

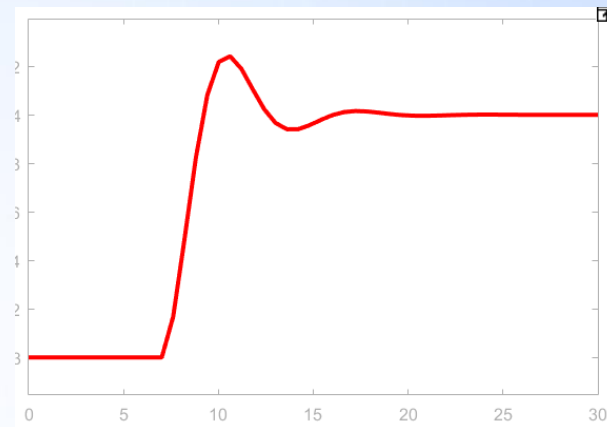
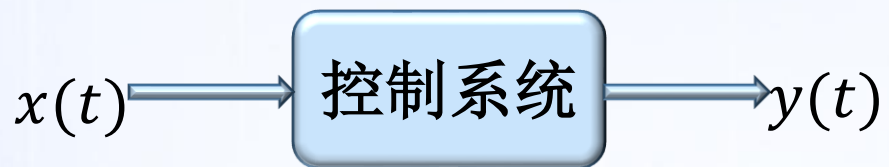
| 第三章：控制系统的时域分析法





3.1.1 时域分析法概述

1、时域分析法定义



时域分析法：在典型测试信号下对系统时域响应的动态特性和稳态特性进行分析的方法。

- **优点：**可以提供系统时间响应的全部信息，直观，准确；
- **不足：**人工求解困难，不利于分析系统结构和参数变化对系统的影响。



3.1.1 时域分析法概述

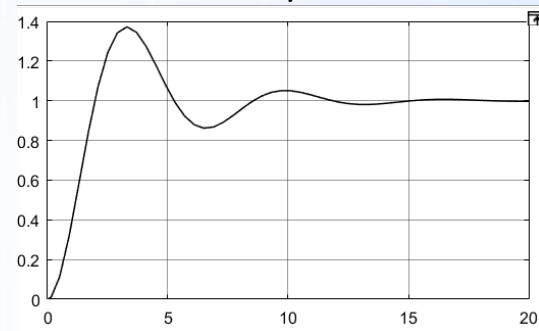
2、时域响应特性的获取：两种方法

机理分析法：根据系统的微分方程，以拉氏变换为数学工具，**直接解出**控制系统的时间响应；然后根据响应的表达式及其描述曲线来分析系统的控制性能。

试验测试法：对系统加入典型试验信号，记录和观察系统输出响应，分析系统的性能，确定控制系统是否满足要求。

例：发电机组的参数监控

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$



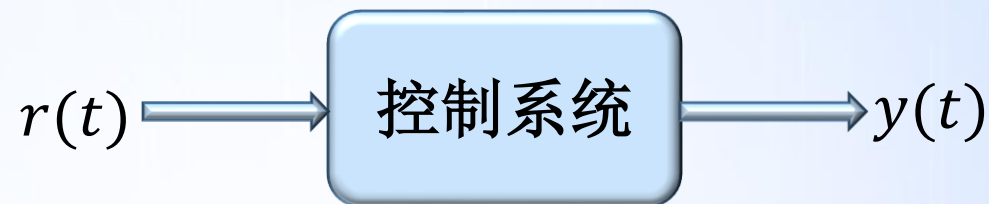
发电机组的趋势图监视



3.1.1 时域分析法概述

3、典型测试信号的选用原则：

取决于系统**正常工作**情况下**最常见**的输入信号。



例：

温度调节系统---用阶跃函数 $x(t) = R \cdot 1(t)$ **使用最多**

雷达跟踪系统---用斜坡函数 $x(t) = Rt \cdot 1(t)$

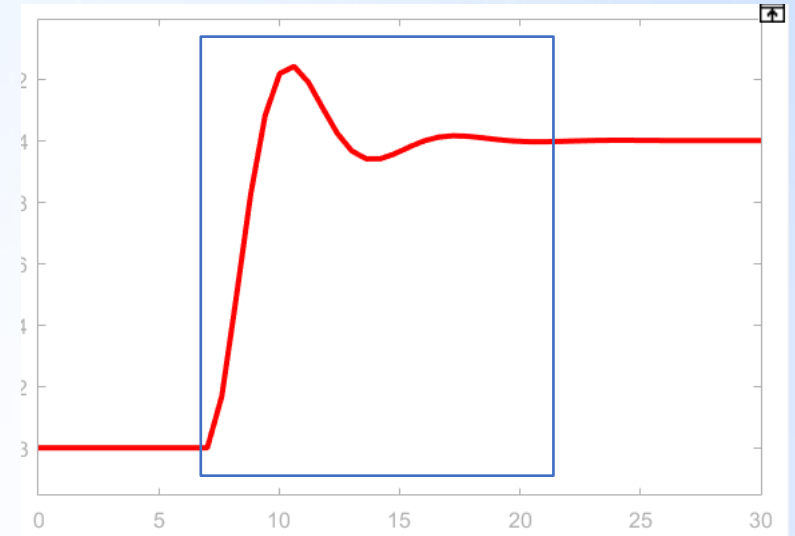
飞船控制系统---用抛物线函数 $x(t) = \frac{1}{2}Rt^2 \cdot 1(t)$



3.1.1 时域分析法概述

4、控制系统的输出响应特性

- 动态响应+稳态响应
- 过渡过程---系统在外作用下由一个稳态转移至另一个稳态的过程。



动态响应 (过渡过程、暂态响应)

稳态

稳态

- 典型过渡过程反映了系统性能，时域性能指标定量说明了系统性能。



3.1.2 时域性能指标

时域性能指标有两大类：

阶跃响应指标：单项指标，可以直观反映系统稳、准、快三大特性

- 1) 最大超调量 2) 上升时间
- 3) 峰值时间 4) 调整时间
- 5) 振荡周期 6) 衰减率
- 7) 稳态误差

误差积分指标：综合性指标

- 1) 平方误差积分 2) 绝对误差积分
- 3) 时间乘误差平方积分 4) 时间乘绝对误差积分



3.1.2 时域性能指标

阶跃响应的类型:

单调型

①收敛

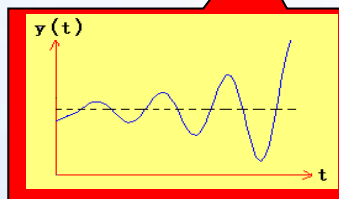
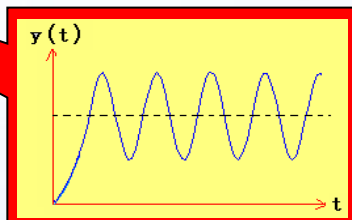
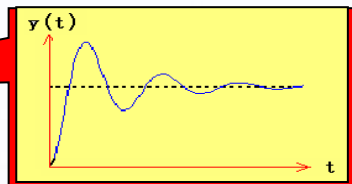
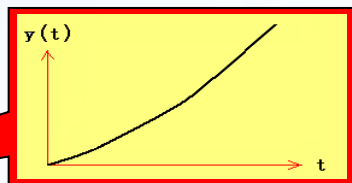
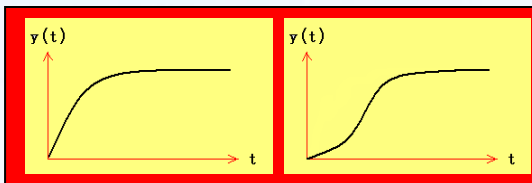
②发散

振荡型

③衰减振荡

④等幅振荡

⑤发散振荡



注: 阶跃响应指标针对① ③ 两种情况。



3.1.2 时域性能指标

1、阶跃响应指标

1) 上升时间

$$t_r = t_{100\%} - t_{0\%}$$

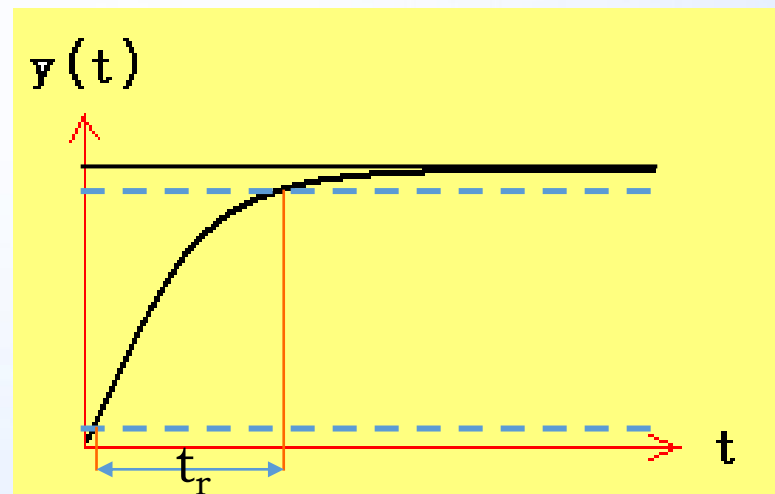
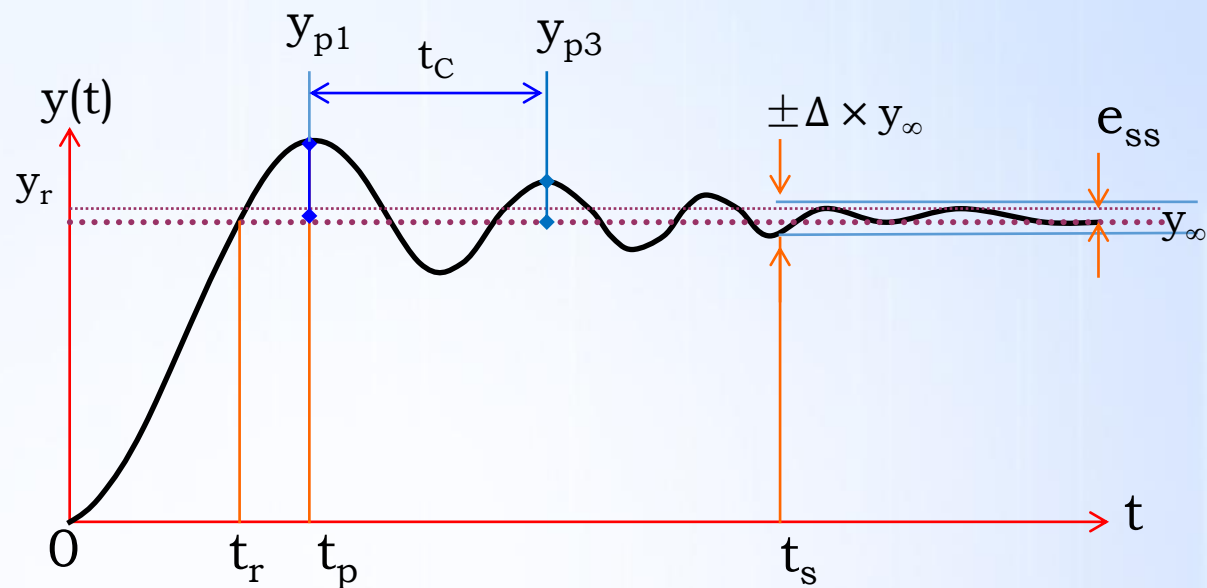
$$t_r = t_{95\%} - t_{5\%}$$

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$$

2) 峰值时间

t_p ----- $y(t)$ 到达第一个峰值的时间

t_r 、 t_p : 表征了系统响应初始阶段的快慢。





3.1.2 时域性能指标

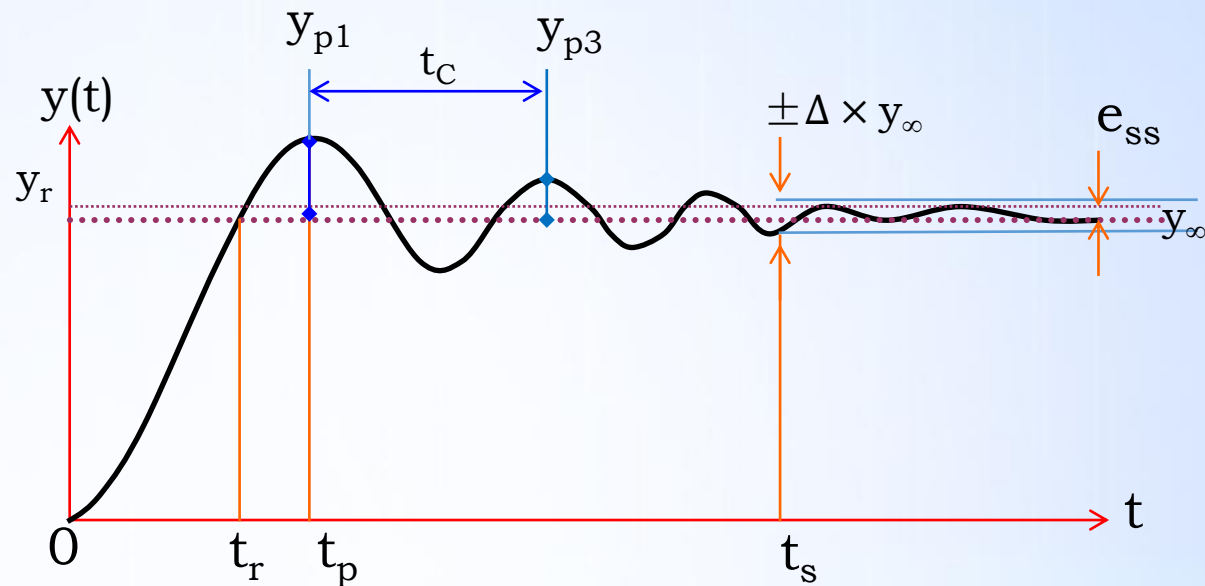
3) 最大超调量 $\sigma_p\%$

最大超调量: $\sigma_p = y(t_p) - y_\infty$

σ_p : 表征动态过程的最大偏离度。

$$\sigma_p\% = \frac{(y(t_p) - y(\infty))}{y(\infty)} \times 100\%$$

$\sigma_p\%$: 表征最大动态偏差的相对值, 反映了系统的阻尼程度。





3.1.2 时域性能指标

4) 调整时间

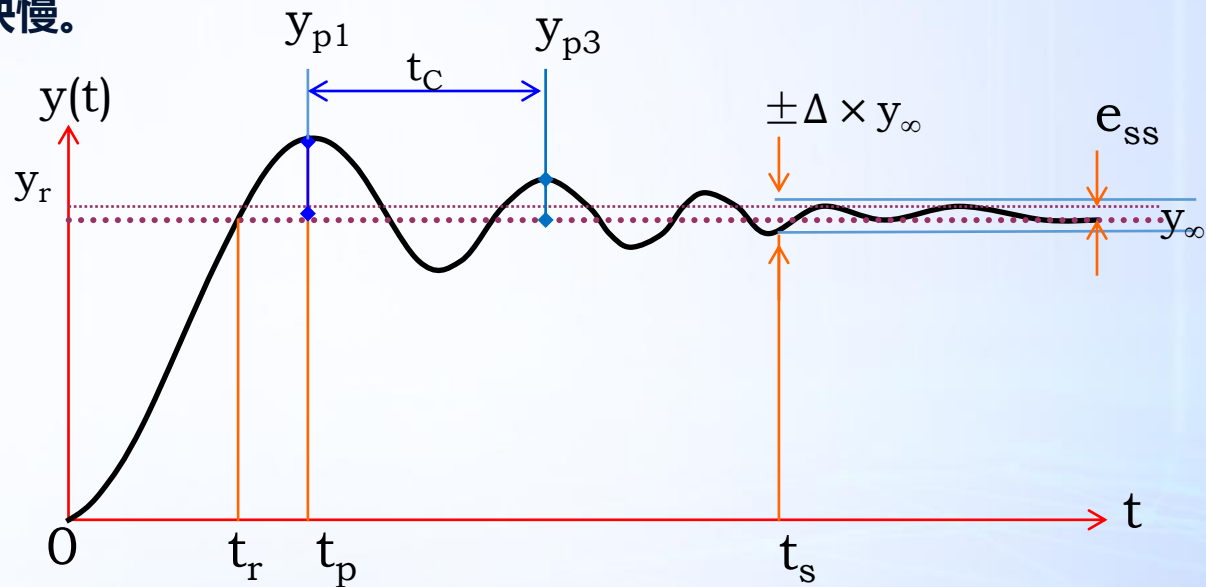
t_s ----- $y(t)$ 进入到指定的误差限所需最短时间。

t_s : 表征系统过渡过程的持续时间, 即整体响应快慢。

5) 振荡周期

t_c ----- 两个相邻同向峰值间的时间。

t_c : 表征系统工作频率的快慢。





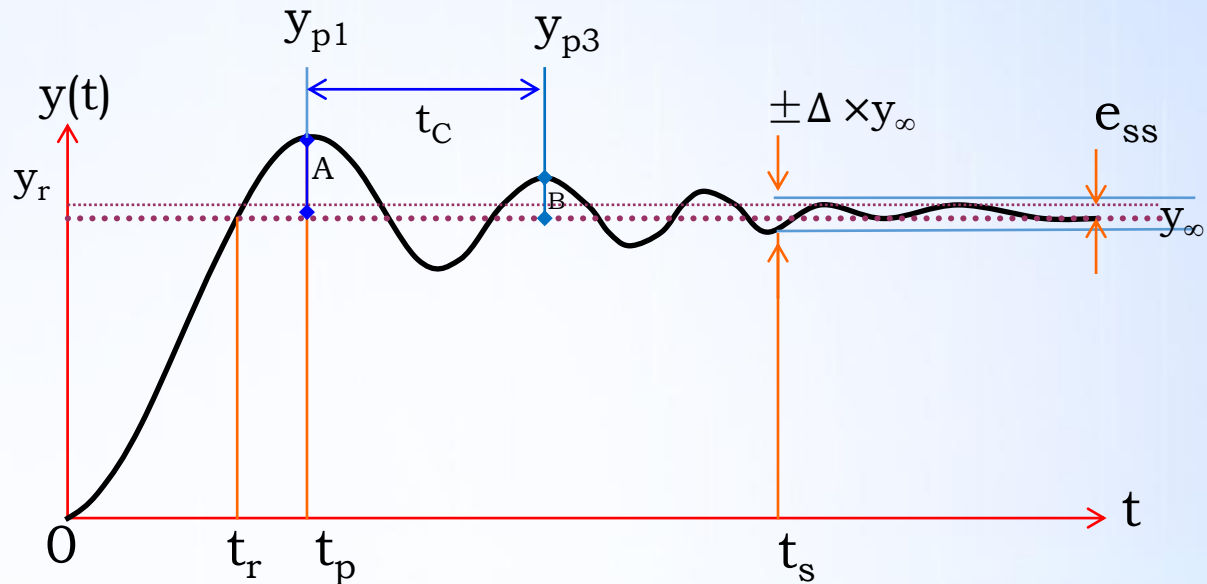
A: 第一个波幅
B: 第三个波幅

衰减率: $\psi = 1 - \frac{y_{p3} - y_{\infty}}{y_{p1} - y_{\infty}} = \frac{A-B}{A}$

m和 ψ ：表征系统的稳定性。

$$e_{ss} = y_r - y_{\infty}$$

e_{ss} : 表征系统的稳态精度, 即稳态准确性。





3.1.2 时域性能指标

2、误差积分指标

又称为误差准则或误差积分准则，误差 $e(t)=r(t)-y(t)$

1)平方误差积分

$$ISE = \int_0^{t_s} e^2(t) dt$$

2) 绝对误差积分

$$IAE = \int_0^{t_s} |e(t)| dt$$

3)时间乘误差平方积分

$$ITSE = \int_0^{t_s} te^2(t) dt$$

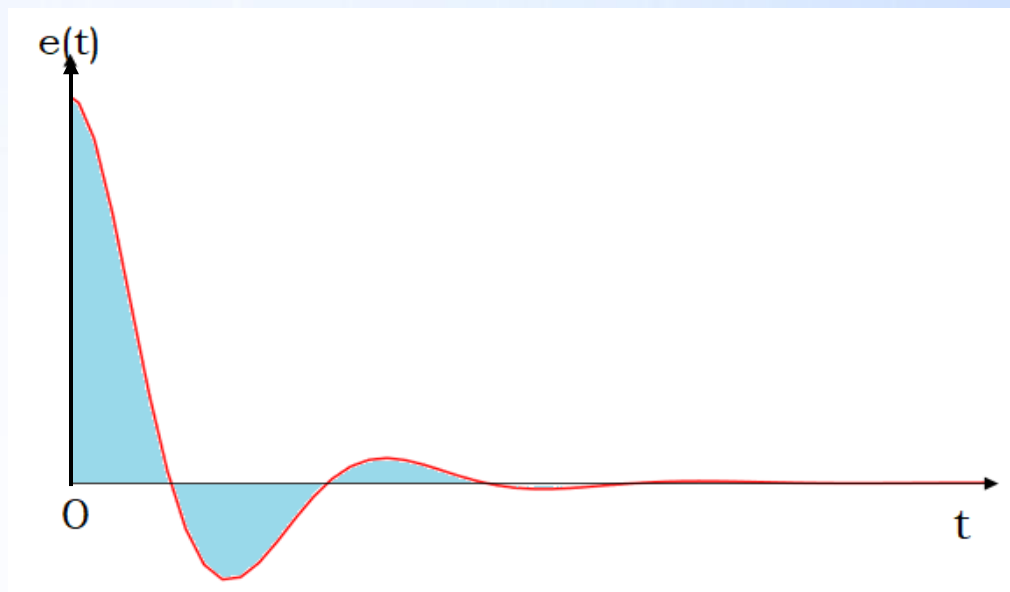
4) 时间乘绝对误差积分

$$ITAE = \int_0^{t_s} t|e(t)| dt$$

特点：综合性指标，不适用于人工计算，适用于计算机求解。

只反映系统的动态特性，不反映稳态特性。

适用场合：求解控制系统的最佳控制律或最佳控制器参数。





3.1.2 时域性能指标

2、误差积分指标

几种误差积分指标的比较：

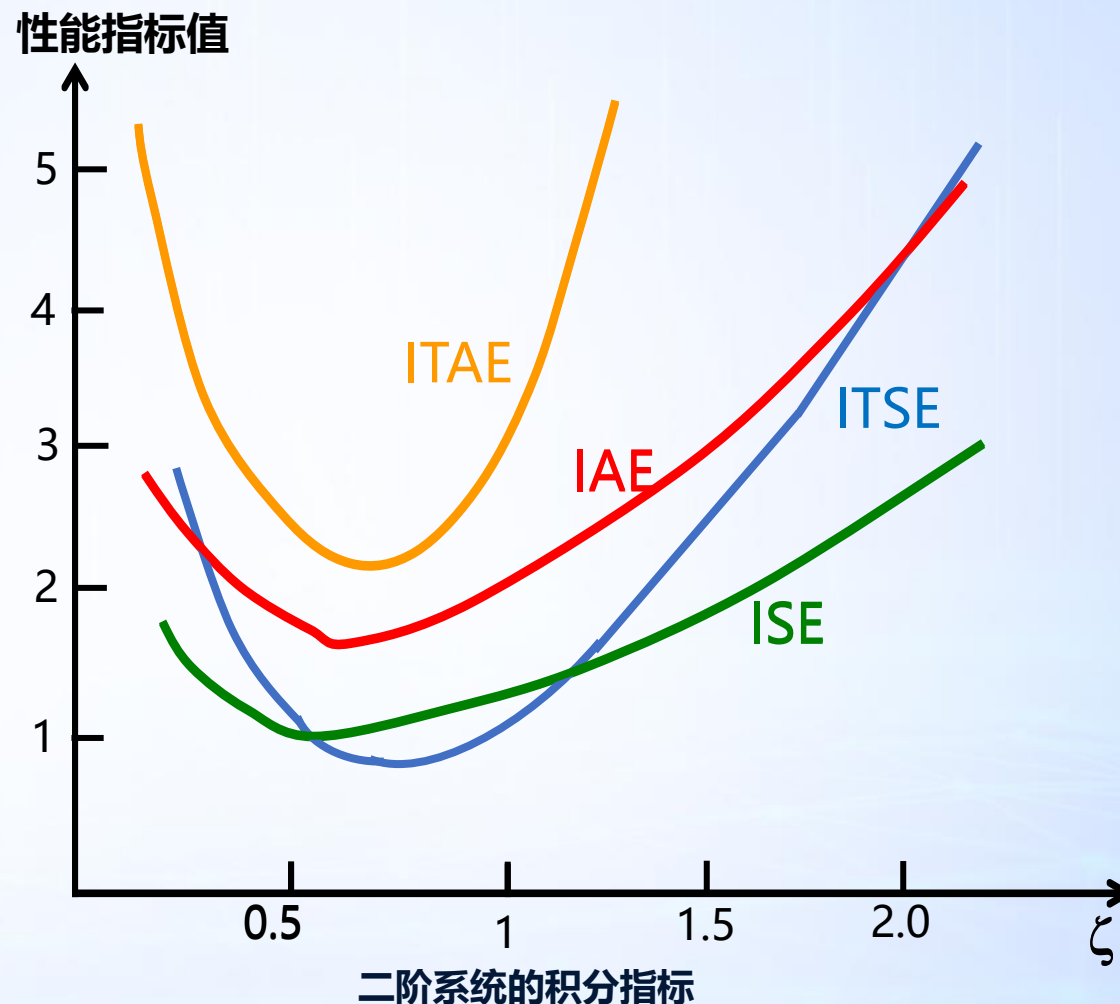
ISE: 重大误差，轻后期小误差，选择性差。

IAE: 指标对大小误差加权平均，选择性改善。

ITSE: 重后期大误差，选择性较好。

ITAE :指标着重于后期小误差，选择性最好。

选择性是指指标能否尽快地搜索到最佳值，在图中表现为曲线变化率的大小。

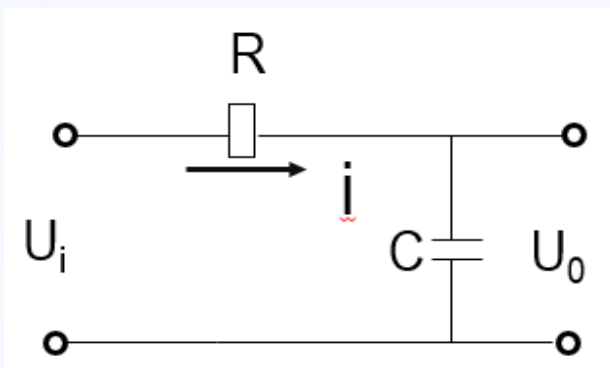




3.2.1 标准一阶系统的数学模型

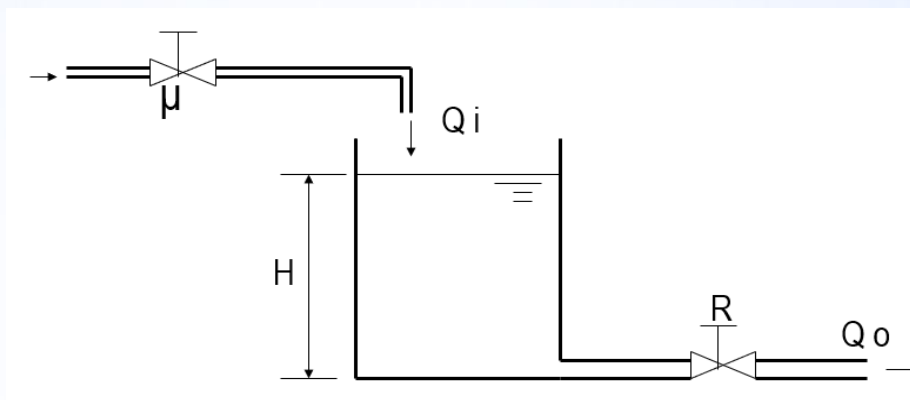
- 一阶系统: 用一阶微分方程表示的系统, 比如典型环节中的惯性环节、积分环节、实际微分环节等。

实例:



RC充电电路

$$RC \frac{du_0(t)}{dt} + u_0(t) = u_i(t)$$



单容水箱

线性化后: $\left(\frac{2\sqrt{H_0}}{k} F \right) \frac{dH}{dt} + H = \left(k_\mu \frac{2\sqrt{H_0}}{k} \right) \mu$



3.2.1 标准一阶系统的数学模型

■ 标准一阶系统：增益系数为1的一阶线性系统

■ 微分方程：
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

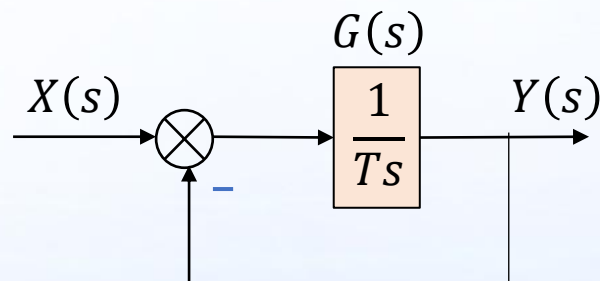
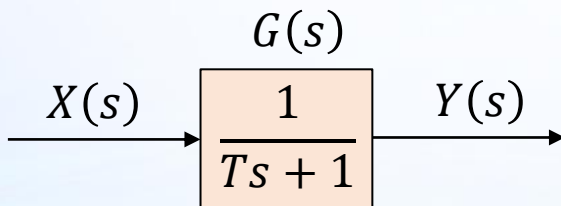
■ 传递函数：
$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

T为时间常数，是标准一阶系统的特征参数，由系统的结构和元件的参数决定。

对RC电路：电阻为R，电容为C，时间常数 $T=RC$

对单容水箱：水容为 $C=F$ ，水阻为 $R=2\frac{\sqrt{H_0}}{K}$ ，时间常数为 $T=CR=2F\frac{\sqrt{H_0}}{K}$

■ 方框图：





3.2.2 标准一阶系统的单位阶跃响应

■ **输入:** $x(t) = 1(t)$ $X(s) = \frac{1}{s}$

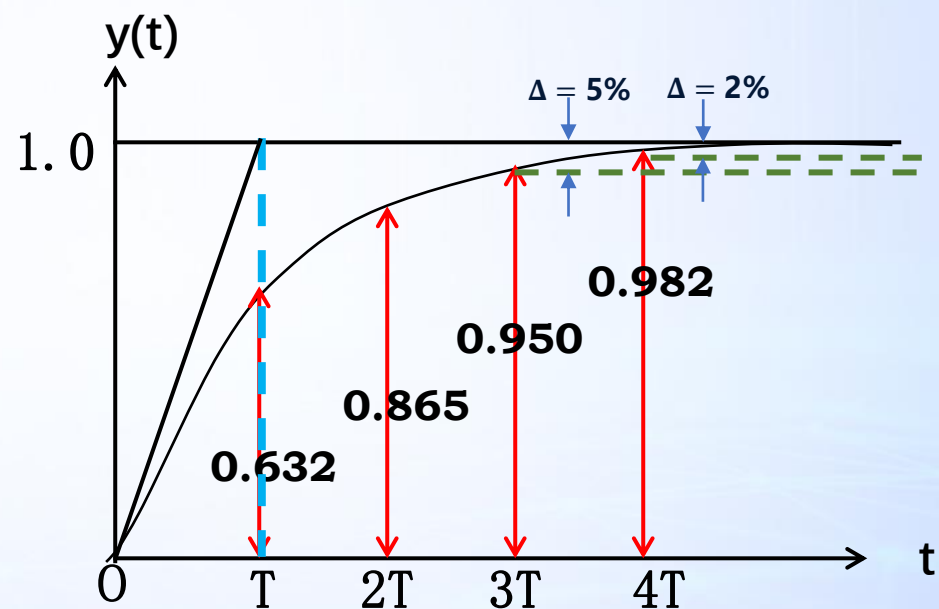
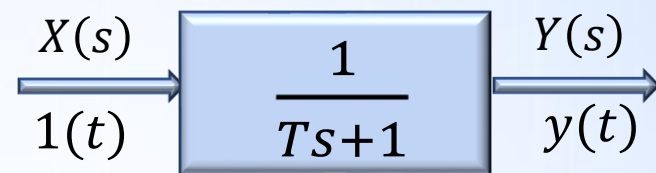
■ **输出:** $Y(s) = G(s)X(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}}$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\frac{t}{T}} (t \geq 0)$$

■ **响应曲线:**

- **特性分析:**
- 调节时间 $t_s = \begin{cases} 3T, & \Delta = 5\% \\ 4T, & \Delta = 2\% \end{cases}$
 - 稳态误差 $e_{ss} = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$
 - 初速: $y'(0) = \left. \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right|_{t=0} = \frac{1}{T}$
 - $T \rightarrow 0$, 惯性环节 \rightarrow 比例环节
 - $T \rightarrow \infty$, 惯性环节 \rightarrow 积分环节

■ **结论:** 无超调; 无静差; T 越小, 响应越快。





3.2.3 标准一阶系统的单位斜坡响应

■ 输入: $x(t) = t \times 1(t) \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$

■ 输出: $Y(s) = G(s)X(s) = \frac{T}{s^2(Ts+1)}$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + \frac{1}{T}}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \underbrace{(t - T)}_{\text{稳态分量}} + \underbrace{Te^{-\frac{t}{T}}}_{\text{动态分量}} \quad (t \geq 0)$$

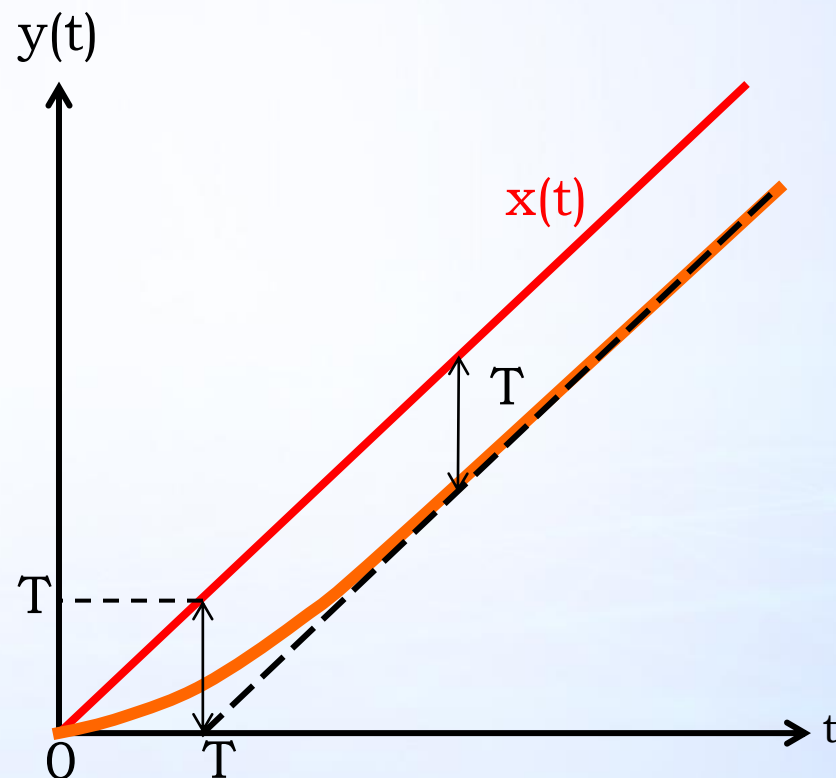
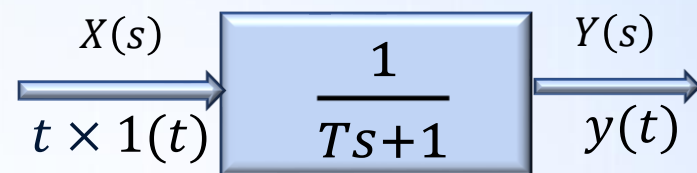
■ 响应曲线:

■ 分析: 初始速度 $\dot{y}(0) = (1 - e^{-\frac{t}{T}})|_{t=0} = 0$

终止速度 $\dot{y}(\infty) = (1 - e^{-\frac{t}{T}})|_{t=\infty} = 1$

稳态误差 $e_{ss} = x(\infty) - y(\infty) = t - (t - T) = T$

■ 结论: 有静差; T 越小, 响应越快, 稳态误差越小。





3.2.4 标准一阶系统的单位脉冲响应

■ 输入: $x(t) = \delta(t)$ $X(s) = 1$

■ 输出: $Y(s) = G(s)X(s)$
$$= \frac{1}{Ts + 1}$$

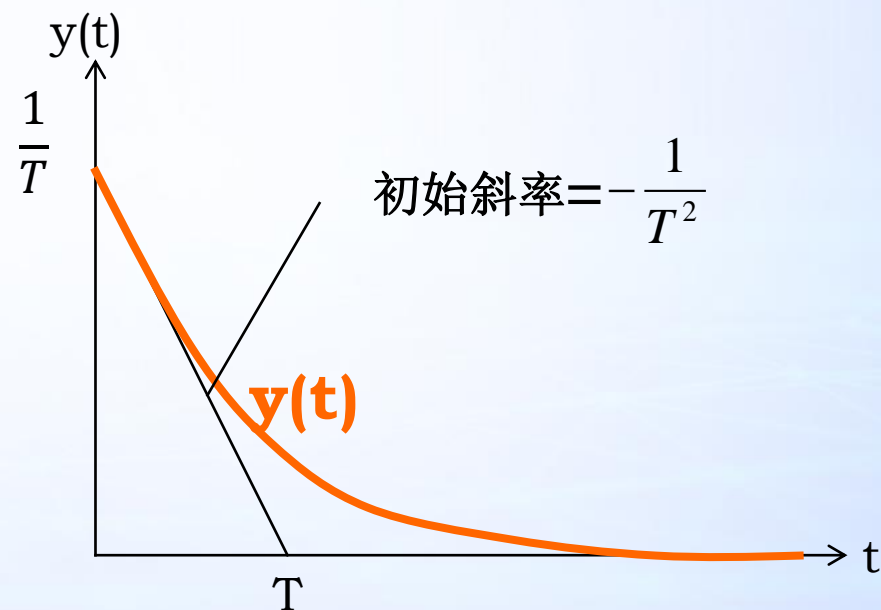
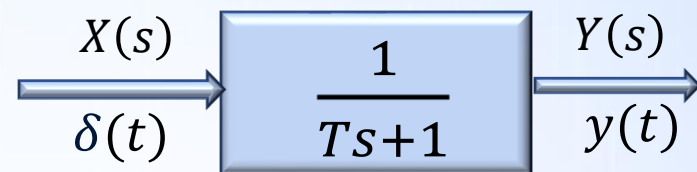
■ 响应曲线: $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$

■ 分析: $y(0) = \frac{1}{T}$, $y(\infty) = 0$

初始速度 $\dot{y}(0) = -\frac{1}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{T^2}$

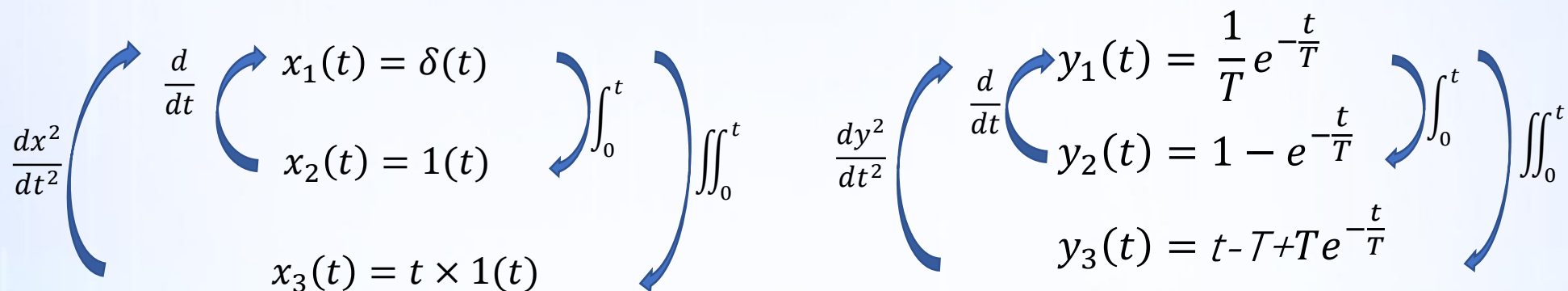
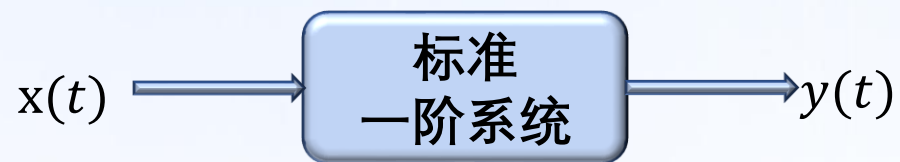
稳态误差 $e_{ss} = 0$

■ 结论: **T越小, 响应越快; 无静差。**





3.2.5 标准一阶系统不同输入响应的关联性



推广：对于线性定常系统，若其输入信号存在微积分关系，则对应的输出响应之间也存在微积分关系，反之亦然。



3.2.5 标准一阶系统不同相应响应下的关联性

例： 已知某线性定常系统的单位脉冲响应为 $g(t) = 2.7e^{-3t} - 12.5e^{-5t}$ ，求其单位阶跃响应 $y_1(t)$ 和单位斜坡响应 $y_2(t)$ 。

解： 利用输入、输出信号的积分关系可得：

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \int_0^t (2.7e^{-3t} - 12.5e^{-5t}) dt \\&= -\frac{2.7}{3}e^{-3t} \Big|_0^t + \frac{12.5}{5}e^{-5t} \Big|_0^t \\&= -0.9e^{-3t} + 0.9 + 2.5e^{-5t} - 2.5 \\&= -1.6 - 0.9e^{-3t} + 2.5e^{-5t}\end{aligned}$$

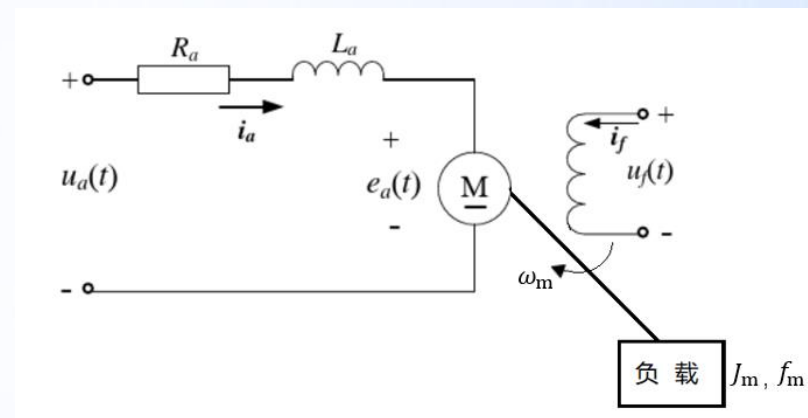
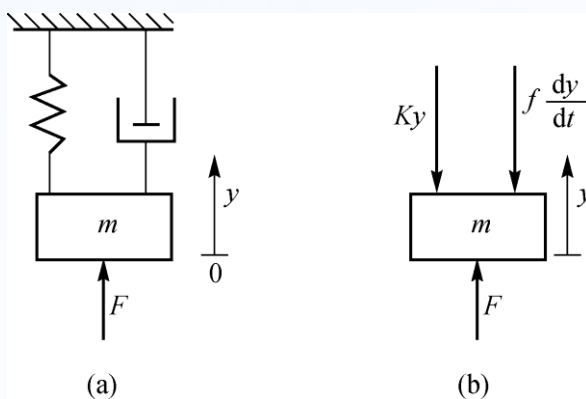
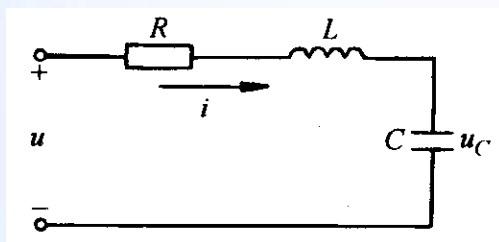
$$\begin{aligned}y_2(t) &= \int_0^t (-1.6 - 0.9e^{-3t} + 2.5e^{-5t}) dt \\&= -1.6t \Big|_0^t - \frac{0.9}{3}e^{-3t} \Big|_0^t + \frac{2.5}{5}e^{-5t} \Big|_0^t \\&= -1.6t + 0.3e^{-3t} - 0.3 - 0.5e^{-5t} + 0.5 \\&= 0.2 - 1.6t + 0.3e^{-3t} - 0.5e^{-5t}\end{aligned}$$



3.3.1 二阶系统的数学模型

二阶系统：可用二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。

实例：



$$LC \frac{d^2}{dt^2} u_c + RC \frac{d}{dt} u_c + u_c = u$$

$$LC \frac{d^2}{dt^2} u_c + RC \frac{d}{dt} u_c + u_c = u$$

$$\begin{aligned} & J_m L_a \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ & + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) \\ & = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_C(t)}{dt} - R_a M_C(t) \end{aligned}$$



3.3.1 二阶系统的数学模型

二阶系统的闭环传递函数:

一般式:

$$\textcircled{1} \quad \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b_1 s + b_2}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{b_1 s}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{b_1}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

标准式:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{k}{Ts^2 + s + K}$$

两个特征参数: ζ — 阻尼系数;
 ω_n — 无阻尼自然振荡频率。

T — 时间常数;
 K — 增益。

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{KT}} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{T}}$$

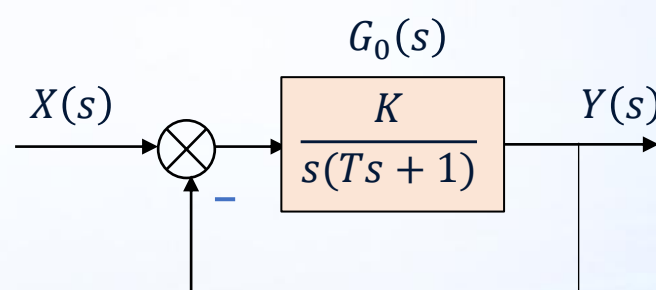
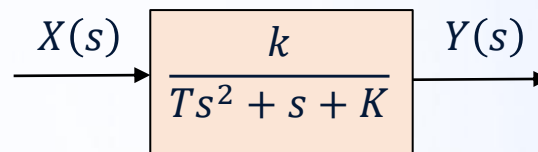
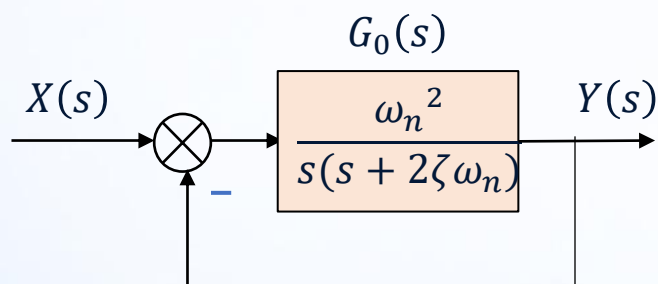
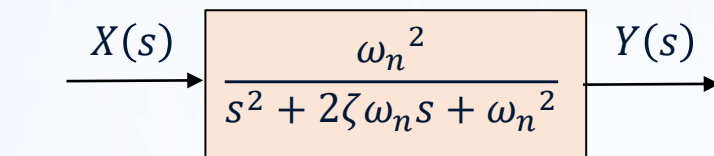


3.3.1 二阶系统的数学模型

标准二阶系统:

微分方程: $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$ $T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = Kx(t)$

方框图:



开环传递函数:

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

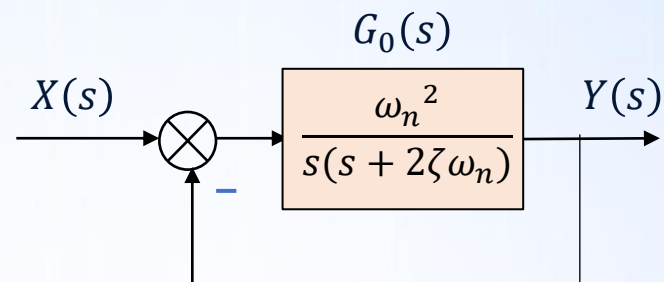
$$G_0(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$



3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

■ 闭环特征方程: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

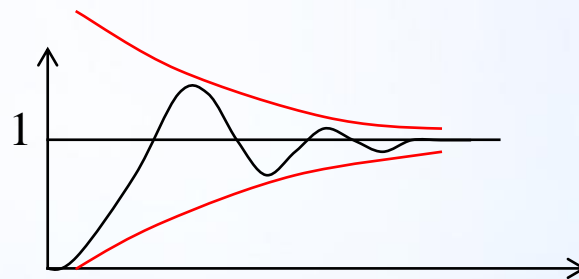
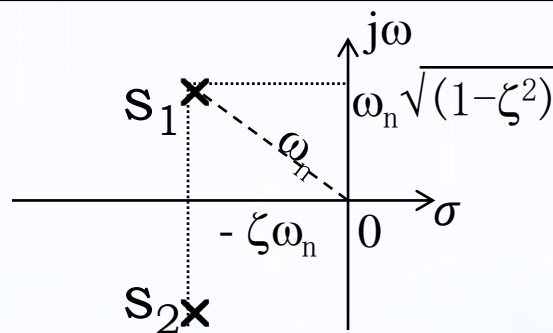
■ 闭环特征根: $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$



根据阻尼系数 ζ 的大小可分成7大类

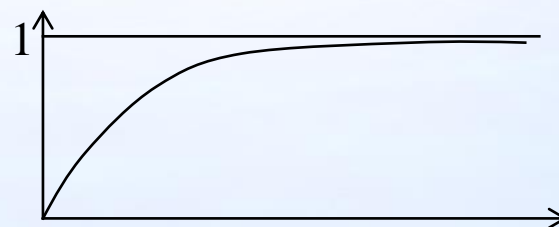
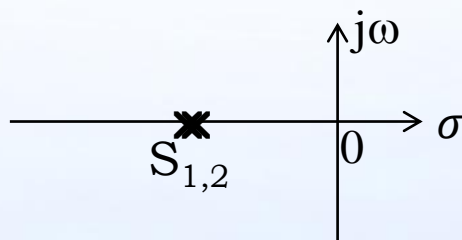
1) $0 < \zeta < 1$

欠阻尼



2) $\zeta = 1$

临界阻尼

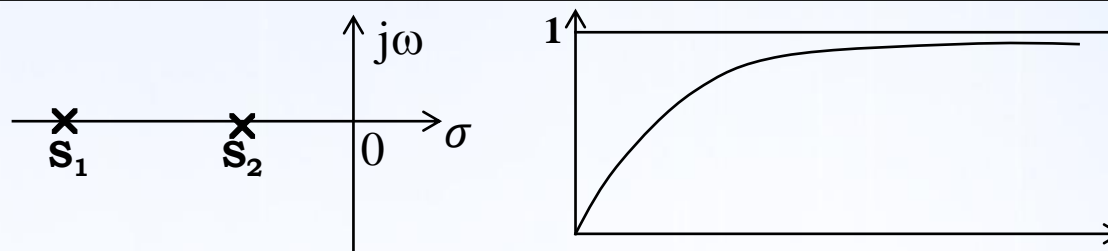




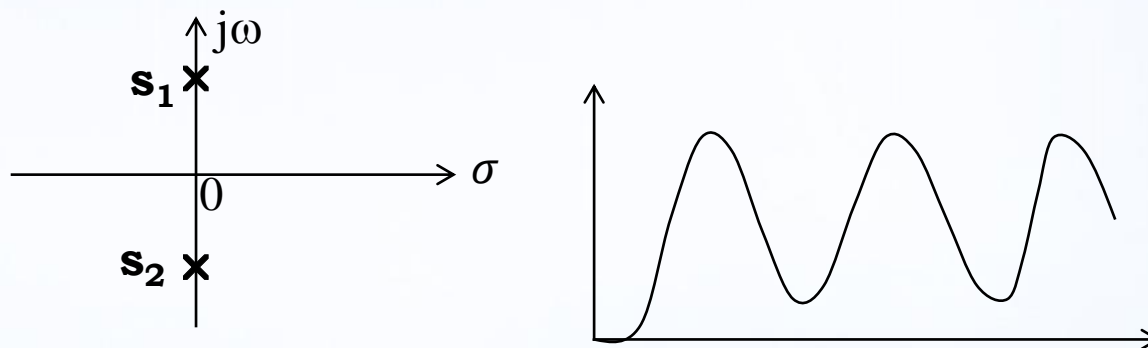
3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 根据阻尼系数 ζ 的大小可分成7大类

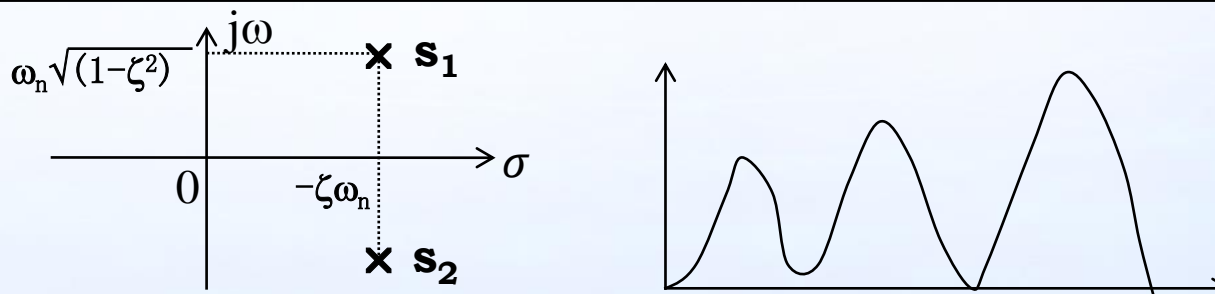
3) $\zeta > 1$
过阻尼



4) $\zeta = 0$
无阻尼



5) $-1 < \zeta < 0$
负欠阻尼



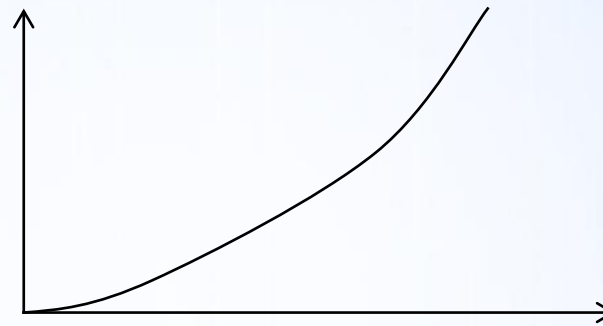
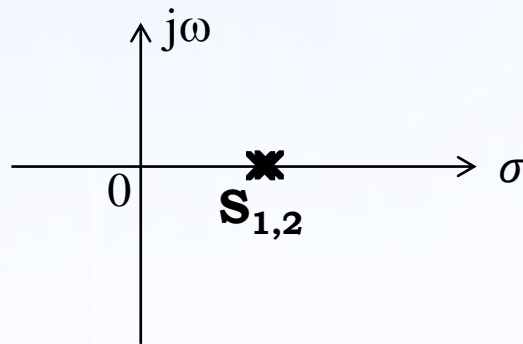


3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$ 根据阻尼系数 ζ 的大小可分成7大类

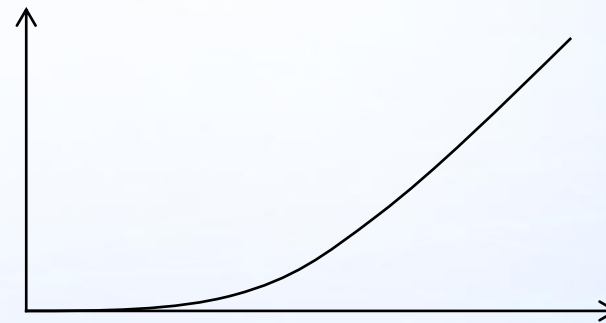
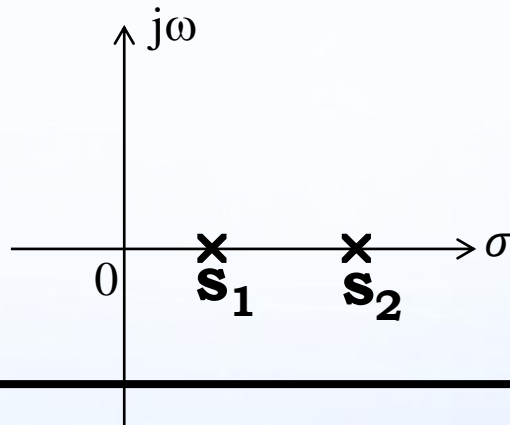
6) $\zeta = -1$

负临界阻尼



7) $\zeta < -1$

负过阻尼



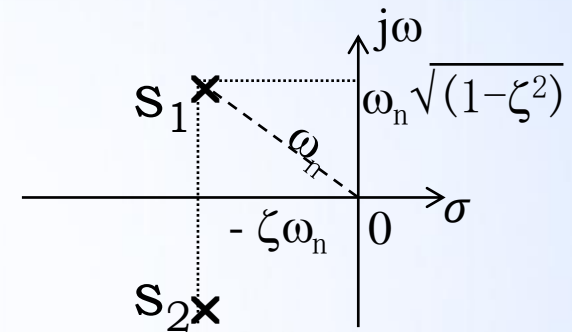


3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

- 1) $0 < \zeta < 1$ 欠阻尼情况-----一对左半平面的共轭复根，衰减振荡

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{-----有阻尼自然振荡频率}$$



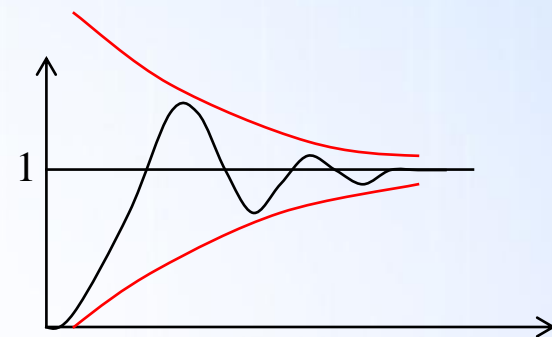


3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad \text{--初相角}$$

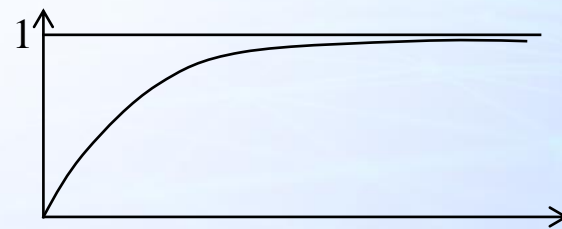
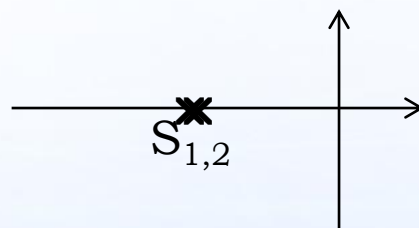
包络线方程: $y(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$



2) $\zeta=1$ 临界阻尼情况----左半平面相等的实根，对应时间常数相等的两个惯性

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} \end{aligned}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$





3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

- 3) $\zeta > 1$ 过阻尼情况-----左半平面不等的实根，对应时间常数不等的两个惯性

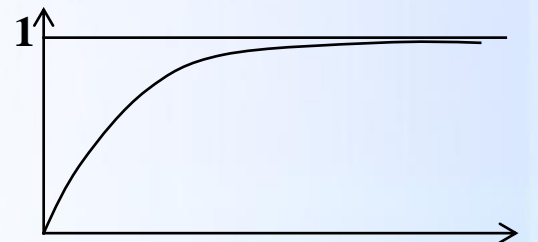
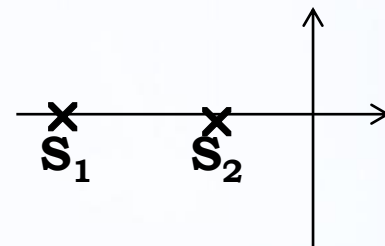
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + p_1)(s + p_2)}$$
$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + p_1} + \frac{C}{s + p_2}$$

$$p_1 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n \quad p_2 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

$$p_1 * p_2 = \omega_n^2$$

$$A = 1 \quad B = \frac{p_2}{p_1 - p_2} \quad C = -\frac{p_1}{p_1 - p_2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{-p_1 t} - p_1 e^{-p_2 t})$$



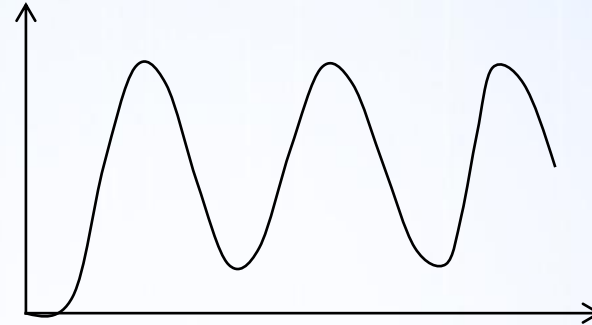


3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

4) $\zeta=0$ 无阻尼情况-----一对共轭虚根，等幅振荡

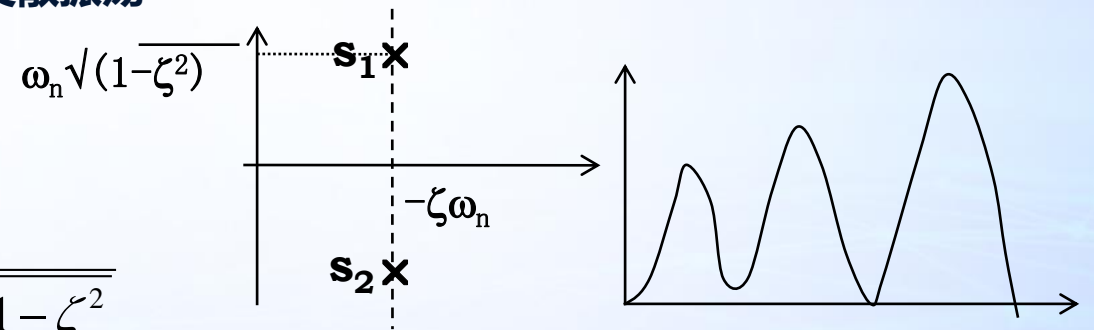
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - \cos(\omega_n t)$$



5) $-1 < \zeta < 0$ 负阻尼情况-----一对右半平面的共轭复根，发散振荡

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}} \end{aligned}$$





3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

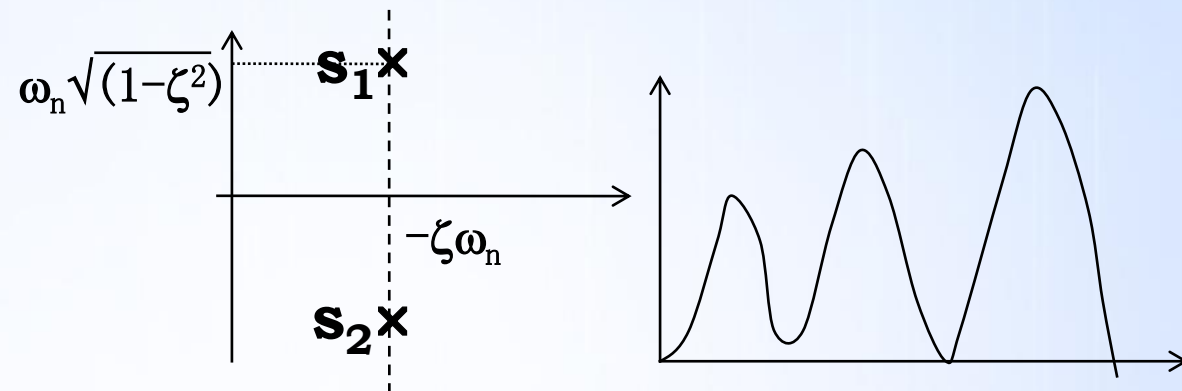
$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \text{---- 阻尼自然振荡频率}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad \text{---- 初相角}$$

$$\text{包络线方程: } y(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$$



以上表达式与欠阻尼情况的完全相同，但 $-\zeta\omega_n > 0$ 。

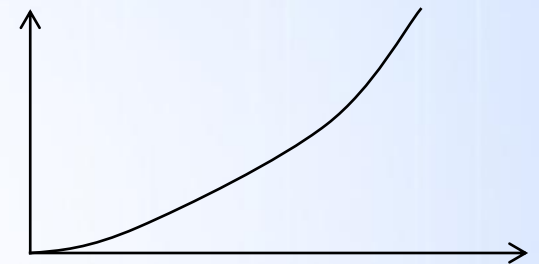
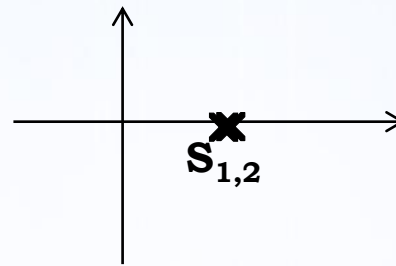


3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

- 6) $\zeta = -1$ 负临界阻尼情况-----右半平面相等的实根，单调发散

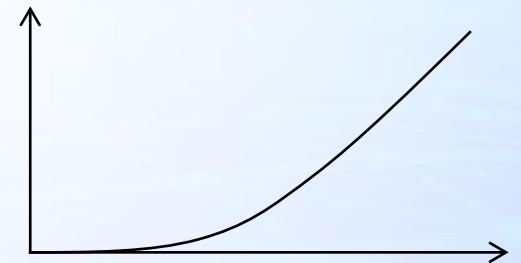
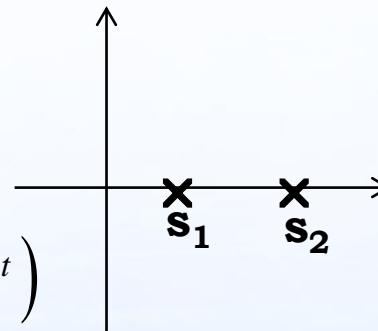
$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 - 2\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n)^2}$$
$$= \frac{1}{s} + \frac{\omega_n}{(s - \omega_n)^2} - \frac{1}{s - \omega_n}$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 + (\omega_n t - 1)e^{-\zeta\omega_n t}$$



- 7) $\zeta < -1$ 负过阻尼情况-----右半平面不等的实根，单调发散

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} (p_2 e^{-p_1 t} - p_1 e^{-p_2 t})$$

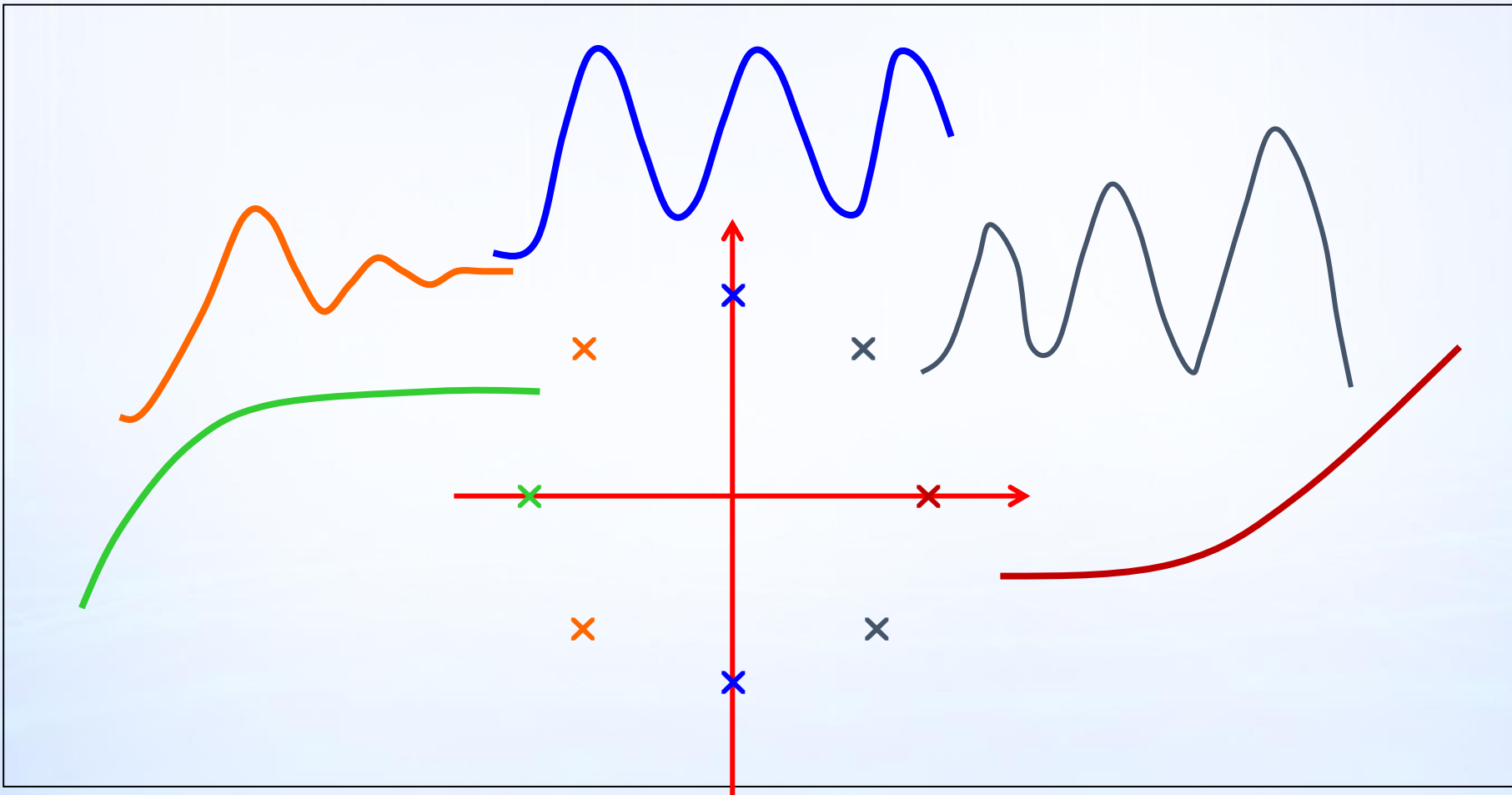


这个阶跃响应解与 $\zeta > 1$ 的形式相同但由于 $e^{-p_1 t}$ 和 $e^{-p_2 t}$ 项发散而发散。



3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

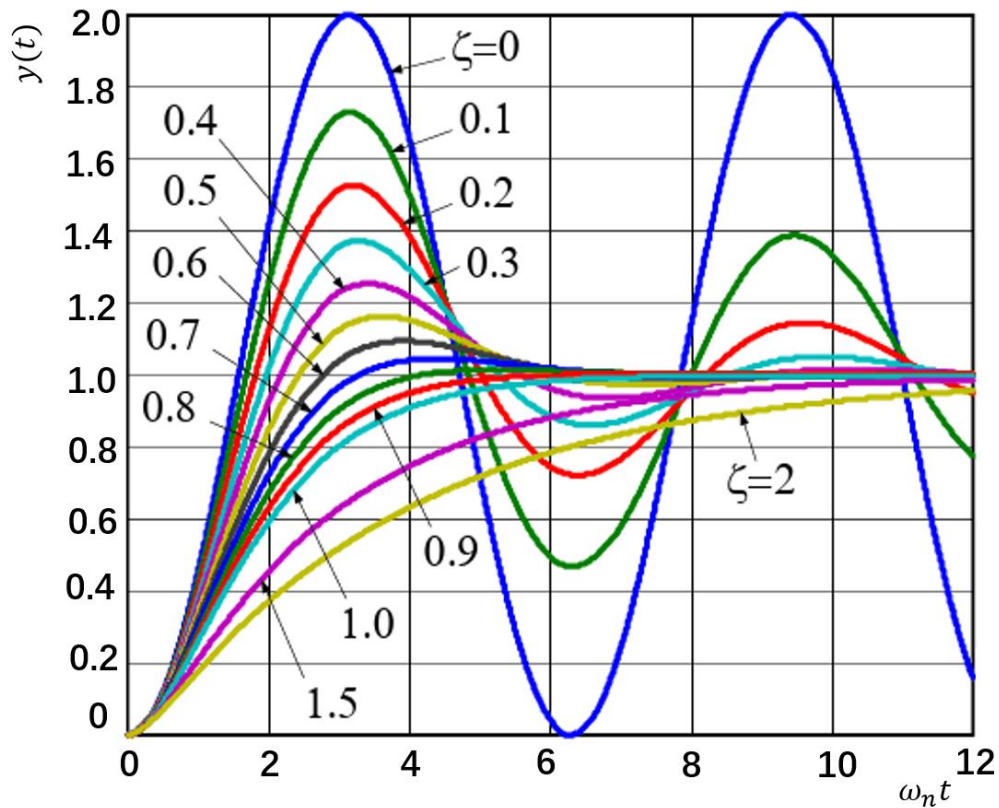
总结：特征根与动态响应的关系





3.3.2 标准二阶系统的单位阶跃响应

$\zeta \geq 0$ 时标准二阶系统的单位阶跃响应曲线簇



总结:

- $\zeta \geq 1$, 为单调过程, ζ 越大响应越慢。 $\zeta=1$ 时为单调过程中响应最快的。
- $0 < \zeta < 1$, 为衰减振荡过程, ζ 越小振荡越剧烈。
- ζ 在 0.4~0.8 之间, 响应较快, 振荡不严重。



3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (0 < \zeta < 1)$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \theta) \quad \text{(阶跃响应)}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right)$$

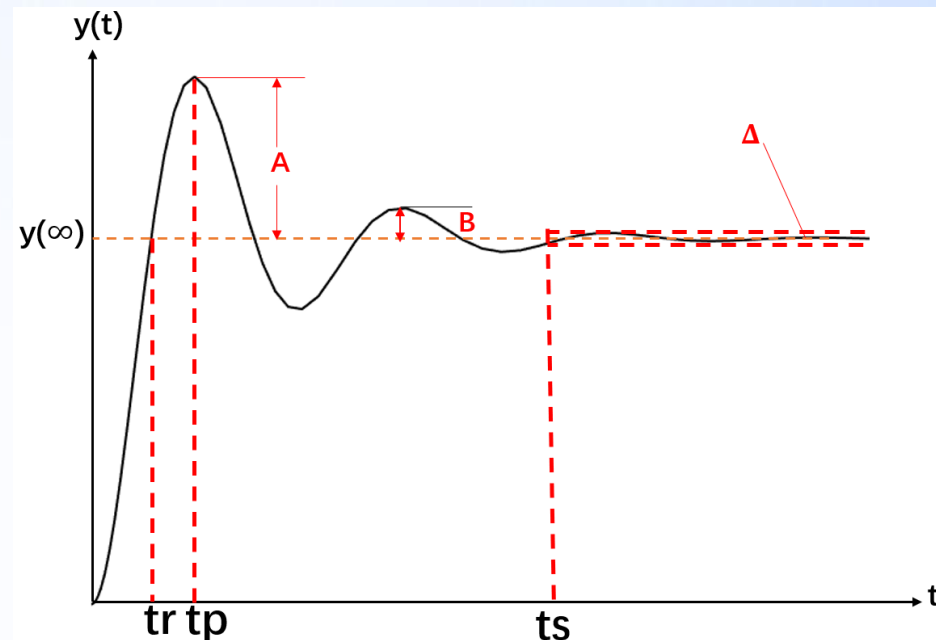
1) t_r 的计算(设 $y(t_r) = 1$)

$$\because y(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1$$

$$\therefore \sin(\omega_d t_r + \theta) = 0 \quad \text{即} \quad \omega_d t_r + \theta = \pi$$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

结论: ζ 一定时, $\omega_n \uparrow \rightarrow t_r \downarrow$, 而 ω_n 一定时, $\zeta \uparrow \rightarrow t_r \uparrow$





3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

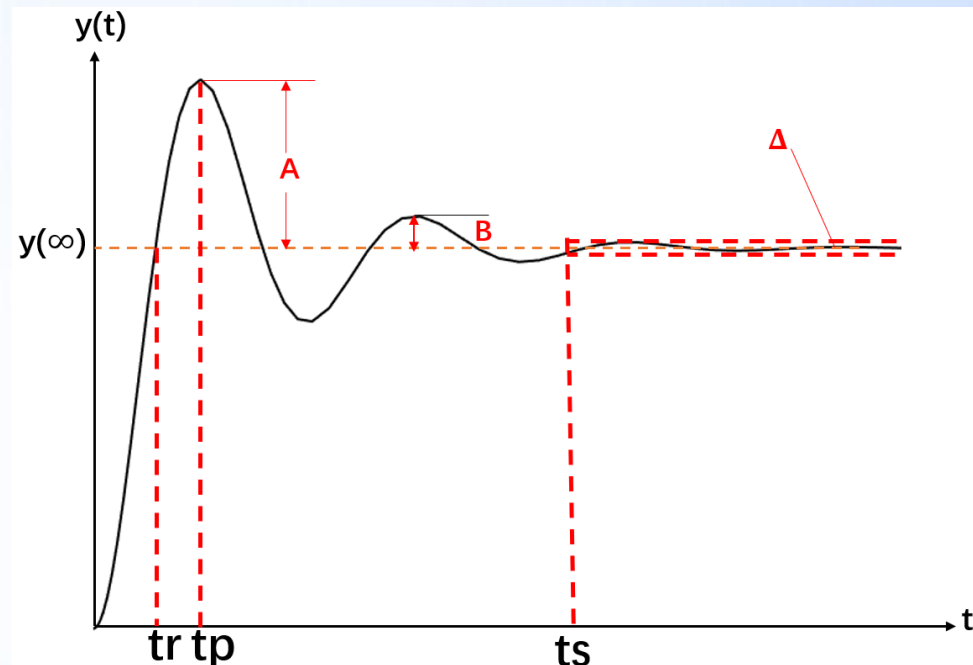
2) t_p 的计算

由 $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ 可导出

$$\sin \omega_d t_p = 0$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (t_r = t_p - \frac{\theta}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}})$$

结论: ζ 一定时, $\omega_n \uparrow \rightarrow t_p \downarrow$, 而 ω_n 一定时, $\zeta \uparrow \rightarrow t_p \uparrow$

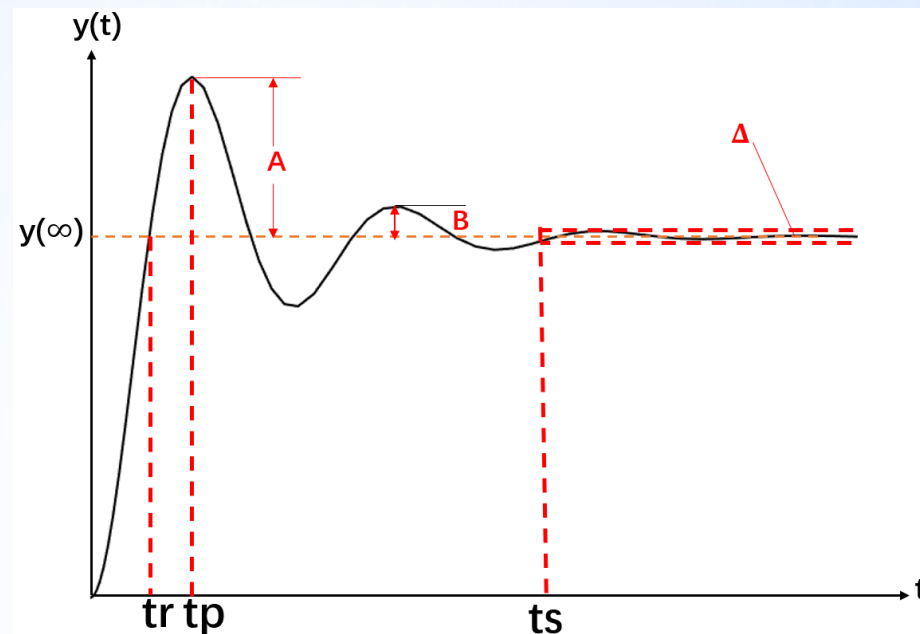




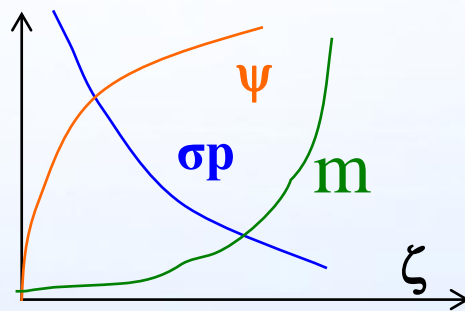
3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

3) $\sigma_p\%$ 的计算

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 100 \times \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = 100[y(t_p) - 1] \\ &= 100 \left[-e^{-\zeta \omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_p \right) \right] \\ &= 100e^{-\zeta \omega_n t_p} = 100e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\end{aligned}$$



$\sigma_p\%$ 只与 ζ 有关, 见右图。



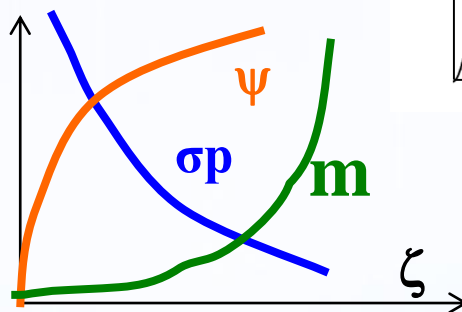
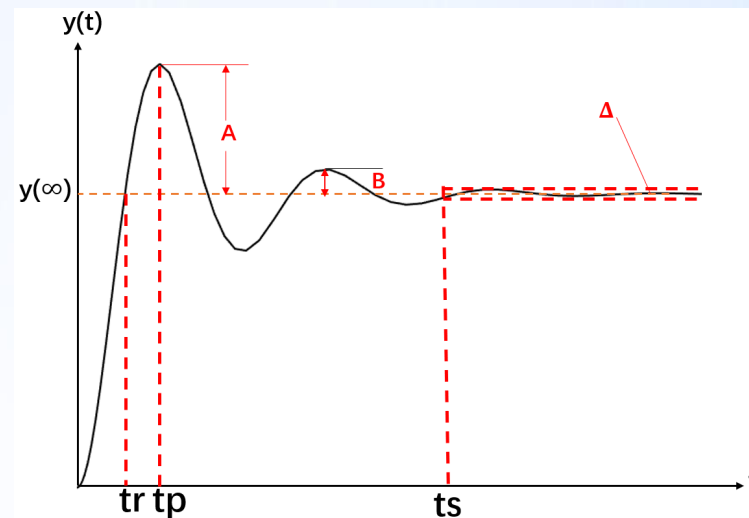


3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

4) 衰减率 ψ 的计算

$$\begin{aligned}\psi &= 1 - \frac{A - B}{A} = \frac{A - B}{A} \\ &= 1 - \frac{e^{-\frac{3\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}} = 1 - e^{-\frac{2\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\end{aligned}$$

ψ 也只与 ζ 有关, 参见上图

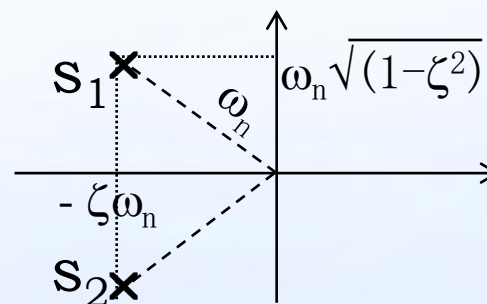


5) 衰减指数 m 的计算

定义特征根的实部与虚部大小之比为 m , 又称衰减比:

$$m = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

m 也只与 ζ 有关, 见图.





3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

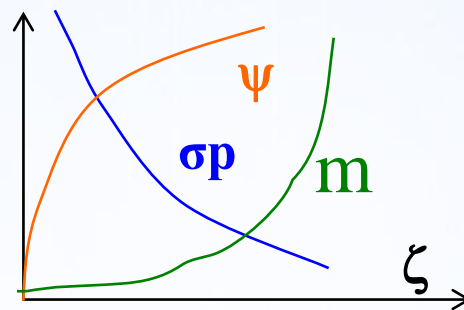
■ ψ, m, σ_p 和 ζ 的关系

四者存在对应关系:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m} = 1 - \sigma_p^2 \quad (0.75 \cdots 0.9)$$

$$\sigma_p = 100e^{-\pi m} = 100\sqrt{1-\psi} \quad (50 \cdots 31.6)$$

$$m = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \zeta = \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}} \quad (0.216 \cdots 0.344)$$

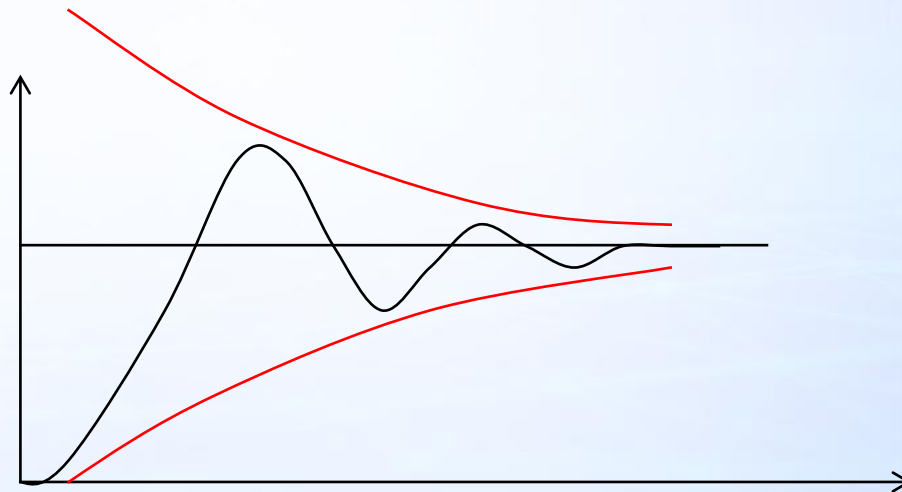


■ 6) 调整时间 t_s 的计算

用包络线 $z(t)$ 代替 $y(t)$: $z(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$

根据 t_s 的定义, 得到不等式方程:

$$|z(t) - y(\infty)| \leq \Delta \times y(\infty) \quad \text{即} \quad |z(t) - 1| \leq \Delta$$



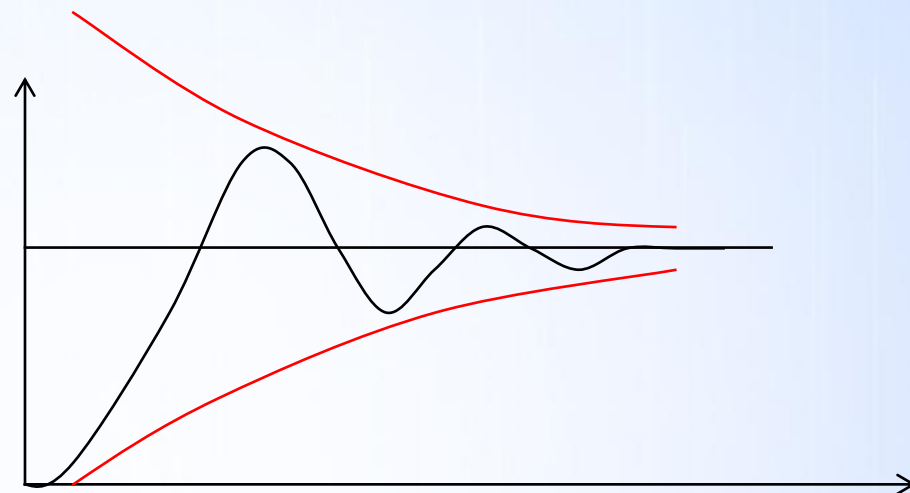


3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

有: $\left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right| \leq \Delta$

$$e^{-\zeta\omega_n t} = \sqrt{1-\zeta^2} \cdot \Delta$$

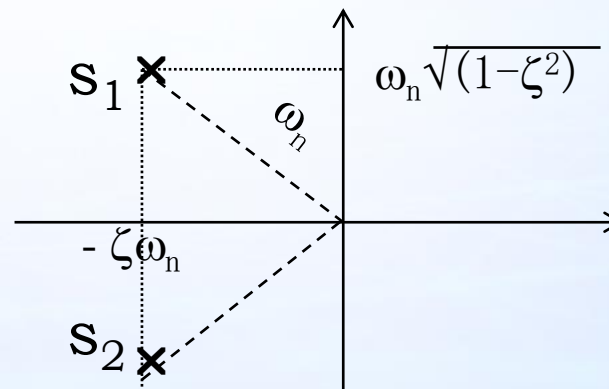
$$-\zeta\omega_n t = \ln \Delta + \ln \sqrt{1-\zeta^2} \approx \ln \Delta \quad t_s \approx -\frac{\ln \Delta}{\zeta\omega_n}$$



一般 Δ 取为0.05 或0.02, 可求得

$$t_s \approx \begin{cases} \frac{3}{\zeta\omega_n} & \Delta = 0.05 \\ \frac{4}{\zeta\omega_n} & \Delta = 0.02 \end{cases}$$

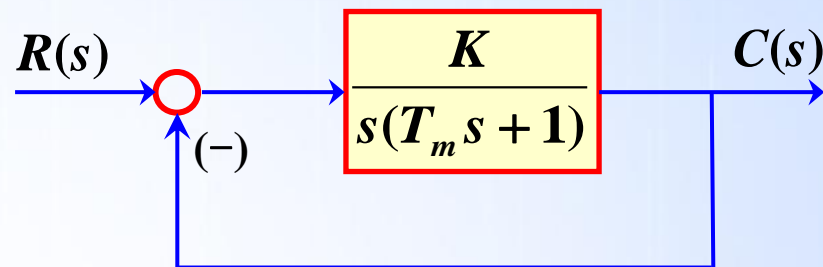
t_s 与 $\zeta\omega_n$ 成反比, $\zeta\omega_n$ 为极点至虚轴的距离.





3.3.3 欠阻尼标准二阶系统的动态性能指标计算

例： 已知图中 $T_m=0.2$, $K=5$, 求系统单位阶跃响应指标 t_r 、 t_p 、 t_s 、 $\sigma\%$ 。



解： 系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s(T_m s + 1) + K}$$

化为标准形式：

$$\Phi(s) = \frac{K / T_m}{s^2 + s / T_m + K / T_m} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

即有： $2\zeta\omega_n = 1/T_m = 5$, $\omega_n^2 = K/T_m = 25$

解得： $\omega_n = 5$, $\zeta = 0.5$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 0.486 \text{秒}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.73 \text{秒}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 1.2 \text{秒}$$

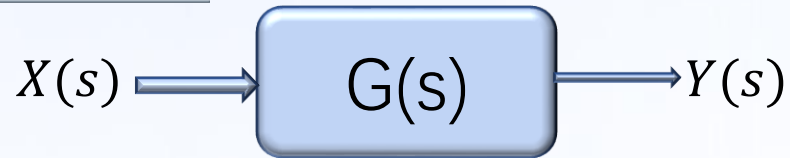
$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 16.3\%$$



3.4.1 高阶系统的常规分析法

1、高阶系统的定义

阶次 $n > 2$ 的系统。



2、高阶系统的阶跃响应

■ **传递函数:**
$$G(s) = \frac{b_{m+1}s^m + b_ms^{m-1} + \dots + b_2s + b_1}{s^n + a_ns^{n-1} + \dots + a_2s + a_1}$$

■ **系统输出:**
$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{b_{m+1}s^m + b_ms^{m-1} + \dots + b_2s + b_1}{s \prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{q: 一阶惯性环节的个数} \\ \text{r: 二阶振荡环节的个数} \end{array} \right\} \text{q} + 2\text{r} = \text{n}$$




3.4.1 高阶系统的常规分析法

进行部分分式分解:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{b_{m+1}s^m + b_ms^{m-1} + \dots + b_2s + b_1}{s \prod_{i=1}^q (s + p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$
$$= \frac{G(0)}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s + p_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k(s + \zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

进行拉氏反变换:

$$y(t) = \underbrace{G(0)}_{\text{q} \uparrow} + \sum_{j=1}^q \underbrace{A_j e^{-p_j t}}_{\text{q} \uparrow} + \sum_{k=1}^r \underbrace{[B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t)]}_{\text{r} \uparrow}$$




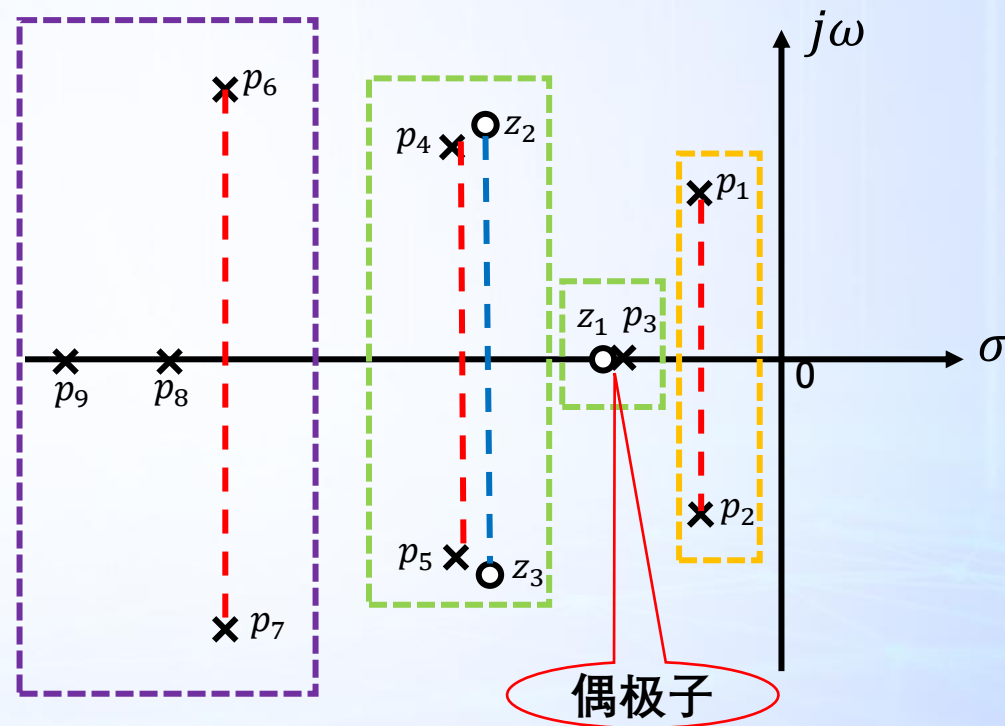
3.4.1 高阶系统的常规分析法

3、零极点分布与系数 A_j 、 B_k 、 C_k 大小的关系：

- 零极点相互靠近，对系数的影响就越小，对 $y(t)$ 的影响也越小，如绿色框中的零极点；
- 离虚轴较远的极点，衰减速度快，对 $y(t)$ 影响越小，如紫色框中的零极点；
- 极点附近无零点，且靠近虚轴，则此极点对 $y(t)$ 影响大，如黄色框中极点；
- 零极点非常接近或重合——偶极子，对 $y(t)$ 无影响。

结论：

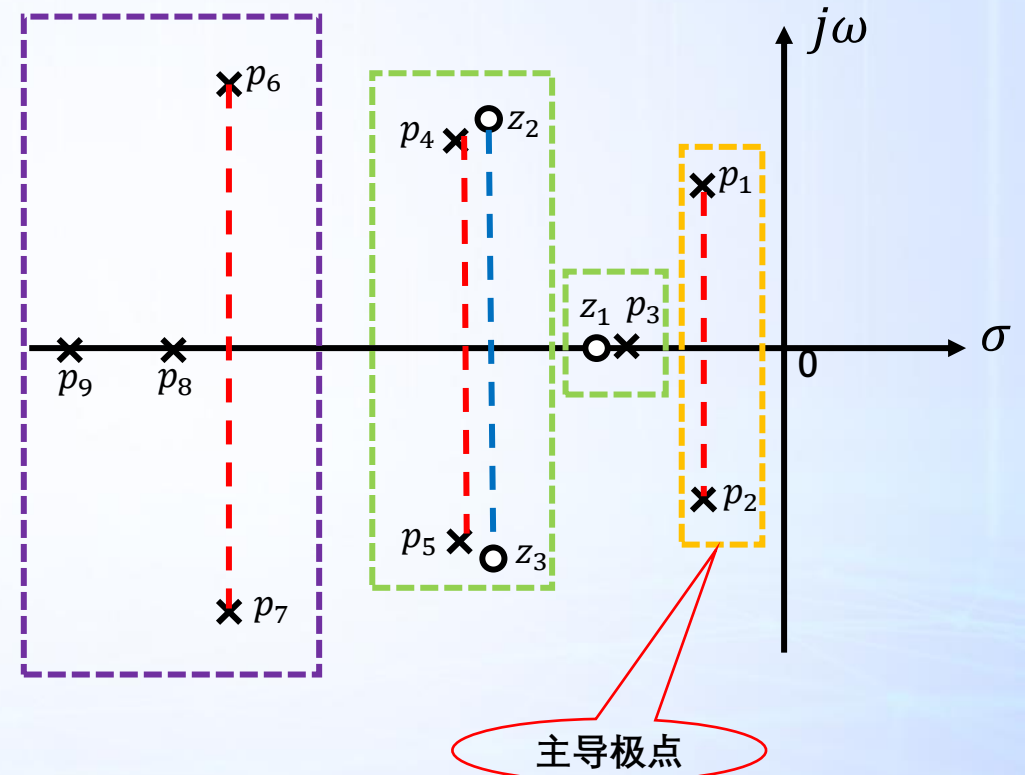
高阶系统的瞬态特性主要由系统传递函数中那些靠近虚轴而又远离零点的极点(主导极点)来决定。





3.4.2 高阶系统的简化分析法

- 高阶系统的瞬态特性主要由系统传递函数中那些靠近虚轴而又远离零点的极点来决定。
- 远离虚轴的极点的影响可忽略；
- **主导极点：** 实部绝对值小于其它极点实部绝对值的五分之一且附近无零点，如图中 p_1 、 p_2 。
- **简化分析原则：**
 - 若有主导极点存在，则简化为只有主导极点的系统。
 - 主导极点为实极点则简化为一阶系统；
 - 主导极点为共轭复极点则简化为二阶系统。





3.4.2 高阶系统的简化分析法

例：系统的方框图如图所示，试绘制输出 $y(t)$ 的单位阶跃响应曲线，并计算超调百分比、上升时间、峰值时间和调节时间（为 $\Delta = \pm 5\%$ ），并讨论能否用主导极点来简化系统的分析。

解：系统的闭环传递函数为：

$$G(s) = \frac{2.72}{s^3 + 5s^2 + 4s + 2.72}$$

特征根： $r = -4.2, -0.4 \pm 0.7i$

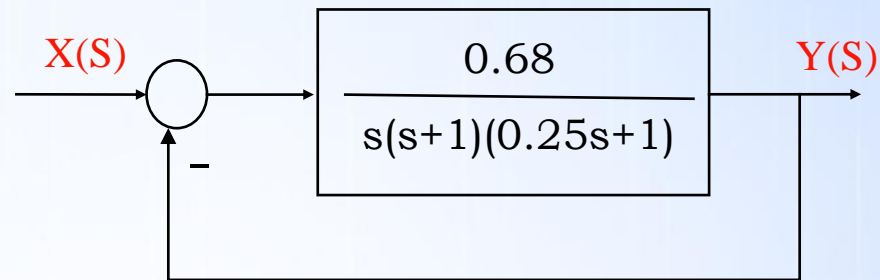
根据： 三阶系统闭环传递函数的标准形式：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{p\omega_n^2}{(s+p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

单位阶跃响应为：

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}e^{-pt} - \frac{1}{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}e^{-\zeta\omega_n t} \times \left\{ \beta\zeta^2(\beta-2)\cos\omega_d t + \frac{\beta\zeta^2(\beta-2)+1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t \right\}$$

其中： $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \beta = \frac{p}{\zeta\omega_n}$





3.4.2 高阶系统的简化分析法

本例中, $p = -4.2, \zeta = 0.5, \omega_n = 0.8, \omega_d = 0.69, \beta = 10.5$

系统的阶跃响应为:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - 0.04e^{-4.2t} - e^{-0.4t}(0.96\cos 0.69t + 0.81\sin 0.69t) \\ &= 1 - 0.04e^{-4.2t} - 1.26e^{-0.4t}\sin(0.69t + 0.87) \end{aligned}$$

绘制三阶系统的单位阶跃响应曲线:

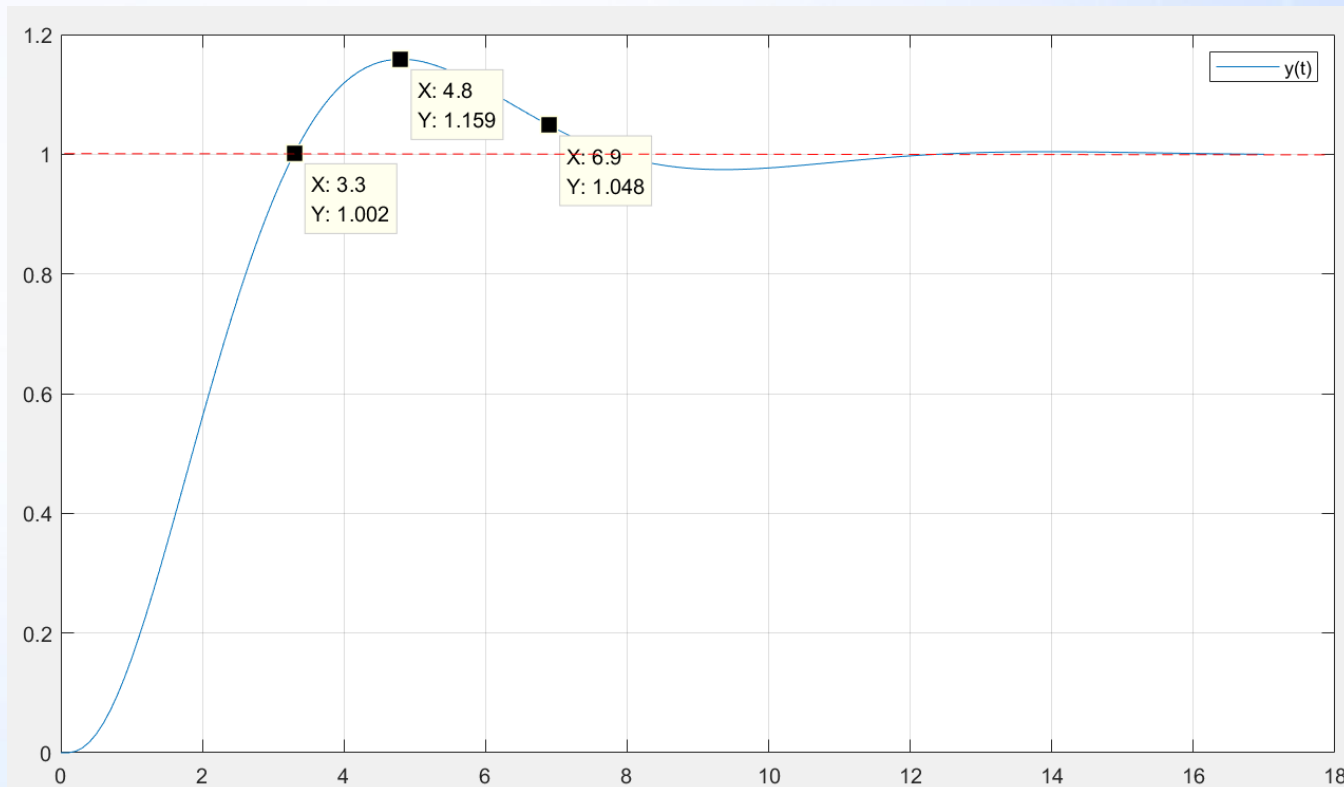
计算得到性能指标:

$$t_r = 3.3s;$$

$$t_p = 4.8s;$$

$$t_s = 6.9s;$$

$$\sigma_p\% = 15.9\% (\Delta = \pm 5\%).$$





3.4.2 高阶系统的简化分析法

因为：本例中实数极点与共轭复数极点离虚轴的距离之比为：4.2/0.4=10.5，

所以：共轭复数极点 $-0.4 \pm 0.7i$ 可以作为主导极点，使三阶系统降阶为主导极点对应的二阶系统：

$$G'(s) = \frac{0.64}{s^2 + 0.8s + 0.64}$$

$$\zeta = 0.5, \omega_n = 0.8$$

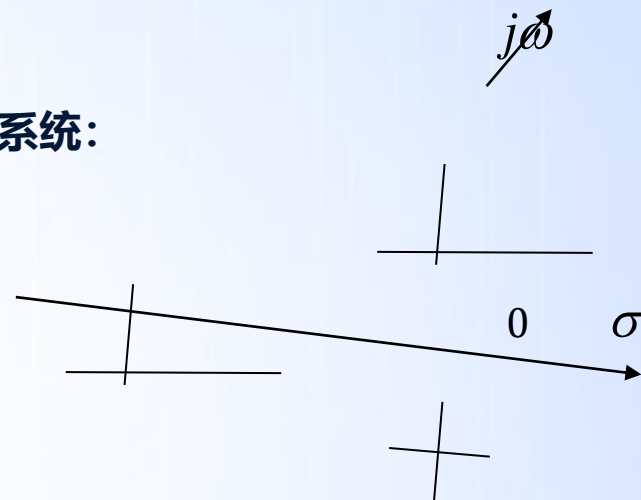
计算得： $\theta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = 1.05(\text{rad}), \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 0.69(\text{rad/s})$

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = 3.03\text{s};$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = 4.55\text{s};$$

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta \omega_n} = 7.5\text{s} (\Delta = \pm 5\%);$$

$$\sigma_p \% = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 16.3\%$$



原三阶系统的指标：

$$t_r = 3.3\text{s};$$

$$t_p = 4.8\text{s};$$

$$t_s = 6.9\text{s};$$

$$\sigma_p \% = 15.9\% (\Delta = \pm 5\%).$$

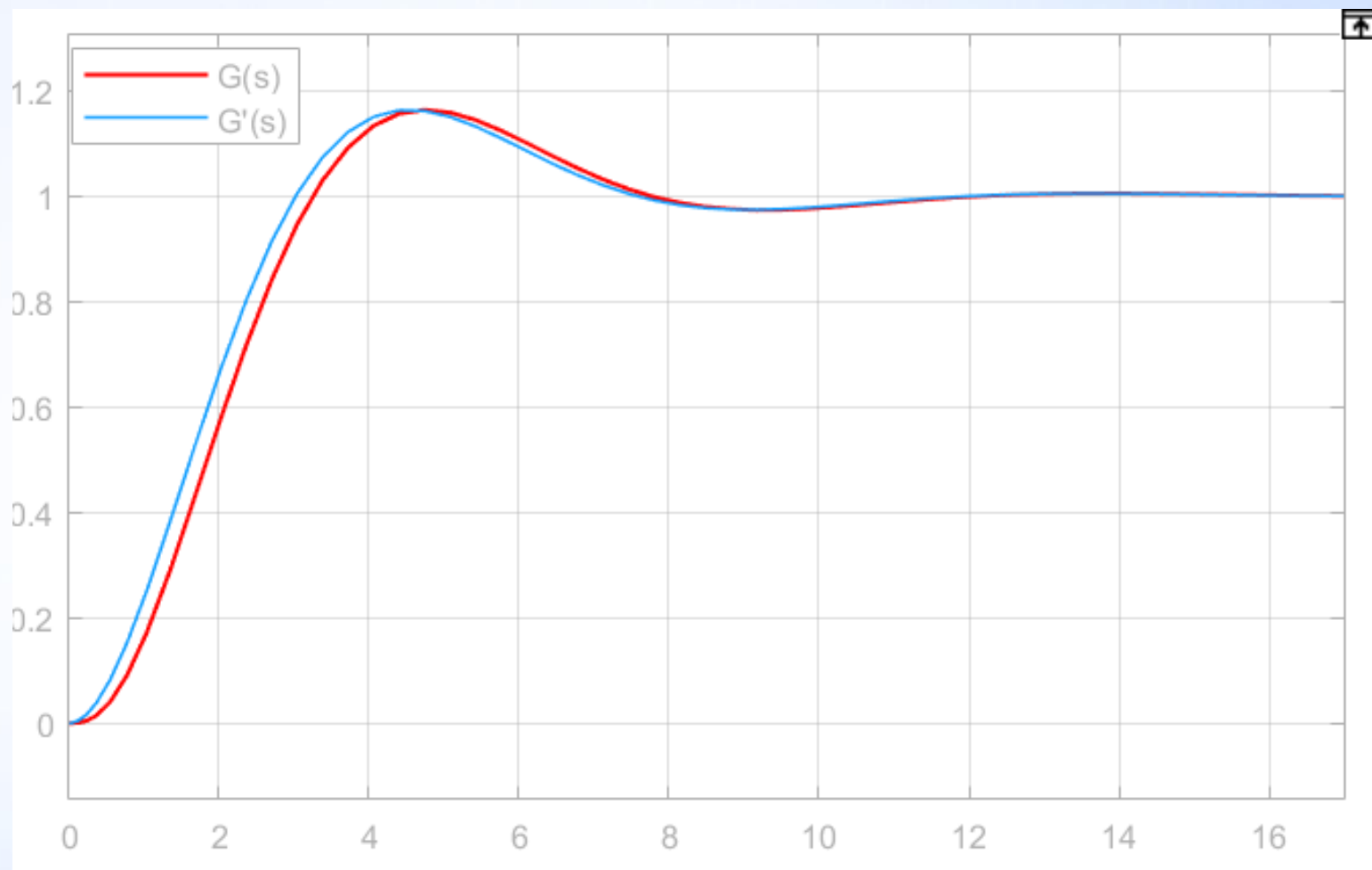


3.4.2 高阶系统的简化分析法

阶跃响应曲线对比:

$$G(s) = \frac{2.72}{s^3 + 5s^2 + 4s + 2.72} \quad \text{----红色}$$

$$G'(s) = \frac{0.64}{s^2 + 0.8s + 0.64} \quad \text{----蓝色}$$





3.4.3 零极点分布对系统动态特性的影响

$G1(s) = \frac{1.25}{(s+1)(s+1.25)}$ ----- 过阻尼情况

$G2(s) = \frac{1.25}{(s+1)(s+1.25)} \times \frac{s+10}{10}$ 增加一个离虚轴很远的零点

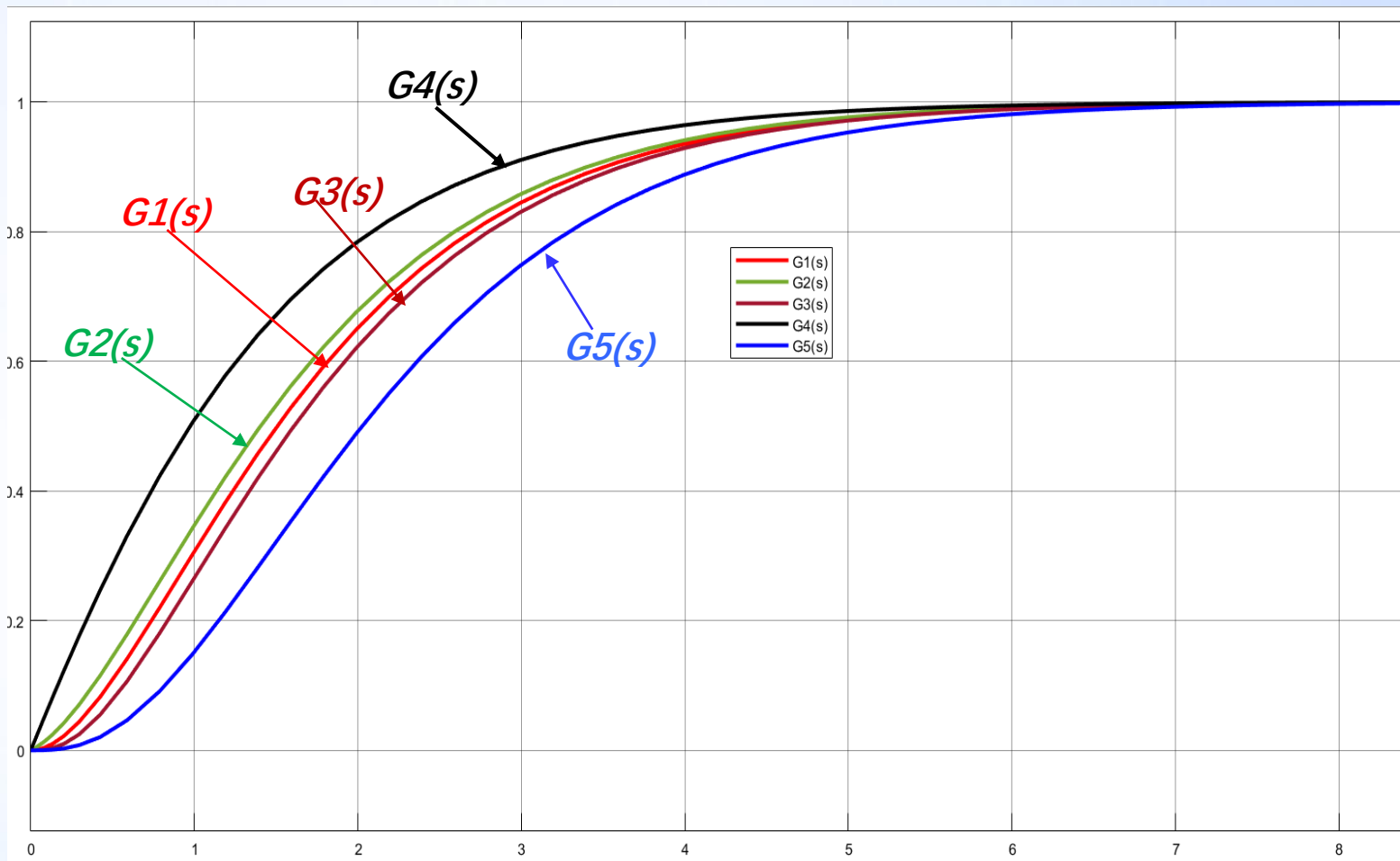
$G3(s) = \frac{1.25}{(s+1)(s+1.25)} \times \frac{10}{s+10}$ 增加一个离虚轴很远的极点

$G4(s) = \frac{1.25}{(s+1)(s+1.25)} \times \frac{s+2}{2}$ 增加一个离虚轴很近的零点

$G5(s) = \frac{1.25}{(s+1)(s+1.25)} \times \frac{2}{s+2}$ 增加一个离虚轴很近的极点

结论:

- 零点和极点离虚轴较远，对系统动态特性影响较小，反之则较大；
- 增加系统零点，系统响应速度加快；
- 增加系统级点，系统响应速度减慢。



阶跃响应曲线对比



3.4.3 零极点分布对系统动态特性的影响

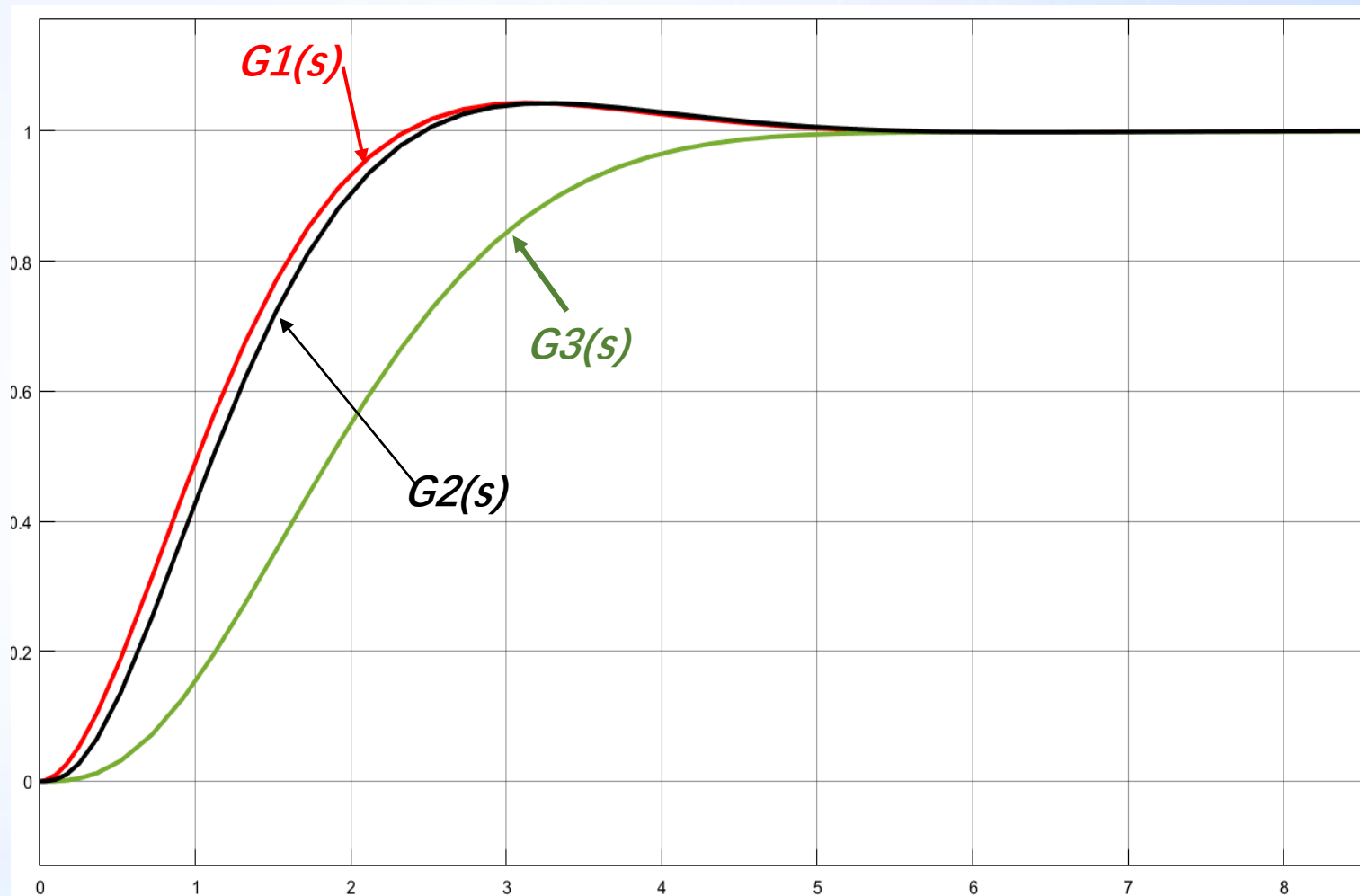
$$G1(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{-----欠阻尼情况}$$

$$G2(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \times \frac{10}{s + 10} \quad \text{实数极点离虚轴很远}$$

$$G3(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \times \frac{1}{s + 1} \quad \text{实数极点离虚轴近}$$

结论:

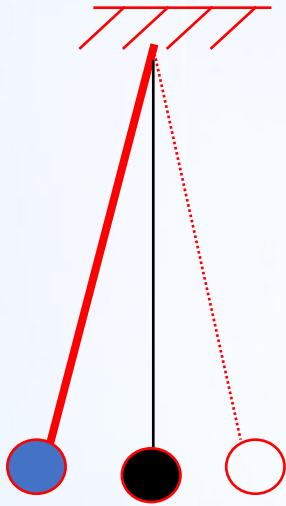
- 共轭复数极点起振荡作用，实数极点起缓和和振荡作用；
- 实数极点比复数极点离虚轴较远，则复数极点成为主导极点，系统可以降阶，系统响应主要由复数极点来定；
- 实数极点与复数极点相隔较近，不能降阶，但能缓解振荡作用。





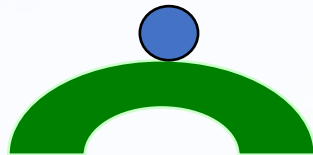
3.5.1 稳定性概念

- 稳定性---扰动消失后系统恢复到平衡状态的特性



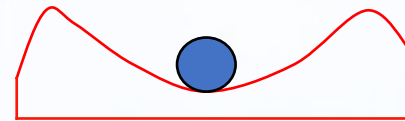
单摆

稳定



凸面上的小球

不稳定



光滑凹面上的小球

条件稳定



3.5.2 线性系统稳定的充分必要条件

■ 线性系统稳定的**充分必要条件**是:其系统特征式的所有根都在S左半平面内。

理解: 线性控制系统的微分方程:

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) \\ &= b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) \end{aligned}$$

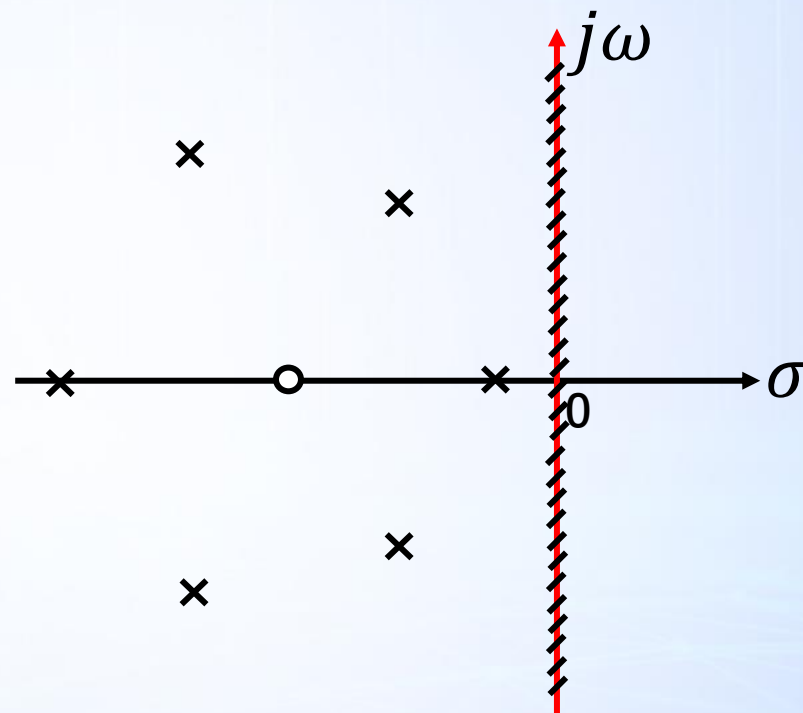
因为: 线性控制系统的稳定性取决于系统的内部特性, 与输入无关,

所以: 系统的稳定性由微分方程的齐次解来决定:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = 0$$

系统的特征方程为: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$

解该特征方程得到系统的特征根: q 个实根 p_i , k 对共轭复数根 $\sigma_k \pm j\omega_k$





3.5.2 线性系统稳定的充分必要条件

其次微分方程解的一般式为：

$$y(t) = \sum A_j e^{p_j t} + \sum e^{\sigma_k t} (B_k \cos \omega_k t + C_k \sin \omega_k t)$$

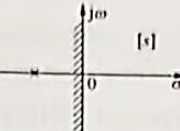

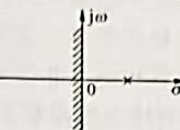
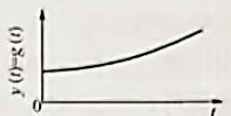
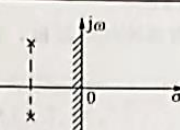
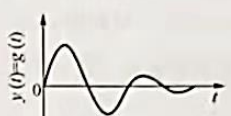
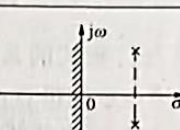
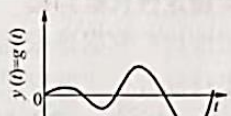
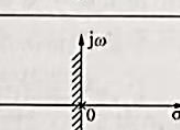
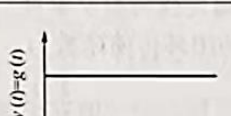
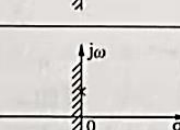
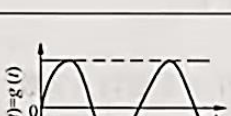
A_j 、 B_k 、 C_k 由系统初始条件决定。

p_i 和 $\sigma_k \pm j\omega_k$ 的分布及其稳定性如表所示：

因此：控制系统的稳定性由特征根在S平面上的分布来决定，反之亦然。

验证：标准二阶系统特征根的七种分布与稳定性。

表 3-1 各种类型特征根（极点）对应的单位脉冲响应及其稳定性

序号	特征根（极点）类型	对应的输出量 $y(t)$	极点分布	单位脉冲响应 $y(t) = g(t)$	稳定性
1	一个负实根 $s = -p$	$y(t) = A e^{-pt}$			稳定
2	一个正实根 $s = p$	$y(t) = A e^{pt}$			不稳定
3	一对共轭复根 (具有负实部) $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma < 0$)	$y(t) = A e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$ ($\theta = 0$)			稳定
4	一对共轭复根 (具有正实部) $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma > 0$)	$y(t) = A e^{\sigma t} \sin(\omega t + \theta)$ ($\theta = 0$)			不稳定
5	原点上单根 $s = \sigma = 0$	$y(t) = A$			临界 (不稳定)
6	一对共轭虚根 $s_{1,2} = \pm j\omega$	$y(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ ($\theta = 0$)			临界 (不稳定)



3.5.3 劳斯判据



判别系统稳定性的方法：

- 求根法
- 劳斯(Routh)赫尔维茨(Hurwitz)代数判据
- 根轨迹法
- 奈奎斯特(Nyquist)判据
- 李亚普诺夫直接法



3.5.3 劳斯判据

1. 判据描述

■ 线性系统的闭环传递函数为：

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

■ 线性系统的特征方程表示为：

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

则此系统稳定的充分必要条件是特征方程系数均为正数且对应劳斯表第一列元素均为正数。



3.5.3 劳斯判据

2.

劳斯表定义

特征方程: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$

劳斯表:

s^n	r_{11}	r_{12}	r_{13}	$r_{14} \dots$
s^{n-1}	r_{21}	r_{22}	r_{23}	$r_{24} \dots$
s^{n-2}	r_{31}	r_{32}	r_{33}	$r_{34} \dots$
s^{n-3}	r_{41}	r_{42}	r_{43}	$r_{44} \dots$
\vdots	\vdots			
s^1	r_{n1}			
s^0	$r_{(n+1)1}$			

$a_0 \ a_2 \ a_4 \ a_6 \ \dots$

$a_1 \ a_3 \ a_5 \ a_7 \ \dots$

$$r_{k,i} = \frac{r_{k-1,1} r_{k-2,i+1} - r_{k-1,i+1} r_{k-2,1}}{r_{k-1,1}} \quad (i = 1, 2, \dots; k = 3, 4, \dots, n+1)$$

例: $r_{31} = \frac{r_{21} r_{12} - r_{22} r_{11}}{r_{21}}$

$r_{32} = \frac{r_{21} r_{13} - r_{23} r_{11}}{r_{21}}$



3.5.3 劳斯判据

例：已知 $s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 17s^2 + 10s + 2 = 0$ ，使用劳斯判据判断系统的稳定性。

解：列劳斯表

s^5	1	14	10
s^4	6	17	2
s^3	$\frac{6 \times 14 - 1 \times 17}{6} = \frac{67}{6}$	$\frac{6 \times 10 - 1 \times 2}{6} = \frac{58}{6}$	
s^2	$\frac{\frac{67}{6} \times 17 - 6 \times \frac{58}{6}}{\frac{67}{6}} = \frac{791}{67}$	$\frac{\frac{67}{6} \times 2 - 6 \times 0}{\frac{67}{6}} = 2$	
s^1	$\frac{\frac{791}{67} \times \frac{58}{6} - \frac{67}{6} \times 2}{\frac{791}{67}} = \frac{6150}{791}$		
s^0	2		

- ∴ 特征多项式所有系数为正
- ∴ 劳斯阵列第一列元素均为正
- ∴ 系统稳定。



3.5.3 劳斯判据

例：已知 $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ ，判断系统的稳定性。

解：列劳斯表

s^4	1	3	5
s^3	2	4	
s^2	1	5	
s^1	-6		
s^0	5		

第一列元素：1, 2, 1, -6, 5, 变号两次。

结论： 故系统不稳定，且有两个有正实部的根。



3.5.3 劳斯判据

3. 两个推论

- (1)若系数 a_0 至 a_n 有缺项或小于零则系统不稳定。
- (2)若其劳斯表第一列元素变号 m 次，则有 m 个正实部根。

4、劳斯表计算时零元素的处理

- (1)第一列元素出现零但对应行其它元素有不为零的。

此时系统必为临界稳定或为不稳定。

处理方法： 令 $r_{k1} = \varepsilon > 0$ ，再进行下一行元素的计算



3.5.3 劳斯判据

例: $s^3 - 3s + 2 = 0$

s^3 1 -3 令: $r_{2,1} = \varepsilon > 0$ (无穷小正数)

s^2 0 2 则 s^2 ε 2

s^1 ∞ s^1 $(-3\varepsilon - 2)/\varepsilon$ 0

s^0 2

可见变号两次，系统不稳定，且有2个特征根在S的右半平面。

验证： 系统的特征根为: $s_1 = -2$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$ 。



3.5.3 劳斯判据

4、劳斯表计算时零元素的处理

(2) 某一行元素全为零时

此时系统必为临界稳定或为不稳定。

处理方法： 用上一行元素构成辅助多项式，然后对辅助多项式求导，得到新多项式，取其系数代替原有的零值。

例： $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$

s^6 1 8 20 16

s^5 2 12 16 0

s^4 2 12 16

同除2后为： s^4 1 6 8

s^3 0 0 0

构成新的行： s^3 4 12

s^2 3 8

s^1 4/3

s^0 8

构成辅助多项式 $s^4 + 6s^2 + 8$ ，两边求导得： $4s^3 + 12s$ 。

第一列符号不变，所以系统无特征根在 s 的右半平面。但由于 s^3 行的各项位零，说明系统有对称于原点的根。



3.5.3 劳斯判据

4、劳斯表计算时零元素的处理

(2)某一行元素全为零时

对称于原点的特征根可由辅助多项式构成的方程求出：

$$s^4 + 6s^2 + 8 = (s^2 + 2)(s^2 + 4) = 0$$

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}, s_{3,4} = \pm j2$$

将系统的原特征多项式除以辅助多项式，还可求出其余的几个特征根。

原特征多项式： $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16$

辅助多项式： $s^4 + 6s^2 + 8$

求：
$$\frac{s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16}{s^4 + 6s^2 + 8} = ?$$



3.5.3 劳斯判据

4、劳斯表计算时零元素的处理

(2) 某一行元素全为零时

$$\begin{array}{r}
 s^4 + 6s^2 + 8 \quad \left) \quad s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 \quad s^2 + 2s + 2 \\
 \underline{s^6 \qquad + 6s^4 \qquad + 8s^2} \\
 2s^5 + 2s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 16s \\
 \underline{2s^5 \qquad + 12s^3 \qquad + 16s} \\
 \qquad 2s^4 \qquad + 12s^2 \qquad + 16 \\
 \qquad \underline{2s^4 \qquad + 12s^2 \qquad + 16} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array}$$

$$\therefore s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = (s^4 + 6s^2 + 8) \times (s^2 + 2s + 2)$$

由 $s^2 + 2s + 2 = 0$ 得: $s_{5,6} = -1 \pm j$ (位于S左半平面)



3.5.3 劳斯判据

5、劳斯判据在低阶系统中的应用

- **一阶系统劳斯判据的应用** $a_0s + a_1 = 0$

$$a_0 > 0, a_1 > 0$$

- **二阶系统劳斯判据的应用** $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$$

- **三阶系统劳斯判据的应用** $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3 = 0$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$$

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0$$



3.5.4 劳斯判据的应用

1. 分析系统参数对稳定性的影响

例： 求使系统稳定的K。

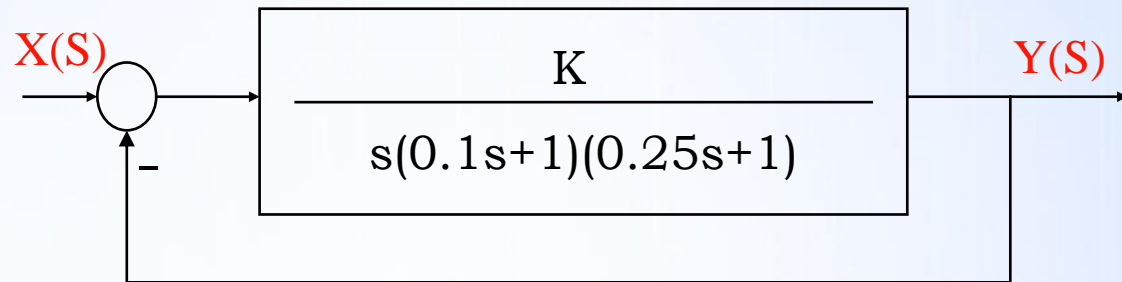
解： 闭环传递函数为：

$$G(s) = \frac{40K}{s(s+4)(s+10)+40K}$$

特征方程： $s^3 + 14s^2 + 40s + 40K = 0$

劳斯表：	s^3	1	40
	s^2	14	40K
	s^1	$(560-40K)/14$	
	s^0	40K	

故有： $0 < 40K < 560$ ， 即： $0 < K < 14$





3.5.4 劳斯判据的应用

2. 检验系统的相对稳定性

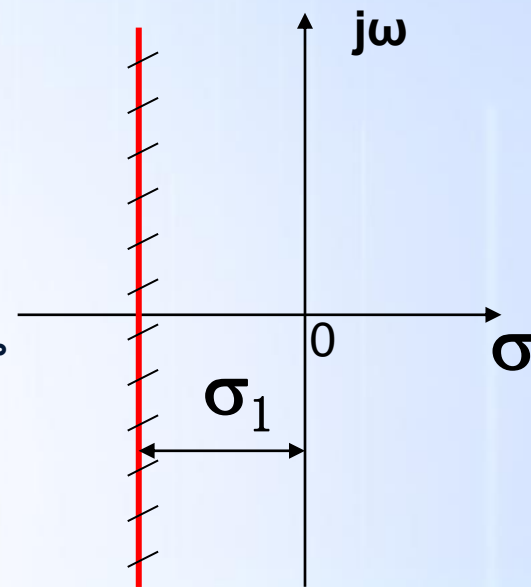
■ 相对稳定性概念：

根平面虚轴为稳定边界，若把此边界左移 σ ，针对新边界的系统稳定性为相对稳定性。

相对稳定性反映了系统稳定的深度。左移距离 σ 被称为稳定裕量。

■ 用劳斯判据检验系统的相对稳定性的方法：

先移轴变换， $s = z - \sigma$ ，再用劳斯判据。





3.5.4 劳斯判据的应用

例：还用上一例系统，其特征方程为 $s^3+14s^2+40s+40K=0$
求使系统具有稳定裕量 $\sigma_1=1$ 的K值。

解：考虑新稳定边界 $s=-1$ ，将 $s=z-1$ 代入上方程

$$(z-1)^3+14(z-1)^2+40(z-1)+40K=0$$

$$z^3+11z^2+15z+40K-27=0$$

$$z^3 \quad 1 \quad 15$$

$$z^2 \quad 11 \quad 40K-27$$

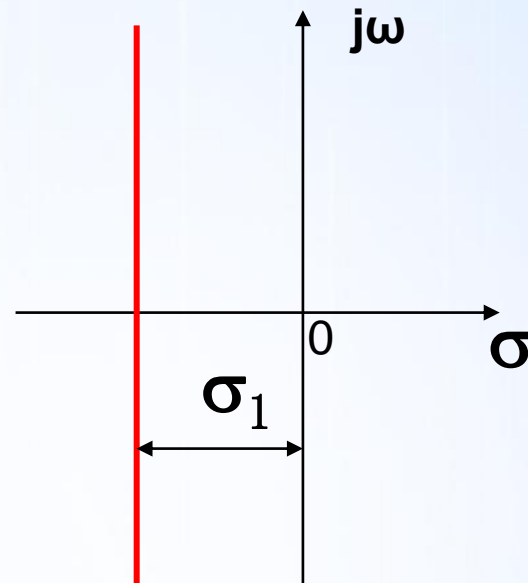
$$z^1 \quad (165-40K+27)/11$$

$$z^0 \quad 40K-27$$

得： $40K-27>0$ ， $165-40K+27>0$ ；

有： $0.75<K<4.8$

可见：稳定域缩小了。





3.6.1 控制系统稳态误差的定义

稳态误差：稳态时的给定值减去输出值

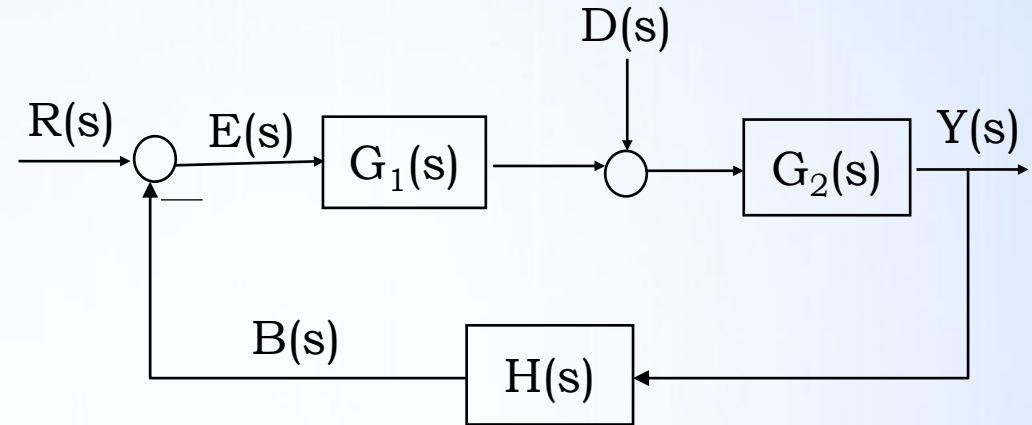
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) - b(t)$$

给定稳态误差--由给定值输入引起的稳态误差

扰动稳态误差--由扰动输入引起的稳态误差

$e_{ss}=0$ ----- 无差系统

$e_{ss} \neq 0$ ----- 有差系统



控制系统方框图



3.6.2 控制系统稳定误差的计算

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad \text{当 } H(s) = 1$$

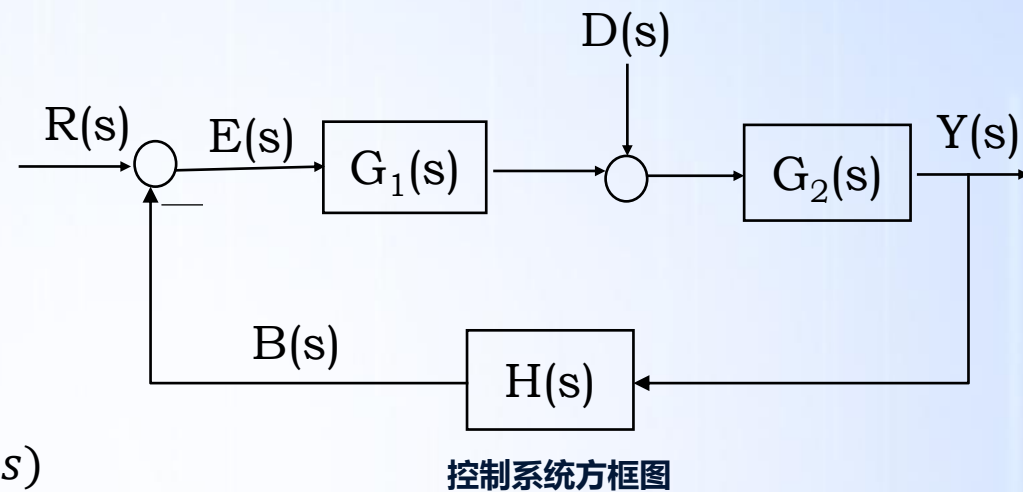
$$Y(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} D(s)$$

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} D(s) \end{aligned}$$

$$= E_r(s) + E_d(s)$$

给定误差

扰动误差





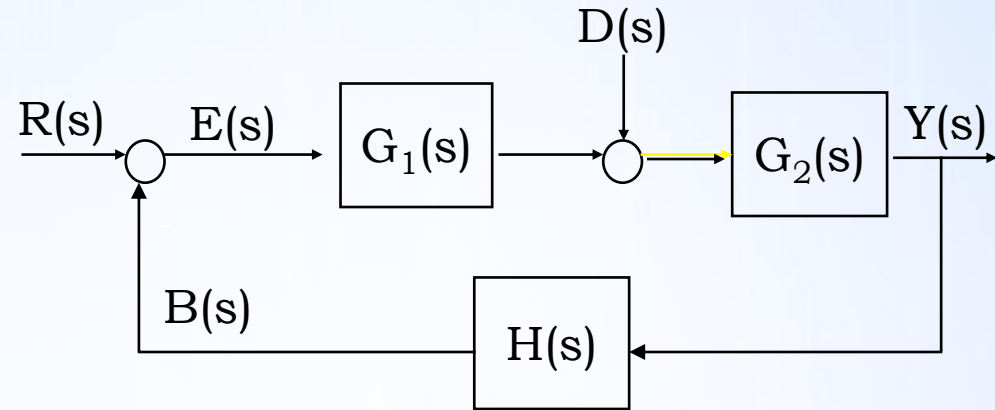
3.6.2 控制系统稳定误差的计算

给定稳态误差计算式:

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

扰动稳态误差计算式:

$$e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)H(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



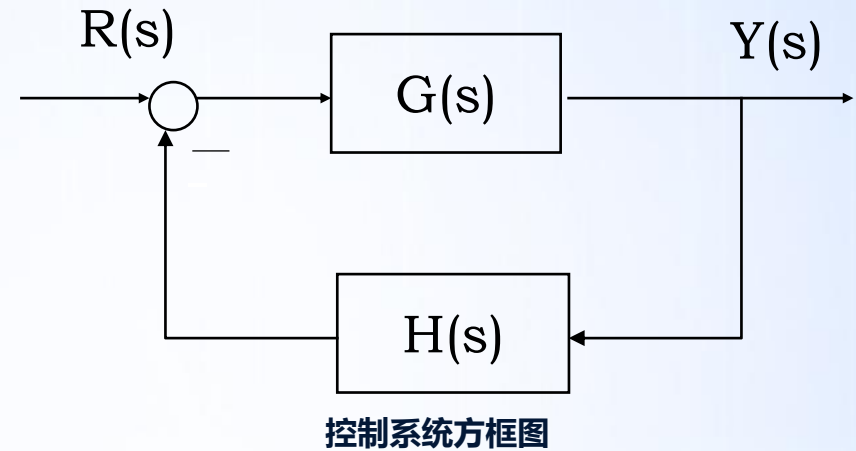
控制系统方框图



3.6.3 控制系统的类型(按开环系统中积分环节数分类)

■ 若将开环系统传递函数写成典型环节结构的形式:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^N \prod_{j=1}^{n-N} (T_j s + 1)}$$



则其含有积分环节的个数N称为系统的型，也称为系统的无差度阶数。

控制系统被称为N型系统,常见的为0,1,2型系统。



3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

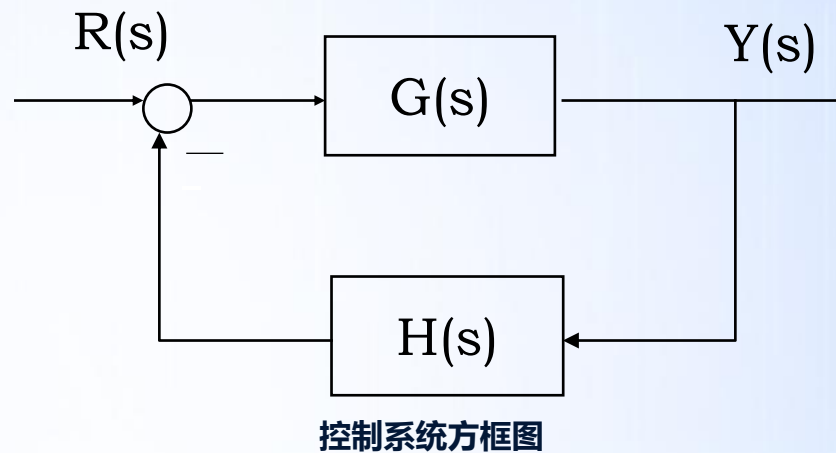
1、给定稳定误差的计算

考虑0,1,2型控制系统在典型测试信号下的稳态误差

■ (1)单位阶跃输入

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} e_{ssr} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + G(s)H(s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p} \end{aligned}$$



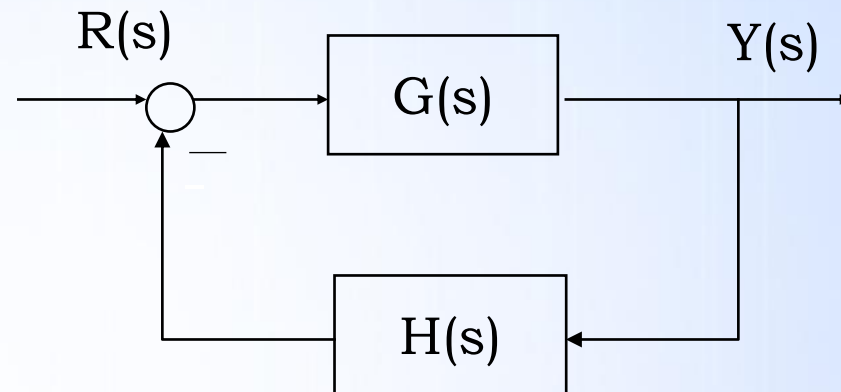


3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

定义稳态位置误差系数: $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod (\tau_i s + 1)}{s^N \prod (T_j s + 1)} = \begin{cases} K & N = 0 \\ \infty & N = 1 \\ \infty & N = 2 \end{cases}$$

$$e_{ssr} = \begin{cases} \frac{1}{1 + K} & N = 0 \\ 0 & N = 1 \\ 0 & N = 2 \end{cases}$$



控制系统方框图



3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

(2)单位斜坡输入时

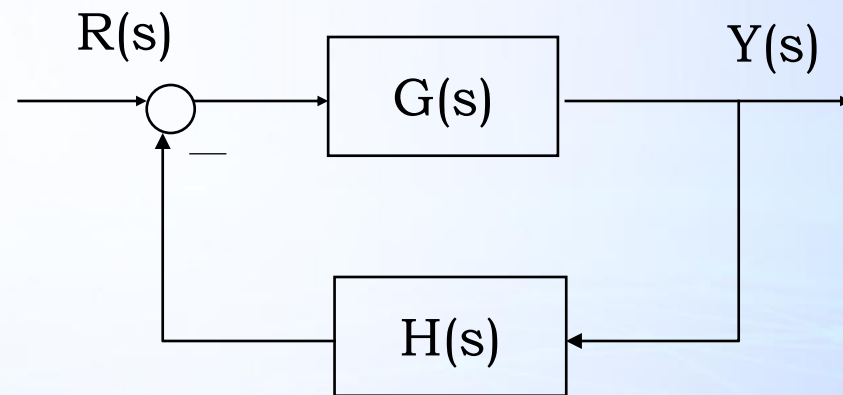
$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

稳态速度误差系数: $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s)$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK \prod(\tau_i s + 1)}{s^N \prod(T_j s + 1)} = \begin{cases} 0 & N = 0 \\ K & N = 1 \\ \infty & N = 2 \end{cases}$$

$$e_{ssr} = \begin{cases} \infty & N = 0 \\ \frac{1}{K} & N = 1 \\ 0 & N = 2 \end{cases}$$



控制系统方框图



3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

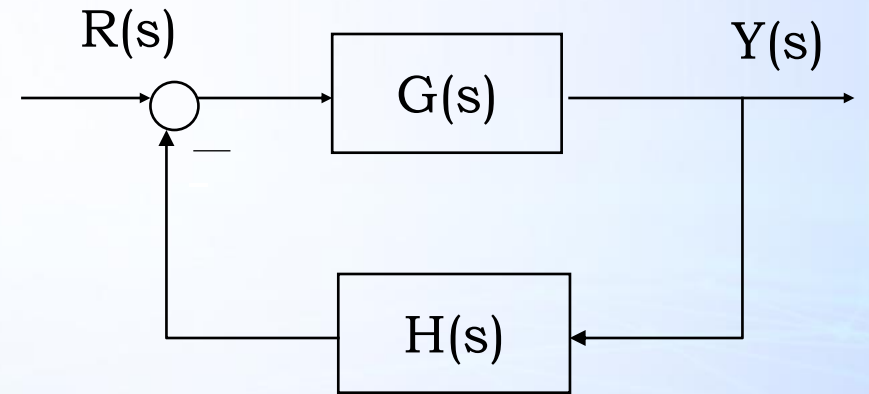
■ (3)单位抛物线输入时 $R(s) = \frac{1}{s^3}$

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^3}}{1 + G(s)H(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a}$$

稳态加速度误差系数: $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 K \prod (\tau_i s + 1)}{s^N \prod (T_j s + 1)} = \begin{cases} 0 & N = 0 \\ 0 & N = 1 \\ K & N = 2 \end{cases}$$

$$e_{ssr} = \begin{cases} \infty & N = 0 \\ \infty & N = 1 \\ \frac{1}{K} & N = 2 \end{cases}$$



控制系统方框图



3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

(4) 小结

类型	稳态误差系数			阶跃信号	斜坡信号	抛物线信号
N	K _p	K _v	K _a	$e_{ssr} = R/(1 + K_p)$	$e_{ssr} = R/K_v$	e_{ssr}
∞	∞	∞	∞	0	0	0
2	∞	∞	∞	0	0	0
1	∞	∞	∞	0	R/K	∞
0	∞	∞	∞	$R/(1 + K)$	∞	∞
∞	∞	∞	∞	0	R/K	∞

若要系统阶跃输入时无稳态偏差，须用1型及以上系统。

若要系统斜坡输入时无稳态偏差，须用2型及以上系统。

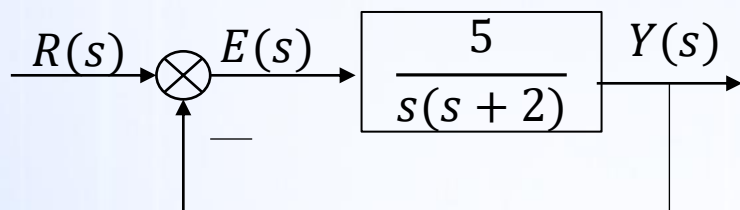
若要系统抛物线输入时无稳态偏差，须用3型及以上系统。

为了减少给定误差，可以增加前向通道的积分环节个数或增大开环放大系数(对于有差系统)，但会降低系统的稳定性。

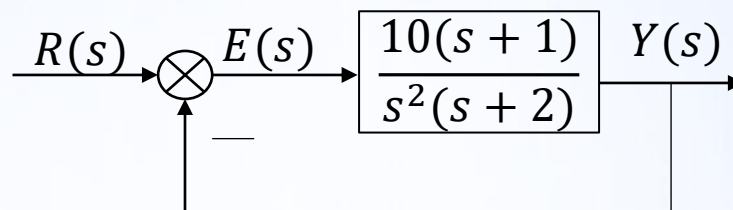


3.6.4 不同型次控制系统的给定稳态误差

例：已知单位负反馈系统如图(a)、(b)所示，当给定值输入为 $r(t) = 4 + 6t + 3t^2$ 时，试分别求出两个系统的稳态误差。



(a)



(b)

解：

$$G_a(s) H_a(s) = \frac{2.5}{s^1(0.5s + 1)}$$

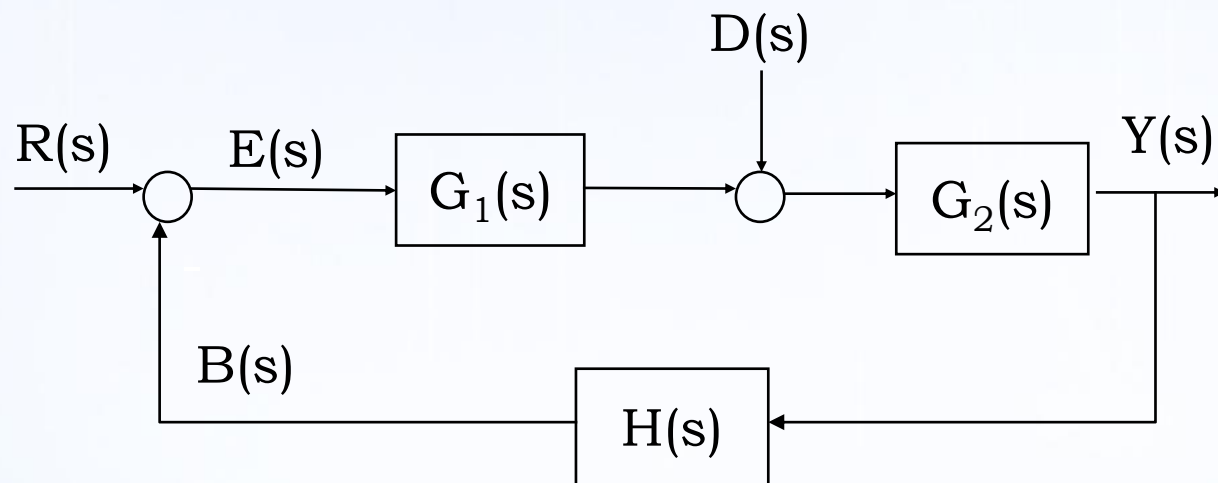
$$G_b(s) H_b(s) = \frac{5(s + 1)}{s^2(0.5s + 1)}$$

系统		(a)	(b)
N和K		N=1, K=2.5	N=2, K=5
r(t)	4	$e_{ss1}=0$	$e_{ss1}=0$
	6t	$e_{ss2}=\frac{6}{2.5}=2.4$	$e_{ss2}=0$
	$6*\frac{t^2}{2}$	$e_{ss3}=\frac{6}{0}=\infty$	$e_{ss3}=\frac{6}{5}=1.2$
总误差		$e_{ssr}=\infty$	$e_{ssr}=1.2$



3.6.5 控制系统的扰动稳态误差

扰动作用下的稳态误差可根据具体情况用终值定理计算。



控制系统方框图

定义:
$$e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)H(s)D(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



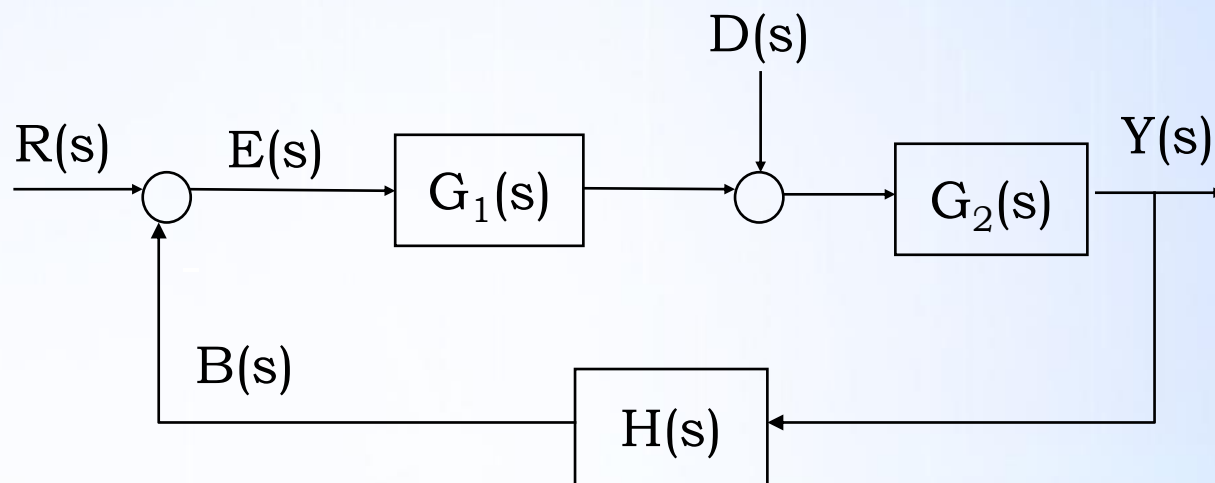
3.6.5 控制系统的扰动稳态误差

设:
$$G_1(s) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1)}{s^{N_1} \prod_{j=1}^{n_1 - N_1} (T_j s + 1)}$$

式中 N_1 是 $G_1(s)$ 含有积分环节数

$$G_2(s)H(s) = \frac{K_2 \prod_{i=1}^{m_2} (\alpha_i s + 1)}{s^{N_2} \prod_{j=1}^{n_2 - N_2} (\beta_j s + 1)}$$

式中 N_1 是 $G_2(s)H(s)$ 含有积分环节数



控制系统方框图

根据定义:

$$\begin{aligned} e_{ssd} &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s G_2(s) H(s) D(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \\ &= -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{K_2}{s^{N_2}}}{1 + \frac{K_1}{s^{N_1}} \times \frac{K_2}{s^{N_2}}} D(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^{1+N_1}}{s^{N_1+N_2} + K_1 K_2} D(s) \end{aligned}$$



3.6.5 控制系统的扰动稳态误差

扰动作用下的稳态误差可根据具体情况用终值定理计算。

$$e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^{1+N_1}}{s^{N_1+N_2+K_1K_2}} D(s)$$

当 $D(s)$ 为单位阶跃信号时:

若 $N_1 = 0, N_2 = 1$, 则 $e_{ssd} = -\frac{1}{K_1}$

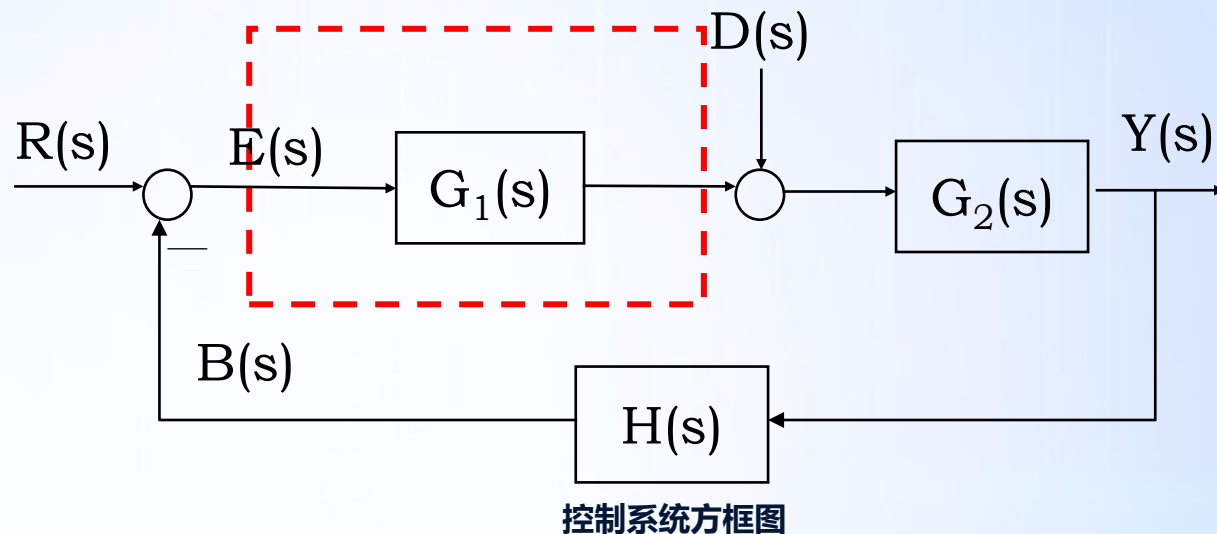
若 $N_1 = 1, N_2 = 0$, 则 $e_{ssd} = 0$

两种情况下均有 $N_1 + N_2 = 1$ 。

可见:

(1) 开环系统的型次相同, 但系统的扰动误差不一定相同。扰动误差不取决于系统型次, 而取决于误差产生点 $E(s)$ 至扰动作用点之间传递函数 $G_1(s)$ 的积分环节数 N_1 。

(2) 为了减少扰动误差, 可以增加偏差点到扰动作用点之间的积分环节个数或放大系数。

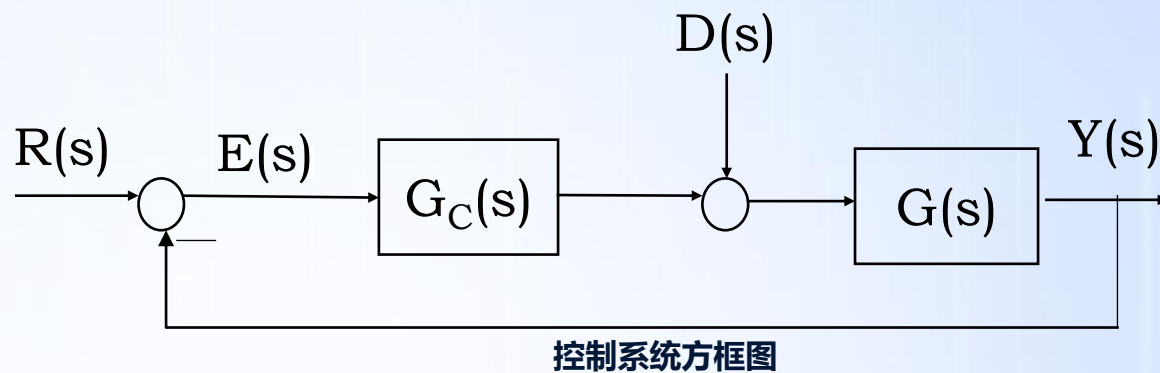




3.6.5 控制系统的扰动稳态误差

例：已知 $G_C(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$, $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$,
 (1) $R(s) = \frac{R_0}{s}$, $D(s) = \frac{D_0}{s}$ 时的稳态误差;
 (2) $R(s) = \frac{R_0}{s^2}$, $D(s) = \frac{D_0}{s^2}$ 时的稳态误差。

解：系统的型 $N=2$, $G_1(s)$ 型 $N_1=1$,



$$(1) \because e_{ssr} = 0, \quad e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^{1+N_1}}{s^{N_1+N_2+K_1 K_2}} D(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K s^{1+1}}{s^{1+1} + \frac{K_p}{T_i} K} \times \frac{D_0}{s} = 0,$$

$$\therefore e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = 0$$

$$(2) \because K_a = \frac{K K_p}{T_i}, \quad e_{ssr} = \frac{R_0}{K_a} = \frac{T_i}{K K_p} R_0, \quad e_{ssd} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_2 s^{1+N_1}}{s^{N_1+N_2+K_1 K_2}} D(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{K s^{1+1}}{s^{1+1} + \frac{K_p}{T_i} K} \times \frac{D_0}{s^2} = -\frac{T_i}{K_p} D_0$$

$$\therefore e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssd} = \frac{T_i}{K K_p} R_0 - \frac{T_i}{K_p} D_0$$