

# 《博弈论》第 1 次作业

## （完全信息静态博弈）

1. 对于下面的双人博弈：

		乙	
		左	右
甲	上	6, 0	0, 6
	下	3, 2	6, 0

- (1) 求每个参与者的最大最小策略和最大最小值（考虑混合策略）。
- (2) 求每个参与者的最小最大策略和最小最大值（考虑混合策略）。
- (3) 求出全部纳什均衡，将纳什均衡下的收益与最大最小值、最小最大值加以比较。

2. 考虑足球比赛中的罚点球问题，主罚者可以从左、中、右三个角度进攻，与此同时，守门员需要决定朝哪个方向（指罚球者的进攻方向）扑球。下表描述了各种策略组合下罚球者进球得分的概率：

		守门员		
		左	中	右
罚球者	左	0.65	0.95	0.95
	中	0.95	0	0.95
	右	0.95	0.95	0.65

求出混合策略纳什均衡。在均衡中，罚球者进球的概率是多少？

3. 对于下面的三人博弈：

丙: $Z_1$				丙: $Z_2$			
		乙				乙	
		$Y_1$	$Y_2$			$Y_1$	$Y_2$
甲	$X_1$	0, 0, 0	6, 5, 4	甲	$X_1$	4, 6, 5	0, 0, 0
	$X_2$	5, 4, 6	0, 0, 0		$X_2$	0, 0, 0	0, 0, 0

(1) 求出全部的（纯策略及混合策略）纳什均衡。

(2) 是否存在强纳什均衡？是否存在抗联盟纳什均衡？

**关于强纳什均衡和抗联盟纳什均衡的说明：**

首先，将参与者集合的任何子集（包括原集合）都称为联盟。

考察某纳什均衡，若存在这样的联盟，其成员协调行动一起偏离该均衡状态能够提高每个成员的收益，则称该联盟能瓦解这个纳什均衡。

若不存在任何联盟能够瓦解这个纳什均衡，就称这个纳什均衡是强纳什均衡。

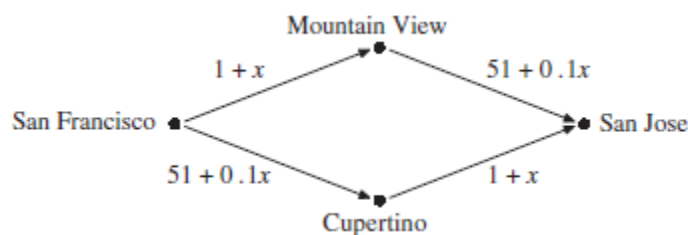
对于二人联盟，若其集体偏离后，没有成员能通过再次独自偏离而获益，称这个二人联盟是可维持的联盟。

对于三人联盟，若其集体偏离后，没有任何更小的可维持联盟能够通过协调行动再次偏离而获益，则称这个三人联盟是可维持的联盟。

依此类推……

考察某纳什均衡，若不存在任何可维持的联盟能够瓦解该均衡，就称该均衡为抗联盟纳什均衡。

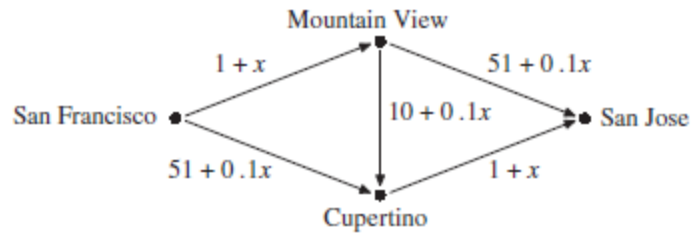
4. 从旧金山（San Francisco）到圣何塞（San Jose）有两条路，北路经过山景城（Mountain View），南路经过库比蒂诺（Cupertino）。每条路的车程时间取决于使用该条路的车有多少辆（ $x$ ），如下图所示。



每个司机都要选择一条从旧金山到圣何塞的路，目标是尽量减少交通时间。假设有 60 辆车同时从旧金山出发前往圣何塞。

(1) 每个司机有几种策略？求出这个博弈的纳什均衡。在均衡中，每个司机的通勤时间是多少？

(2) 加州交通部门在山景城和库比蒂诺之间新建了一条单向路，如图所示：



求出新博弈的均衡。在均衡中，每个司机的通勤时间是多少？

5. 设有一批选民，其政治观点在一个单位区间从左 ( $x=0$ ) 至右 ( $x=1$ ) 均匀分布。若干候选人同时选择其政治立场（即在 0 与 1 之间取一点）。选民观察候选人的选择，然后将选票投给与自己的立场最接近的候选人。假设有三个候选人。

(1) 假设每个候选人的唯一目的就是赢得选举，你能不能找出一个纯策略纳什均衡？

(2) 假设每个候选人希望得票越多越好，你能不能找出一个纳什均衡？

(3) 假设每个候选人只关心能否当选，而且每个候选人还可以选择不参加竞选，这个选择的结果劣于与人并列第一，但优于输掉选举。你能不能找出一个纯策略纳什均衡？

6. 考虑两家生产同质产品的企业之间的价格竞争问题。没有固定成本，只有可变成本。两家企业的单位生产成本分别为  $c_1$  和  $c_2$ ，市场的反需求函数为  $p(q) = a - bq$ ，其中  $p$  和  $q$  分别表示价格和需求量（或供给量），且  $b > 0$ ,  $a > c_2 > c_1 > 0$ 。

(1) 如果价格可以取任意实数，试分析是否存在纯策略纳什均衡。

(2) 如果价格只能取离散值（比如只能精确到“分”），试求出全部纯策略纳什均衡。

(3) 如果价格可以取任意实数，请尝试求混合策略纳什均衡。