

第一部分 教材上的习题

第3题 解:

$$(1) d\Pi_1/dp = -2p - 2(-aq + c) \Rightarrow d\Pi_1/dp = 0 \text{ 时 } p - aq + c = 0 \dots\dots\dots ①.$$

$$d\Pi_2/dq = -2q + 2b \Rightarrow d\Pi_2/dq = 0 \text{ 时 } q = b \dots\dots\dots ②.$$

将②代入①得 $p = ab - c$.

故纯策略纳什均衡为: 企业1定价为 $ab - c$, 企业2定价为 b 。

(2) 由逆向归纳法, 先考虑企业2的策略。

$$d\Pi_2/dq = -2q + 2b \Rightarrow d\Pi_2/dq = 0 \text{ 时 } q = b.$$

此时再逆向考察企业1的策略, $d\Pi_1/dp = -2p - 2(-aq + c) \Rightarrow d\Pi_1/dp = 0 \text{ 时 } p - aq + c = 0$.

代入 $q = b$ 仍然得到 $p = ab - c$.

故企业1先决策时的子博弈精炼纳什均衡为: 企业1定价为 $ab - c$, 企业2定价为 b 。

(3) 由逆向归纳法, 先考虑企业1的策略。

$$d\Pi_1/dp = -2p - 2(-aq + c) \Rightarrow d\Pi_1/dp = 0 \text{ 时 } p - aq + c = 0. \text{ 即 } p = aq - c \dots\dots\dots ①.$$

此时再逆向考察企业2的策略,

$$d\Pi_2/dq = d[-(q-b)^2 + aq - c]/dq = -2q + 2b + a \Rightarrow d\Pi_2/dq = 0 \text{ 时 } q = b + a/2 \dots\dots\dots ②.$$

将②代入①得 $p = a^2/2 + ab - c$.

故企业2先决策时的子博弈精炼纳什均衡为: 企业1定价为 $a^2/2 + ab - c$, 企业2定价为 $b + a/2$ 。

若存在参数值(a,b,c)使得每一个企业都希望自己先决策,

则两个企业先决策时的利益大于后决策时的利益。

对企业 1: $-(ab-c-ab+c)^2+b>-[a^2/2+ab-c-a(b+a/2)+c]^2+b+a/2 \Rightarrow a<0$.

对企业 2: $-(b+a/2-b)^2+a^2/2+ab-c>-(b-b)^2+ab-c \Rightarrow a \neq 0$.

又因为各企业的定价和利润应为正值, 故有:

$ab-c>0, b>0, a/2+b>0, a^2/2+ab-c>0, a^2/4+ab-c>0$.

解得 $ab>c, a+2b>0$.

故(a,b,c)满足 $a<0, ab>c, a+2b>0$ 时, 两个企业都会希望自己先决策。

第 4 题 解:

企业 1 将投资引进新技术时, 企业 1 的利润须大于不引进新技术时企业 1 的利润。

当企业 1 不引进新技术时, 设企业 1 产量为 q_1 , 企业 2 产量为 q_2 , 且 $q=q_1+q_2$ 。

则企业 1 利润为 $\Pi_{11}=q_1(14-q)-2q_1$, 企业 2 利润为 $\Pi_{12}=q_2(14-q)-2q_2$ 。

$d\Pi_{11}/dq_1=12-2q_1-q_2 \Rightarrow d\Pi_{11}/dq_1=0$ 时 $12-2q_1-q_2=0 \dots\dots ①$

$d\Pi_{12}/dq_2=12-2q_2-q_1 \Rightarrow d\Pi_{12}/dq_2=0$ 时 $12-2q_2-q_1=0 \dots\dots ②$

联立①②得 $q_1=q_2=4$. 故此时企业 1 利润为 16.

当企业 1 引进新技术时, 设企业 1 产量为 q_1' , 企业 2 产量为 q_2' , 且 $q=q_1'+q_2'$ 。

则企业 1 利润为 $\Pi_{新1}=q_1'(14-q)-q_1'-f$, 企业 2 利润为 $\Pi_{新2}=q_2'(14-q)-2q_2'$ 。

$d\Pi_{新1}/dq_1'=13-2q_1'-q_2' \Rightarrow d\Pi_{新1}/dq_1'=0$ 时 $13-2q_1'-q_2'=0 \dots\dots ①$

$d\Pi_{新2}/dq_2'=12-2q_2'-q_1' \Rightarrow d\Pi_{新2}/dq_2'=0$ 时 $12-2q_2'-q_1'=0 \dots\dots ②$

联立①②得 $q_1'=14/3, q_2'=11/3$. 故此时企业 1 利润为 $(196/9-f)$.

若 $16 < 196/9 - f$ ，则 $f < 52/9$ ，且因为 f 为投资成本，故 $f > 0$ 。

故 $0 < f < 52/9$ 时，企业 1 将引进新技术。

第 8 题 解：

用划线法求该博弈的纯策略纳什均衡：

	L	C	R
T	<u>3</u> , <u>1</u>	0, 0	<u>5</u> , 0
M	2, 1	<u>1</u> , <u>2</u>	3, 1
B	1, 2	0, 1	4, <u>4</u>

故该博弈的纯策略均衡为 (T, L) 和 (M, C)。

若要使 (4, 4) 作为子博弈精炼纳什均衡结果在第一阶段出现，则可能的策略是：

行参与者与列参与者约定第一阶段大家分别选 B、R；

若第一阶段没有参与者违规，则第二阶段行参与者选择 T，列参与者选择 L；

若第一阶段行参与者违规，则第二阶段行参与者选择 M，列参与者选择 C；

若第一阶段列参与者违规，则第二阶段行参与者选择 T，列参与者选择 L；

若第一阶段参与者均违规，则第二阶段行参与者选择 M，列参与者选择 C，或第二阶段行参与者选择 T，列参与者选择 L。

应分别写出两个参与者各自的策略。

证明：

若第一阶段没有参与者违规：

Commented [1]: 选择(M,C)以防止有动机偏离的行参与者偏离

Formatted: Font color: Red

则第二阶段列参与者选择 L，行参与者选择 T，博弈结果为 (3, 1)。由于 $3 > 1$ ， $1 < 2$ ，故第一阶段的博弈结果 (3, 1) 在该博弈的所由纯策略纳什均衡中是不可帕累托改进的，故该结果是抗再谈判的。

若第一阶段有参与者违规：

若只有行参与者违规：

为了惩罚行参与者，列参与者只能在第二阶段选择 C 以最小化行参与者的利益，此时行参与者会选择 M 使得博弈结果为 (1, 2) 以最大化自己的利益。考虑该结果是否抗再谈判：由于 $3 > 1$ ， $1 < 2$ ，故第一阶段的博弈结果 (1, 2) 在该博弈的所由纯策略纳什均衡中是不可帕累托改进的，故该结果是抗再谈判的。

若只有列参与者违规：

为了惩罚列参与者，行参与者只能在第二阶段选择 T 以最小化行参与者的利益，此时列参与者会选择 L 使得博弈结果为 (3, 1) 以最大化自己的利益。考虑该结果是否抗再谈判：由于 $3 > 1$ ， $1 < 2$ ，故第一阶段的博弈结果 (3, 1) 在该博弈的所由纯策略纳什均衡中是不可帕累托改进的，故该结果是抗再谈判的。

若参与者均违规：

此时第一阶段的博弈结果 (1, 2) 或 (3, 1) 在该博弈的所由纯策略纳什均衡中均是不可帕累托改进的，故该结果是抗再谈判的。

比较第一阶段无参与者违规与有参与者违规的情况下各参与者两阶段的总收益：

行参与者： $U_{1 \text{ 违规 max}} = 5 + 1 = 6$ ， $U_{1 \text{ 不违规}} = 4 + 3 = 7$ ，故 $U_{1 \text{ 违规 max}} < U_{1 \text{ 不违规}}$ 。

列参与者： $U_{2 \text{ 违规 max}} = 2 + 2 = 4$ ， $U_{2 \text{ 不违规}} = 4 + 1 = 5$ ，故 $U_{2 \text{ 违规 max}} < U_{2 \text{ 不违规}}$ 。

故参与者均有动机遵守约定。

故 (4, 4) 能作为子博弈精炼纳什均衡结果在第一阶段出现。

第 9 题 解：

设生产 1 个单位商品的成本为 c 。

当每次的价格能够被立即观察到时：

在企业均合作的阶段：

$$\Pi_{\text{总}1} = (p-c)(a-p),$$

$$d\Pi_{\text{总}1}/dp = -2p + a + c$$

$$\Rightarrow d\Pi_{\text{总}1}/dp = 0 \text{ 时 } p = (a+c)/2, q = (a-p)/n = (a-c)/2n, \Pi_{\text{合作}} = (a-c)^2/4n.$$

在有企业背叛的阶段：

背叛的企业定价为 $p-\varepsilon$ 且 ε 一定为趋近于 0 的正值，产量为 $a-p$ ，

$$\Pi_{\text{背叛}} = (p-\varepsilon-c)(a-p) \approx (a-c)^2/4, \Pi_{\text{其他}} = (c^2-ac)/2n.$$

在所有企业均不合作的阶段：

每个企业定价均为成本价，生产量为 $(a-c)/n$ ，利润为 0。

故若垄断价格可以作为精炼均衡结果出现，

则对每个企业，有合作时的利益大于背叛时及以后不合作的利益：

$$(a-c)^2/[4n(1-\delta_1)] > (a-c)^2/4 \Rightarrow \delta_1 > (n-1)/n.$$

故此时 $(n-1)/n < \delta_1 < 1$ 。

当 t 期的价格在第 $t+1$ 期被观察到时：

相当于每个企业原本需承担的最高风险由被骗一次升高为连续被骗两次。

此时若垄断价格可以作为精炼均衡结果出现，

则对每个企业，有合作时的利益大于背叛时及以后不合作的利益：

$$(a-c)^2/[4n(1-\delta_2)] > (1+\delta_2)(a-c)^2/4 \Rightarrow \delta_2 > \sqrt{\frac{n-1}{n}}. \text{ 故 } \sqrt{\frac{n-1}{n}} < \delta_2 < 1.$$

由于 $\delta_1 < \delta_2$ ，故观察滞后时合作对企业耐心的要求高于观察同期时的要求。

故合作会变得更加困难。

第二部分 补充题

1、解：

此题只需指出不符合完美回忆假定的参与者并说明理由即可。

Game A:

参与者 1 不符合完美回忆的假定：

因为参与者 1 第二次行动的两个节点构成一个信息集，但信息集的成立要求从信息集中任意节点出发时可选择的行动相同、节点前所选择的行动及其顺序相同，否则参与者就能知道自己处于信息集中的哪个节点；而参与者 1 在此信息集的两个节点前所选择的行动是不同的，若参与者 1 第二次行动时的两个节点构成一个信息集，就说明参与者 1 不记得自己第一次做出了什么行动，因此参与者 1 不符合完美回忆的假定。

参与者 2 符合完美回忆的假定：

因为参与者 2 只行动了一次，故认为参与者 2 符合完美回忆的假定。

Game B:

参与者 1 不符合完美回忆的假定：

因为参与者 1 第一、二次行动的两个节点构成一个信息集，但信息集的成立要求从信息集中任意节点出发时可选择行动相同、节点前所选择的行动及其顺序相同，否则参与者就能知道自己处于信息集中的哪个节点；而参与者 1 在此信息集的两个节点前所选择的行动是不同的，若参与者 1 第二次行动时的两个节点构成一个信息集，就说明参与者 1 在第二次做出行动时不记得自己第一次也没有做出行动，因此参与者 1 不符合完美回忆的假定。

参与者 2 符合完美回忆的假定：

因为参与者 2 只行动了一次，故认为参与者 2 符合完美回忆的假定。

Game C:

参与者 1 不符合完美回忆的假定：

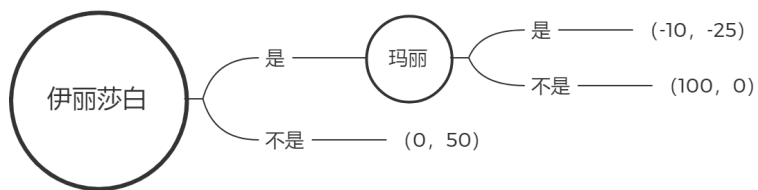
因为参与者 1 第二次行动的两个节点构成一个信息集，但信息集的成立要求从信息集中任意节点出发时可选择行动相同、节点前所选择的行动及其顺序相同，否则参与者就能知道自己处于信息集中的哪个节点；而参与者 1 在此信息集的两个节点前所选择的行动是不同的，若参与者 1 第二次行动时的两个节点构成一个信息集，就说明参与者 1 不记得自己第一次做出了什么行动，因此参与者 1 不符合完美回忆的假定。

参与者 2 符合完美回忆的假定：

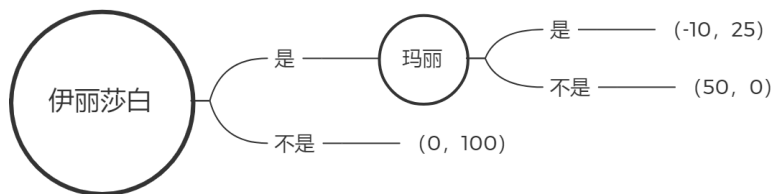
因为参与者 2 行动的两次均没有出现表示参与者 2 忘记此前自己或对手所作行动的意思，故认为参与者 2 符合完美回忆的假定。

2、解：

(1) 当伊丽莎白是生母时：



当玛丽是生母时：



(2) 证明：

如果伊丽莎白是生母，那么玛丽一定不会想要支付 75 第纳尔给所罗门王；伊丽莎白也知道这一点，因此伊丽莎白一定不会需要白白支付 10 第纳尔给所罗门王，因此伊丽莎白一直会说“是”。而为了不支付 75 第纳尔，玛丽不会在所罗门王问自己孩子是不是自己的时候回答“是”，而会回答“不是”，此时孩子给伊丽莎白且两个女子都不需要向所罗门王交钱。

如果玛丽是生母，玛丽会愿意支付 75 第纳尔给所罗门王而获得孩子，因此玛丽一定会一直回答“是”；但伊丽莎白一定不会想要白白支付 10 第纳尔给所罗门王，因此伊丽莎白不会

林雨弦 2000016301 《博弈论》第 2 次作业

使所罗门王问玛丽自己是不是孩子的生母。因此伊丽莎白在所罗门王问自己是不是孩子的生母时就会回答“不是”，此时孩子给玛丽且两个女子都不需要向所罗门王交钱。