TEN2 2021-08-20
MAA140 Vektoralgebra grundkurs
Skrivtid: 3 timmar
Hjälpmedel: Inga behövs,
men förutom penna, sudd och linjal är gradskiva och passare godkända.
Godkäntgräns: 15 p

Mälardalens högskola
Avdelningen för tillämpad matematik
Lars Hellström

Lösningarna ska presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar!

1 Låt $A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Avgör vilka av följande vektorer som är egenvektorer till A, och vad de egenvektorerna har för egenvärden.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (6 p)

2 Låt $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ vara vektorerna i standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Skriv ned gångertabellen för vektorprodukten i standardbasen. (2 p)

3 Punkterna $A = (8, 2, 0)$, $B = (7, 3, 1)$ och $C = (5, 6, -5)$ är hörnen i triangeln ABC.

a Beräkna längderna av sidorna i triangeln ABC. (2 p)

b Beräkna arean av triangeln ABC. (2 p)

c Ange på parameterfri form ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2 p)

d Avgör om linjen $\ell\colon (x, y, z) = (8+t, 1-2t, 6+7t)$ för $t \in \mathbb{R}$ ligger i samma plan som punkterna A, B och C. (2 p)

4 Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. (6 p)

5a Dela upp vektorn $\mathbf{u} = 6\mathbf{e}_2$ i komposanter $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$ parallella med respektive vinkelräta mot vektorn $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ betecknar standardbasen i $\mathbb{R}^3$. (2 p)

b Hitta en vektor $\mathbf{w}_3 \neq \mathbf{0}$ som är vinkelrät mot både $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_2$. (2 p)

c Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}_3$. (1 p)

6 Låt B och C vara inverterbara 3×3-matriser. Vilka av de nedanstående likheterna är allmänt giltiga identiteter (räknelagar)?

(a)	$\det(B + C) = \det(B) + \det(C)$	**(e)**	$\det(BC) = \det(B) + \det(C)$
(b)	$\det(B + C) = \det(B)\det(C)$	**(f)**	$\det(BC) = \det(B)\det(C)$
(c)	$\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$	**(g)**	$\det(B^{\mathrm{T}}) = 1/\det(B)$
(d)	$\det(B^{-1}) = \det(B)$		

Svara ”sant”, ”falskt”, eller ”vet inte” för var och en av dem. (Vid poängsättning förtar ett felaktigt svar sant/falskt ett annat korrekt svar sant/falskt, så den som inte har minst två rätt mer än hen har fel får noll poäng på denna fråga.) (3 p)

Fråga 6 är den sista. På nästa sida följer några tabeller.

Värden som kan vara bra att ha:

n	2^n	3^n	$(10+n)^2$	$\sqrt{n} \approx$	$\sqrt{10+n} \approx$
0	1	1	100	0,00	3,16
1	2	3	121	1,00	3,32
2	4	9	144	1,41	3,46
3	8	27	169	1,73	3,61
4	16	81	196	2,00	3,74
5	32	243	225	2,24	3,87
6	64	729	256	2,45	4,00
7	128	2187	289	2,65	4,12
8	256	6561	324	2,83	4,24
9	512	19683	361	3,00	4,36

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lycka till!