

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Investigación Operativa 1C 2025

Proyecto de Programación Lineal Entera

Nombre del alumno/s: Felipe Pasquet, Juan I Catania

Nombre del profesor/es: Isabel Méndez-Díaz, Paula Zabala

Disciplina/área del proyecto: Investigación Operativa - Programación Lineal Entera

Introducción

Una empresa distribuye sus productos recorriendo todos los clientes con un camión (TSP), pero quiere ahorrar costos así que propone un nuevo sistema. En el nuevo sistema, el camión no visita a todos los clientes; deja varios productos en la ubicación de algunos clientes, y desde ahí sale un repartidor en bicicleta a entregar los productos a otros clientes cercanos. Queremos encontrar el nuevo recorrido óptimo y comparar los costos con el sistema anterior.

Objetivo

En este trabajo práctico nos interesa poder comparar los costos entre continuar con la metodología actual y la nueva manera de distribución. Para esto, vamos a contar con la siguiente información:

1. La cantidad de clientes a quienes se debe satisfacer la demanda, $cant_clientes$.
2. Hay productos que exigen refrigeración.
3. La distancia d_{ij} entre todo par de clientes i y j y el costo c_{ij} de desplazar el camión desde i a j .
4. Cada repartidor a bici que se contrate tiene un costo de $costo_repartidor$ por cada cliente que deba visitar.
5. La distancia máxima a la que puede estar un cliente de la parada del camión para ser visitado por un repartidor a bici es de $dist_max$.

La solución debe indicar el recorrido del camión, especificando qué clientes visitados a pie/bici están asociados a cada una de las paradas que realiza. Considerar que:

1. Que un cliente se encuentre a una distancia menor a $dist_max$ de una parada, no significa que será atendido por un repartidor a pie/bici. Podría ser una nueva parada del camión.
2. Por cuestiones de mantenimiento de los productos refrigerados, no puede haber más de una entrega de productos refrigerados a pie/bici por un mismo repartidor. Es decir, **no se puede enviar más de un producto refrigerado desde un mismo lugar de partida.**

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Investigación Operativa 1C 2025

Proyecto de Programación Lineal Entera

3. Queremos que el recorrido del camión empiece y termine en el deposito (el nodo/cliente 1), y queremos que la solución nos de el orden del recorrido del camión. Además entendemos que el camión debe salir y volver a entrar del deposito (debe haber un recorrido con el camión).

También queremos ver cómo afecta a los costos imponer las siguientes restricciones:

4. Queremos asegurar que cada repartidor a pie/bici contratado realice al menos 4 entregas.
5. Que haya determinados clientes que deban ser visitados por el camión. *exclusivos*

Modelo

0.1. Variables

- $VC_{ij} \in \{1, 0\}$. Indica si el camión viaja al cliente j desde el cliente i .
- $VB_{ij} \in \{1, 0\}$. Indica si se viaja en bicicleta al cliente j desde el cliente i .
- $\delta_i \in \{0, 1\}$. Representa si se hace algún envío en bicicleta desde i .
- $u_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, n]$. Variable auxiliar que representa el orden de visita del cliente i en la ruta del camión. Se usa para evitar ciclos disjuntos en el recorrido.

0.2. Función objetivo:

Minimizar: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n VC_{ij} * c_{ij} + VB_{ij} * \text{costo_repartidor}$

0.3. Sujeto a:

1. $\sum_{i=1}^n VC_{ik} = \sum_{j=1}^n VC_{kj}, \forall k \in [1, n]$. Nos asegura la conservación de flujo del camión (sale de un cliente la misma cantidad de veces que entra). Esto implica que el recorrido del camión es un ciclo.
2. $\sum_{j=1}^n VC_{kj} \leq 1, \forall k \in [1, n]$. Nos dice que el camión puede pasar como máximo 1 vez por cliente.
3. $\sum_{j=1}^n VB_{kj} \leq n \sum_{i=1}^n VC_{ik}, \forall k \in [1, n]$. Nos dice que solo podemos hacer viajes en bicicleta desde un cliente, si a ese cliente llegamos en camión.
4. $d_{ij} \leq \text{dist_max} + d_{ij}(1 - VB_{ij})$. Esto nos dice que si la distancia de i a j es mayor que la distancia máxima, no se puede ir en bici de i a j .

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Investigación Operativa 1C 2025
Proyecto de Programación Lineal Entera

5. $\sum_{i=1}^n VC_{ij} + VB_{ij} = 1, \forall j \in [1, n]$. Esto nos dice que a todos los clientes los visitamos una vez y de una sola manera.
6. $\sum_{j \in \text{refrigerados}} VB_{ij} \leq 1, \forall i \in [1, n]$. Esto nos dice que desde cada lugar de partida solo se puede entregar a lo sumo 1 producto refrigerado en bicicleta (cada repartidor entrega como máximo 1 producto refrigerado).
7. MTZ (evitar los ciclos disjuntos en el recorrido del camión):
- a) $u_i - u_j + (n - 1) \cdot VC_{ij} \leq n - 2 \quad \forall i \neq j, i, j \in [2, n]$. Esta restricción evita que haya ciclos disjuntos en el recorrido del camión. Se utiliza la formulación MTZ (Miller-Tucker-Zemlin), que ordena las visitas entre clientes para asegurar un solo tour.
- b) $u_1 = 0,$
 $1 * \sum_{j=1}^n VC_{ij} \leq u_i \leq (n - 1) * \sum_{j=1}^n VC_{ij}, \forall i \in [2, n]$
Esto nos dice que si se viaja en camión hasta un cliente i , u_i vale entre 1 y $n-1$ (adaptación restricción MTZ).
- c) Por como es nuestro problema no todos los vecinos son necesariamente visitados por el camión, pero queremos que el vecino 1 (depósito) siempre empiece el recorrido del camión, entonces siempre debe ser visitado. Por eso pedimos:
 $\sum_{i=1}^n VC_{i0} = 1$

También modelamos las restricciones extras que queremos estudiar:

8. $\sum_{i=1}^n VC_{ij} = 1, \forall j \in \text{exclusivos}$. Algunos clientes seleccionados son visitados por el camión obligatoriamente.
9. Necesitamos que si sale una bici desde un cliente, haga 4 viajes o más, o ninguno (que no salga la bici desde ese cliente).
Entonces lo escribimos de la siguiente manera:
- a) $\sum_{j=1}^n VB_{ij} \leq n * \delta_i, \forall i \in [1, n]$
b) $\sum_{j=1}^n VB_{ij} \geq 4 * \delta_i, \forall i \in [1, n]$

Donde δ_i representa si se hace algún envío en bicicleta desde i . Entonces decimos que se deben repartir 4 o más productos en bicicleta desde i , o ninguno.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Investigación Operativa 1C 2025

Proyecto de Programación Lineal Entera

Comparación de modelos

Veamos qué sucede a la hora de comparar la metodología actual que calcula el costo de visitar a todos los clientes con el camión sin utilizar repartidores a pie/bicicleta, con la nueva metodología que implementa la solución propuesta donde el camión hace paradas y algunos clientes son atendidos por repartidores a pie/bicicleta (siempre teniendo en cuenta las restricciones adicionales).

Primero trabajaremos con una instancia que tiene 8 clientes, el costo de entrega a pie es 1 dólar, y la distancia máxima permitida para repartir a pie es 90 metros. Hay 2 clientes que requieren entrega refrigerada (3 y 7) y tres que deben ser atendidos exclusivamente por camión (1, 4 y 8). La matriz incluye distancias y costos entre todos los pares de clientes, con costos de camión generalmente 1000 dólares y algunas excepciones más baratas.

Ejecutamos nuestros modelos con esta instancia en CPLEX y obtenemos que:
En el modelo antiguo, el camión visita a todos los clientes en el siguiente orden por índice:

Depósito \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow Depósito

Y tiene un costo total de **6044 dólares**

Esta misma instancia con el nuevo modelo, usando empleados a pie/bicis y estableciendo las restricciones sugeridas, tenemos que el recorrido y el costo total es:

Depósito \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow Depósito

Y además del depósito sale un repartidor a pie/bicicleta hacia los clientes 1, 2, 4 y 5.

Al ser el recorrido del camión más corto y el costo de los repartidores a pie/bicicleta más barato, nos deja un costo total de **4004 dólares**.

También podemos notar que si sacamos la restricción extra de que el repartidor a pie/bicicleta haga a lo sumo 4 repartos o no se haga ninguno, obtenemos que el recorrido del camión es :

Depósito \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow Depósito

Y el repartidor a pie/bicicleta hace el recorrido desde el depósito a los clientes 1, 2, 4 y 5, y luego desde 7 a 6. Esto hace que se reduzcan los costos a **3005 dólares** (casi la mitad que con el modelo antiguo).

Además, si sacamos la restricción de los clientes que deben ser visitados exclusivamente por el camión y permitimos que estos sean visitados por un repartidor a pie/bicicleta, logramos que los costos se reduzcan aun más a **2006 dólares**. Haciendo que el repartidor a pie/bicicleta recorra desde el depósito los clientes 1, 2, 3, 4 y 5; y desde el cliente 6 al 7. De esta manera el camión solo va del depósito al cliente 6 y vuelve.

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Investigación Operativa 1C 2025

Proyecto de Programación Lineal Entera

En resumen :

Tabla 1: Comparación de modelos de distribución (costos en USD)

Modelo	Paradas camión	Entregas a pie	Costo
Actual	Dep, 3, 1, 2, 6, 7, 5, 4, Dep	Ninguna	6044
Nuevo (restr.)	Dep, 3, 7, 6, Dep	1, 2, 4, 5	4004
Sin mín. entregas	Dep, 3, 7, Dep	1-2-4-5 (Dep), 6 (7)	3005
Sin exclusivos	Dep, 6, Dep	1-2-3-4-5 (Dep), 7 (6)	2006

Resultados de tiempo:

El modelo nuevo con repartidores demostró ser significativamente más rápido, resolviendo la instancia en **0.02 segundos** (1.90 ticks de CPLEX) frente a los **0.11 segundos** (5.30 ticks) del modelo actual ¹. Esta diferencia se debe a que el nuevo modelo encontró la solución óptima directamente en el nodo raíz, sin necesidad de ramificación, mientras que el modelo actual requirió explorar nodos adicionales y aplicar cortes. La eficiencia del modelo nuevo confirma que la estrategia de combinar rutas de camión con repartidores no solo reduce costos (4004 vs. 6044), sino que también optimiza el tiempo de cómputo.

Conclusión

Los resultados de este trabajo demuestran que la distribución combinada, que integra camiones con repartidores a pie y en bicicleta, presenta claras ventajas sobre el método tradicional donde solo se distribuyen productos a camión. Al analizar ambos enfoques, observamos que el modelo híbrido puede reducir los costos de reparto entre un 34 % y un 66 %, dependiendo del grado de flexibilidad en las normas operativas. Además, se reduce el tiempo de cómputo para la resolución del problema, que se traduce en un menor costo para la compañía.

¹ Los tiempos pueden variar entre ejecuciones de CPLEX debido a factores como el estado del sistema o aleatoriedad en los algoritmos, pero la diferencia relativa entre modelos se mantiene aproximadamente constante.