Lösningar TEN1 2022-06-09 MAA140

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+3y+3z=2 \\ 12x+10y+9z=3 \\ 15x+12y+11z=2 \end{cases}$

Lösning. Som utvidgad matris är systemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 12 & 10 & 9 & 3 \\ 15 & 12 & 11 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{c} (-4)\,(-5) \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ (-1)\,(1) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -8 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ (3) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ (1)\,(-1) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{c} (\cdot\frac{1}{3}) \\ \\ (\cdot -1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Svar: Lösningen är $(x,y,z) = \left(-\frac{7}{3}, 4, -1\right)$.

Koll:

$VL_1 = 3x+3y+3z = 3\cdot -\frac{7}{3} + 3\cdot 4 + 3\cdot -1 = -7+12-3 = 2 = HL_1$. OK

$VL_2 = 12x+10y+9z = 12\cdot -\frac{7}{3} + 10\cdot 4 + 9\cdot -1 = -28+40-9 = 3 = HL_2$. OK

$VL_3 = 15x+12y+11z = 15\cdot -\frac{7}{3} + 12\cdot 4 + 11\cdot -1 = -35+48-11 = 2 = HL_3$. OK

Alltså stämmer lösningen.

Anm. Från första raden är det uppenbart att lösningen inte bara kan bestå av heltal, för då är VL delbar med 3, men HL är inte delbar med 3.

2 Låt $z = 1+3i$. Beräkna och markera som punkter i det komplexa talplanet talen $z, \bar{z}, iz, z/i, |z|, i-z$ och $(1-7i)/z$. Se till att ha graderat axlarna och välj en lämplig skala!

<u>Lösning</u> Om $z = 1+3i$ så är

$$\bar{z} = \overline{1+3i} = 1-3i$$

$$iz = i(1+3i) = i+3i^2 = i-3 = -3+i$$

$$z/i = \frac{z}{i} = \frac{z\cdot -i}{i\cdot -i} = \frac{-iz}{1} = -iz = -(-3+i) = 3-i$$

$$|z| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3,16$$

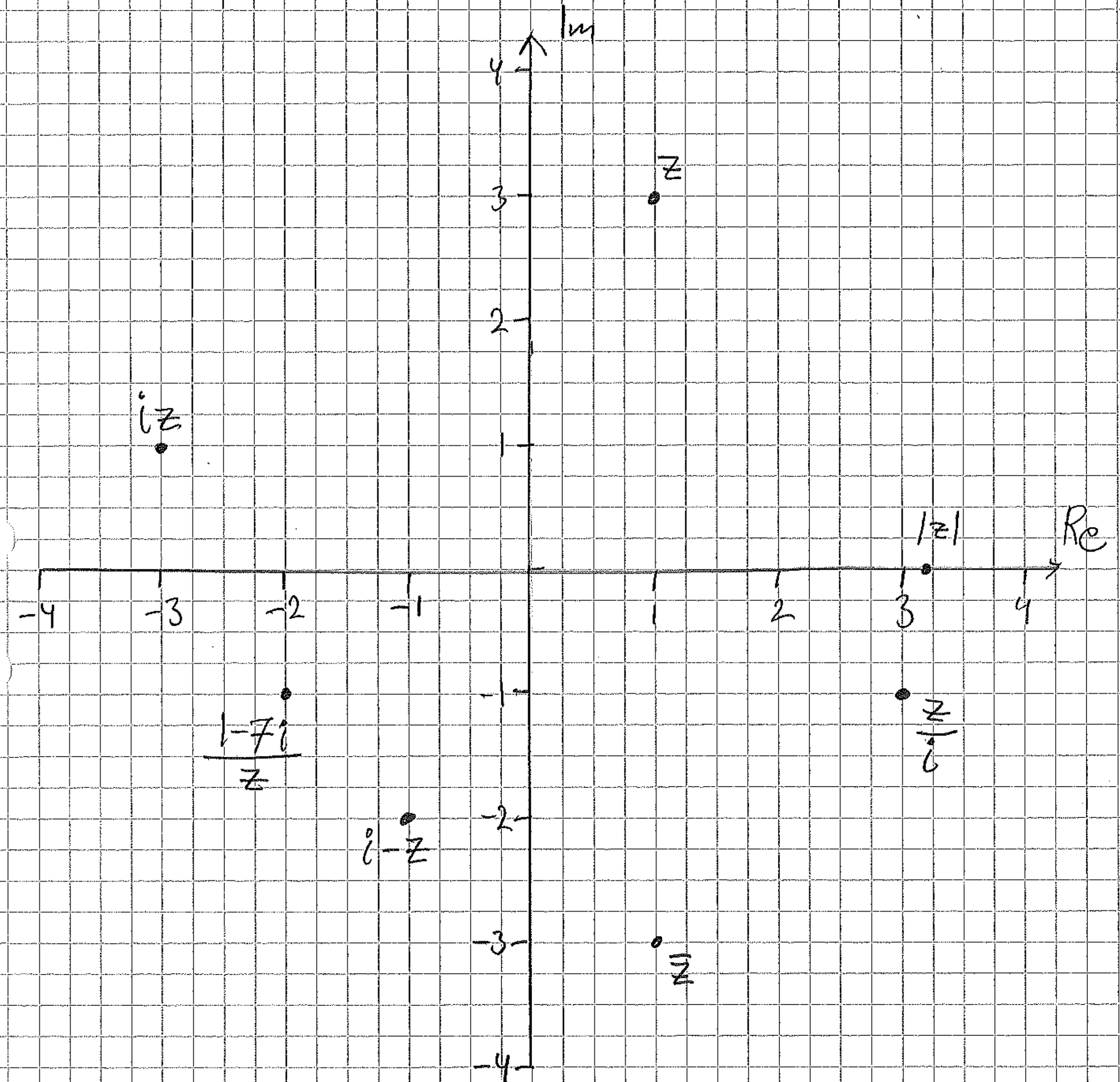
$$i-z = i-(1+3i) = i-1-3i = -1-2i$$

$$\frac{1-7i}{z} = \frac{1-7i}{1+3i} = \frac{(1-7i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1-3i-7i+21i^2}{1^2+3^2} =$$

$$= \frac{1-10i-21}{10} = \frac{-20-10i}{10} = -2-i$$

<u>Koll</u>: $(-2-i)(1+3i) = -2-6i-i-3i^2 = 1-7i$. OK.

Alla punkterna har real- och imaginärdel mellan -4 och $+4$, så det räcker att koordinatsystemet täcker detta. Då kan man göra skalan rätt detaljerad.



Svar: $z = 1+3i$

$\bar{z} = 1-3i$

$iz = -3+i$

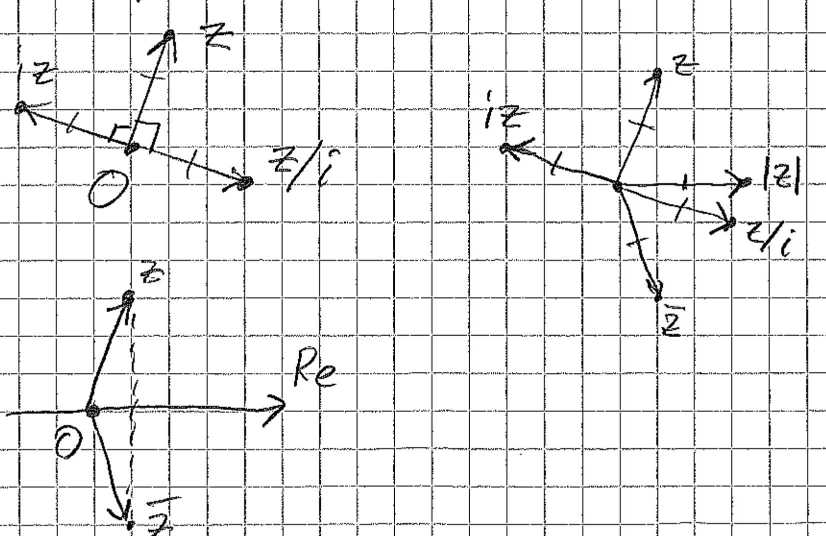
$z/i = 3-i$

$|z| = \sqrt{10}$

$i-z = -1-2i$

$\frac{1-7i}{z} = -2-i$

Koll grafiskt:



3 Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Beräkna följande uttryck, eller förklara varför ett värde inte existerar!

a AB (2p)

Lösning: A är 3×3 och B är 3×3, så produkten existerar och är 3×3.

Uppställning:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5-6-4 & 9+5 & -6 \\ 9-10-8 & 15+10 & -12 \\ 6-8-4 & 12+5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 14 & -6 \\ -9 & 25 & -12 \\ -6 & 17 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Svar: $AB = \begin{pmatrix} -5 & 14 & -6 \\ -9 & 25 & -12 \\ -6 & 17 & -6 \end{pmatrix}$

b $A-B$ (1p)

Lösning. Matriserna har samma form (3×3), så differensen existerar.

$$A-B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 2 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

c BA (2p)

Lösning. B är 3x3 och A är 3x3, så BA existerar och är 3x3.
Uppställning

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix}5&3&1\\9&5&2\\6&4&1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&3&0\\-4&5&-6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5&3&1\\-10+27&-6+15&-2+6\\-20+45-36&-12+25-24&-4+10-6\end{pmatrix} = \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix}5&3&1\\17&9&4\\-11&-11&0\end{pmatrix} \qquad \underline{\text{Svar:}}\ BA = \begin{pmatrix}5&3&1\\17&9&4\\-11&-11&0\end{pmatrix}$$

d B^T (1p)

$$\underline{\text{Svar:}}\ B^T = \begin{pmatrix}1&-2&-4\\0&3&5\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

e A^{-1} (4p)

Lösning. Eftersom A är kvadratisk så kan den vara inverterbar. Om den inte är inverterbar så kommer det att visa sig under räkningarnas gång när man försöker invertera.

Uppställning: Verkar enklast att börja i kolumn 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; (-2)\;(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; (-3)\;(6) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Här får vi en nollrad i VL, vilket visar att A inte är inverterbar.

Svar: A^{-1} existerar inte.

4 Finn alla komplexa lösningar z till ekvationen $z^6 = -64$. Ge ditt svar på rektangulär form.

Lösning. -64 på polär form är $64(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$ (för på negativa reella axeln är argumentet π). En sjätte rot ur -64 ska dela argumentet med 6 och dra sjätte roten ur beloppet. $64 = 2^6$, så $|z| = 2$ ger $|z^6| = 64$.
Alltså är en första lösning

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Övriga lösningar ligger $\frac{2\pi}{6}$ i argument ifrån varandra, så deras argument blir

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \text{ och } \frac{9\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

Lösningarna på rektangulär form är alltså

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot(0 + i\cdot 1) = 2i$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i.$$

$$z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot -1) = -2i$$

$$z_6 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot -\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i.$$

Svar: Lösningarna är $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z_4 = -\sqrt{3} - i$, $z_5 = -2i$ och $z_6 = \sqrt{3} - i$.

5 Låt C och D vara inverterbara 3x3-matriser. Vilka av de följande likheterna är allmänt giltiga identiteter?

a) $C + D = D + C$ SANT

b) $(C+D)^T = D^T + C^T$ SANT

c) $(C^T)^T = C$ SANT

d) $CD = DC$ FALSKT

e) $(CD)^T = D^T C^T$ SANT