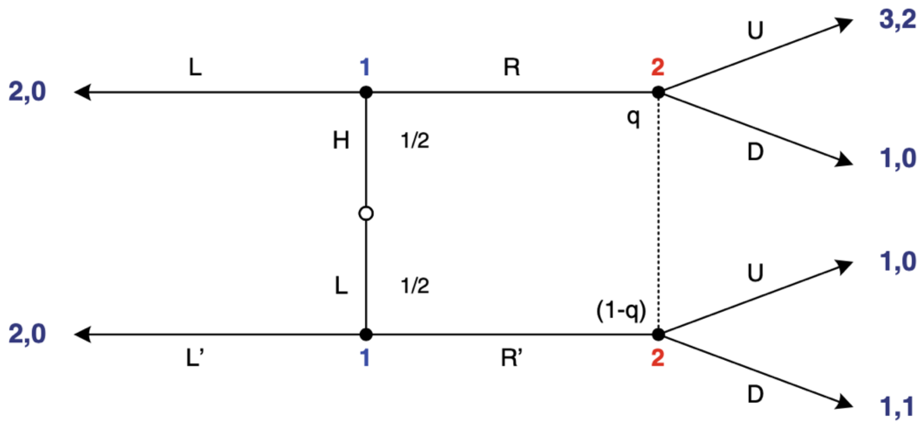
第四次作业

1.考虑下面的不完全信息博弈：自然首先决定参与者 1 的类型，以相等的概率选择 H/L。然后参与者 1 观察自己的类型，决定是选择左（L）还是右（R）。如果他选择左，游戏结束，玩家的收益变为（u1，u2）=（2，0）。相反，如果参与者 1 选择右侧，则参与者 2 被要求作出移动。



（1）分离精炼贝叶斯均衡

a.第一类分离均衡：RL′

第一步（使用 Bayes 法则确定参与者 2 的信念）：

在观察到参与者 1 选择右侧后，参与者 2 对处理参与者 1（其信息集的上节点）的信念是

$$q = p(H|R) = \frac{p(H) * p(R|H)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0} = 1$$

直观地说，这意味着参与者 2 在观察到参与者 1 选择了右侧后，将完全概率分配给源自 H 型的先手者的信号。

第二步（分析参与者 2）：

在观察到参与者 1 选择了右侧之后，并给出了上面指定的参与者 2 的信念，参与者 2 在信息集的上节点。在这一点上，他响应 U（E=2）获得更高的回报，而不是 D（E=0）。因此，参与者 2 以 U 响应。

第三步（分析参与者 1）：

当参与者 1 是 H 型时，他更喜欢选择 R，而不是偏离向 L，因为他预计参与者 2 将以 U 回应。事实上，参与者 1 选择 R（E=3）的回报大于偏离 L（E=2）。

当参与者 1 是 L 型时，他更喜欢选择 L′，而不是偏离向 R′，因为他也可以预期参与者 2 将以 U 回应。事实上，玩家 1 选择 L′（E=2）的回报大于他偏离 R′（E=1）的回报。

综上，（RL′，U）可以作为分离 PBE，其中信念 q=1。

b.第二类分离均衡：LR′

第一步（使用 Bayes 法则确定参与者 2 的信念）：

在观察到参与者 1 选择右侧后，参与者 2 应对参与者 1 的信念是

$$q=\frac{p(H)*p(R|H)}{p(R)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 0}=0$$

这意味着参与者 2 在观察到参与者 1 选择了右侧后，将完全概率分配给来自 L 型的信息。或者，在这个分离策略中，右侧的信息永远不会来自 H 型，即 q=0。

第二步（分析参与者 2）：

在观察到参与者 1 选择了右侧后，并考虑到参与者 2 的信念表明他确信自己处于信息集的 L 节点，他以 D（E=1）响应，而不是 U（E=0）（以处于 L 节点为条件）。

第三步（分析参与者 1）：

当参与者 1 是 H 型时，因为他预计玩家 2 会以 D 响应。他更愿意选择 L（E=2），而不是偏离向 R（E=1）。

然而，当参与者 1 是 L 型时，他更愿意偏离向 L'（E=2）而不是选择 R'（E=1）。因此，这种分离策略不能作为 PBE 持续下去，因为其中一个参与者（L 型）有偏离的动机。

（2）混同精炼贝叶斯均衡

a.第一类混同均衡：LL′

第一步（使用 Bayes 法则确定参与者 2 的信念）：

在观察到参与者 1 选择了向右后，参与者 2 的信念是

$$q=\frac{0.5*0}{0.5*0+0.5*0}=\frac{0}{0}$$

因此，不能使用贝叶斯法则更改信念，必须在整个概率范围内定义 q，即 $q\in[0,1]$.

第二步（分析参与者 2）：

让我们分析参与者 2 的最佳反应。只有在参与者 1 选择向右时才会调用参与者 2 的响应。在这种情况下，参与者 2 必须比较他响应 U 与响应 D 的预期效用，如下所示：

$$EU_2(U|R)=2\times q+0\times(1-q)=2q$$
$$EU_2(D|R)=0\times q+1\times(1-q)=1-q$$

第三步（分析参与者 1）：

① $q>\frac{1}{3}$，参与者 2 以 U 响应

当参与者 1 是 H 型时，他更喜欢偏离 R（E=3）而不是选择 L（E=2）。这已经足以得出结论，LL' 不能作为 PBE 持续下去。

② $q < \frac{1}{3}$，参与者 2 以 D 响应。

当参与者 1 是 H 型时，他更愿意选择 L（E=2），而不是偏向 R（E=1）。
当参与者 1 是 L 型时，他更愿意选择 L'（E=2），而不是偏向 R'（E=1）。

综上，当 0<$q < \frac{1}{3}$时，(LL'，D)可以作为混同 PBE。

b.第二类混同均衡：RR′
第一步（使用 Bayes 法则确定参与者 2 的信念）：
在观察到参与者 1 选择了向右之后，参与者 2 的信念是

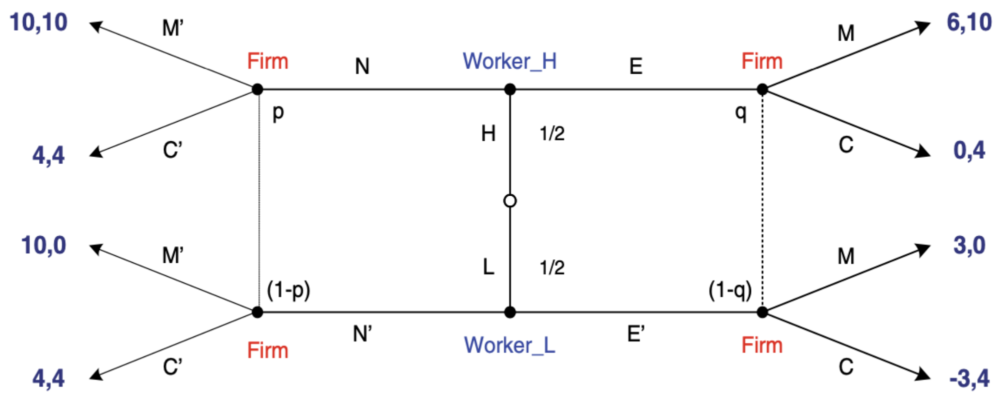
$$q = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

这表明，由于两种类型的参与者 1 都选择向右，那么观察到向右的事实并没有为参与者 2 提供关于参与者 1 类型的更精确信息。在这种情况下，我们正式说类型的先验概率（自然）与类型的后验概率（在应用贝叶斯法则之后）重合，或者更简洁地说，先验和后验重合。
第二步（分析参与者 2）：
参与者 2 必须比较他响应 U 与响应 D 的预期效用，如下所示

$$EU_2(U|R) = 2 \times \frac{1}{2} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$
$$EU_2(D|R) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

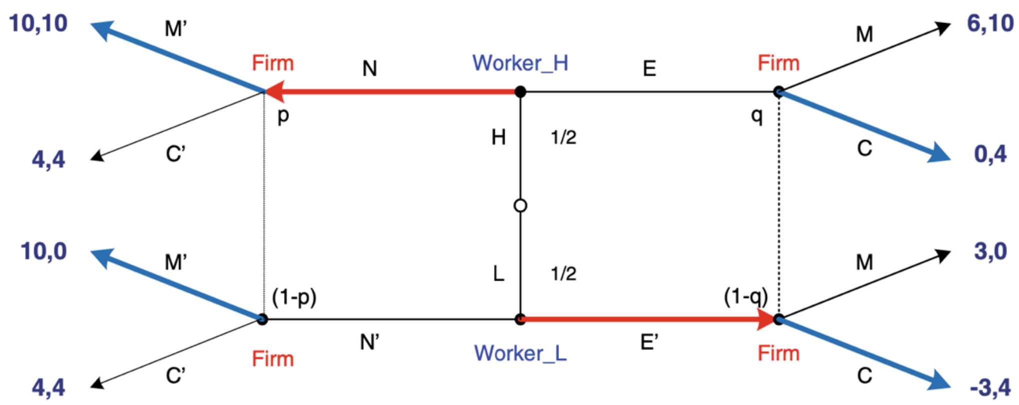
因此，参与者 2 将以 U 响应。
第三步（分析参与者 1）：
鉴于参与者 1 可以预期参与者 2 将以 U 响应，
当参与者 1 是 H 型时，他更愿意选择 R（E=3），而不是偏向 L（E=2）。
然而，当参与者 1 是 L 型时，他更喜欢偏离向 L'（E=2），而不是选择 R'（E=1）。
因此，RR′混同策略不能作为 PBE 维持，因为 L 型参与者 1 有偏离的动机（从 R' 到 L'）。

2. 考虑工人与企业之间的不完全信息动态博弈，其中，H 和 L 表示工人的类型(高能力和低能力)，E 和 N 表示工人是否接受高等教育，M 和 C 表示企业给工人安排的岗位(经理和收银员)。工人私下观察他的生产力是高还是低，然后决定是否接受一些教育，例如大学学位，他随后可以将其用作生产力的信号。为简单起见，假设教育不是提高生产力。然而，考虑聘用候选人的企业并不观察工人的实际生产力，而只知道工人是否决定接受大学教育（企业可以观察候选人是否具有有效学位）。在这种情况下，企业必须回应雇用工人担任经理 (M) 或 收银员(C) 。



（1）求纯策略分离精炼贝叶斯均衡。

a.考虑分离策略 [NE']



1.响应者的信念：

在观察到 No Education 后，企业对工人类型的信念是 p=1，因为在此策略配置中，此类信息必须仅来自高生产力工人；并且在观察 Education 之后 q=0，因为这样的信息仅由此策略配置中的低生产力工人发送。从图形上看，p=1 意味着在未观察到任何教育后（在树的左侧），企业被说服处于上节点；而 q=0 意味着企业相信在观察受过教育的工人（在树的右侧）时处于下节点。

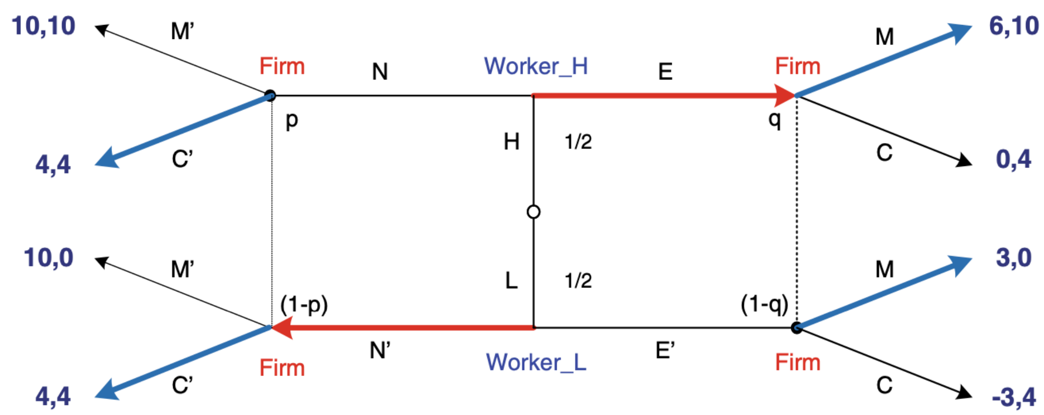
2.企业在更新信念的情况下的最优反应：

在观察到“No Education”后，该企业以 M'（E=10）回应，大于 C'（E=4）；而在观察“Education”之后，企业选择 C（E=4），而不是 M（E=0）。

3.给定步骤 1 和 2，工人的最佳行动是：

当工人是高生产力类型时，他不会偏离“No Education”，因为他没有受过教育，被企业认定为高生产力工人（因此被聘为经理），E=10，超过受过教育并被认定为低生产力工人（被聘为收银员），E=0。
当工人是低生产力类型时，他会从“Education”（E=-3）偏离到“No Education”（E=10），
因此，这种分离策略不能作为 PBE 维持，因为至少一种类型的工人有偏离的动机。

b.考虑分离策略[EN']



1.响应者的信念：
可以使用贝叶斯法则更新企业对工人类型的信念，如下

$$q = p(H|E) = \frac{p(H) \times p(E|H)}{p(E)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 0} = 1$$

在观察到工人接受教育后，企业推断该工人必须具有高生产率，即 q=1，因为在这种分离策略中，只有这种类型的工人获得了教育；而没有教育则传达相反的信息，即 p=0，因此暗示该工人不是高生产率而是低生产率。
2.企业在更新信念的情况下的最优反应：
在观察到“Education”后，企业的反应是 M（E=10）,而不是 C(E=4)。
在观察到“No Education”后，该企业以 C'(E=4)回应,而不是 M'(E=0)。
3.给定步骤 1 和 2，工人的最佳行动是：
当他是高生产力工人时，他选择 E（E=6），高于偏离到 N（E=4）。
当他是低生产力工人时，他选择 N'（E=4），高宇于偏离到 E（E=3）。
综上，分离策略 [N'E, C'M] 可以作为分离 PBE，p=0 ，q=1。

(2)求纯策略混同精炼贝叶斯均衡。
a.考虑混同策略 [EE']，两种类型的工人都接受教育。

1.响应者的信念：
在观察到 Education 的均衡信息后，企业不能进一步判断工人类型。也就是说，它的信念是

$$q = p(H|E) = \frac{p(H) * p(E|H)}{p(E)} = \frac{\frac{1}{2} * 1}{\frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 1} = \frac{1}{2}$$

这与工人具有高生产率的先验概率一致，即$q = \frac{1}{2}$。直观地说，由于两种类型的工人都在接受教育，观察受过教育的工人无助于企业进一步确定其信念。在观察到 No Education 的非均衡信息后，该企业的信念是

$$p = p(H|NE) = \frac{p(H) * p(NE|H)}{p(NE)} = \frac{\frac{1}{2} * 0}{\frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 0} = \frac{0}{0}$$

信念不受限制，即 $p \in [0, 1]$.
2.企业在更新信念的情况下的最优反应：
鉴于先前的信念，在观察到“Education”（均衡）之后：如果企业回应雇用工人作为经理（M），它获得的预期收益为

$$EU_F(M) = \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 0 = 5$$

相反，如果企业雇用他作为出纳员 (C)，则其预期收益仅为

$$EU_F(C) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 = 4$$

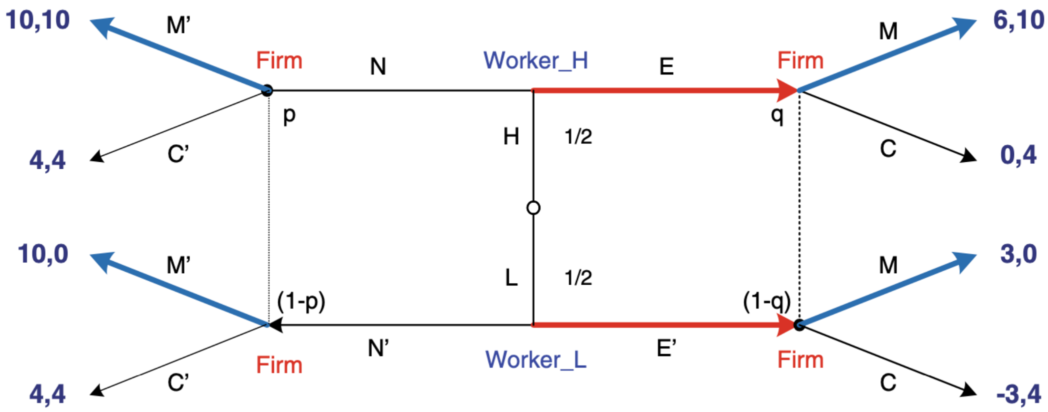
从而诱导企业雇用工人作为经理（M）。
在观察到“No Education”（非均衡）后：企业雇用工人作为经理（M'）时获得的预期收益为：

$$EU_F(M') = p \times 10 + (1-p) \times 0 = 10p$$

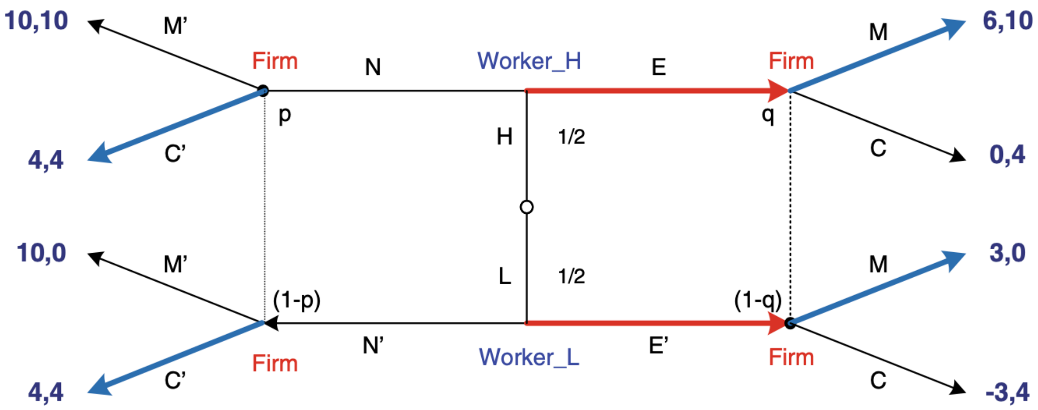
当企业雇用工人作为收银员 (C') 时预期收益为：

$$EU_F(C') = p \times 4 + (1-p) \times 4 = 4$$

由于企业在观察“No Education”的非均衡信息后的信念 p 必须不受限制，我们必须将上述预期效用表示为 p 的函数。因此，当且仅当时， $10p > 4$, or $p > 2/5$.
企业更愿意在没有观察到任何教育后雇用他作为经理（M'）；否则，企业雇用该工人作为出纳员（C'）。
3.给定步骤 1 和 2，工人的最佳行动是：



①当 $p > \frac{2}{5}$时，当工人没有受过教育（M'）时，企业聘用他作为经理，在这种情况下，如果工人是高生产力类型，他将从“Education”（E=6）偏离到“No Education”（E=10）。因此，当非均衡信念满足$p > \frac{2}{5}$时，EE′的混同策略不能作为PBE。



②当 $p \leq \frac{2}{5}$时，企业在观察到“No Education”的非均衡信息后，雇用工人作为收银员（C'），在这种情况下，如果工人是低生产力类型，他从“Education”（其 E=3）偏离到“No Education”（E=4）。因此，当非均衡信念满足 $p \leq \frac{2}{5}$时， EE'不能作为 PBE。

综上，混同策略[EE′]不能作为 PBE。

b.考虑混同策略 [NN']，两种类型的工人都没有接受教育。

1.响应者的信念：

类似于**[EE']**，企业的均衡信念（在观察到无教育之后）与高类型的先验概率一致，$p = \frac{1}{2}$；而它的非均衡信念（在观察到教育之后）不受限制，即 $q \in [0, 1]$.

2.企业在更新信念的情况下的最优反应：

鉴于先前的信念，在观察到"No Education"（均衡）之后：如果企业雇用工人作为经理（M'），它获得的预期收益为

$$EU_F(M') = \frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{2} \times 0 = 5$$

如果它雇用工人作为收银员（C′），它的预期收益仅为

$$EU_F(C') = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 4 = 4,$$

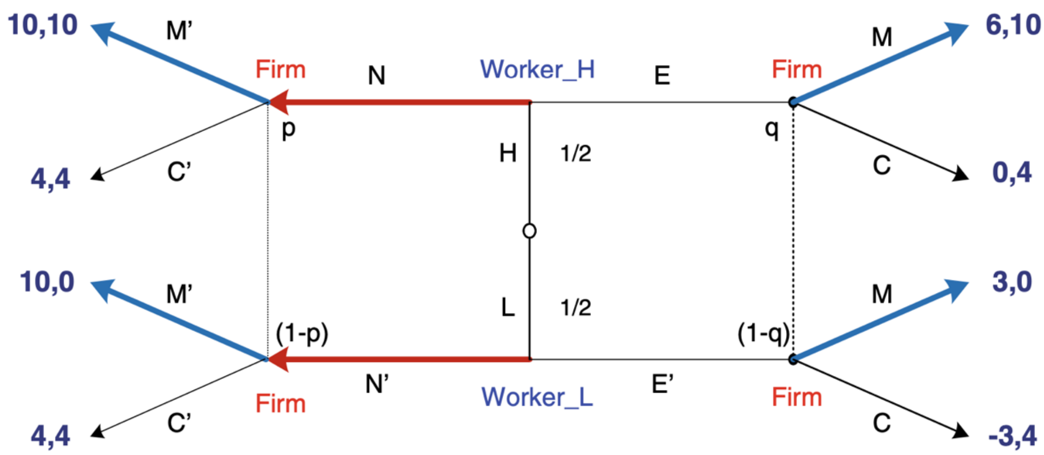
因此，观察到"No Education"的均衡信息后，企业会雇用工人作为经理（M'）。

在观察到"Education"（非均衡）之后：企业雇用工人作为经理（M）或收银（C）获得的预期收益分别为，

$$EU_F(M) = q \times 10 + (1 - q) \times 0 = 10q,$$
$$EU_F(C) = q \times 4 + (1 - q) \times 4 = 4$$

因此，当且仅当 $10q > 4, \text{ or } q > \frac{2}{5}.$ ，企业会以雇用工人作为经理（M）为回应。否则，企业雇用该工人作为收银员（C）。

3.给定步骤 1 和 2，工人的最佳行动是：

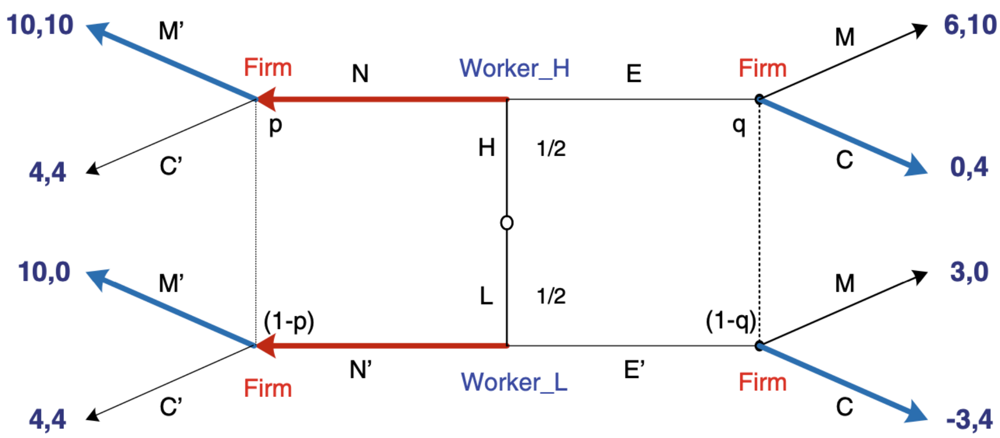


①当 $q > \frac{2}{5}$时，企业在工人"Education"时回应雇用他作为经理（M）。

如果工人是高生产力类型，他会选择 N（E=10），高于偏离 E（E=6）。

如果工人是低生产力类型，他会选择 N'（E=10），高于偏离 E'（E=3）。

因此，当非均衡信念满足 $1>q > \frac{2}{5}$时，[NN', M'M] 可以作为混同 PBE。



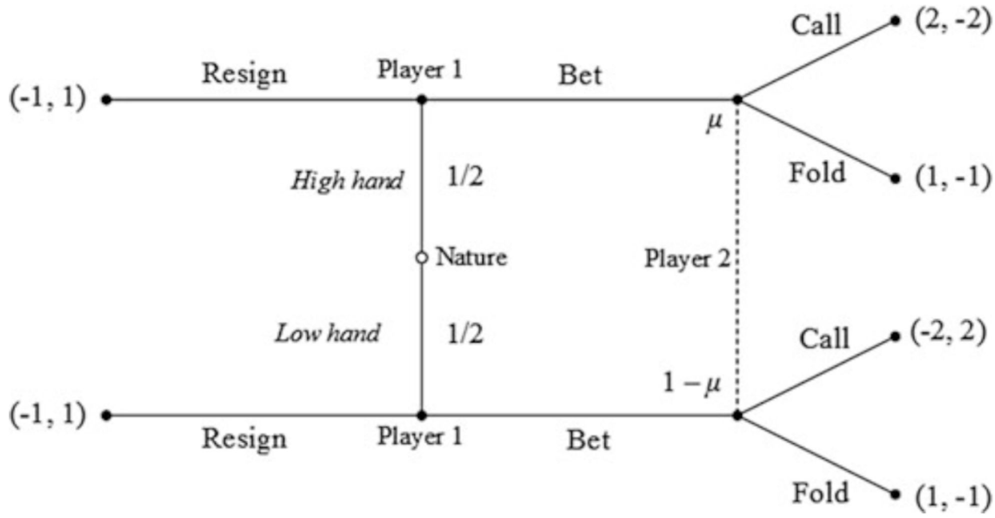
②：当$q \leq \frac{2}{5}$时；企业在观察到“Education”的非均衡信息后，回应雇用该工人作为出纳员（C）。

如果工人是高生产力类型，他不会偏离 No Education，因为他从 N（E=10）获得的收益高于偏离 E（E=0）；

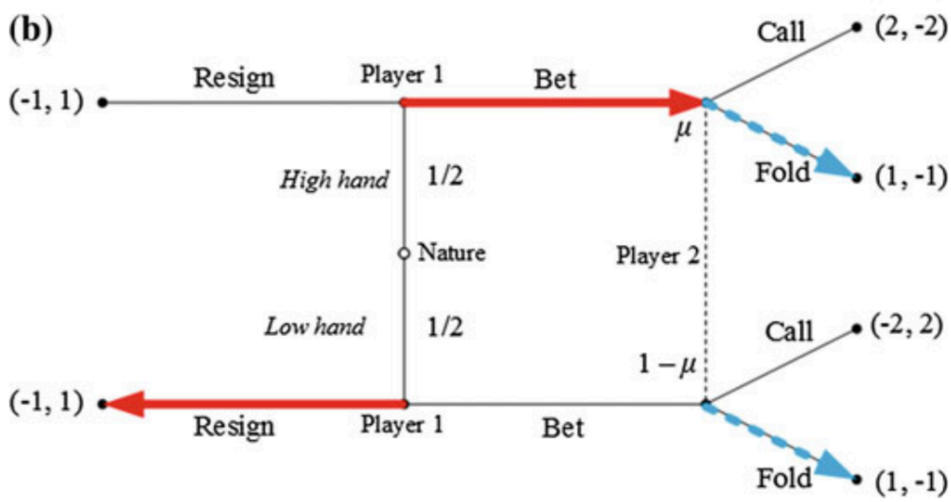
如果工人是低生产力类型，他不会偏离 No Education，因为他从 N' (E=10) 获得的收益高于偏离 E'（E=-3）。

综上，当非均衡信念满足 0<$q \leq \frac{2}{5}$时，[NN', M'C]可以作为 混同 PBE。

3.考虑如下不完全信息的序贯博弈。两名玩家正在玩下面的超级简单扑克游戏。第一个玩家得到了他的牌，显然他是唯一能观察到牌的人。他可以得到一个高牌或低牌，概率相同。在观察他的手牌之后，他必须决定是下注（让我们假设他下注的是一美元的固定金额）还是退出游戏。如果他退出游戏，他的报酬是−1，不管他手牌高还是低，玩家 2 得到一美元。如果他下注，玩家 2 必须决定是叫牌还是退出游戏。显然，玩家 2 在做出选择时没有观察玩家 1 的手牌，而只是观察玩家 1 下注。



(1)不存在这样的分离精炼贝叶斯均衡——参与者 1 采取纯策略。验证之。
a.玩家 1 手高时下注，手低时放弃：（Bet，Resign）；



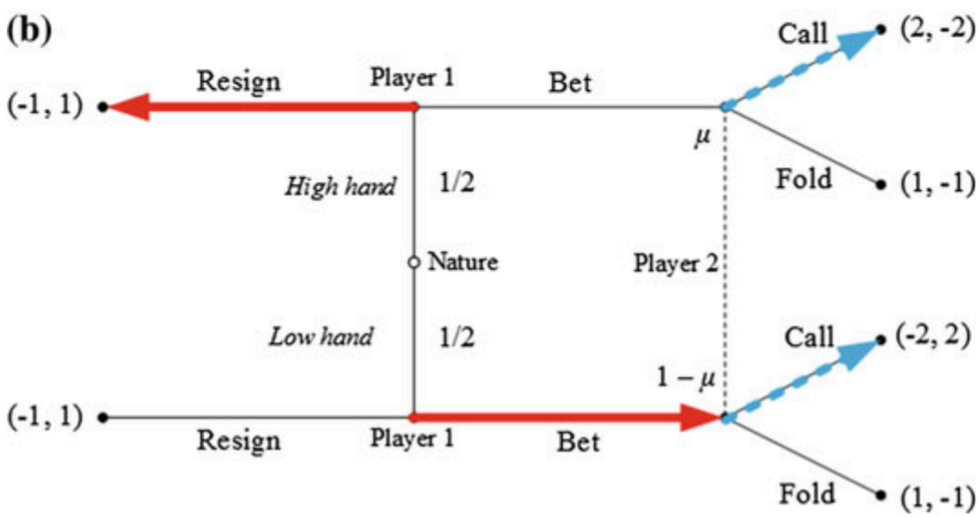
①确定玩家 2 的信念（响应者信念）。
观察到 Bet 后，玩家 2 的信念为 $\mu = 1$，表明玩家 2 认为 Bet 只能来自手高的玩家 1。
②给定玩家 2 的信念，玩家 2 的最佳反应是 Fold，因为 -1 > -2。
③鉴于前面的步骤，找出玩家 1 持有高牌时的最佳行动（无论是退出职还是下

注），以及他持有低牌时的最佳行动。

- 当玩家 1 手高时，他更喜欢 Bet，因为他这样做的收益(1)高于退出(-1)的收益；
- 当玩家 1 手低时，他更喜欢 Bet（发生偏离），因为他这样做的收益(1)超过了退出(-1)的收益。

综上，分离策略（Bet，Resign）不能作为 PBE。因为玩家 1 在持有低牌时会发生偏离，因为他预计玩家 2 会回应弃牌。

b.玩家 1 手高时放弃，手低时下注：(Resign, Bet)；



①确定玩家 2 的信念（响应者信念）。

观察到 Bet 后，玩家 2 的信念为$\mu = 0$，表明玩家 2 认为 Bet 只能来自低手的玩家 1。

②给定玩家 2 的信念，即玩家 2 的最优响应为 Call，因为 $2 > -1$。

③鉴于前面的步骤，找出玩家 1 持有高牌时的最佳行动（无论是退出还是下注），以及他持有低牌时的最佳行动。

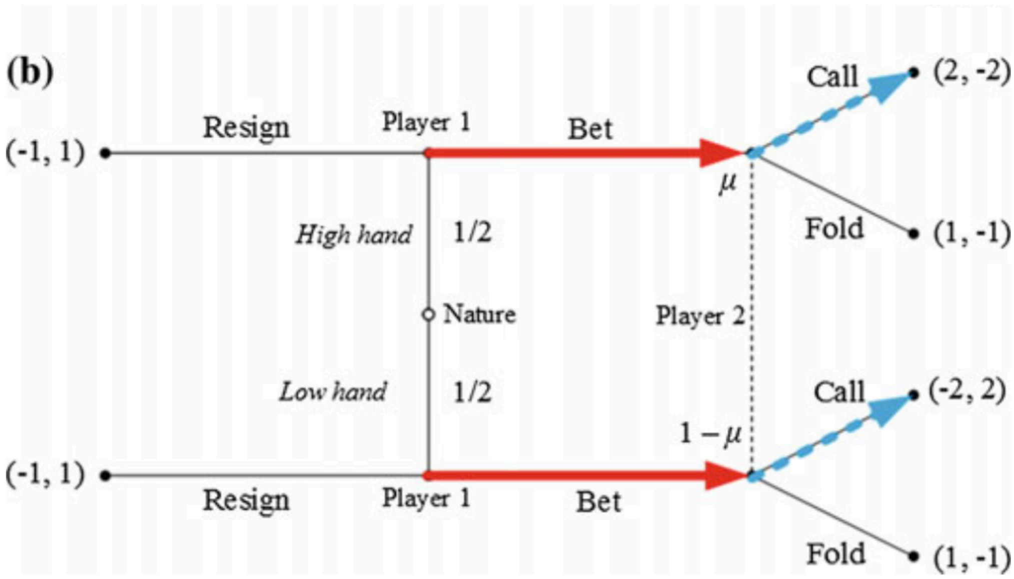
•当玩家 1 手高时，他更喜欢 Bet（发生偏离），因为他这样做的收益(2)超过了他 Resign 的收益 (-1)。

•当玩家 1 手低时，他更喜欢 Resign（发生偏离），因为他这样做的收益(-1)超过了他从 Bet 的收益(-2)。

综上，分离策略(Resign, Bet)不能作为 PBE。因为玩家 1 在拥有高牌时（他更喜欢下注）和当他拥有低牌时（他更喜欢退出）都会发生偏离。

(2)不存在这样的混同精炼贝叶斯均衡——参与者 1 采取纯策略。验证之。

a.考虑混同策略 (Bet, Bet)



①在混同策略中找到玩家 2 的信念（响应者信念）
观察到 Bet 后，玩家 2 的信念是：

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

直观上，玩家 2 的信念与先验概率分布一致。
②给定玩家 2 的信念，他的最优反应是 Call。
为了检查玩家 2 对 Bet 的反应，他必须分别找出从两种策略（Call 和 Fold）中得出的预期效用，如下所示：

$$EU_2(Call) = \frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2) = 0$$
$$EU_2(Fold) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1) = -1$$

玩家 2 的最佳响应是 Call，因为他的预期效用更高（0 > -1）。
③鉴于前面的步骤，我们需要找出玩家 1 的最优反应。
•当玩家 1 有一手高牌时，他更喜欢 Bet，因为他这样做的收益（2）超过了他 Resign 的收益（-1）；
•当玩家 1 有一手低牌时，他更愿意 Resign（发生偏离），因为他这样做的收益(-1) 超过了 Bet (-2) 的收益。
综上，混同策略(Bet, Bet)不能作为 PBE。因为玩家 1 会在他手牌低时退出游戏，发生偏离。

b.考虑混同策略（Resign, Resign)
①确定玩家 2 的信念（响应者信念）。

在观察 Bet（发生在非均衡路径上）后，玩家 2 的信念是：

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}\times 0}{\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 0} = \frac{0}{0}$$

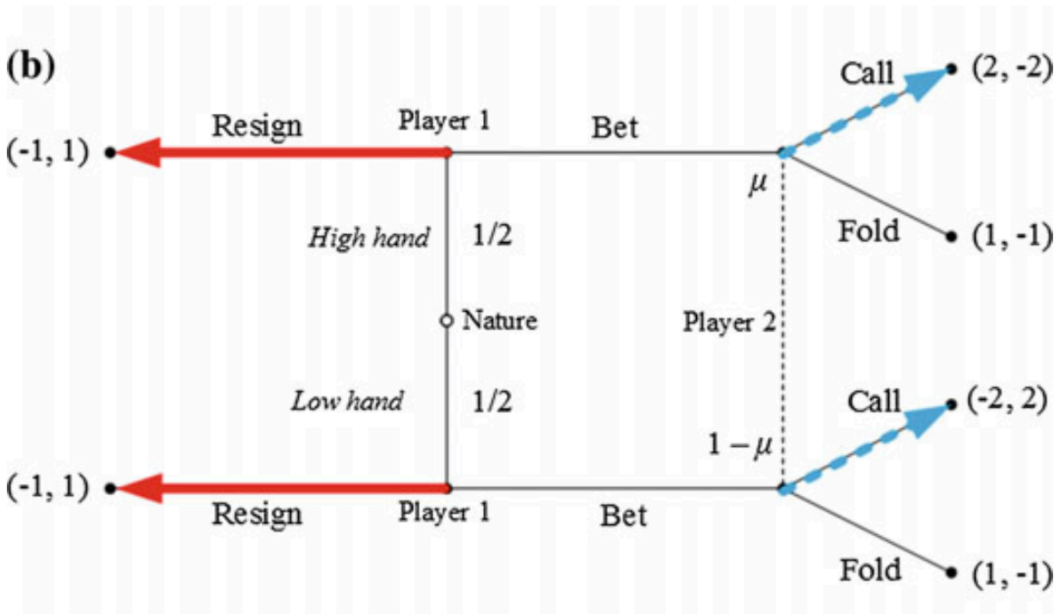
因此，信念必须不受限制，即 $\mu \in [0, 1]$.

②鉴于玩家 2 的信念，为了确定玩家 2 对 Bet 的反应，我们必须分别从 Call 和 Fold 中找到其预期效用，如下所示：

$$EU_2(Call) = \mu(-2) + (1-\mu)(2) = 2 - 4\mu$$
$$EU_2(Fold) = \mu(-1) + (1-\mu)(-1) = -1$$

假设玩家 2 更喜欢跟注， $2 - 4\mu > -1$, or $\mu < \frac{3}{4}$.

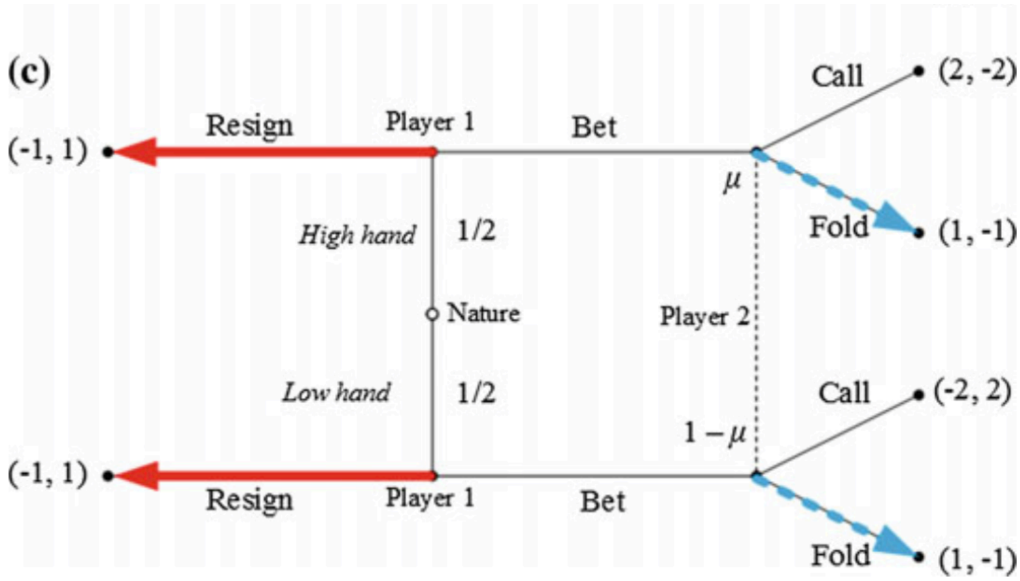
③Case1:• $\mu < \frac{3}{4}$，如果玩家 2 观察到玩家 1 下注，他会响应跟注。



• 当玩家 1 手高时，他更愿意 Bet，因为这样做的回报（2）比 Resign 的回报更大(-1).

•我们甚至不需要检查玩家 1 手底，因为上述论点已经表明，当$\mu < \frac{3}{4}$时，玩家 1 会发生偏离。

• Case2:$\mu > \frac{3}{4}$，这意味着如果玩家 2 观察到玩家 1 下注，他会响应弃牌。



• 当玩家 1 有一手高牌时，他更喜欢 Bet，因为他这样做的收益(1)大于 Resign (-1) 的收益。

•我们甚至不需要检查玩家 1 手底，因为上述论点已经表明，当$\mu > \frac{3}{4}$时，玩家 1 会发生偏离。

综上，无论玩家 2 的非均衡信念如何，不存在玩家 1 采取纯策略的混同精炼贝叶斯均衡。

(3)存在一个这样的半分离精炼贝叶斯均衡——High hand 类型的参与者 1 采取纯策略（Bet or Resign），Low hand 类型的参与者 1 采取随机策略。求出之。

• 首先，当玩家 1 High hand 时，Bet 是一种严格的占优策略。事实上，他这样做的回报（2 or 1）严格高于他 Resign 的回报 (-1)。

• 然而，当玩家 1 Low hand 时，Bet 不是他的占优策略。如果他预计玩家 2 会 Fold，他更喜欢 Bet，但如果玩家 2 以 Call 作为回应，他更喜欢 Resign。

• 直觉上，玩家 2 有动机跟注来自 Low hand 的玩家 1。因此，玩家 1 不想将他的类型信号发送给玩家 2，而是隐藏它以便玩家 2 弃牌。玩家 1 可以隐藏他的类型的方法是随机化他的下注策略。

①让我们找到支持玩家 2 响应混合这一事实的玩家 2 的信念μ。也就是说，使玩家 2 对 Call 和 Fold 无动于衷的μ值是多少？如果他不是，玩家 1 可以预测他的行动并采取上述纯策略。因此，玩家 2 必须在 Call 和 Fold 之间无差异，如下所示

$$\mu(-1) + (1-\mu) \times 2 = \mu \times (-1) + (1-\mu)(-1)$$

因此，玩家 2 对这个半分离 PBE 的信念必须满足$\mu = \frac{3}{4}$。

②给定参与者 2 的信念，$\mu = \frac{3}{4}$，写出贝叶斯法则，考虑到参与者 1 总是在持有高牌时下注，但在持有低牌时混合，

$$\mu = \frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2} \times p^H}{\frac{1}{2} \times p^H + \frac{1}{2} \times p^L}$$

因为我们知道玩家 1 总是在 High hand 时下注（使用纯策略，那么上述比率变为

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times p^L}$$

解得$p^L = \frac{1}{3}$, 当玩家 1 Low hand 时，他以$p^L = \frac{1}{3}$ 的概率下注，当玩家 1 High hand 时，$p^H = 1$。

③玩家 2 的跟注（用 q 表示）使玩家 1 Low hand 时对 Bet 和 Resign 无动于衷的概率满足

$$\begin{gathered} EU_1(Bet|Low) = EU_1(Resign|Low) \\ q(-2) + (1-q) \times 1 = -1 \end{gathered}$$

解得$q = \frac{2}{3}$，即玩家 2 以$q = \frac{2}{3}$的概率跟注。

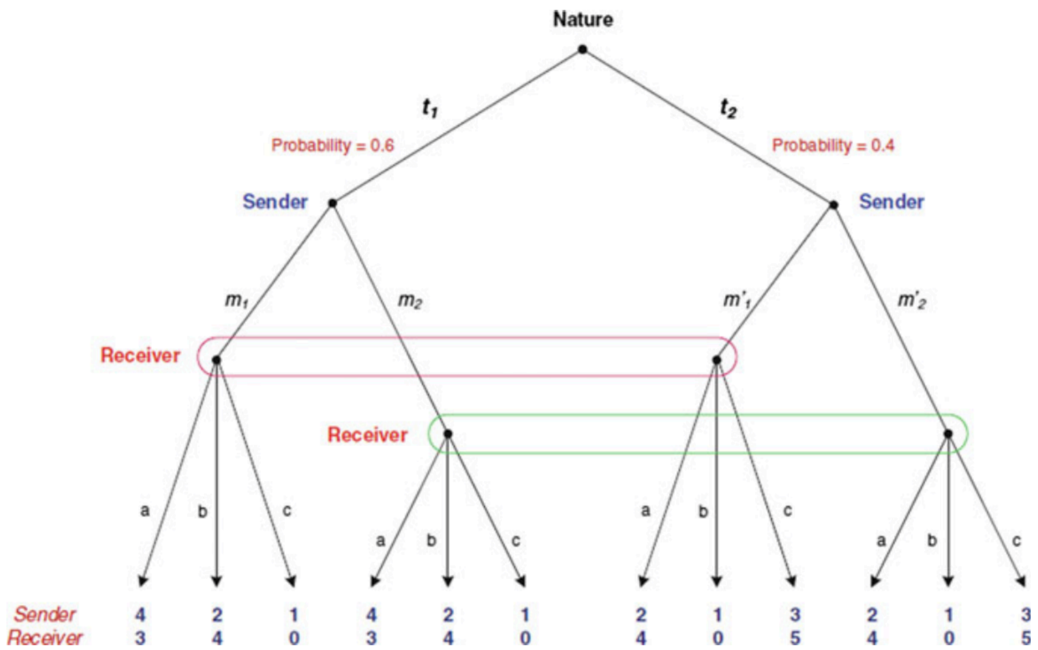
④综上，半分离 PBE 为：

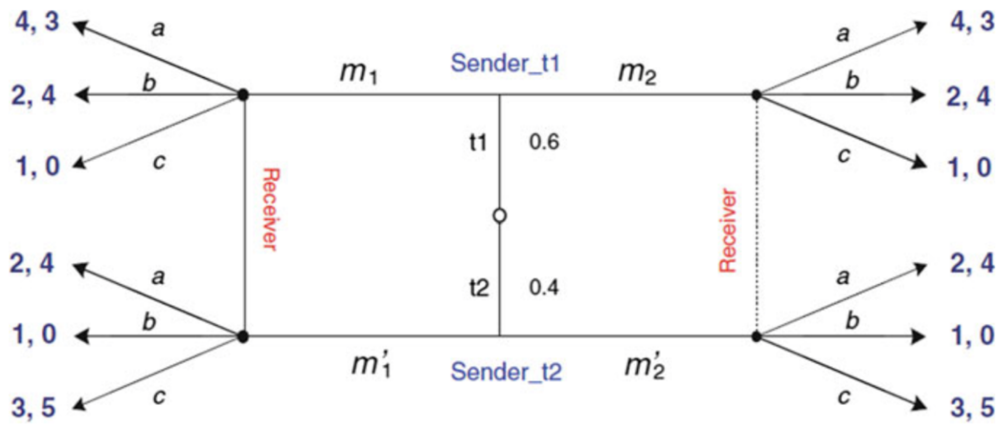
•当玩家 1 High hand 时，采取纯策略，Bet：$p^H = 1$。

当玩家 1 Low hand 时，采取随机策略， Bet：$p^L = \frac{1}{3}$, Resign: $p^L = \frac{2}{3}$。

•玩家 2 以$q = \frac{2}{3}$的的概率 Call，且他的信念为 $\mu = \frac{3}{4}$。

4. 无成本的信号发送称为“廉价谈话”(Cheap talk)。考虑如下的廉价谈话博弈。特别是，发送者在发送消息 m1 或 m2 时的收益是重合的，并且仅取决于接收者的响应（a、b 或 c）和性质的类型。您可以将这种战略设置解释为游说者（发送者）向国会议员（接收者）通报他所代表的行业的情况：消息“好情况”或“坏情况”对他来说同样昂贵，但政治家的反应是这些信息（以及行业的实际状况）决定了说客的回报。类似的论点适用于接收者（国会议员）的收益，它不取决于他在与说客的谈话中收到的特定信息，而只是行业特定状态的函数（他无法观察到的东西）和他选择的行动（例如，他在与说客交谈后为行业设计的政策）。例如，当发送者是类型 t1 时，在树的左侧，收益对仅取决于接收者的响应（a、b 或 c）而不取决于发送者的消息，例如，当接收者响应时当原始消息为 m1 和 m2 时，玩家获得 (4, 3)。





(1)求出这样的分离精炼贝叶斯均衡——t1 类型的发送者发送信号 m1，而 t2 类型的发送者发送信号 m2。

分离精炼贝叶斯均衡(m_1，m_2')：
其中消息m_1仅源自类型为t_1的发送者，而消息m_2仅源于类型为t_2的发送者。
接收者的信念：

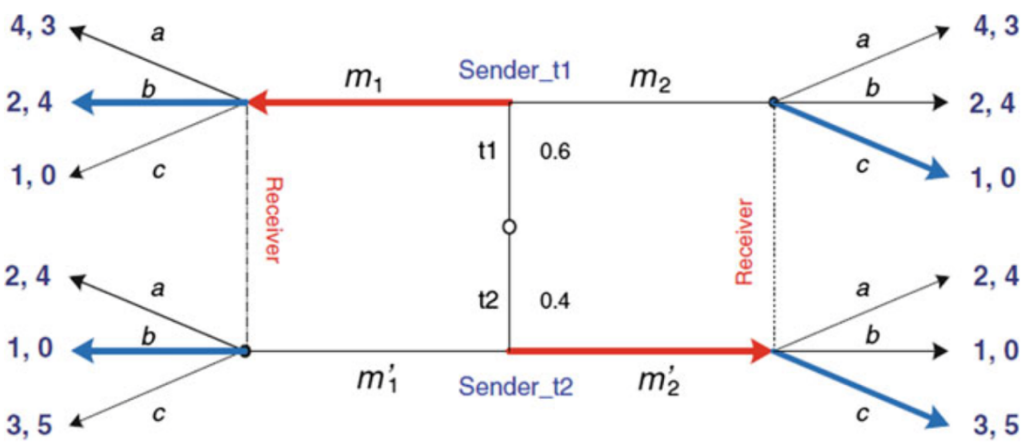
令$\mu(t_i|m_j)$表示接收者分配给类型为t_i的发送者的条件概率，假设消息m_j被观察到，$i, j \in \{1, 2\}$。因此，在观察到消息m_1后，接收方将完全概率分配给仅来自t_1类型的发送方的消息，

$$\mu(t_1|m_1) = 1, \quad \text{and} \quad \mu(t_2|m_1) = 0$$

而在观察到消息m_2后，接收者推断它必须来自t_2类型的发送者，

$$\mu(t_1|m_2) = 0, \quad \text{and} \quad \mu(t_2|m_2) = 1$$

接收者的最优反应：



- 在观察到m_1之后，接收者认为这样的消息只能来自t_1类型的发送者。从图形上看，接收者位于图的左上角。在这种情况下，接收者的最佳响应是 b，产生 4 的收益（高于他从 a, 3 和 c, 0 得到的收益）。
- 在观察到消息m_2后，接收者认为这样的消息只能来自t_2类型的发送者。也就是说，他确信位于图、的下角。因此，他的最佳响应是 c，产生的收益为 5，超过了他从 a，4 或 b，0。

发送者的最优行动：
- 如果他的类型是t_1，通过发送m_1（用 b 响应他获得 2 的收益，如果他偏离到m_2（用 c 响应），则收益为 1。 因此，发送者不会偏离m_1。
- 如果他的类型是t_2，通过发送m_2（用 c 响应）获得 3 的收益，如果他偏离到m_1（用 b 响应），则收益为 1。 因此，发送者不会偏离m_2。

(2)求出这样的混同精炼贝叶斯均衡——两种类型的发送者都发送信号m_1。

混同精炼贝叶斯均衡(m_1，m_1')

两种类型的发送者都发送信号m_1。

<u>**接收者的信念：**</u>

在观察消息 m_1（均衡状态）之后，信念与类型的先验概率分布一致。 事实上，应用贝叶斯法则可发现

$$\mu(t_1|m_1) = \frac{p(t_1) * p(m_1|t_1)}{p(m_1)} = \frac{0.6 * 1}{0.6 * 1 + 0.4 * 1} = 0.6$$

$$\mu(t_2|m_1) = \frac{p(t_2) * p(m_1|t_2)}{p(m_1)} = \frac{0.4 * 1}{0.6 * 1 + 0.4 * 1} = 0.4$$

在收到消息m_2（非均衡路径）后，无法使用贝叶斯法则更新信念，因为

$$\mu(t_1|m_2) = \frac{p(t_1) * p(m_2|t_1)}{p(m_2)} = \frac{0.6 * 0}{0.6 * 0 + 0.4 * 0} = \frac{0}{0}$$

因此必须任意指定非均衡信念，即 $\mu = \mu(t_1|m_2) \in [0, 1].$

<u>**接收者的最优反应：**</u>

- 接收消息m_1（均衡）后，接收者的期望效用分别是

$$\begin{aligned} &\text{Action } a\text{: } 0.6 \times 3 + 0.4 \times 4 = 3.4 \\ &\text{Action } b\text{: } 0.6 \times 4 + 0.4 \times 0 = 2.4, \text{ and} \\ &\text{Action } c\text{: } 0.6 \times 0 + 0.4 \times 5 = 2.0 \end{aligned}$$

因此，接收者的最优策略是选择 a 来响应m_1。

- 接收消息 m_2（非均衡）后，接收者的期望效用为

$$\begin{aligned} EU_{Receiver}(a|m_2) &= \mu * 3 + (1-\mu) * 4 = 4 - \mu, \\ EU_{Receiver}(b|m_2) &= \mu * 4 + (1-\mu) * 0 = 4\mu, \text{ and} \\ EU_{Receiver}(c|m_2) &= \mu * 0 + (1-\mu) * 5 = 5 - 5\mu \end{aligned}$$

其中接收者的反应严重依赖于他的非均衡信念的特定值μ

$$4\mu > 4 - \mu \qquad \mu > \frac{4}{5}$$

$$4 - \mu \quad > 5 - 5\mu. \quad \mu > \frac{1}{4}$$

$$4\mu > 5 - 5\mu \qquad \mu > \frac{5}{9}$$

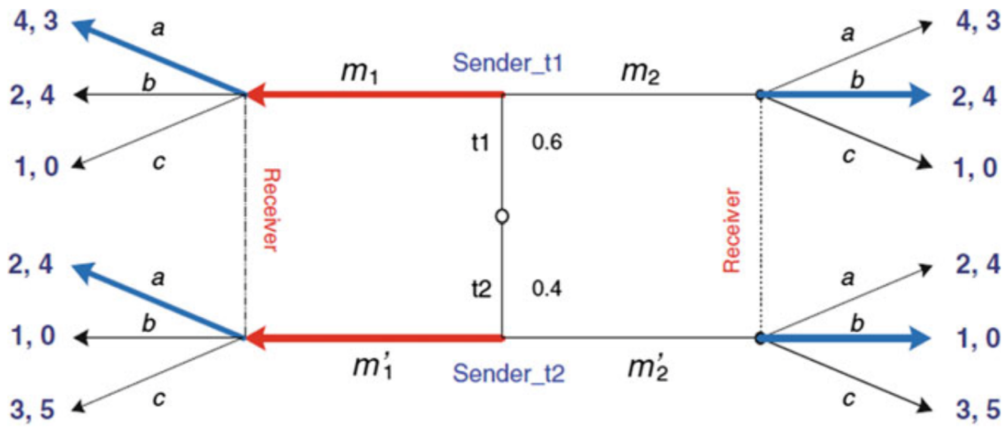
因此，如果非均衡信念位于区间$\mu \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$，$5 - 5\mu$.是最高的期望收益，因此诱导接收者以 c 响应；

如果非均衡信念位于区间$\mu \in \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right]$， $4 - \mu$ 成为最高期望收益，接收者选择 a；

如果非均衡信念位于区间$\mu \in \left(\frac{4}{5}, 1\right]$，$4\mu$是最高预期收益，接收者以 b 响应。

在此，我们只讨论非均衡信念满足$\mu = 1$ 的情况（因此响应者在观察消息 m_2时选择 b）。

<u>发送者的最优策略：</u>



- 如果他的类型是t_1，发送者通过发送m_1（用 a 响应），获得 4 的收益，如果他偏离到m_2（用 b 响应），则收益为 2 。 因此，发送方不毁偏离m_1。
- 如果他的类型是t_2，发送者通过发送m_1‘（用 a 响应）获得 2 的收益，如果他偏离到m_2′（用 b 响应），则收益为 1。 因此，他没有偏离m_1‘的动机。

因此，两种类型的发送者都选择m_1，可以作为 PBE。