, men ur en bild där man ritat vinkeln α trubbig, ger den andra möjliga triangeln.

Sinussatsen först: Den information vi har verkar som sydd för att ta fram vinkeln β med hjälp av sinussatsen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sqrt{5}\cdot 2/\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{4}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Detta sinusvärde stämmer in på vinklarna 45° och 135°. Med given information verkar det inte gå att utesluta någondera alternativet.

Cosinussatsen sedan: Ur två sidor och en vinkel i en triangel kan man med cosinussatsen ta fram den tredje sidan. Vinkeln β verkar enklare att hantera än vinkeln α. Satsen blir då

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)$$

Vi får räkna på de två alternativen:

$$\begin{aligned}
\beta &= 45° :\\
(\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{8})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot c\cdot\cos(45°)\\
5 &= 8 + c^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot c\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\
5 &= 8 + c^2 - 4\cdot c\\
c^2 - 4\cdot c + 3 &= 0\\
(c-3)\cdot(c-1) &= 0\\
c = 3 &\vee c = 1
\end{aligned}$$

Båda dessa svar verkar rimliga.

$$\begin{aligned}
\beta &= 135° :\\
(\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{8})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot c\cdot\cos(135°)\\
5 &= 8 + c^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot c\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})\\
5 &= 8 + c^2 + 4\cdot c\\
c^2 + 4\cdot c + 3 &= 0\\
(c+3)\cdot(c+1) &= 0\\
c = -3 &\vee c = -1
\end{aligned}$$

Inget av dessa förslag är rimligt.

Cosinussatsen först: Ur två sidor och cosinusvärdet för en vinkel kan man ta fram den tredje sidan. Olyckligtvis har vi bara $\sin(\alpha)$ givet, men ur trigonometriska ettan kan vi ta fram $\cos(\alpha)$.

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \qquad \cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \cdots \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Utgående från given information finns det ingen anledning att förkasta något av de två förslagen, så vi räknar vidare från båda:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{5}} : \\
(\sqrt{8})^2 &= (\sqrt{5})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot c\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \\
8 &= 5 + c^2 - 2\cdot c \\
c^2 - 2\cdot x - 3 &= 0 \\
(c-3)\cdot(c+1) &= 0 \\
c = 3 &\vee c = -1
\end{aligned}$$

Det första förslaget är rimligt, det andra är det inte.

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} : \\
(\sqrt{8})^2 &= (\sqrt{5})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{5}\cdot c\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \\
8 &= 5 + c^2 + 2\cdot c \\
c^2 + 2\cdot x - 3 &= 0 \\
(c+3)\cdot(c-1) &= 0 \\
c = -3 &\vee c = 1
\end{aligned}$$

Det första förslaget är orimligt, det andra är rimligt.

Cosinussatsen igen: Nu har vi tre sidor i triangeln, och då kan man med cosinussatsen ta fram cosinusvärdet för valfri vinkel. Eftersom vi har två förslag på sidlängd så får vi göra två beräkningar:

$$\begin{aligned}
c &= 3 : \\
(\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{8})^2 + 3^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot 3\cdot\cos(\beta) \\
5 &= 8 + 9 - 6\cdot\sqrt{8}\cdot\cos(\beta) \\
\cos(\beta) &= \frac{8+9-5}{6\cdot\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{4\cdot 8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Den enda i en triangel möjliga vinkeln med cosinusvärdet $1/\sqrt{2}$ är vinkeln 45°.

$$\begin{aligned}
c &= 1 : \\
(\sqrt{5})^2 &= (\sqrt{8})^2 + 1^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot 1\cdot\cos(\beta) \\
5 &= 8 + 1 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot\cos(\beta) \\
\cos(\beta) &= \frac{8+1-5}{2\cdot\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{4\cdot 8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Även här är 45° den enda möjliga vinkeln.

Svar: Vinkeln β är 45°, sidan c har längden 1 cm eller 3 cm

Rättningsnorm: Båda lösningarna: 5p. Gjort något konstruktivt: minst 1p. I övrigt poäng efter hur stor andel av lösningen man fått ihop.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2018.11.06 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

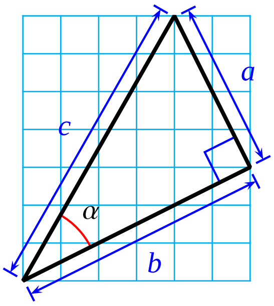
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Bestäm cosinusvärdet för vinkeln α i den nedan avbildade triangeln:



(3p)

Lösning:

Vi börjar med att sätta namn på sidorna. (Allt som är i blått i bilden är ditritat i efterskott.)

Föga observans: Om vi vill ha ett cosinusvärde borde vi kunna utnyttja cosinussatsen. Till det behöver vi sidlängderna i triangeln, och dessa kan vi ta fram med Pythagoras sats, eftersom alla sidorna kan ses som hypotenusor i rätvinkliga trianglar med kateter utmed rutnätet. Det verkar fördelaktigt att räkna med en ruta som längdenhet, eftersom vi då får heltalsräkning. (Centimeter kommer att ge antingen bråk eller decimaler.)

$$a = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}\,\text{rutor} \quad (\approx 2{,}2\,\text{cm})$$
$$b = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45}\,\text{rutor} \quad (\approx 3{,}4\,\text{cm})$$
$$c = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}\,\text{rutor} \quad (\approx 4{,}0\,\text{cm})$$

Cosinussatsen ger nu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) \qquad \text{Cosinussatsen}$$
$$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{45})^2 + (\sqrt{65})^2 - 2\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{65}\cdot\cos(\alpha) \qquad \text{Sätt in}$$
$$20 = 45 + 65 - 2\cdot\sqrt{45\cdot 65}\cdot\cos(\alpha) \qquad \text{Förenkla}$$
$$2\cdot\sqrt{45\cdot 65}\cdot\cos(\alpha) = 45 + 65 - 20 \qquad \text{”Flytta över”}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{90}{2\cdot\sqrt{45\cdot 65}} \qquad \text{Dividera}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{90}{2\cdot\sqrt{5\cdot 9\cdot 5\cdot 13}} && \text{Faktorisera}\\
&= \frac{90}{2\cdot 5\cdot 3\cdot\sqrt{13}} && \text{Bryt ut}\\
&= \boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}} \quad (\approx 0{,}83) && \text{Förenkla}
\end{aligned}
$$

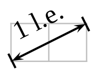
Mellanobservans: Triangeln ser ganska rätvinklig ut, och närmare kontroll visar att den är exakt rätvinklig. Då behöver vi närliggande katet och hypotenusa för att ta fram cosinusvärdet.

Beräkna sidorna b och c enligt föregående lösning.

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{65}} = \sqrt{\frac{45}{65}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}} \quad (\approx 0{,}83)$$

Stor observans: Vi behöver faktiskt inte räkna i just rutor. Det är uppenbart att längdförhållandet mellan den motstående och den närliggande kateten är 2:3. Om vi räknar i längdenheten ”diagonalt över en rektangel som är en ruta på ena ledden och två på andra” får vi att hyppotenusan har längden $c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ l.e., och då har vi

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{b}{c} = \boxed{\frac{3}{\sqrt{13}}} \quad (\approx 0{,}83)$$



Approximation: Om vi inte kommer att tänkta på att sidlängderna kan tas fram med Pythagoras sats så kan vi med linjal mäta sidorna och stoppa in resultaten i antingen cosinussatsen eller sambandet för rätvinkliga trianglar. Ger inte ett exakt svar, men är definitivt bättre än inget svar alls!

Kommentar angående mätning: Längden av en sträcka, exempelvis en sida i en triangel, mäts från ena ändan till den andra *utmed sträckan*. Man kan inte påstå att t.ex. sidan a har längden 4 rutor; det är det vertikala avståndet mellan ändpunkterna men själva sträckan är längre än så!

Rättningsnorm: Helt korrekt: 3p. God approximation: 2p. I övrigt poäng efter hur stor del av uppgiften man fått ut. (Man behöver inte motivera hur man ser att triangeln är rätvinklig, men man måste påpeka att den är det om man använder Pythagoras.)

2. Lös följande ekvation: $\tan(x) = \tan^2(x)$ (3p)

Lösning:

Man kan inte ”förkorta bort” ett $\tan(x)$, för förkortning är division, man kan inte dividera med noll och tangensvärden kan vara noll. Däremot kan man faktorisera:

$$
\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan^2(x) &&\\
\tan(x) - \tan^2(x) &= 0 && \text{”flytta över”}\\
\tan(x)\cdot(1 - \tan(x)) &= 0 && \text{bryt ut}\\
\tan(x) = 0 \quad &\vee \quad 1 - \tan(x) = 0 && \text{nollfaktorlagen}\\
x = 0 + n\cdot\pi \quad & \quad \tan(x) = 1 &&\\
& \quad x = \frac{\pi}{4} + n\cdot\pi &&
\end{aligned}
$$

Om man tycker att ekvationen är svår att få grepp om kan det underlätta att substituera:

$$
\begin{aligned}
\tan(x) &= \tan^2(x) &&\\
t &= t^2 && \text{Sätt } \tan(x) = t
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} t - t^2 &= 0 \\ t \cdot (1 - t) &= 0 \\ t = 0 &\vee 1 - t = 0 \\ & \qquad\quad t = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Svar: } x = n \cdot \pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, \text{ där } n \in \mathbb{Z}}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. 2p om man tappar $\tan(x) = 0$. Max 1p om man missar ”$+ n \cdot \pi$”.

3. Du vet att $\sin(\beta) = 3/5$ och att $0° < \beta < 90°$. Vad är $\sin(2 \cdot \beta)$? (Kan du inte ta fram ett exakt svar så försök ta fram ett ungefärligt.) (3p)

Lösning:

Exakt räkning: Om man inte kommer ihåg sinus-dubbla-vinkeln kan man utnyttja additionsformlerna:

$$\sin(2 \cdot \beta) = \sin(\beta + \beta) = \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) = 2 \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)$$

Sinusvärdet vet vi, cosinusvärdet behöver vi. Trigonometriska ettan:

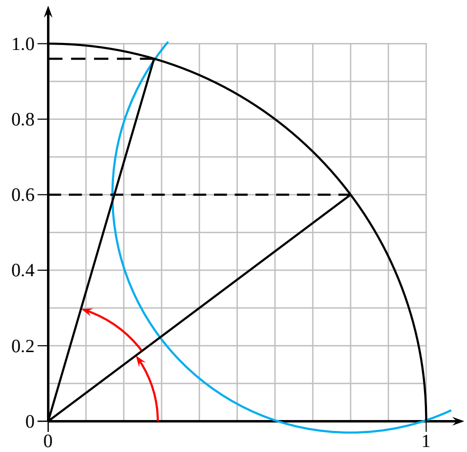
$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$$

$$\cos(\beta) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \pm\sqrt{1 - (3/5)^2} = \cdots = \pm 4/5$$

Eftersom det var sagt att vi blivit placerade i första kvadranten är det det positiva värdet som gäller. Nu har vi

$$\sin(2 \cdot \beta) = 2 \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \boxed{\frac{24}{25}}$$

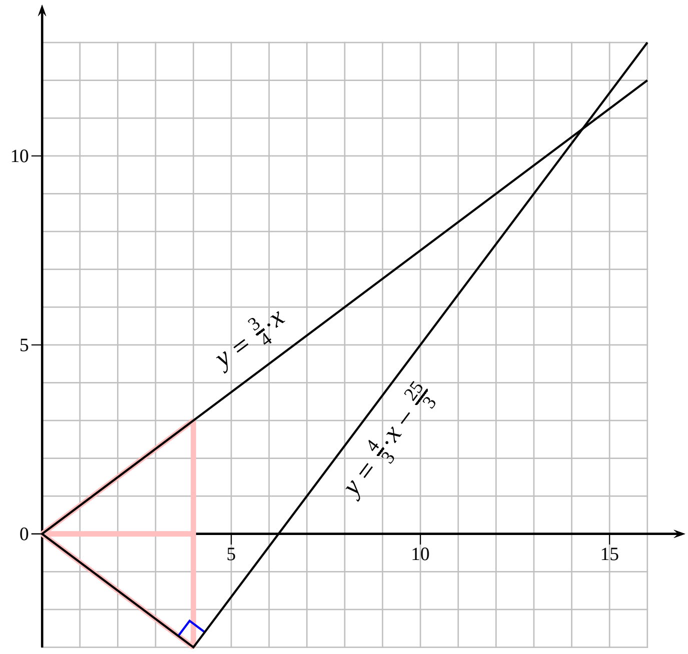
Grafisk approximation för den som har passare och gradskiva: Rita en enhetscirkel. Markera den punkt på cirkeln som har y-koordinat 0,6. Rita stråle. Mät vinkel. Rita en dubbelt så stor vinkel. Mät av y-koordinaten.



Det ser ut som att y-värdet är lite mer än 0,95, så vi kan säga att svaret är ungefär $\boxed{0{,}96}$.

Saknar man gradskiva kan man lika fullt göra förflyttningen av vinkeln, exempelvis genom att sätta passarspetsen i punkten $(0{,}8,\ 0{,}6)$, dra ut passaren så att pennan är i punkten $(1,\ 0)$, och så slå en båge. Man kan också göra avståndsmätning med linjal. (Däremot är det nog svårt att göra en tillräckligt bra cirkel utan passare.)

Identifiering av vinkeln: Känn igen måttet som ett från egyptiska triangeln. Rita en egyptisk triangel. Rita en till egyptisk triangel. Du har nu ritat den korrekta vinkeln. Rita om så att du har en rätvinklig triangel.



Genom att mäta av hypotenusa ($\approx$ 47 mm) och motstående katet ($\approx$ 45 mm) i den stora rätvinkiga triangeln kan man nu ta fram ett approximativt sinusvärde.

Det går också att ta fram det exakta värdet, genom att ta fram uttryck för linjerna och beräkna det exakta läget på skärningspunkten. I skärningspunkten ger båda linjeuttrycken samma y-värde, så vi har

$$\tfrac{3}{4} \cdot x = \tfrac{3}{4} \cdot x - \tfrac{25}{3} \Leftrightarrow x = \tfrac{100}{7} \Rightarrow y = \tfrac{75}{7}$$

Pythagoras sats ger att hypotenusans längd är

$$\sqrt{(\tfrac{100}{7})^2 + (\tfrac{75}{7})^2} = \cdots = \tfrac{25}{\sqrt{7}}$$

och katetens längd är

$$\sqrt{(\tfrac{100}{7} - 4)^2 + (\tfrac{75}{7} + 3)^2} = \cdots = \tfrac{24}{\sqrt{7}}$$

(mätt i längdenheten ”rutor”), vilket ger

$$\sin(2 \cdot \beta) = \frac{24/\sqrt{7}}{25/\sqrt{7}} = \boxed{\frac{24}{25}}$$

Rättningsnorm: Exakt svar: 3p. God approximation: 2p. Gjort något konstruktivt och icke-trivialt: minst 1p. 0p för ”$2 \cdot \frac{3}{5}$”.

4. $z = 2{,}5 + 6\,i$, $w = 3 - 3\,i$. Bestäm på maximalt förenklad form

(a) $\mathrm{Im}(w)$ (1p)

Lösning:

Imaginärdelen är koefficienten för i, tecknet inkluderat, så $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(3-3\,i) = \boxed{-3}$.

Rättningsnorm: Poäng enbart vid helt rätt. (”$-3\,i$” ger inte poäng.)

(b) $\dfrac{z}{w}$ (2p)

Lösning:
Standardtaktik: förläng med nämnarens konjugat. Räkningarna kan bli enklare om man skriver om z enligt $2{,}5 + 6\,i = \frac{5}{2} + 6\,i = \frac{1}{2}\cdot(5 + 12\,i)$, men det är lite en smaksak. På samma sätt kan omskrivningen $3 - 3\,i = 3\cdot(1 - i)$ underlätta

$$\frac{z}{w} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(5+12\,i)}{3\cdot(1-i)} = \frac{1}{2\cdot3}\cdot\frac{(5+12\,i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{5\cdot1+5\cdot i+12\,i\cdot1+12\,i\cdot i}{1^2-i^2}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5+5\,i+12\,i-12}{1+1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{-7+17\,i}{2} = \boxed{-\frac{7}{12}+\frac{17}{12}\,i}$$

Annars blir uträkningen så här:

$$\frac{z}{w} = \frac{(2{,}5+6\,i)\cdot(3+3\,i)}{(3-3\,i)\cdot(3+3\,i)} = \frac{2{,}5\cdot3+2{,}5\cdot3\,i+6\,i\cdot3+6\,i\cdot3\,i}{3^3-(3\,i)^2}$$
$$= \frac{7{,}5+7{,}5\,i+18\,i-18}{9+9} = \frac{(-10{,}5+25{,}5\,i)\cdot2}{18\cdot2} = \frac{-21+51\,i}{36}$$
$$= \frac{\cancel{3}\cdot(-7+17\,i)}{\cancel{3}\cdot12} = \boxed{\frac{-7+17\,i}{12}}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt teknik men fel i utförandet: 1p.

(c) $|z|$ (1p)

Lösning:
Beloppet är talets avstånd från origo, och tas fram med Pythagoras sats:

$$|z| = \sqrt{(5/2)^2+6^2} = \sqrt{25/4+36\cdot4/4} = \sqrt{169/4} = 13/2 = \boxed{6{,}5}$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel! Men har man räknat rätt men ej förenklat maximalt på både b och c ges full poäng på denna uppgift (och 1p på c).

(d) $\arg(w)$ (1p)

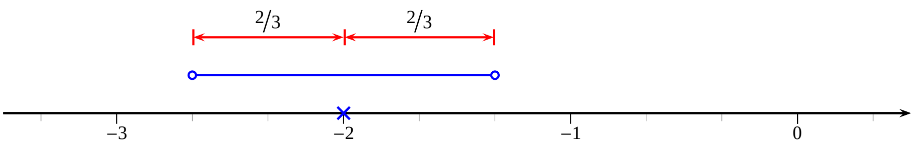
Lösning:
Markerar man talet i ett komplext talplan så ser man att det går neråt i 45 graders vinkel, ner i 4:e kvadranten. Argumentet är $\boxed{-\pi/4}$ (eller om man föredrar positiva tal kan man ta $7\cdot\pi/4$, den vinkeln skickar en också i rätt riktning).
Rättningsnorm: Rätt svar med någon antydan om hur man resonerat: 1p.

Även ”slarvfel” räknas som fel.

5. (a) Skriv som en absolutbeloppsolikhet av typ $|x - d| < e$:

$$-\frac{4}{3} > x > -\frac{8}{3}$$ (2p)

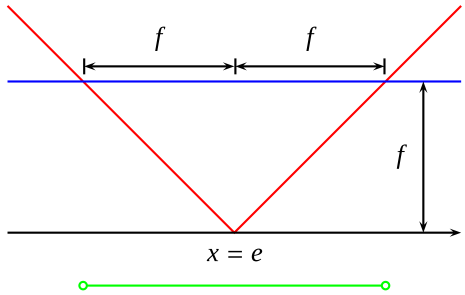
Lösning:
Rekommenderad uppgift 10.6(f) ur *Grundlig matematik*.
(b) först: Enklast är att börja med (b)-uppgiften, och markera intervallet. Mitt i intervallet befinner sig $-6/3 = -2$, och intervallet sträcker sig $2/3$ enhet åt båda håll från denna punkt.



Detta läggs till i bilden, och intervallet kan skrivas som

$\boxed{\textit{Svar: } |x+2| < \frac{2}{3}}$

Baklängesräkning: Om man kommer ihåg hur man löser olikhetsproblem med belopp kan man börja i svaret och ta sig till frågan. $y = |x - e|$ är en V-formad kurva med spetsen vid $x = e$. $y = f$ är en horisontell linje på höjden f. Olikheten innebär att vi vill veta för vilka x som V:et ligger nedanför linjen. Det ser ut så här:



Lösningsmängden blir intervallet $e - f < x < e + f$. Om detta ska vara lika med intervallet $-8/3 < x < -4/3$ måste $e = -2$ och $f = 2/3$.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Halvrätt: 1p.

(b) Illustrera ovantående på tallinjen. (1p)

Lösning:

Se det rödmarkerade i bilden på (a).

Rättningsnorm: Illustrationen måste på något sätt visa hur -2 och $2/3$ kommer in i det hela.

(c) Förklara i stora drag hur man ska arbeta då man löser ett problem som innehåller flera olika absolutbeloppsuttryck. Tänk dig att du sitter på högskolebussen och förklarar för en kurskamrat som missat föreläsningen. Lagom mängd text är (med normalstor handstil) ungefär en halv sida. (2p)

Lösning:

Kortversion: För alla i problemet ingående beloppsuttryck: hitta var de ”slår om”. Sammanställ hur de olika effekterna samverkar på olika delar av tallinjen. Dubbelkolla att svar som du fått fram utgående från att man befinner sig i ett visst område faktiskt ligger där.

Notera för övrigt att ett problem med flera absolutbeloppsuttryck inte nödvändigtvis behöver vara en ekvation. Det kan vara en grafritning, ett max- och minproblem, en integral. . .

Rättningsnorm: Måste täcka fallet med flera beloppsuttryck, och vara ungerfär av specificerad längd.

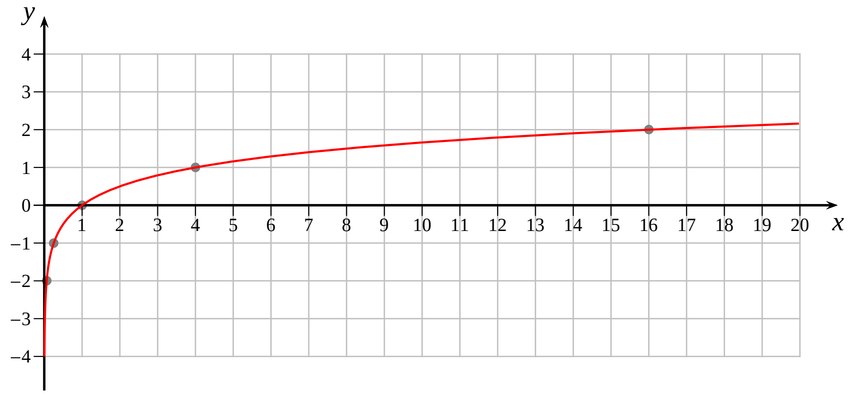
6. (a) Skissa kurvan $y = \log_4(x)$. (1p)

Lösning:

Man kan börja med en värdetabell, och det kan vara enklare att ställa upp den för det ekvivalenta sambandet $x = 4^y$, eftersom potenser är lättare än logaritmer att beräkna utan hjälpmedel:

y	-2	-1	0	1	2
x	$1/16$	$1/4$	1	4	16

Skissa kurvan med hjälp av dessa stödpunkter:



Rättningsnorm: Ska passera $(1,\ 0)$ och $(4,\ 1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng. Och koordinatsystemet måste vara graderat!

(b) Lös ekvationen $\log_4(1-x)+\log_4(4-x)=1$ (4p)

Lösning:

Använd logaritmreglerna:

$$
\begin{aligned}
\log_4(1-x)+\log_4(4-x) &= 1 \\
\log_4((1-x)\cdot(4-x)) &= 1 && \text{Logaritmregel; \textit{kolla svaren!}} \\
(1-x)\cdot(4-x) &= 4^1 && \text{Logaritmens definition} \\
4-4\cdot x - x + x^2 &= 4 && \text{Utveckla} \\
x^2-5\cdot x &= 0 && \text{Förenkla} \\
x\cdot(x-5) &= 0 && \text{Faktorisera} \\
x=0 \ \vee\ x-5 &= 0 && \text{Nollfaktorlagen} \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Om man glömt logaritmreglerna men kommer ihåg definitionen av logaritm kan man istället inleda

$$
\begin{aligned}
\log_4(1-x)+\log_4(4-x) &= 1 \\
4^{\log_4(1-x)+\log_4(2-x)} &= 4^1 && \text{Ta 4 upphöjt i båda led} \\
4^{\log_4(1-x)}\cdot 4^{\log_4(4-x)} &= 4 && \text{Potensregel} \\
(1-x)\cdot(4-x) &= 4 && \text{Potens tar ut logaritm; \textit{kolla svaren!}}
\end{aligned}
$$

Eftersom logaritmreglerna (inklusive ”potens tar ut logaritm” bara gäller förutsatt att alla inblandade uttryck är definierade måste vi kontrollera att vi inte introducerat några falska rötter. Notera att kontrollen måste göras i ursprungsekvationen!

$$
x=0:\begin{cases}\text{VL} = \log_4(1-0)+\log_4(4-0) \\ \quad\ = \log_4(1)+\log_4(4) = 0+1 = 1 & \text{OK!} \\ \text{HL} = 1\end{cases}
$$

$$
x=5:\begin{cases}\text{VL} = \log_4(1-5)+\log_4(4-5) \\ \quad\ = \log_4(-4)+\log_4(-1) = \text{odefinierat} & \text{ej OK} \\ \text{HL} = 1\end{cases}
$$

$\boxed{\textit{Svar: } x=0}$

Kommentar: Notera att man inte kan säga ”man kan inte ta logaritmen av noll” och kasta bort $x=0$ och behålla $x=5$. Det spelar ingen roll vad x har för tecken; det väsentliga är vad *det man tar logaritmen av* har för tecken.

Rättningsnorm: Tagit sig till andragradare: 2p. Löst andragradare: +1p. Kontrollerat svaren: +1p. Gjort något korrekt som utnyttjar logaritmlagar: 1p.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

~~v] Header : /cvsroot/pgf/pgf/generic/pgf/utilities/pgffor.code.tex, v1.252013/12/1311 : 40 : 27tantauExp~~

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2019.01.16 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

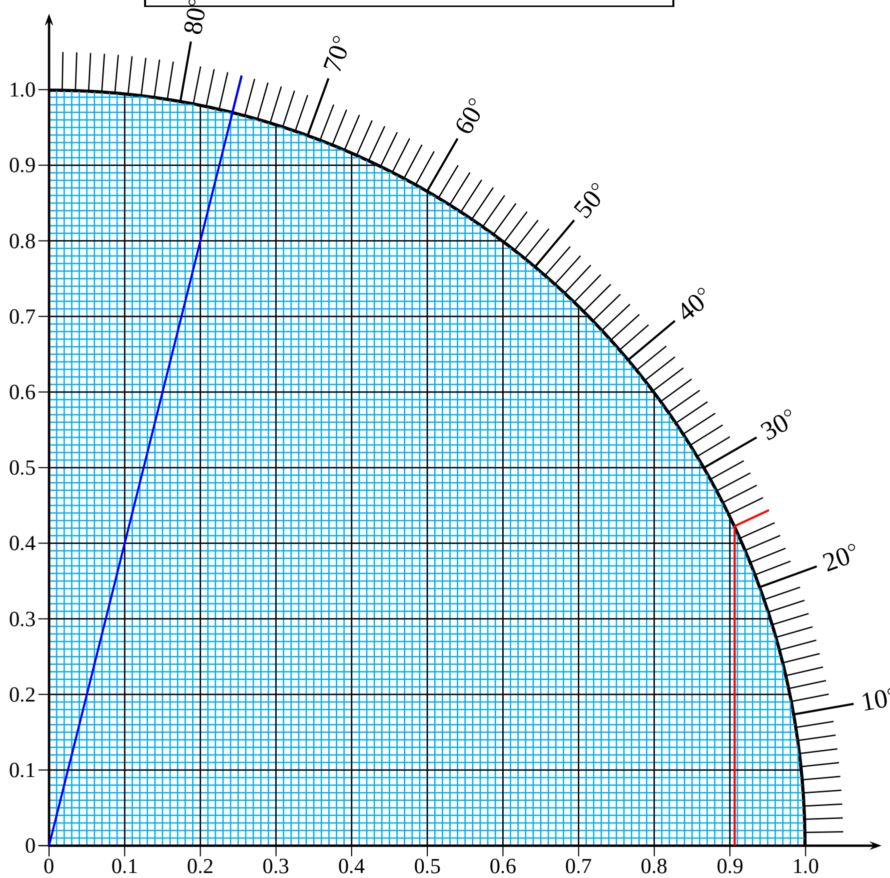
Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1.



(a) Bestäm med bildens hjälp $\cos(25°)$ så noga du kan. (1p)

Lösning:

Cosinusvärden motsvaras av x-koordinater på enhetscirkeln. Läs av x-värdet vid 25°-markeringen. Det verkar vara $\boxed{0{,}91}$.

Rättningsnorm: Svar mellan 0,90 och 0,92 godtas.

(b) En vinkel β mellan 0° och 90° har tangensvärdet 4. Bestäm med bildens hjälp vinkeln β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Tangensvärden motsvaras av ”k-värden”. Rita en linje från origo med riktningskoefficient 4 (så att den går 4 rutor upp för varje ruta fram). Läs av vinkeln: $\boxed{76°}$.

Rättningsnorm: Värdet 1p; begriplig förklaring 1p.

Referenser: (Gäller båda uppgifterna:) Du ska kunna förklara vad följande betyder:
• Sinus, cosinus, tangens; Övning 12.8–9

2. Ett av nollställena till $p(z) = z^3+z^2-7\cdot z+65$ är $2-3\,i$. Bestäm samtliga nollställen. (3p)

Lösning:

(Detta är i princip rekommenderad uppgift 7.28 med utbytta siffror.)

Inledande observationer: Samtliga koefficienter i polynomet är heltal, vilket också innebär att de är reella. Högstagradskoefficienten är 1. Polynomets grad är 3, vilket innebär att det har tre nollställen om man får använda icke-reella tal (vilket uppenbarligen är tillåtet).

Ett andra nollställe från det första: I polynom med reella koefficienter uppträder icke-reella nollställen i konjugerade par. Det innebär att $\overline{2-3\,i} = 2+3\,i$ också är ett nollställe.

Tredje nollstället via koefficienterna: I ett polynom med högstagradskoefficient 1 är summan av nollställena lika med nästhögstagradskoefficienten med omvänt tecken. Nästhögstagradskoefficienten är för ett tredjegradspolynom lika med andragradskoefficienten, och eftersom andragradstermen är z^2 är andragradskoefficienten 1. Om vi kallar det tredje nollstället för z_3 har vi

$$(2-3\,i)+(2+3\,i)+z_3 = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z_3 = -5$$

Alternativt utnyttjar man att (under samma förutsättningar) produkten av nollställena är lika med konstanttermen, med omvänt tecken om polynomets gradtal är udda (vilket det är). Konstanttermen är 65. Så

$$(2-3\,i)\cdot(2+3\,i)\cdot z_3 = -65 \quad \Leftrightarrow \quad z_3 = \frac{-65}{(2-3\,i)\cdot(2+3\,i)} = -\frac{65}{2^2-(3\,i)^2} = -\frac{65}{13} = -5$$

Tredje nollstället via faktorisering: Varje nollställe motsvarar en faktor, så vi har två av de tre förstagradsfaktorerna. Då kan vi hitta den tredje via polynomdivision. Divisionen blir enklare om vi dividerar med produkten av de två kända faktorerna (istället för att dividera med en i taget):

$$\begin{aligned}(z-(2-3\,i))\cdot(z-(2+3\,i)) &= z^2-((2-3\,i)+(2+3\,i))\cdot z+(2-3\,i)\cdot(2+3\,i)\\ &= z^2-4\cdot z+13\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} & z\ \ +5 \\ \hline z^2-4\cdot z+13 & z^3+\ \ z^2-\ \ 7\cdot z+65 \\ & -(z^3-4\cdot z^2+13\cdot z) \\ & \qquad 5\cdot z^2-20\cdot z+65 \\ & \qquad -(5\cdot z^2-20\cdot z+65) \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Så den tredje faktorn är $z+5$, och då är det tredje nollstället -5.

Lösning utan att använda ledtråden: Polynomet har heltalskoefficienter, och högstagradskoefficient 1. Det betyder att eventuella heltalsnollställen är faktorer i konstanttermen, som är $65 = 5\cdot 13$. Så det är värt att se efter om något av talen ± 1, ± 5, ± 13 och ± 65 är ett nollställe:

$$z = 1 \qquad p(1) = 1^3+1^2-7\cdot 1+65 = 1+1-7+65 = 60 \neq 0$$

$$z = -1 \quad p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 7\cdot(-1) + 65 = -1 + 1 + 7 + 65 = 72 \neq 0$$
$$z = 5 \quad p(5) = 5^3 + 5^2 - 7\cdot 5 + 65 = 125 + 25 - 35 + 65 = 180 \neq 0$$
$$z = -5 \quad p(-5) = (-5)^3 + (-5)^2 - 7\cdot(-5) + 65 = -125 + 25 + 35 + 65 = 0$$

-5 är ett nollställe, och därmed är $z - (-5)$ en faktor. Då kan vi dividera:

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 4\cdot z + 13 \\ \hline
z+5 & z^3 + z^2 - 7\cdot z + 65 \\
 & -(z^3 + 5\cdot z^2) \\ \hline
 & -4\cdot z^2 - 7\cdot z \\
 & -(-4\cdot z^2 - 20\cdot z) \\ \hline
 & 13\cdot z + 65 \\
 & -(13\cdot z + 65) \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Så $z^3 + z^2 - 7\cdot z + 65 = (z + 5)\cdot(z^2 - 4\cdot z + 13)$, och andragradaren kan vi faktorisera med hjälp av kvadratkomplettering:

$$z^2 - 4\cdot z + 13 = z^2 - 2\cdot 2\cdot z + 2^2 - 2^2 + 13 = (z-2)^2 - 4 + 13 = (z-2)^2 + 9$$
$$= (z-2)^2 - (3\,i)^2 = ((z-2) + 3\,i)\cdot((z-2) - 3\,i) = (z - (2 - 3\,i))\cdot(z - (2 + 3\,i))$$

Så $z - (2 - 3\,i)$ och $z - (2 + 3\,i)$ är de övriga faktorerna, och $2 - 3\,i$ och $2 + 3\,i$ de övriga nollställena.

$\boxed{\textit{Svar: } 2 - 3\,i,\ 2 + 3\,i,\ -5}$

Rättningsnorm: 3p för samtliga nollställen. Minst 1p om man gjort något korrekt och icketrivialt som visar kunskap om polynom.

Referenser: (Exakt vilka av dessa saker man behöver använda beror på vald lösningsmetod) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • ..., faktoriserad form, ...; Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Utnyttja egenskaperna hos icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Exempel 7.13; Övning 7.28.

3. Förenkla $\dfrac{\log_5(81)}{4} - \log_5(30) + \dfrac{\log_5(8)}{3}$ maximalt. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.12(d) ur *Grundlig matematik*. Kan angripas på flera sätt; här är två:

Sätt ihop:

$$\begin{aligned}
&\frac{\log_5(81)}{4} - \log_5(30) + \frac{\log_5(8)}{3} \\
&= \tfrac{1}{4}\cdot\log_5(81) - \log_5(30) + \tfrac{1}{3}\cdot\log_5(8) && \text{Skriv division som multiplikation} \\
&= \log_5(81^{1/4}) - \log_5(30) + \log_5(8^{1/3}) && \text{Logaritmregel} \\
&= \log_5((3^{\cancel{4}})^{\cancel{1/4}}) - \log_5(30) + \log_5((2^{\cancel{3}})^{\cancel{1/3}}) && \text{Skriv som potenser} \\
&= \log_5(3) - \log_5(30) + \log_5(2) && \text{Potensregel} \\
&= \log_5\left(\frac{3\cdot 2}{30}\right) && \text{Logaritmregel} \\
&= \log_5\left(\frac{\cancel{6}}{5\cdot\cancel{6}}\right) && \text{Faktorisera} \\
&= \log_5(5^{-1}) && \text{Förkorta; skriv som potens}
\end{aligned}$$

$$= \boxed{-1} \qquad \text{Logaritmregel}$$

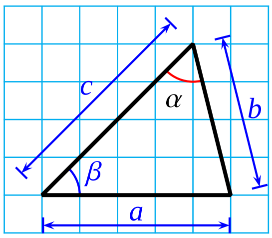
Ta isär:

$$\begin{aligned}
&\frac{\log_5(81)}{4} - \log_5(30) + \frac{\log_5(8)}{3} \\
&= \frac{\log_5(3^4)}{4} - \log_5(2{\cdot}3{\cdot}5) + \frac{\log_5(2^3)}{3} \\
&= \frac{\cancel{4}\cdot \log_5(3)}{\cancel{4}} - (\log_5(2) + \log_5(3) + \log_5(5)) + \frac{\cancel{3}\log_5(2)}{\cancel{3}} \\
&= \cancel{\log_5(3)} - \cancel{\log_5(2)} - \cancel{\log_5(3)} - \log_5(5) + \cancel{\log_5(2)} \\
&= \boxed{-1}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Tillämpat minst två logaritmregler som existerar och ingen som inte existerar, men ej nått svar: 2p. Tillämpat åtminstone en logaritmregel: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$) • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna; Exempel 11.2; Övning 11.12.

4. Du och din kompis har fått i uppdrag att bestämma sinusvärdet för vinkeln α i den nedan avbildade triangeln:



(a) Ni börjar planera arbetet:

”Vi kan nog lösa den om vi tänker lite,” säger kompisen.
”OK,” säger du.
”Vi kan börja med att sätta namn på sidorna. Den i botten, som står emot vinkeln α, får heta a, och så får den till höger heta b och den till vänster heta c,” säger kompisen.
”OK,” säger du.
”Det verkar smart att mäta i rutlängder, för sidan a är 2,5 cm, och decimaler är jobbigt att räkna med,” säger kompisen.
”OK,” säger du.
”Och då har sidan b längden 4 rutor, för den går upp fyra steg,” säger kompisen.
”STOPP!” säger du.

Förklara för kompisen varför det där sista var fel. (Det räcker inte att bara säga hur det ska vara, utan du måste förklara varför detta inte stämmer.) (1p)

Lösning:

”Sidan går inte bara 4 rutor uppåt, den går en ruta åt sidan också! Då är den *mer* än 4 rutor lång. Kolla, jag viker en linjal av en bit papper och lägger intill. Du ser att den är lite längre än vad 4 rutor är. Förresten, om man bara tittar vertikalt så skulle även sidan c vara 4 rutor, och då skulle sida b och c vara lika långa, och det är de ju absolut inte!”

Kommentar: Denna uppgift är i likhet med alla ”din kompis har. . . ”-uppgifter baserad på vanligt förekommande fel från tidigare tentor.

Rättningsnorm: Invändning av typ ”den är längre än så” eller ”den går inte rakt upp” ger poäng.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • . . . , längd, . . .

(b) Bestäm längden på sida b exakt. (1p)

Lösning:

Sidan kan ses som hypotenusa i en rätvinklig triangel vars kateter har längderna 1 ruta respektive 4 rutor. Enligt Pythagoras sats är dess längd då $b = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ ($\approx$ 4,1 rutor).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa Pythagoras sats.

(c) Bestäm sinusvärdet. (3p)

(Full poäng för exakt svar, delpoäng för god approximation.)

Lösning:

Exakt lösning med sinussatsen: Sinusvärden brukar man kunna ta fram med sinussatsen, förutsatt att man vet en vinkel och två sidor i triangeln. Vinkeln β till vänster är mellan en sida som går parallellt med rutnätet och en som går diagonalt över det, och måste därför vara 45°. Sinussatsen ger nu:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{b} = \frac{5 \cdot 1/\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 17}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}} \quad (\approx 0{,}86)$$

Exakt lösning med cosinussatsen: En alternativ metod (om man inte ser att vinkel $\beta = 45°$ eller har glömt sinussatsen) är att ta fram *cosinusvärdet* för α och sedan med trigonometriska ettan räkna fram sinusvärdet. För det behöver vi även sidan c, som enligt samma resonemang som tidigare har längden $c = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$ ($\approx$ 5,7 rutor). Cosinussatsen ger nu:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\
5^2 &= (\sqrt{17})^2 + (\sqrt{32})^2 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{32} \cdot \cos(\alpha) \\
25 &= 17 + 32 - 2 \cdot \sqrt{17 \cdot 32} \cdot \cos(\alpha) \\
2 \cdot 4 \cdot \sqrt{17 \cdot 2} \cdot \cos(\alpha) &= 17 + 32 - 25 \\
\cos(\alpha) &= \frac{24}{8\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}
\end{aligned}$$

Eftersom vinklar i trianglar ligger i ett intervall där sinusvärdena är positiva ger trigonometriska ettan att

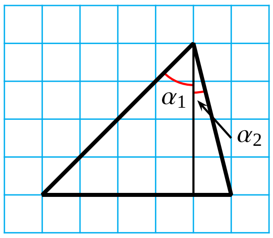
$$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{34} - \frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}$$

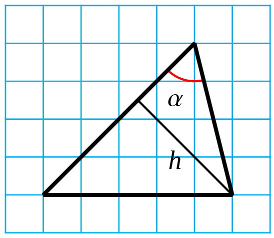
Exakt lösning med uppdelning i rätvinkliga trianglar (ostrategisk): Om man glömt både sinus- och cosinussatsen men kommer ihåg hur det var man räknade med rätvinkliga trianglar kan man dela upp triangeln i två rätvinkliga delar med en höjd. Vinkeln α_1 är 45°; för vinkeln α_2 gäller

$$\sin(\alpha_2) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos(\alpha_2) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Additionsformeln för sinus ger nu

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= \sin(\alpha_1) \cdot \cos(\alpha_2) + \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}
\end{aligned}$$





Exakt lösning med uppdelning i rätvinkliga trianglar (strategisk): Om man istället för att dra höjden vertikalt (vinkelrätt mot sidan a) kan man dra den på snedden, vinkelrätt mot sidan c. Då har man vinkeln α odelad som vinkel i en rätvinklig triangel. Höjden, som är motstående katet, går diagonalt över 2,5 rutor, så dess längd är $h = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$ rutor. (Bråk är nästan alltid enklare att räkna med än decimaluttryck.)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{h}{b} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{17}}$$
$$= \frac{5\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{34}}}$$

Approximativ lösning genom mätning: Mät triangelns sidor med linjal (eventuellt efter att ha förstorat upp bilden, vilket ger mer noggrann uppmätning). Följ i övrigt någon av föregående varianter.

Approximativ lösning med enhetscirkel: Rita in vinkeln i en enhetscirkel, som den som finns på förstasidan på tentan, eller rita en enhetscirkel så att vinkeln hamnar rätt. Läs av sinusvärdet.

Rättningsnorm: Exakt metod: 3p för att ha kommit till svar, 1p för att ha gjort något konstruktivt. 2p för mellanting. Approximativ lösning: 1–2p beroende på hur exakt den är.

Referenser: (Den mest direkta metoden) Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • …tillämpa sinussatsen…Övning 12.21–24

5. **(a)** Förklara vad som menas med *absolutbeloppet* av ett reellt tal x. (Vi söker alltså definitionen.) (1p)

Lösning:

Talets avstånd från noll på tallinjen; talet med eventuellt minustecken borttaget; siffrorna i talet; $\sqrt{x^2}$; eller mest formellt:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp

(b) Förklara vad som menas med *absolutbeloppet* av ett komplext tal z. (Vi söker alltså definitionen.) (1p)

Lösning:

Talets avstånd från origo i talplanet; $\sqrt{(\mathrm{Re}(x))^2 + (\mathrm{Im}(x))^2}$.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(c) Förklara vad som menas med *argumentet* för ett komplext tal z. (Vi söker alltså definitionen.) (1p)

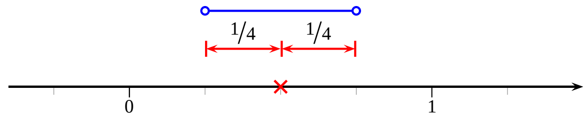
Lösning:
Den riktning (mätt moturs relativt positiva realaxeln) som man ska gå till för att komma till den punkt i talplanet som representerar talet.

Rättningsnorm: Svaret tolkas välvilligt.

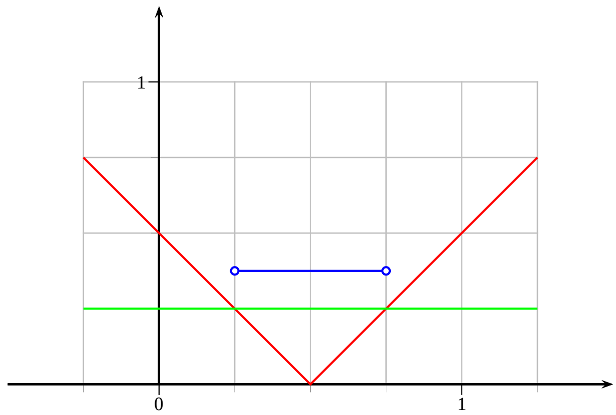
Referenser: (Innefattar även föregående uppgift) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument

(d) Lös olikheten $|x - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$. Utgå från att x är reell. (2p)

Lösning:
Geometrisk lösning: Absolutbeloppet kan tolkas som ett avstånd, och olikheten kan i ord formuleras som ”x ligger inom avståndet $1/4$ från punkten $1/2$”. Illustrerat på tallinjen:



Grafisk lösning: $y = |x - \frac{1}{2}|$ är den vanliga absoutbeloppskurvan (V-formad) flyttad ett halvt steg åt höger. $y = \frac{1}{4}$ är en horiontell linje på höjden $\frac{1}{4}$. Rita:



Olikhetens lösningsmängd är de x för vilka beloppskurvan ligger *lägre* än linjen.

Algebraisk lösning: Absolutbeloppsuttrycket kan, baserat på definitionen, skrivas som en styckvis definierad funktion:

$$|x - \tfrac{1}{2}| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{om } x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ -(x - \frac{1}{2}) & \text{om } x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{om } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} & \text{om } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Olikheten kan sedan lösas med separaträkning på de båda alternativen:

$$\boxed{x < \tfrac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} -x + \tfrac{1}{2} &< \tfrac{1}{4} \\ -x &< \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} \\ x &> \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{x \geq \tfrac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} x - \tfrac{1}{2} &< \tfrac{1}{4} \\ x &< \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} \\ x &< \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Så av talen mindre än $1/2$ kan vi använda de som är större än $1/4$ och av talen större än $1/2$ kan vi använda de som är mindre än $3/4$. Totalt ger det att talen mellan $1/4$ och $3/4$ kan användas.

Svar: $x \in (1/4, 3/4)$ eller alternativt uttryckt: $1/4 < x < 3/4$

Kommentar: Notera att denna uppgift i princip är uppgift 5 från TEN2 2018.11.06 baklänges.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Korrekt hantering av beloppet, men ej kommit till svar: 1p. Ignorerat beloppet: 0p.

Referenser: Undersökning 10.1; Övning 10.6

6. **(a)** Lös ekvationen $\cos(3{\cdot}x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, med bivillkoret att $\pi < x < 2{\cdot}\pi$. (4p)

(b) Rita en illustration som har med lösningen att göra. (Om du gjorde en medan du löste (a)-uppgiften så går det bra att peka på den.) (1p)

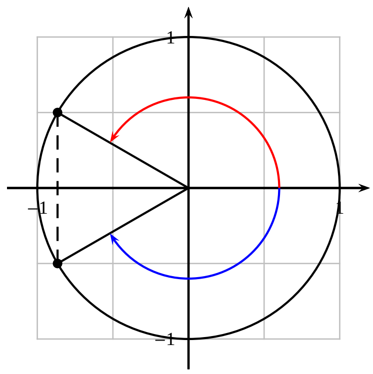
Lösning:

Upplägg: strunta i bivillkoret, utan lös ekvationen som vanligt. Kasta bort de lösningar som inte ligger i intervallet $(\pi, 2{\cdot}\pi)$. Förmodligen kommer det att uppkomma anledningar att illustrera.

Ekvationen kan bli lättare att lösa om man substituerar $3{\cdot}x = t$.

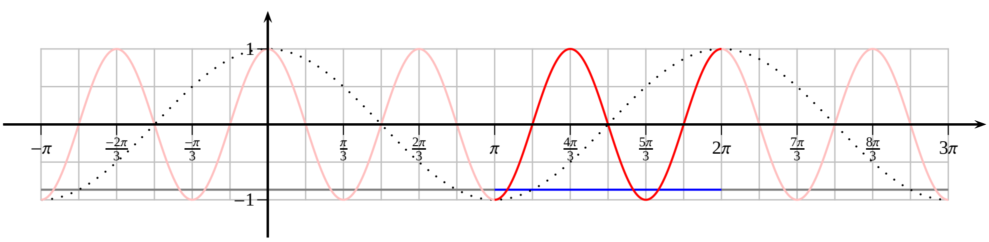
$$\begin{aligned}
\cos(3{\cdot}x) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} && \\
\cos(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} && \text{Sätt } 3{\cdot}x = t \\
t &= \pm\frac{5{\cdot}\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi && \text{Alla lösningarna} \\
3{\cdot}x &= \pm\frac{5{\cdot}\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi && \text{Återsubstituera} \\
x &= \frac{\pm\frac{5{\cdot}\pi}{6} + n{\cdot}2{\cdot}\pi}{3} && \text{Dela med 3} \\
x &= \pm\frac{5{\cdot}\pi}{18} + n{\cdot}\frac{2{\cdot}\pi}{3} && (\,= \pm 50^\circ + n{\cdot}120^\circ)
\end{aligned}$$

De två ”grundlösningarna” $t = \pm{}^{5\cdot\pi}/_3$ $(\,= \pm 150^\circ)$ går att ta fram ur en skiss av en enhetscirkel:



(Det hade för övrigt gått lika bra att ta $t = {}^{5\cdot\pi}/_6$ och $t = {}^{7\cdot\pi}/_6$ som utgångsvärden. Det blir samma mängd vinklar ändå då man lägger på ”plus ett antal hela varv”.)

Nu kan vi illustrera problemet med bivillkoret. $y = \cos(3{\cdot}x)$ ser ut som $y = \cos(x)$, men med tredjedelen så lång period. Lösningarna till ekvationen motsvarar kurvans skärningar med den horisontella linjen $y = -\sqrt{3}/2$.



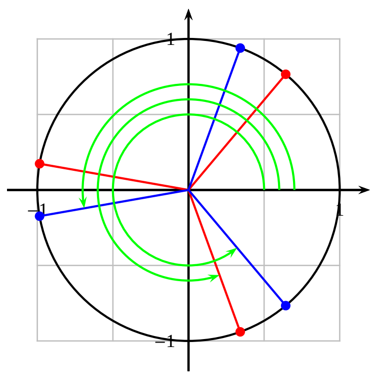
Vi söker de lösningar (skärningar) som ligger mellan $x = \pi$ och $x = 2{\cdot}\pi$, vilka av bilden att döma är tre stycken: en som ligger två perioder till höger om $x = {}^{5\cdot\pi}/_{18}$, en som ligger två perioder till höger om $x = -{}^{5\cdot\pi}/_{18}$ och en som ligger tre perioder till höger om $x = -{}^{5\cdot\pi}/_{18}$.

Om vi inte ritat en bild som detta går att läsa ut ur kan vi ta fram de önskade lösningarna genom att lösa två dubbla olikheter:

$$\begin{array}{ccc}
\pi < \dfrac{5\cdot\pi}{18} + n\cdot\dfrac{2\cdot\pi}{3} < 2\cdot\pi & & \pi < -\dfrac{5\cdot\pi}{18} + n\cdot\dfrac{2\cdot\pi}{3} < 2\cdot\pi \\
1 < \dfrac{5}{18} + n\cdot\dfrac{2}{3} < 2 & \text{Dividera med } \pi & 1 < -\dfrac{5}{18} + n\cdot\dfrac{2}{3} < 2 \\
18 < 5 + n\cdot 12 < 36 & \text{Multiplicera med 18} & 18 < -5 + n\cdot 12 < 36 \\
13 < n\cdot 12 < 31 & \text{Subtrahera/addera 5} & 23 < n\cdot 12 < 41 \\
\dfrac{13}{12} < n < \dfrac{31}{12} & \text{Dividera med 12} & \dfrac{23}{12} < n < \dfrac{41}{12}
\end{array}$$

(Notera att alla divisioner och multiplikationer görs med positiva tal, så olikheten behöver inte vändas.) Mellan $\frac{13}{12} = 1 + \frac{1}{12}$ och $\frac{31}{12} = 2 + \frac{7}{12}$ finns heltalet 2. Mellan $\frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12}$ och $\frac{41}{12} = 3 + \frac{5}{12}$ finns heltalen 2 och 3.

Man kan också ta fram lösningarna ur enhetscirkeln. Vi kan markera de punkter på cirkeln som lösningarna till ekvationen placerar oss i. Vi ska ta oss till dessa punkter genom att gå mer än ett halvt varv men mindre än ett helt (med start från positiva x-axeln):



De tre lösningarna är

$$x = \frac{5\cdot\pi}{18} + 2\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \boxed{\frac{29\cdot\pi}{18}} \quad (= 290^\circ)$$

$$x = -\frac{5\cdot\pi}{18} + 2\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \boxed{\frac{19\cdot\pi}{18}} \quad (= 190^\circ)$$

$$x = -\frac{5\cdot\pi}{18} + 3\cdot\frac{2\cdot\pi}{3} = \boxed{\frac{31\cdot\pi}{18}} \quad (= 310^\circ)$$

Rättningsnorm: Beräkningslösning: ekvationen 2p, bivillkoren 2p. Inga avdrag för följdfel. Annan lösningsmetod: poäng efter hur stor andel av korrekt lösning man fått fram. Beträffande bilden så ska den på något sätt ha relevans för problemet.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa en trigonometrisk ekvation. • Tillämpa räknereglerna för olikheter i kombination med de fyra räknesätten. Exempel 12.25; Övning 12.50–12.53

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2019.03.29 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

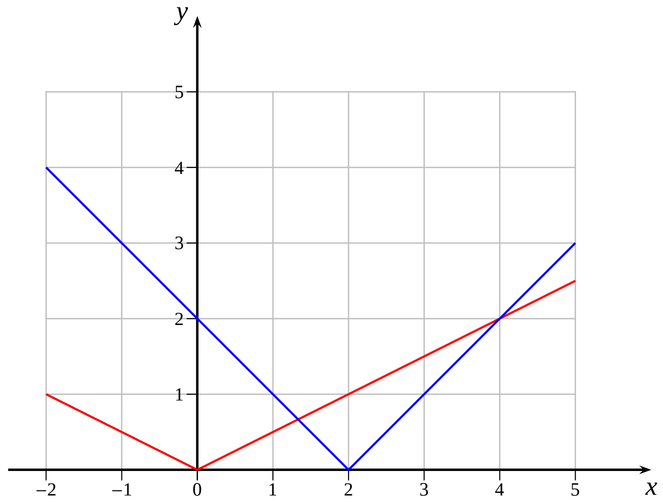
Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Lös ekvationen $|x-2| = \dfrac{|x|}{2}$. (3p)

Lösning:

Grafiskt: Rita kurvorna $y = |x-2|$ och $y = |x|/2$ i samma koordinatsystem och se var de skär varandra:



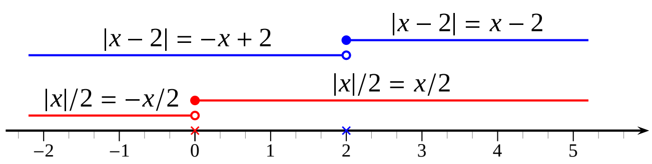
Kurvornas skärningspunkter motsvarar lösningsmängden till ekvationen. Första skärningspunkten ser ut att vara ungefär en tredjedel mellan $x = 1$ och $x = 2$, vilket kan bekräftas med kontrollräkning, andra vid $x = 4$.

Algebraiskt: Beloppets definition ger:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

$$\frac{|x|}{2} = \begin{cases} x/2 & \text{om } x \geq 0 \\ -x/2 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

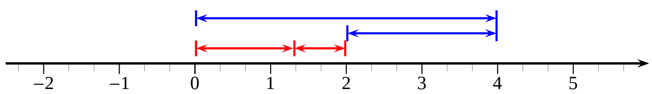
Det händer saker vid $x = 2$ och vid $x = 0$, vilket ger oss tre fall att räkna på: till vänster om vänstraste punkten, mellan punkterna och till höger om högraste.



$\boxed{x < 0}$	$\boxed{0 \le x < 2}$	$\boxed{x \ge 2}$
$-x+2 = -x/2$	$-x+2 = x/2$	$x-2 = x/2$
$2 = x - x/2$	$2 = x + x/2$	$x - x/2 = 2$
$2 = x/2$	$2 = 3 \cdot x/2$	$x = 4$
$4 = x$	$4/3 = x$	$4 \ge 2$
$4 \not< 0$	$0 \le 4/3 < 2$	

(Det förkastade lösningsförslaget $x = 4$ från första fallet motsvarar skärningen mellan tänkta förlängningar av de två nedåtlutande linjestyckena, och råkar händelsevis ligga på det ställe där de uppåtgående linjestyckena skär varandra.)

Geometriskt: Ekvationen kan i ord formuleras som ”avståndet mellan x och 2 är hälften av avståndet mellan x och 0”. Punkter till vänster om 0 kan inte komma ifråga; de ligger närmare 0 än 2. Den punkt som ligger på två tredjedelar av vägen mellan 0 och 2 ligger dubbelt så långt från 0 som från 2. Och en punkt som ligger lika långt till höger om 2 som 2 ligger till höger om 0 har också precis hälften så långt till 2 som till 0:



$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{\tfrac{4}{3}, 4\}}$

Rättningsnorm: Ignorerat beloppstecknen: 0p. Helt korrekt: 3p. Missat i någon detalj: 2p. Åtminstone visat förståelse för frågan: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tolka absolutbelopp som avstånd. • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Exempel 10.5 och 6, Metod 10.2, Övning 10.15

2. För vilka värden på a har ekvationen $\sin(x) = a$, $x \in [0, 3\cdot\pi)$ precis

(a) ingen lösning?

(b) en lösning?

(c) två lösningar?

(d) tre lösningar?

(e) fyra lösningar?

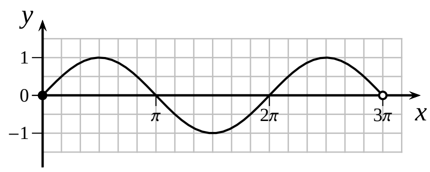
(f) minst fem lösningar?

Motivera! Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

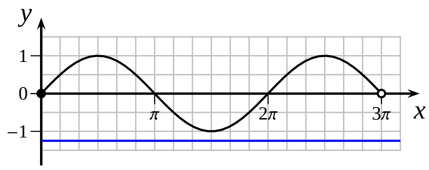
Rekommenderad uppgift 12.59.

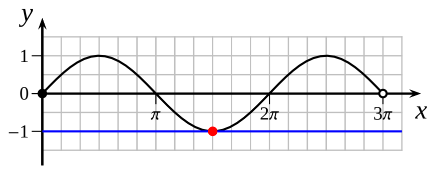
Det handlar alltså om en horisontell linje på höjden a som skär denna kurva:



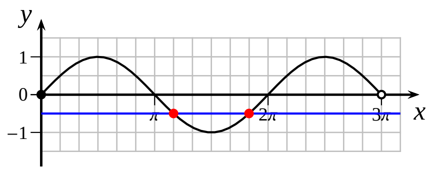
Ett sätt att studera det hela är att lägga en linjal parallellt med x-axeln och skjuta den uppåt och se vad som händer.

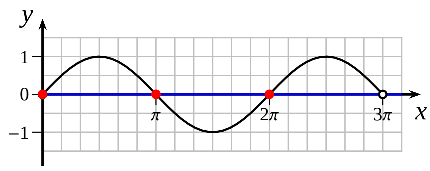
- Så länge den ligger nedanför $y = -1$ skär den inte kurvan.



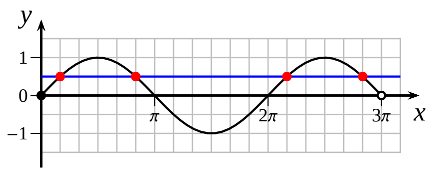


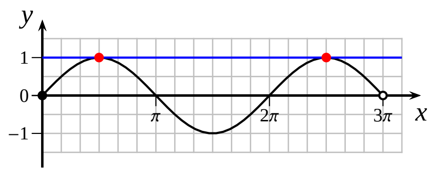
- Precis vid $y = -1$ tangerar den kurvan i *en* punkt: $x = \frac{3\cdot\pi}{2}$.
- Mellan $y = -1$ och $y = 0$ skär den kurvan i *två* punkter, i området mellan $x = \pi$ och $x = 2\cdot\pi$.





- Precis vid $y = 0$ skär den kurvan i *tre* punkter: $x = 0$, $x = \pi$ och $x = 2\cdot\pi$. ($x = 3\cdot\pi$ ingår ju inte i kurvan, eftersom intervallet är öppet i den ändan.)
- Mellan $y = 0$ och $y = 1$ skär den kurvan i *fyra* punkter, två av dem mellan $x = 0$ och $x = \pi$ och de andra två mellan $x = 2\cdot\pi$ och $x = 3\cdot\pi$.





- Precis vid $y = 1$ tangerar den kurvan i *två* punkter: $x = \frac{\pi}{2}$ och $x = \frac{5\cdot\pi}{2}$.
- Ovanför $y = 1$ skär den inte kurvan.

Så svaret är

(a) $a > 1$ samt $a < -1$

(b) $a = -1$

(c) $-1 < a < 0$ samt $a = 1$

(d) $a = 0$

(e) $0 < a < 1$

(f) aldrig

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Nästan helt rätt: 2p. Åtminstone klart visat att man förstår frågan: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.59

3. Det komplexa talet z uppfyller följande två saker: $\text{Im}(z) = -3$ och $|z| = 6$. Vad är talet z? (3p)

Lösning:

Detta är i princip rekommenderad uppgift 13.20 med utbytta siffror.

Räkna rektangulärt: Om vi sätter $z = x + y\,i$ (där x och y är realdel respektive imaginärdel) så vet vi alltså följande: $y = -3$ och $\sqrt{x^2 + y^2} = 6$. Genom att sätta ihop informationen får vi

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (-3)^2} &= 6\\ x^2 + 9 &= 36\\ x^2 &= 27\\ x &= \pm\sqrt{27} = \pm\sqrt{9\cdot 3} = \pm 3\cdot\sqrt{3}\end{aligned}$$

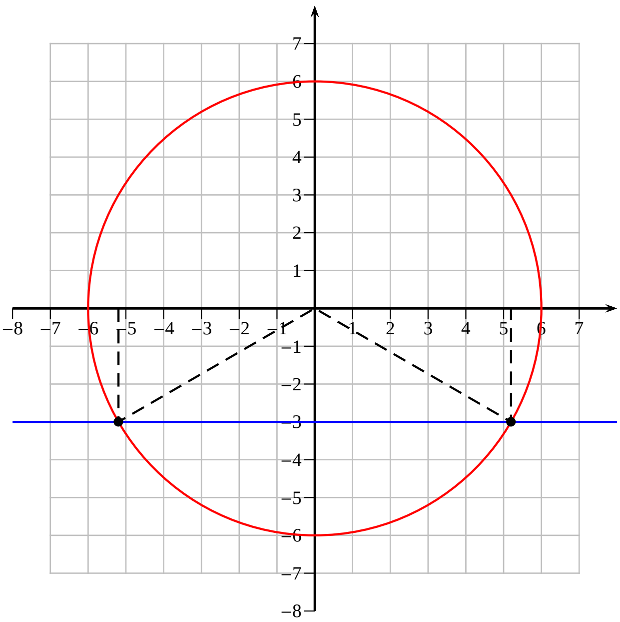
så vi verkar ha kommit fram till att $z = 3\cdot\sqrt{3} - 3\,i$ eller $z = -3\cdot\sqrt{3} - 3\,i$.

Räkna polärt: Om vi sätter $z = r\cdot(\cos(\theta) + i\,\sin(\theta))$ så vet vi alltså följande: $r = 6$ och att $r\cdot\sin(\theta) = -3$. Genom att sätta ihop informationen får vi

$$6\cdot\sin(\theta) = -3 \qquad \sin(\theta) = -1/2 \qquad \theta = -\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi \vee \theta = -\frac{5\cdot\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi$$

”Plus ett antal hela varv” är inte relevant här; vi klarar oss med de två grundlösningarna, för de placerar oss på två olika ställen. Vi har alltså funnit att $z = 6\cdot(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{6}))$ eller $z = 6\cdot(\cos(\frac{5\cdot\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{5\cdot\pi}{6}))$.

Arbeta grafiskt: Att imaginärdelen är -3 innebär att z ligger någonstans på den horisontella linjen $y = -3$ i det komplexa talplanet. Att beloppet är 6 innebär att z ligger någonstans på en cirkel med medelpunkt i origo och radie 6. Att z har båda dessa egenskaper innebär att z ligger där linjen och cirkeln skär varandra. Rita:



Vi ser att de skär i två punkter. Den inskissade triangeln är en ”30-60-90” (för den kortare katetens längd är hälften av hypotenusans), ur vilket vi antingen kan läsa ut argumentet eller realdelen (beroende på om vi vill ge svaret rektangulärt eller polärt).

$$\boxed{\begin{aligned}&\textit{Svar: } z = 3\cdot\sqrt{3} - 3\,i = 6\cdot(\cos(-\tfrac{\pi}{6}) + i\,\sin(-\tfrac{\pi}{6})) \quad \vee\\ &\qquad z = -3\cdot\sqrt{3} - 3\,i = 6\cdot(\cos(-\tfrac{5\cdot\pi}{6}) + i\,\sin(-\tfrac{5\cdot\pi}{6}))\end{aligned}}$$

Rättningsnorm: Helt löst: 3p. Löst till största delen: 2p. Åtminstone gjort något icke-trivialt och konstruktivt: 1p.

Referenser: Beror ju lite på hur man väljer att lösa uppgiften, men man behöver en delmängd av detta: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Realdel, imaginärdel • Belopp, argument • Rektangulär form, polär form Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.20

4. (a) Vad har tangensfunktionen för period? (1p)

Lösning:

π; 180°; ett halvt varv. (Tangensvärdet anger riktningskoefficienten, ”k-värdet”, för strålen, och låter man en visare gå varvet runt så återkommer samma lutning en gång varje halvvarv. Ritar man grafen består den av en del som upprepas varje gång man går π steg framåt.)

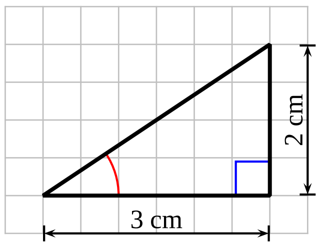
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • tangens • period; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion (vilket kräver att man känner till perioden). Undersökning 12.6

(b) Rita en vinkel med tangensvärdet $\frac{2}{3}$. (2p)

Lösning:

I en rätvinklig triangel är tangensvärdet lika med motstående katets längd delad med närliggande katets längd. Så om vi ritar en rätvinklig triangel med motstående katet med längd 2 l.e. och närliggande katet med längd 3 l.e. borde dess spetsvinkel uppfylla beställningen:



Den med rött markerade vinkeln har tangensvärdet $\frac{2}{3}$.

Alternativt kan man rita en enhetscirkel och söka en punkt på denna där y koordinaten (sinusvärdet) är två tredjedelar av x-koordinaten (cosinusvärdet), och rita vinkeln som för oss till denna punkt. Eller så ritar man i ett koordinatsystem en linje med riktningskoefficient $^2/_3$, och markerar vinkeln mellan den och x-axeln

Kommentar: Observera alltså att triangeln måste vara rätvinklig, och sidorna måste ha de angivna längderna. Att bara rita något skevt triangelartat och skriva dit måtten är inte att ha ritat vinkeln.

Rättningsnorm: Bild med helt klart korrekt vinkel: 2p. Visat förståelse för frågan: 1p.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • tangens; Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.19

(c) Vinkeln α uppfyller att $^{\pi}/_2 < \alpha < \pi$ och att $\sin(\alpha) = {}^3/_7$. Bestäm $\tan(\alpha)$. (Svaret är inte så snyggt, men det går att räkna ut.) (2p)

Lösning:

Tangensvärdet är sinusvärdet delat med cosinusvärdet. Sinusvärdet har vi. Med trigonometriska ettan kan vi ta fram cosinusvärdet:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\cos^{(}\alpha) = 1 - \sin^{(}\alpha) = 1 - (\tfrac{3}{7})^2 = 1 - \tfrac{9}{49} = \tfrac{40}{49}$$

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{40}{40}} = \pm\frac{\sqrt{40}}{7}$$

Eftersom vinkeln placerar oss i andra kvadranten, där x-värdena är negativa, är det det negativa alternativet som är rätt. Då har vi

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{3/7}{-\sqrt{40}/7} = \boxed{-\frac{3}{\sqrt{40}}}$$

(Om man vill kan man utnyttja omskrivningen $\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot \sqrt{10}$. Lite tillämpningsberoende om detta är en bra idé eller inte.)

Rättningsnorm: Helt rätt (minustecken inberäknat): 2p. Korrekt angreppssätt med något fel i utförandet: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa trigonometriska räkneregler. (Trigonometriska ettan ska kunnas utantill [. . .]). Övning 12.34

5. (a) Om man säger att $y = \log_a(x)$, exakt vad menar man? (Vi söker alltså definitionen av logaritm.) (1p)

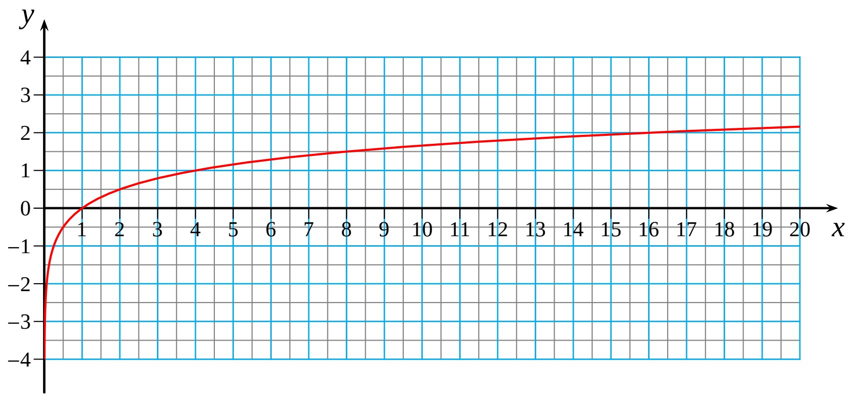
Lösning:

Att $a^y = x$; dvs. att y är det tal man ska upphöja a i om man vill få x som resultat. (Så $\log_{10}(1000) = 3$, eftersom man ska upphöja 10 i 3 om man vill få 1000.)

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm[. . .].

(b) Här är kurvan $y = \log_a(x)$:



Vad har a för värde, och hur avgör du det? (1p)

Lösning:

Då $y = 1$ är $x = 4$, så vi har $\log_a(4) = 1 \Leftrightarrow a^1 = 4$. Så $a = 4$. Kan dubbelkollas; alla lättberäknade punkter stämmer!

Rättningsnorm: Rätt svar ihop med något som kan tolkas som en motivering: 1p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion (vilket väl bör medföra att man känner igen en sådan); Övning 11.8. (Detta är i själva verket en rekommenderad uppgift; det finns inte så många kurvor som man kan använda i en sådan här fråga.)

(c) Förklara vad det är för skillnad på $\log_a(\frac{x}{y})$ och $\frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$.

(Förklaringen ska vara sådan att en kurskamrat kan förstå den.) (2p)

Lösning:

Det första innebär ”dividera talet x med talet y, och ta fram a-logaritmen för det då erhållna talet”. Det andra innebär ”ta fram a-logaritmerna för talen x och y var för sig, och dividera de två erhållna talen med varandra”. Som ett exempel:

$$\log_2(\frac{32}{8}) = \log_2(4) = 2 \qquad \text{respektive} \qquad \frac{\log_2(32)}{\log_2(8)} = \frac{5}{3} \approx 1{,}666667$$

$$\log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log_a(a^{m-n}) = m - n \qquad \frac{\log_a(a^m)}{\log_a(a^n)} = \frac{m}{n}$$

Kommentar: De här två uttrycken blir mycket ofta sammanblandade.

Rättningsnorm: 2p för en korrekt förklaring som det verkar troligt att en kurskamrat skulle förstå; 1p för något som med god vilja kan tolkas som en korrekt förklaring.

(d) Vilket av de två uttrycken ovan är lika med $\log_a(x) - \log_a(y)$? (1p)

Lösning:

Det första av dem.

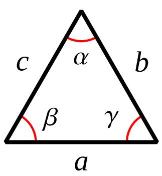
$$\log_2(32) - \log_2(8) = 5 - 3 = 2 \qquad \log_a(a^m) - \log_a(a^n) = m - n$$

(förutsatt att alla inblandade uttryck är definierade, vilket de t.ex. inte är om x och y båda är negativa).

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

Referenser: (gäller även föregående fråga) Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna; • Redogöra för och motivera logaritmreglerna. Övning 11.11–12

6. I den avbildade triangeln har sidan a längden $2\cdot\sqrt{2}$ cm, längden på sidan b är 4 cm och vinkeln α är 30°. Bestäm övriga sidor och vinklar i triangeln. (Der är inte alla värdena som är så vackra, men de går att räkna ut.)



OBS! Den avbildade triangeln är inte skalenlig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra! (5p)

Lösning:

Arbetet kan läggas upp på ett antal olika sätt. Här visas några, och man kan också kombinera metoderna.

Enbart cosinussatsen: Med två sidor och en vinkel har vi den information som krävs för att utnyttja cosinussatsen för att hitta den tredje sidan:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha)\\
(2\cdot\sqrt{2})^2 &= 4^2 + c^2 - 2\cdot 4\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
8 &= 16 + c^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot c\\
0 &= c^2 - 4\cdot\sqrt{3}\cdot c + 8\\
0 &= c^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot c + (2\cdot\sqrt{3})^2 - (2\cdot\sqrt{3})^2 + 8\\
0 &= (c - 2\cdot\sqrt{3})^2 - 12 + 8\\
0 &= (c - 2\cdot\sqrt{3})^2 - 2^2\\
0 &= (c - 2\cdot\sqrt{3} + 2)\cdot(c - 2\cdot\sqrt{3} - 2)
\end{aligned}$$

Nollfaktorlagen ger $c = 2\cdot\sqrt{3} - 2 \approx 1{,}4$ cm och $c = 2\cdot\sqrt{3} + 2 \approx 5{,}4$ cm. Båda resultaten är positiva, och därför rimliga. (Approximationen är baserad på $\sqrt{3} \approx 1{,}7$.)

När vi nu har de tre sidorna i triangeln kan vi använda dem för att hitta cosinusvärdet för någon av de resterande vinklarna, t.ex. β. Vi startar med det kortare förslaget på c:

$$\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)\\
4^2 &= (2\cdot\sqrt{2})^2 + (2\cdot\sqrt{3} - 2)^2 - 2\cdot(2\cdot\sqrt{2})\cdot(2\cdot\sqrt{3} - 2)\cdot \cos(\beta)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\cos(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Den enda i en triangel möjliga vinkel som har detta cosinusvärde är 135°.

Vi skulle kunna använda cosinussatsen även för den tredje vinkeln, men det är enklare att utnyttja vinkelsumman i en triangel:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \gamma = 180^\circ - 30^\circ - 135^\circ = 15^\circ.$$

På samma sätt ger det längre sidförslaget att $\beta = 45^\circ$ och att $\gamma = 105^\circ$.

Enbart sinussatsen: Ur två sidor och en motstående vinkel kan man få fram ytterligare en vinkel:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{4 \cdot 1/2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De två i en triangel möjliga vinklarna som har detta sinusvärde är 45° och 135°. Båda är rimliga, för ihop med α ger de fortfarande utrymme åt γ. $\beta = 45^\circ$ ger $\gamma = 105^\circ$, och $\beta = 135^\circ$ ger $\gamma = 15^\circ$.

Vill man nu ha även sidan c ur sinussatsen behöver man sinusvärdet för vinkeln γ, vilket går att ta fram med additionsformeln på tentapappret:

$$\sin(105^\circ) = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin(60^\circ) \cdot \cos(45^\circ) + \cos(60^\circ) \cdot \sin(45^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}$$

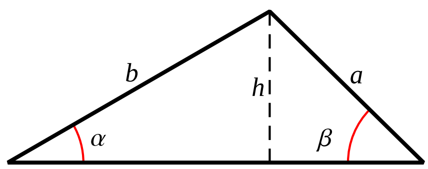
Samma metod ger

$$\sin(15^\circ) = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \cdots = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)}{4}$$

Sinussatsen ger nu

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)/4}{1/2} = 2 \cdot (\sqrt{3} + 1) \\[2ex] \dfrac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)/4}{1/2} = 2 \cdot (\sqrt{3} - 1) \end{cases}$$

Rätvinkliga trianglar: Det finns ett antal olika sätt att angripa problemet genom att dela upp triangeln i två rätvinkliga delar. Det är lämpligt att placera indelningen så att man inte delar upp något av de kända värdena i två okända delar:



Höjden:

$$h = b \cdot \sin(\alpha) = 4 \cdot \sin(30^\circ) = 2\,\mathrm{cm}$$

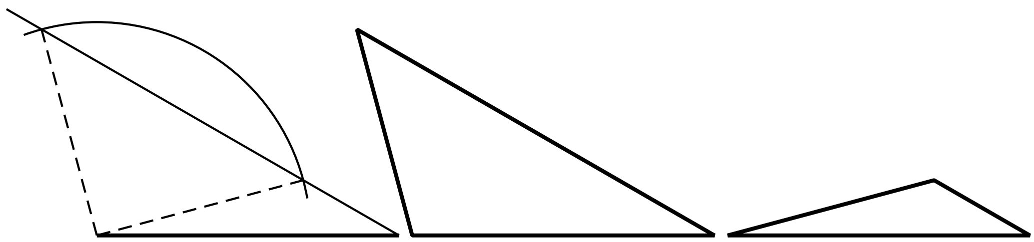
Vinkeln β:

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Detta ger att $\beta = 45°$ eller $\beta = 135°$. (I det senare fallet måste hörnet med vinkel β ligga till vänster om den punkt där höjden h går i marken.) Sidan c kan vi nu få ut som summan av de närliggande kateterna i de rätvinkliga trianglarna:

$$c = b\cdot\cos(\alpha) + a\cdot\cos(\beta)$$
$$= \begin{cases} 4\cdot\cos(30°) + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(45°) = \cdots = 2\cdot(\sqrt{3}+1)\,\text{cm} & (\beta = 45°) \\ 4\cdot\cos(30°) + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(135°) = \cdots = 2\cdot(\sqrt{3}-1)\,\text{cm} & (\beta = 135°) \end{cases}$$

Grafisk: Beskrivning utgående från att man har passare och gradskiva med sig. Rita sidan b. Rita ett streck i 30° vinkel från ena ändan av sidan. Ställ in en passare på längden $2\cdot\sqrt{2}$ (motsvarar sträckan diagonalt över 4 rutor). Slå en cirkelbåge, med passarspetsen i andra ändan av b. De ställen där den skär den sneda linjen motsvarar möjliga lägen för det tredje hörnet. Med gradskiva kan man mäta av vinklarna, och med linjal få ett approximativt värde på sidan c:s längd.



$\boxed{\textit{Svar: } \beta = 45°,\ \gamma = 105°,\ c = 2\cdot(\sqrt{3}+1)\,\text{cm alternativt } \beta = 135°,\ \gamma = 15°,\ c = 2\cdot(\sqrt{3}-1)\,\text{cm}}$

Kommentar: Om man hittat <u>två</u> alternativa svar för längden på sidan c men bara <u>ett</u> möjligt värdet på vinklarna β och γ bör man reagera på att något inte stämmer!

Rättningsnorm: Hittat alla måtten i båda alternativen: 5p. Hittat alla måtten i det ena alternativet: 4p. Gjort något icke-trivialt och konstruktivt: minst 1p. I övrigt poäng efter hur stor del av lösningen man fått ihop. Approximativ lösning: max 3p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. (Och om man arbetar grafiskt: • Använda linjal och gradskiva. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare.) Exempel 12.9 och 10, Övning 12.21–23.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2019.06.04 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. (a) Du och din kompis pluggar tillsammans, och tittar på definitionen av absolutbelopp:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

”Men minus x är ju negativt!” säger kompisen. ”Var det inte meningen att belopp skulle vara positiva?”

Förklara för kompisen var hen har tänkt fel. (Det är meningen att kompisen ska förstå förklaringen!) (1p)

Lösning:

”Du tycker det måste vara negativt för att det är ett minustecken på. Men det är inte säkert! Sätter man ett minustecken på något som redan har ett minustecken så blir det *positivt*. Du ser att man bara ska sätta på det där minustecknet på negativa tal, och det kommer att göra dem positiva.”

Rättningsnorm: En förklaring som kompisen kan tänkas begripa: 1p.

(b) Lös olikheten $|x + 2{,}5| > 0{,}5$. (2p)

Lösning:

Absolutbeloppets definition: Enligt definitionen av absolutbelopp är

$$|x+2{,}5| = \begin{cases} x+2{,}5 & \text{om } x+2{,}5 \geq 0 \\ -(x+2{,}5) & \text{om } x+2{,}5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2{,}5 & \text{om } x \geq -2{,}5 \\ -x-2{,}5 & \text{om } x < -2{,}5 \end{cases}$$

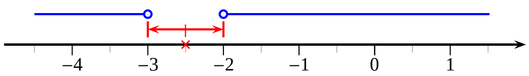
Problemet kan därför skrivas om till två delproblem:

$$\boxed{x \geq -2{,}5}$$
$$x + 2{,}5 > 0{,}5$$
$$x > -2$$

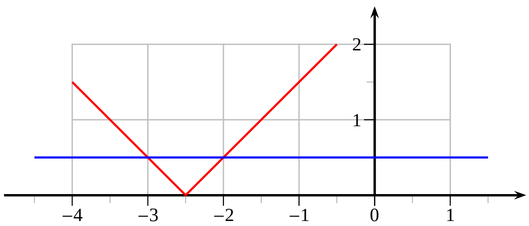
$$\boxed{x < -2{,}5}$$
$$-x - 2{,}5 > 0{,}5$$
$$-x > 3$$
$$x < -3$$

Så av talen till höger om $-2{,}5$ kan vi använda de som ligger till höger om -2, och av talen till vänster om $-2{,}5$ kan vi använda de som ligger till vänster om -3.

Geometrisk tolkning: Absolutbeloppet kan tolkas som ett avstånd; $|x-a|$ är avståndet mellan x och a på tallinjen. Så olikheten $|x-(-2{,}5)| > 0{,}5$ kan tolkas som ”talet x ligger mer än en halv längdenhet från punkten $-2{,}5$ på tallinjen”. Detta stämmer för alla tal i det blåmarkerade området:



Grafisk lösning: Kurvan $y = |x + 2{,}5|$ ser ut som den vanliga beloppskurvan flyttad 2,5 steg åt vänster (så att det som normalt händer vid $x = 0$ nu händer redan vid $x = -2{,}5$, eftersom $-2{,}5 + 2{,}5 = 0$). $y = 0{,}5$ är en horisontell linje. Olikhetens lösningsmängd är de områden där beloppskurvan ligger *ovanför* linjen.



Det är överallt utom mellan -3 och -2.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in (-\infty, -3) \cup (-2, \infty)}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat förståelse för frågan: 1p.

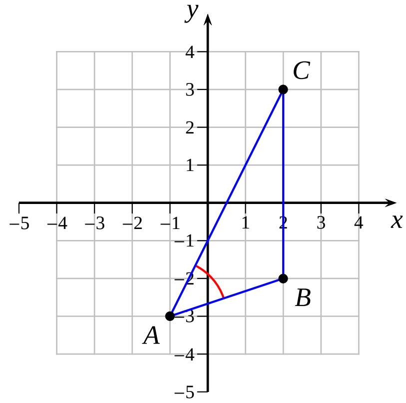
Referenser: (Gäller även föregående deluppgift) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp; Du ska kunna göra följande: • Tolka absolutbelopp som avstånd. • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Övning 10.6, 10.15.

2. En triangel är ritad i ett ortonormerat koordinatsystem. Hörn A har koordinaterna $(-1, -3)$, hörn B har koordinaterna $(2, -2)$ och hörn C har koordinaterna $(2, 3)$. Bestäm vinkeln vid hörn A.

Uppgiften går att lösa med hjälp av det som tagits upp i kursen, men du kan behöva tänka självständigt. För full poäng krävs en beräkning eller annan matematisk motivering; delpoäng för korrekt svar erhållet utan detta. (3p)

Lösning:

Det är antagligen bra att börja med att rita bild. ”Ortonormerat koordinatsystem” betyder ”alldeles vanligt koordinatsystem” (med raka axlar i rät vinkel och med samma gradering). Vi markerar hörnpunkterna och förbinder dem:



Vinkeln ser ut att vara ca 45°, men ögonmått räknar förmodligen inte som en ”matematisk motivering”, så...

Cosinussatsen: Med de tre sidlängderna och cosinussatsen kan man ta reda på en vinkel i en triangel. Då behöver vi sidlängderna. Den lodräta sidan BC har helt klart längden 5 l.e., men de andra går på snedden. Med Pythagoras sats kan vi ta fram deras längder, ur skillnaderna Δx och Δy i ändpunkternas koordinater:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-3))^2} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} \end{aligned}$$

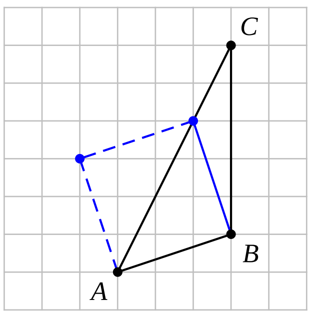
Cosinussatsen ger nu

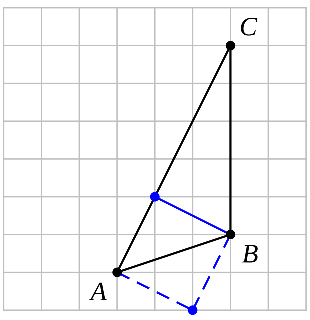
$$\begin{aligned} (BC)^2 &= (AB)^2 + (AC)^2 - 2\cdot(AB)\cdot(AC)\cdot\cos(\alpha) \\ 5^2 &= (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{45})^2 - 2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\cos(\alpha) \\ 25 &= 10 + 45 - 2\cdot\sqrt{450}\cdot\cos\alpha \\ 25 - 10 - 45 &= -2\cdot\sqrt{9\cdot 25\cdot 2}\cdot\cos(\alpha) \\ -30 &= -2\cdot 3\cdot 5\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{-30}{-30\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Den enda i en triangel möjliga vinkeln med detta cosinusvärde är 45°.

Halv kvadrat: Om vi kan visa att vinkeln ingår i en halv kvadrat så måste den vara 45°.

Sidan AB har lutning $1/3$, 3 rutor framåt för en ruta uppåt. En linje som är precis tvärtom, 1 ruta framåt för 3 rutor neråt, går i rät vinkel mot detta. (Ingår i gymnasiekursen.) Rita in en sådan från hörn B. Den nyritade linjen har exakt samma längd som sidan AB, och vinkeln vid B är rät. Då har vi en halv kvadrat, och då är de två andra vinklarna 45°.





Alternativt går vi vinkelrätt mot sidan AC. Den har lutning 2, 1 ruta framåt för 2 rutor uppåt. Tvärtom är 2 rutor framåt för 1 ruta neråt. Här ser vi också två sidor med exakt samma längd som möts i en rät vinkel, och då är övriga vinklar 45°.

Svar: 45°

Rättningsnorm: Mätning i bild: 1p. Helt korrekt beräkning: 3p.Gjort något konstruktivt, mer avancerat än att bara rita: 1p. Mellanting: 2p. Bild med någon form av argumentation för att vinkeln måste vara 45°: 3p om vattentät, annars delpoäng.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Koordinatsystem, ON-system • Vinkel, längd; Du ska kunna göra följande: • Använda linjal och gradskiva. • Göra en approximativ uppskattning av en vinkel i grader med ögonmått. • Tillämpa Pythagoras sats. • [...] tillämpa [...] cosinussatsen.

3. Lös följande ekvation: $\log_{100}(5-x) = \log_{100}(x-4)$. (3p)

Lösning:

Rekommenderad övning 11.19(b).

Logaritmfunktionens egenskaper: Logaritmfunktioner är *injektiva*, de antar inte samma värde på två olika ställen. Så om två tal har samma logaritm så är de lika:

$$\begin{aligned} \log_{100}(5-x) &= \log_{100}(x-4) \\ 5-x &= x-4 && \text{Samma logaritm, samma tal} \\ 9 &= 2\cdot x && \text{"Flytta över"} \\ x &= 4{,}5 && \text{Halvera} \end{aligned}$$

Kontroll:

$$\begin{cases} \mathrm{VL} = \log_{100}(5-4{,}5) = \log_{100}(0{,}5) \\ \mathrm{HL} = \log_{100}(4{,}5-4) = \log_{100}(0{,}5) \end{cases} \quad \text{OK!}$$

(Det som skulle ha kunnat gå snett är om båda leden blev logaritm av samma negativa tal.)

Räkneregler för logaritmer:

$$\begin{aligned} \log_{100}(5-x) &= \log_{100}(x-4) \\ \log_{100}(5-x) - \log_{100}(x-4) &= 0 && \text{"Flytta över"} \\ \log_{100}\left(\frac{5-x}{x-4}\right) &= 0 && \text{Differens till kvot} \\ \frac{5-x}{x-4} &= 100^0 && \text{Logaritmens definition} \\ \frac{5-x}{x-4} &= 1 \\ 5-x &= x-4 && \text{"Multiplicera upp"} \\ &\vdots && \text{Se föregående beräkning} \end{aligned}$$

Utnyttja potenser:

$$\begin{aligned} \log_{100}(5-x) &= \log_{100}(x-4) \\ 100^{\log_{100}(5-x)} &= 100^{\log_{100}(x-4)} \\ 5-x &= x-4 \\ &\vdots && \text{Se föregående beräkning} \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Svar: } x = 4{,}5}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone redovisat kunskap om någon logaritmregel: 1p. Mellanting: 2p.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. Detta var den rekommenderade Övning 11.19(b).

4. **(a)** Rita kurvan $y = 4 + 3\cdot\sin(2\cdot x)$. Rita med omsorg. Koordinatsystemet måste vara graderat. (2p)

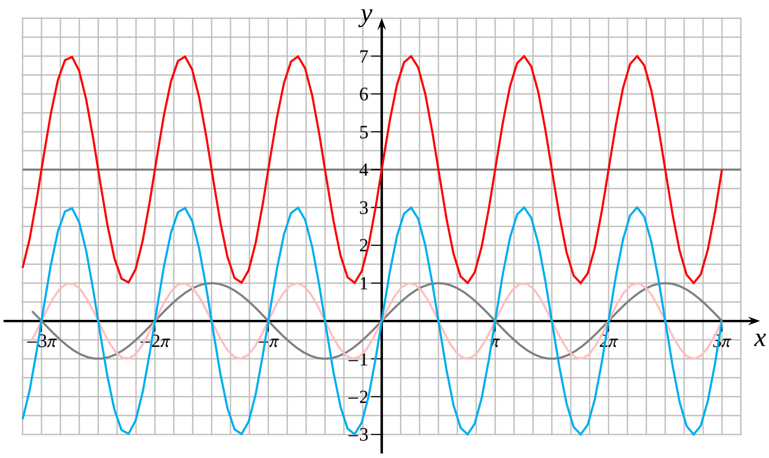
(b) Lös ekvationen $4 + 3\cdot\sin(2\cdot x) = 1$. (3p)

Lösning:

(a) *Ur värdetabell:* Gör upp en värdetabell för ett tillräckligt antal x-värden, pricka ut, och skissa:

x	$-\pi$	$-\frac{3\cdot\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\cdot\pi}{4}$	π
$2\cdot x$	$-2\cdot\pi$	$-\frac{3\cdot\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\cdot\pi}{2}$	$2\cdot\pi$
$\sin(2\cdot x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$3\cdot\sin(2\cdot x)$	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0
$4+3\cdot\sin(2\cdot x)$	4	7	4	1	4	7	4	1	4

Ut transformationer: Vi vet hur $y = \sin(x)$ ser ut: våglinje, period $2\cdot\pi$, amplitud 1, passerar origo (ritad i grått). $y = \sin(2\cdot x)$ ser likadan ut, men med halverad period (ritad i skärt). $y = 3\cdot\sin(2\cdot x)$ ser ut som föregående, men med 3-dubblad amplitud (ritad i turkos). $y = 4+3\cdot\sin(2\cdot x)$ se ut som föregående, men uppflyttad 4 steg (så att mittlinjen ligger på höjd $y = 4$) i rött.



Rättningsnorm: Helt rätt (max- och min på rätt ställen, och någorlunda vågformat): 2p. Någon del (våglängd, våghöjd, centrumhöjd, axelskärning) fel: 1p. Mer fel än så: 0p.

(b) Det är bara att försöka gräva fram det trigonometriska uttrycket...

$$\begin{aligned}
4+3\cdot\sin(2\cdot x) &= 1 \\
3\cdot\sin(2\cdot x) &= -3 && \text{Subtrahera 4} \\
\sin(2\cdot x) &= -1 && \text{Dividera med 3} \\
2\cdot x &= -\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\cdot\pi \quad n\in\mathbb{Z} \\
x &= -\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi && \text{Dividera med 2}
\end{aligned}$$

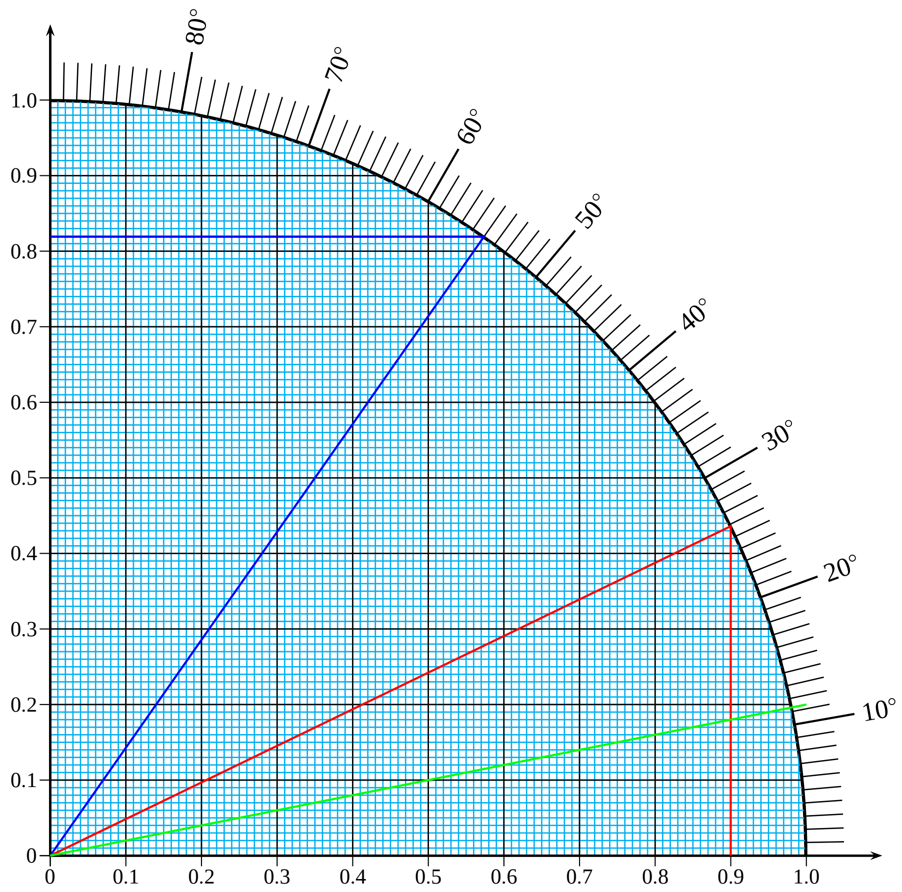
(Det hade gått lika bra att utgå från $2\cdot x = \frac{3\cdot\pi}{2}+n\cdot 2\cdot\pi$; det ger en annan beskrivning av samma mängd vinklar.) Notera att det här är ett av de två undantagen från regeln att lösbara sinusekvationer har två grundlösningar (en i uppförsbacke och en i nerförsbacke; den här ligger på gränsen mellan nerför och uppför).

Svaret kan också läsas ut ur grafen, eller ur värdetabellen (men då måste man motivera hur man vet att det inte finns några punkter med det y-värdet som inte är inkluderade i tabellen).

$$\boxed{\textit{Svar: } x = -\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Ej tagit med "$+n\cdot 2\cdot\pi$" i beräkningen: 0p. Annars: nästan rätt: 2p; visat någon förståelse för frågan: 1p.

Referenser: (för båda uppgifterna) Du ska kunna göra följande: • Skissa kurvorna $y = f(x+c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(cx)$ och $y = cf(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.50–52



5. **(a)** Bestäm med bildens hjälp sin(55°)så noga du kan. (1p)

(b) En vinkel β mellan 180° och 270° har cosinusvärdet −0,9. Bestäm med bildens hjälp vinkeln β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

(c) En vinkel γ mellan 0° och 90° har tangensvärdet $1/5$. Bestäm med bildens hjälp vinkeln γ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

(a) Läs av y-koordinaten vid vinkeln 55°:

$\boxed{\textit{Svar: } \sin(55°) \approx 0{,}82}$

Rättningsnorm: Svar mellan 0,81 och 0,83 accepteras.

(b) Symmetri: hitta den vinkel mellan 0° och 90° som har cosinusvärdet 0,9, och lägg 180° därtill. Hitta den punkt på cirkeln som har x-koordinat 0,9, vilket verkar vara vid 26°. Sammanlagt

$\boxed{\textit{Svar: } \beta \approx 206°}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat förståelse för frågan: 1p.

(c) Tangensvärdet för en vinkel motsvarar riktningskoefficienten (”k-värdet”) för strålen. Rita en linje med k-värde $1/5$; dvs. en som går 1 steg uppåt på 5 steg framåt. Läs av var den skär cirkeln.

$\boxed{\textit{Svar: } \gamma \approx 11°}$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Visat förståelse för frågan: 1p.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Sinus, cosinus, tangens; Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.8–9

6. $z = 20 - 20\,i$, $w = 30 + 40\,i$. Bestäm på maximalt förenklad form

(a) $z{\cdot}w$ (1p)

(b) $\dfrac{w}{z}$ (2p)

(c) $\arg z$ (1p)

(d) $|w|$ (1p)

Lösning:

(a) Det kan bli enklare om vi bryter ut en faktor ur talen.

$$\begin{aligned} z{\cdot}w &= 20{\cdot}(i-i){\cdot}10{\cdot}(3+4\,i) = 200{\cdot}(1{\cdot}3+1{\cdot}4\,i-i{\cdot}3-i{\cdot}4\,i) = 200{\cdot}(3+4\,i-3\,i-4\,i^2) \\ &= 200{\cdot}((3+4)+(-3+4)\,i) = 200{\cdot}(7+i) = \boxed{1400+200\,i} \end{aligned}$$

Rättningsnorm: För uppgifterna som helhet: ”Poängavdrag” för det första räknefelet, men inte för efterföljande. Denna uppgift: helt rätt för poäng.

(b) Standardknep: förläng med nämnarens konjugat. Räkningarna blir väsentligt mycket enklare om vi utnyttjar utbrytningen:

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{10{\cdot}(3+4\,i)}{20{\cdot}(1-i)} = \frac{(3+4\,i){\cdot}(1+i)}{2{\cdot}(1-i){\cdot}(1+i)} = \frac{3{\cdot}1+3{\cdot}i+4\,i{\cdot}1+4\,i{\cdot}i}{2(1^2-i^2)} \\ &= \frac{3+3\,i+4\,i+4\,i^2}{2{\cdot}(1+1)} = \frac{(3-4)+(3+4)\,i}{2{\cdot}2} = \boxed{\frac{-1+7\,i}{4}} \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt grundtanke: 1p.

(c) Markerar vi z i det komplexa talplanet finner vi att det går ner i fjärde kvadranten, som diagonalen i en kvadrat med sidlängden 20. Då måste vinkeln vara $\boxed{-\frac{\pi}{4}}$ ($\frac{7{\cdot}\pi}{4}$ är ett lika bra svar).

Rättningsnorm: Korrekt svar med något som kan tolkas som en motivering: 1p.

(d) Även beloppsberäkningen blir enklare om man bryter ut en faktor:

$$\begin{aligned} |w| &= |10{\cdot}(3+4\,i)| = 10{\cdot}|3+4\,i| = 10{\cdot}\sqrt{3^2+4^2} \\ &= 10{\cdot}\sqrt{9+16} = 10{\cdot}\sqrt{25} = 10{\cdot}5 = \boxed{50} \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel. 0p om man ”förkortar bort” kvadratera mot roten.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Redogöra för och tillämpa räknereglerna för komplext konjugat och belopp. Övning 13.11, 13.15

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2019.08.16 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Ange det exakta värdet på följande, och förklara kort hur du tänkte. (En bild är en fungerande förklaring.)

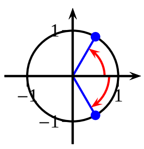
(a) $\sin(-60°)$ (1p)

(b) $\cos(\frac{5\cdot\pi}{4})$ (1p)

(c) $\tan(330°)$ (1p)

Lösning:

(a) $\sin(-60°) = -\sin(60°) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ Exempel på motivering:



(b) $\cos(\frac{5\cdot\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Exempel på motivering:

$$\cos(\frac{5\cdot\pi}{4}) = \cos(\pi+\frac{\pi}{4}) = \cos(\pi)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\pi)\cdot\sin(\frac{\pi}{4}) = -1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c) $\tan(330°) = -\tan(30°) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Att referera till en standardvinkel som man känner till och på något sätt (t.ex. med enhetscirkel) förklara hur det kommer sig att den givna vinkelns trignometriska värde har samma ”siffror” men annat tecken är tillräckligt motivering. (Om man istället korrekt tar fram ”siffrorna” med hjälp av trianglar så är det också OK, frågan är lite otydlig med hur mycket som ska motiveras.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Räkna om mellan grader och radianer. radianer. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. Exempel 12.5, Övning 12.11.

Rättningsnorm: Helt rätt svar med något som kan tolkas som en motivering ger poäng.

2. **(a)** Funktionen f definieras enligt $f(x) = |x+1| - 2\cdot x - |x-3|$. Rita kurvan $y = f(x)$.

(b) Lös ekvationen $|x + 1| - 2\cdot x - |x - 3| = -2$.

Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

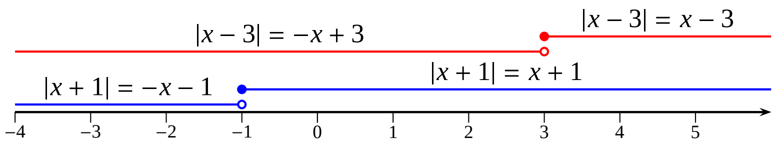
Lösning:

Graf genom omskrivning: Omskrivning av de två beloppsuttrycken till styckvis definierade funktioner:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{om } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{om } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{om } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{om } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{om } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{om } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{om } x < 3 \end{cases}$$

Illustrerat på tallinjen:



De två brytpunkterna delar tallinjen (de reella talen) i tre delar: innan första punkten, mellan de två punkterna och efter den andra punkten. Sammanställt:

$$f(x) = |x+1| - 2\cdot x - |x-3| = \begin{cases} (x+1) - 2\cdot x - (x-3) & \text{om } x \geq 3 \\ (x+1) - 2\cdot x - (-x+3) & \text{om } -1 \geq x < 3 \\ (-x-1) - 2\cdot x - (-x+3) & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

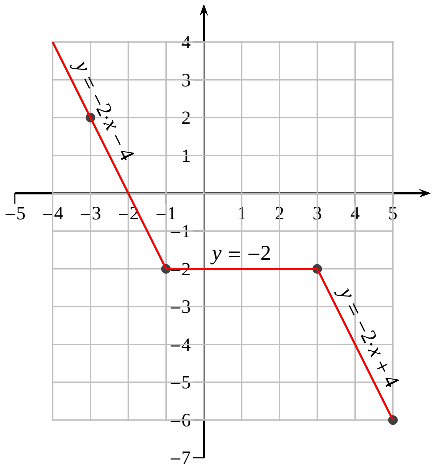
$$= \begin{cases} -2\cdot x + 4 & \text{om } x \geq 3 \\ -2 & \text{om } -1 \geq x < 3 \\ -2\cdot x - 4 & \text{om } x < -1 \end{cases}$$

Med hjälp av stödpunkter: Beloppsuttrycken säger att kurvan kommer att förändra utseende vid $x = -1$ och $x = 3$. I övrigt har vi en summa av förstagradsuttryck, vilket kommer att ge ett förstagradsuttryck (eller en konstant) som resultat. Förstagradruttryck motsvarar räta linjer, och en rät linje kan ritas ur två punkter. Om vi tar reda på funktionsvärdena i brytpunkterna, och så ytterligare ett värde till vänster och ett till höger, så kan vi använda de erhållna punkterna för att rita kurvan med hjälp av linjal.

$$\begin{array}{ll} x = -3 & f(-3) = |-3+1| - 2\cdot(-3) - |-3-3| = |-2| + 6 - |-6| = 2 + 6 - 6 = 2 \\ x = -1 & f(-1) = |-1+1| - 2\cdot(-1) - |-1-3| = |0| + 2 - |-4| = 0 + 2 - 4 = -2 \\ x = 3 & f(3) = |3+1| - 2\cdot 3 - |3-3| = |4| - 6 - |0| = 4 - 6 - 0 = -2 \\ x = 5 & f(5) = |5+1| - 2\cdot 5 - |5-3| = |6| - 10 - |2| = 6 - 10 - 2 = -6 \end{array}$$

(Man kan göra en mer omfattande värdetabell, men det här räcker. Risken med en mer omfattande tabell är att man försöker rita en vackert böjd kurva istället för den kantiga grej det ska vara.)

Bild: Utgår vi från formlerna behövs ingen värdetabell. Riktningskoefficient −2 säger att linjalen ska ligga så att en ruta framåt ger två rutor neråt, och konstanttermerna säger var linjalen ska skära y-axeln. Sedan är det bara att dra i rätt del av strecket.



Ekvation ur bild: Ur bilden ser vi att värdet är -2 för alla x från och med -1 till och med 3. Detta intervall är alltså ekvationens lösningsmängd. (Ekvationer har *vanligtvis* ett antal diskreta punkter som lösningsmängd, men ibland får man intervall. För olikheter är det tvärtom.) Har vi bilden finns det alltså ingen anledning att räkna för att lösa ekvationen.

Ekvation ur formler: Vi kan också räkna på de tre fallen:

$\boxed{x < -1}$	$\boxed{-1 \leq x < 3}$	$\boxed{x \geq 3}$
$-2\cdot x - 4 = -2$	$-2 = -2$	$-2\cdot x + 4 = -2$
$-2\cdot x = 2$	Sant!	$-2\cdot x = -6$
$x = -1$		$x = 3$
$-1 \not< -1$ ej OK		$3 \geq 3$ OK!

Då man löser en ekvation söker man de värden på den obekanta som gör det som står sant. ”$-2 = -2$” är omöjligt att göra falskt, det spelar ingen roll vad x är! Alltså är alla värden i intervallet $[-1, 3)$ lösningar. Sedan tillkommer ändpunkten $x = 3$.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in [-1, 3]}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Lösning, lösningsmängd; Du ska kunna göra följande: • Rita en rät linje [. . .]. • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Exempel 10.5, 10.6, Övning 10.14–15

Rättningsnorm: Korrekt kurva och korrekt svar på ekvationen: 3p. Något icketrivialt och konstruktivt: 1p. Mellanting: 2p. 0p om man bara struntar i beloppstecknen.

3. Förklara på valfritt sätt varför sambandet $\cos(\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ gäller för alla vinklar α. (3p)

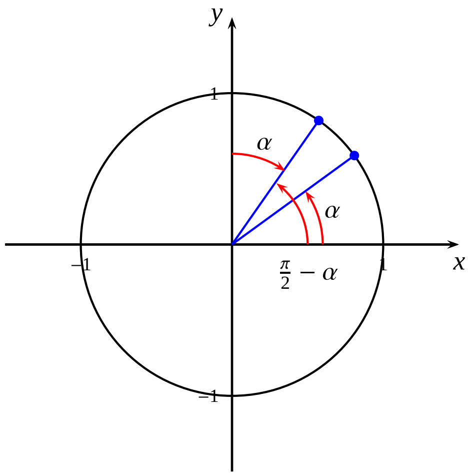
Lösning:

Detta är rekommenderad uppgift 12.44(b).

Formler: Vi kan anse att de på tentan bifogade formlerna är bevisade.

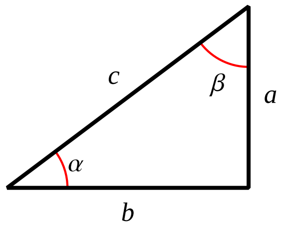
$$\begin{aligned} \text{HL} = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2})\cdot\cos(\alpha) - \cos(\frac{\pi}{2})\cdot\sin(\alpha) \\ = 1\cdot\cos(\alpha) - 0\cdot\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \text{VL} \end{aligned}$$

Enhetscirkel: Vi ritar in vinkeln α och vinkeln $\frac{\pi}{2} - \alpha$ i en enhetscirkel. $\cos(\alpha)$ är x-koordinaten för den punkt där strålen skär cirkeln; $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ är y-koordinaten för den andra strålens skärningspunkt.



Symmetrin ger att de två koordinaterna är lika.

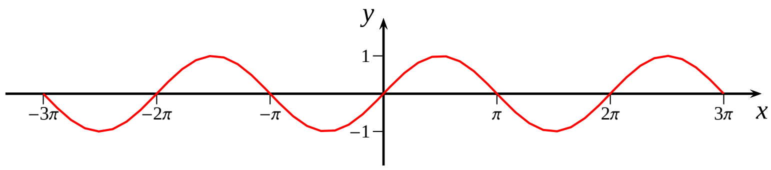
Triangel: Detta argument visar bara sambandet för vinklar mellan 0° och¨90°, men det är en bra början. I en rätvinklig triangel med en vinkel α är den andra o-räta vinkeln $\beta = 90° - \alpha$. Det som ur den ena vinkelns synpunkt är ”motstående” är ur den andra vinkelns synpunkt ”närliggande”.

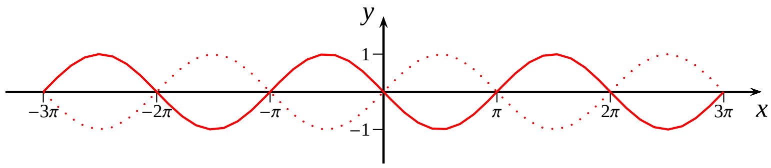


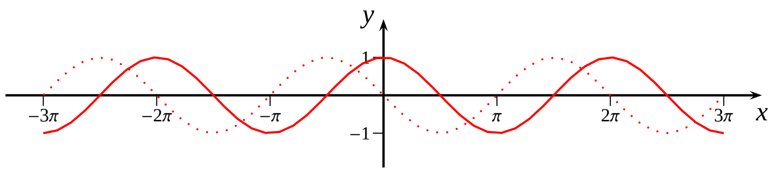
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\beta) = \frac{b}{c}$$

Värdena är lika!

Grafer: $y = \sin(x)$ vet vi hur den ser ut. (Passerar origo, lutar uppåt där, amplitud 1, period $2{\cdot}\pi$. $y = \sin(-x)$ ser likadan ut, fast speglad i y-axeln, så att det som brukar ske på positiva sidan nu sker på negativa sidan, och tvärtom. $y = \sin(-x + \pi/2) = \sin(-(x - \pi/2))$ ser likadan ut, fast flyttad $\pi/2$ (vilket är en kvarts våglängd) åt höger:







Det blev visst en cosinuskurva!

Tabell: Tabellera ett antal lätthanterade x-värden, räkna ut vad $\frac{\pi}{2} - x$ är, räkna ut sinus för detta. Konstatera att det blev en tabell över cosinusvärden. (Inte helt vattentätt sätt att argumentera, men en bra början.)

Att bara kontrollera ett enda värde är inte tillräckligt; nästan alla sådana här likheter stämmer för *någon* vinkel, men inte för alla som finns.

Referenser: Du ska kunna göra följande: (Beror i viss mån på hur man väljer att angripa problemet) • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Tillämpa trigonometriska räkneregler.

Undersökning 12.10, Övning 12.44(b).

Rättningsnorm: 3p för ett hyfsat genomfört resonemang (även triangeln och tabellen). 1p om man åtminstone visat förståelse för frågan. 2p för mellanting.

4. (a) Utgå från att a, b och c är reella tal större än 1, och att a är större än b. Vilket tal är störst, $\log_a(c)$ eller $\log_b(c)$? Motivera! (2p)

Lösning:

Logaritmens definition: (Något informellt formulerat.) Logaritmen är den exponent man ska sätta på basen för att få det givna talet. Om basen är stor behövs inte så stor exponent för att få ett visst resultat; exempelvis är $4^3 = 2^6$, vilket innebär att $\log_4(64) = 3$ medan $\log_2(64) = 6$. (Sedan börjar det fungera tvärtom för tal mellan 0 och 1, vilket nog var anledningen till att det stod att talen vi tittade på var större än 1.)

Omräkning av logaritmer: Vi kan göra om logaritmerna till samma sorts logaritm; det bör göra dem lättare att jämföra. Enligt formeln för basbyte i logaritmer är

$$\log_a(c) = \frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}$$

Eftersom a är större än b måste $\log_b(a)$ vara större än 1, och delar man ett positivt tal med ett tal större än 1 blir resultatet mindre än det man hade från början. Så $\log_a(c)$ är mindre än $\log_b(c)$.

Grafer: Grafen för en logaritmfunktion $\log_d$ passerar punkterna $(1, 0)$ och $(d, 1)$. Om $a < b$ kommer $(a, 1)$ att ligga till höger om $(b, 1)$, och då ligger kurvan $y = \log_a(x)$ nedanför $y = \log_b(x)$ (åtminstone från $x = 1$). Och då är värdet man får för ett visst x lägre på a-kurvan än på b-kurvan. (Notera dock att om a och b skulle vara mindre än 1 så ligger de här kurvdelarna under x-axeln, och då har den av kurvorna som ligger närmast axeln *högst* värde.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: (beror lite på hur man angriper problemet) • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser. • Byta bas för en logaritm. • Skissa grafen för en logaritmfunktion. Svarar inte mot någon rekommenderad uppgift, utan testar förmågan att tillämpa det man lärt ur uppgifterna.

Rättningsnorm: Rätt svar med något som går att tolka som grunden i en förklaring ger full poäng. Lite svårt att säga hur en 1p-lösning ser ut, men de finns säkert.

(b) Förenkla $\log_{100}(15) - 3\cdot\log_{100}(3) + \log_{100}(18)$ maximalt. (3p)

Lösning:

Baka ihop:

$$\begin{aligned}
&\log_{100}(15) - 3\cdot\log_{100}(3) + \log_{100}(18)\\
&\qquad = \log_{100}(15) - \log_{100}(3^3) + \log_{100}(18)\\
&\qquad = \log_{100}\left(\frac{15\cdot 18}{3^3}\right)\\
&\qquad = \log_{100}\left(\frac{\cancel{3}\cdot 5\cdot \cancel{9}\cdot 2}{\cancel{3^3}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \log_{100}(10)$$
$$= \log_{100}(100^{1/2})$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ta isär:

$$\log_{100}(15) - 3 \cdot \log_{100}(3) + \log_{100}(18)$$
$$= \log_{100}(3 \cdot 5) - 3 \cdot \log_{100}(3) + \log_{100}(2 \cdot 3^2)$$
$$= \log_{100}(3) + \log_{100}(5) - 3 \cdot \log_{100}(3) + \log_{100}(2) + 2 \cdot \log_{100}(3)$$
$$= (1 - 3 + 2) \cdot \log_{100}(3) + \log_{100}(5) + \log_{100}(2)$$
$$= 0 + \log_{100}(5 \cdot 2)$$
$$= \log_{100}(10)$$
$$= \log_{100}(100^{1/2})$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$). • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna; Exempel 11.2, Övning 11.12

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Visat kunskap om någon logaritmlag: 1p. Kommit en bra bit på väg men inte till svar, och inte gjort något fel i logaritmräkningen: 2p.

5. (a) Skriv talet $3 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i\ \sin(\frac{\pi}{4}))$ på rektangulär form. (1p)

Lösning:

Utveckla och multiplicera in:

$$3 \cdot (\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\ \sin(\tfrac{\pi}{4})) = 3 \cdot (\tfrac{\sqrt{2}}{2} + i\ \tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \boxed{\tfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + \tfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}\ i}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Byta mellan rektangulär form och polär form. Exempel 13.8, Övning 13.15

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Skriv talet $-5\,i$ på polär form. (1p)

Lösning:

Detta är föregående frågetyp baklänges. Vi behöver veta hur långt talet ligger från origo, och i vilken riktning (mätt relativt positiva realaxeln). Talet ligger 5 steg rakt neråt, vilket kan beskrivas som i riktning $-\frac{\pi}{2}$ eller som riktning $\frac{3 \cdot \pi}{2}$ (två olika vinklar som pekar ut samma riktning).

Svar: $\boxed{5 \cdot (\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\ \sin(-\tfrac{\pi}{2}))}$

Referenser: Se (a).

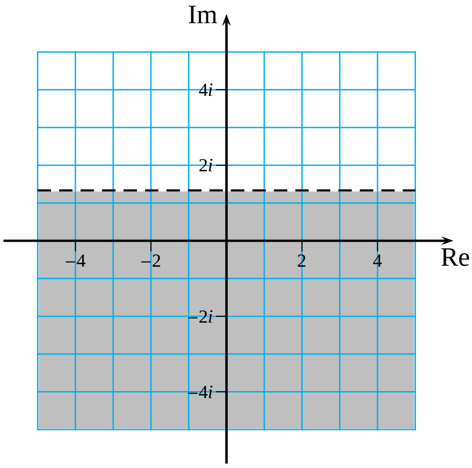
Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel, men om både (a) och den här är ”halvrätta” kan 1p ges för uppgifterna tillsammans.

(c) Illustrera lösningsmängden till följande problem i det komplexa talplanet:

$$\mathrm{Im}(z) < \frac{4}{3}$$ (1p)

Lösning:

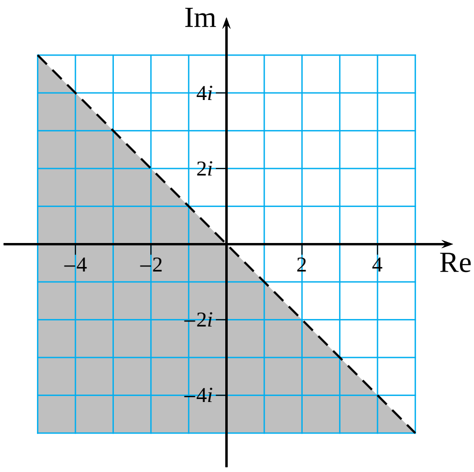
Rekommenderad uppgift 13.18(b). Imaginärdelen motsvarar i komplexa talplanet y-koordinaten; olikheten innebär att vi ska befinna oss nedanför linjen $y = 4/3$:



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. Exempel 13.13, Övning 13.18

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(d) Skriv en ekvation eller olikhet, där lösningsmängden motsvarar det gråmarkerade området i bilden: (2p)



Lösning:

Rekommenderad uppgift 13.19(c).

Rektangulärt: Om vi ser detta som ett "vanligt" koordinatsystem så är den streckade linjen $y = -x$. Eftersom det markerade området ligger nedanför linjen så motsvar det att $y < -x$. Omformulerat i komplexa tal blir detta

$\boxed{\textit{Svar: } \mathrm{Im}(z) < -\mathrm{Re}(z)}$

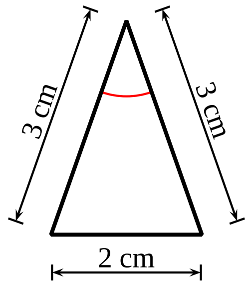
Polärt: Om vi ser det som att vi står med en strålkastare i origo och försöker svepa av det markerade området får vi tända strålkastaren då den är riktat 135° (mätt mot positiva x-axeln), och släcka den igen då vi vridit den ytterligare 180°, så att den pekar åt 315°.

$$\boxed{\textit{Svar: } \frac{3\cdot\pi}{4} < \arg(z) < \frac{7\cdot\pi}{4}}$$

Referenser: Se (a) samt Övning 13.19.

Rättningsnorm: 2p för rätt svar, 1p vid visad förståelse för frågan.

6. (a) Du och din kompis ska bestämma tangensvärdet för den markerade vinkeln i triangeln. Din kompis säger:



☠ ”Det är enkelt. Tangens är motstående genom närliggande, så det blir 2/3.”

Förklara för din kompis varför det där inte är rätt. (Det räcker inte att säga ”för man ska göra så här istället”, utan du måste klargöra varför kompisens förslag inte fungerar.) (1p)

Lösning:

”Du, det där med motstående genom närliggande gäller i rätvinkliga trianglar. Den här är inte rätvinklig!”

Kommentar: Uppgiften är som alla ”din kompis”-uppgifter inspirerad av ett vanligt förekommande fel på tidigare tentor.

Rättningsnorm: Något som kan tolkas som ”det där gäller bara rätvinkliga trianglar” ger poäng.

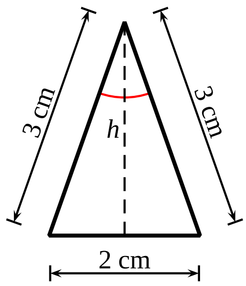
(b) Kompisen måste nu gå, men du lovar att skriva ut en korrekt lösning av uppgiften, med så mycket förklaringar att kompisen kan förstå den. Gör det! (4p)

För full poäng måste lösningen vara korrekt, och verka möjlig för en kurskamrat att förstå. (Det räcker inte att läraren kan förstå den!)

Lösning:

Vi kallar vinkeln för α.

Rätvinkliga trianglar: Vi börjar med att dela triangeln (och vinkeln) i två lika delar, som båda är rätvinkliga trianglar:



Den rätvinkliga triangeln har en hypotenusa med längd 3 cm, en till vinkeln motstående katet med längden 1 cm, och den närliggande kateten h kan vi ta fram med Pythagoras sats:

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}\,\text{cm}$$

Sinus och cosinus för den halverade vinkeln kan vi få fram ur det där med motstående och närliggande:

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{1}{3}$$
$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

Fördubblar vi dessa halva vinklar får vi det vi söker. Tyvärr har jag totalt glömt formlerna för dubbla vinkeln, men de går att ta fram ur additionsformlerna:

$$\sin(\alpha) = \sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha}{2}) + \cos(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$$
$$\cos(\alpha) = \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \cos(\frac{\alpha}{2})\cdot\cos(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2})\cdot\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

Och med sinus- och cosinusvärdena kan vi beräkna tangensvärdet:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{2\cdot\sqrt{8}/9}{7/9} = \frac{2\cdot\sqrt{8}}{7} = \frac{2\cdot\sqrt{4\cdot 2}}{7} = \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{7} = \boxed{\frac{4\cdot\sqrt{2}}{7}}$$

Cosinussatsen: Ur sidlängderna kan vi ta fram cosinusvärdet för vinkeln. Och har vi det kan vi med trigonometriska ettan ta fram sinusvärdet. Och har vi de två värdena kan vi ta fram tangensvärdet!

I cosinussatsen är det viktigt att sidan a är den sida som står emot vinkeln α.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) \\ 2^2 &= 3^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos(\alpha) \\ 4 &= 9 + 9 - 18\cdot\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{9+9-4}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Trigonometriska ettan:

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\ \sin^2(\alpha) + \left(\frac{7}{9}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{81}{81} - \frac{49}{81} \\ \sin^2(\alpha) &= \frac{32}{81} \\ \sin(\alpha) &= \pm\sqrt{\frac{32}{81}} = \pm\sqrt{\frac{4^2\cdot 2}{9^2}} = \pm\frac{4\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

Vinklar i trianglar ligger mellan 0° och 180°, så sinusvärdena är positiva, så minustecknet är inte rätt.

Nu kan vi få fram tangensvärdet:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{4\cdot\sqrt{2}/9}{7/9} = \boxed{\frac{4\cdot\sqrt{2}}{7}}$$

Sinussatsen: De två basvinklarna måste vara lika, så vi kan kalla dem β båda två. Sinussatsen ger att

$$\frac{\sin(\alpha)}{2} = \frac{\sin(\beta)}{3}$$

Nu vet ju tyvärr inte vad β är, men vi känner till vinkelsumman i en triangel. $\alpha+\beta+\beta = 180°$, så $\beta = 90° - \alpha/2$.

Så vi har

$$\frac{\sin(\alpha)}{2} = \frac{\sin(90° - \alpha/2)}{3}$$

Hmm... I en tidigare uppgift stod det att $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$, och det måste väl gå att använda på vinkeln $\alpha/2$ också. Och vi kan dela vinkeln i vänsterledet i två, och nu kommer jag ihåg dubbla vinkeln!

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha)}{2} &= \frac{\sin(90° - \alpha/2)}{3} \\ \frac{2\cdot\sin(\alpha/2)\cdot\cos(\alpha/2)}{2} &= \frac{\cos(\alpha/2)}{3} \\ \sin(\alpha/2) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(och så fortsätter man enligt de tidigare förslagen).

Approximation: Vi ritar av triangeln lite större. Och så klipper vi ut den, och lägger den med toppen vid en skärning i rutnätet och sidan utmed en linje. Tangensvärdet för en vinkel motsvarar k-värdet för motsvarande linje. Ser ut som att den här går ungefär 8 rutor upp på 10 rutor framåt. Då är tangensvärdet ungefär 0,8.

(Man kan ta fram ett approximativt värde på många andra sätt.)

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd, [...] • Sinus, cosinus, tangens • Katet, hypotenusa Du ska kunna göra följande: • Tillämpa Pythagoras sats. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. Tillämpa trigonometriska räkneregler. Övning 12.21, 12.34.

Rättningsnorm: 3p för korrekt beräkning, 1p för presenterad så att man kan tro att en kurskamrat skulle förstå den. 1–2p om man har gjort något som kan vara inledningen till en fungerande lösning. 1–2p för approximativ lösning, beroende på hur pass bra den är.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2019.11.05 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Thomas Westerbäck[1], som nås på telefon 021–10 70 08

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. Vi har talen $z = 4\cdot(\cos(\frac{5\cdot\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{5\cdot\pi}{6}))$ och $w = -4\,i + 4$.

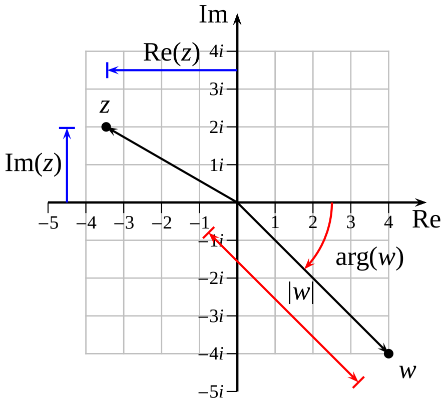
(a) Skriv z på rektangulär form. (1p)

(b) Skriv w på ~~rektangulär~~ polär form. (1p)

(c) Beräkna $z \cdot w$ på valfri form. (1p)

Lösning:

Det är enklast att ta alla frågorna ihop, och det kan underlätta att rita upp talen.



(a) $z = 4\cdot(\cos(\frac{5\cdot\pi}{6}) + i\,\sin(\frac{5\cdot\pi}{6})) = 4\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i) = \boxed{-2\cdot\sqrt{3} + 2\,i}$.
Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(b) *Denna uppgift var felskriven. Talet w är redan skrivet på rektangulär form, vilket gör frågan som den är formulerad meningslös. De flesta bör ha nåtts av korrigeringen av frågeformuleringen. Om du inte nåddes av korrigeringen och tror att det kan ha påverkat ditt resultat, hör av dig.*
$|w| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16\cdot 2} = 4\cdot\sqrt{2}$ (det går lika bra med $\sqrt{32}$). Pilen går uppenbart diagonalt över rutsystemet, snett neråt, så $\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$ (det går

[1]Tentan är konstruerad av Hillevi Gavel, medan Thomas hade telefonvakt när den skrevs.

lika bra med $\frac{7\cdot\pi}{4}$, vilket är en annan vinkel men som för oss till samma plats). Så $\boxed{w = 4\cdot\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4}))}$.

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng. Är det mindre fel i både (a) och (b) kan dock 1p ges för uppgifterna tillsammans.

(c) På rektangulär form

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (-2\cdot\sqrt{3} + 2\,i)\cdot(4 - 4\,i) = -2\cdot\sqrt{3}\cdot 4 - 2\cdot\sqrt{3}(-4\,i) + 2\,i\cdot 4 + 2\,i\cdot(-4\,i) \\ &= -8\cdot\sqrt{3} + 8\cdot\sqrt{3}\,i + 8\,i - 8\,i^2 = \boxed{(8 - 8\cdot\sqrt{3}) + (8 + 8\cdot\sqrt{3})\,i} \end{aligned}$$

På polär form:

$$\begin{aligned} z\cdot w &= 4\cdot(\cos(\tfrac{5\cdot\pi}{6}) + i\,\sin(\tfrac{5\cdot\pi}{6}))\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\tfrac{\pi}{4})) \\ &= 4\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos(\tfrac{2\cdot 5\cdot\pi}{2\cdot 6} - \tfrac{3\cdot\pi}{3\cdot 4}) + i\,\sin(\tfrac{2\cdot 5\cdot\pi}{2\cdot 6} - \tfrac{3\cdot\pi}{3\cdot 4})) = \boxed{16\cdot\sqrt{2}(\cos(\tfrac{7\cdot\pi}{12}) + i\,\sin(\tfrac{7\cdot\pi}{12}))} \end{aligned}$$

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng, men inga avdrag för följdfel från föregående uppgifter.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Rektangulär form, polär form; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Multiplicera [. . .] med komplexa tal på polär form. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.11(c), 13.15, 13.16(a)

2. Ange för vilka tal följande är sant:

(a) $\log_2(x^2) = 2\cdot\log_2(x)$ (1p)

(b) $|y| > y$ (1p)

(c) $z = \overline{z}$ (1p)

Endast svar erfordras.

Lösning:

Vi motiverar fast det inte krävdes.

(a) $\boxed{\text{Positiva tal}}$ För negativa tal går vänsterledet bra att räkna ut, medan högerledet blir *error*. För noll går ingendera bra att räkna ut. (Man kan utvidga logaritmdefinitionen så att den med hjälp av komplexa tal kan hantera annat än positiva indata. Men det har vi definitivt inte tittat på i den här kursen!)

(b) $\boxed{\text{Negativa tal}}$ För positiva tal är vänster och höger led lika, och för icke-reella är inte ”större än” meningsfullt.

(c) $\boxed{\text{Reella tal}}$ (Konjugering innebär teckenbyte på imaginärdelen, och om detta inte förändrar värdet så måste imaginärdelen vara noll.)

Kommentar: På denna fråga var det många skrivande som försökte besvara en annan fråga: ”är det som står här sant för alla tal?”. Varken jag eller rättande lärare lyckades förstå vad det var i frågeformuleringen som ledde till denna tolkning av uppgiften. Så tolkade du frågan så här får du gärna höra av dig och förklara hur det kommer sig, så att jag kan formulera uppgifter med motsvarande innehåll bättre i framtiden.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp • Komplext konjugat; Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. Motsvarar inte någon övning exakt, utan testar att man förstår innebörden i dessa begrepp.

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel!

3. Lös ekvationen $\sin^2(x) = \dfrac{3}{4}$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.57 (som dessutom inkluderade att göra det på flera sätt och jämföra svaren).

Som andragradare:

$$\sin^2(x) = \frac{3}{4}$$
$$\sin(x) = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \vee \qquad \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + n2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi \qquad x = -\frac{\pi}{3} + n2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + n2\pi$$

Dubbla vinkeln: Dubbla vinkeln för cosinus (kan härledas ur de på tentan bifogade additionsformlerna) ihop med trigonometriska ettan ger

$$\cos(2\cdot x) = 1 - 2\cdot\sin^2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2\cdot x)}{2}$$

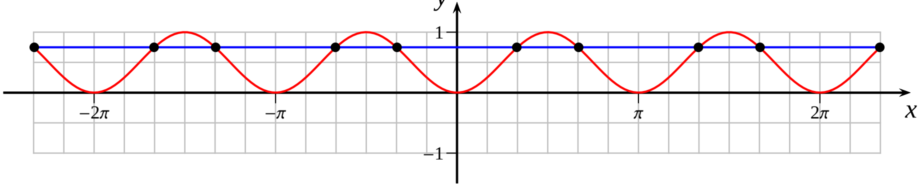
vilket gör att ekvationen kan lösas enligt

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{3}{4}\\
\frac{1-\cos(2\cdot x)}{2} &= \frac{3}{4}\\
1-\cos(2\cdot x) &= \frac{3}{2}\\
-\frac{1}{2} &= \cos(2\cdot x)\\
2\cdot x &= \pm\frac{2\cdot\pi}{3} + n2\pi\\
x &= \pm\frac{\pi}{3} + n\pi
\end{aligned}$$

Markerar man detta svar och föregående svar på en tallinje så ser man att de representerar samma lösningsmängd, uttryckt på olika sätt.

Det var knappast något större poäng med att göra så här på den här uppgiften, men det finns andra situationer där denna omskrivning kan förenkla väsentligt (som i integralberäkning).

Bild:



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.57.

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Missat ± eller att det finns två "grundlösningar" på varje alternativ, men gjort rätt i övrigt: 2p. Missat $+n2\pi$: max 1p.

4. **(a)** Förklara vad som menas med *beloppet* av ett reellt tal x. (Vi vill alltså ha definitionen.) (1p)

(b) Förklara vad som menas med fem-logaritmen för ett reellt tal x. (1p)

(c) Lös ekvationen $\log_5(x) = 2$. (1p)

(d) Lös ekvationen $\log_5(|y|) = 2$. (1p)

(e) Lös ekvationen $|\log_5(z)| = 2$. (1p)

Samtliga deluppgifter går att lösa med hjälp av det vi gått igenom i kursen, men en del av dem kan kräva att du funderar lite själv på hur du ska tillämpa kunskaperna.

Lösning:

(a) Om x inte är negativ: x; annars $-x$. Eller ”siffrorna” i x, utan tecken. Eller avståndet mellan x och noll på tallinjen.

(b) Det tal man ska upphöja 5 i om man vill få x som resultat.

(c) Definitionen av logaritm:

$$\log_5(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5^2 = 25$$

(d) Utnyttja föregående lösning och absolutbeloppsdefinitionen:

$$\log_5(|y|) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad |y| = 25 \quad \Leftrightarrow \quad y = 25 \lor y = -25$$

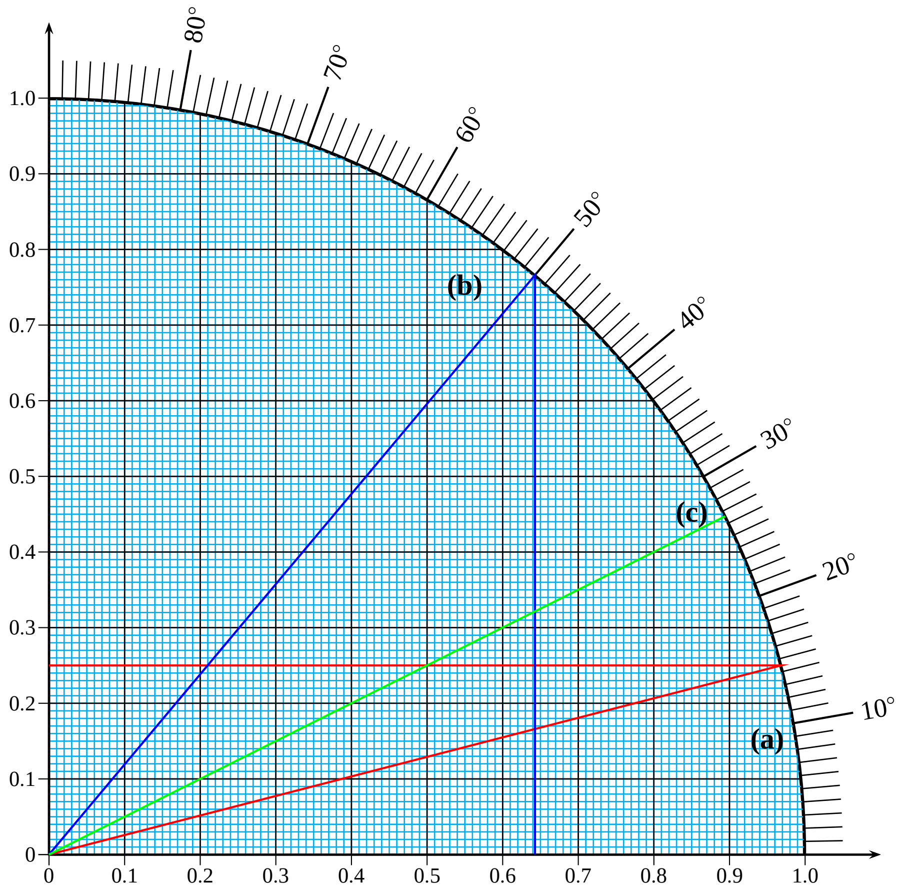
(e) Utnyttja tidigare uppgifter:

$$|\log_5(z)| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_5(z) = 2 \lor \log_5(z) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 25 \lor z = \frac{1}{25}$$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp • Logaritm; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. (d) och (e)-uppgiften motsvarar inte någon rekommenderad uppgift, utan testar om man kan använda kunskaperna i ett sammanhang.

Rättningsnorm: (ab): Kan bara bli rätt eller fel. (cde) Helt rätt för full poäng. Om flera av deluppgifterna inte når ända fram men inte är helt fel kan en eller två sammanfattningspoäng ges.

5.



(a) Vinkeln α uppfyller $\sin(\alpha) = 0{,}25$, $0° < \alpha < 90°$. Bestäm med bildens hjälp α så noga du kan. (1p)

(b) Bestäm med bildens hjälp $\cos(230°)$ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

(c) Vinkeln γ uppfyller $\tan(\gamma) = 0{,}5$, $180° < \gamma < 270°$. Bestäm med bildens hjälp γ så noga du kan och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Rekommenderade uppgifter 12.9(a), 12.8(f) och 12.9(c) (något försvårade, eftersom originalvarianten hade hela cirkeln förtryckt).

(a) Hitta den punkt på cirkeln där y-koordinaten är 0,25, och läs av vinkeln. Det ser ut som att $\boxed{\alpha \approx 15°}$

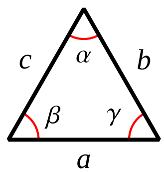
(b) 230° placeras oss i tredje kvadranten, som inte är med i bild. Vi kan utnyttja att $230° = 180° + 50°$, vilket ger att $\cos(230°) = -\cos(50°)$. Och $\cos(50°)$ är x-koordinaten vid 50-gradersmarkeringen. $\boxed{\cos(230°) \approx -0{,}64}$

(c) Även här placerar vinkeln oss i tredje kvadranten. Eftersom tangensfunktionen har perioden 180° kan vi ta fram en vinkel i första kvadranten med rätt tangensvärde, och lägga 180° till den. Tangensvärdet är ”k-värdet” för strålen; $k = 1/2$ innebär att man går 2 steg uppåt på 1 steg uppåt. $\boxed{\gamma \approx 207°}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Sinus, cosinus, tangens Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.8–9

Rättningsnorm: För (a) krävs rätt svar, för övriga ger rätt svar ihop med något som kan tolkas som en förklaring 2p. 1p om tankegången var någorlunda rätt men utförandet felaktig.

6. I bredvidstående triangel har sidan a längden 4 cm, sidan b längden $\sqrt{8}$ cm, och vinkeln α är 135°. Bestäm övriga sidor och vinklar i triangeln.



Det är inte alla värdena som är så vackra, men de går att räkna ut. Kan du inte ta fram exakta svar så ger approximativa delpoäng.

OBS! Den avbildade triangeln är inte skalenlig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra! (5p)

Lösning:

Uppgiften kan lösas på ett stort antal sätt. Här är några, och man kan också kombinera flera av angreppssätten.

Sinussatsen: Sinussatsen säger att

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Den information vi känner till gör det möjligt att ta fram $\sin(\beta)$:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sqrt{8}\cdot\sin(135^\circ)}{4} = \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}/2}{4} = \frac{\sqrt{8\cdot 2}}{2\cdot 4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

De två i en triangel möjliga vinklar som har detta sinusvärde är 30° och 150°, och den senare är inte möjlig som svar, för den skulle ge en vinkelsumma på mer än 180°.

Vinkeln γ kan tas fram ur vinkelsumman; $\gamma = 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Om vi vill använda sinussatsen igen behöver vi sinusvärdet för denna vinkel, och det kan vi förmodligen inte. Men det går att ta fram med de på tentan förtryckta formlerna och lite observans:

$$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) - \cos(45^\circ)\cdot\sin(30^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{32} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

vilket ger

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
$$c = \frac{b\cdot\sin(\gamma)}{\sin(\beta)} = \frac{\sqrt{8}\cdot(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4}{1/2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{2})}{2} = 2\cdot\sqrt{3} - 2$$

Cosinussatsen: Med cosinussatsen kan vi ur två sidor och en vinkel ta fram den tredje sidan:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$$
$$4^2 = (\sqrt{8})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{8}\cdot c\cdot\cos(135^\circ)$$
$$16 = 8 + c^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot c\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})$$
$$0 = c^2 + 4\cdot c - 8$$
$$0 = c^2 + 2\cdot 2\cdot c + 2^2 - 2^2 - 8$$
$$12 = (c+2)^2$$
$$\pm\sqrt{12} = c + 2$$
$$c = -2 \pm \sqrt{12}$$

$\sqrt{12}$ ligger någonstans mellan 3 och 4, så ”plusalternativet” är ett rimligt svar (vilket ”minusalternativet” inte är).

Med tre sidor kan vi sedan ta fram vinklar:

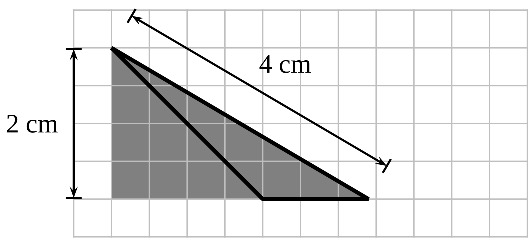
$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)\\
(\sqrt{8})^2 &= 4^2 + (-2+\sqrt{12})^2 - 2\cdot 4\cdot(-2+\sqrt{12})\cdot\cos(\beta)\\
8 &= 16 + 4 - 4\cdot\sqrt{12} + 12 - 8\cdot(-2+\sqrt{12})\cdot\cos(\beta)\\
&\vdots\\
\cos(\beta) &= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Den enda i en triangel möjliga vinkeln med detta cosinusvärde är $\beta = 30°$.

Sista vinkeln tas enklast fram med vinkelsumman. (Om man valt att börja med att ta fram vinkeln γ här kör man förmodligen fast då man ska ta sig från cosinusvärdet till vinkeln.)

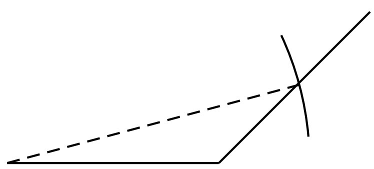
Rätvinkliga trianglar: Motsvarar i princip efterföljande alternativ. Delar man upp triangeln i två rätvinkliga delar ska man undvika att dela upp den kända vinkeln i två okända delar; gör man det är det svårt att sedan komma vidare.

Grafiskt, med hjälp av det rutade pappret Försök rita triangeln så korrekt som möjligt på det rutade pappret. Vinkeln 135° är lätt att rita, och $\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = 2\cdot\sqrt{2}$ cm är diagonalt över fyra rutor:



Den skuggade rätvinkliga triangeln har en hypotenusa som är dubbelt så lång som en av kateterna, och är därmed en halv liksidig triangel. Den nedre vinkeln är då 30°. Den andra kateten har längden $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ cm, och sidan i den ritade triangeln måste vara $\sqrt{12} - 2$ cm. Den sista vinkeln får ur vinkelsumman.

Grafiskt, med passare, linjal och gradskiva $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ cm. Rita ut sida b. Vi har sedan en sida som vi vet hur lång den är men inte åt vilket håll den går, och en som vi vet åt vilket håll den går men inte hur lång den är. Rita ett streck åt rätt håll, ställ in passaren på rätt längd och slå en cirkelbåge. Där de möts ligger triangelns tredje hörn. Rita och mät.



Mät vinklarna med gradskivan och sidan med linjalen.

$\boxed{\textit{Svar: } \beta = 30°,\ \gamma = 15°,\ c = 2\cdot\sqrt{3} - 2\text{ cm}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. Exempel 12.9–10, övning 12.18–24.

Rättningsnorm: Helt rätt: 5p. I övrigt poäng efter hur stor andel av en fullständig lösning man fått ihop. Approximativ lösning: max 3p.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Denna uppgift hade fallit bort ur tentamanus. Förhoppningsvis var alla de skrivande medvetna om att de sista två poängen på tentan ges baserade på detta. Om du missat poäng på denna uppgift, och bedömer att du skulle ha lagt mer omsorg på denna aspekt av lösningarna, så hör av dig.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 ~~Skiss~~ – *Lösningsförslag* 2020.01.15 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Thomas Westerbäck[1], som nås på telefon 021–10 70 08

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. (a) Kan en ekvation av typen $\tan(x) = a$ (där $a \in \mathbb{R}$) vara olöslig?

- Om svaret är **ja**, ge ett exempel på en sådan ekvation.
- Om svaret är **nej**, förklara varför. (1p)

Lösning:

$\boxed{\textbf{Nej}}$, för definitionsmängden för tangensfunktionen är hela $\mathbb{R}$. Grafen består av ett (oändligt) antal likadana bitar, som är sammanhängande och går från hur långt ner som helst ($-\infty$) till hur högt upp som helst (∞). Ritar vi en horisontell linje på höjd a så kommer den garanterat att skära grafen.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 8.3, 12.50–53.

Rättningsnorm: "Nej" ihop med något som kan tolkas som en motivering: 1p.

(b) Du och din kompis har löst en trigonometrisk ekvation. Du har kommit fram till att lösningsmängden är

$$x = \pi + n\cdot\frac{2\cdot\pi}{3}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Din kompis har kommit fram till att lösningsmängden är

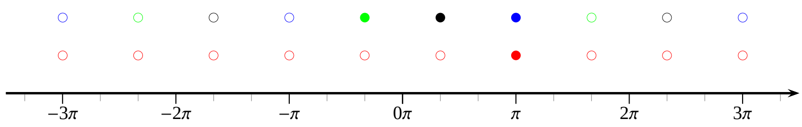
$$x = \pi + n\cdot 2\cdot\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\cdot\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Är det möjligt att ni har rätt båda två? Motivera! (2p)

Lösning:

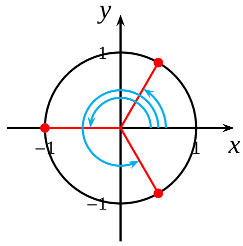
Pricka in lösningsmängderna på en tallinje. För din lösning börjar du med att sätta en markering vid $x = \pi$ (röd), och så sätter du prickar med avstånd $2\cdot\pi/3$ åt båda hållen. För kompisens lösning börjar hen med att sätta en prick vid $x = \pi$ (blå), och så prickar med avstånd $2\cdot\pi$ åt båda hållen, och sedan en prick vid $x = \pi/3$ (svart) och en vid $x = -\pi/3$ (grön), och så prickar med avstånd 2π åt båda hållen från dessa prickar.

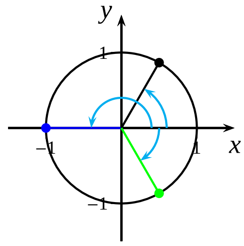
[1] Tentan är konstruerad av Hillevi Gavel, medan Thomas hade telefonvakt när den skrevs.



Det är samma mängd prickar, så ni har kommit till samma svar. Så antingen har ni rätt båda två, eller fel båda två.

Resonemanget kan också visas i enhetcirkeln:





Första bilden visar "dina" lösningar för $n \in \{0, 1, 2\}$. Andra värden på n kommer att resultera i att man hamnar på samma ställen på cirkeln, så de återkommer varv på varv. Andra bilden visar kompisens lösningar, för $n = 0$. Dessa återkommer också varv på varv. (Att de olika vinklarna kan höra till olika värden på n är oväsentligt, det viktiga är vilka vinklar det är.)

Svar: **Ja**, det är möjligt.

Kommentar: "Din" lösning ser ut som lösningsmängden till ekvationen $\cos(3{\cdot}x) = -1$. Din kompis ser ut att ha löst ekvationerna $\cos(x) = -1$ och $\cos(x) = 1/2$, och lagt ihop lösningsmängderna.

Om man har ekvationen $4{\cdot}\cos^3(x) - 3{\cdot}\cos(x) + 1 = 0$ så kan vänsterledet (eventuellt med hjälp av substitutionen $\cos(x) = t$) faktoriseras enligt

$$\begin{aligned} 4{\cdot}\cos^3(x) - 3{\cdot}\cos(x) + 1 &= (\cos(x) + 1){\cdot}(4{\cdot}\cos^2(x) - 4{\cdot}\cos(x) + 1) \\ &= (\cos(x) + 1){\cdot}(2{\cdot}\cos(x) - 1)^2 \end{aligned}$$

och eftersom högerledet är noll kan detta plockas isär i två ekvationer med hjälp av nollfaktorlagen. Detta genererar kompisens lösning.

Man kan också gå på ekvationen med additionsformlerna och trigonometriska ettan, och den vägen kan vänsterledet skrivas om till

$$4{\cdot}\cos^3(x) - 3{\cdot}\cos(x) + 1 = \cdots = \cos(3{\cdot}x) + 1$$

(Försök gärna fylla i stegen emellan; det går lättast om man går från höger till vänster.) Detta ger "din" lösning.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Lösning, lösningsmängd; Du ska kunna göra följande: • Tolka en enkel mängdbeskrivning; Exempel 12.22 och 12.24, Övning 12.53.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt grundtanke men fel i utförandet: 1p.

2. Förenkla följande maximalt: $\log_2(0{,}9) + \log_2(0{,}75) - \log_2(2{,}7)$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.12(b). Använd logaritmreglerna:

$$\begin{aligned} &\log_2(0{,}9) + \log_2(0{,}75) - \log_2(2{,}7) \\ &\qquad = \log_2\left(\frac{0{,}9{\cdot}0{,}75}{2{,}7}\right) && \text{Logaritmregler} \\ &\qquad = \log_2\left(\frac{0{,}9{\cdot}0{,}75{\cdot}1000}{2{,}7{\cdot}1000}\right) && \text{För att slippa decimalkomma} \end{aligned}$$

$$= \log_2\left(\frac{9\cdot 75}{2700}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{\cancel{9\cdot 3}\cdot 25}{\cancel{9\cdot 3}\cdot 100}\right) \qquad \text{Faktorisera, förkorta}$$

$$= \log_2\left(\frac{\cancel{25}}{4\cdot\cancel{25}}\right) \qquad \text{Faktorisera, förkorta}$$

$$= \log_2(2^{-2}) \qquad \text{Skriv som potens}$$

$$= \boxed{-2} \qquad \text{Logaritmregel}$$

Notera att det inte finns någon egentlig anledning att räkna ut vad $9\cdot 75$ är.

Ett alternativt sätt att göra sig av med decimalerna är att skriva om till bråk:

$$\frac{0{,}9\cdot 0{,}75}{2{,}7} = \frac{\frac{9}{10}\cdot\frac{75}{100}}{\frac{27}{10}} = \frac{9\cdot 75\cdot 10}{27\cdot 1000}$$

☠ **Obs!** Man kan <u>inte</u> skriva om uttrycket till

$$\frac{\log_2(0{,}9\cdot 0{,}75)}{\log_2(2{,}7)}$$

Det uttrycket har ett helt annat värde (ungefär $-0{,}3957$, vilket inte är samma sak som -2).

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$). • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Åtminstone redovisat kunskap om logaritmregler: 1p. Mellanting: 2p.

3. (a) Rita kurvan $y = 1 + 2\cdot\sin(3\cdot x)$. Rita med omsorg. Koordinatsystemet måste vara graderat. (2p)

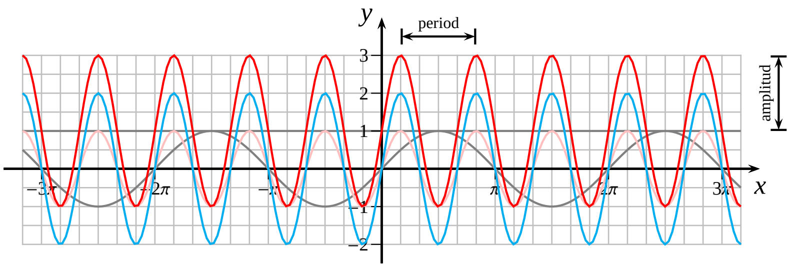
(b) Vad har din kurva för amplitud? (1p)

Lösning:

(a) *Värdetabell:* Gör upp en värdetabell för ett representativt antal x-värden, och skissa kurvan från dessa. Här är man också begränsad av att värdena ska vara sådana att man klarar att beräkna värdena. Det kan vara enklare att se vad som händer om man använder grader.

x	$-30°$	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$20°$
$3\cdot x$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$
$\sin(3\cdot x)$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$2\cdot\sin(3\cdot x)$	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$1+2\cdot\sin(3\cdot x)$	-1	$1-\sqrt{3}$	0	1	2	$1+\sqrt{3}$	3

Kurvan är ritad i rött i bild:



Kända transformationer: $y = \sin(x)$ (grå) är en vågkurva med våglängd (period) $2{\cdot}\pi$, våghöjd (amplitud) 1 och med nollställe i $x = 0$, som den passerar på väg uppåt.

$y = \sin(3{\cdot}x)$ (rosa) har tredjedelen så lång våglängd, eftersom allt går tre gånger så fort. (Det som tidigare händer vid $2{\cdot}\pi$ inträffar nu redan vid $2{\cdot}\pi/3$.)

$y = 2{\cdot}\sin(3{\cdot}x)$ (turkos) har dubbelt så stor amplitud; det händer dubbelt så mycket.

$y = 1 + 2{\cdot}\sin(3{\cdot}x)$ (röd) har flyttat upp ett steg i höjdled, så att de tidigare nollställena numera ligger på höjden ett. Period och amplitud är oförändrade.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion; Övning 12.32.

Rättningsnorm: Helt rätt (vågformad med extrempunkter på rätt ställen): 2p. Missat någon detalj: 1p. 0p om gradering saknas.

(b) Amplituden är avståndet från centrum på kurvan ut till extremvärdena.

Svar: Amplituden är 2

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • [. . .], amplitud. Övning 12.32.

Rättningsnorm: Svar konsistent med svaret på (a) ger poäng.

4. Din kompis vill att du ska skriva ner de viktigaste definitionerna i komplextalsräkning, så att hen har något att plugga på under bussresan hem.

Förklara med ord och gärna bild vad som menas med följande:

(a) Realdelen för z;

(b) Imaginärdelen för z;

(c) Absolutbeloppet av z;

(d) Argumentet för z;

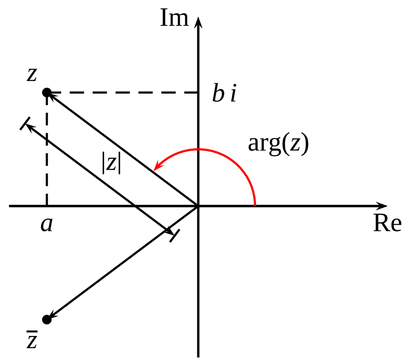
(e) Komplexa konjugatet av z;

då z är ett komplext tal. Förklaringarna ska vara sådana att de är användbara för kompisen. (5p)

Uppgiften bedöms som en helhet.

Lösning:

Här är det komplexa talet $z = a + b\,i$, inritat i komplexa talplanet:



Realdel: $\mathrm{Re}(z)$, ”x-koordinaten”, med tecken. Här a.

Imaginärdel: $\mathrm{Im}(z)$, ”y-koordinaten”. Obs: siffror och tecken men inte själva i; det handlar om hur många i man har. Här b.

Absolutbelopp: $|z|$, hur långt talet ligger från origo. (Kan beräknas med real- och imaginärdel och Pythagoras sats.)

Argument: $\arg(z)$, vinkeln mätt moturs relativt positiva realaxeln.

Konjugat: $\bar{z}$, byt tecken på imaginärdelen (motsvarar att byta tecken på argumentet); speglar i realaxeln – ligger z ovanför realaxeln så ligger $\bar{z}$ på motsvarande plats nedanför, och tvärtom. Här är $\bar{z} = a - b\,i$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Realdel, imaginärdel • Komplext konjugat • Belopp, argument

Rättningsnorm: 5p om det känns som att en kompis som pluggade från det nedskrivna skulle lära sig begreppens innebörd. Ungefär 1p per begrepp, men om några av dem är tveksamt beskrivna kan de ge delpoäng.

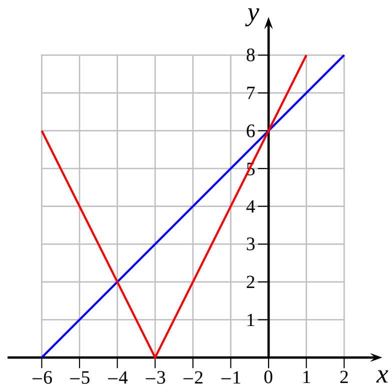
5. (a) Lös ekvationen $x + 6 = 2\cdot|3 + x|$. (3p)

(b) Lös olikheten $x + 6 > 2\cdot|3 + x|$. (2p)

Lösning:

(a)-uppgiften är rekommenderad uppgift 10.15(c). Det verkar vara fördelaktigt att lösa båda deluppgifterna ihop.

Grafisk lösning: Rita kurvorna $y = x + 6$ och $y = 2\cdot|3 + x|$ i samma koordinatsystem. De punkter där kurvorna skär är svar på (a), det/de område(n) där den första kurvan ligger högre än den andra är svar på (b). Den första kurvan är en rät linje med riktningskoefficient 1 (så en ruta åt höger ger en ruta uppåt) som skär y-axeln på höjden 6. Den andra blir en beloppskurva flyttad 3 steg åt vänster, så att spetsen är vid $x = -3$, och med sidorna uppvinklade så att de går dubbelt så brant som vanligt. Bild:



Skärningarna är vid $x = -4$ och $x = 0$, och linjen är högst i intervallet mellan dessa punkter.

Beräkningslösning: Beloppets definition ger

$$|3 + x| = \begin{cases} 3 + x & \text{om } 3 + x \geq 0 \\ -(3 + x) & \text{om } 3 + x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3 + x & \text{om } x \geq -3 \\ -3 - x & \text{om } x < -3 \end{cases}$$

Det gör att ekvationen får lösas som två fall:

$\boxed{x < -3}$	$\boxed{x \geq -3}$
$x + 6 = 2\cdot(-x - 3)$	$x + 6 = 2\cdot(x + 3)$
$x + 6 = -2\cdot x - 6$	$x + 6 = 2\cdot x + 6$
$3\cdot x = -12$	$0 = x$
$x = -4$	$0 \geq -3$ OK!
$-4 < -3$ OK!	

Båda svaren ligger i de angivna intervallen, och är därför korrekta.

Olikheten kan behandlas med samma uträkning. I inget av stegen har det skett multiplikatione/division med negativt tal, så olikheten kommer inte att vändas. Därför är det onödigt att skriva upp alla stegen igen:

$\boxed{x < -3}$	$\boxed{x \geq -3}$
$x + 6 > 2 \cdot (-x - 3)$	$x + 6 > 2 \cdot (x + 3)$
$\vdots$	$\vdots$
$x > -4$	$0 > x$

Av talen innan -3 kan vi använda de som ligger efter -4, och av talen efter -3 kan vi använda de som ligger innan 0. Sammantaget är det talen mellan -4 och 0.

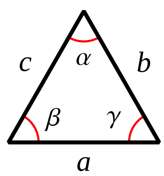
Stickprov: Man kan också lösa olikheten baserat på ekvationslösningen och stickprov. Värdena är lika i -4 och 0. Ta något tal innan -4, något tal mellan -4 och 0 och något tal efter 0, och se efter hur förhållandet är där. Vänsterledet är mindre än högerledet i de två ytterområdena, men större i mellanområdet. (Den här typen av kurvor kan inte ändra förhållande utan att passera varandra. Notera att metoden inte fungerar på rationella funktioner.)

$\boxed{\textit{Svar: } \text{(a) } x \in \{-4, 0\}; \text{ (b) } x \in (-4, 0)}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Övning 10.15–17. Delvis rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 5p. Ignorerat beloppstecknet: 0p. I övrigt poäng efter hur stor del av en komplett lösning man fått ihop. (Även rent grafiska lösningar ger full poäng.)

6. I bredvidstående triangel är måtten som följer: sidan a är 4 cm, sidan b är $\sqrt{12}$ cm och sidan c är 2 cm.



(a) Bestäm vinkeln γ. (3p)

(b) Är vinkeln α spetsig, trubbig eller rät? Motivera! (2p)

OBS! Den avbildade triangeln är inte skalenlig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

Lösning:

(a)-uppgiften är rekommenderad uppgift 12.23(g).

Sinussatsen går inte att använda i inledningen, för den fordrar att vi redan känner minst en vinkel. Det gör vi inte.

Cosinussatsen: Eftersom vi vet tre sidor och söker en vinkel, och cosinussatsen ger sambandet mellan triangelns tre sidor och en vinkel, verkar cosinussatsen matcha frågan. Med den här givna informationen har satsen formen:

$$\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\
2^2 &= 4^2 + (\sqrt{12})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{12} \cdot \cos(\gamma) \\
4 &= 16 + 12 - 8 \cdot \sqrt{12} \cos(\gamma) \\
\cos(\gamma) &= \frac{16 + 12 - 4}{8 \cdot \sqrt{12}} \\
&= \frac{24 \cdot \sqrt{12}}{8 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} \\
&= \frac{24 \sqrt{4 \cdot 3}}{8 \cdot 12} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Den enda i en triangel möjliga vinkel som har detta cosinusvärde är 30°.

Ett alternativt sätt att förenkla bråket är enligt

$$\frac{24}{8\cdot\sqrt{12}} = \frac{3\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}\cdot\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

α, då vi vet γ: Även vinkel α kan undersökas med hjälp av cosinussatsen. Spetsiga vinklar har positiva cosinusvärden, trubbiga vinklar har negativa cosinusvärden, och räta vinklar har cosinusvärde noll (varken positivt eller negativt).

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha) \\ 4^2 &= (\sqrt{12})^2 + 2^2 - 2\cdot\sqrt{12}\cdot 2\cdot\cos(\alpha) \\ 16 &= 12 + 4 - 4\cdot\sqrt{12}\cdot\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{12+4-16}{\sqrt{12}} = 0 \end{aligned}$$

Cosinusvärde 0 – vinkeln är rät!

Sinussatsen är mer tveksam, men värd ett försök:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{a\cdot\sin(\gamma)}{c} = \frac{4\cdot\sin(30°)}{2} = \frac{4\cdot 1/2}{2} = 1$$

Den enda i en triangel möjliga vinkel som har detta sinusvärde är 90°, så vinkeln α är rät. (Om sinusvärdet varit något annat än 1 hade resultatet varit mer svårtolkat.)

Pythagoras sats: Vi börjar med vinkel α. I en rätvinklig triangel är summan av kvadraterna på kateterna lika med kvadraten på hypotenusan, och det är *bara* i rätvinkliga trianglar som summan av kvadraterna på två av sidorna är lika med kvadraten på den tredje. Är kvadraten på den tredje större än summan är vinkeln trubbig, är den mindre är vinkeln spetsig. Den längsta av sidorna, a, är den som skulle kunna vara hypotenusan:

$$a^2 = 4^2 = 16 \qquad\qquad b^2 + c^2 = (\sqrt{12})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$$

Likhet råder – triangeln är rätvinklig! I så fall kan vi bestämma sinus för vinkeln γ som motstående genom hypotenusan, eller cosinus som närliggande genom hypotenusan:

$$\sin(\gamma) = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

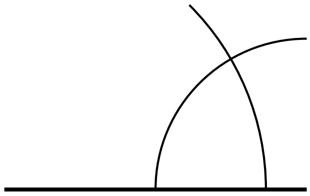
vilket stämmer med $\gamma = 30°$. (Alternativet 150° kan uteslutas, eftersom det bara finns 180° att tillgå och 90° av dessa har gått åt i vinkel α.)

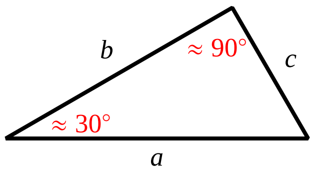
☠ **Obs!** Det fungerar inte att beräkna vinkel γ med den här tekniken *utan* att först ha kontrollerat att triangeln faktiskt är rätvinklig. Om man sedan, baserat på det resultatet, tar fram vinkel α så får man att den är rät, men det resultatet skulle man ha fått även om den inte vore det! (Testa med de här måtten på sidorna a och c men en helt annan längd på b.)

Grafisk lösning: för den som kommit ihåg passare, linjal och gradskiva men glömt hur man räknar. Rita triangeln och mät. $\sqrt{12}$ måste ligga någonstans mellan $\sqrt{9} = 3$ och $\sqrt{16} = 4$. Vi kan testa om 3,5 verkar någorlunda rätt:

$$3{,}5^2 = (3 + 0{,}5)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 9 + 3 + 0{,}25 = 12{,}25$$

Tillräckligt bra; $\sqrt{12} \approx 3{,}5$. Rita en linje som är 4 cm, och slå en båge med radie 3,5 cm från ena ändan och en med radie 2 cm från andra. Där bågarna skär ligger triangelns tredje hörn. Rita sidorna, mät vinkeln:





Vinkeln γ är ungefär 30°, och eftersom det stod i frågan ”bestäm vinkeln γ” kan vi förutsätta att vinkeln ska *gå* att bestämma. Den måste därför vara en standardvinkel, och bilden är tillräckligt exakt för att vi ska kunna utesluta alla alternativ utom 30°.

Vinkel α ser relativt rät ut.

Det går nu att kontrollera att avläsningarna är korrekta. Man kontrollerar med Pythagoras sats av vinkeln α verkligen är rät. När man sedan vet det så konstaterar man att man har en rätvinklig triangel där ena kateten är hälften av hypotenusan. Det är en halv liksidig triangel (en 30-60-90), så γ är hälften av en tredjedel av 180°.

$\boxed{\textit{Svar: } \gamma = 30^\circ, \alpha \text{ är rät}}$

Referenser: (beroende på hur man väljer att lösa uppgiften) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd [...]; Du ska kunna göra följande: • Göra en approximativ uppskattning av en vinkel i grader med ögonmått. • Tillämpa Pythagoras sats. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. Övning 12.21–24. Delvis rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Grafisk utan kontroll: 3p. Bekräftade värden: 5p. I övrigt poäng i proportion med hur stor del av en komplett lösning man fått ihop. Minst 1p om man gjort något konstruktivt och icke-trivialt, som att teckna cosinussatsen.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2020.08.14 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

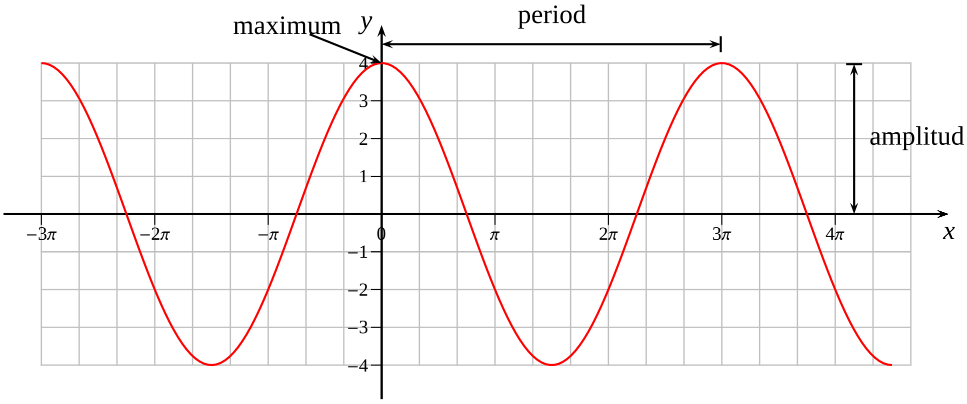
1. En vågkurva ser ut så här:

- Perioden är 3π;
- Amplituden är 4.
- Det finns ett maximum vid $x = 0$.

Skriv en formel som ger en sådan kurva. (Tips: rita bild.) (3p)

Lösning:

Kurvan ser alltså ut så här ungefär:



Vågkurva: det är frågan om sinus eller cosinus. Sinus har nollställe vid $x = 0$, cosinus har ett maximum där. Så det är cosinus.

$y = \cos(x)$ har period 2π. Den här perioden är 50 % längre, så allt går lite långsammare. $y = \cos(\frac{2}{3}\cdot x)$ bör ha rätt period, stoppar man in $x = 3\cdot\pi$ får man $\cos(\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\pi) = \cos(2\cdot\pi)$.

Men $y = \cos(\frac{2}{3}\cdot x)$ har amplitud 1; vi vill ha en som är 4 gånger så stor. Multiplicera med 4.

Svar: $y = 4\cdot\cos(\frac{2}{3}\cdot x)$

Det finns andra formler som går bra; $y = 4\cdot\sin(\frac{2}{3}\cdot(\frac{\pi}{2} - x))$ ger exakt samma kurva, och $y = 4\cdot\cos(\frac{2}{3}\cdot x) + 4711$ uppfyller också signalementet eftersom det inte står på vilken höjd centrum ska ligga. Men det angivna svaret är den enklaste formeln som fungerar.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • period, amplitud; Du ska kunna göra följande: (tillämpa baklänges) • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c \cdot x)$ och $y = c \cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. Övning 12.32–33.

Rättningsnorm: Grundfunktion: 1p. Period: 1p. Amplitud: 1p.

2. Ett av nollställena till $p(z) = z^3+z^2-20 \cdot z-50$ är $-3+i$. Bestäm samtliga nollställen. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 7.28. Tredjegradspolynom har garanterat tre nollställen (enligt sats 7.8) om man får använda icke-reella tal, vilket man uppenbarligen får. Ett av nollställena vet vi, de två resterande ska vi hitta.

Konjugatet av nollställe: En sats (sats 7.9) säger att i polynom med reella koefficienter uppträder de icke-reella nollställena i konjugerade par. Detta polynom har reella koefficienter, så då ska $\overline{-3 + i} = -3 - i$ också vara ett nollställe.

Summan/produkten av nollställena: En sats (sats 7.5) säger att i ett n:e-gradspolynom med högstagradskoefficient 1 och med n nollställen gäller att nästhögstagradskoefficienten blir summan av nollställena med omvänt tecken. Nästhögstagradskoefficienten är här andragradskoefficienten, som är 1. Om vi kallar det tredje nollstället för α har vi att

$$(-3 + i) + (-3 - i) + \alpha = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = 5$$

Man kan också utnyttja att samma sats säger att konstanttermen blir produkten av nollställena, med omvänt tecken om gradtalet är udda (vilket det är). Det ger

$$(-3 + i) \cdot (-3 - i) \cdot \alpha = -(-50) \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{50}{9 - (-1)} = 5$$

Faktorsatsen: Faktorsatsen (sats 7.2) säger att om α är ett nollställe så är $z - \alpha$ en faktor. De två nollställen vi känner ger två faktorer i polynomet:

$$\begin{aligned}(z - (-3 + i)) \cdot (z - (-3 - i)) &= ((z + 3) - i) \cdot ((z + 3) + i) \\ &= (z + 3)^2 - i^2 = z^2 + 6 \cdot z + 9 - (-1) = z^2 + 6 \cdot z + 10\end{aligned}$$

Dividerar vi med detta får vi den tredje faktorn.

$$\begin{array}{r|l}
 & z \quad -5 \\
\hline
z^2 + 6 \cdot z + 10 & z^3 + \quad z^2 - 20 \cdot z - 50 \\
 & -(z^3 + 6 \cdot z^2 + 10 \cdot z) \\
 & \quad - 5 \cdot z^2 - 30 \cdot z - 50 \\
 & -(- 5 \cdot z^2 - 30 \cdot z - 50) \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$z - 5$ är en faktor, så 5 är det tredje nollstället.

Utan att ta hjälp av ledtråden: En sats (sats 7.4) säger att ett polynom med reella koefficienter och udda grad alltid har minst ett reellt nollställe. Så det ska finnas ett reellt nollställe. En annan sats (sats 7.6) säger att om ett polynom med högstagradskoefficient 1 och heltalskoefficienter i övrigt har ett heltalsnollställe så är detta heltal en faktor i konstanttermen. Konstanttermen är -50, faktorer i detta tal är ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 25 och ± 50. Prova om något av dessa tal är ett nollställe. Börja förslagsvis med de förslag som verkar enklast att räkna med:

$$\begin{aligned}p(1) &= 1^3 + 1^2 - 20 \cdot 1 - 50 \neq 0 \\ p(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 - 20 \cdot (-1) - 50 \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(2) &= 2^3 + 2^2 - 20\cdot 2 - 50 \neq 0 \\ p(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 20\cdot(-2) - 50 \neq 0 \\ p(5) &= 5^3 + 5^2 - 20\cdot 5 - 50 = 0 \end{aligned}$$

Då ska enligt faktorsatsen $z - 5$ vara en faktor, och delar vi med den ska vi få en andragradare kvar, och sådana vet vi hur man hanterar:

$$\begin{array}{r|l} & z^2 + 6\cdot z \;\; + 10 \\ \hline z - 5 & z^3 + \quad z^2 - 20\cdot z - 50 \\ & -(z^3 - 5\cdot z^2) \\ & \qquad 6\cdot z^2 - 20\cdot z \\ & \qquad -(6\cdot z^2 - 30\cdot z) \\ & \qquad\qquad 10\cdot z - 50 \\ & \qquad\qquad -(10\cdot z - 50) \\ & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

De ressterande nollställena hittar vi genom att faktorisera kvoten:

$$\begin{aligned} z^2 + 6\cdot z + 10 &= z^2 + 2\cdot 3\cdot z + 3^2 - 3^2 + 10 = (z+3)^2 + 1 = (z+3)^2 - (-1) \\ &= (z+3)^2 - i^2 = (z+3+i)\cdot(z+3-i) = (z-(-3-i))\cdot(z-(-3+i)) \end{aligned}$$

Svar: Nollställena är $-3 + i$, $-3 - i$ och 5

Anmärkning: Det är givetvis inte meningen att man ska ha satsernas nummer med i lösningen – vi skulle bli mycket misstänksamma om någon har det – utan det är till för att den som vill kontrollera dem lätt ska kunna slå upp dem i boken.

Referenser: (beroende på hur man väljer att lösa uppgiften) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Utnyttja egenskaperna hos icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Exempel 7.13, övning 7.27–28

Rättningsnorm: Hittat båda de övriga nollställena: 3p. Hittat ett av nollställena, och gjort något konstruktivt och icke-trivialt för att hitta det andra: 2p, annars 1p.

3. **(a)** Om man säger att $y = \log_a(x)$, exakt vad menar man? (Vi söker alltså logaritmens definition.) (1p)

Lösning:

Logaritmer är inverser till exponentialfunktioner:

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y$$

I ord: a-logaritmen för talet x är det tal man ska upphöja a i om man vill få x som resultat.

(b) Du behöver bestämma värdet på $\log_2(2000)$ med hjälp av en miniräknare, som tyvärr bara har 10-logaritmer. Hur ska du göra? (2p)

Lösning:

Exakt räkning: Om man inte kommer ihåg formeln för basbyte för logaritmer kan man testa att kalla svaret för y, och se om man kan uttrycka y utan att använda 2-logaritmer:

$$\begin{aligned} y &= \log_2(2000) \\ 2^y &= 2000 \\ \log_{10}(2^y) &= \log_{10}(2000) \end{aligned}$$

$$y \cdot \log_{10}(2) = \log_{10}(2000)$$
$$y = \frac{\log_{10}(2000)}{\log_{10}(2)} \quad \left(\approx \frac{3{,}30103}{0{,}30103} \approx 10{,}96578 \right)$$

Detta går att knappa in i räknaren (förutsatt att den också har division, vilket vi nog kan förutsätta).

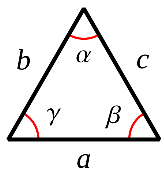
Approxiamtiv räkning: Utgå också här från att det handlar om att hitta det y för vilket $2^y = 2000$. Prova olika värden på y, och sikta in tills svaret blir så exakt som du vill ha det. $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, så svaret måste vara knappt 11.

Grafisk lösning: Om miniräknaren är grafritande kan man rita $y = 2^x$ och försöka hitta var kurvan når värdet 2000.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Byta bas för en logaritm; Undersökning 11.4, Övning 11.11–13.

Rättningsnorm: Fungerande metod: 2p. God approximation: 1p. Något konstruktivt som inte når hela vägen: 1p.

4. I bredvidstående triangel gäller följande: Sidan a är $\sqrt{8}$ cm, vinkeln α är 30° och vinkeln β är 45°.



(a) Bestäm samtliga sidor och vinklar i triangeln. (4p)

(b) Rita triangeln så exakt som du kan. (1p)

OBS! Den avbildade triangeln är inte skalenlig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.23(c), utökad. (I original frågades bara efter sida b.)

Vinkel γ: Vinkelsumman i en triangel ger

$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = \boxed{105^\circ}$$

Detta säger oss för övrigt att Pythagoras sats, som handlar om förhållandet mellan sidlängderna i en rätvinklig triangel inte rakt av kan användas för att ta fram sidlängderna här.

Sidan b: Klart fall för sinussatsen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \frac{(2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (1/\sqrt{2})}{1/2} = \boxed{4\,\text{cm}}$$

Sidan c med sinussatsen: Till detta behöver vi sinusvärdet för vinkeln 115°, vilket kan tas fram med additionsformeln som finns given på tentapappret och lite kreativitet:

$$\sin(105^\circ) = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin(45^\circ) \cdot \sin(60^\circ) + \cos(45^\circ) \cdot \cos(60^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}$$

På samma sätt som då vi tog fram sidan b får vi nu

$$c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)/4}{1/2} = \frac{2 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{4}$$
$$= \boxed{2 \cdot (\sqrt{3} + 1)} \approx 2 \cdot (1{,}7 + 1) = 5{,}4\,\text{cm}$$

Sidan c med cosinussatsen: Vi kan exempelvis använda

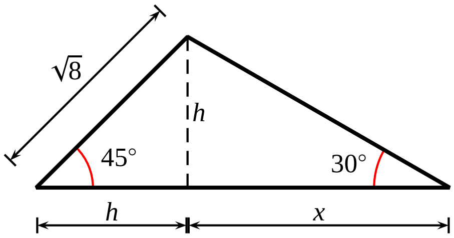
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{8})^2 &= 4^2 + c^2 - 2\cdot 4\cdot c\cdot \cos(30^\circ)\\
8 &= 16 + c^2 - 4\cdot c\cdot \sqrt{3}\\
-8 &= c^2 - 2\cdot 2\cdot \sqrt{3}\cdot c\\
(2\cdot\sqrt{3})^2 - 8 &= c^2 - 2\cdot 2\cdot \sqrt{3}\cdot c + (2\cdot\sqrt{3})^2\\
4\cdot 3 - 8 &= c^2 - 2\cdot 2\cdot \sqrt{3}\cdot c + (2\cdot\sqrt{3})^2\\
4 &= (c - 2\cdot\sqrt{3})^2\\
\pm 2 &= c - 2\cdot\sqrt{3}\\
c &= 2\cdot\sqrt{3} \pm 2 \approx \begin{cases} 2\cdot 1{,}7 + 2 = 5{,}4\\ 2\cdot 1{,}7 - 2 = 1{,}4\end{cases}
\end{aligned}
$$

Detta var två svar. Problemet bör dock bara ha ett svar, så det ena av dem kan inte vara förenligt med att $\beta = 45^\circ$. Det bör reda ut sig då man ritar triangeln

Man kan lika gärna använda $b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)$, det ger samma svar ur en lite annorlunda uträkning.

Sida b och c med Pythagoras sats: Om vi skissar triangeln (lämpligen placerad så att de två kända vinklarna blir basvinklar) så ser vi att den kan delas upp i två rätvinkliga trianglar med hjälp av en höjd.



Den vänstra triangeln är en halv kvadrat och Pythagoras sats ger att höjden h har längden

$$h^2 + h^2 = (\sqrt{8})^2 \quad\Leftrightarrow\quad h^2 = 4 \quad\Leftrightarrow\quad h = \pm 2$$

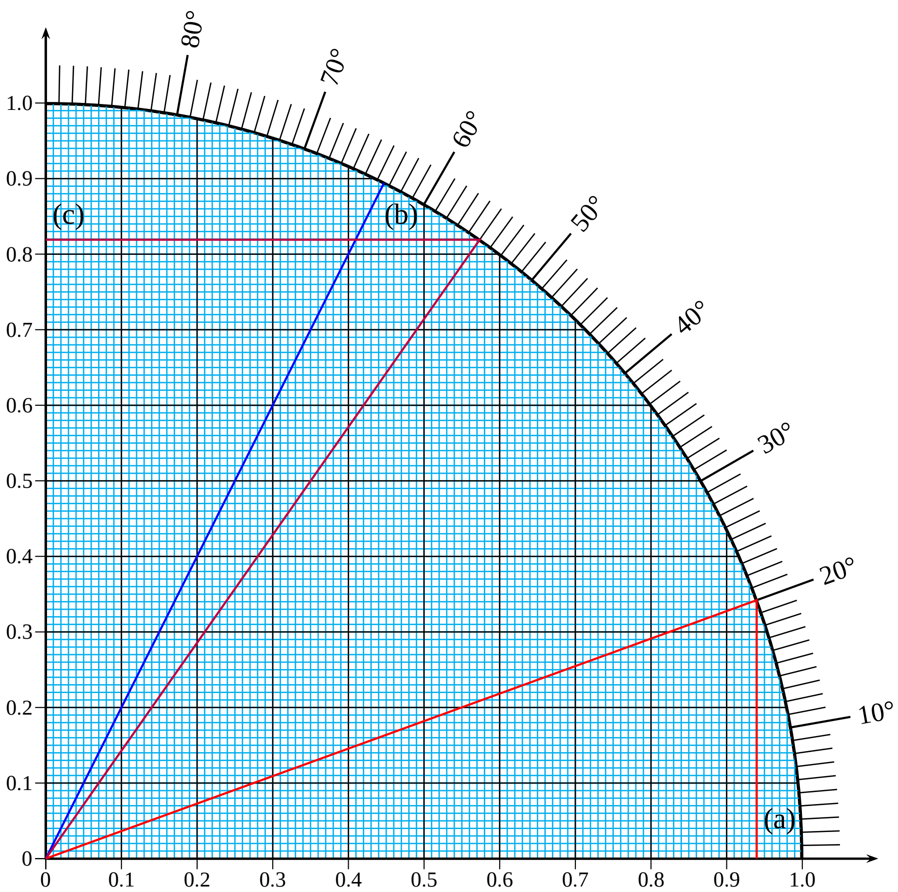
Det negativa svaret är inte relevant; $h = 2$ cm. Den högra triangeln har en rät vinkel och en vinkel som är 30°, så den är en halv liksidig triangel. Höjden h motsvarar den halverade sidan, sidan b den ohalverade sidan, som då måste ha längden $b = 2\cdot h = \boxed{4\text{ cm}}$. Den sista sidans längd kan beräknas med Pythagoras sats:

$$4^2 + x^2 = 2^2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = 12 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{12}$$

Även här kan det negativa svaret strykas. Längden på sidan c fås då genom addition: $c = \boxed{2 + \sqrt{12}\text{ cm}}$.

Uppritning: 45°-vinklar är lätta att rita genom att gå på diagonalen över rutnätet. $\sqrt{8}$ motsvarar diagonallängden i en kvadrat med sidlängd 2. Vill man rita exakt och inte har några ritredskap med sig är det alltså fördelaktigt att vrida triangeln, och lägga sidan c som bas:

Har man beräknat sidan b och har en passare med sig kan man ställa den på 4 cm, sätta den i toppen på triangeln och slå en båge. Där den skär botten har vi det sista hörnet. (Detta kan också göras med en pappersremsa, om man inte har passare med sig.)



Har man gradskiva men inte lyckats räkna ut sidan *b* kan man placera skivan vid toppen så att den går i 30° vinkel mot rutnätet, och rita. Därefter kan sidorna mätas med linjal.

Och har man approximerat längden på sidan *c* så kan man märka ut och rita.

Kommer man inte på att det är fördelaktigt att vrida triangeln så kan man ändå lätt åstadkomma en 45°-vinkel genom att vika hörnet på ett skrivningspapper. Det finns alltså ingen anledning att har ritat en ”45°-vinkel” som är något annat än 45°.

Referenser: (beroende på hur man väljer att lösa uppgiften) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd [. . .]; Du ska kunna göra följande: • Göra en approximativ uppskattning av en vinkel i grader med ögonmått. • Tillämpa Pythagoras sats. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. Övning 12.21–24. Delvis rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Poäng efter hur stor del av uppgiften man fått ut. Uppritningen ska vara så korrekt som är tekniskt rimligt; att rita en triangel med andra måttoch skriva dit måtten som ska vara räknas inte som korrekt.

5. **(a)** Bestäm med bildens hjälp cos(20°) så noga du kan. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.8(b). Inritat i rött i bild.

$\boxed{\textit{Svar: } \cos(20^\circ) \approx 0{,}94}$

Rättningsnorm: Svar inom rimlig fummelån accepteras.

(b) Vinkeln β uppfyller $\tan(\beta) = -2$, $90° < \beta < 180°$. Bestäm med bildens hjälp β så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Vi ska alltså upp i andra kvadranten, som inte finns med i bild. Men en stråle i vinkel med tangensvärdet 2 upp i första kvadranten lutar lika mycket i förhållande till y-axeln, men åt andra hållet. En sådan vinkel är $180° - \beta$. Tangensvärdet motsvarar k-värdet; två rutor upp på en ruta fram. Lägg linjalen så och rita (blått). $180° - \beta \approx 63{,}5°$, så

$\boxed{\textit{Svar: } \beta \approx 116.5°}$

Rättningsnorm: 1p för förklaring, 1p för rätt uppmätt vinkel.

(c) Bestäm med bildens hjälp $\sin(-55°)$ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.8(g) (fast något försvårad, eftersom bara en fjärdedel av enhetscirkeln finns avbildad).

En stråle i vinkel $-55°$ går ner i fjärde kvadranten. y-koordinaten för dess skärning med enhetscirkeln kommer vara samma som för vinkeln $55°$, fast med minustecken. $\sin(55°) \approx 0{,}82$ (lila) så

$\boxed{\textit{Svar: } \sin(-55°) \approx -0{,}82}$

Rättningsnorm: Se (b).

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Sinus, cosinus, tangens • Enhetscirkeln; DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.8–9

6. Lös ekvationen $|x^2 - 16| = -6 \cdot x$ (5p)

Lösning:

Vi kan observera att vänsterledet alltid kommer att vara positivt (eller noll). Den negativa koefficienten i högerledet säger att för att få ett positivt resultat där måste även x vara negativ. Så får vi positiva svar är något konstigt.

Algebraisk lösning: Först måste vi hantera absolutbeloppet:

$$|x^2 - 16| = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{om } x^2 - 16 \geq 0 \\ -(x^2 - 16) & \text{om } x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

Detta fordrar att vi löser olikheterna, vilket kan göras i en och samma beräkning. $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x+4) \cdot (x-4)$. Teckenbyten i $x = \pm 4$. Tabell:

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 - 16$	$+$	0	$-$	0	$+$

Så $x^2 - 16 \geq 0$ då $x \leq -4$ och då $x \geq 4$, och $x^2 - 16 < 0$ då $-4 < x < 4$.

Om man inte vill vara så här formell kan man konstater att en produkt av två faktorer är positiv om faktorerna har samma tecken och negativ om de har olika. Här har de olika tecken mellan de två teckenbytarpunkterna.

Vi har nu

$$|x^2 - 16| = \begin{cases} x^2 - 16 & \text{om } x \leq -4 \text{ eller } x \geq 4 \\ -x^2 + 16 & \text{om } -4 < x < 4 \end{cases}$$

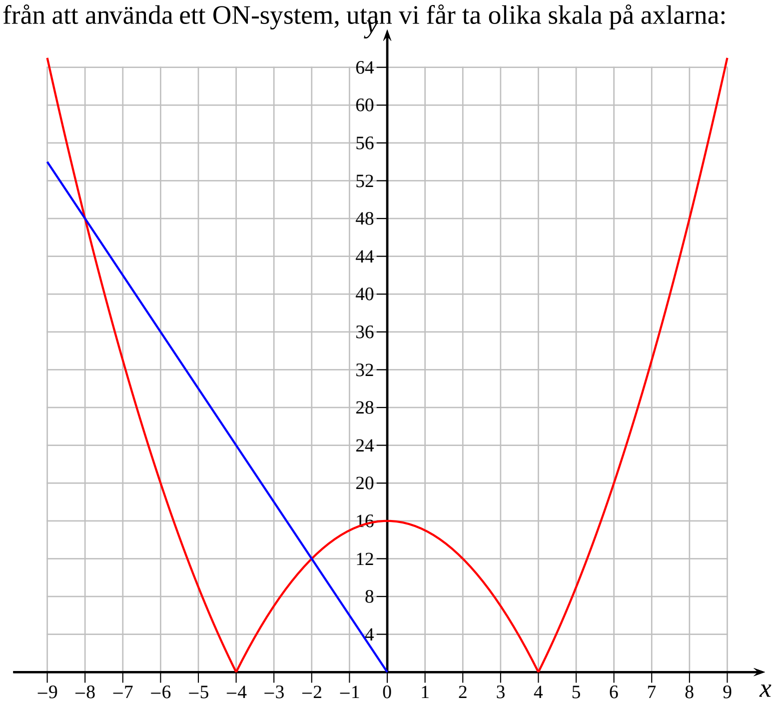
Ekvationen kan nu lösas som två fall:

$$\begin{array}{rcl}
& \boxed{-4 < x < 4} & \\
-x^2 + 16 &=& -6\cdot x \\
x^2 - 6\cdot x &=& 16 \\
x^2 - 2\cdot {\color{blue}3}\cdot x {\color{blue}+ 3^2} &=& 16 {\color{blue}+ 3^2} \\
(x-3)^2 &=& 25 \\
(x-3)^2 &=& 5^2 \\
x - 3 &=& \pm 5 \\
x - 3 = 5 & \vee & x - 3 = -5 \\
x = 5 + 3 & & x = -5 + 3 \\
\cancel{x = 8} & & x = -2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
& \boxed{x \le -4 \vee x \ge 4} & \\
x^2 - 16 &=& -6\cdot x \\
x^2 + 6\cdot x &=& 16 \\
x^2 + 2\cdot {\color{blue}3}\cdot x {\color{blue}+ 3^2} &=& 16 {\color{blue}+ 3^2} \\
(x+3)^2 &=& 25 \\
(x+3)^2 &=& 5^2 \\
x + 3 &=& \pm 5 \\
x + 3 = 5 & \vee & x + 3 = -5y \\
x = 5 - 3 & & x = -5 - 3 \\
\cancel{x = 2} & & x = -8
\end{array}$$

De överkryssade svarsalternativen stämde inte med det inramade villkoret.

Kommentar: Ett förvånande antal skrivande klarade inte att lösa andragradsekvationerna. Kom ihåg att man inte kan glömma första halvan av kursen bara för att man är inne på andra halvan!

Grafisk lösning: $y = x^2$ vet vi hur den ser ut (den vanliga parabeln). $y = x^2 - 16$ vet vi då också hur den ser ut: den vanliga parabeln nerflyttad 16 steg. $y = |x^2 - 16|$ vet vi då hur den ser ut: vik upp den del av parabeln som hänger under x-axeln. $y = -6\cdot x$ vet vi hur den ser ut, det är en rät linje genom origo som går 6 steg neråt på ett steg framåt. (Det går också att använda värdetabell.) För att få med de intressanta aspekterna på pappret måste vi avstå från att använda ett ON-system, utan vi får ta olika skala på axlarna:



Kurvorna skär på två ställen, så ekvationen har två lösningar; en vid $x = -8$ och en vid $x = -2$. Det är uppenbart att det inte finns några lösningar utanför bild. Till vänster går kurvorna isär, och till höger ligger linjen under x-axeln medan den andra kurvan ligger över.

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{-8, -2\}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa olikheter innehållande polynom och rationella uttryck. • Tillämpa absolutbeloppets definition problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering. Exempel 10.7, övning 10.16.

Rättningsnorm: Ignorerat beloppstecknet: 0p. Annars: skrivit om till styckvis definierad funktion: 1p. Separerat i fall: 1p. Löst ena fallet: 2p. Löst andra fallet: 1p. Strukit falska rötter: 1p. (Om flera av dessa moment är halvkorrekta kan sammanfattningspoäng ges.) En kontrollerad grafisk lösning ger full poäng.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2020.11.03 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

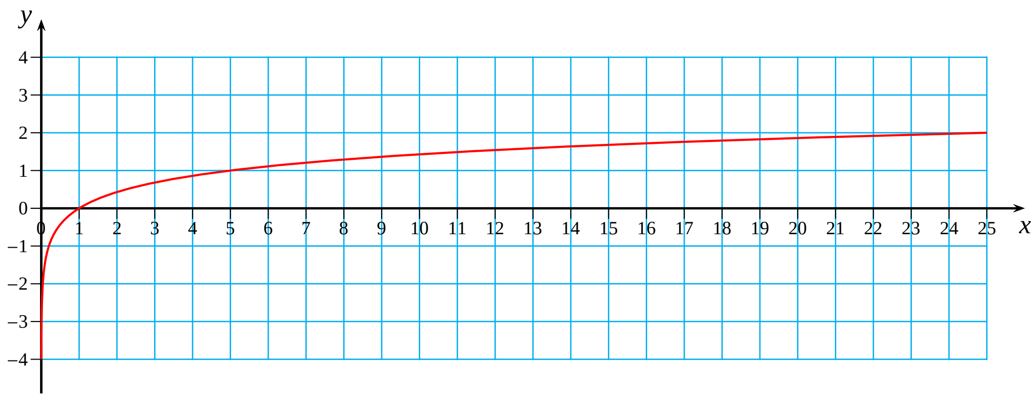
Formelsamling:
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

1. (a) Rita kurvan $y = \log_5(x)$. (1p)

Lösning:

Man kan ta hjälp av en värdetabell, som är lättare att upprätta om man utnyttjar att $y = \log_5(x) \Leftrightarrow x = 5^y$.

y	x
-3	0,008
-2	0,04
-1	0,2
0	1
1	5
2	25
3	125



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion.

Rättningsnorm: Grafen ska passera punkterna $(1, 0)$ och $(5, 1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

(b) Förenkla följande maximalt: $\dfrac{\log_5(125)}{\log_5(25)}$ (2p)

Lösning:
Bara att räkna ut direkt:

$$\frac{\log_5(125)}{\log_5(25)} = \frac{\log_5(5^3)}{\log_5(5^2)} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Notera att uttrycket *inte* är lika med $\log_5(125/25)$ (som är lika med 1), och inte heller kan man ”förkorta bort logaritmerna” så att man får $125/25 = 5$.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Bestämma en enkel logaritm [...]. • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna.

Rättningsnorm: 2p för helt rätt; 1p om man åtminstone visat att man förstår hur man räknar ut logaritmer.

2. Vi vet att $\cos(\alpha) = 0{,}8$ och att $0 < \alpha < \pi/2$. Vad är $\cos(2\cdot\alpha)$?

Tips: använd additionsformlerna! (3p)

Lösning:

Addition: Multiplikation med två innbär ”addera två sådana här saker”. Så

$$\cos(2\cdot\alpha) = \cos(\alpha+\alpha)$$

Additionsformeln (med samma vinkel på båda vinklarnas plats):

$$= \cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$$

Multiplicera två likadana saker är att kvadrera:

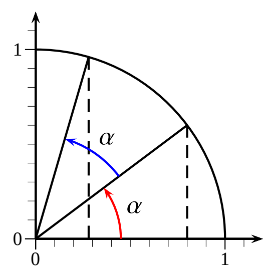
$$= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

Enligt trigonometriska ettan är $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, så $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
&= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))\\
&= \cos^2(\alpha) - 1 + \cos^2(\alpha)\\
&= 2\cdot\cos^2(\alpha) - 1\\
&= 2\cdot 0{,}8^2 - 1\\
&= 2\cdot 0{,}64 - 1\\
&= 1{,}28 - 1\\
&= \boxed{0{,}28}
\end{aligned}$$

(Upplysningen om intervallet behövdes inte för att lösa uppgiften, men fanns med för att den som velat ta fram $\sin(\alpha)$ inte skulle behöva undra vilket av de två värdena som man får med trigonometriska ettan som är rätt.)

Grafisk approximation: (Om man inte kommer på hur man ska räkna, men har ritredskap med sig.) Rita en enhetcirkel. Rita in vinkeln, utgående från cosinusvärdet. Mät vinkeln (som är ca 37°), och rita in en till sådan. Mät cosinusvärdet. Ger ett approximativt svar, men det är bättre än inget!



Cosinusvärdet för $2{\cdot}\alpha$ ser ut att vara knappt 0,3.

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa trigonometriska räkneregler. (Trigonometriska ettan ska kunnas utantill; övriga regler bör man åtminstone ha en ungefärlig uppfattning om hur de ser ut. Allra viktigast är kanske att veta hur de *inte* ser ut.) Övning 12.34, 12.41.

Rättningsnorm: Kommit till exakt svar: 3p. Gjort något icke-trivialt och konstruktivt: minst 1p. Svarat $2{\cdot}0{,}8$: 0p. Grafiskt: 1–2p, beroende på noggrannhetsgraden.

3. Lös ekvationen $4 - 2{\cdot}x = |x| - |x-2|$. (3p)

Lösning:

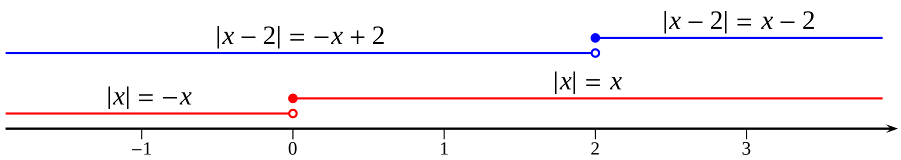
Rekommenderad uppgift 10.15(d).

Analytiskt: Beloppen kan skrivas

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \ge 0 \\ -x & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{om } x-2 \ge 0 \\ -(x-2) & \text{om } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{om } x \ge 2 \\ -x+2 & \text{om } x < 2 \end{cases}$$

Brytpunkterna $x = 0$ och $x = 2$ delar tallinjen i tre delar:



Det ger oss tre fall att räkna på (innan vänstra punkten, mellan de två punkterna, efter den högra punkten):

$\boxed{x < 0}$

$$\begin{aligned} 4 - 2{\cdot}x &= -x - (-x+2) \\ 4 - 2{\cdot}x &= -x + x - 2 \\ 4 - 2{\cdot}x &= -2 \\ 6 &= 2{\cdot}x \\ x &= 3 \\ 3 &\notin (-\infty, 0) \end{aligned}$$

$\boxed{0 \le x < 2}$

$$\begin{aligned} 4 - 2{\cdot}x &= x - (-x+2) \\ 4 - 2{\cdot}x &= x + x - 2 \\ 4 - 2{\cdot}x &= 2{\cdot}x - 2 \\ 6 &= 4{\cdot}x \\ x &= 6/4 = 1{,}5 \\ 1{,}5 &\in [0, 2) \end{aligned}$$

$\boxed{x \ge 2}$

$$\begin{aligned} 4 - 2{\cdot}x &= x - (x-2) \\ 4 - 2{\cdot}x &= x - x + 2 \\ 4 - 2{\cdot}x &= 2 \\ 2 &= 2{\cdot}x \\ x &= 1 \\ 1 &\notin [2, \infty) \end{aligned}$$

Så ekvationen har en (och endast en) lösning:

$\boxed{\textit{Svar: } x = 3/2}$

Kontroll: För att kontrollera att man kastat bort rätt lösningsförslag kan man testa dem i ursprungsekvationen:

$$x = 3: \begin{cases} \text{VL} = 4 - 2{\cdot}3 = 4 - 6 = -2 \\ \text{HL} = |3| - |3-2| = |3| - |1| = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

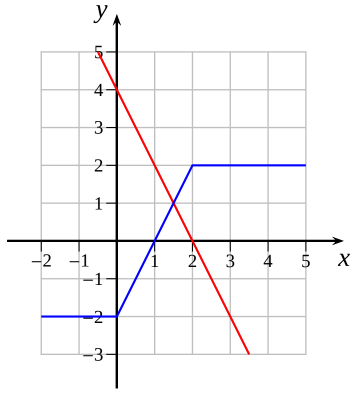
$$x = 1{,}5: \begin{cases} \text{VL} = 4 - 2{\cdot}1{,}5 = 4 - 3 = 1 \\ \text{HL} = |1{,}5| - |1{,}5-2| = |1{,}5| - |-0{,}5| = 1{,}5 - 0{,}5 = 1 \end{cases}$$

$$x = 1: \begin{cases} \text{VL} = 4 - 2{\cdot}1 = 4 - 2 = 2 \\ \text{HL} = |1| - |1-2| = |1| - |-1| = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Grafiskt: Samma inledning som i det analytiska alternativet ger att högerledet kan skrivas enligt

$$|x| - |x-2| = \begin{cases} x-(x-2) & \text{om } x \geq 2 \\ x-(-x+2) & \text{om } 0 \leq x < 2 \\ -x-(-x+2) & \text{om } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{om } x \geq 2 \\ 2 \cdot x - 2 & \text{om } 0 \leq x < 2 \\ -2 & \text{om } x < 0 \end{cases}$$

Ritar vi y = VL och y = HL i samma koordinatsystem får vi

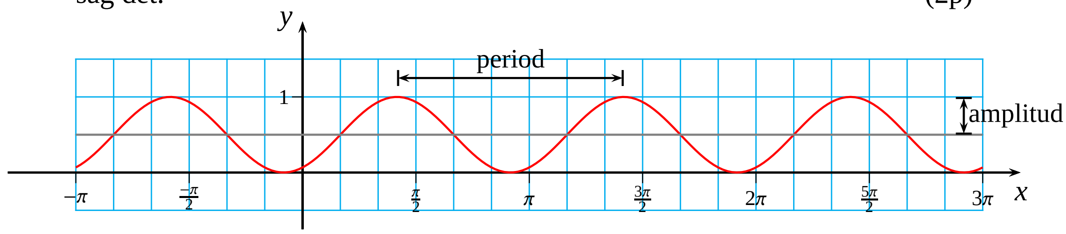


Den enda gemensamma punkten för kurvorna, ekvationens enda lösning, är vid $\boxed{x = 1{,}5}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning.

Rättningsnorm: 0p om man ignorerat beloppet. Annars: kommit till rätt svar via en tillförlitlig metod: 3p. Åtminstone visat förståelse för principerna: 1p. Kommit en god bit på väg, men inte ända fram: 2p. Full poäng för grafisk lösning.

4. (a) Här är grafen för en funktion. Ange period och amplitud, och förklara hur du såg det. (2p)



Lösning:

Period (våglängd) är den sträcka det tar innan förloppet börjar om, vilket kan utläsas som avståndet mellan två vågtoppar. De ligger med π:s mellanrum. Amplitud (våghöjd) är sträckan mellan centrum på vågen och vågtopparna, vilket här är $1/2$.

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{Period: } \pi\text{; amplitud: } 0{,}5}$

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • period, amplitud

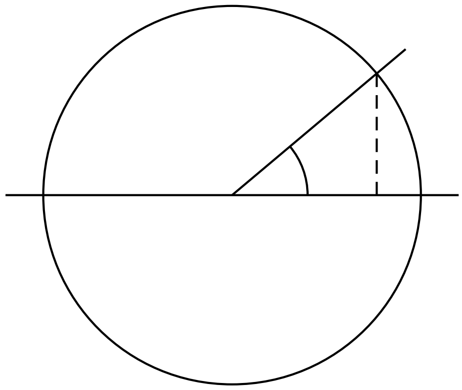
Rättningsnorm: Period: 1p. Amplitud: 1p (förutsatt att det finns något som kan tolkas som en förklaring).

(b) Anta att du har en gradskiva, en linjal och en passare och papper och penna, men inget annat, och behöver veta på ett ungefär vad sinusvärdet för en viss vinkel är. Hur kan du ta reda på det?

Skriv så att en medstudent skulle klara att följa dina instruktioner; rita gärna bild. (2p)

Lösning:

Exempelvis: rita en linje. Rita en cirkel med radie 1 dm och medelpunkt på linjen. Rita upp vinkeln, med linjen som ena vinkelbenet och spetsen i cirkelns medelpunkt. Mät hur långt från linjen skärningen med cirkeln ligger. Det måttet (i decimeter) är sinusvärdet för vinkeln.



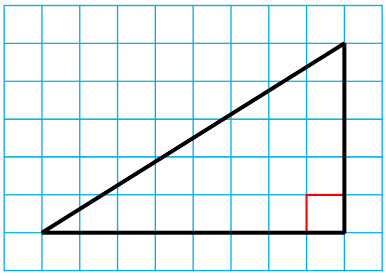
Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Sinus, cosinus, tangens • Enhetscirkeln; Du ska kunna göra följande: • Använda linjal och gradskiva. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln.

Rättningsnorm: Fungerande metod: 1p. Sannolikt att en medstudent skulle kunna följa instruktionen: 1p.

(c) Rita en triangel som har en vinkel med tangensvärdet $5/8$. Rita med omsorg; du kan använda kanten på omslaget som linjal om du inte har någon linjal med dig. (1p)

Lösning:

I en rätvinklig triangel är tangensvärdet för spetsvinkeln lika med mostående katet delad med närliggande katet. Om vi ger motstående katet längden 5 rutor och närliggande längden 8 rutor borde vi uppfylla beställningen:



Den spetsigaste vinkeln har tangensvärdet $5/8$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd, [...]; • Katet, hypotenusa. Du ska kunna göra följande: • Använda linjal [...]. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel.

Rättningsnorm: För poäng måste den ritade triangeln verkligen ha en vinkel med det specificerade tangensvärdet. Att bara rita något vagt triangelformat och skriva dit de avsedda längderna räcker inte. Inte heller en snygg triangel med fel mått duger.

5. Ett av nollställena till $p(z) = z^4 - 8{\cdot}z^3 + 29{\cdot}z^2 - 72{\cdot}z + 180$ är $4 + 2\,i$. Faktorisera polynomet fullständigt. (5p)

Lösning:

Rekomenderad uppgift 7.27.

Polynomet är av grad 4, och tillåter man icke-reella tal (vilket man uppenbarligen gör) så måste det ha 4 (ej nödvändigtvis olika) nollställen. Polynomet har reella koefficienter, och då förekommer eventuella icke-reella nollställen parvis. Så även $\overline{4+2\,i} = 4-2\,i$ är ett nollställe. Och om α är ett nollställe så är $z-\alpha$ en faktor.

Så vi vet två av polynomets fyra förstagradsfaktorer. Dividerar vi med dem så har vi kvar en andragradare, och sådana vet vi hur man faktoriserar. Det är enklare att dividera med båda faktorerna på en gång än att göra det med en i taget.

$$\begin{aligned}(z-(4+2\,i))\cdot(z-(4-2\,i)) &= ((z-4)-2\,i)\cdot((z-4)+2\,i)\\ &= (z-4)^2-(2\,i)^2 = z^2-8\cdot z+16-(-4) = z^2-8\cdot z+20\end{aligned}$$

(Det är inte nödvändigt att göra precis så här, men ”parentesförflyttningen” i första steget förenklar de efterföljande beräkningarna, eftersom man kan utnyttja andra kvadreringsregeln och konjugatregeln och därmed rationaliserar bort att räkna ut ett antal saker som kommer att förkorta bort sig mot varandra.)

Vi dividerar:

$$\begin{array}{r|l} & z^2 \qquad + \ 9 \\ \hline z^2-8z+20 & z^4-8\cdot z^3+29\cdot z^2-72\cdot z+180 \\ & -(z^4-8\cdot z^3+20\cdot z^2) \\ \hline & \qquad\qquad 9\cdot z^2-72\cdot z+180 \\ & \qquad\qquad -(9\cdot z^2-72\cdot z+180) \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Och kvoten är lätt att faktorisera; man behöver inte ens dra in kvadratkomplettering:

$$z^2+9 = z^2-(-9) = z^2-(3\,i)^2 = (z+3\,i)\cdot(z-3\,i)$$

$\boxed{\textit{Svar: } (z-4-2\,i)\cdot(z-4+2\,i)\cdot(z+3\,i)\cdot(z-3\,i)}$

Alternativlösning: Vi vet att i ett polynom med högstagradskoefficient ett är näst-högstagradskoefficienten lika med summan av nollställena med omvänt tecken, och konstanttermen lika med produkten av nollställena (med omvänt tecken om gradtalet är udda, vilket det inte är). Så om vi kallar de fyra nollställena för z_1 z_2, z_3 och z_4 så vet vi att

$$z_1+z_2+z_3+z_4 = 8 \qquad \text{och} \qquad z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4 = 180$$

Sätter vi in de kända $z_1 = 4+2\,i$ och $z_2 = 4-2\,i$ i det första sambandet får vi

$$(4+2\,i)+(4-2\,i)+z_3+z_4 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 8+z_3+z_4 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad z_3 = -z_4$$

Det andra sambandet ger

$$z_3\cdot z_4 = \frac{180}{z_1\cdot z_2} = \frac{180}{(4+2\,i)\cdot(4-2\,i)} = \frac{180}{4^2-(2\,i)^2} = \frac{180}{16+4} = \frac{180}{20} = 9$$

Sätter vi in det första resultatet här har vi

$$-z_4\cdot z_4 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad (z_4)^2 = -9 \quad \Leftrightarrow \quad z_4 = \pm 3\,i$$

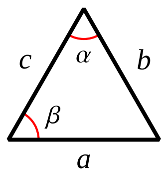
Om $z_4 = 3\,i$ är $z_3 = -3\,i$ och tvärtom, vilket i båda fallen innebär att de två sista nollställena är $\pm 3\,i$. Och ur detta kan man sätta ihop faktoriseringen.

(Detta var inspirerat av en studentlösning; jag tyckte det var intressant att titta på ett sätt att göra detta utan att blanda in polynomdivision.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Utnyttja egenskaperna hos icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: På ett ungefär: hittad andra nollstället: 1p. Insett att man ska dividera med andragradaren: 1p. Korrekt genomfört divisionen: 2p. Faktoriserat kvoten:1p.

6. I bredvidstående triangel har sidan a längden $2\cdot\sqrt{3}$ cm, sidan b längden $3\cdot\sqrt{2}$ cm, och vinkeln α är 45°.



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

(a) Bestäm vinkeln β. (3p)

(b) Är sidan c längre eller kortare än sidan a? Du behöver inte bestämma längden, men du måste motivera ditt svar. (2p)

Lösning:

Båda deluppgifterna, analytiskt: Två vinklar och deras motstående sidor inblandade: fall för sinussatsen.

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a} = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(45°)}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^{\cancel{2}\,1}}{2\cdot\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

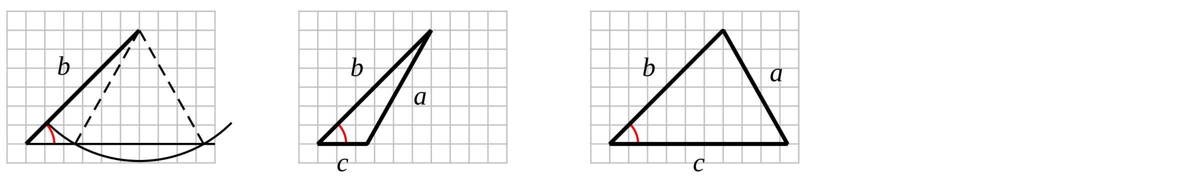
De *två* i en triangel möjliga vinklar som har detta sinusvärde är 60° och 120°. Båda är möjliga svar, för lägger man dem till vinkeln α så ligger man fortfarande under triangelns vinkelsumma 180°. (Det finns alternativa sätt att lösa uppgiften.)

Tittar man på sinussatsen så ser man att den vinkel som har störst sinusvärde måste höra ihop med den sida som har störst längd, annars kan kvoterna inte vara lika. Så genom att jämföra sinusvärdet på vinkeln γ med det för vinkel α kan man besvara frågan.

Om $\beta = 60°$ är $\gamma = 180° - 45° - 60° = 75°$, och 75° placerar oss närmare toppen på enhetscirkeln än vad 45° gör. Så $\sin(\gamma) > \sin(\alpha)$ och då är $c > a$.

Och om $\beta = 120°$ är $\gamma = 180° - 45° - 120° = 15°$, och 55° placerar oss närmare x-axeln än vad 45° gör. Så $\sin(\gamma) < \sin(\alpha)$ och då är $c < a$.

Båda deluppgifterna, grafiskt: Detta kan antingen vara en metod att få fram en approximativ lösning, eller en kontroll av framräknad exakt lösning. $3\cdot\sqrt{2} \approx 3\cdot 1{,}4 = 4{,}2$, eller exakt diagonallängden i en kvadrat med sidlängd 3, vilket är lätt att rita på rutat papper. 45° är lätt att rita på rutat papper. $2\cdot\sqrt{3} \approx 2\cdot 1{,}7 = 3{,}4$. Rita, utnyttjande rutnätet:



Det finns uppenbarligen två lösningar. Mätning i första figuren ger $\beta \approx 120°$, c är kortare än a. I andra figuren är $\beta \approx 60°$, c är längre än a.

$\boxed{\textit{Svar: } \text{(a) } \beta \in \{60°, 120°\} \text{ (b) Längre i första fallet, kortare i andra.}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • [. . .] tillämpa sinussatsen[. . .].

Rättningsnorm: (a) Korrekt formulerat sinussatsen: 1p. Bestämt $\sin(\beta)$: +1p. Hittat båda alternativen: +1p. (b) Inget avdrag för följdfel. Argument ”största vinkeln har största sidan” ger full poäng.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2021.01.13 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1. (a) Räkna om 600° till radianer. Svara maximalt förenklat. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.5(c). Ett varv är 360° och $2{\cdot}\pi$ radianer, så ett halvvarv är $180° = \pi$.

$$600° = \frac{600°{\cdot}\pi}{180°} = \frac{10{\cdot}\cancel{60}{\cdot}\pi}{3{\cdot}\cancel{60}} = \boxed{\frac{10{\cdot}\pi}{3}}$$

Alternativt så utnyttjar man att man kan utantill att 60° är $\pi/3$ i radianer, och multiplicerar allt med 10.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Räkna om mellan grader och radianer. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Din kompis tycker att 600° och −120° är samma vinkel, för man hamnar ju på samma ställe på enhetscirkeln, och det är samma trigonometriska värden. Förklara för din kompis vad det är för skillnad. (2p)

Lösning:

Exempelvis:

”600 grader, det är ett och två tredjedels varv moturs, så här alltså (viftar med handen i luften som om du vrider en osynlig vev). Minus 120 grader, det är ett tredjedels varv medurs, så här (vevar den osynliga veven åt andra hållet). Tänk dig att det här är veven på en domkraft. I ena fallet hissar vi upp bilen, och i andra fallet sänker vi ner den, och olika mycket dessutom. Veven kommer att vara i samma slutläge i båda fallen, men det har hänt helt olika saker på vägen! Om vinklarna faktiskt var samma så skulle det hända samma sak.”

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel [...]

Rättningsnorm: Man behöver inte vara så här utförlig. Man bör på något sätt ha fått med både riktning och storlek, och det ska verka möjligt för ”kompisen” att förstå (det räcker inte med att rättande lärare gör det).

2. Lös följande ekvation: $\tan(\frac{x}{2}) = -\sqrt{3}$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.52(c).

Om man inte memorerat tangensvärdena för standardvinklarna kan man antingen göra upp en tabell med sinus och cosinus, och ta fram tangensvärdena den vägen, eller göra en grov bild baserad på att $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ och utnyttja att tangensvärdet för en vinkel motsvarar riktningskoefficienten för strålen.

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= -\sqrt{3} \\
\tan(t) &= -\sqrt{3} && \boxed{\text{Sätt } x/2 = t} \\
t &= -\frac{\pi}{3} + n\cdot\pi \\
\frac{x}{2} &= -\frac{\pi}{3} + n\cdot\pi && \boxed{\text{Sätt } t = x/2} \\
x &= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{3} + n\cdot\pi\right) \\
x &= -\frac{2\cdot\pi}{3} + n\cdot 2\cdot\pi \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(Det hade varit lika korrekt att utgå från $2\cdot\pi/3$, den vinkeln har också tangensvärdet $-\sqrt{3}$. Då får man samma mängd av lösningar skriven på ett annat sätt.)

$$\boxed{\textit{Svar: } x = -\frac{2\cdot\pi}{3} + n\cdot 2\cdot\pi \text{ där } n \in \mathbb{Z}}$$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Lösa en trigonometrisk ekvation. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: 0p om man inte har med en period. Annars: rätt grundvinkel: 1p; rätt period: 1p; rätt hantering av 2:an: 1p.

3. Punkterna (x, y) som uppfyller ekvationen $|x|+|y| = 1$ bildar en kurva. Rita kurvan.

Uppgiften går att lösa med hjälp av det som vi gått igenom i kursen, men du kan vara tvungen att använda kunskaperna på ett kreativt sätt. (3p)

Lösning:

Detta påminner om ekvationen för en cirkel; ett uttryck med både x och y i, och där de talpar som uppfyller ekvationen bildar kurvan.

Det är alldeles för mycket belopp i frågan, så vi får falluppdela:

Om y är positiv (eller noll): Då har ekvationen formen

$$|x| + y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 - |x|$$

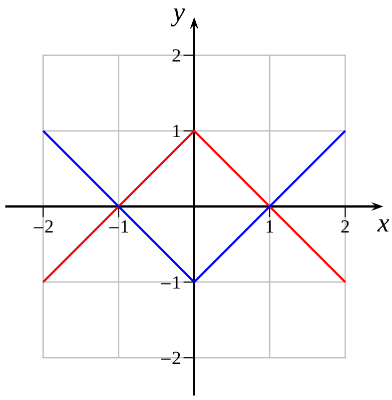
Den omskrivna versionen klarar vi att rita: det är en upp-och-ner-vänd version av den vanliga beloppskurvan, uppflyttat ett steg så att hörnet ligger i $(0, 1)$. Och vi ska ha den del av denna kurva där y-värdena är positiva (eller noll), vilket är den del som ligger ovanför (eller på) x-axeln.

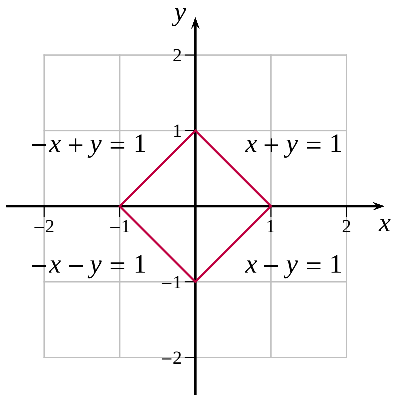
Om y är negativ: Då har ekvationen formen

$$|x| + (-y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = |x| - 1$$

Det är den vanliga beloppskurvan flyttad ett steg neråt, så att hörnet ligger i $(0, -1)$. Och vi ska ha den del av denna kurva där y-värdena är negativa, vilket är den del som ligger nedanför x-axeln.

Sammantaget: Vi kan börja med att rita de båda kurvorna i samma koordinatsystem, och så fylla i de delar som ska användas:





Alternativ: Vi kan också resonera kvadrant för kvadrant:

- I första kvadranten är både x och y positiva, så där är $|x| = x$ och $|y| = y$. Så vi ska ha den del av kurvan $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$ som ligger i första kvadranten. Det är en rät linje; lägg linjalen rätt och fyll i den del av linjen som ligger i första kvadranten.
- I andra kvadranten (x negativ, y positiv) är $|x| = -x$ och $|y| = y$. Vi hanterar $-x+y = 1$ på samma sätt som i föregående punkt.
- I tredje kvadranten är båda negativa, så $|x| = -x$ och $|y| = -y$. Ger $-x - y = 1$.
- I fjärde kvadranten är x positiv och y negativ; rita $x - y = 1$.

Dessa fyra linjestycken bildar kvadraten i bild.

Kommentar: Kurvor av den här typen dyker ofta upp i differential- och integralkalkyl i flera variabler, exempelvis i extremvärdesproblem och dubbelintegraler.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Rita en rät linje [...]. • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Detta var tänkt som tentans ”tänka själv”-fråga, så ingen rekommenderad uppgift matchar.

Rättningsnorm: Normen får i viss mån författas under pågående rättning, för det är svårt att förutse hur lösningarna kommer se ut. Preliminärt: helt rätt: 3p. Gjort någonting icke-trivialt och konstruktivt: 1p. Ignorerat beloppstecknen: 0p.

4. Vi har de två komplexa talen $z = 4 + 6\,i$, $w = 5 - 5\,i$.

(a) Beräkna $z - w$ (1p)

Lösning:

Bara att räkna:

$$z - w = (4 + 6\,i) - (5 - 5\,i) = 4 + 6\,i - 5 + 5\,i = \boxed{-1 + 11\,i}$$

Rättningsnorm: Helt rätt krävs för poäng.

(b) Beräkna w/z (2p)

Lösning:

Standardmetod: förläng med nämnarens konjugat:

$$\begin{aligned}
\frac{w}{z} &= \frac{(5 - 5\,i)\cdot(4 - 6\,i)}{(4 + 6\,i)\cdot(4 - 6\,i)} \\
&= \frac{5\cdot 4 - 5\cdot 6\,i - 5\,i\cdot 4 + 5\,i\cdot 6\,i}{4^2 - (6\,i)^2} \\
&= \frac{20 - 30\,i - 20\,i + 30\,i^2}{16 - 36\,i^2} \\
&= \frac{20 - 30\,i - 20\,i - 30}{16 + 36}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-10-50\,i}{52} = \frac{(-5-25\,i)\cdot\cancel{2}}{26\cdot\cancel{2}} = \boxed{\frac{-5-25\,i}{26}}$$

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Rätt metod, men räknefel: 1p

(c) Skriv w på polär form (2p)

Lösning:

Snarlik rekommenderad uppgift 13.15(e). Vi behöver belopp och argument.

$$|w| = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = 5\cdot\sqrt{2}$$

De sista stegen är inte nödvändiga, men det är ofta fördelaktigt att bryta ut heltalskonstanter på detta sätt.

Argument: Ritar vi talet i det komplexa talplanet så ligger det diagonalt ner i fjärde kvadranten. Den riktningen är $-\pi/4$. (Det går lika bra att använda $7\cdot\pi/4$, eftersom det här, till skilland från fråga 1(b) handlar det inte om vinkeln utan om den riktning som vinkeln pekar ut. Två olika vinklar kan peka ut samma riktning.)

$$\boxed{\textit{Svar: } w = 5\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(-\frac{\pi}{4}))}$$

Referenser: (Gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument • Rektangulär form, polär form; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.11, 13.15.

Rättningsnorm: Belopp: 1p. Argument: 1p.

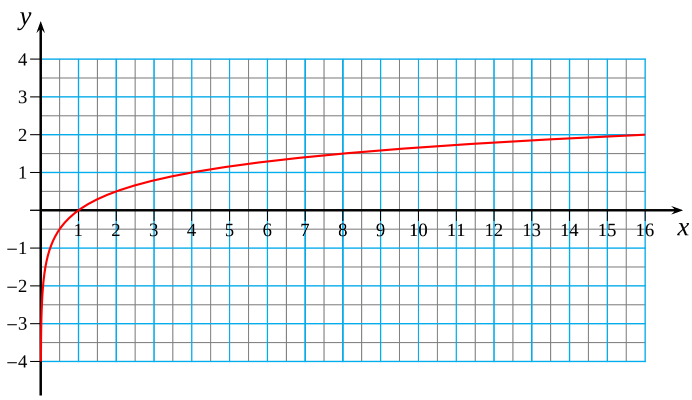
OBS! Även ”slarvfel” kommer att klassas som fel vid bedömningen.

5. (a) Skissa kurvan $y = \log_4(x)$. (1p)

Lösning:

Man kan ta hjälp av en värdetabell, som är lättare att upprätta om man utnyttjar att $y = \log_4(x) \Leftrightarrow x = 4^y$.

y	x
-3	inte mycket!
-2	0,0625
-1	0,25
0	1
1	4
2	16
3	64



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion.

Rättningsnorm: Kurvan ska passera $(1,0)$ och $(4,1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

(b) Lös ekvationen $2\cdot\log_4(1-x) = \log_4(5-2\cdot x)$ (4p)

Lösning:

Tvåan verkar vara ivägen:

$$2\cdot\log_4(1-x) = \log_4(5-2\cdot x)$$
$$\log_4((1-x)^2) = \log_4(5-2\cdot x) \quad \text{Logaritmregel; kolla svaren!}$$

$$\begin{aligned}(1-x)^2 &= 5-2\cdot x && \text{Samma logaritm, samma tal}\\ 1-2\cdot x+x^2 &= 5-2\cdot x && \text{Kvadreringsregel}\\ x^2 &= 4 && \text{"Flytta över"}\\ x &= \pm 2\end{aligned}$$

Dags att kolla svaren i ursprungsekvationen:

$$x=2:\ \begin{cases}\text{VL} = 2\cdot\log_4(1-2) = 2\cdot\log_4(-1) = \text{error}\\ \text{HL} = \log_4(5-2\cdot 2) = \log_4(5-4) = \log_4(1) = 0\end{cases}$$

$$x=-2:\ \begin{cases}\text{VL} = 2\cdot\log_4(1-(-2)) = 2\cdot\log_4(1+2)\\ \quad\ = 2\cdot\log_4(3) \overset{\star}{=} \log_4(3^2) = \log_4(9)\\ \text{HL} = \log_4(5-2\cdot(-2)) = \log_4(5+4) = \log_4(9)\end{cases}$$

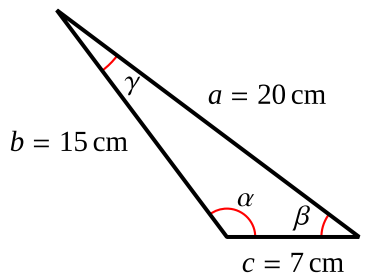
Logaritmregeln $n\cdot\log_a(x) = \log_a(x^n)$ är en regel som bara gäller om alla inblandade uttryck är definierade. Och eftersom $\log_4(3)$ och $\log_4(9)$ båda är definierade är den lagenlig i steget märkt $\star$. Under lösningsarbetet hade vi problemet att vi inte visste om uttrycken var definierade eller inte, vilket nödvändiggjorde efterkontroll.

$\boxed{\textit{Svar: } x=-2}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Avgöra om något är en lösning till en ekvation eller en olikhet. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer [...] Övning 11.19

Rättningsnorm: Kommit till $x^2 = 4$: 2p. Fått med $\pm$: 1p. Kastat bort rätt svar: 1p

6. Vi studerar nedanstående triangel:



Bilden är inte full skala.

(a) Bestäm $\cos(\alpha)$. (2p)

(b) Bestäm $\sin(\alpha)$. (2p)

(c) Vilken av vinklarna β och γ har störst cosinusvärde? Du behöver inte beräkna värdet, det räcker att du motiverar ditt svar med ord. (1p)

Lösning:

En delmängd av rekommenderad uppgift 12.21.

Cosinussatsen: Eftersom det bara finns sidlängder angivna går inte sinussatsen att använda, utan det får bli cosinussatsen (speciellt som det är cosinusvärdet vi först vill ha tag i):

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cos(\alpha)\\ 20^2 &= 15^2+7^2-2\cdot 15\cdot 7\cdot\cos(\alpha) && \text{Sätt in värden}\\ 400 &= 225+49-210\cdot\cos(\alpha) && \text{Kvadrera/multiplicera}\\ 400-225-49 &= -210\cdot\cos(\alpha) && \text{"Flytta över"}\end{aligned}$$

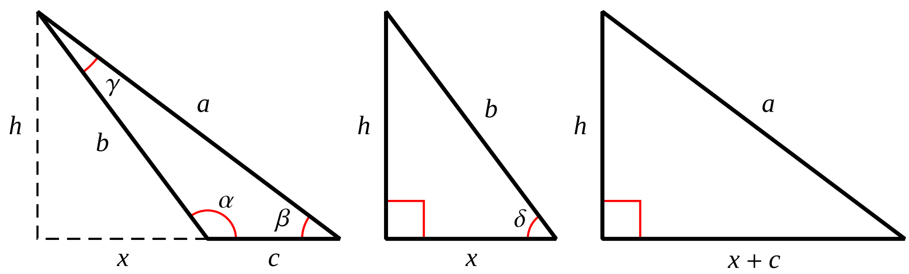
$$\cos(\alpha) = \frac{126}{-210} = -\frac{3}{5} \qquad \text{Dividera}$$

Trigonometriska ettan: Sinusvärdet kan nu erhållas ur trigonometriska ettan:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 \\
\sin^2(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha) \\
\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} \\
&= \pm\sqrt{1 - (-{}^3/_5)^2} \\
&= \pm\sqrt{{}^{25}/_{25} - {}^9/_{25}} \\
&= \pm\sqrt{{}^{16}/_{25}} = \pm{}^4/_5
\end{aligned}$$

Vinklar i trianglar ligger mellan 0° och 180°, och har därför positiva sinusvärden, så minusalternativet kan slängas.

Rätvinkliga trianglar: Om man glömt sinus- och cosinussatserna men kommer ihåg hur man hanterar rätvinkliga trianglar kan man utnyttja detta:



Pythagoras sats på de två rätvinkliga trianglarna ger:

$$h^2 + x^2 = b^2 \iff h^2 = b^2 - x^2 \qquad h^2 + (x+c)^2 = a^2 \iff h^2 = a^2 - (x+c)^2$$

Slår vi ihop informationen får vi

$$\begin{aligned}
b^2 - x^2 &= a^2 - (x+c)^2 \\
b^2 - x^2 &= a^2 - (x^2 + 2\cdot x\cdot c + c^2) \\
b^2 - \cancel{x^2} &= a^2 - \cancel{x^2} - 2\cdot x\cdot c - c^2 \\
2\cdot x\cdot c &= a^2 - b^2 - c^2 \\
x &= \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2\cdot c} \\
&= \frac{20^2 - 15^2 - 7^2}{2\cdot 7} = \frac{400 - 225 - 49}{14} = \frac{126}{14} = 9 \\
h^2 &= 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 = 12^2
\end{aligned}$$

Vinkeln δ i mittentriangeln är lika med $180° - \alpha$. Den har samma sinusvärde som α, och cosinusvärdet har samma "siffror" men annat tecken. Och med sambanden mellan trigonometriska värden och sidlängder i den rätvinkliga triangeln kan vi nu ta fram:

$$\sin(\alpha) = \sin(\delta) = \frac{h}{b} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \qquad -\cos(\alpha) = \cos(\delta) = \frac{x}{b} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Approximativ grafisk metod: Rita av triangeln i större storlek på ett papper, rita in en enhetscirkel, och mät av de trigonometriska värdena. (Ger inte exakt svar, men ett ungefärligt svar är bättre än inget svar.)

β och γ: För vinklar mellan 0° och 180° gäller att ökar man vinkeln så krymper cosinusvärdet (eftersom man förflyttar sig åt vänster). γ är helt klart spetsigare (dvs. mindre) än β, så γ:s cosinusvärde är störst.

(Man kan också beräkna värdena med cosinussatsen och jämföra.)

Svar: (a) $\cos(\alpha) = -3/5$ (b) $\sin(\alpha) = 4/5$ (c) $\cos(\gamma) > \cos(\beta)$

Referenser: Beror lite på hur man valde att göra. Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd, area • Katet, hypotenusa Du ska kunna göra följande: • Tillämpa Pythagoras sats. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Poäng i proportion till hur stor del av lösningen man fått ihop.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2021.06.01 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

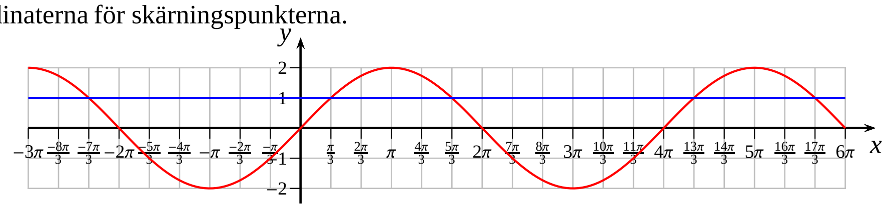
1. Lös följande ekvation: $2\cdot\sin(x/2) = 1$ (3p)

Lösning:

Notera att ekvationen *inte* kan skrivas om till ”$\sin(x) = 1$”. Man kan inte ”multiplicera in 2:an” i ett funktionsuttryck.

$$2\cdot\sin(\frac{x}{2}) = 1$$
$$\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$$
$$\sin(t) = \frac{1}{2} \qquad \text{Sätt } x/2 = t$$
$$t = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi \quad \vee \quad t = \frac{5\cdot\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi \quad n\in\mathbb{Z}$$
$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi \qquad \frac{x}{2} = \frac{5\cdot\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi \quad \text{Sätt } t = x/2$$
$$x = 2\cdot\left(\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi\right) \qquad x = 2\cdot\left(\frac{5\cdot\pi}{6} + n\cdot 2\cdot\pi\right)$$
$$x = \frac{\pi}{3} + n\cdot 4\cdot\pi \qquad x = \frac{5\cdot\pi}{3} + n\cdot 4\cdot\pi$$

Bild: $y = 2\cdot\sin(x/2)$ är en sinuskurva med både period och amplitud fördubblade. (Halvan gör att allt går hälften så fort, så dettar dubbelt så lång tid innan man hunnit gå en våglängd, tvåan drar ut allt på höjden.) $y = 1$ är en horisontell linje. Ekvationens lösningar är x-koordinaterna för skärningspunkterna.



På första positiva våglängden ser vi två lösningar: $x = \pi/3$ och $x = 5{\cdot}\pi/3$. Sedan kommer det nya lösningar varje gång man förflyttat sig en våglängd ($4{\cdot}\pi$) åt någondera hållet.

Kommentar: Att rättningsnormen ger 0p om man inte har med period beror på att den som är omedveten om att trigonometriska ekvationer vanligtvis har oändligt många lösningar omöjligt kan ha pluggat på det här avsnittet.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.50–52, bildspelet om trigonometriska ekvationer.

Rättningsnorm: Ej tagit med någon period: 0p. Felaktigt skrivit om ekvationen, men löst den felaktiga ekvationen korrekt: 1p. Annars: Korrekta grundlösningar: 1p. Korrekt period: 1p. Korrekt hantering av halvan: 1p

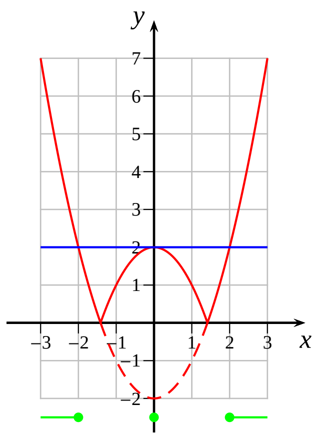
2. Lös följande olikhet: $|x^2 - 2| \geq 2$ (3p)

Tips: Rita problemet!

Lösning:

Rekommenderad uppgift 10.17(d)

Grafisk lösning: $y = x^2$ vet vi hur den ser ut. $y = x^2 - 2$ ser likadan ut, fast nerflyttad två steg. $y = |x^2 - 2|$ ser likadan ut, fast med delen som hänger nedanför x-axeln uppvikt. $y = 2$ är en horisontell linje.



(Om man gör upp en värdetabell för heltals-x och ritar utifrån den missar man antagligen de två spetsarna på kurvan, och den blir då så pass felaktig att den skulle ha gett fel svar för t.ex. högerledet 0,5.)

Olikheten innebär att vi söker de områden där den modifierade parabeln ligger ovanför eller på linjen. Det verkar den göra i området till vänster om $x = -2$ (punkten inräknad), i området till höger om $x = 2$ (punkten inräknad) samt i punkten $x = 0$, där linjen tangerar den uppvikta delen av parabeln.

Beräkningslösning: Enda praktiska sättet att räkna med beloppsuttryck är att ta bort beloppen, vilket istället genererar en falluppdelning och kontroll av svar.

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{om } x^2 - 2 \geq 0 \\ -(x^2 - 2) & \text{om } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{om } x^2 \geq 2 \\ -x^2 + 2 & \text{om } x^2 < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{om } x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2} \\ -x^2 + 2 & \text{om } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

(Olikheterna var så enkla att det verkade over-kill med en uppställning för att lösa dem.)

Nu kan vi ge oss på det problem det egentligen handlade om:

$\boxed{x \leq -\sqrt{2} \ \vee \ x \geq \sqrt{2}}$	$\boxed{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$
$x^2 - 2 \geq 2$	$-x^2 + 2 \geq 2$
$x^2 \geq 4$	$-x^2 \geq 0$
$x \leq -2 \ \vee x \geq 2$	$x^2 \leq 0$
uppfyller kraven	$x = 0$
	uppfyller kraven

(Även här var olikheterna så enkla att uppställning inte behövdes. Vid kontrollen av rimlighet utnyttjades att $\sqrt{2} \approx 1{,}4 < 2$.)

$\boxed{\textit{Svar: } x \in ((-\infty, 2] \cup \{ 0 \} \cup [2, \infty))}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Rekommenderad uppgift.

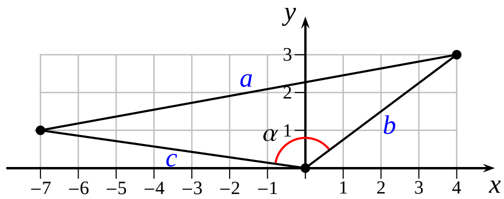
Rättningsnorm: Ignorerat beloppstecknet: 0p. Helt rätt: 3p (och grafisk lösning är OK; inga avdrag för felaktig notation i svaret om det går att förstå vad som menas). Åtminstone visat att man förstår frågan: 1p. Mellanting: 2p

3. En triangel har hörn i punkterna $(0, 0)$, $(4, 3)$ och $(-7, 1)$ i ett koordinatsystem. Vad är vinkeln i det hörn som ligger i origo? (3p)

Delpoäng för korrekt svar; för full poäng krävs en ordentlig motivering/beräkning.

Lösning:

Första åtgärd: rita upp problemet!



Ögonmått eller en enkel gradskiva vikt av en bit papper visar att hörnvinkeln ifråga är ca 135°.

Cosinussatsen: Här behövs sidornas längder, och de kan bestämmas med Pythagoras sats ur hörnens koordinater:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-7-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2} \\
&= \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}\,(\text{l.e.}) \quad (\approx 11{,}2\,(\text{l.e.})) \\
b &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\,(\text{l.e.}) \\
c &= \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}\,(\text{l.e.}) \quad (\approx 7{,}1\,(\text{l.e.}))
\end{aligned}$$

(Approximationerna kan användas för rimlighetskontroll med linjal. Observera att man *inte* kan utgå från att längden på en lutande linje är lika med det horisontella avståndet mellan ändpunkterna; det fungerar bara på horisontella linjer.)

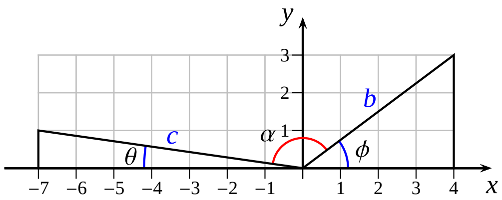
Cosinussatsen:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha) \\
(\sqrt{125})^2 &= 5^2 + (\sqrt{50})^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
125 &= 25 + 50 - 10 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos(\alpha) \\
\cos(\alpha) &= \frac{25 + 50 - 125}{10 \cdot \sqrt{50}} \\
&= \frac{-50}{10 \cdot \sqrt{25 \cdot 2}} \\
&= -\frac{-50}{10 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Den enda i en triangel möjliga vinkel som har detta cosinusvärde är 135°.

Rätvinkliga trianglar:



Vi kan se att vinklarna α, ϕ och θ summerar till ett halvt varv, 180°. Det är ganska enkelt att ta fram de trigonometriska värdena för ϕ och θ, utgående från ”motstående/närliggande genom hypotenusan” (där hypotenusorna b och c beräknas på samma sätt som i föregående lösningsförslag):

$$
\cos(\phi) = \frac{4}{5} \qquad \sin(\phi) = \frac{3}{5} \qquad \cos(\theta) = \frac{7}{\sqrt{50}} \qquad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{50}}
$$

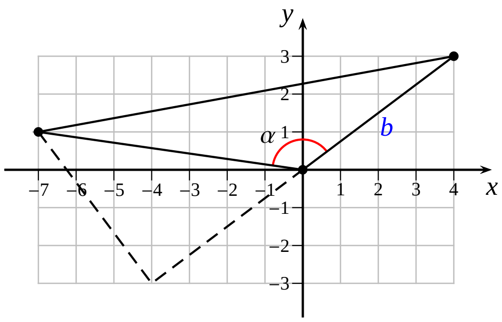
Med additionsformeln kan vi få fram trigonometriskt värde för deras summa:

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta + \phi) &= \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\
&= \frac{7}{\sqrt{50}} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{28 - 3}{5 \cdot \sqrt{25 \cdot 2}} = \frac{25}{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Den enda vinkel mellan 0° och 180° som har detta cosinusvärde är 45°. Drar vi bort detta från vinkelsumman får vi

$$
\alpha = 180^\circ - (\theta + \phi) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ
$$

Bygg ut bilden:



De två streckade linjerna är helt klart lika långa och går i rät vinkel mot varandra. Det innebär att de övriga vinklarna i den triangeln är 45°. Och den ena av linjerna är en direkt fortsättning på sidan b. Då summerar α och den högra 45°-vinkeln till 180°, vilket innebär att $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Det finns med all säkerhet fler sätt att komma fram till svaret!

$\boxed{\textit{Svar: } 135^\circ}$

Referenser: Exakt vad man behöver beror på hur man angriper uppgiften. Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Vinkel, längd[...]; Du ska kunna göra följande: • Använda linjal och gradskiva. • Göra en approximativ uppskattning av en vinkel i grader med ögonmått. • Tillämpa Pythagoras sats. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. Övning 12.21–24

Rättningsnorm: Svar med mätning: 1p. Svar ur vattentät beräkning: 3p. Gjort något icke-trivialt och konstruktivt: 1–2p.

4. (a) Din kompis har kört fast på en logaritmuppgift, och ber om din hjälp.

> Det står att jag ska säga vad 5-logaritmen för 100 är, och att om jag inte kan svara exakt så ska jag ange ett intervall som svaret ligger i. Hur ska jag tänka?

Förklara för kompisen hur man ska tänka, och vad svaret är. Försök vara så pass tydlig att kompisen sedan kan lösa sådana här problem på egen hand (istället för att komma och störa dig). (2p)

Lösning:

"5-logaritmen för ett tal, det är det som man ska upphöja 5 i om man vill få talet som svar. Så 5-logaritmen för 25 är 2, eftersom man ska höja upp 5 i 2 om man vill få 25 som svar. Här vill du veta vad man ska höja upp 5 i om man vill få 100 som svar. 2 är tydligen för lite, eftersom 25 är mindre än 100. Vi kan prova med 3: 5 upphöjt i 3 är 125. Det är för mycket! Så talet du söker ligger någonstans mellan 2 och 3. Där har du ditt intervall! Och så här ska du tänka på alla problem av den här sorten."

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser. • Bestämma en enkel logaritm[...] Övning 11.2, 11.7.

Rättningsnorm: 2p om det verkar sannolikt att en kompis skulle förstå förklaringen, 1p om det verkar som att den skrivande förstår men kompisen inte skulle göra det.

(b) Förenkla följande uttryck maximalt: $\log_5(0{,}45) - 2\cdot\log_5(1{,}5)$ (3p)

Lösning:

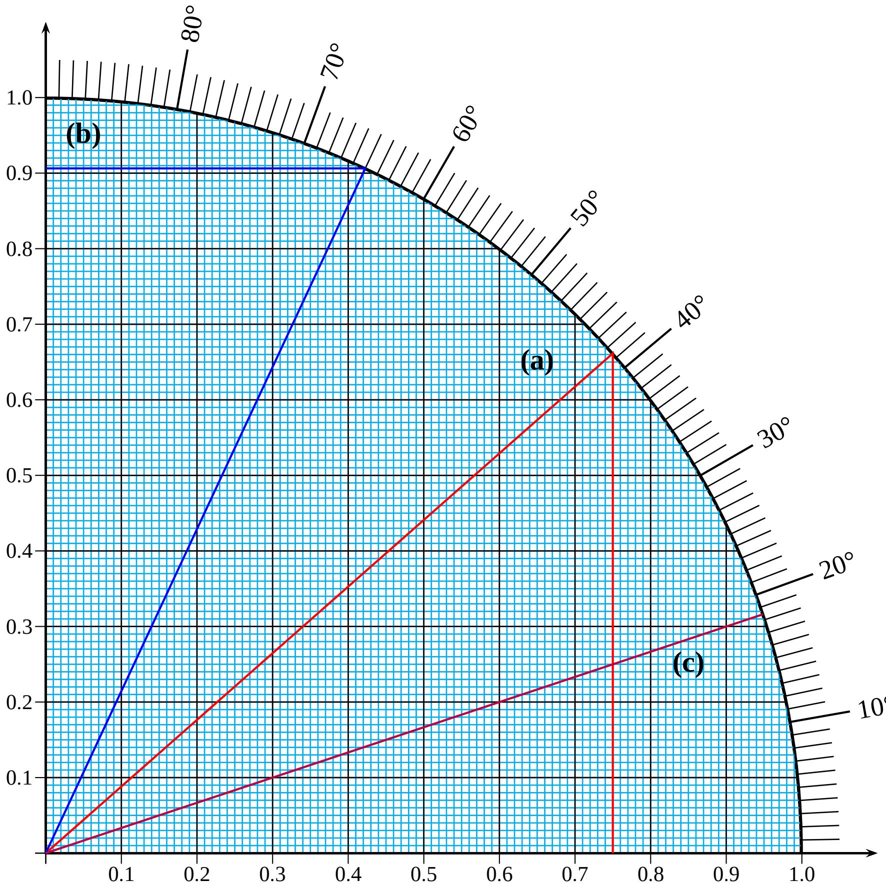
Bara att tillämpa logaritmreglerna (och bråkräkningsregler och multiplikationstabellen):

$$\begin{aligned}
\log_5(0{,}45) - 2\cdot\log_5(1{,}5) &= \log_5(0{,}45) - \log_5(1{,}5^2) && n\cdot\log_a(x) = \log_a(x^n)\\
&= \log_5\left(\frac{0{,}45}{1{,}5^2}\right) && \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a(x/y)\\
&= \log_5\left(\frac{0{,}45\cdot 100}{1{,}5^2\cdot 10^2}\right) && \text{Förläng}\\
&= \log_5\left(\frac{45}{15^2}\right)\\
&= \log_5\left(\frac{\cancel{45}}{\cancel{15\cdot 3}\cdot 5}\right) && \text{Förkorta}\\
&= \log_5(5^{-1}) && 1/x = x^{-1}\\
&= \boxed{-1}
\end{aligned}$$

Beräkningen kan genomföras på ett flertal andra sätt (som alltihop dock ger svaret -1).

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Genomföra additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner med flersiffriga tal utan hjälpmedel. • Snabbt och säkert tillämpa bråkräkningsreglerna vid räkning med bråk med siffror. • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$). • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. Övning 11.11–12

Rättningsnorm: Kommit till svar: 1p. Åtminstone visat färdighet i logaritmräkning: 1p. Mellanting: 2p.



5. (a) $\cos(\alpha) = 0{,}75$, $0° < \alpha < 90°$. Bestäm med bildens hjälp α så noga du kan.(1p)

Lösning:

Leta rätt på den punkt på cirkeln som har x-koordinaten 0,75, och läs av vinkeln: $\boxed{\text{mellan } 41° \text{ och } 42°}$

(b) Bestäm med bildens hjälp $\sin(115°)$ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.8(e), (fast något försvårad, eftersom bara en fjärdedel av enhetscirkeln finns avbildad).

Symmetri ger att 115°, där man har $180° - 115° = 65°$ kvar till x-axeln, har samma sinusvärde som 65°, och det kan vi läsa av ur cirkeln genom att läsa av y-koordinaten för 65°. Värdet ser ut att ligga någonstans $\boxed{\text{mellan } 0{,}90 \text{ och } 0{,}91}$

(c) $\tan(\gamma) = 1/3$, $180° < \gamma < 270°$. Bestäm med bildens hjälp γ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Tangensvärdet motsvarar ”k-värdet” för strålen. Det givna intervallet säger att strålen ska gå ner i tredje kvadranten. I så fall är den en fortsättning på en linje med samma lutning men i första kvadranten. Själva vinkeln är ett halvt varv mer. Riktningskoefficient $1/3$ betyder ”en ruta uppåt på tre rutor framåt”. Ritar vi in det i cirkeln hamnar vi någonstans mellan 18° och 19°, så den sökta vinkeln ligger $\boxed{\text{mellan } 198° \text{ och } 199°}$.

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Sinus, cosinus, tangens • Enhetscirkeln; DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.8–9

Rättningsnorm: (gäller alla deluppgifterna) visat att man kan läsa av värdena: 1p. Visat att man kan förflytta problemet till 1:a kvadranten: 1p (gäller (b) och (c)).

6. (a) $z = 6{\cdot}(\cos(-\pi/6) + i\ \sin(-\pi/6))$. Skriv z på rektangulär form. (1p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 13.15(a).

$$z = 6{\cdot}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\ \sin(-\frac{\pi}{6})) = 6{\cdot}(\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2})\, i) = \boxed{3{\cdot}\sqrt{3} - 3\, i}$$

Rättningsnorm: HELT rätt krävs för poäng.

(b) $w = -2\, i$. Skriv w på polär form. (2p)

Lösning:

Utprickat i ett komplext talplan ligger detta tal på imaginäraxeln, två steg nedanför origo. ”Två steg” ger $|w| = 2$. ”På imaginäraxel, nedanför origo” ger $\arg(w) = -\pi/2$, rät vinkel mot realaxeln. ($3{\cdot}\pi/2$ går också bra; en annan vinkel, men även den placerar oss på negativa imaginäraxeln.)

$\boxed{\textit{Svar: } w = 2{\cdot}(\cos(-\pi/2) + i\ \sin(-\pi/2))}$

Rättningsnorm: Belopp: 1p. Argument: 1p.

(c) Beräkna z/w. Svarar på valfri form, men svaret ska vara maximalt förenklat. (2p)

Lösning:

”Valfri form” implicerar att det finns flera att välja på. . .

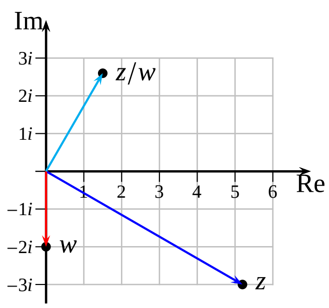
Rektangulär form: Standardknepet är att förlänga med komplexa konjugatet, men här verkar det som att man kan spara något steg genom att bara förlänga med i:

$$\frac{3{\cdot}\sqrt{3} - 3\, i}{-2\, i} = \frac{(3{\cdot}\sqrt{3} - 3\, i){\cdot}i}{-2\, i{\cdot}i} = \frac{3{\cdot}\sqrt{3}\, i - 3\, i^2}{-2\, i^2} = \frac{3{\cdot}\sqrt{3}\, i - 3{\cdot}(-1)}{-2{\cdot}(-1)} = \boxed{\frac{3 + 3\sqrt{3}\, i}{2}}$$

(Förlänger man med $0 + 2\, i$ får man samma svar men en ett steg längre uträkning, eftersom man får förkorta bort en gemensam faktor 2 ur täljare och nämnare.)

Polärt: Kvotens belopp är kvoten av beloppen, kvotens argument är differensen av argumenten:

$$\frac{6{\cdot}(\cos(-\pi/6) + i\ \sin(-\pi/6))}{2(\cos(-\pi/2) + i\ \sin(-\pi/2))} = \frac{6}{2}{\cdot}(\cos(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) + i\ \sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}))$$
$$= \boxed{3{\cdot}(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\ \sin(\frac{\pi}{3}))}$$



Referenser: (gäller alla deluppgifterna) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Multiplicera, dividera och beräkna potenser med komplexa tal på polär form. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.11, 13.15–16

Rättningsnorm: Helt korrekt: 2p. Korrekt metod, men räknefel eller oförkortat: 1p. Inga avdrag för följdfel från (a) eller (b).

Obs! Även ”slarvfel” kommer att klassas som ”fel” vid rättningen.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2021.08.20 08.30–11.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. Ett av nollställena till $p(z) = z^3 + 6\cdot z + 20$ är $1 + 3\,i$. Bestäm samtliga nollställen. (3p)

Lösning:

Standardlösning: Om α är ett nollställe till ett polynom med reella koefficienter (vilket detta polynom har) så är konjugatet till α också ett nollställe. Och det givna nollstället är icke-reellt vilket innebär att dess konjugat är ett annat tal. Så $\overline{1+3\,i} = 1 - 3\,i$ är ett annat nollställe.

Polynomet är av grad tre, så det ska ha tre nollställen (om man får använda icke-reella tal, vilket man uppenbarligen får). Om α är ett nollställe så är $z - \alpha$ en faktor, så vi kan dividera för att något mindre att studera.

Division är besvärlig, så vi bör dividera med allt vi hittills hittat, dvs. med både $z-(1+3\,i)$ och $z-(1-3\,i)$ samtidigt.

$$\begin{aligned}(z-(1+3\,i))\cdot(z-(1-3\,i)) &= ((z-1)-3\,i)\cdot((z-1)+3\,i)\\ &= (z-1)^2-(3\,i)^2 = z^2-2\cdot z+1^2-3^2\cdot(-1) = z^2-2\cdot z+10\end{aligned}$$

(Multiplikationen kan ju genomföras på många andra sätt än det här, men denna kombination av konjugatregeln och kvadreringsregeln motsvarar kvadratkomplettering baklänges.)

$$\begin{array}{r|l} & z \;+2 \\ \hline z^2-2\cdot z+10 & z^3+0\cdot z^2+\;6\cdot z+20 \\ & -(z^3-2\cdot z^2+10\cdot z) \\ \hline & \quad 2\cdot z^2-\;4\cdot z+20 \\ & \quad -(2\cdot z^2-\;4\cdot z+20) \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 0\end{array}$$

Så den sista faktorn är $z + 2$, och då är det sista nollstället -2.

Alternativt så utnyttjar man att i ett polynom med högstagradskoefficient 1 (vilket detta har) så är nästhögstagradskoefficienten lika med summan av nollställena med omvänt tecken. Kallar vi det sista nollstället för α så har vi

$$(1+3\,i)+(1-3\,i)+\alpha = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = -2$$

vilket var betydligt enklare än att använda polynomdivision.

Alternativlösning: Ignorera informationen, utan försök faktorisera förutsättningslöst.

OM ett polynom med heltalskoefficienter (vilket detta har) har ett heltalsnollställe α **SÅ** är detta heltal en faktor i konstanttermen. Konstanttermen är 20, och har faktorerna ±1, ±2, ±4, ±5, ±10 och ±20. Om inget av dessa tio tal fungerar sitter vi fast. Testa, och börja förslagsvis med det som verkar enklast att räkna med.

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1^3 + 6\cdot 1 + 20 = 1 + 6 + 20 = 26 \neq 0\\
p(-1) &= (-1)^3 + 6\cdot(-1) + 20 = -1 - 6 + 20 = 13 \neq 0\\
p(2) &= 2^3 + 6\cdot 2 + 20 = 8 + 12 + 20 = 40 \neq 0\\
p(-2) &= (-2)^3 + 6\cdot(-2) + 20 = -8 - 12 + 20 = 0
\end{aligned}$$

-2 är ett nollställe, och då är $z + 2$ en faktor. Dividera.

$$\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2\cdot z \;\; + 10 \\ \hline
z + 2 & z^3 + 0\cdot z^2 + \;\; 6\cdot z + 20 \\
 & -(z^3 + 2\cdot z^2) \\ \cline{2-2}
 & \quad -2\cdot z^2 + \;\; 6\cdot z \\
 & \quad -(-2\cdot z^2 - \;\; 4\cdot z) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad 10\cdot z + 20 \\
 & \qquad\quad -(10\cdot z + 20) \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Den erhållna andragradaren kan faktoriseras med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned}
z^2 - 2\cdot z + 10 &= z^2 - 2\cdot 1\cdot z + 1^2 - 1^2 + 10 = (z-1)^2 + 9 = (z-1)^2 - (-9)\\
&= (z-1)^2 - (3\,i)^2 = ((z-1) + 3\,i)\cdot((z-1) - 3\,i) = (z - (1 - 3\,i))\cdot(z - (1 + 3\,i))
\end{aligned}$$

Och här ser vi de två återstående nollställena.

$\boxed{\textit{Svar:}\text{ Nollställena är } 1 + 3\,i,\ 1 - 3\,i,\ -2}$

Referenser: Beror lite på hur man angriper problemet, men en delmängd av: Du ska kunna göra följande: • Utnyttja faktorsatsen. • Genomföra en polynomdivision. • Utnyttja sambandet mellan polynoms nollställen och koefficienter. • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Utnyttja egenskaperna hos icke-reella nollställen till polynom med reella koefficienter. Exempel 7.13, övning 7.28.

Rättningsnorm: 1p för nollställe nr 2; +1p för funktionell ansats för att ta fram det tredje nollstället; +1p för korrekt genomförande.

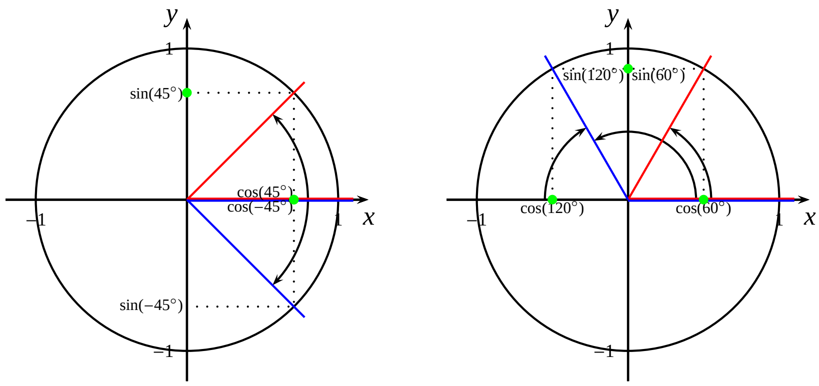
2. Din kompis kommer till dig med följande problem:

> Jag har lärt mig de trigonometriska värdena för standardvinklarna i första kvadranten. Men hur använder jag det för vinklar i andra kvadranter? Om jag behöver t.ex. $\sin(-45°)$ eller $\cos(120°)$, hur ska jag tänka?

Förklara för kompisen (gärna med hjälp av bild) hur man kan tänka. För full poäng ska förklaringen vara så pass tydlig att man kan hoppas att kompisen kommer att klara *alla* sådana här problem i fortsättningen, det räcker inte att man förklarar för just de här vinklarna. (3p)

Lösning:

”Vi ritar en enhetscirkel, och så ritar vi in de där standardvinklarna som du kan värdena för. Nu ritar vi in $-45°$, som får oss att hamna i fjärde kvadranten. Sinus och cosinus, det är koordinaterna för strålens skärning med cirkeln. Om du tittar så blir det precis likadant som för $45°$, den enda skillanden är att y-koordinaten är negativ. Och y-koordinaten, det är sinusvärdet som du söker! Så det är samma som för $45°$ fast med minustecken. x-koordinaterna är cosinusvärdena, och de är lika.



Och samma med $120°$: Rita in den, och se vilken av standardvinklarna det liknar. Väldigt likt $60°$, fast med negativt x men samma y.

Så här kan man alltid göra: rita vinkeln och se på vilka sätt den liknar någon av vinklarna som man kan värdena för!”

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. Exempel 12.5, övning 12.11.

Rättningsnorm: 3p för en förklaring som det verkar troligt att en ”kompis” skulle kunna följa, 1p för något som bara är begripligt för en person som redan vet hur man ska göra (men som verkar rätt), 2p för mellanting.

3. (a) Om man skriver $y = \log_9(x)$, exakt vad menar man? (Vi söker alltså definitionen.) (1p)

Lösning:

Man menar att $9^y = x$; y är det tal man ska upphöja 9 i om man vill få x som resultat.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser.

Rättningsnorm: Ord eller formel går lika bra.

(b) Lös ekvationen $\log_9(x^2) = 2$ (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.19(a).

Vi utnyttjar definitionen.

$$\begin{aligned} \log_9(x^2) &= 2 \\ x^2 &= 9^2 \\ \sqrt{x^2} &= \sqrt{81} \\ |x| &= 9 \\ x &= \pm 9 \end{aligned}$$

(Notera att $\sqrt{x^2} = |x|$; det är inte så enkelt att rot och kvadrat tar ut varandra om det är möjligt att talet man arbetar med är negativt.)

$\boxed{\textit{Svar: } x \in \{9, -9\}}$

Notera att man tappar den negativa lösningen om man utnyttjar regeln $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$. Denna regel har förbehållet att den bara gäller om alla inblandade uttryck är definierade, och för negativa värden på x är det omskrivna uttrycket inte definierat. Men originaluttrycket är det. Notera också att man inte kan kasta $x = -9$ med motiveringen ”det går inte att ta logaritmer av negativa tal”. Det som man ska ta logaritmen av är x^2, och $(-9)^2 = 81$ som är positivt.

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: 2p om man fått med båda svaren, 1p om man bara har det positiva.

4. (a) Skissa kurvan $y = 3 \cdot \sin(x/2) - 1$ i ett graderat koordinatsystem. (3p)

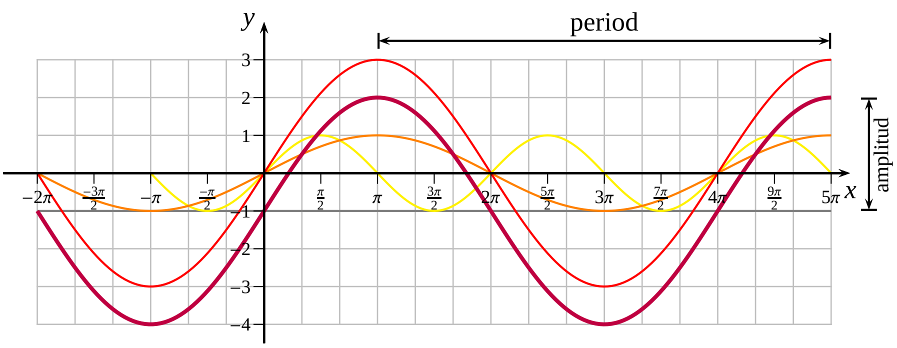
(b) Vad är amplituden, och hur syns det i bilden? (1p)

(c) Vad är perioden, och hur syns det i bilden? (1p)

Rita med omsorg, så att det går att se att detaljerna är rätt!

Lösning:

(a) $y = \sin(x)$ är en vågkurva som passerar origo med våghöjd 1 och våglängd $2 \cdot \pi$ och som slingrar sig runt x-axeln (gul). $y = \sin(x/2)$ går med halva tempot, så det hela dras ut över dubbelt så lång sträcka (orange). $y = 3 \cdot \sin(x/2)$ kommer att ha tre gånger så stora värden, så våghöjden tredubblas (röd). -1, slutligen, flyttar ner kurvan ett steg i vertikalled, så att centrumlinjen ligger ett steg under x-axeln (lila).



Notera att eftersom vi har information om vad som ska hända vid t.ex. $x = \pi$ är det mycket mer användbart att sätta ut var π sitter på x-axeln än vad det är att markera heltalspunkterna!

Man kan också göra upp en värdetabell, och skissa utgående från den. Vi tar approximerade värden; lättare att pricka ut.

x	$-2\cdot\pi$	$-\frac{3}{2}\cdot\pi$	$-\pi$	$-\frac{1}{2}\cdot\pi$	0	$\frac{1}{2}\cdot\pi$	π	$\frac{3}{2}\cdot\pi$	$2\cdot\pi$
$x/2$	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\cdot\pi$	$-\frac{1}{2}\cdot\pi$	$-\frac{1}{4}\cdot\pi$	0	$\frac{1}{4}\cdot\pi$	$\frac{1}{2}\cdot\pi$	$\frac{3}{4}\cdot\pi$	π
$\sin(x/2)$	0	−0,7	−1	−0,7	0	0,7	1	0,7	0
$3\cdot\sin(x/2)$	0	−2,1	−3	−2,1	0	2,1	3	2,1	0
$3\cdot\sin(x/2)-1$	−1	−3,1	−4	−3,1	−1	1,1	2	1,1	−1

Observera ordningen på operationerna. Varje operation görs på resultatet av operationen innan. (De flesta som försökt den här metoden hade missat på den saken.)

(b) Amplituden, våghöjden, är avståndet mellan centrumlinjen och vågtopparna, vilket är 3 vad-det-nu-är-för-enhet.

(c) Perioden, våglängden, är avståndet mellan vågtopparna (eller annan klart identifierbar del av kurvan), vilket är $4 \cdot \pi$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • period, amplitud; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Skissa kurvorna $y = f(x+c)$, $y = f(x)+c$, $y = f(c \cdot x)$ och $y = c \cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. Exempel 12.11, övning 12.33.

Rättningsnorm: (a) 3p om passage av y-axel, period, amplitud och läge är rätt. 2p om tre av dessa saker är rätt, 1p om två av dem är det. (bc) svar konsistent med bild och med något som kan tolkas som en motivering ger poäng.

5. Lös följande ekvationer:

(a) $|x + 1{,}5| + |x - 3| = 5$

(b) $|x + 1{,}5| + |x - 3| = 4{,}5$

(c) $|x + 1{,}5| + |x - 3| = 4$

Uppgiften bedöms som en helhet. (5p)

Lösning:

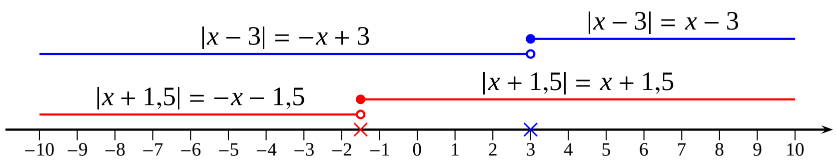
Rekommenderad uppgift 10.14.

Omskrivning av vänsterledet: Alla ekvationerna har samma vänsterled, så vi kan börja med att skriva om det utan beloppstecken.

$$|x + 1{,}5| = \begin{cases} x + 1{,}5 & \text{om } x + 1{,}5 \geq 0 \\ -(x + 1{,}5) & \text{om } x + 1{,}5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1{,}5 & \text{om } x \geq -1{,}5 \\ -x - 1{,}5 & \text{om } x < -1{,}5 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{om } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{om } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{om } x < 3 \end{cases}$$

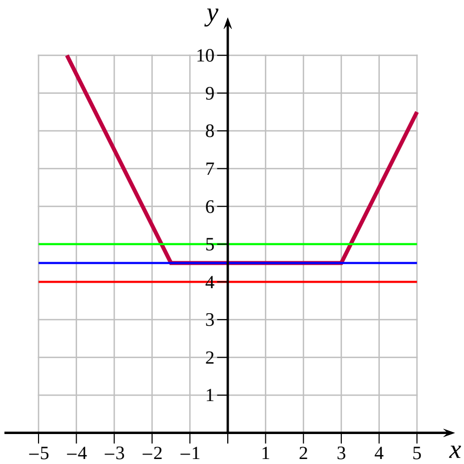
De två brytpunkterna $x = -1{,}5$ och $x = 3$ delar tallinjen i tre delar: innan, mellan och efter.



Sammantaget ger det

$$|x + 1{,}5| + |x - 3| = \begin{cases} (x + 1{,}5) + (x - 3) & \text{om } x \geq 3 \\ (x + 1{,}5) + (-x + 3) & \text{om } -1{,}5 \leq x < 3 \\ (-x - 1{,}5) + (-x + 3) & \text{om } x < -1{,}5 \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot x - 1{,}5 & \text{om } x \geq 3 \\ 4{,}5 & \text{om } -1{,}5 \leq x < 3 \\ -2 \cdot x + 1{,}5 & \text{om } x < -1{,}5 \end{cases}$$

Grafisk fortsättning: Om vi ritar kurvan $y = \text{VL}$ och de tre linjerna $y = \text{HL}$ så motsvaras ekvationernas lösningar av skärningarna mellan kurvan och linjerna.



Den första ekvationen har två lösningar (de två skärningspunkterna) ungefär vid $x = -1{,}75$ och $x = 3{,}25$. Den andra ekvationen löses av hela intervallet från och med $-1{,}5$ till och med 3 (där kurvan och linjen sammanfaller). Den sista ekvationen är sakna lösning (kurvan och linjen skär inte).

Analytisk fortsättning:

$\boxed{x < -1{,}5}$	$\boxed{-1{,}5 \le x < 3}$	$\boxed{x \ge 3}$
$-2 \cdot x + 1{,}5 = 5$ $-2 \cdot x = 3{,}5$ $x = -1{,}75$ $-1{,}75 < -1{,}5$ OK!	$4{,}5 = 5$ Saknar lösning	$2 \cdot x - 1{,}5 = 5$ $-2 \cdot x = 6{,}5$ $x = 3{,}25$ $3{,}25 \ge 3$ OK!
$\boxed{x < -1{,}5}$	$\boxed{-1{,}5 \le x < 3}$	$\boxed{x \ge 3}$
$\cancel{-2 \cdot x + 1{,}5 = 4{,}5}$ $\cancel{-2 \cdot x = 3}$ $\cancel{x = -1{,}5}$ $\cancel{-1{,}5 \not< -1{,}5}$	$4{,}5 = 4{,}5$ Stämmer för alla tal	$2 \cdot x - 1{,}5 = 4{,}5$ $-2 \cdot x = 6$ $x = 3$ $3 \ge 3$
$\boxed{x < -1{,}5}$	$\boxed{-1{,}5 \le x < 3}$	$\boxed{x \ge 3}$
$\cancel{-2 \cdot x + 1{,}5 = 4}$ $\cancel{-2 \cdot x = 2{,}5}$ $\cancel{x = -1{,}25}$ $\cancel{-1{,}25 \not< -1{,}5}$	$4{,}5 = 4$ Saknar lösning	$\cancel{2 \cdot x - 1{,}5 = 4}$ $\cancel{2 \cdot x = 5{,}5}$ $\cancel{x = 2{,}75}$ $\cancel{2{,}75 \not\ge 3}$

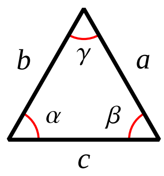
Ett tal är en lösning till en ekvation om man får en sann utsaga då man sätter in talet på den obekantas plats. Det att mittenfallet i mittenekvationen är sant oavsett värdet på x innebär att alla tal i det intervallet är lösningar på ekvationen.

$\boxed{\textit{Svar:}\ \text{(a) } x \in \{-1{,}75, 3{,}25\} \text{ (b) } x \in [-1{,}5, 3] \text{ (c) Lösning saknas}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Exempel 10.6. Rekommenderad uppgift.

Rättningsnorm: Svårt att förutse på vilka sätt det kan bli fel, men preliminärt: Helt rätt: 5p. Ignorerat beloppstecknen: 0p. Annars poäng efter hur stor procent av en fullständig lösning man fått ihop.

6. I bredvidstående triangel är vinkeln $\alpha = 135°$, vinkeln $\beta = 30°$ och längden på sidan a är 6 cm. Bestäm



(a) Storleken på vinkeln γ. (1p)

(b) Längden på sidan b. (2p)

(c) Längden på sidan c. (2p)

För full poäng fordras exakta svar, delpoäng för goda approximationer.

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

Lösning:

(a) Vi vet två vinklar och söker den tredje. Vinkelsumman i triangel ger

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 135° - 30° = \boxed{15°}$$

(b) Vi vet en sida och samtliga vinklar, och vi söker en sida. Sinussatsen passar till den uppsättningen information:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$

$$b = \frac{a\cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{6\cdot \sin(30°)}{\sin(135°)} = \frac{6\cdot 1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{6\cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot \sqrt{2}} = \frac{6\cdot \sqrt{2}}{2} = 3\cdot \sqrt{2} \approx 3\cdot 1{,}4 = 4{,}2\ \text{cm}$$

(Approximationen gör det möjligt att rimlighetskontrollera svaret med linjal.)

(c) Vi vet två sidor och samtliga vinklar, och vi söker den sista sidan. Detta kan göras antingen med sinussatsen eller med cosinussatsen.

Sinussatsen: Här behöver vi sinus för vinkeln γ, som inte är någon standardvinkel. Men den kan uttryckas med hjälp av ett par standardvinklar, och med hjälp av de bifogade formlerna kan vi ta fram värdet:

$$\sin(\gamma) = \sin(15°) = \sin(45° - 30°) = \sin(45°)\cdot \cos(30°) - \cos(45°)\cdot \sin(30°)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Sinussatsen ger då

$$c = \frac{a\cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{6\cdot \sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)/4}{\sqrt{2}/2} = 3\cdot(\sqrt{3}-1)\ \text{cm}$$

Cosinussatsen: Vi kan använda någon av varianterna

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha) \qquad \text{och} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos(\beta)$$

Den första av dem ger

$$6^2 = (3\cdot \sqrt{2})^2 + c^2 - 2\cdot(3\cdot \sqrt{2})\cdot c\cdot \cos(135°)$$
$$36 = 9\cdot 2 + c^2 - 6\cdot \cancel{\sqrt{2}}\cdot c\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$
$$0 = c^2 + 6\cdot c - 18$$
$$0 = c^2 + 3\cdot 3\cdot c + 3^3 - 3^2 - 18$$
$$0 = (c+3)^2 - 27$$
$$c + 3 = \pm\sqrt{27}$$
$$c = -3 \pm \sqrt{27}$$

Minusalternativet är negativt, och inte en möjlig längd. Plusalternativet kan snyggas upp till

$$c = \sqrt{27} - 3 = \sqrt{9 \cdot 3} - 3 = 3 \cdot \sqrt{3} - 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}$$

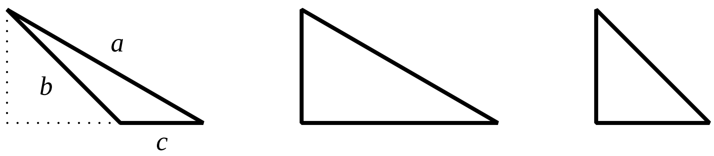
Om man istället utgår från den andra varianten av cosinussatsen kommer man att få två positiva lösningar. Den kortare stämmer på det här problemet, den längre motsvarar sidan c i en triangel med samma sida a, sida b och vinkel β men med $\alpha = 45°$.

Man kan också ta fram cos(15°) med samma metod som sin(15°) och utnyttja cosinussatsen på formen

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Det ger en mycket enklare andragradsekvation, men ett mer krångligt cosinusbestämmande.

Rätvinkliga trianglar: Om man glömt både sinus- och cosinussatsen men kommer ihåg hur man räknar med rätvinkliga trianglar så kan man utnyttja detta för att lösa både (b) och (c):



Den större rätvinkliga triangeln har en hypotenusa med längden 6 cm och en spetsvinkel på 30°. Den är alltså en halv liksidig triangel; motstående kateten är hälften så lång som hypotenusan och den närliggande kateten $\sqrt{3}/2$ av hypotenusan. Den mindre rätvinkliga triangeln har en vinkel som är 45°, så den är en halv kvadrat. Båda kateterna har då längden 3 cm, och hypotenusan $\sqrt{2}$ gånger denna längd. Detta ger

$$b = \sqrt{2} \cdot 3\,\text{cm} \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 - 3 = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}$$

Grafiskt: Man kan försöka rita upp problemet och sedan mäta. Det ger bara approximativa svar, men är bättre än inga svar alls!

$\boxed{\textit{Svar: } \text{(a) } \gamma = 15°, \text{ (b) } b = 3 \cdot \sqrt{2}\,\text{cm, (c) } c = 3 \cdot (\sqrt{3} - 1)\,\text{cm}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: (beroende på hur man angrep problemet) • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. Övning 12.23.

Rättningsnorm: (a) kan bara bli rätt eller fel. (b) och (c) får i viss mån bedömas gemensamt, med poäng efter hur stor del av en korrekt lösning man fått ihop.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2021.11.02 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

1. (a) $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. Är $\sin(2\cdot\alpha)$ större eller mindre än $\sin(\alpha)$, eller går det inte att avgöra?

(b) $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. Är $\cos(2\cdot\alpha)$ större eller mindre än $\cos(\alpha)$, eller går det inte att avgöra?

(c) $1 < a < b$. Är $\log_a(10)$ större eller mindre än $\log_b(10)$, eller går det inte att avgöra?

(d) $1 < x < y$. Är $\log_{10}(x)$ större eller mindre än $\log_{10}(y)$, eller går det inte att avgöra?

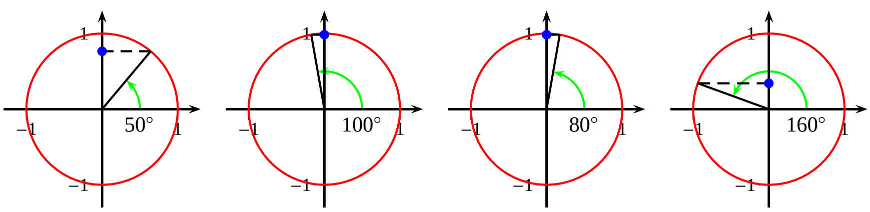
(e) $x < y$. Är $|x|$ större eller mindre än $|y|$, eller går det inte att avgöra?

Motiveringar behövs ej, men se till att det är tydligt vad svaret är och vilken delfråga det hör till. 1–2 rätt: 1p; 3–4 rätt: 2p; 5 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

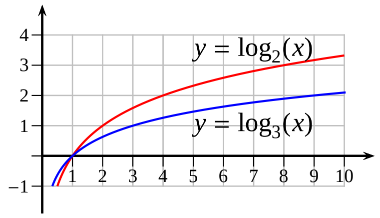
Vi motiverar ändå.

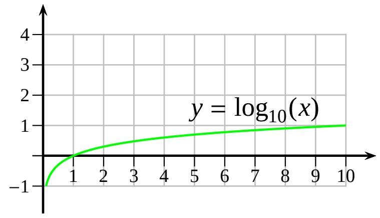
(a) $\boxed{\text{Går inte att avgöra}}$. Om man ritar en enhetscirkel och markerar en vinkel och dubbla vinkeln och läser av sinusvärdet (y-koordinaten för den punkt på cirkeln där strålen skär) så ser man t.ex. att $\sin(100^\circ) > \sin(50^\circ)$ medan $\sin(160^\circ) < \sin(80^\circ)$, så svaret beror på exakt hur stor vinkeln α var. (För 60° blir det likhet!)



(b) $\boxed{\cos(2\cdot\alpha) \text{ är } \textbf{mindre} \text{ än } \cos(\alpha)}$, för med det givna intervallet för vinkeln α kommer α att placera oss i första kvadranten, där cosinusvärdena är positiva, medan $2\cdot\alpha$ placerar oss i andra kvadranten, där cosinusvärdena är negativa.

(c) $\boxed{\log_a(10) \text{ är } \textbf{större} \text{ än } \log_b(10)}$. Logaritmen är den exponent man ska sätta på basen a respektive b för att potensens värde ska vara 10, och ju mindre bas man har, ju större måste exponenten vara (förutsatt att värdet är större än 1, annars börjar man behöva negativa exponenter och det hela blir mer komplicerat).





(d) $\boxed{\log_{10}(x) \text{ är } \textbf{mindre} \text{ än } \log_{10}(y)}$ 10-logaritmen är den exponent man ska sätta på basen 10 för att potensens värde ska vara x respektive y, och ju mindre resultat man vill ha, ju mindre exponent ska man ta.

(e) $\boxed{\text{Går inte att avgöra}}$. Om båda talen är positiva har det högsta störst belopp, om båda talen är negativa har det lägsta störst belopp, och har talen olika tecken kan vad som helst hända (inklusive likhet).

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp • Sinus, cosinus, tangens; Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion. Matchar ingen rekommenderad uppgift exakt, men vet man hur graferna ser ut kan man direkt läsa ut svaren på frågorna.

Rättningsnorm: Framgår av frågan. Svar som man inte kan förstå vilket av alternativen de antas innebära eller vilken fråga de hör till räknas som fel.

2. Din kompis arbetar med en funktion f, som definieras som $f(x) = |x+2| + |x-3|$, och har problem med att det inte blir som i facit:

Jag använder beloppsdefinitionen så här:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq 0 \\ -(x+2) & x < 0 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 & x \geq 0 \\ -(x-3) & x < 0 \end{cases}$$

och det sätter jag ihop till

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)+(x-3) & x \geq 0 \\ -(x+2)-(x-3) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2\cdot x - 1 & x \geq 0 \\ -2\cdot x + 1 & x < 0 \end{cases}$$

men så står det inte i facit! Är det tryckfel, eller?

Förklara för kompisen var hen gör fel, och hur man ska göra istället. Det är viktigt att kompisen förstår var ”feltänket” låg. (3p)

Lösning:

Definitionen av absolutbelopp ser ut så här:

$$|t| = \begin{cases} t & \text{om } t \geq 0 \\ -t & \text{om } t < 0 \end{cases}$$

Det handlar om ifall **det som står innanför beloppstecknet** är positivt eller negativt, för det är **det som står innanför beloppstecknet** som man byter tecken på om det är negativt. Du har i båda fallen satt att man ska byta tecken på uttrycket om x är negativ. Men uttrycket kan bli negativt utan att x är det; $x-3$ är negativ om $x = 1$. Och x kan vara negativ utan att uttrycket blir det; $x + 2$ är positiv för $x = -1$. I båda de fallen kommer det du gör ge ett negativt resultat, och poängen med belopp är att man inte får något negativt!

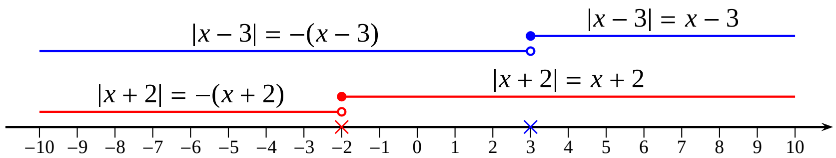
Så det vi ska göra är att stoppa in **det som står innanför beloppstecknet** på t:s plats i formeln – på *alla* platserna. Så vi får

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x+2 \geq 0 \\ -(x+2) & x+2 < 0 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 & x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & x-3 < 0 \end{cases}$$

och så snyggar vi upp olikheterna

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & x \geq -2 \\ -(x+2) & x < -2 \end{cases} \qquad |x-3| = \begin{cases} x-3 & x \geq 3 \\ -(x-3) & x < 3 \end{cases}$$

Så vi har *två* punkter där det händer saker, ingen av dem noll. Om man prickar in dem så delar de x-axeln i tre delar: innan -2, mellan -2 och 3, och så efter 3. Vi kan rita på en tallinje:



Är vi till vänster om -2 så är vi också till vänster om 3, och ska använda vänsterformlerna. Är vi mellan punkterna så är vi till höger om -2 och till vänster om 3, och ska kombinera de formlerna. Och är vi till höger om 3 så är vi också till höger om -2, och ska kombinera högerformlerna. Så vi får

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)+(x-3) & x \geq 3 \\ (x+2)-(x-3) & -2 \leq x < 3 \\ -(x+2)-(x-3) & x < -2 \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot x - 1 & x \geq 3 \\ 5 & -2 \leq x < 3 \\ -2 \cdot x + 1 & x < -2 \end{cases}$$

Kommentar: Detta är en mycket vanlig missuppfattning om hur absolutbeloppets definition ska användas (och samma missuppfattning brukar finnas vad gäller andra styckvis definierade funktioner).

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Absolutbelopp; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Övning 10.14–10.16.

Rättningsnorm: 1p för förklaring av vad som var fel, 1p för förklaring till hur man ska göra, 1p om det verkar sannolikt att ”kompisen” skulle förstå förklaringarna.

3. Skriv som en enda logaritm på enklast möjliga form:

$$\log_7(49 - x^2) - 2 \cdot \log_7(7 + x)$$

Utgå från att alla uttryck är definierade. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.17(b) med utbytt variabelnamn.

Det där om ”definierade” innebär att man inte behöver gå in på för vilka värden på variabeln x det blir division med noll eller logaritm av negativt tal. Logaritmregler och algebraiska regler:

$$\log_7(49 - x^2) - 2 \cdot \log_7(7 + x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \log_7(49 - x^2) - \log_7((7+x)^2) && n\cdot\log(a) = \log(a^n)\\
&= \log_7\left(\frac{49 - x^2}{(7+x)^2}\right) && \log(a) - \log(b) = \log(a/b)\\
&= \log_7\left(\frac{\cancel{(7+x)}\cdot(7-x)}{\cancel{(7+x)}\cdot(7+x)}\right) && \text{konjugatregeln, definition av ”i kvadrat”}\\
&= \boxed{\log_7\left(\frac{7-x}{7+x}\right)} && \text{”stryk” gemensam } \underline{\text{faktor}}
\end{aligned}
$$

Notation: Det ska vara likhetstecken mellan de olika uttrycken; de har samma värde (är lika) även om de är skrivna på olika sätt.

Kommentar: Många tentander förenklade logaritmuttrycket korrekt, men missade sedan att utveckling av kvadrat görs med kvadreringsregler och/eller på bråkförenklingen. Kom ihåg att man kan förkorta bort gemensamma *faktorer* men inte gemensamma *termer*.

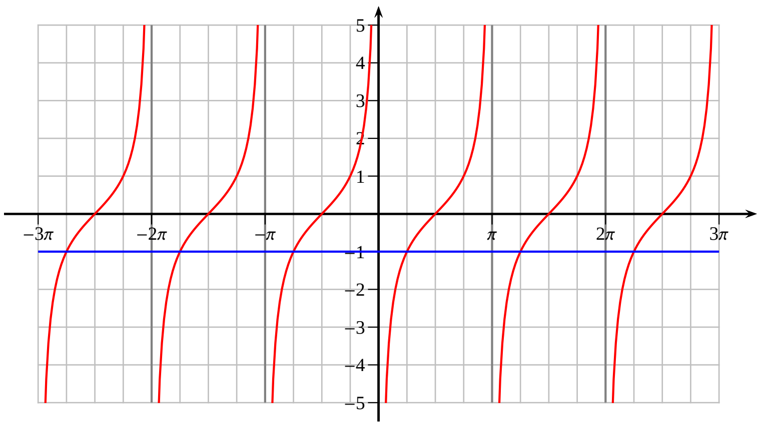
Referenser: Du ska kunna göra följande: • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. • Förenkla rationella uttryck [. . .]. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 3p. Fått ihop det till en enda logaritm, men ej förenklat det rationella uttrycket: 2p. Åtminstone redovisat kunskap om någon logaritmregel: 1p.

4. (a) Rita kurvan $y = \tan(x + \frac{\pi}{2})$. x-axeln måste gå åtminstone från $x = -3\cdot\pi$ till $x = 3\cdot\pi$, och axlarna måste vara graderade. (2p)

Lösning:

Den vanliga tangenskurvan består av en serie identiska bitar, med en central bit som startar nere vid $-\infty$ invid $-\pi/2$, passerar origo på snedden och fortsätter uppåt ∞ då man närmar sig $\pi/2$. Tillägger ”$+\pi/2$” gör att allt händer $\pi/2$ tidigare än förut, så att bilden flyttar motsvarande sträcka åt vänster. (Eller om man vill se det ur en annan synvinkel: koordinatsystemet flyttar åt höger.)



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$ [. . .] givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. Övning 12.32–12.33.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Annars: verkar veta hur en tangenskurva ser ut: 1p. Ingen gradering: 0p.

(b) Lös ekvationen $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -1$. (3p)

Lösning:

Tangensekvationer har bara en grundlösning (till skillnad från sinus och cosinus, som vanligtvis har två) och period π (till skilland från sinus och cosinus, som har perioden $2\cdot\pi$). Om man är osäker på tangensvärden men kan sinus och cosinus för standardvinklarna kan man göra upp en tabell, och där se vilken vinkel som har det givna tangensvärdet.

$$\begin{aligned}
\tan(x + \frac{\pi}{2}) &= -1 \\
\tan(t) &= -1 && \boxed{\text{Sätt } x + \pi/2 = t} \\
t &= -\frac{\pi}{4} + n{\cdot}\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\
x + \frac{\pi}{2} &= -\frac{\pi}{4} + n{\cdot}\pi && \boxed{\text{Återsubstituera}} \\
x &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + n{\cdot}\pi && \text{"Flytta över"} \\
x &= -\frac{3{\cdot}\pi}{4} + n{\cdot}\pi && \text{Förenkla}
\end{aligned}$$

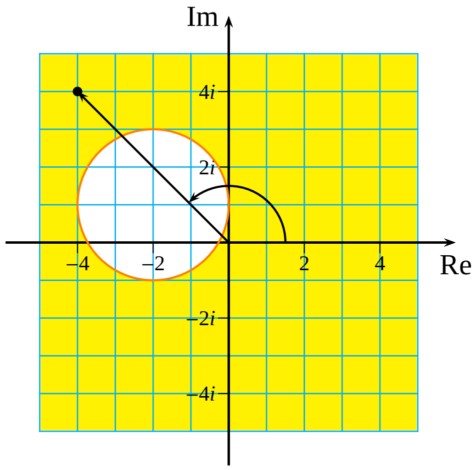
$\boxed{\textit{Svar: } x = -\frac{3\cdot\pi}{4} + n{\cdot}\pi, \text{ där } n \in \mathbb{Z}}$

(Det är lika rätt att utgå från grundlösningen $3{\cdot}\pi/4$. Det ger lösningsmängden på formen $x = \pi/4 + n{\cdot}\pi$. Detta motsvarar samma mängd tal, bara numrerad på ett annat sätt.)

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.51–12.52.

Rättningsnorm: Ingen period – ingen poäng. Annars: rätt grundvinkel: 1p. Rätt period: 1p. Rätt hantering av " $+ \pi/2$": 1p.

5. **(a)** Skriv en olikhet där lösningsmängden motsvarar det färgade området i bilden. (2p)



Lösning:

Rekommenderad uppgift 13.19(b).

Det färgade området är cirkeln och allt utanför den. Cirkeln har radien 2 och medelpunkt i $-2+i$. Så alla punkter z på cirkeln uppfyller att avståndet mellan z och $-2+i$ är exakt 2. Punkter utanför cirkeln ligger på större avstånd än så. Avståndet mellan två punkter, det är det som absolutbeloppet mäter.

$\boxed{\textit{Svar: } |z - (-2+i)| \geq 2}$

Alternativt kan man sätta $z = x + y\,i$. Vi har en cirkel med medelpunkt där $x = -2$ och $y = 1$, och dess radie är 2. Cirkelns ekvation ger då att punkterna på cirkeln uppfyller $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$. Och för punkterna utanför blir värdet större: $(x+2)^2 + (y-1)^2 \geq 2^2$.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument; Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Åtminstone visat förståelse för frågan: 1p.

(b) Förenkla $\dfrac{5+7\,i}{1+3\,i}$ maximalt. (2p)

Lösning:

Standardknep: förläng med komplexa konjugatet:

$$\frac{5+7\,i}{1+3\,i} = \frac{(5+7\,i){\cdot}(1-3\,i)}{(1+3\,i){\cdot}(1-3\,i)} = \frac{3{\cdot}1 - 5{\cdot}3\,i + 7\,i{\cdot}1 - 7\,i{\cdot}3\,i}{1^2 - (3\,i)^2}$$

$$= \frac{3 - 15\,i + 7\,i - 21\cdot(-1)}{1 - 9\cdot(-1)} = \frac{26 - 8\,i}{10} = \frac{\cancel{2}\cdot(13 - 4\,i)}{\cancel{2}\cdot 5} = \boxed{\frac{13 - 4\,i}{5}}$$

Referenser: DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. Övning 13.11.

Rättningsnorm: Helt rätt: 2p (även utan förkortningen). Rätt metod men räknefel: 1p.

(c) Bestäm argumentet för talet $-4 + 4\,i$. (1p)

Lösning:

Inritat i det komplexa talplanet för uppgift (a). Pilen pekar snett ut i andra kvadranten, och vinkeln är helt klart 135°. (−225° är lika rätt, men mindre enkelt, som svar.)

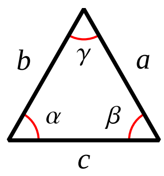
Svar: $\arg(-4 + 4\,i) = 3\cdot\pi/4$

Anm. Många skrivande hade tagit fram lutningen på strålen, $4/(-4) = -1$, och sedan skrivit "$\arg(-4 + 4\,i) = \tan^{-1}(-1)$". Detta är inte korrekt, för tangens-invers står för den vinkel närmast noll som har det angivna tangensvärdet. Så $\tan^{-1}(-1) = -\pi/4$ och inget annat.

Referenser: DU SKA KUNNA FÖRKLARA VAD FÖLJANDE BETYDER: • Belopp, argument; DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.15.

Rättningsnorm: Svar med någon typ av motivering, t.ex. en bild: 1p.

6. I bredvidstående triangel gäller att vinkeln $\alpha = 45°$, motstående sida $a = \sqrt{10}$ cm och närliggande sida $b = 4$ cm



(a) Det finnns två möjliga värden på den tredje sidan c. Bestäm dem. (3p)

(b) Bestäm $\sin(\beta)$. (Själva vinkeln behövs ej, utan det räcker med sinusvärdet.) (2p)

OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

Lösning:

En delmängd av rekommenderad uppgift 12.22.

(a) En sida då vi känner två sidor och en vinkel – fall för cosinussatsen:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos(\alpha)\\
(\sqrt{10})^2 &= 4^2 + c^2 - 2\cdot 4\cdot c\cdot \cos(45°)\\
10 &= 16 + c^2 - 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c\\
c^2 - 4\cdot\sqrt{2}\cdot c + 6 &= 0\\
c^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot c + (2\cdot\sqrt{2})^2 - (2\cdot\sqrt{2})^2 + 6 &= 0\\
(c - 2\cdot\sqrt{2})^2 - 4\cdot 2 + 6 &= 0\\
(c - 2\cdot\sqrt{2})^2 &= 2\\
c - 2\cdot\sqrt{2} &= \pm\sqrt{2}\\
c &= \begin{cases}\sqrt{2}\\ 3\cdot\sqrt{2}\end{cases}
\end{aligned}$$

Svar: Längden på sidan c är $\sqrt{2}$ cm eller $3\cdot\sqrt{2}$ cm.

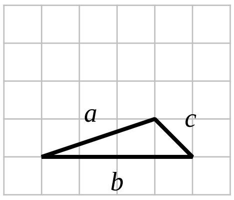
Rättningsnorm: Tecknat cosinussatsen: 1p. Fått fram andragradaren: 1p. Löst andragradaren: 1p

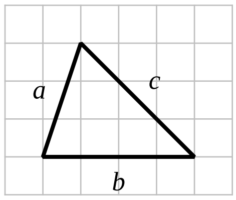
(b) Vi söker sinus för en vinkel, och känner alla sidor och en vinkel. Räcker och blir över för sinussatsen:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\alpha)}{a} &= \frac{\sin(\beta)}{b}\\ \sin(\beta) &= \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}\\ &= \frac{4\cdot\sin(45^\circ)}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot 5}} = \frac{2\cdot 2}{2\cdot\sqrt{5}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Tecknat sinussatsen: 1p. Kommit till svar: 1p

De två trianglarna ser för övrigt ut så här:





Det är mest funktionellt att lägga sidan b, som har heltalslängd, utmed rutnätet. $\sqrt{2}$ är diagonallängden i enhetskvadraten. $\sqrt{10} = \sqrt{1+9} = \sqrt{1^2+3^2}$, så det ser helt rätt ut att sidan a går en ruta på ena ledden och tre på andra.

Vinkel β är trubbig i den vänstra triangeln och spetsig i den högra, men de två vinklarna har samma sinusvärde.

Referenser: (gäller båda uppgifterna) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • [. . .] tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. Rekommenderad uppgift!

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MÄLARDALENS HÖGSKOLA
ESKILSTUNA VÄSTERÅS

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag* 2022.01.11 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

1. Rita ett komplext talplan. Låt en längdenhet motsvaras av 1 cm (dvs. 2 rutor). Rita in talet $z = -4 + 3\,i$ i talplanet. Visa sedan i bilden vad som menas med:

(a) $\mathrm{Re}(z)$

(b) $\mathrm{Im}(z)$

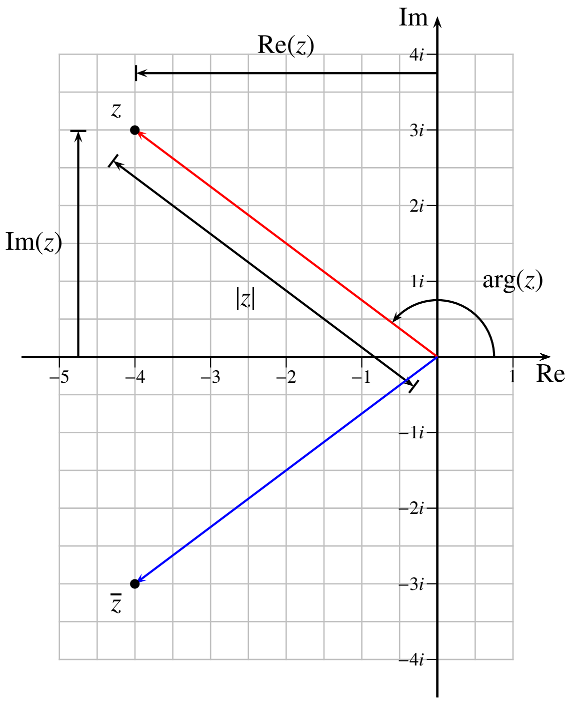
(c) $\arg(z)$

(d) $|z|$

(e) $\bar{z}$

1–2 rätt: 1p, 3–4 rätt: 2p, 5 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

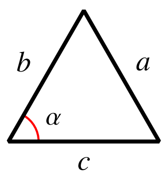


Det är meningen att pilarna för real- och imaginärdel ska tolkas som att riktningen (dvs. tecknet) ska ingå, men att det i övrigt är själva måttet som är relevant (så "i" ingår inte i imaginärdelen). Men viss otydlighet accepteras.

Referenser: Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Realdel, imaginärdel • Komplext konjugat • Belopp, argument; Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. Övning 13.2–3, 13.15.

Rättningsnorm: Se frågan.

2. I bredvidstående triangel gäller att längden på sidan a är $\sqrt{19}$ cm, längden på sidan b är 2 cm och vinkeln α är 120°. Bestäm längden på sidan c. (3p)



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.23(e).

Vi vet två sidor och en vinkel, och söker den tredje sidan. Cosinussatsen beskriver sambandet mellan en triangels tre sidor och en av dess vinklar, och matchar tillgänglig information:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos(\alpha)$$
$$(\sqrt{19})^2 = 2^2 + c^2 - 2{\cdot}2{\cdot}c{\cdot}\cos(120^\circ)$$
$$19 = 4 + c^2 - 4{\cdot}c{\cdot}(-1/2)$$
$$c^2 + 2{\cdot}c - 15 = 0$$
$$c^2 + 2{\cdot}1{\cdot}c + 1^2 - 1^2 - 15 = 0$$
$$(c+1)^2 = 16$$

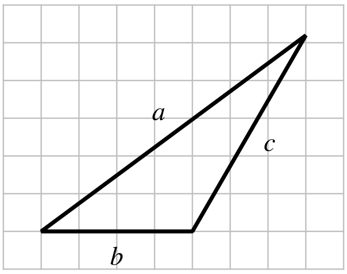
$$c + 1 = \pm\sqrt{16}$$

$$c = -1 \pm 4$$

Svarförslaget $c = -5$ cm kan förkastas (det är en lösning till ekvationen men inte till problemet), medan svarsförslaget $c = 3$ cm är rimligt.

Svar: Längden på sidan c är 3 cm.

Grafisk kontroll: $\sqrt{19}$ måste ligga någonstans mellan 4 och 5, och närmare 4 än 5. Om man med linjal och gradskiva ritar in de sidor som är lätta att rita, och så mäter den tredje sidan finner man att det hela verkar gå ihop.



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • [. . .] tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kommit till svar: 3p. Gjort något konstruktivt och icketrivialt (som att teckna cosinussatsen): 1p. Mellanting: 2p.

3. Lös ekvationen $|2 \cdot x - 3| = -|4 \cdot x + 5|$ (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 10.15(f).

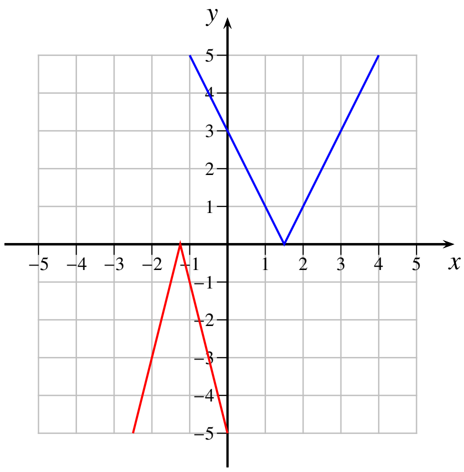
Snabblösning: Vänsterledet är ett beloppsuttryck, så det är noll eller större. Högerledet är ett beloppsuttryck med tillsatt minustecken, så det är noll eller mindre. Enda chansen för att uttrycken ska vara lika är att de båda är noll, och vänsterledet är noll för $x = 3/2$ medan högerledet är det för $x = -5/4$. De blir alltså inte noll samtidigt, och därför saknar ekvationen lösning!

Grafiskt:

$$\mathrm{VL} = \begin{cases} 2 \cdot x - 3 & \text{om } 2 \cdot x - 3 \geq 0 \\ -(2 \cdot x - 3) & \text{om } 2 \cdot x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 \cdot x - 3 & \text{om } x \geq 3/2 \\ -(2 \cdot x - 3) & \text{om } x < 3/2 \end{cases}$$

$$\mathrm{HL} = \begin{cases} -(4 \cdot x + 5) & \text{om } 4 \cdot x + 5 \geq 0 \\ -(-(4 \cdot x + 5)) & \text{om } 4 \cdot x + 5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -4 \cdot x - 5 & \text{om } x \geq -5/4 \\ 4 \cdot x + 5 & \text{om } x \geq -5/4 \end{cases}$$

Rita kurvorna i ett koordinatsystem och se efter var de skär:



Kurvorna skär inte i bild, och kommer uppenbart inte att skära utanför bild heller. Ekvationen saknar lösning!

Analytiskt: Samma analys som i den grafiska lösningen ger att vi har två brytpunkter, $x = -{}^{5}/_{4}$ och $x = {}^{3}/_{2}$. Det ger tre fall att räkna på: innan första punkten, mellan de två punkterna och efter andra punkten:

$\boxed{x < -{}^{5}/_{4}}$	$\boxed{-{}^{5}/_{4} < x < {}^{3}/_{2}}$	$\boxed{x \geq -{}^{3}/_{2}}$
$-2{\cdot}x + 3 = 4{\cdot}x + 5$	$-2{\cdot}x + 3 = -4{\cdot}x - 5$	$2{\cdot}x - 3 = -4{\cdot}x - 5$
$-2 = 6{\cdot}x$	$2{\cdot}x = -8$	$6{\cdot}x = -2$
$x = -{}^{1}/_{3}$	$x = -4$	$x = -{}^{1}/_{3}$
$-{}^{1}/_{3} \notin (-\infty, -{}^{5}/_{4})$	$-4 \notin [-{}^{5}/_{4}, {}^{3}/_{2})$	$-{}^{1}/_{3} \notin [{}^{3}/_{2}, \infty)$
Kasta!	Kasta!	Kasta!

Alla lösningsförslagen ska kastas; inget blir kvar!

Svar: Lösning saknas.

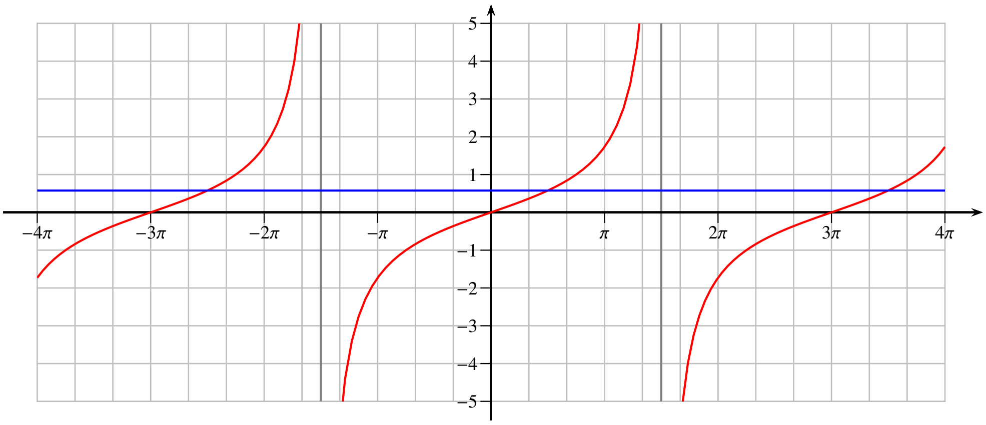
Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Rätt svar med fungerande metod: 3p. Gjort något konstruktivt och icketrivialt: 1p. Mellanting: 2p.

4. **(a)** Rita kurvan $y = \tan(x/3)$. x-axeln måste gå åtminstone från $x = -3{\cdot}\pi$ till $x = 3{\cdot}\pi$, och axlarna måste vara graderade. (2p)

Lösning:

Den vanliga tangenskurvan består av en serie identiska bitar, med en central bit som startar vid $-\infty$ invid $-{}^{\pi}/_{2}$, passerar origo på snedden och fortsätter uppåt ∞ då man närmar sig ${}^{\pi}/_{2}$. ”Delat med 3” gör att allt händer i tredjedelen av normalt tempo, så att förloppet dras ut med en faktor 3. Periodlängden ökar därför från π till $3{\cdot}\pi$.



Rättningsnorm: Helt rätt: 2p. Annars: verkar veta hur en tangenskurva ser ut: 1p. Ingen gradering: 0p.

(b) Lös ekvationen $\tan(x/3) = 1/\sqrt{3}$. (3p)

Lösning:

Tangensekvationer har bara en grundlösning (till skillnad från sinus och cosinus, som vanligtvis har två) och period π (till skilland från sinus och cosinus, som har perioden $2{\cdot}\pi$). Om man är osäker på tangensvärden men kan sinus och cosinus för standardvinklarna kan man göra upp en tabell, och där se vilken standardvinkel som har det givna tangensvärdet.

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(t)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(t)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(t)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	odef

(Tabellen kan också vara användbar vid uppritningen av kurvan på fråga (a).) Ekvationen:

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{3}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\frac{x}{3} &= \frac{\pi}{6} + n{\cdot}\pi \quad n \in \mathbb{Z} \\
x &= 3{\cdot}\left(\frac{\pi}{6} + n{\cdot}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{2} + n{\cdot}3{\cdot}\pi
\end{aligned}$$

Svaret är rimligt jämfört med bilden. Tangenskurvan och en linje på en höjd som är ungefär $1/\sqrt{3} \approx 0{,}6$ skär ungefär mitt emellan 0 och π, och det är $3{\cdot}\pi$ mellan skärningspunkterna.

$\boxed{\textit{Svar: } x = \pi/2 + n{\cdot}3{\cdot}\pi, \text{ där } n \in \mathbb{Z}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Lösa en trigonometrisk ekvation. Övning 12.51–12.52. (Frånsett problematiken med ”/3” är detta ekvationen i övning 12.51(f).)

Rättningsnorm: Ingen period – ingen poäng. Annars: rätt grundvinkel: 1p. Rätt period: 1p. Rätt hantering av ”/3”: 1p.

5. (a) Om man skriver $y = \log_2(x)$, exakt vad menar man? (Vi söker alltså definitionen.) (1p)

Lösning:

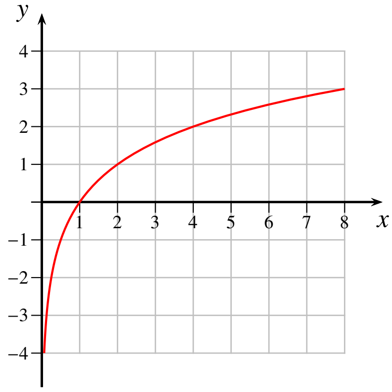
$\boxed{y = \log_2(x) \Leftrightarrow 2^y = x}$ eller i ord: två-logaritmen för x är det tal man ska upphöja två i om man vill få x som resultat.

Rättningsnorm: Kan nog bara bli rätt eller fel.

(b) Skissa kurvan $y = \log_2(x)$. Skissen ska vara så pass korrekt att en annan person skulle kunna avgöra vilken sorts logaritm det är meningen att bilden ska föreställa. (1p)

Lösning:

Definitionsmängden är alla $x > 0$. Ett lagom stort koordinatsystem kan ha en x-axel från 0 till 8, och y-axel från -4 till 4. (Värdemängden är ju hela $\mathbb{R}$, så det behövs både positiva och negativa y.)



y	x
-3	0,125
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8

Bredvid grafen finns en värdetabell, som är gjort utgående från sambandet i (a)-uppgiften; det är mycket lättare att huvudräkna 2^y än $\log_2(x)$.

Rättningsnorm: Lämpligt böjd kurva som verkar börja i nederändan av y-axeln och passerar $(1, 0)$ och $(2, 1)$ ger poäng.

(c) Din kompis kommer till dig, för att fråga om det kan vara läge att begära omprövning av en tenta.

Titta, jag skrev så här:

$$\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = \frac{\log_2(x+1)}{\log_2(x-1)} \qquad \text{☠}$$

I facit står det

$$\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = \log_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

men det är väl samma sak? Varför fick jag 0 poäng för det jag skrev?

Förklara för din kompis

- Vad det är för skillnad på uttrycken.
- Hur man kan vara helt säker på att kompisens omskrivning är **fel**.

Observera att kompisen ska förstå förklaringen. (Du behöver inte förklara varför den rätta varianten är rätt.) (3p)

Lösning:

”I din version beräknar man *först* logaritmerna för de enskilda uttrycken, och dividerar *sedan* de tal man då fick. I facits version dividerar man *först* uttrycken med varandra, och beräknar *sedan* logaritmen för det tal man då fick. Det är alltså helt olika ordning på operationerna. Man gör verkligen inte samma sak.

Sedan: du verkar tillämpa ”regeln”

$$\log_a(x) - \log_a(y) \overset{\text{☠}}{=} \frac{\log_a(x)}{\log_a(y)}$$

Men $\log_a(x)$ kan bli vilket tal som helst (beroende på vad a och x är) och samma sak med $\log_a(y)$. Så det du säger är

$$\text{tal}_1 - \text{tal}_2 = \frac{\text{tal}_1}{\text{tal}_2}$$

för alla tänkbara tal_1 och tal_2. Eller med andra ord: du säger att subtraktion och division är samma räknesätt. Och det vet vi att de inte är!

Ska vi vara mer konkreta kan vi testa sifferräkning. Vi kan låta x vara 3, det är lätt att räkna med. Din formel ger:

$$\mathrm{VL} = \log_2(3+1) - \log_2(3-1) = \log_2(4) - \log_2(2) = \log_2(2^2) - \log_2(2^1) = 2 - 1 = 1$$

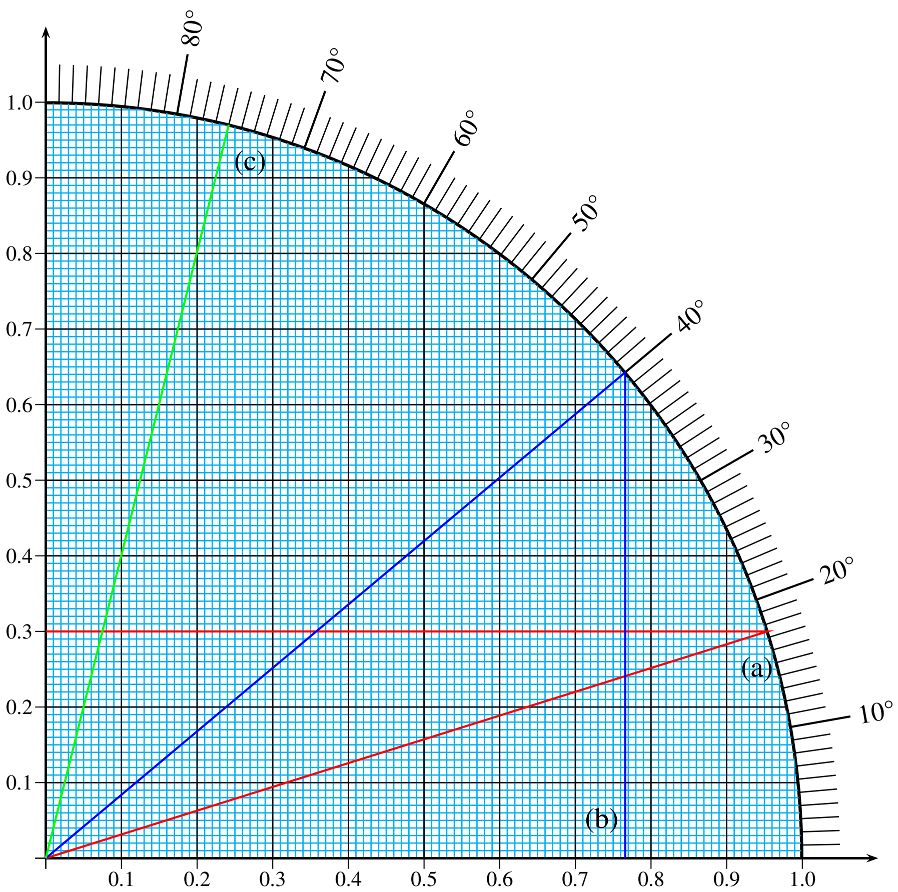
$$\mathrm{HL} = \frac{\log_2(3+1)}{\log_2(3-1)} = \frac{\log_2(4)}{\log_2(2)} = \frac{\log_2(2^2)}{\log_2(2^1)} = \frac{2}{1} = 2$$

Så om din formel är korrekt måste 1 och 2 vara samma tal. Det är de inte, så din formel kan *omöjligt* vara korrekt!”

Kommentar: I likhet med alla ”din kompis”-uppgifter baserad på ett mycket vanligt fel. Gör man som kompisen har gjort så har man *inte* förstått räknereglerna för logaritmer. Och de flesta fel av den här sorten kan man fånga genom att testa med några lättväknade värden. Blir det olika resultat för vänster och höger led så kan formeln man vill använda omöjligt vara rätt.

Referenser: (täcker även de föregående deluppgifterna) Du ska kunna göra följande: • Tillämpa prioritetsordningen för vanliga matematiska operationer (som +, −, · och /) korrekt, och korrekt använda parenteser. • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser. • Redogöra för och motivera logaritmreglerna. • Skissa grafen för en logaritmfunktion. Övning 11.8, 11.11.

Rättningsnorm: 1p för förklaring som tyder på att den skrivande förstått skillnaden, 1p för förklaring som tyder på att den skrivande inser varför den felaktiga formeln omöjligt kan vara rätt, 1p om det verkar troligt att en medstudent med denna kunskapslucka skulle förstå förklaringen.



6. (a) $\sin(\alpha) = 0{,}3$, $0° < \alpha < 90°$. Bestäm med bildens hjälp α så noga som du kan. (1p)

Lösning:

Läs av vid vilken vinkel y-koordinaten är 0,3.

$\boxed{\textit{Svar: } \alpha \approx 17{,}5°}$

Rättningsnorm: Svar mellan 17° och 18° accepteras.

(b) Bestäm med bildens hjälp $\cos(400°)$ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.8(h). $400° = 360° + 40°$, så $\cos(400°) = \cos(40°)$. Läs av x-koordinaten vid 40°-markeringen.

$\boxed{\textit{Svar: } \cos(400°) \approx 0{,}77}$

Rättningsnorm: Svar inom rimlig fummelmån: 1p. Begriplig förklaring: 1p.

(c) $\tan(\gamma) = -4$, $-90° < \gamma < 0°$. Bestäm med bildens hjälp γ så noga du kan, och förklara hur du gör. (2p)

Lösning:

Intervallet säger att vi ska ner i fjärde kvadranten, som inte finns med i bild. Men symmetri ger att vi kan ta reda på motsvarande data från första kvadranten och utnyttja det. En vinkel med tangensvärdet 4 har en stråle med riktningskoefficient 4, dvs. en stråle som går fyra rutor uppåt på en ruta framåt. Avläsning ger att vinkeln 76° stämmer där. För att istället hamna i fjärde kvadranten ska vi gå motsvarande negativa vinkel,

$\boxed{\textit{Svar: } \gamma \approx -76°}$

Referenser: (gäller alla deluppgifterna) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. Övning 12.8–9; delvis rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Se (b). Om det är fel men verkar som att man kan överföra ett tangensvärde till en vinkel ges 1p.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

Mälardalens universitet

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

MAA121 Matematik grundkurs

TEN2 – *Lösningsförslag*

2022.08.19 14.30–17.30

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får "pq-formeln" inte användas.

Formelsamling:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

Observera att rättningsnormen är preliminär, och kan komma att ändras!

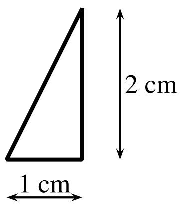
1. För vinkeln α gäller att $\tan(\alpha) = 2$ och att $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Bestäm

(a) $\sin(\alpha)$ **(b)** $\cos(\alpha)$ Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.34(c) med utbytt variabelnamn.

Rätvinkliga trianglar: En vinkel i det här intervallet är en möjlig spetsvinkel i en rätvinklig triangel. I en sådan är tangensvärdet motstående katet dividerat med närliggande katet, så triangeln kan se ut t.ex



Pythagoras sats ger att hypotenusans längd är $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Detta ger

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Trigonometriska ettan Vi vet $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ och att $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= 2\\
\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= 2\\
\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &= 2^2\\
\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)} &= 4\\
\sin^2(\alpha) &= 4\cdot(1-\sin^2(\alpha))
\end{aligned}$$

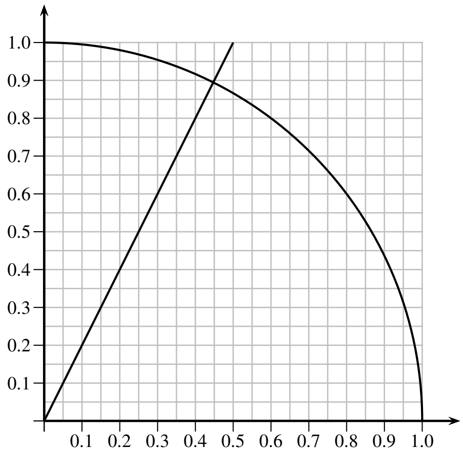
$$\sin^2(\alpha) = 4 - 4\cdot \sin^2(\alpha)$$
$$5\cdot \sin^2(\alpha) = 4$$
$$\sin^2(\alpha) = \frac{4}{5}$$
$$\sin(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Eftersom vi befinner oss i första kvadranten är plusalternativet rätt.

Detta ger

$$\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} = \frac{2/\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Grafisk approximation: (Om man har passare med sig.) Tangensvärdet för vinkeln är "k-värdet" för strålen. Rita en enhetscirkel och en stråle som går 2 rutor uppåt för varje ruta framåt.



x-koordinaten för skärningen mellan strålen och cirkeln är cosinusvärdet, y-koordinaten är sinusvärdet. Ser ut som att $\cos(\alpha) \approx 0{,}45$, $\sin(\alpha) \approx 0{,}9$. (Approximation med dator ger värdena 0,447 respektive 0,894, så denna avläsning var ganska bra!)

Svar: (a) $\sin(\alpha) = 2/\sqrt{5} \approx 0{,}9$ (b) $\cos(\alpha) = 1/\sqrt{5} \approx 0{,}45$

Referenser: (lite beroende på hur man gjorde) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Sinus, cosinus, tangens • Enhetscirkeln • Katet, hypotenusa; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa Pythagoras sats. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Tillämpa trigonometriska räkneregler. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kommit till svar:3p. Konstruktiv start: 1p. Mellanting: 2p.

2. Din kompis sitter och räknar extentor, och håller på med följande uppgift från junitentan:

Lös ekvationen $|x+2| + |x+3| + |x+4| = 5$

Kompisen har skrivit:

Fall 1: $(x+2) + (x+3) + (x+4) = 5$ Fall 2: $-(x+2) + (x+3) + (x+4) = 5$

Fall 3: $(x+2) + (x+3) - (x+4) = 5$ Fall 4: $-(x+2) + (x+3) - (x+4) = 5$

Fall 5: $(x+2) - (x+3) + (x+4) = 5$ Fall 6: $-(x+2) - (x+3) + (x+4) = 5$

$\boxed{\text{Fall 7:}}$ $(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$ $\boxed{\text{Fall 8:}}$ $-(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$

”Det här bli ju hur mycket som helst att göra!” klagar kompisen. ”Hur är det meningen att man ska hinna det här innan tiden är slut?”

Förklara för kompisen:

- På vilket sätt hen resonerar fel i falluppdelningen.
- Hur det är man ska göra. (Du behöver inte lösa själva ekvationen, det är det bara bra om kompisen gör själv.)

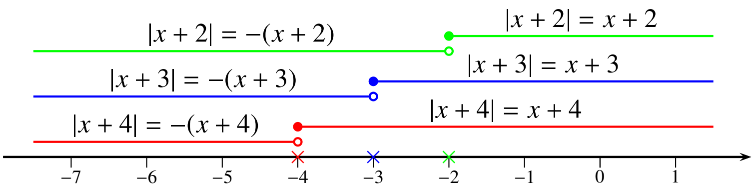
För full poäng måste förklaringen vara begriplig för en ”kompis” med denna missuppfattning. Delpoäng om det verkar som att du själv förstår. (3p)

Lösning:

Exempelvis:

Så där många fall blir det inte! Ditt fall 3, t.ex. Du har plusalternativet för det första beloppet. Det ska användas om man är till höger om $x=-2$. Och du har minusalternativet på det sista beloppet. Det ska användas om man är till vänster om $x=-4$. Det är inte möjligt att vara till höger om $x=-2$ samtidigt som man är till vänster om $x=-4$, det ser du om du tittar på en tallinje. Så det fallet kan inte inträffa, och då finns det ju ingen anledning att räkna på det.

Du ska inte bara skriva ”Fall 1” och så vidare, utan du ska skriva exakt vad fallen innebär. Då riskerar du inte att ta något som är omöjligt, och du kan också rimlighetskontrollera svaren. Skriv upp i vilka punkter de olika beloppen byter uppförande, pricka in på en tallinje, och se vilka fall som kan inträffa:



Du ser att de tre punkterna delar tallinjen i fyra delar. De motsvarar de fyra fallen:

$\boxed{-2 \le x}$ $(x+2)+(x+3)+(x+4)=5$

$\boxed{-3 \le x < -2}$ $-(x+2)+(x+3)+(x+4)=5$

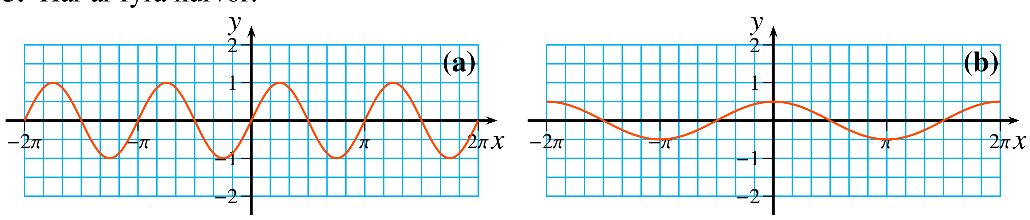
$\boxed{-4 \le x < -3}$ $-(x+2)-(x+3)+(x+4)=5$

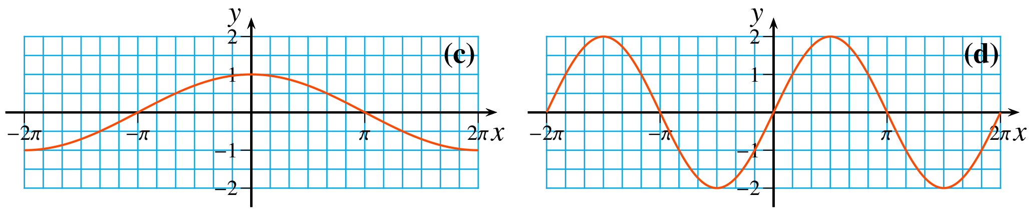
$\boxed{x < -4}$ $-(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$

Referenser: KURSPLANEN: • Muntligt och skriftligt förmedla resonemang och lösningar av sådana problem som behandlas i kursen, allt i enlighet med övriga lärandemål. DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Övning 10.16.

Rättningsnorm: Svar där det verkar troligt att ”kompisen” skulle klara en liknande uppgift efter att ha hört förklaringen: 3p. Delpoäng om det verkar som att den skrivande förstår själv.

3. Här är fyra kurvor:





Här är åtta formler:

(i) $y = \sin(\frac{1}{2}\cdot x)$ **(ii)** $y = \frac{1}{2}\cdot \sin(x)$ **(iii)** $y = \sin(2\cdot x)$ **(iv)** $y = 2\cdot \sin(x)$
(v) $y = \cos(\frac{1}{2}\cdot x)$ **(vi)** $y = \frac{1}{2}\cdot \cos(x)$ **(vii)** $y = \cos(2\cdot x)$ **(viii)** $y = 2\cdot \cos(x)$

Bestäm vilken formel som hör till de respektive kurvorna, och förklara med ungefär en mening hur du avgjorde detta.

1–2 rätt: 1p; 3 rätt: 2p; 4 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

Kurvan $y = \sin(x)$ har perioden $2\cdot\pi$, amplituden 1, och går genom origo. Kurvan $y = \cos(x)$ har samma period och amplitud, men har ett maximum vid $x = 0$.

(a) Period π, hälften av det vanliga, så det går dubbelt så fort som normalt. Normal amplitud, nollställe i origo. Är $y = \sin(2\cdot x)$ $\boxed{\textbf{iii}}$

(b) Normal period, amplituden hälften av den vanliga. Maximum vid noll. Är $y = \frac{1}{2}\cdot \cos(x)$ $\boxed{\textbf{vi}}$

(c) Period $4\cdot\pi$, dubbelt det vanliga, så det går hälften så fort. Normal amplitud. Maximum vid noll. $y = \cos(\frac{1}{2}\cdot x)$ $\boxed{\textbf{v}}$

(d) Normal period, amplituden dubbla den vanliga. nollställe i origo. Är $y = 2\cdot \sin(x)$ $\boxed{\textbf{ii}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c\cdot x)$ och $y = c\cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. Övning 12.32–33

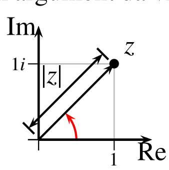
Rättningsnorm: Se frågan. Korrekt svar ihop med något som kan tolkas som en motivering räknas som rätt.

4. Vi har talet $z = 1 + i$.

(a) Rita ett komplext talplan och markera z i det. (1p)

Lösning:

Vi passar på att markera belopp och argument då vi ändå ritar.



Referenser: (gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument • Rektangulär form, polär form; Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Multiplicera, dividera och beräkna potenser med komplexa tal på polär form. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.2, 13.11, 13.15, 13.16

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel. Ograderat koordinatsystem är fel. Pilen är inte nödvändig.

(b) Skriv z på polär form. (2p)

Lösning:

I bilden ser man att $\arg(z) = \pi/4$, och $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Det ger

$\boxed{\textit{Svar: } z = \sqrt{2}\cdot(\cos(\pi/4) + i\ \sin(\pi/4))}$

Rättningsnorm: Rätt belopp, rätt argument, rätt skrivet: 2p. 1–2 av dessa saker rätt: 1p.

(c) Beräkna z^4. Svara på valfri form. (2p)

Lösning:

”Valfri form” antyder att det finns flera att välja på, vilket torde vara rektangulär och polär. Det finns också flera sätt att lägga upp beräkningen:

Distributiva lagen utan finesser:

$$\begin{aligned}
z^4 &= (1+i)^4 \\
&= (1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (1^2 + i + i + i^2)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (1 + 2\,i - 1)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= 2\,i\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (2\,i + 2\,i^2)\cdot(1+i) \\
&= (2\,i - 2)\cdot(1+i) \\
&= 2\,i + 2\,i^2 - 2 - 2\,i \\
&= 2\,i - 2 - 2 - 2\,i \\
&= \boxed{-4}
\end{aligned}$$

Kvadreringsregel och potensregel:

$$z^4 = (z^2)^2 = ((1+i)^2)^2 = (1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2)^2 = (1 + 2\,i - 1)^2 = (2\,i)^2 = 2^2\,i^2 = \boxed{-4}$$

Binomialteoremet: Om man läst t.ex. diskret matematik vet man att

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + b^4$$

Detta ger

$$z^4 = (1+i)^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3\cdot i + 6\cdot 1^2\cdot i^2 + 4\cdot 1\cdot i^3 + 1^4 = 1 + 4\,i - 6 - 4\,i + 1 = \boxed{-4}$$

Polär form: De Moivres formel ger

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 \\
&= (\sqrt{2})^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 4\cdot(\cos(\pi) + i\ \sin(\pi)) \\
&= 4\cdot(-1 + 0\,i) \\
&= \boxed{-4}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Kommit till svar: 2p. Kommit en bit: 1p.

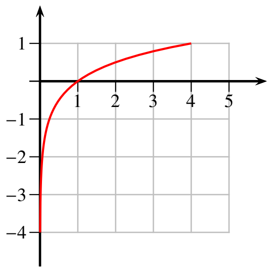
5. (a) Skissa kurvan $y = \log_4(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

(Uppgiften använd tidigare; det finns inte så värst många logaritmfunktioner som är tillräckligt enkla för att vara realistiska att handrita!)

Man kan börja med att ställa upp en värdetabell för $4^y = x$ (enklare att beräkna), och rita utgående från den:

y	4^y
-4	≈ 0
-3	≈ 0
-2	0,0625
-1	0,25
0	1
1	4



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion.

Rättningsnorm: Kurvan ska passera $(1, 0)$ och $(4, 1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

(b) Lös ekvationen $\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) = 2$. (4p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.19, senast använd 2016.03.23.

Logaritmlag: Utnyttja $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x{\cdot}y)$. Denna lag gäller dock bara om alla inblandade uttryck är definierade, så vi kommer att behöva kolla svaren då vi kommit så långt att det går att undersöka den saken:

$$\begin{aligned}
\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) &= 2 \\
\log_4((3 - x)(3 - x)) &= 2 \\
(3 - x)(-3 - x) &= 4^2 \\
-9 + x^2 &= 16 \\
x^2 &= 16 + 9 \\
x^2 &= 25 \\
x &= \pm 5
\end{aligned}$$

Potenslag: Utnyttja $a^{m+n} = a^m{\cdot}a^n$ och $a^{\log_a(x)} = x$. Den sistnämnda har dock också restriktionen ”förutsatt att alla inblandade uttryck är definiterade”, och kräver också att man kollar svaren;

$$\begin{aligned}
\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) &= 2 \\
4^{\log_4(3-x)+\log_4(-3-x)} &= 4^2 \\
4^{\log_4(3-x)}{\cdot}4^{\log_4(-3-x)} &= 16 \\
(3 - x)(-3 - x) &= 16 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren:

$$x = 5 : \begin{cases} \mathrm{VL} = \log_4(3 - 5) + \log_4(-3 - 5) = \log_4(-2) + \log_4(-8) = \text{odefinierat} \\ \mathrm{HL} = 2 \end{cases}$$

$$x = -5 : \begin{cases} \mathrm{VL} = \log_4(3 - (-5)) + \log_4(-3 - (-5)) = \log_4(2) + \log_4(8) \\ \quad\;\; = \log_4(4^{1/2}) + \log_4(4^{3/2}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ \mathrm{HL} = 2 \end{cases}$$

Den negativa lösningen $x = -5$ stämmer, den positiva var en falsk rot som uppkommit under lösningsarbetet.

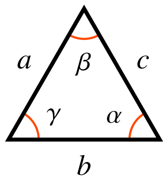
$\boxed{\textit{Svar: } x = -5}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser. • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$). • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Logaritmomskrivning: 1p. Logaritmavlägsnande: +1p. Andragradare: +1p. Kastat rätt svar: +1p.

6. I den bredvidstående triangeln har sidan a längden 3 cm, sidan b har längden $\sqrt{6}$ cm och vinkeln α är 60°.

Bestäm övriga sidor och vinklar i triangeln. (5p)



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

För full poäng krävs exakt svar, delpoäng för god approximation. Uppgiften bedöms som en helhet.

Lösning:

β med sinussatsen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}$$
$$= \frac{\sqrt{6}\cdot\sin(60^\circ)}{3} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}/2}{3} = \frac{\sqrt{6\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{9\cdot 2}}{6} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De två i en triangel möjliga vinklarna med detta sinusvärde är 45° och 135°. Den större vinkeln skulle dock ihop med 60°-vinkeln ge en vinkelsumma på mer än 180° och är därför omöjlig.

γ ur vinkelsumman och β:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \quad\Rightarrow\quad \gamma = 180^\circ-\alpha-\beta = 180^\circ-60^\circ-45^\circ = 75^\circ$$

c ur sinussatsen och γ: För att kunna utnyttja sinussatsen krävs $\sin(\gamma)$. γ är inte en standardvinkel, men kan skrivas som summa av två standardvinklar, och additionsformeln på pappret ger:

$$\sin(75^\circ) = \sin(30^\circ+45^\circ) = \sin(30^\circ)\cdot\cos(45^\circ)+\cos(30^\circ)\cdot\sin(45^\circ)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Sinussatsen ger då:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
$$c = \frac{a\cdot\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{6\cdot\sin(75^\circ)}{\sin(60^\circ)} = \frac{6\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}/4}{\sqrt{3}/2} = \cdots = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} \approx 3{,}34$$

(Uttrycket kan förenklas på ett stort antal andra sätt. Undrar du om det du har är rätt så slå in det i en miniräknare och se om det verkar matcha.)

c ur cosinussatsen: c kan också beräknas enbart ur den i frågan givna informationen och cosinussatsen:

$$a^2 = b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$$
$$3^2 = (\sqrt{3})^2+c^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot c\cdot\cos(60^\circ)$$

$$9 = 3 + c^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot c\cdot\frac{1}{2}$$
$$0 = c^2 - \sqrt{3}\cdot c - 6$$
$$0 = c^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot c + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 6$$

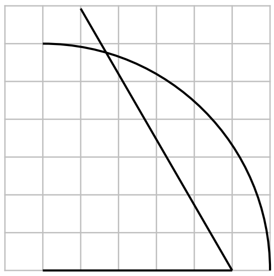
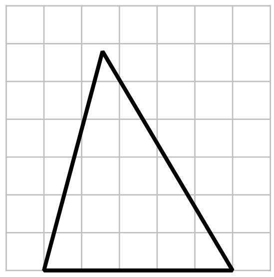
Skrivs in lite senare

β ur cosinussatsen och c: Skrivs in lite senare

Rätvinkliga trianglar: Om man glömt sinus- och cosinussatsen men kommer ihåg hur man räknar med rätvinkliga trianglar kan man med en höjd dela triangeln i två rätvinkliga delar. Man bör undvika att dra höjden så att den delar upp något av de kända måtten i två okända delar, utan den bör dras mot sidan c.

Skrivs in lite senare

Grafisk approximation: Har man gradskiva och passare kan man rita upp triangeln, och mäta upp de sökta måtten. Eftersom 6 ligger mellan $4 = 2^2$ och $9 = 3^2$ måste $\sqrt{6}$ ligga någonstans mellan 2 och 3. $2{,}5^2 = 6{,}25$, så $\sqrt{6} \approx 2{,}5$ verkar tillräckligt rätt då det gäller att rita.

$\boxed{\textit{Svar: } \beta = 45°, \gamma = 75°, c = \sqrt{(6)}\cdot(\sqrt{3} + 1)/2\,\text{cm}}$

Referenser: (Beror lite på hur man gör) DU SKA KUNNA GÖRA FÖLJANDE: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering.

Rättningsnorm: Poäng efter ungefär hur stor del av en fullständig lösning man fått ihop.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) **Notation:** är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) **Presentation:** är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.

MAA121 **Matematik grundkurs**

TEN2 – *Lösningsförslag*

2022.08.19 14.30–17.30

Mälardalens universitet

Akademin för utbildning, kultur och kommunikation

Hjälpmedel: Endast skrivmaterial. (Gradskiva, linjal och passare är tillåtet.)

Poäng: Denna tentamen ger maximalt 26 poäng. 0–13 poäng: U. 14–18 poäng: 3. 19–22 poäng: 4. 23–26 poäng: 5.

Frågor kan ställas till: Hillevi Gavel, som nås på telefon 021–10 16 01

Övriga anvisningar: • Skriv läsbart. • Förklara alla resonemang som inte är trivialt uppenbara. **Svar utan uträkning eller motivering får 0 poäng** om det inte står att det inte behövs. • Se till att det framgår vad svaret på frågan är. • Om du inte kan lösa en uppgift fullständigt men har några idéer, skriv då ner dem. Det kan ge delpoäng. • Vid hantering av andragradsuttryck får ”pq-formeln” inte användas.

Formelsamling:
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

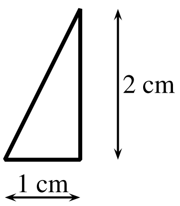
1. För vinkeln α gäller att $\tan(\alpha) = 2$ och att $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Bestäm

(a) $\sin(\alpha)$ **(b)** $\cos(\alpha)$ Uppgiften bedöms som en helhet. (3p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 12.34(c) med utbytt variabelnamn.

Rätvinkliga trianglar: En vinkel i det här intervallet är en möjlig spetsvinkel i en rätvinklig triangel. I en sådan är tangensvärdet motstående katet dividerat med närliggande katet, så triangeln kan se ut t.ex



Pythagoras sats ger att hypotenusans längd är $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Detta ger

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Trigonometriska ettan Vi vet $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ och att $\tan(\alpha) = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$.

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= 2\\
\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= 2\\
\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &= 2^2\\
\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)} &= 4\\
\sin^2(\alpha) &= 4\cdot(1-\sin^2(\alpha))
\end{aligned}$$

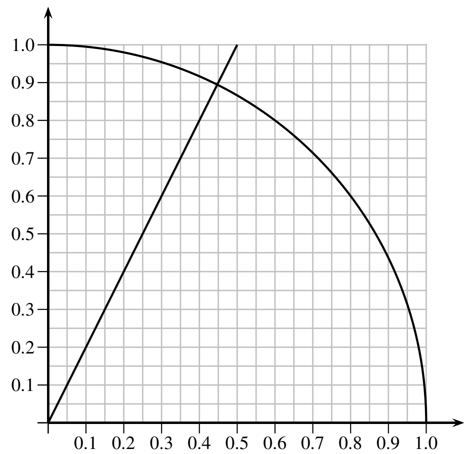
$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha) &= 4 - 4\cdot\sin^2(\alpha)\\ 5\cdot\sin^2(\alpha) &= 4\\ \sin^2(\alpha) &= \frac{4}{5}\\ \sin(\alpha) &= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Eftersom vi befinner oss i första kvadranten är plusalternativet rätt.

Detta ger

$$\cos(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} = \frac{2/\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Grafisk approximation: (Om man har passare med sig.) Tangensvärdet för vinkeln är ”k-värdet” för strålen. Rita en enhetscirkel och en stråle som går 2 rutor uppåt för varje ruta framåt.



x-koordinaten för skärningen mellan strålen och cirkeln är cosinusvärdet, y-koordinaten är sinusvärdet. Ser ut som att $\cos(\alpha) \approx 0{,}45$, $\sin(\alpha) \approx 0{,}9$. (Approximation med dator ger värdena 0,447 respektive 0,894, så denna avläsning var ganska bra!)

Svar: (a) $\sin(\alpha) = 2/\sqrt{5} \approx 0{,}9$ (b) $\cos(\alpha) = 1/\sqrt{5} \approx 0{,}45$

Referenser: (lite beroende på hur man gjorde) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Sinus, cosinus, tangens • Enhetscirkeln • Katet, hypotenusa; Du ska kunna göra följande: • Tillämpa Pythagoras sats. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan vinklar och trigonometriska värden med hjälp av enhetscirkeln. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Tillämpa trigonometriska räkneregler. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Kommit till svar:3p. Konstruktiv start: 1p. Mellanting: 2p. Grafisk approximation 1–2p, beroende på exakthet.

2. Din kompis sitter och räknar extentor, och håller på med följande uppgift från junitentan:

Lös ekvationen $|x+2| + |x+3| + |x+4| = 5$

Kompisen har skrivit:

Fall 1: $(x+2)+(x+3)+(x+4) = 5$ Fall 2: $-(x+2)+(x+3)+(x+4) = 5$

Fall 3: $(x+2)+(x+3)-(x+4) = 5$ Fall 4: $-(x+2)+(x+3)-(x+4) = 5$

$\boxed{\text{Fall 5:}}$ $(x+2)-(x+3)+(x+4)=5$ $\boxed{\text{Fall 6:}}$ $-(x+2)-(x+3)+(x+4)=5$

$\boxed{\text{Fall 7:}}$ $(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$ $\boxed{\text{Fall 8:}}$ $-(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$

”Det här bli ju hur mycket som helst att göra!” klagar kompisen. ”Hur är det meningen att man ska hinna det här innan tiden är slut?”

Förklara för kompisen:

- På vilket sätt hen resonerar fel i falluppdelningen.
- Hur det är man ska göra. (Du behöver inte lösa själva ekvationen, det är det bara bra om kompisen gör själv.)

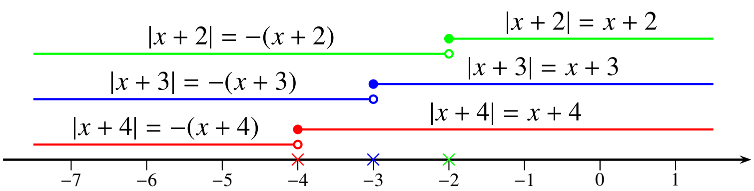
För full poäng måste förklaringen vara begriplig för en ”kompis” med denna missuppfattning. Delpoäng om det verkar som att du själv förstår. (3p)

Lösning:

Exempelvis:

Så där många fall blir det inte! Ditt fall 3, t.ex. Du har plusalternativet för det första beloppet. Det ska användas om man är till höger om $x=-2$. Och du har minusalternativet på det sista beloppet. Det ska användas om man är till vänster om $x=-4$. Det är inte möjligt att vara till höger om $x=-2$ samtidigt som man är till vänster om $x=-4$, det ser du om du tittar på en tallinje. Så det fallet kan inte inträffa, och då finns det ju ingen anledning att räkna på det.

Du ska inte bara skriva ”Fall 1” och så vidare, utan du ska skriva exakt vad fallen innebär. Då riskerar du inte att ta något som är omöjligt, och du kan också rimlighetskontrollera svaren. Skriv upp i vilka punkter de olika beloppen byter uppförande, pricka in på en tallinje, och se vilka fall som kan inträffa:



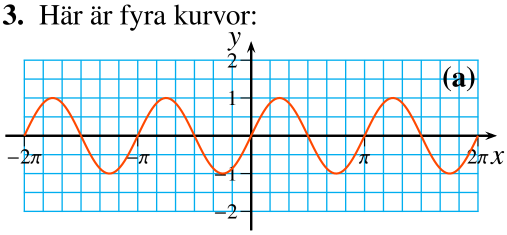
Du ser att de tre punkterna delar tallinjen i fyra delar. De motsvarar de fyra fallen:

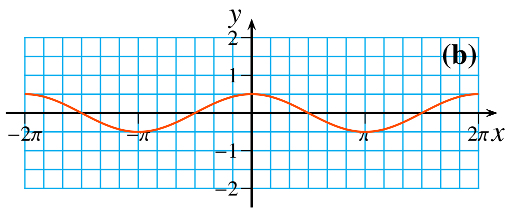
$\boxed{-2 \le x}$	$(x+2)+(x+3)+(x+4)=5$
$\boxed{-3 \le x < -2}$	$-(x+2)+(x+3)+(x+4)=5$
$\boxed{-4 \le x < -3}$	$-(x+2)-(x+3)+(x+4)=5$
$\boxed{x < -4}$	$-(x+2)-(x+3)-(x+4)=5$

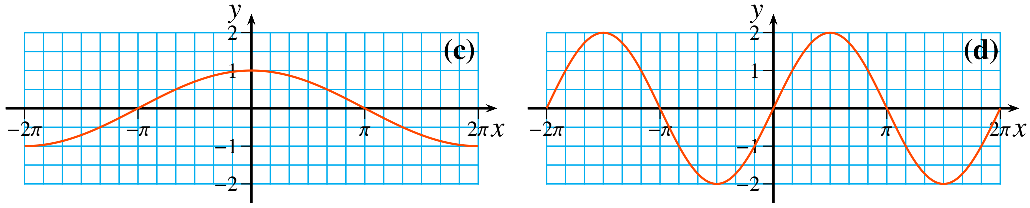
Referenser: Kursplanen: • Muntligt och skriftligt förmedla resonemang och lösningar av sådana problem som behandlas i kursen, allt i enlighet med övriga lärandemål. Du ska kunna göra följande: • Tillämpa absolutbeloppets definition i problem. • Lösa problem innehållande absolutbelopp med hjälp av falluppdelning. Övning 10.16.

Rättningsnorm: För full poäng krävs att man förklarat vad som är fel i kompisens angrepp, hur man ska göra samt dessutom att det ska verka troligt att en kompis skulle förstå förklaringen.

3. Här är fyra kurvor:







Här är åtta formler:

(i) $y = \sin(\frac{1}{2} \cdot x)$ **(ii)** $y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x)$ **(iii)** $y = \sin(2 \cdot x)$ **(iv)** $y = 2 \cdot \sin(x)$
(v) $y = \cos(\frac{1}{2} \cdot x)$ **(vi)** $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$ **(vii)** $y = \cos(2 \cdot x)$ **(viii)** $y = 2 \cdot \cos(x)$

Bestäm vilken formel som hör till de respektive kurvorna, och förklara med ungefär en mening hur du avgjorde detta.

1–2 rätt: 1p; 3 rätt: 2p; 4 rätt: 3p. (3p)

Lösning:

Kurvan $y = \sin(x)$ har perioden $2 \cdot \pi$, amplituden 1, och går genom origo. Kurvan $y = \cos(x)$ har samma period och amplitud, men har ett maximum vid $x = 0$.

(a) Period π, hälften av det vanliga, så det går dubbelt så fort som normalt. Normal amplitud, nollställe i origo. Är $y = \sin(2 \cdot x)$ $\boxed{\textbf{iii}}$

(b) Normal period, amplituden hälften av den vanliga. Maximum vid noll. Är $y = \frac{1}{2} \cdot \cos(x)$ $\boxed{\textbf{vi}}$

(c) Period $4 \cdot \pi$, dubbelt det vanliga, så det går hälften så fort. Normal amplitud. Maximum vid noll. $y = \cos(\frac{1}{2} \cdot x)$ $\boxed{\textbf{v}}$

(d) Normal period, amplituden dubbla den vanliga. nollställe i origo. Är $y = 2 \cdot \sin(x)$ $\boxed{\textbf{iv}}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa kurvorna $y = f(x + c)$, $y = f(x) + c$, $y = f(c \cdot x)$ och $y = c \cdot f(x)$, givet att utseendet på kurvan $y = f(x)$ är känt. • Skissa grafen för en trigonometrisk funktion. Övning 12.32–33

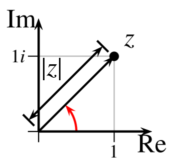
Rättningsnorm: Se frågan. Korrekt svar ihop med något som kan tolkas som en motivering räknas som rätt. Konsekvent förväxlat sinus med cosinus men hanterat konstanterna korrekt: 1p

4. Vi har talet $z = 1 + i$.

(a) Rita ett komplext talplan och markera z i det. (1p)

Lösning:

Vi passar på att markera belopp och argument då vi ändå ritar.



Referenser: (gäller alla deluppgifterna) Du ska kunna förklara vad följande betyder: • Belopp, argument • Rektangulär form, polär form; Du ska kunna göra följande: • Illustrera komplexa tal i det komplexa talplanet. • Tillämpa de fyra räknesätten på komplexa tal på rektangulär form. • Multiplicera, dividera och beräkna potenser med komplexa tal på polär form. • Byta mellan rektangulär form och polär form. Övning 13.2, 13.11, 13.15, 13.16

Rättningsnorm: Kan bara bli rätt eller fel. Ograderat koordinatsystem är fel. Pilen är inte nödvändig.

(b) Skriv z på polär form. (2p)

Lösning:

I bilden ser man att $\arg(z) = \pi/4$, och $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Det ger

$\boxed{\textit{Svar: } z = \sqrt{2}\cdot(\cos(\pi/4) + i\ \sin(\pi/4))}$

Rättningsnorm: Rätt belopp, rätt argument, rätt skrivet: 2p. 1–2 av dessa saker rätt: 1p.

(c) Beräkna z^4. Svara på valfri form. (2p)

Lösning:

"Valfri form" antyder att det finns flera att välja på, vilket torde vara rektangulär och polär. Det finns också flera sätt att lägga upp beräkningen:

Distributiva lagen utan finesser:

$$\begin{aligned}
z^4 &= (1+i)^4 \\
&= (1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (1^2 + i + i + i^2)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (1 + 2\,i - 1)\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= 2\,i\cdot(1+i)\cdot(1+i) \\
&= (2\,i + 2\,i^2)\cdot(1+i) \\
&= (2\,i - 2)\cdot(1+i) \\
&= 2\,i + 2\,i^2 - 2 - 2\,i \\
&= 2\,i - 2 - 2 - 2\,i \\
&= \boxed{-4}
\end{aligned}$$

Kvadreringsregel och potensregel:

$$z^4 = (z^2)^2 = ((1+i)^2)^2 = (1^2 + 2\cdot1\cdot i + i^2)^2 = (1 + 2\,i - 1)^2 = (2\,i)^2 = 2^2\,i^2 = \boxed{-4}$$

Binomialteoremet: Om man läst t.ex. diskret matematik vet man att

$$(a+b)^4 = a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 4\cdot a\cdot b^3 + b^4$$

Detta ger

$$z^4 = (1+i)^4 = 1^4 + 4\cdot1^3\cdot i + 6\cdot1^2\cdot i^2 + 4\cdot1\cdot i^3 + 1^4 = 1 + 4\,i - 6 - 4\,i + 1 = \boxed{-4}$$

Polär form: De Moivres formel ger

$$\begin{aligned}
z^4 &= \left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 \\
&= (\sqrt{2})^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\ \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 4\cdot(\cos(\pi) + i\ \sin(\pi)) \\
&= 4\cdot(-1 + 0\,i) \\
&= \boxed{-4}
\end{aligned}$$

Rättningsnorm: Kommit till svar: 2p. Kommit en bit: 1p.

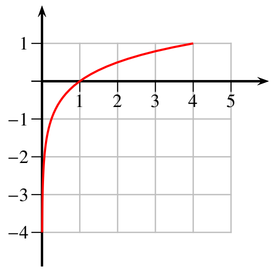
5. (a) Skissa kurvan $y = \log_4(x)$. Koordinatsystemet måste vara graderat. (1p)

Lösning:

(Uppgiften använd tidigare; det finns inte så värst många logaritmfunktioner som är tillräckligt enkla för att vara realistiska att handrita!)

Man kan börja med att ställa upp en värdetabell för $4^y = x$ (enklare att beräkna), och rita utgående från den:

y	4^y
-4	≈ 0
-3	≈ 0
-2	0,0625
-1	0,25
0	1
1	4



Referenser: Du ska kunna göra följande: • Skissa grafen för en logaritmfunktion.

Rättningsnorm: Kurvan ska passera $(1, 0)$ och $(4, 1)$ och ha någorlunda rätt form för poäng.

(b) Lös ekvationen $\log_4(3 - x) + \log_4(-3 - x) = 2$. (4p)

Lösning:

Rekommenderad uppgift 11.19, senast använd 2016.03.23.

Logaritmlag: Utnyttja $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x{\cdot}y)$. Denna lag gäller dock bara om alla inblandade uttryck är definierade, så vi kommer att behöva kolla svaren genom att sätta in dem i *ursprungs*ekvationen då vi kommit så långt att det går att undersöka den saken:

$$\begin{aligned}
\log_4(3-x) + \log_4(-3-x) &= 2\\
\log_4((3-x)(3-x)) &= 2\\
(3-x)(-3-x) &= 4^2\\
-9 + x^2 &= 16\\
x^2 &= 16 + 9\\
x^2 &= 25\\
x &= \pm 5
\end{aligned}$$

Potenslag: Utnyttja $a^{m+n} = a^m{\cdot}a^n$ och $a^{\log_a(x)} = x$. Den sistnämnda har dock också restriktionen ”förutsatt att alla inblandade uttryck är definiterade”, och kräver också att man kollar svaren;

$$\begin{aligned}
\log_4(3-x) + \log_4(-3-x) &= 2\\
4^{\log_4(3-x)+\log_4(-3-x)} &= 4^2\\
4^{\log_4(3-x)}{\cdot}4^{\log_4(-3-x)} &= 16\\
(3-x)(-3-x) &= 16\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kontroll av svaren:

$$x = 5 : \begin{cases} \text{VL} = \log_4(3-5) + \log_4(-3-5) = \log_4(-2) + \log_4(-8) = \text{odefinierat}\\ \text{HL} = 2 \end{cases}$$

$$x = -5 : \begin{cases} \text{VL} = \log_4(3-(-5)) + \log_4(-3-(-5)) = \log_4(2) + \log_4(8)\\ \quad\;\; = \log_4(4^{1/2}) + \log_4(4^{3/2}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2\\ \text{HL} = 2 \end{cases}$$

Den negativa lösningen $x = -5$ stämmer, den positiva var en falsk rot som uppkommit under lösningsarbetet.

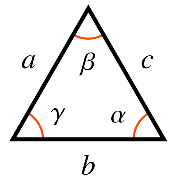
$\boxed{\textit{Svar: } x = -5}$

Referenser: Du ska kunna göra följande: • Redogöra för definitionen av logaritm och sambandet mellan logaritmer och potenser. • Bestämma en enkel logaritm (typ $\log_2(16)$). • Snabbt och säkert tillämpa logaritmreglerna. • Lösa ekvationer innehållande logaritmer eller exponentialuttryck. • Bedöma om beräkningarna kan ha resulterat i falska rötter. Rekommenderad uppgift!

Rättningsnorm: Logaritmomskrivning: 1p. Logaritmavlägsnande: +1p. Andragradare: +1p. Kastat rätt svar: +1p.

6. I den bredvidstående triangeln har sidan a längden 3 cm, sidan b har längden $\sqrt{6}$ cm och vinkeln α är 60°.

Bestäm övriga sidor och vinklar i triangeln. (5p)



OBS! Den avbildade triangeln är inte måttriktig, utan är bara till för att klargöra hur sidorna och vinklarna ligger i förhållande till varandra!

För full poäng krävs exakt svar, delpoäng för god approximation. Uppgiften bedöms som en helhet.

Lösning:

β med sinussatsen:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$$
$$\sin(\beta) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{a}$$
$$= \frac{\sqrt{6}\cdot\sin(60°)}{3} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}/2}{3} = \frac{\sqrt{6\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{9\cdot 2}}{6} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De två i en triangel möjliga vinklarna med detta sinusvärde är 45° och 135°. Den större vinkeln skulle dock ihop med 60°-vinkeln ge en vinkelsumma på mer än 180° och är därför omöjlig.

γ ur vinkelsumman och β:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \quad\Rightarrow\quad \gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 60° - 45° = 75°$$

c ur sinussatsen och γ: För att kunna utnyttja sinussatsen krävs $\sin(\gamma)$. γ är inte en standardvinkel, men kan skrivas som summa av två standardvinklar, och additionsformeln på pappret ger:

$$\sin(75°) = \sin(30° + 45°) = \sin(30°)\cdot\cos(45°) + \cos(30°)\cdot\sin(45°)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}{4}$$

Sinussatsen ger då:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$
$$c = \frac{a\cdot\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = \frac{6\cdot\sin(75°)}{\sin(60°)} = \frac{6\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}/4}{\sqrt{3}/2} = \cdots = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)}{2} \approx 3{,}34$$

(Uttrycket kan förenklas på ett stort antal andra sätt. Undrar du om det du har är rätt så slå in det i en miniräknare och se om det verkar matcha.)

c ur cosinussatsen: c kan också beräknas enbart ur den i frågan givna informationen och cosinussatsen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha)$$
$$3^2 = (\sqrt{6})^2 + c^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot c\cdot\cos(60°)$$

$$
\begin{aligned}
9 &= 6 + c^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot c\cdot\frac{1}{2}\\
0 &= c^2 - \sqrt{6}\cdot c - 3\\
0 &= c^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot c + (\frac{\sqrt{6}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2 - 3\\
0 &= (c - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - \frac{6}{4} - \frac{3\cdot 4}{4}\\
0 &= (c - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - \frac{18}{4}\\
0 &= (c - \frac{\sqrt{6}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{18}}{2})^2\\
0 &= (c - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2})(c - \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{18}}{2})\\
0 &= (c - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{18}}{2})(c - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{18}}{2})
\end{aligned}
$$

Den vänstra faktorn motsvara en negativ längd, och är inte ett rimligt svar, men den fungerar.

$$c = \frac{\sqrt{6} + 3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

β ur cosinussatsen och c: Cosinussatsen ger:

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos(\beta)\\
\cos(\beta) &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c}
\end{aligned}
$$

Det verkar fördelaktigt att göra en separatuträkning av c^2:

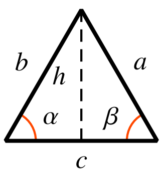
$$
\begin{aligned}
c^2 = (\frac{\sqrt{6} + 3\cdot\sqrt{2}}{2})^2 &= \frac{\sqrt{6}^2 + 2\cdot\sqrt{6}\cdot 3\cdot\sqrt{2} + (3\cdot\sqrt{2})^2}{2^2}\\
&= \frac{6 + 6\cdot\sqrt{6\cdot 2} + 9\cdot 2}{4} = \frac{24 + 12\cdot\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Det ger

$$
\begin{aligned}
\cos(\beta) = \frac{3^2 + (6 + 3\cdot\sqrt{3}) - \sqrt{6}^2}{2\cdot 3\cdot(6 + 3\cdot\sqrt{2})/2} &= \frac{9 + 3\cdot\sqrt{3}}{3\cdot(6 + 3\cdot\sqrt{2})}\\
&= \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} + 3\cdot\sqrt{2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Och detta känns igen som $\cos(45°)$.

Rätvinkliga trianglar: Om man glömt sinus- och cosinussatsen men kommer ihåg hur man räknar med rätvinkliga trianglar kan man med en höjd dela triangeln i två rätvinkliga delar. Man bör undvika att dra höjden så att den delar upp något av de kända måtten i två okända delar, utan den bör dras mot sidan c.



Höjden h är motstående katet i den vänstra triangeln; så

$$h = b\cdot\sin(\alpha) = \sqrt{6}\cdot\sin(60°) = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}$$

Även högra triangeln har h som motstående katet, så vi har

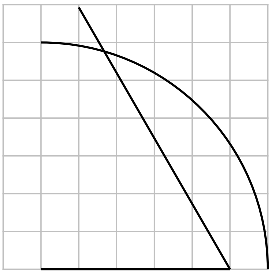
$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{18}/2}{3} = \frac{\sqrt{9\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

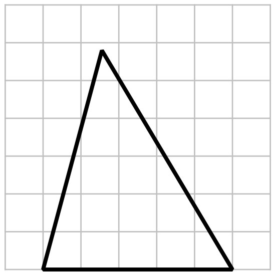
Samma överväganden som i β *med sinussatsen* ger $\beta = 45°$.

Sidan c har av höjden delats i två delar, som är närliggande kateter i de två trianglarna, och kan då fås genom att man räknar ut längderna på delarna och adderar:

$$c = a\cdot\cos(\beta) + b\cdot\cos(\alpha) = 3\cdot\cos(45°) + \sqrt{6}\cdot\cos(60°)$$
$$= 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{6}\frac{\cdot 1}{2} = \cdots = \frac{\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})}{2}$$

Grafisk approximation: Har man gradskiva och passare kan man rita upp triangeln, och mäta upp de sökta måtten. Eftersom 6 ligger mellan $4 = 2^2$ och $9 = 3^2$ måste $\sqrt{6}$ ligga någonstans mellan 2 och 3. $2{,}5^2 = 6{,}25$, så $\sqrt{6} \approx 2{,}5$ verkar tillräckligt rätt då det gäller att rita.





Svar: $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$, $c = \sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)/2\,\mathrm{cm}$

Referenser: (Beror lite på hur man gör) Du ska kunna göra följande: • Tillämpa de trigonometriska värdena för standardvinklarna. • Redogöra för och tillämpa sambanden mellan sidlängder och trigonometriska värden i en rätvinklig triangel. • Redogöra för och tillämpa sinussatsen och cosinussatsen. • Korrekt rita upp en given triangel med hjälp av gradskiva, linjal och passare. • Faktorisera ett andragradsuttryck med hjälp av kvadratkomplettering.

Rättningsnorm: Poäng efter ungefär hur stor del av en fullständig lösning man fått ihop.

7. Detta är inte en separat uppgift, utan innebär att examinator tittar igenom lösningarna på de föregående uppgifterna och ser om de uppfyller följande kriterier:

(a) Notation: är den matematiska notationen korrekt (det vill säga: sitter alla parenteser, likhetstecken och andra matematiska symboler där de ska)? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att det inte finns några systematiska fel.

Rättning: ”Systematiskt fel” är samma fel på flera ställen. Kravet om ”minst hälften” är dels därför att det inte går att göra en korrekt bedömning utan tillräckligt underlag, och dels därför att det inte går att bli godkänd om man gjort mindre än så, och det är då tidsslöseri att titta på saken.

(b) Presentation: är lösningarna lätta att följa? (1p)

För poäng krävs att det finns lösningsförsök på minst hälften av uppgifterna, och att de är uppställda och kommenterade så att den som läser dem inte behöver undra ”vad kom det där ifrån?” eller ”vad var det som hände?”.

Rättning: Att någon uppgift ser ut som ”tiden tog slut så jag lämnade in kladdpappret” accepteras.