林雨弦 2000016301 《博弈论》第 1 次作业

1. 解：GameA:

参与者 1 的最大最小策略：

因为当参与者 1 选择α时其安全水平为 1,

当参与者 1 选择β时其安全水平为 2,

当参与者 1 选择γ时其安全水平为 4,

故参与者 1 的最大最小策略为γ.

参与者 2 的最小最大策略：

分析方法如下：

假设参与者 2 先行动，参与者 1 后行动。针对参与者 2 的每一种行动，参与者 1 会选择相应的行动以最大化自身收益，找出这些收益。预期到参与者 1 的上述反应，参与者 2 会选择能使参与者 1 的收益最小化的行动，这就是参与者（针对参与者 1）的最小最大策略，即策略 b。

重复剔除劣策略：

对 b、d:-4=-4,-5>8,-1>-5,故剔除 d.

对α、γ:876,4>1,8>4,故剔除α.

对 a、c:-8=-8,-2>-3,故剔除 c.

下考虑参与者 1 的混合策略（以概率 p 采β，1-p 采γ）

比较混合策略与β，若β为劣策略，则有：

$2 \leqslant 2p+8(1-p) \Rightarrow p \leqslant 1$

$5 \leqslant 5p+4(1-p) \Rightarrow p \geqslant 1$，故 p=1，舍去。

比较混合策略与γ，若γ为劣策略，则有：

$8 \leqslant 2p+8(1-p) \Rightarrow p \leqslant 0$

Formatted: Font color: Red

Deleted: 因为当参与者 2 选择 a 时其安全小平为－8,
当参与者 2 选择 b 时其安全水平为－5,
当参与者工选择 c 时其安全水平为－8,
当参与者 2 选择 d 时其安全水平为－8,
故参与者 2 的最大最小策略为 b.

4⩽5p+4(1-p) => p⩾0，故 p=0，舍去。

故β、γ均非参与者 1 的劣策略.

下考虑参与者 2 的混合策暗（以概率 p 采 a）

比较混合策略与 a，若 a 为劣策略，则有:

-8⩽-8p-4(1-p) => p⩽1

-2⩽-2p-5(1-p) => p⩾1，故 p=1，舍去。

比较混合策略与 b，若 b 为劣策略，则有:

-4⩽-8p-4(1-p) => p⩽0

-5⩽-2p-5(1-p) => p⩾0，故 p=0，舍去。

故被剔除的策略为：d、α、c.

Game B:

参与者 1 的最大最小策略:

因为当参与者 1 选择α时其安全水平为-3,

当参与者 1 选择β时其安全小平为 0,

当参与者，选择γ时其安全水平为 0,

当参与者，选择δ时其安全水平为 1.

故参与者 1 的最大最小策略为δ.

参与者 2 的最小最大策路:

故参与者 2 的最小最大策略为 b、d.分析方法类似 Game A

重复剔除劣策略:

对 a、b:-6<-4,-5<-3,-1<0,-2<3,故剔除 a.

Deleted: 因为当参与者 2 选择 a 时其安全水平为-6,
当参与者 2 选择 b 时其安全小平为-4,
当参与者 2 选择 c 时其安全水平为-5,
当参与者 2 选择 d 时其安全水平为-4,

对α、β:0>-3,5>2,4>3,故剔除α.

对 c、d:－2<-1,-3<0,-5<-4,故剔除 c.

对δ、γ:4>3,1>0,故剔除γ.

与 GameA 同理，参与者 1、2 均不存在混合策略，使β、δ、b、d 为劣策略。

故剔除的策略为：a、α、c、γ.

Game C:

参与者 1 的最大最小策略：

当参与者 1 选择α时其安全水平为 3，

当参与者 1 选择β时其安全水平为 3，

当参与者 1 选择γ时其安全水平为 5，

当参与者 1 选择δ时其安全水平为 3，

故参与者 1 的最大最小策略为γ.

参与者 2 的最小最大策略：

分析方法类似 Game A 故参与者 2 的最小最大策略为 c.

重复剔除劣策略：

以下分析过程是正确的，但不必如此复杂。若无法剔除，指出即可；若可以剔除，才需说明为何能剔除。

①两两分别比较各参与者各策略，知 Game C 中不存在劣的纯策略。

②考虑各参与者由 2 种纯策略组成的混合策略，亦无法剔除劣策略。

③考虑各参与者由 3 种纯策略组成的混合策略，

对参与者 1：

Deleted: 当参与者 2 选择 a 时其实全水平为－6,
当参与者 2 选择 b 时其安全小平为－6,
当参与者 2 选择 c 时其安全水平为－5,
当参与者 2 选择 d 时其安全水平为－6.

Deleted:

林雨弦 2000016301 《博弈论》第 1 次作业

知只有α、β、δ组成的混合策略有可能剔除策略γ。

设参与者 1 采取α的概率为 p1,采取β的概率为 p2,

若γ为劣策略，则有:

6p1+5p2+3(1-p1-p2)⩾5 => 3p1+2p2⩾2

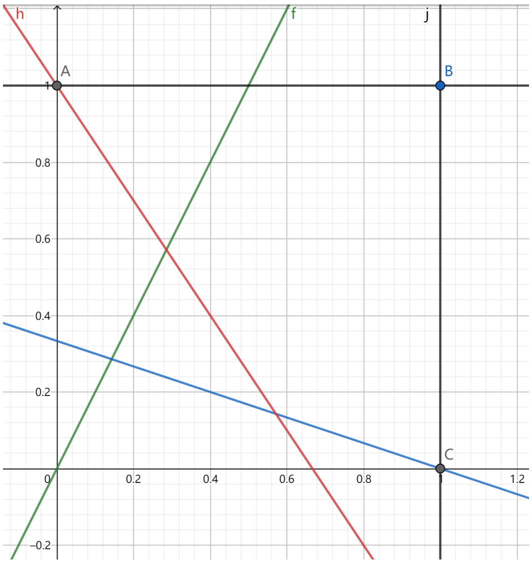
5p1+3p2+6(1-p1-p2)⩾5 => p1+3p2⩽1

5p1＋5p2+5(1-p1-p2)⩾5 => 恒成立

3p1+6p2+5(1-p1-p2)⩾5 => p2⩾2p1

故$\begin{cases} p_2 \geq 2p_1 \\ p_2 \leq \frac{1}{3} - \frac{p_1}{3} \\ p_2 \geq 1 - \frac{3p_1}{2} \end{cases}$

作图:



可知不等式组无解。

故无法剔除。

对参与者 2：

知只有 a.b.d 组成的混合策略有可能剔除 c 策略。

而上述情况与参与者 1 的情况相同（数值一样），故同理无法剔除。

综上，3 种纯策略组成的混合策略无法剔除劣策略.

④考虑各参与者由 4 种纯策略混合成的混合策略.

对参与者 1：

知只有γ策路可能被排除.

设采取α的概率为 p1,采取β的概率为 p2,采取γ的概率为 p3,若 r 为劣策略，则有：

$6p1+5p2+5p3+3(1-p1-p2-p3)\geqslant5$

$5p1+3p2+5p3+6(1-p1-p2-p3)\geqslant5$

$5p1+5p2+5p3+5(1-p1-p2-p3)\geqslant5$

$3p1+6p2+5p3+5(1-p1-p2-p3)\geqslant5$

解得 $p1\geqslant4p2$ 且 $p2\geqslant2p1$，矛盾，故无法排除。

对参与者 2：

同理无法排除。

故没有策略被剔除。

2. 解：

（1）Game A：

①若甲选择 H 策略，因为 2>1，故乙会选择 L 策略，而给定乙会选择 L 策略，因为 4>1，故甲仍会选择 H 策略；故 H 策略是可理性化的。

②若甲选择 T 策略，因为 1<3，故乙会选择 R 策略，而给定乙会选择 R 策略，因为

0<3，故甲仍会选择 T 策略；故 T 策略是可理性化的。

③若乙选择 L 策略，因为 4>1，故甲会选择 H 策略，而给定甲会选择 H 策略，因为 2>1，故乙仍会选择 L 策略；故 L 策略是可理性化的。

④若乙选择 R 策略，因为 0<3，故甲会选择 T 策略，而给定甲会选择 R 策略，因为 1<3，故乙仍会选择 R 策略，故 R 策略是可理性化的。

综上，可理性化的策略是 H、T、L、R；没有不可理性化的策略。

分析正确，但不必如此复杂。在双人博弈中，凡是不能被重复剔除严格劣策略过程所剔除的策略都是可以理性化的。下同。

Game B：

①若甲选择 H 策略，因为 3=3，故乙会选择 L 或 R 策略，而给定乙会选择 L 或 R 策略，因为 1>0，2>0，故甲仍会选择 H 策略；故 H 策略是可理性化的。

②若甲选择 T 策略，因为 4>2，故乙会选择 L 策略，而给定乙会选择 L 策略，因为 1>0，故甲会选择 H 策略；故 T 策略是不可理性化的。

③若乙选择 L 策略，因为 1>0，故甲会选择 H 策略，而给定甲会选择 H 策略，因为 3=3，故乙会选择 L 或 R 策略；故 L 策略是可理性化的。

④若乙选择 R 策略，因为 2>0，故甲会选择 H 策略，而给定甲会选择 H 策略，因为 3=3，故乙会选择 L 或 R 策略；故 R 策略是可理性化的。

综上，可理性化的策略是 H、L、R，不可理性化的策略是 T。

Game C：

①若甲选择α策略，因为 1<2<6，故乙会选择 b 策略，而给定乙会选择 b 策略，因为

0<1<3，故甲会选择γ策略，而若给定甲会选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略；故α策略是不可理性化的。

②若甲选择β策略，因为 1=1<2，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略，而若给定甲会选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略；故β策略是不可理性化的。

③若甲选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略；故γ策略是可理性化的。

④若乙选择 a 策略，因为 1<2<3，故甲会选择β策略，而若给定甲会选择β策略，因为 1=1<2，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略，而若给定甲会选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略；故 a 策略是不可理性化的。

⑤若乙选择 b 策略，因为 0<1<3，故甲会选择γ策略，而若给定甲会选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略，而若给定乙会选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略；故 b 策略是不可理性化的。

⑥若乙选择 c 策略，因为 0<1<2，故甲会选择γ策略，而若给定甲会选择γ策略，因为 0=0<1，故乙会选择 c 策略；故 c 策略是可理性化的。

综上，可理性化的策略是γ、c，不可理性化的策略是α、β、a、b。

（2）Game A:

对甲而言，因为 4>1，0<3，且混合策略对应的收益一定介于二者之间，无法满足全部大于某一纯策略在两种情况下的收益，故不存在可剔除的严格劣策略。

对乙而言，同理不存在可剔除的严格劣策略。

故不存在重复剔除的占优均衡。

Game B：

对 H、T 而言，因为 1>0，2>0，故在第一步可剔除 T。

此时因为剩余两个均衡，故不存在重复剔除的占优均衡。

Game C：

对 a、c 而言，因为 0<1，1<2，1<2，故在第一步可剔除 a。

对α、γ而言，因为 1<3，0<2，故在第二步可剔除α。

对β、γ而言，因为 0<3，1<2，故在第二步可剔除β。

对 b、c 而言，因为 0<1，1<2，故可在第二步剔除 b。

此时存在重复剔除的占优均衡（γ，c），需满足二阶理性共识。

第一步可以同时剔除行参与者的策略*α*和列参与者的策略 a，第二步可以同时剔除*β*和 b；

故只需满足一阶理性共识。

Formatted: Font: Italic

Formatted: Font: Italic

（3）Game A：

采用划线法：

	L	R
H	4，2	0，1
T	1，1	3，3

故纯策略纳什均衡为（H，L）和（T，R）。

Game B：

由（2），因为重复剔除严格劣策略的过程不会剔除纳什均衡，故纯策略纳什均衡为（H，L）和（H，R）。

Game C：

因为重复剔除严格劣策略的过程不会剔除纳什均衡，故由（2）知纯策略纳什均衡为（γ，c）。

3. 解：

（1）纯策略纳什均衡：

采用划线法：

<table>
<tr><td colspan="4">丙：Z1</td><td colspan="4">丙：Z2</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">乙</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">乙</td></tr>
<tr><td>Y1</td><td>Y2</td><td>Y1</td><td>Y2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">甲</td><td>X1</td><td>0，0，0</td><td>$\underline{6}$，$\underline{5}$，$\underline{4}$</td><td rowspan="2">甲</td><td>X1</td><td>$\underline{4}$，$\underline{6}$，$\underline{5}$</td><td>$\underline{0}$，0，0</td></tr>
<tr><td>X2</td><td>$\underline{5}$，$\underline{4}$，$\underline{6}$</td><td>0，0，$\underline{0}$</td><td>X2</td><td>0，$\underline{0}$，0</td><td>$\underline{0}$，$\underline{0}$，$\underline{0}$</td></tr>
</table>

故纯策略纳什均衡为（X1，Y2，Z1），（X2，Y1，Z1），（X1，Y1，Z2）和（X2，Y2，Z2）。

混合策略纳什均衡：

设甲采取 X1 的概率为 p，乙采取 Y1 的概率为 m，丙采取 Z1 的概率为 n。

①当甲采取混合策略，乙采取混合策略，丙采取纯策略 Z1 时：

$E(X1)=6(1-m)$, $E(X2)=5m$，故 $m=6/11$.

E(Y1)=4(1-p), E(Y2)=5p, 故 p=4/9.

此时 E(Z1)=6(1-p)m+4p(1-m)=260/99, E(Z2)=5pm=120/99，故满足 E(Z1)>E(Z2)。

故该混合策略纳什均衡为（(4/9,5/9)，(6/11,5/11)，(1,0)）。

②当甲采取混合策略，乙采取混合策略，丙采取纯策略 Z2 时：

由博弈矩阵知，除左上格外其他各格参与者收益均为 0，故此时不存在混合策略纳什均衡。

③当甲采取混合策略，乙采取纯策略 Y1，丙采取混合策略时：

E(X1)=4(1-n), E(X2)=5n, 故 n=4/9.

E(Z1)=6(1-p), E(Z2)=5p, 故 p=6/11.

此时 E(Y1)=4(1-p)n+6p(1-n)=260/99, E(Y2)=5pn=120/99，故满足 E(Y1)>E(Y2)。

故该混合策略纳什均衡为（(6/11,5/11)，(1,0)，(4/9,5/9)）。

④当甲采取混合策略，乙采取纯策略 Y2，丙采取混合策略时：

E(X1)=6n, E(X2)=0, 舍去.

⑤当甲采取纯策略 X1，乙采取混合策略，丙采取混合策略时：

E(Y1)=6(1-n), E(Y2)=5n, 故 n=6/11.

E(Z1)=4(1-m), E(Z2)=5m, 故 m=4/9.

此时 E(X1)=6(1-m)n+4m(1-n)=260/99, E(X2)=5mn=120/99，故满足 E(X1)>E(X2)。

故该混合策略纳什均衡为（(1,0)，(4/9,5/9)，(6/11,5/11)）。

⑥当甲采取纯策略 X2，乙采取混合策略，丙采取混合策略时：

E(Y1)=4n, E(Y2)=0, 舍去.

⑦当甲、乙、丙均采取混合策略时：

E(X1)=6(1-m)n+4m(1-n), E(X2)=5mn，故 15mn-4m-6n=0.

E(Y1)=4(1-p)n+6p(1-n), E(Y2)=5pn，故 15pn-4n-6p=0.

E(Z1)=6(1-p)m+4p(1-m), E(Z2)=5pm，故 15pm-4p-6m=0.

解得 p=m=n=2/3.

故该混合策略纳什均衡为（(2/3,1/3)，(2/3,1/3)，(2/3,1/3)）。

综上，纳什均衡为：

纯策略纳什均衡：（X1，Y2，Z1），（X2，Y1，Z1），（X1，Y1，Z2），（X2，Y2，Z2）；

混合策略纳什均衡：（(4/9,5/9)，(6/11,5/11)，(1,0)），（(6/11,5/11)，(1,0)，(4/9,5/9)），（(1,0)，(4/9,5/9)，(6/11,5/11)），（(2/3,1/3)，(2/3,1/3)，(2/3,1/3)）。

（2）强均衡：

考虑纯策略纳什均衡：

由于（X2，Y2，Z2）中各参与者收益均为 0，而其余 3 个纯策略纳什均衡中参与者收益均为正数，故（X2，Y2，Z2）不是强均衡。

由于(X2,Y1,Z1)中甲、乙的收益均可以通过转移至(X1,Y2,Z1)提高，故(X2,Y1,Z1)不是强均衡。

由于(X1,Y1,Z2)中甲、丙的收益均可以通过转移至(X2,Y1,Z2)提高，故(X1,Y1,Z2)不是强均衡。

由于(X1,Y2,Z1)中甲、丙的收益均可以通过转移至(X1,Y1,Z2)提高，故(X1,Y2,Z1)不是强均衡。

故不存在强的纯策略均衡。

考虑混合策略纳什均衡：

由于（(4/9,5/9)，(6/11,5/11)，(1,0)）中甲、乙的收益小于(X1,Y2,Z1)，故（(4/9,5/9)，(6/11,5/11)，(1,0)）不是强均衡。

由于（(6/11,5/11)，(1,0)，(4/9,5/9)）中甲、乙的收益小于(X1,Y2,Z1)，故（(6/11,5/11)，(1,0)，(4/9,5/9)）不是强均衡。

由于（(1,0)，(4/9,5/9)，(6/11,5/11)）中甲、乙的收益小于(X1,Y2,Z1)，故（(1,0)，(4/9,5/9)，(6/11,5/11)）不是强均衡。

由于（(2/3,1/3)，(2/3,1/3)，(2/3,1/3)）中甲、乙的收益小于(X1,Y2,Z1)，故（(2/3,1/3)，(2/3,1/3)，(2/3,1/3)）不是强均衡。

抗联盟纳什均衡：

同上述强纳什均衡存在性的讨论可知，（X1，Y2，Z1），（X2，Y1，Z1），（X1，Y1，Z2）三个纳什均衡会构成一个循环，参与者不断重新结盟在这个循环中偏离自己原来所处的均衡，故此博弈中任一纳什均衡均不存在可维持的联盟，而是会出现结盟者不断另行结盟偏离当前纳什均衡的情况，故不存在抗联盟的纳什均衡。

4．解：（此题考虑纯策略即可）

（1）每个司机有 2 种纯策略，有无数种混合策略。

①纯策略纳什均衡：

由于南北两路车程时间关于车辆数的表达式相同，

故由对称性可知纯策略纳什均衡为：30 辆车走北路，30 辆车走南路。

②混合策略纳什均衡：

以 T 表示通勤时间，依题意得，每辆车是完全相同的，故考虑某一辆车，设其走北路的概率为 p，

则 E(Ti(北))=52+1.1$\sum_{i=1}^{60} C_{60}^{i} p^{i}(1-p)^{60-i} i$，

E(Ti(南))=52+1.1(60-$\sum_{i=1}^{60} C_{60}^{i} p^{i}(1-p)^{60-i} i$)，

因为混合策略纳什均衡要求 E(Ti(北))=E(Ti(南))，故$\sum_{i=1}^{60} C_{60}^{i} p^{i}(1-p)^{60-i} i$=30，故 p=1/2。

故混合策略纳什均衡为每个司机均以 1/2 的概率走北路，1/2 的概率走南路。

在纯策略纳什均衡与混合策略纳什均衡中，每个司机的通勤时间均为 T=52+1.1*30=85。

（2）新建单向路后，每个司机有 3 种纯策略，记为北、中、南，

将 5 段路从上至下、从左至右分别记为 1、2、3、4、5。

①纯策略纳什均衡：

设 a 辆车走北路，b 辆车走中路，则有(60-a-b)辆车走南路。

T(北)=[1+(a+b)]+(51+0.1a)=1.1a+b+52，

T(中)=[1+(a+b)]+[10+0.1b]+[1+b+(60-a-b)]=1.1b+72，

T(南)=[51+0.1(60-a-b)]+[1+(60-a-b)+b]=-1.1a-0.1b+118，

达到纯策略纳什均衡时有 T(北)=T(中)=T(南)，解得：a=b=20。

故纯策略纳什均衡为 20 辆车走北路，20 辆车走中路，20 辆车走南路。

②混合策略纳什均衡：

由纯策略纳什均衡可知，混合策略纳什均衡为每辆车均以 1/3 的概率走北路，以 1/3 的概率走中路，以 1/3 的概率走南路。

在纯策略与混合策略纳什均衡中，每个司机的通勤时间均为

T=1+20+20+51+0.1*20=94。

5. 解:

（1）纳什均衡:

纯策略纳什均衡:

设 3 个候选人为甲、乙、丙，从小至大分别选择 a, b, c 的政治立场。

依题意得，3 个候选人选择政治立场的博弈属于连续策略博弈。

①当 a=b=c 时三人均获 1/3 票数，三人均有动机改变策略，此时不存在纯策略纳什均衡;

②当 a、b、c 中有二者相等时，不妨设 a=b，则有:

U(甲)=U(乙)=(a+c)/2<1/2，U(丙)=1-(a+c)/2>1/2，甲、乙有动机改变策略至(a+c)/2，以此类推，此时不存在纯策略纳什均衡;

③当 a、b、c 互不相等时，则有:

U(甲)=a+(b-a)/2，即 U(甲)=(a+b)/2,

U(乙)=(c-a)/2，即 U(乙)=(c-a)/2,

U(丙)=(c-b)/2+1-c，即 U(丙)=1-(b+c)/2

若存在纯策略纳什均衡，至少需要$\frac{\partial U(\text{甲})}{\partial a}$=0.

又因为$\frac{\partial U(\text{甲})}{\partial a}=\frac{1}{2}+\frac{b}{2}=0\Rightarrow b=-1$，舍去。

故不存在纯策略纳什均衡。

或：不妨考察甲，给定乙、丙均选择 b、c 为政治立场，则甲将其立场变更为(a+b)/2 能获取更多的票数；依此类推，无论 a、b、c 取何值，甲、乙、丙总有动机改变政治立场以获

得更多票数，故不存在纯策略纳什均衡。

（2）设 3 个候选人为甲、乙、丙；依题意得，每个候选人的策略均为参选、不参选；偏好由高到低均为当选、并列第一、不参选、输掉选举，将其分别赋值为 2、1、0、-1。

作出三变量矩阵：

丙：参选				丙：不参选			
		乙				乙	
		参选	不参选			参选	不参选
甲	参选	？，？，？	1，0，1	甲	参选	1，1，0	2，0，0
	不参选	0，1，1	0，0，2		不参选	0，2，0	0，0，0

当 0 人参选时：3 人均不当选；

当 1 人参选时：参选者当选；

当 2 人参选时：由于参选者均选择 1/2 的政治立场时二人均无动机偏离该策略，故二人均选择 1/2 的政治立场是该博弈的一个纯策略纳什均衡；因此参选者均并列。

考虑纯策略条件下不符合纳什均衡的情况：

当 0 人参选时：

因为候选人对当选的偏好高于不参选的偏好，故 0 人参选的情况不符合纳什均衡，因为此时对一个候选人而言，其有动机将其策略改变为参选；

当 1 人参选时：

因为候选人对并列第一的偏好高于对不参选的偏好，且在候选人具有理性共识的基础上，2 人参选时一定会出现并列第一的情况，故 1 人参选时，对一个不参选者而言，其有动机将其策略改变为参选，故 1 人参选的情况亦不符合纳什均衡；

当 2 人参选时：

基于理性共识假设，参选者的策略均为 1/2，否则参与者均会有动机偏离。给定上述情况，未参选者有动机将其不参选策略变更为参选并选择其政治立场为，如 1/4，即可当选，故未参选者有动机变更其策略，故 2 人参选且并列第一的情况不符合纳什均衡；

当 3 人参选时：

因为候选人对不参选的偏好高于输掉选举的偏好，故纳什均衡中一定不存在候选人输掉选举的情况，否则该候选人有动机改变其策略为不参选，故若在 3 人参选时存在纳什均衡，只可能存在于 3 人并列第一的情况下；但是由于 3 人并列第一时任一参选者均有动机变更其策略使自己当选，故 3 人参选时亦不符合纳什均衡。

综上，不存在纯策略纳什均衡。

按我上课所述分情况讨论即可。