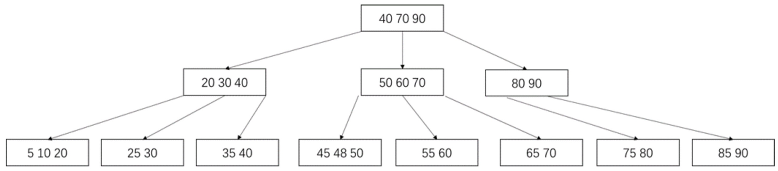
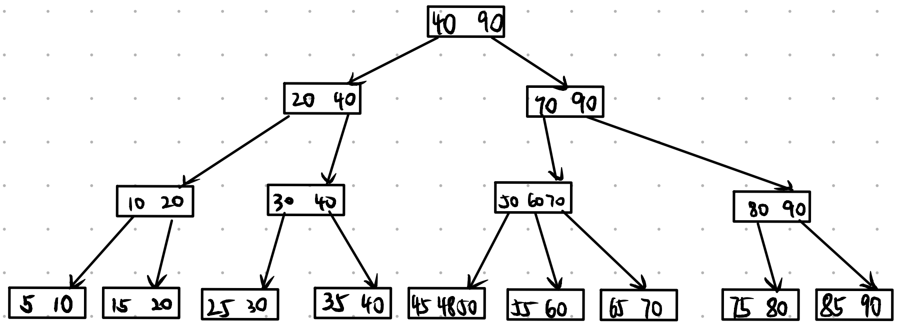
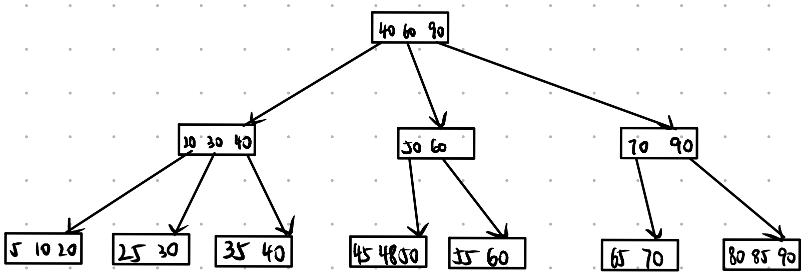
1. 如图所示的3阶B+树
(1) 请画出插入15后的B+树。
(2) 请画出在原图中删去75后的B+树。



(1)



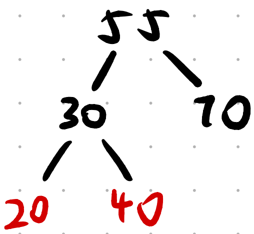
(2)



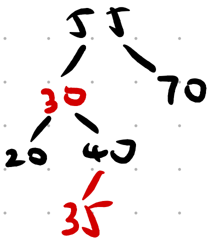
2. 假设在一个红黑树上，将一个节点插入红黑树，又马上将其删除。最后得到的红黑树与初始给定的红黑树是否一样?请具体说明。

不一定

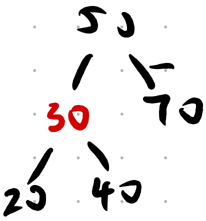
初始:



插入35:



删除35:



这种情况下最后与初始红黑树不同

3. 旋转操作是红黑树中至关重要的操作。试证明:任意一个有n个节点的二叉搜索树，其必定可以通过 O(n)次旋转，来转化成另一个由同样元素组成的、 任意结构的二叉搜索树。
(提示:先转化成一个链)

考虑任一棵BST：T

将T的根与根的所有连续右子列看作一条右链

而只要将右链上的任一结点与其左子结点进行右旋便可使右链中净增加一个结点、

对右链中所有结点不停作此操作直到T中所有结点成为右链

其中最多旋转次数为 $n-1$ 次

考虑 T_1 经过变换 $t_1, t_2, \cdots, t_x$ 后成为右链 C_1，$(x \le n-1)$

与 T_1 有相同元素的 T_2 经过变换 $r_1, r_2, \cdots, r_y$ 后成为右链 C_2 $(y \le n-1)$

由于元素相同，由BST性质可知 $C_1 = C_2$

对 T_1 进行变换 $t_1, \cdots, t_x, r_y', r_{y-1}', \cdots, r_1'$ 即得到 T_2

旋转次数 $x+y \le 2n-2 = O(n)$

4. 假设t阶B树中共有n个关键字。

(1) 搜索B树(每个节点内用线性查找)的时间复杂度是多少?

(2) 证明:无论如何选取t，在每个节点内用二分查找的方式搜索B树所需时间都为$O(\log_2 n)$

(1) 设B树中结点个数为 N，空指针个数为 l

$$\begin{cases} N\text{个结点} \Rightarrow \text{指针个数} = l+N-1 \\ n\text{个key} \Rightarrow \text{指针个数} = n_1+1+n_2+1+\cdots+n_N+1 = n+N \end{cases}$$

$\Rightarrow l=n+1$

设B树高 h (外部空结点在h层)

0层至少1个结点，1层至少2个结点，2层至少 $2\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 个结点

… h层至少 $2\lceil \frac{t}{2} \rceil^{h-1}$ 个结点

$\Rightarrow n+1 = l \geq 2\lceil \frac{t}{2} \rceil^{h-1} \Rightarrow h \leq 1+\log_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}(\frac{n+1}{2})$

每个结点最多 $t-1$ 个key

从而查找次数 $= O((t-1)h) = O(th) = O(t+t\log_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}(\frac{n+1}{2})) = O(\frac{t\log n}{\log t})$

(2) 若对每个结点使用二分查找:

查找次数 $= O(h\log t)$

$= O(\log t \cdot \frac{\log\frac{n+1}{2}}{\log\lceil \frac{t}{2} \rceil})$

$= O(\log n)$