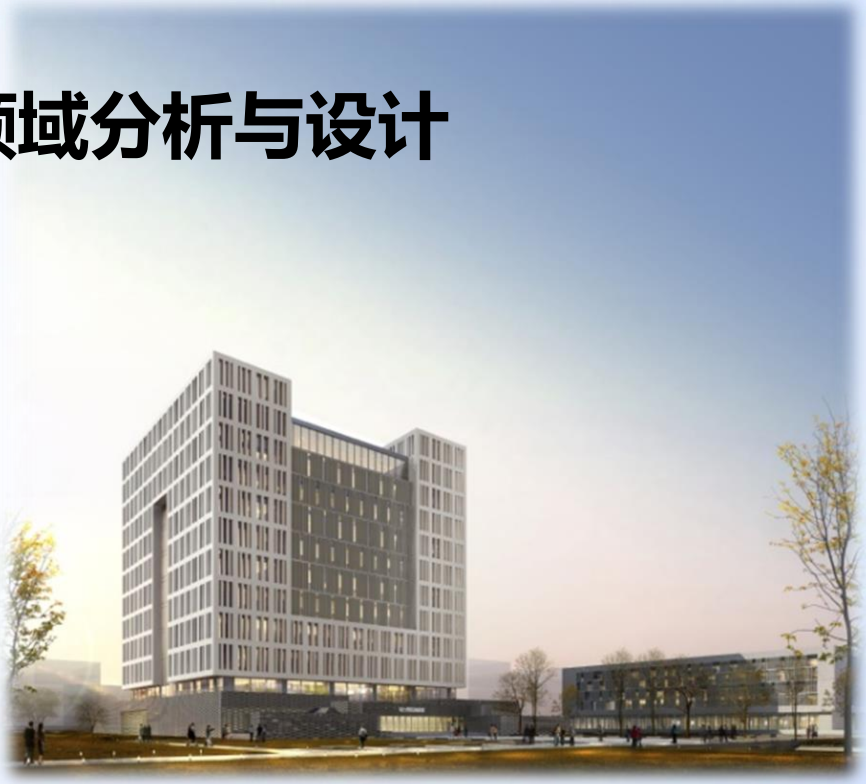
第六章：控制系统的频域分析与设计



主要内容

引言

① 1932年，W.Nyquist 提出了频率响应法

② 1945年，H.W.Bode 提出了控制系统设计的频域方法

③ 1954年，钱学森在美国出版了专著《工程控制论》

引言

(1) **频率特性：** 研究**稳态正弦响应**的幅值和相角随频率的变化规律

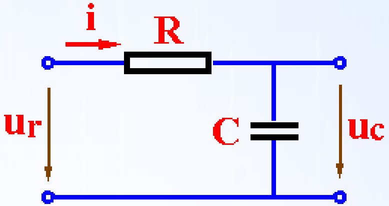
(2) 由开环频率特性研究闭环稳定性及性能

(3) 图解分析法，方便，实用

(4) 有一定的近似性

频率特性的基本概念

☛例6.2-1 RC电路如图所示，ur(t)=Asinwt, 求 uc(t)=?

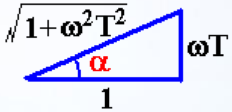


$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1/Cs}{R+1/Cs}=\frac{1}{RCs+1}\overset{T=RC}{=}\frac{1}{Ts+1}=\frac{1/T}{s+1/T}$$

$$U_c(s)=\frac{1/\mathrm{T}}{s+1/\mathrm{T}}\cdot\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\mathrm{C}_0}{s+1/\mathrm{T}}+\frac{\mathrm{C}_1 s+\mathrm{C}_2}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\mathrm{A}\omega\mathrm{T}}{1+\omega^2\mathrm{T}^2}\cdot\frac{1}{s+1/\mathrm{T}}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}-\frac{\mathrm{T}\omega}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$u_c(t)=\frac{\mathrm{A}\omega\mathrm{T}}{1+\omega^2\mathrm{T}^2}e^{\frac{-t}{\mathrm{T}}}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}[\sin\omega t\cdot\cos\alpha-\cos\omega t\cdot\sin\alpha]$$



$$=\frac{\mathrm{A}\omega\mathrm{T}}{1+\omega^2\mathrm{T}^2}e^{\frac{-t}{\mathrm{T}}}+\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}\sin(\omega t\text{-arctan}\,\omega\mathrm{T})$$

$$r(t)=A\sin\omega t\longrightarrow\boxed{\frac{1}{\mathrm{Ts+1}}}\longrightarrow c_s(t)=\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2\mathrm{T}^2}}\sin(\omega t\text{-arctan}\,\omega\mathrm{T})$$

频率特性的基本概念

$$r(t)=A\sin\omega t \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ts+1}} \longrightarrow c_s(t)=\frac{A}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\sin(\omega t\text{-}\arctan\omega T)$$

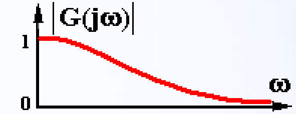
稳定的线性定常系统在正弦输入信号作用下的稳态响应，与输入信号同频率，但稳态输出的幅值及相角随输入频率变化而变化

$G(j\omega)$

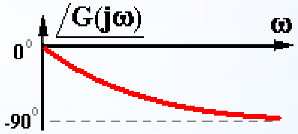
$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|=\dfrac{|c_s(t)|}{|r(t)|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}} \\ \angle G(j\omega)=\angle c_s(t)-\angle r(t)=-\arctan\omega T \end{cases}$$

幅频特性



相频特性



$G(j\omega)$

$$G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\angle-\arctan\omega T=\left|\frac{1}{1+j\omega T}\right|\angle\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1}{Ts+1}\bigg|_{s=j\omega}$$

频率特性的基本概念

1. 频率特性G(jw)的定义

$$X(t)=A\sin(\omega t+\theta_0) \xrightarrow{X} \boxed{\text{线性定常系统}G(s)} \xrightarrow{Y} Y(t)=B\sin(\omega t+\theta_1)$$

系统频率特性函数 $G(j\omega)=|G(j\omega)|\cdot e^{j\angle G(j\omega)}$

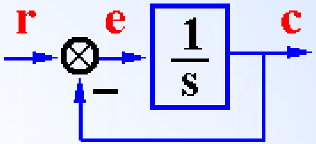
$\boxed{|G(j\omega)|=\dfrac{B}{A},}$ 稳态输出与输入的幅值之比，为系统的幅频特性

$\boxed{\angle G(j\omega)=\theta_1-\theta_0,}$ 稳态输出与输入的相位差，为系统的相频特性

$$\boxed{G(j\omega)=G(s)_{s=j\omega}}$$

频率特性的基本概念

☛例6.2-2 系统结构图如图所示，r(t)=3sin(2t+30°)，求 $c_{ss}(t)$。



解:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{s+1} \qquad \Rightarrow G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|=\left|\dfrac{1}{1+j\omega}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\overset{\omega=2}{=}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{|c_{ss}(t)|}{3} \\ \angle G(j\omega)=-\arctan\omega\overset{\omega=2}{=}-63.4^\circ=\angle c_{ss}(t)-\angle r(t)=\angle c_{ss}(t)-30^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} |c_{ss}(t)|=3/\sqrt{5} \\ \angle c_{ss}(t)=-63.4^\circ+30^\circ=-33.4^\circ \end{cases}$$

$$c_{ss}(t)=\frac{3}{\sqrt{5}}\sin(2t-33.4^\circ)$$

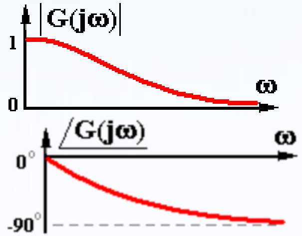
频率特性的基本概念

2. 频率特性 G(jw) 的表示方法

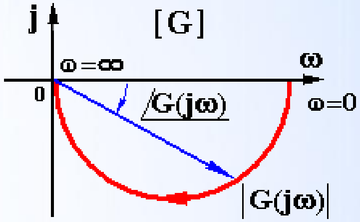
以 $G(j\omega)=\left.\dfrac{1}{Ts+1}\right|_{s=j\omega}$ 为例

Ⅰ. 频率特性

- 幅频 $|G(j\omega)|$
- 相频 $\angle G(j\omega)$

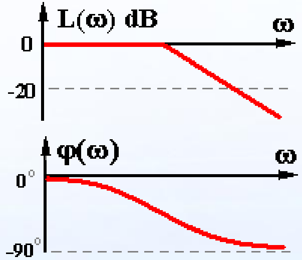


Ⅱ. 极坐标图



Ⅲ. 对数坐标图

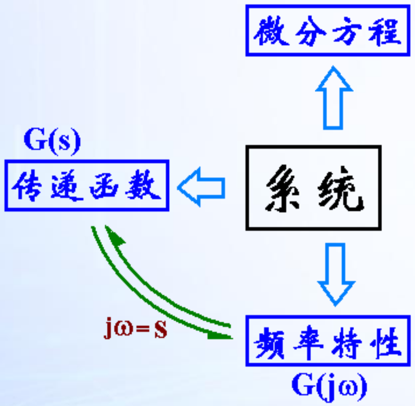
- 对数幅频 $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$
- 对数相频 $\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$



频率特性的基本概念

课程小结

$$X(t)=A\sin(\omega t+\theta_0) \xrightarrow{X} \boxed{\text{线性定常系统}G(s)} \xrightarrow{Y} Y(t)=B\sin(\omega t+\theta_1)$$



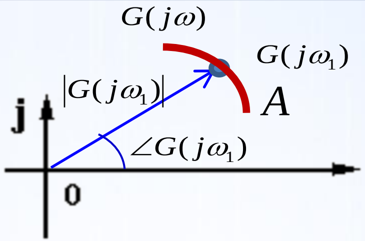
$$\boxed{G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}=\frac{B}{A}\cdot e^{j(\theta_1-\theta_0)}}$$

主要内容

- 引言
- 频率特性的基本概念
- 频率特性的极坐标图（Nyquist图）
- 频率特性的对数坐标图（Bode图）
- 控制系统的奈氏图分析
- 控制系统的伯德图分析
- 闭环系统频率特性分析
- 控制系统的频率设计

频率特性的极坐标图（Nyquist图）

$$G(j\omega)=\left|G(j\omega)\right|e^{j\angle G(j\omega)}$$



以惯性环节为例 $G(s)=\dfrac{1}{0.5s+1}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{0.5j\omega+1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2^2+\omega^2}}\cdot e^{-j\arctan\left(\omega/2\right)}$$

$$=\frac{4}{2^2+\omega^2}-j\frac{2\omega}{2^2+\omega^2}$$

$$G(j0)=1\angle 0°=1+j0$$

$$G(j2)=0.707\angle -45°$$
$$=0.5-j0.5$$

$$G(j4)=0.447\angle -63.4°$$
$$=0.2-j0.4$$

$$G(j\infty)=0\angle -90^0=0+j0$$

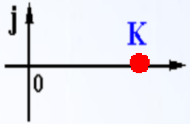
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

- **典型环节频率特性的极坐标图**
- **典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）**

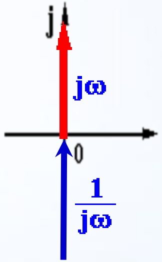
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

1. 典型环节频率特性的极坐标图

(1) 比例环节 $G(s)=K$ $\quad G(j\omega)=K$ $\quad \begin{cases} |G|=K \\ \angle G=0^\circ \end{cases}$



(2) 微分环节 $G(s)=s$ $\quad G(j\omega)=j\omega$ $\quad \begin{cases} |G|=\omega \\ \angle G=90^\circ \end{cases}$



(3) 积分环节 $G(s)=\dfrac{1}{s}$ $\quad G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$ $\quad \begin{cases} |G|=1/\omega \\ \angle G=-90^\circ \end{cases}$

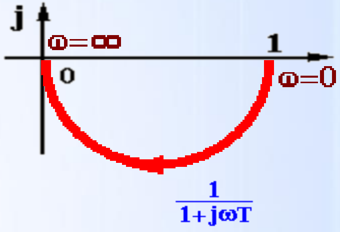
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

1. 典型环节频率特性的极坐标图

(4) 惯性环节 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1-j\omega T}{1+\omega^2T^2}=R(\omega)+jI(\omega)$$

$$\begin{cases}|G|=\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\\ \angle G=-\arctan\omega T\end{cases}$$



（第四象限半圆）

$$\begin{cases}R=\dfrac{1}{1+\omega^2T^2}\\ I=\dfrac{-\omega T}{1+\omega^2T^2}=-\omega T\cdot R\end{cases}\Rightarrow \omega T=-\frac{I}{R}$$

$$R^2\left[1+\frac{I^2}{R^2}\right]=R \quad\Rightarrow\quad R^2-R+I^2=0$$

$$\left(R-\frac{1}{2}\right)^2+I^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

频率特性的极坐标图（Nyquist图）

1. 典型环节频率特性的极坐标图

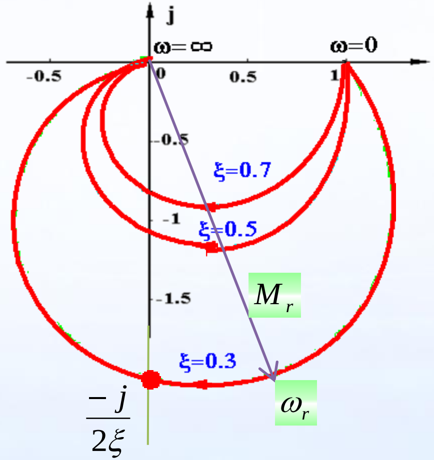
（5） 二阶振荡环节 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\quad(0<\xi<1)$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}$$

$$\begin{cases}|G|=\dfrac{1}{\sqrt{[1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}]^2+[2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}]^2}}\\[2ex]\angle G=-\arctan\dfrac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}\end{cases}$$

$$G(j0)=1\angle 0°$$

$$G(j\infty)=0\angle -180°$$



$$G(j\omega_n)=\frac{1}{j2\xi}=\frac{1}{2\xi}\angle -90^{\circ}$$

$$\begin{cases}\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\\ \qquad\qquad(0<\xi<0.707)\\ M_r=|G(j\omega_r)|=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases}$$

谐振频率wr

谐振峰值Mr

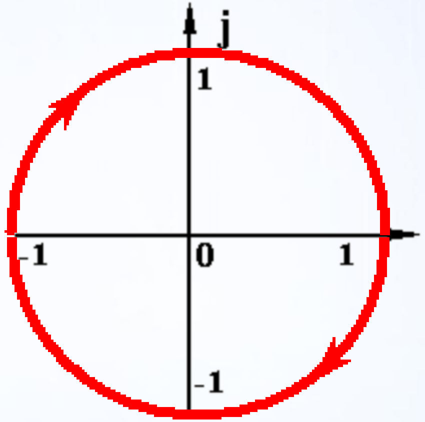
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

1. 典型环节频率特性的极坐标图

（6） 迟延环节 $G(s)=e^{-\tau s}$

$$G(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$$

$$\begin{cases} |G|=1 \\ \angle G=-\tau\omega \end{cases}$$



频率特性的极坐标图（Nyquist图）

2. 典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

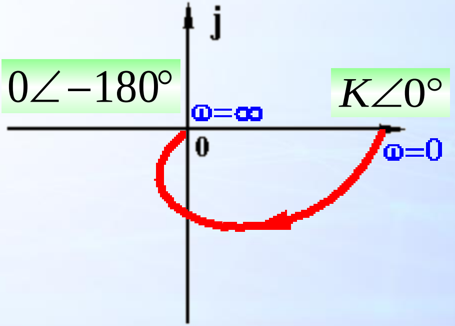
$$GH(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^N(T_1 s+1)\cdots(T_{n-N} s+1)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(T_j s+1)}$$

☞例6.3-1 开环系统Nyquist图的绘制

（1）0型

$$GH(s)=\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega T_2)^2}}\angle-\left(\arctan\omega T_1+\arctan\omega T_2\right)$$



频率特性的极坐标图（Nyquist图）

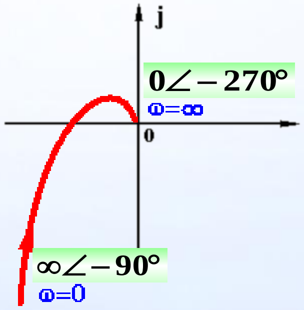
2.　典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

☞例6.3-1　开环系统Nyquist图的绘制

（2）1型

$$GH(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K}{\omega\cdot\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega T_2)^2}}\angle-\left(90^o+\arctan\omega T_1+\arctan\omega T_2\right)$$



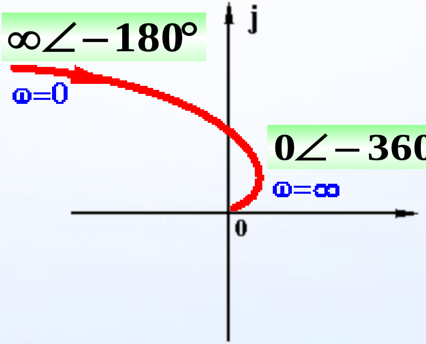
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

2. 典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

☞例6.3-1 开环系统Nyquist图的绘制

（3）2型 $$GH(s)=\frac{K}{s^2(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$GH(j\omega)=\frac{K}{\omega^2\cdot\sqrt{1+(\omega T_1)^2}\cdot\sqrt{1+(\omega T_2)^2}}\angle-\left(180^o+\arctan\omega T_1+\arctan\omega T_2\right)$$



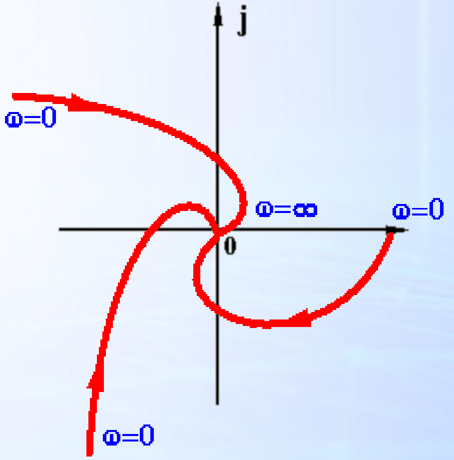
频率特性的极坐标图（Nyquist图）

2.　典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

☞例6.3-1　开环系统Nyquist图的绘制

（4）N型　$GH(s)=\dfrac{K}{s^N(T_1s+1)(T_2s+1)}$

N	$GH(j\omega)$	起点	终点
0	$\dfrac{K}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$	$K\angle 0^\circ$	$0\angle -180^\circ$
1	$\dfrac{K}{j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$	$\infty\angle -90^\circ$	$0\angle -270^\circ$
2	$\dfrac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}$	$\infty\angle -180^\circ$	$0\angle -360^\circ$



频率特性的极坐标图（Nyquist图）

2. 典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

$$GH(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^N\prod_{j=1}^{n-N}(T_j s+1)}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&|GH(j\omega)|=\frac{K\prod_{i=1}^{m}|1+\mathrm{j}\tau_i\omega|}{|\omega|^N\prod_{j=1}^{n-N}|1+\mathrm{j}T_j\omega|}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}\sqrt{1+\tau_i^2\omega^2}}{\omega^N\prod_{j=1}^{n-N}\sqrt{1+T_j^2\omega^2}}\\
&\angle GH(j\omega)=\sum_{i=1}^{m}\angle(1+j\tau_i\omega)-N\times 90^\circ-\sum_{j=1}^{n-N}\angle(1+jT_j\omega)\\
&\qquad=\arctan\tau_1\omega+\cdots+\arctan\tau_m\omega\\
&\qquad\quad-N\times 90^\circ-\arctan T_1\omega-\cdots-\arctan T_{n\text{-}N}\omega
\end{aligned}\right.$$

起点

$$\left\{\begin{array}{ll} K\angle 0^\circ & N=0\\ \infty\angle -90^\circ N & N>0\end{array}\right.$$

终点

$$0\angle\text{-}90^o(n-m)$$

频率特性的极坐标图（Nyquist图）

2. 典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）

☞例6.3-2 $GH(s)=\dfrac{5}{s(s+1)(2s+1)}$ ，画GH(jw)奈氏图。

解 $GH(j\omega)=\dfrac{5}{j\omega(1+j\omega)(1+j2\omega)}=\dfrac{-j5(1-j\omega)(1-j2\omega)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$

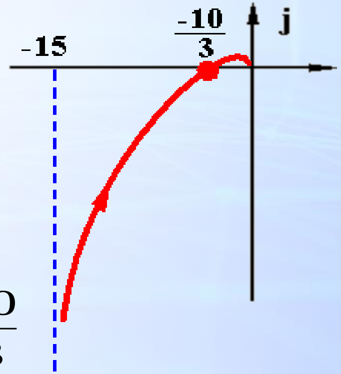
$$=\frac{-15}{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}-j\frac{5(1-2\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}$$

$GH(j0)=\infty\angle-90°$ $\quad GH(j\infty)=0\angle-270°$

渐近线: $\mathrm{Re}[GH(j0)]\Rightarrow-15$

与实轴交点： $\mathrm{Im}[GH(j\omega)]=0 \quad\Rightarrow\quad \omega=1/\sqrt{2}=0.707$

$$\mathrm{Re}[GH(j0.707)]=\frac{-15}{(1+0.5)(1+4\times0.5)}=-\frac{10}{3}$$



频率特性的极坐标图（Nyquist图）

课程小结

- **典型环节频率特性的极坐标图**
- **典型开环系统频率特性的极坐标图（Nyquist图）**

绘制步骤：

(1)分析幅相曲线的起点$GH(j0)$和终点$GH(j\infty)$；

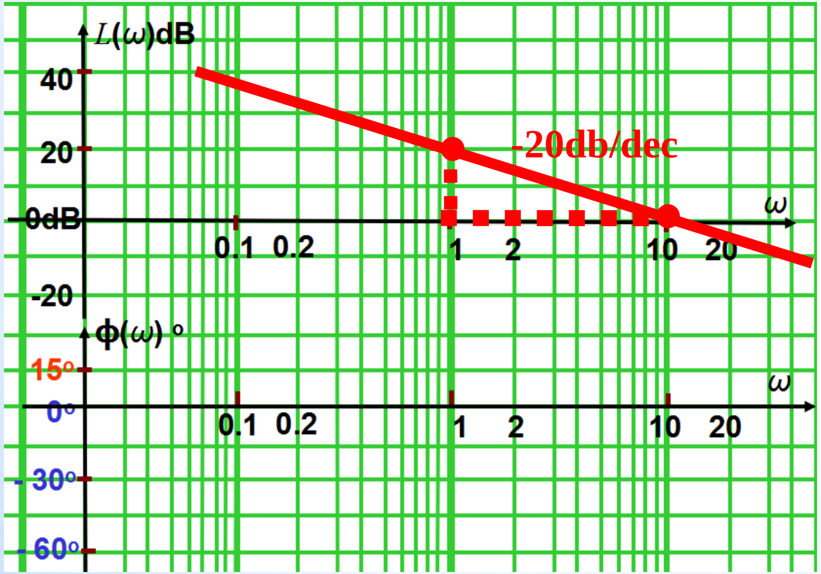
(2)幅相曲线的中间段由GH矢量随$s=jw$的变化规律概略绘制；

(3)必要时可以求出$G(jw)$与实/虚轴的交点。

主要内容

- 引言
- 频率特性的基本概念
- 频率特性的极坐标图（Nyquist图）
- 频率特性的对数坐标图（Bode图）
- 控制系统的奈氏图分析
- 控制系统的伯德图分析
- 闭环系统频率特性分析
- 控制系统的频率设计

频率特性的对数坐标图（Bode图）



坐标特点

- **横轴**
  - 按 lgw 刻度，dec “十倍频程”
  - 按 w 标注
- **纵轴**
  - $L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$ dB(分贝)
  - $\varphi(\omega)$ °(度)
- **特点**
  - (1) 幅值相乘 = 对数相加，便于叠加作图；
  - (2) 可在大范围内表示频率特性；

频率特性的对数坐标图（Bode图）

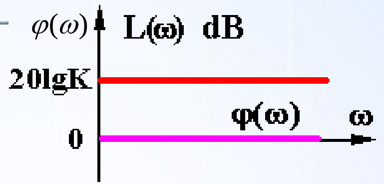
- 典型环节的Bode图
- 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）
- 最小相位系统和非最小相位系统

频率特性的对数坐标图（Bode图）

1. 典型环节的Bode图

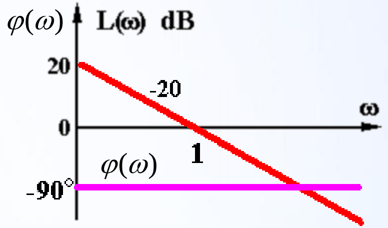
(1) 比例环节 $G(j\omega)=K$ $\begin{cases} L(\omega)=20\lg K \\ \varphi(\omega)=0° \end{cases}$

$G(s)=K$



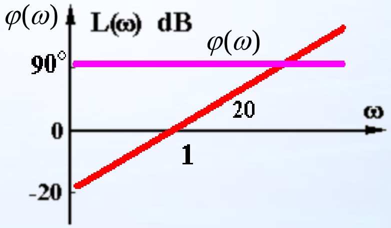
(2) 积分环节 $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}$ $\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\omega \\ \varphi(\omega)=-90° \end{cases}$

$G(s)=1/s$



(3) 微分环节 $G(j\omega)=j\omega$ $\begin{cases} L(\omega)=20\lg\omega \\ \varphi(\omega)=90° \end{cases}$

$G(s)=s$



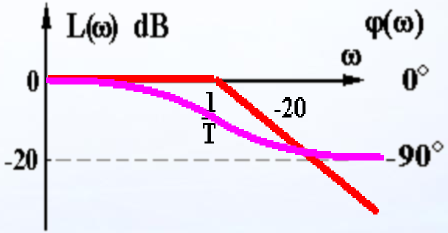
频率特性的对数坐标图（Bode图）

1. 典型环节的Bode图

(4) 惯性环节 $G(s)=\dfrac{1}{1+Ts}$ $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega T}$

$$\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2} & \approx\begin{cases}0 & \omega<<1/T\\ -20\lg T\omega & \omega>>1/T\end{cases} \\ \varphi(\omega)=-\arctan\omega T \end{cases}$$

对数幅频渐近线



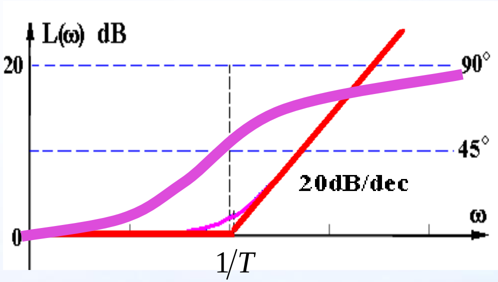
频率特性的对数坐标图（Bode图）

1. 典型环节的Bode图

(5)一阶微分 $G(s)=1+Ts$ $G(j\omega)=1+j\omega T$

$$\begin{cases} L(\omega)=20\lg\sqrt{1+\omega^2T^2}\approx\begin{cases}0 & \omega<<1/T\\ 20\lg T\omega & \omega>>1/T\end{cases} \\ \varphi(\omega)=\arctan\omega T\end{cases}$$

对数幅频渐近线

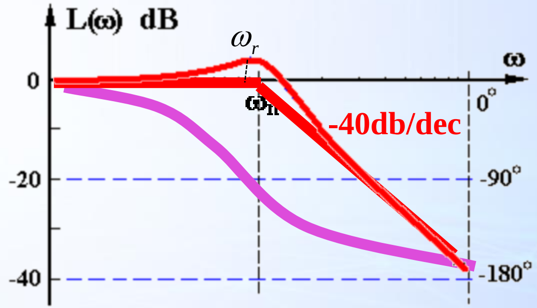


频率特性的对数坐标图（Bode图）

1.　典型环节的Bode图

(6)二阶振荡环节 $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\quad(0<\xi<1)$　$G(j\omega)=\dfrac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}$

$$\begin{cases} L(\omega)=-20\lg\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\approx\begin{cases}0 & \omega/\omega_n<<1\\ -40\lg(\omega/\omega_n) & \omega/\omega_n>>1\end{cases} \\ \varphi(\omega)=-\arctan\left[\left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)\Big/\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\right] \end{cases}$$



谐振频率　$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\qquad 0<\zeta\le 0.707$

谐振幅值　$M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

$$L(\omega_r)=20\lg M_r=20\lg\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

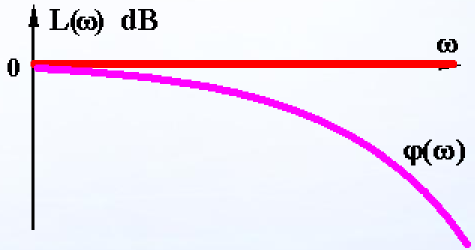
频率特性的对数坐标图（Bode图）

1. 典型环节的Bode图

(7) 延迟环节 $G(s)=e^{-\tau s}$

$$G(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$$

$$\begin{cases} L(\omega)=20\lg 1=0 \\ \varphi(\omega)=-57.3^{\circ}\times\tau\omega \end{cases}$$



频率特性的对数坐标图（Bode图）

2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

$$GH(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$$

$$\begin{cases} L(\omega)=20\lg|GH|=20\lg\dfrac{K|1+j\tau_1\omega|\cdots|1+j\tau_m\omega|}{|\omega|^v|1+jT_1\omega|\cdots|1+jT_{n-v}\omega|} \\ \qquad =\mathbf{20\lg K+20\lg|1+j\tau_1\omega|+\cdots+20\lg|1+j\tau_m\omega|} \\ \qquad\quad \mathbf{-20v\lg|\omega|-20\lg|1+jT_1\omega|-\cdots-20\lg|1+jT_{n\text{-}v}\omega|} \\ \varphi(\omega)=\angle GH \\ \qquad =\mathbf{\arctan\tau_1\omega+\cdots+\arctan\tau_m\omega} \\ \qquad\quad \mathbf{-90^\circ v-\arctan T_1\omega-\cdots-\arctan T_{n\text{-}v}\omega} \end{cases}$$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

$$GH(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$$

(1) **化GH(s)为尾1标准型**

(2) **顺序列出转角频率**

(3) **确定低频渐近线（最小转角频率以左）**

$$\begin{cases}\text{点}\ (\omega=1,\quad L(1)=20\lg K) \\ \text{斜率}\ \ -20\cdot v\quad \mathrm{dB/dec}\end{cases}$$

$$L_d(\omega)\approx 20\lg\frac{K}{\omega^v}=20\lg K-v\cdot 20\lg\omega\quad(\omega<\omega_1)$$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

(4) 叠加作图

- **一阶**
  - **惯性环节 -20dB/dec**
  - **一阶微分 +20dB/dec**
- **二阶**
  - **振荡环节 -**

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20\lg\dfrac{K}{\omega^{v}} \pm 20\lg x\omega & (\omega_1 \le \omega < \omega) \\ \vdots & \\ 20\lg\dfrac{K\prod\limits_{i=1}^{m}(\tau_i\omega)}{\omega^{v}\prod\limits_{i=1}^{m}(\tau_i\omega)} & (\omega_q \le \omega) \end{cases}$$

(5) 修正（转角频率处）

(6) 作对数相频图 $\varphi(\omega \to \infty) \Rightarrow \text{-}90^{\circ}(n-m)$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

☞例6.4-1 $GH(s)=\dfrac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}$

(1) 化GH(s)为尾1标准型

$$GH(s)=\frac{100(\frac{s}{0.5}+1)}{s(\frac{s}{0.2}+1)(s^2+s+1)}$$

(2) 顺序列出转角频率
- **0.2 惯性环节**
- **0.5 一阶微分**
- **1 振荡环节**

(3) 确定低频渐近线（最小转角频率以左）
- **点** $(\omega=1,\quad 40)$
- **斜率** $-20\ \text{dB/dec}$

$$L_d(\omega)\approx 20\lg\frac{100}{\omega}$$

$$=20\lg 100-20\lg\omega\quad(\omega<0.2)$$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

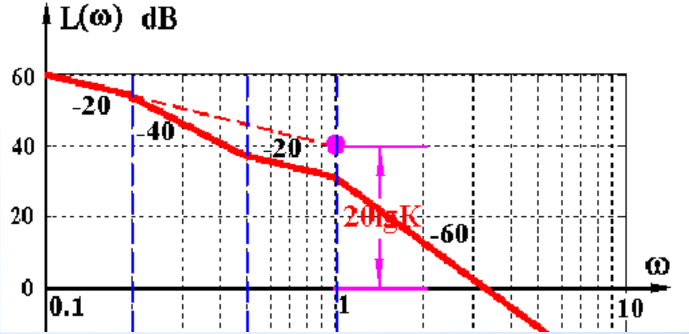
2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

☞例6.4-1 $GH(s)=\dfrac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}=\dfrac{100(\frac{s}{0.5}+1)}{s(\frac{s}{0.2}+1)(s^2+s+1)}$

(4) 叠加作图

- **ω=0.2 惯性环节 -20**
- **ω=0.5 一阶微分 +20**
- **ω=1 振荡环节 -40**

$$L(\omega)\approx\begin{cases}20\lg\dfrac{100}{\omega\cdot\omega/0.2} & 0.2<\omega<0.5\\[2mm] 20\lg\dfrac{100\cdot\omega/0.5}{\omega\cdot\omega/0.2} & 0.5<\omega<1\\[2mm] 20\lg\dfrac{100\cdot\omega/0.5}{\omega\cdot\omega/0.2\cdot(\omega/1)^2} & 1<\omega\end{cases}$$



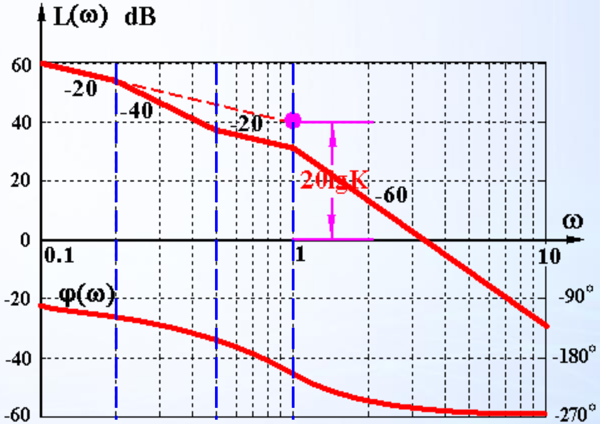
频率特性的对数坐标图（Bode图）

2. 典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）

☞例6.4-1 $GH(s)=\dfrac{40(s+0.5)}{s(s+0.2)(s^2+s+1)}=\dfrac{100(\frac{s}{0.5}+1)}{s(\frac{s}{0.2}+1)(s^2+s+1)}$

(5) 修正

(6) 对数相频图



$$\varphi(\omega)=\left(\arctan(\omega/0.5)-\pi/2-\arctan(\omega/0.2)-\arctan(\omega/1-\omega^2)\right)\cdot 57.3^o$$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

3. 最小相位系统和非最小相位系统

$$GH(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^v(T_1 s+1)\cdots(T_{n-v}s+1)}$$

最小相位系统 —— **在右半s平面没有开环零、极点的系统**

非最小相位系统 —— **在右半s平面存在开环零、极点或带纯迟延环节的系统**

例如：

$$G_1(s)=\frac{1+T_2 s}{1+T_1 s} \quad T_1>T_2>0$$ 最小相位系统

$$G_2(s)=\frac{1-T_2 s}{1+T_1 s} \quad T_1>T_2>0$$ 非最小相位系统

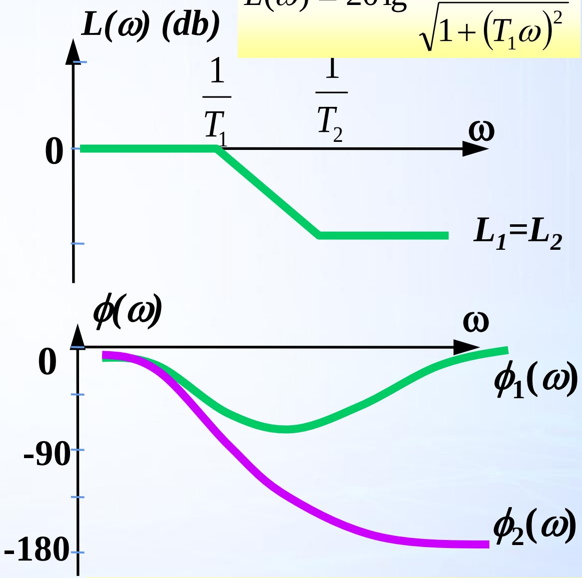
频率特性的对数坐标图（Bode图）

3. 最小相位系统和非最小相位系统

$$G_1(s)=\frac{1+T_2 s}{1+T_1 s}\qquad T_1>T_2>0\qquad \text{最小相位}$$

$$G_2(s)=\frac{1-T_2 s}{1+T_1 s}\qquad T_1>T_2>0\qquad \text{非最小相位}$$

$$L(\omega)=20\lg\frac{\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}{\sqrt{1+(T_1\omega)^2}}$$



$$\begin{cases}\phi_1(\omega)=\arctan(T_2\omega)-\arctan(T_1\omega)\\ \phi_2(\omega)=-\arctan(T_2\omega)-\arctan(T_1\omega)\end{cases}$$

★ **最小相位系统由$L(\omega)$可以唯一确定GH(s)**

非最小相位系统由$L(\omega)$不能唯一确定GH(s)

★ **非最小相位系统相角变化的范围一般比最小相位系统的大**

频率特性的对数坐标图（Bode图）

课程小结

- **典型环节的Bode图**
- **典型开环系统频率特性对数坐标图（Bode图）**

(1) **化GH(s)为尾1标准型**

(2) **顺序列出转角频率**

(3) **确定低频渐近线（最小转角频率以左）**

$$\begin{cases} \text{点} \quad (\omega = 1, \quad L(1) = 20\lg K) \\ \text{斜率} \quad -20 \cdot v \quad \mathrm{dB/dec} \end{cases}$$

频率特性的对数坐标图（Bode图）

课程小结

(4) **叠加作图**

- 一阶
  - 惯性环节 -20dB/dec
  - 一阶微分 +20dB/dec
- 二阶 振荡环节 -40dB/dec

(5) **修正**（转角频率处）

(6) **作对数相频图** $\varphi(\mathrm{w}) \Rightarrow -90°(n-m)$

- 最小相位系统和非最小相位系统

主要内容

- 引言
- 频率特性的基本概念
- 频率特性的极坐标图（Nyquist图）
- 频率特性的对数坐标图（Bode图）
- 控制系统的奈氏图分析
- 控制系统的伯德图分析
- 闭环系统频率特性分析
- 控制系统的频率设计

控制系统的奈氏图分析

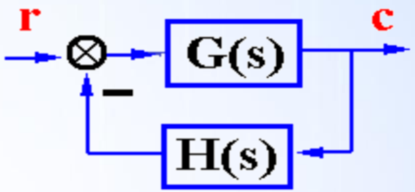
- 奈奎斯特判据的基本原理
- 奈奎斯特稳定性判据一
- 一种实用的奈奎斯特稳定性判据
- 奈奎斯特稳定性判据二
- 奈奎斯特稳定性判据的应用问题

奈奎斯特判据的基本原理

1. 特征函数的零点和极点

$$F(s)=1+GH(s)=\frac{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)+K^*M(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

$$=\frac{D(s)}{N(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)(s-z_3)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$



假设

$$GH(s)=\frac{K^*M(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

F(s)的零点 zi：闭环极点

F(s)的极点 pi：开环极点

个数相同

奈奎斯特判据的基本原理

2. 奈奎斯特轨迹及其映射

$$F(s)=1+GH(s)$$

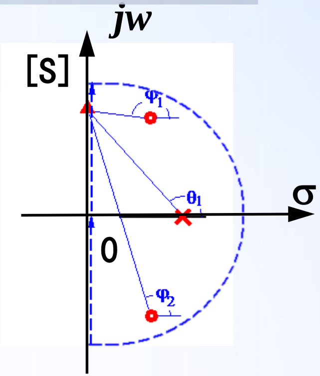
设F(s)在右半s平面有Z个零点 （闭环极点）

P个极点 （开环极点）

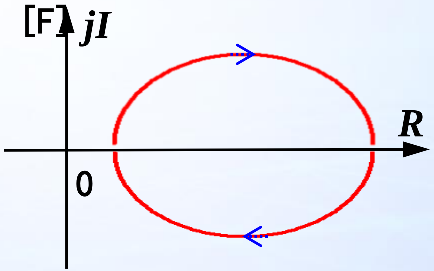
且奈氏轨迹上无零极点

幅角原理： $N=P-Z$

N---F平面中封闭曲线逆时针包围原点的次数



s平面的奈奎斯特轨迹



F平面的映射（示意图）

奈奎斯特判据的基本原理

3. 奈奎斯特判据的基本原理

$$F(s)=1+GH(s) \Rightarrow GH(j\omega)=F(j\omega)-1 \quad (\omega:-\infty \to 0 \to +\infty)$$

幅角原理： $N=P-Z$

$$\boxed{Z=P-N}$$

N---F平面中封闭曲线逆时针包围原点的次数

P---F(s)极点在S右半平面的个数

Z---F(s)零点在S右半平面的个数

Z ---闭环极点在S右半平面的个数

P ---开环极点在S右半平面的个数

N ---奈氏曲线逆时针包围(-1,j0)点的次数

$(\omega:-\infty \to 0 \to +\infty)$

奈奎斯特稳定性判据一

(系统开环传函在原点和虚轴上无零极点)

若奈氏曲线 $GH(j\omega)(\omega:-\infty\to\infty)$ 逆时针包围$(-1,\ j0)$点的次数N等于位于右半平面上开环极点数P,则闭环系统稳定，否则闭环系统不稳定。若奈氏曲线正好过$(-1,\ j0)$点,则闭环系统临界稳定。

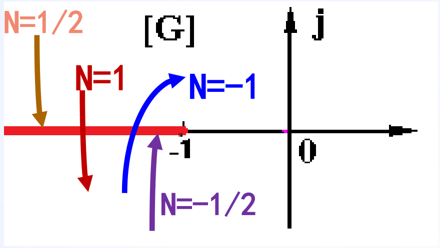
绘开环系统GH(jw)的奈氏图，可先绘 $\omega:0\to\infty$一段，再以实轴对称的方法添上$\omega:-\infty\to0$的一段；

计算奈氏曲线**逆时针包围$(-1,j0)$点的次数N**

由给定的开环传函GH确定**右半S平面上开环极点数 P**

计算 P−N ，若Z=P−N =0 则闭环稳定

一种实用的奈奎斯特稳定性判据



逆时针穿越为正，

顺时针穿越为负

奈奎斯特判据的基本原理： $\boxed{Z = P - 2N}$

Z ---闭环极点在S右半平面的个数

P ---开环极点在S右半平面的个数

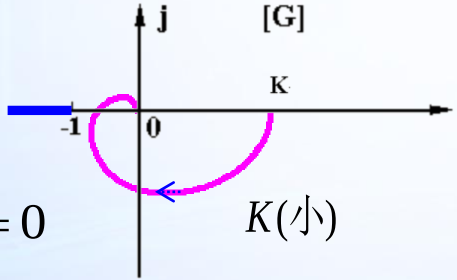
N ---当ω:0→∞时，奈氏曲线GH(jw)穿越$(-\infty,-1]$段的次数

一种实用的奈奎斯特稳定性判据

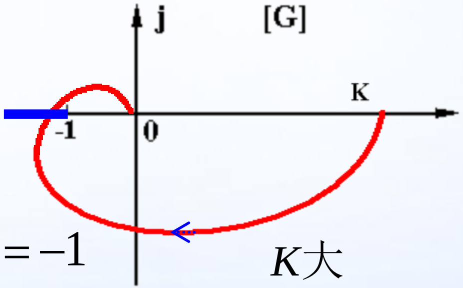
☞例6.5-1 **已知某单位反馈系统的开环传递函数G(s),分析该闭环系统的稳定性。**

$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$$

解： $\begin{cases} G(j0)=K\angle 0^\circ \\ G(j\infty)=0\angle -270^\circ \end{cases}$



$N=0$



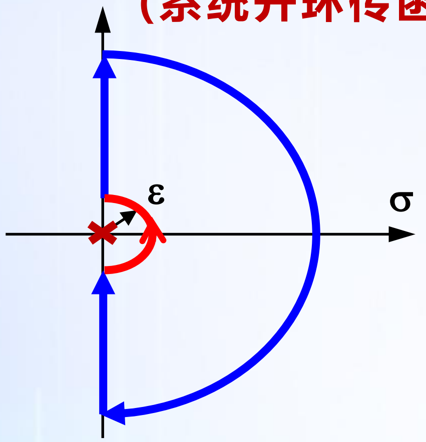
$N=-1$

$\boldsymbol{Z=P-2N=0-2\times 0=0}$ **稳定**

$\boldsymbol{Z=P-2N=0-2(-1)=2}$ **不稳定**

奈奎斯特稳定性判据二

(系统开环传函有积分环节时)



$s = \varepsilon \cdot e^{j\theta}$

$\theta: -90^0 \to 0 \to 90^0$

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{s^M \prod_{i=1}^{n-M}(T_i s+1)}$$

$$= \frac{K\prod_{i=1}^{m}(0+1)}{\varepsilon^M e^{jM\theta}\prod_{i=1}^{n-M}(0+1)} = \frac{K}{\varepsilon^M e^{jM\theta}} = \infty e^{-jM\theta}$$

系统开环传函有积分环节时
增补奈奎斯特轨迹

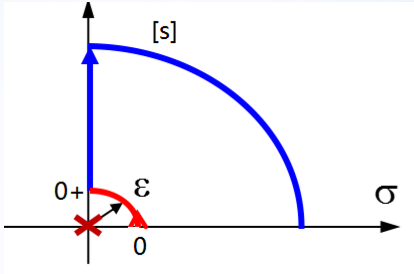
增补轨迹的映射曲线为半径∞的圆曲线
变点相角变化从M ×90°→ −M×90°

若增补奈氏曲线 $GH(j\omega)(\omega: -\infty \to \infty)$ 逆时针包围(−1, j0)点的次数N 等于位于右半平面上开环极点数P,则闭环系统稳定，否则闭环系统不稳定。

奈奎斯特稳定性判据二

☞例6.5-2 **已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。**

$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$



解：

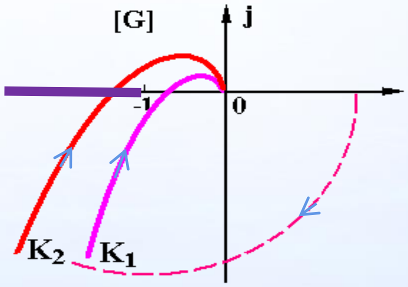
$$\begin{cases} G(j0)=\infty\angle 0^\circ \\ G(j0^+)=\infty\angle -90^\circ \\ G(j\infty)=0\angle -270^\circ \end{cases}$$

$K=K_1$ (小)　　$N=0$

$Z=P-2N=0-2\times 0=0$　　**稳定**

$K=K_2$ (大)　　$N=-1$

$Z=P-2N=0-2\times(-1)=2$　**不稳定**



奈奎斯特稳定性判据的应用问题

1. 最小相位系统的稳定性判别

最小相位系统——开环传函在右半s平面无零极点，又称开环稳定系统。

奈氏判据应用于最小相位系统时　P=0

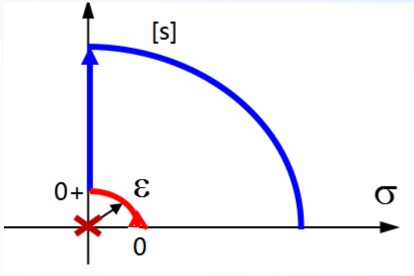
$\therefore$ Z=P−2N=0−2N　N=0才有系统稳定

$\therefore$ 只需判断奈氏曲线是否包围(−1，j0)点，包围则不稳定，不包围则稳定。

奈奎斯特稳定性判据的应用问题

☞例6.5-2 **已知单位反馈系统开环传递函数,分析系统稳定性。**

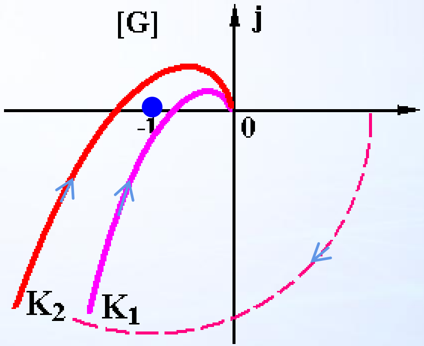
$$G(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$



解： 最小相位系统 P=0

$K=K_1$ (小) **不包围（-1，j0）,故闭环系统稳定**

$K=K_2$ (大) **包围（-1，j0）,故闭环系统不稳定**

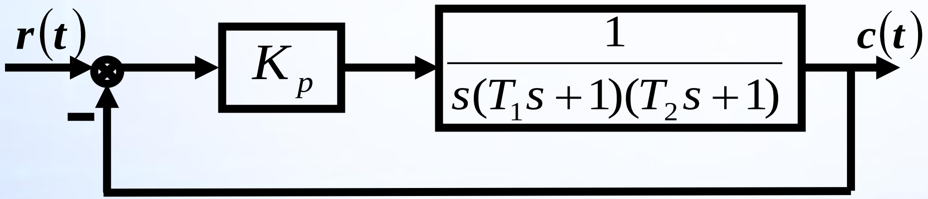


奈奎斯特稳定性判据的应用问题

2. 利用奈氏判据确定稳定系统的可变参数取值范围

利用奈氏曲线穿过(−1, j0)点来确定

☛例6.5-3 **求图示系统闭环稳定时Kp的取值范围（Kp >0）**



$$G(s)H(s)=\frac{K_p}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

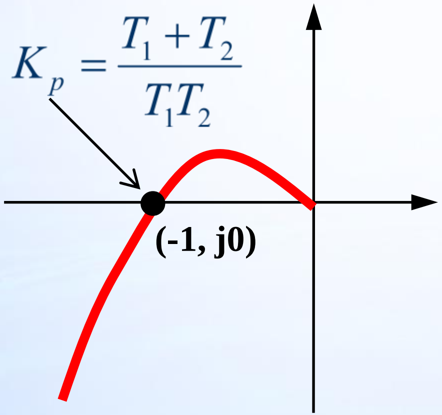
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K_p}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)}$$

奈奎斯特稳定性判据的应用问题

☞例6.5-3　**求图示系统闭环稳定时Kp的取值范围（Kp >0）**

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K_p}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}$$

$$= \frac{-K_p(T_1+T_2)}{(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)} - \frac{K_p(1-T_1T_2\omega^2)j}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)}$$



$$\begin{cases} \dfrac{-K_p(T_1+T_2)}{(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)} = -1 \\ 1 - T_1T_2\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_p = \dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{1}{T_1T_2}} \end{cases}$$

$$0 < K_p < \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}$$

控制系统的奈氏图分析

课程小结

- 奈奎斯特判据的基本原理
- 奈奎斯特稳定性判据一
- 一种实用的奈奎斯特稳定性判据
- 奈奎斯特稳定性判据二
- 奈奎斯特稳定性判据的应用问题

$$\boxed{Z = P - 2N}$$

Z ---闭环极点在S右半平面的个数

P ---开环极点在S右半平面的个数

N ---当$\omega: 0 \to \infty$时，奈氏曲线GH(jw)穿越$(-\infty, -1]$段的次数

主要内容

- 引言
- 频率特性的基本概念
- 频率特性的极坐标图（Nyquist图）
- 频率特性的对数坐标图（Bode图）
- 控制系统的奈氏图分析
- 控制系统的伯德图分析
- 闭环系统频率特性分析
- 控制系统的频域设计

控制系统的伯德图分析

- 控制系统的相对稳定性及其判别
- 相位裕量与时域指标的关系
- 伯德图与系统稳态误差的关系

闭环系统频率特性分析

- 闭环频率特性的性能指标
- 闭环频域性能指标与时域性能指标的关系

控制系统的伯德图分析

1. 控制系统的相对稳定性及其判别

	稳定边界	稳定程度
时域（t）	虚轴	到虚轴的距离
频域（ω）	(-1,j0)	到(-1,j0)的距离

稳定裕量

合理规划人生
留有余量

- 有明确目标
- 做好充足准备
- 提高应变能力

控制系统的伯德图分析

1. 控制系统的相对稳定性及其判别

(1). 稳定裕量的定义

增益穿越频率ω_c　　$|GH(j\omega_c)|=1$　　$L(\omega_c)=0$

相位裕量γ　　$\gamma=180^\circ+\angle GH(j\omega_c)$

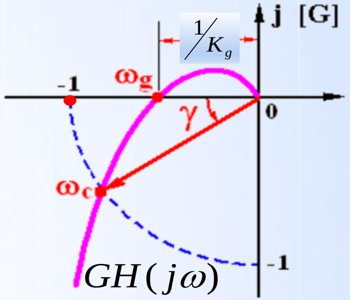
系统在相角上距离临界稳定的余量

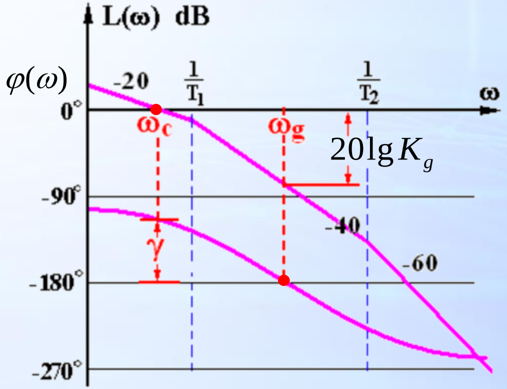
相位穿越频率ω_g　　$\angle GH(j\omega_g)=-180^\circ$

幅值裕量K_g　　$K_g=\dfrac{1}{|GH(j\omega_g)|}$

系统在增益上距离临界稳定的余量

$$K_g^b=20\lg K_g=-20\lg|GH(j\omega_g)|=-L(\omega_g)$$





控制系统的伯德图分析

1.　控制系统的相对稳定性及其判别

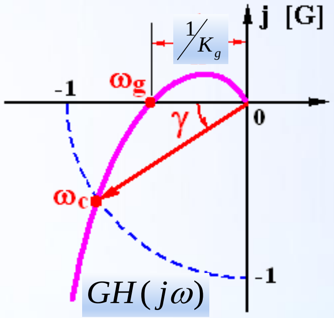
☞例6.6-1　**已知系统的开环传函**　$GH(s)=\dfrac{100}{s(s+2)(s+10)}$　γ，求K_g。

解法I：由奈氏曲线求γ，K_g。

$$|GH(j\omega_c)|=\frac{100}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+2^2}\sqrt{\omega_c^2+10^2}}=1\Rightarrow\omega_c=2.9$$

$$\gamma=180^\circ+\angle GH(j\omega_c)$$

$$=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{2.9}{2}-\arctan\frac{2.9}{10}=18.5^\circ$$



$$\angle GH(j\omega_g)=-180^\circ$$

$$=-90^\circ-\arctan\frac{\omega_g}{2}-\arctan\frac{\omega_g}{10}$$

$$\Rightarrow\omega_g=4.47$$

$$K_g=\frac{1}{|GH(j\omega_g)|}$$

$$=\frac{\omega_g\sqrt{\omega_g^2+2^2}\sqrt{\omega_g^2+10^2}}{100}\overset{\omega_g=4.47}{=}2.4$$

控制系统的伯德图分析

1. 控制系统的相对稳定性及其判别

☞例6.6-1 **已知系统的开环传函** $GH(s)=\dfrac{100}{s(s+2)(s+10)}$ **求** γ, K_g。

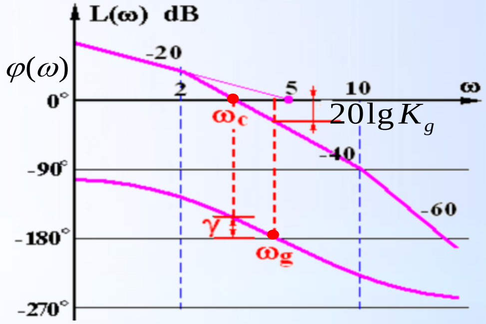
解法II：由Bode图求 γ, K_g^b。

$$GH(s)=\frac{5}{s(\frac{s}{2}+1)(\frac{s}{10}+1)}$$

$$L(\omega)\approx\begin{cases}20\lg\dfrac{5}{\omega} & \omega<2\\[2ex] 20\lg\dfrac{5}{\omega\cdot\omega/2} & 2<\omega<10\\[2ex] 20\lg\dfrac{5}{\omega\cdot\omega/2\cdot\omega/10} & 10<\omega\end{cases}$$

$$L(\omega_c)=20\lg\frac{5}{\omega_c\cdot\dfrac{\omega_c}{2}}=0$$

$$\Rightarrow\omega_c=\sqrt{10}=3.16$$



$$\gamma=180^\circ+\angle GH(j\omega_c)$$

$$=180^\circ-90^\circ-\arctan\frac{3.16}{2}-\arctan\frac{3.16}{10}$$

$$=14.8^\circ$$

$$\omega_g=4.47$$

$$K_g^b=20\lg K_g=20\lg 2.4=7.6(db)$$

控制系统的伯德图分析

1. 控制系统的相对稳定性及其判别

(2)相对稳定性的判别

$$\begin{cases}\gamma > 0^\circ \\ K_g > 1\end{cases} \Rightarrow \quad \textbf{闭环稳定}$$

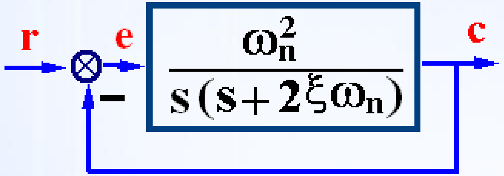
γ，K_g**常作为控制系统的频域设计指标。**

较好的经验值为：

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma = 30^\circ — 60^\circ \\ K_g^b \geq 6(db)\end{array}}$$

控制系统的伯德图分析

2. 相位裕量与时域指标的关系 （以二阶系统为例）



$$|G(j\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+(2\xi\omega_n)^2}} = 1 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}\cdot\omega_n$$

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c) = 90^\circ - \arctan\frac{\omega_c}{2\xi\omega_n} = \arctan\frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

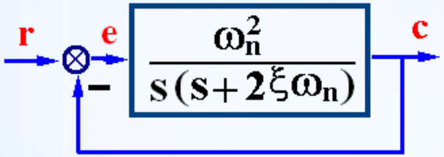
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}} \\ &\sigma\% = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}\right\} \gamma \Leftrightarrow \xi \Leftrightarrow \sigma\%$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\xi\omega_n)^2}} \\ \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan\dfrac{\omega}{2\xi\omega_n} \end{cases}$$

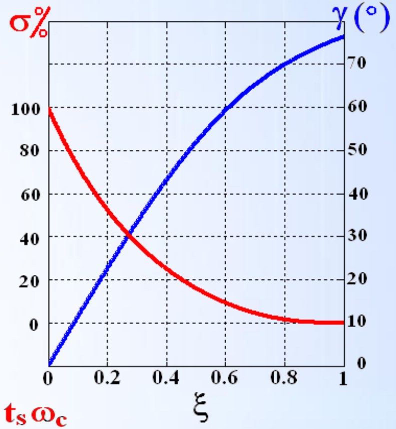
控制系统的伯德图分析

2.　相位裕量与时域指标的关系



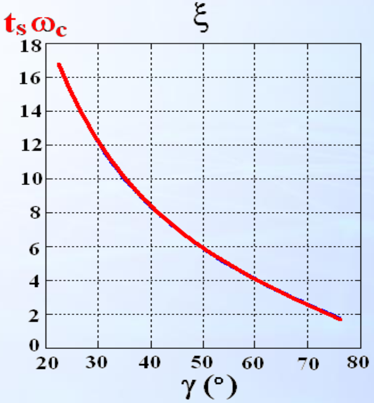
$$G(s)=\frac{\omega_n^{\ 2}}{s(s+2\xi\omega_n)}$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\arctan\frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}}\\ \sigma\%&=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}\right\}\ \gamma\Leftrightarrow\xi\Leftrightarrow\sigma\%$$



$$t_s=\frac{3\sim4}{\xi\omega_n}\xrightarrow{\omega_c=\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}\cdot\omega_n} t_s\omega_c=\frac{3\sim4}{\xi}\sqrt{\sqrt{4\xi^4+1}-2\xi^2}$$

$$=\frac{6\sim8}{\tan\gamma}$$



控制系统的伯德图分析

3. 伯德图与系统稳态误差的关系

	频段		对应性能
$L(\omega)$	低频段	开环增益 K 系统型别 v	稳态误差 e_{ss}
	中频段	截止频率 ω_c 相位裕量 γ	动态性能 $\begin{cases} \sigma\% \\ t_s \end{cases}$
	高频段	系统抗高频干扰的能力	

控制系统的伯德图分析

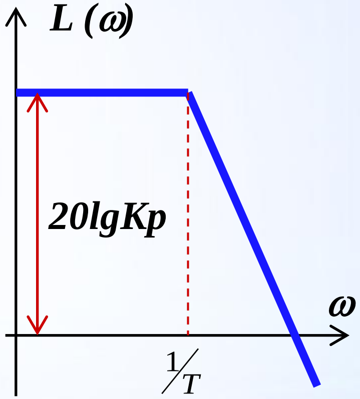
3. 伯德图与系统稳态误差的关系

假设$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^{v}(Ts+1)}$

（1）.v=0 （0型系统）

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}$$

$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$



低频渐近线方程

$$L_d(\omega)=20\lg K=20\lg K_p$$

斜率=0， 与实轴无交点。

控制系统的伯德图分析

3. 伯德图与系统稳态误差的关系

假设$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^{v}(Ts+1)}$

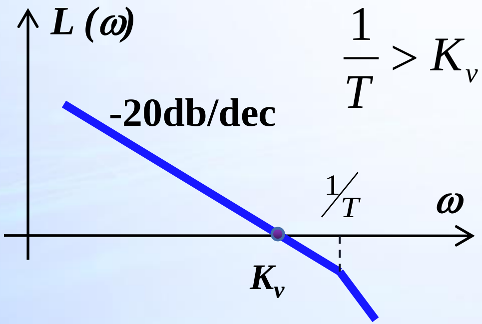
（2）．v=1 （1型系统）

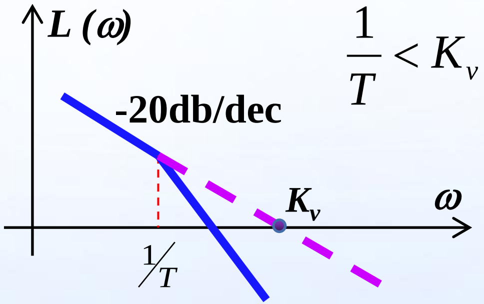
$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(Tj\omega+1)}$$

$$L(\omega)=20\lg K-20\lg\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

低频渐近线方程

$$L_d(\omega)=20\lg K-20\lg\omega=20\lg K_v-20\lg\omega$$





斜率=-20 db/dec，
交点：$\omega=K_v$

控制系统的伯德图分析

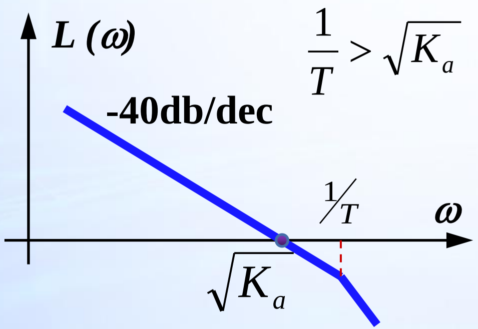
3. 伯德图与系统稳态误差的关系

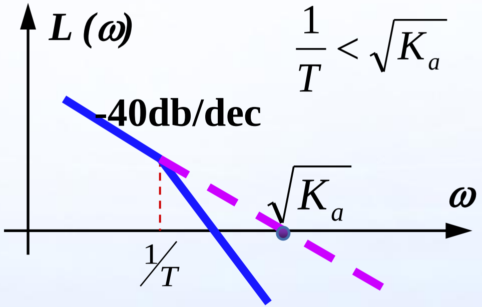
假设$G(s)H(s)=\dfrac{K}{s^{v}(Ts+1)}$

（3）．v=2（2型系统） $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{K}{(j\omega)^2(Tj\omega+1)}$

$$L(\omega)=20\lg K-40\lg\omega-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

低频渐近线方程 $L_d(\omega)=20\lg K-40\lg\omega=20\lg K_a-40\lg\omega$





斜率=-40 db/dec，

交点： $\omega=\sqrt{K_a}$

控制系统的伯德图分析

3. 伯德图与系统稳态误差的关系

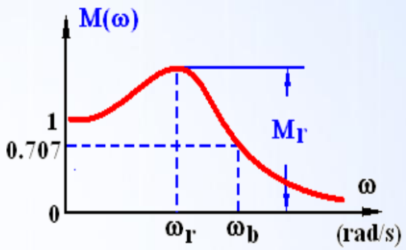
L(w)低频段斜率	系统型别 v	开环增益 K	稳态误差 e_{ss}
0	0	Kp	
-20	1	Kv	
-40	2	Ka	

闭环系统频率特性分析

1. 闭环频率特性的性能指标

（以二阶系统为例）

$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^{2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{2}}$$



闭环幅频特性

（1）零频值 M_0

$$M_0=M(0)\overset{\omega=0}{=}\frac{\omega_n^2}{0+0+\omega_n^2}=1$$

（2）频带宽度 ω_b

$M(\omega)$下降到0.707M_0 对应的频率值ω_b

$$M(\omega_b)=\frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^{2}-\omega_b^{2})^2+(2\xi\omega_n\omega_b)^2}}=0.707$$

$$\Rightarrow \omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$$

（3）
- **谐振频率** $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$
- **谐振峰值** $M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

闭环控制频率特性分析

2. 闭环频域性能指标与时域性能指标的关系

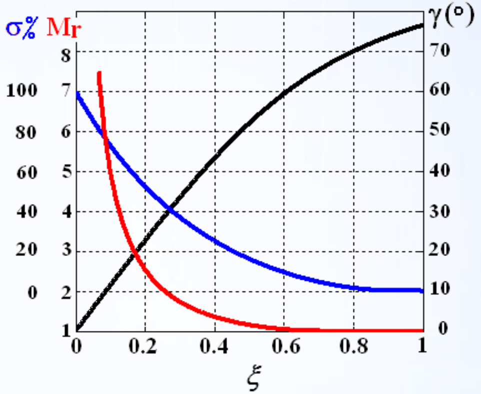
$$\Phi(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases}\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\end{cases}\quad(0\le\xi\le 0.707)$$

$$\omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$$

$$t_s=3\sim4/\xi\omega_n$$

$$\omega_b t_s=\frac{3\sim4}{\xi}\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$$



控制系统的伯德图分析

课程小结

频段			对应性能	
$L(\omega)$ 低频段	开环增益 K		稳态误差 e_{ss}	
	系统型别 v			
中频段	截止频率 ω_c		动态性能	$\sigma\%$
	相位裕量 γ			t_s
高频段	系统抗高频干扰的能力			

闭环系统频率特性分析

课程小结

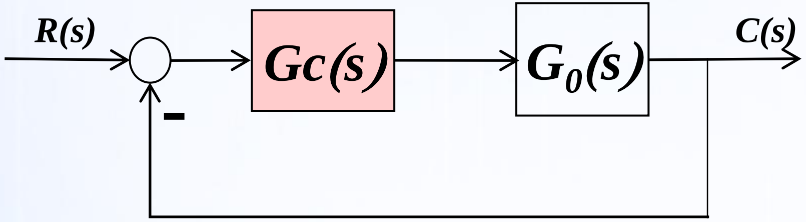
- 频带宽度 $\boldsymbol{\omega_b}$
- 谐振频率 ω_r
- 谐振峰值 M_r

主要内容

- 引言
- 频率特性的基本概念
- 频率特性的极坐标图（Nyquist图）
- 频率特性的对数坐标图（Bode图）
- 控制系统的奈氏图分析
- 控制系统的伯德图分析
- 闭环系统频率特性分析
- 控制系统的频域设计

控制系统的频域设计

串联校正：在被控对象前串接结构和参数可调整的装置（校正装置），用以改善系统性能，使系统满足指标要求。



校正前 $G_0(s)$

校正后 $G_c(s)G_0(s)$

期望 $L(\omega)$

- **低频段**　高度，保证稳态精度
- **中频段**　宽度，保证动态性能
- **高频段**　低，保证高频抗干扰的能力

控制系统的频域设计

- 典型相位超前控制器特性
- 典型相位滞后控制器特性
- 典型滞后-超前控制器特性
- 基于串联校正典型控制器的频域设计

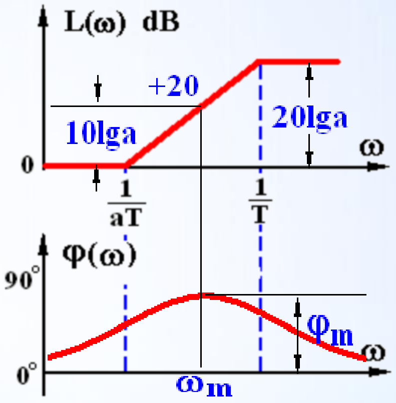
控制系统的频域设计

1. 典型相位超前控制器特性

$$G_c(s)=K_c\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}(\alpha>1)\quad 令K_c=1$$

$$L(\omega)\approx 20\lg\frac{\alpha T\omega}{T\omega}=20\lg\alpha\left(\omega>1/T\right)$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(\alpha T\omega)-\arctan(T\omega)>0$$



$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}=0\Rightarrow \boxed{\omega_m=1/\sqrt{\alpha}T}\qquad \varphi_m=\varphi(\omega_m)=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\boxed{L(\omega_m)=10\lg\alpha}\\&\boxed{\alpha=\frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}}\end{aligned}\right\}$$

利用相位超前特性提高系统的相位裕量

控制系统的频域设计

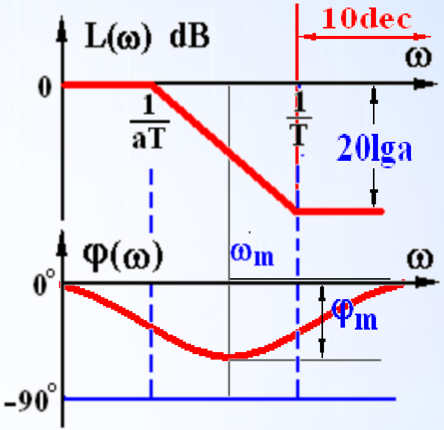
2. 典型相位滞后控制器特性

$$G_c(s)=K_c\frac{1+Ts}{1+\alpha Ts}\ (\alpha>1)\quad 令K_c=1$$

$$\varphi(\omega)=\arctan(T\omega)-\arctan(\alpha T\omega)<0$$

$$\varphi(10/T)=\arctan(10)-\arctan(10a)=\arctan\frac{10(1-\alpha)}{1+100\alpha}$$

$$=\arctan\frac{10(1/\alpha-1)}{1/\alpha+100}\xrightarrow{1/\alpha\to 0}-\arctan 0.1=-5.7^\circ$$



- **相角滞后，幅值衰减**　　**利用滞后网络幅值衰减特性释放系统本身的相角裕量**
- ***1/T*后10dec 处的相角损失不超过-6°**

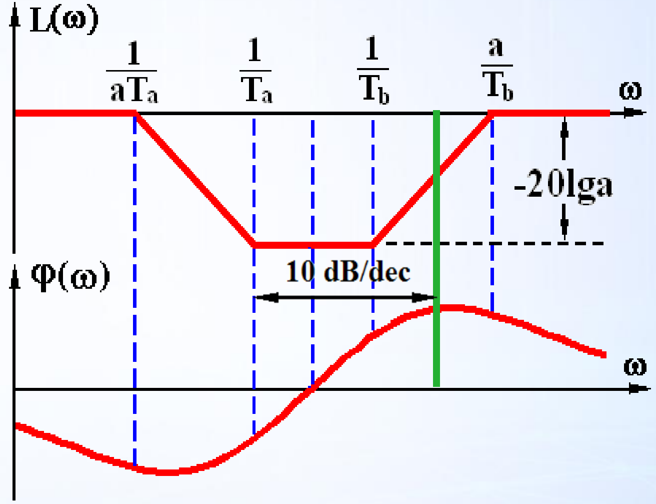
控制系统的频域设计

3. 典型滞后-超前控制器特性

$$G_c(s)=\frac{(T_a s+1)}{(\alpha T_a s+1)}\cdot\frac{(T_b s+1)}{(\frac{T_b}{\alpha}s+1)}\quad(\alpha>1)$$

$$aT_a>T_a>T_b>\frac{T_b}{a}$$

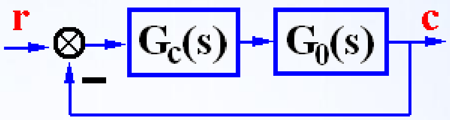
幅值衰减，相角超前



控制系统的频域设计

4. 基于串联校正典型控制器的频域设计

串联校正的频率法设计步骤



一、根据稳态误差要求确定K_c

二、绘制$K_cG_0(s)$的伯德图

三、选择合适的校正环节

四、设计校正环节的参数

五、检验校正后系统的性能指标

六、若性能指标不达标，返回第四步重新设计参数

控制系统的频域设计

4. 基于串联校正典型控制器的频域设计

典型相位超前控制器设计步骤（设给定指标 e_{ss}^*，ω_c^*，γ^*）

—— 利用超前校正环节的相角超前特性提高系统的相位裕量

① **由** $e_{ss}^* \to K \to G_0(s) \to L_0(\omega) \to \omega_{c0} \to \gamma_0$ $\boxed{\omega_{c0},\ \gamma_0 \text{ 均不足}}$

② **确定** $\varphi_m = \gamma^* - \gamma_0 + (5^\circ \sim 10^\circ) \Rightarrow \alpha = \dfrac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$

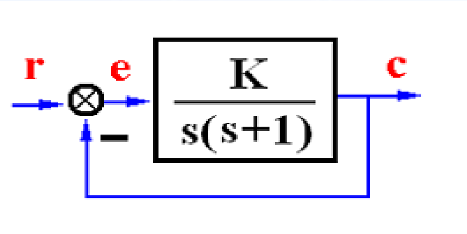
③ **设计** $\omega_c^* = \omega_m$ $\boxed{L_c(\omega_m) + L_0(\omega_c^*) = 0 \text{ 即 } \left|G_0(j\omega_c^*)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}$

④ **确定参数T** $\Rightarrow G_c(s)$

⑤ $G(s) = G_c(s) \cdot G_0(s)$ **验算** ω_c^*、γ^* **是否满足要求**

⑥ **若不满足性能要求，返回②重新设计**

控制系统的频域设计



☞例6.8-1已知$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，设计一校正环节使$K_v \geq 10(1/s)$，

$\omega_c \geq 5rad/s, \gamma \geq 60^\circ, K_g^b \geq 10dB$

1. 按稳态误差要求确定K,计算原系统的增益穿越频率及相位裕量

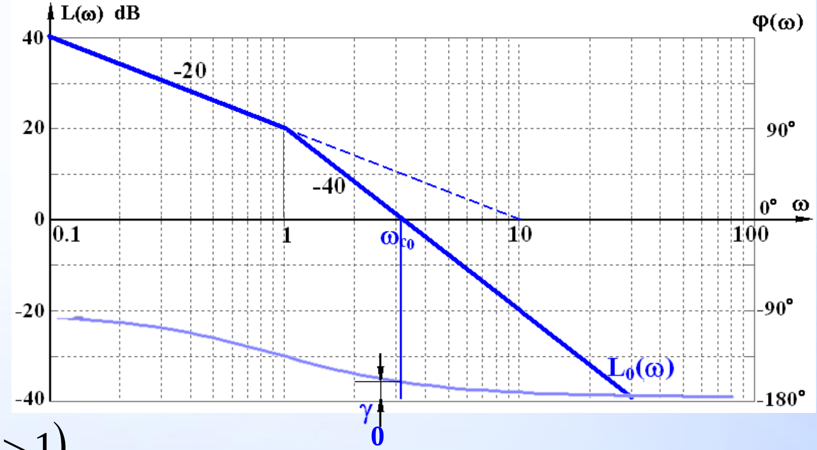
$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_0(s)=K \geq 10$$

取$K=10$

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

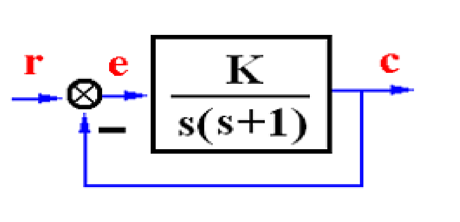
$$\omega_{c0}=3.08$$

$$\gamma_0=18^\circ$$



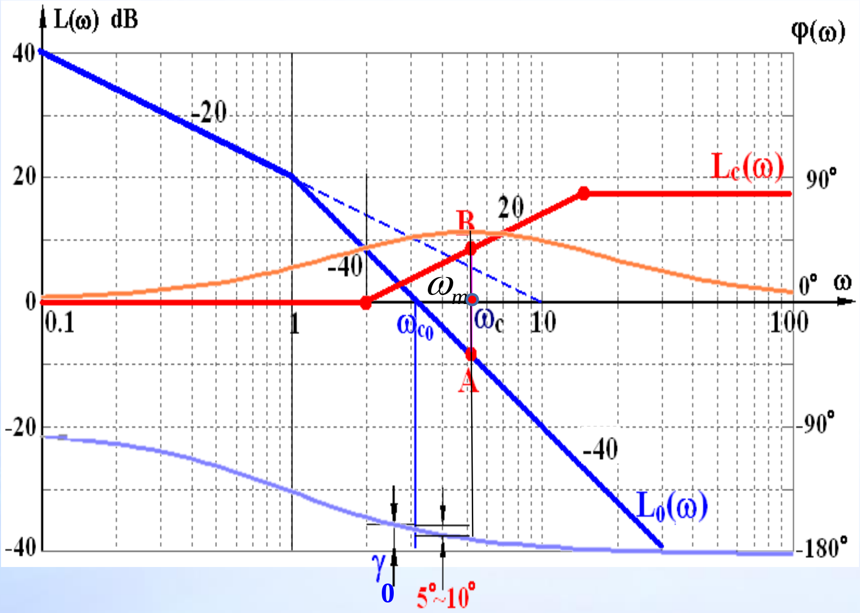
采用串联相位超前校正环节 $G_c(s)=\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}(\alpha>1)$

控制系统的频域设计



☞例6.8-1已知$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，设计一校正环节使$K_v \geq 10(1/s)$,

$\omega_c \geq 5rad/s, \gamma \geq 60^\circ, K_g^b \geq 10dB$



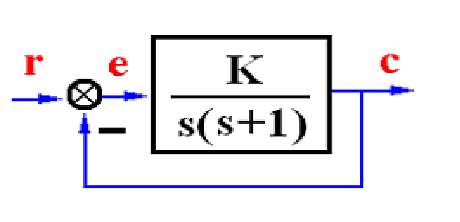
2．计算最大超前角φ_m及参数α

$$\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + (5^\circ \sim 10^\circ)$$
$$= 60 - 18 + 8 = 50^\circ$$

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} = 7.5486$$

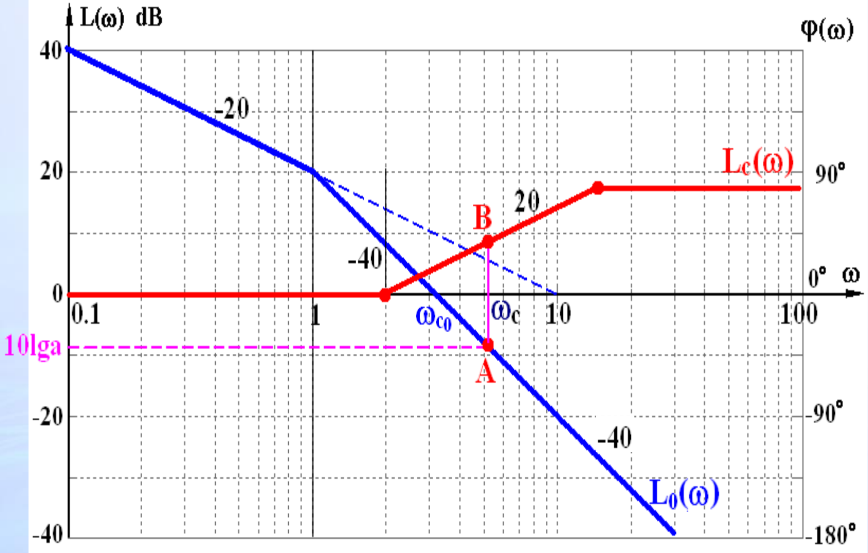
关键思路： $\boxed{\omega_m = \omega_c}$

控制系统的频域设计



☞例6.8-1已知$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，设计一校正环节使$K_v\ge 10(1/s)$，

$\omega_c \ge 5rad/s, \gamma \ge 60^\circ, K_g^b \ge 10dB$



3．确定新系统的增益穿越频率ω_m即ω_c

作法：在0 db线下10lgα处作水平线，与

$L_0(\omega)$的交点对应的ω值即为ω_m或ω_c

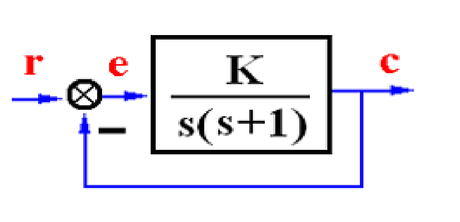
$$L_c(\omega_m)+L_0(\omega_c)=0$$

$$10\lg\alpha+20\lg|G_0(j\omega_c)|=0$$

即$|G_0(j\omega_c)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

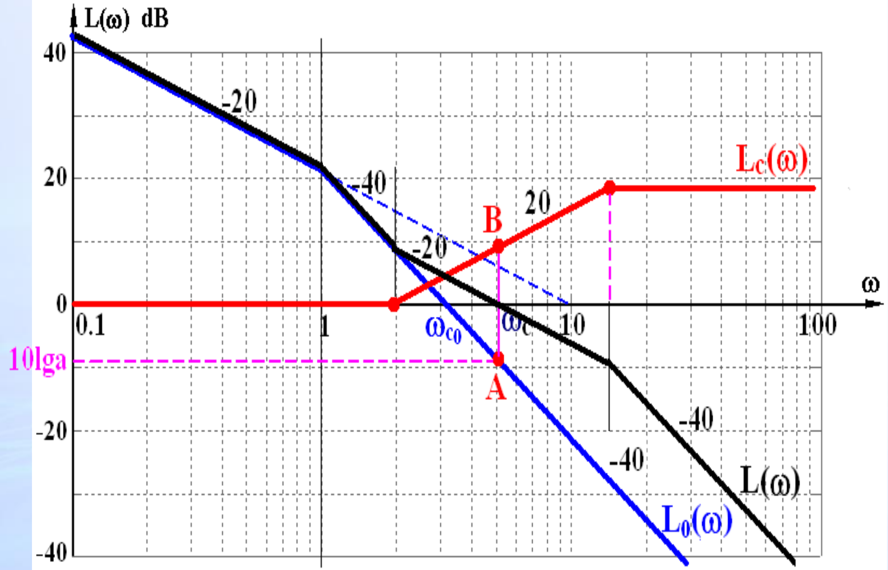
$$\Rightarrow \omega_c=\omega_m=5.19$$

控制系统的频域设计



☞例6.8-1已知$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，设计一校正环节使$K_v \geq 10(1/s)$，

$\omega_c \geq 5rad/s, \gamma \geq 60^\circ, K_g^b \geq 10dB$



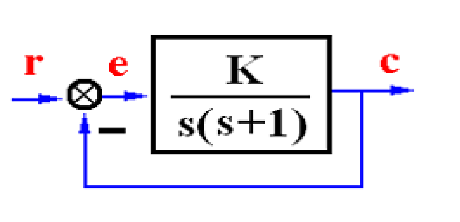
4. 确定参数T及校正环节的传递函数

$$T=\frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}}=\frac{1}{5.19\cdot\sqrt{7.5486}}=0.0701$$

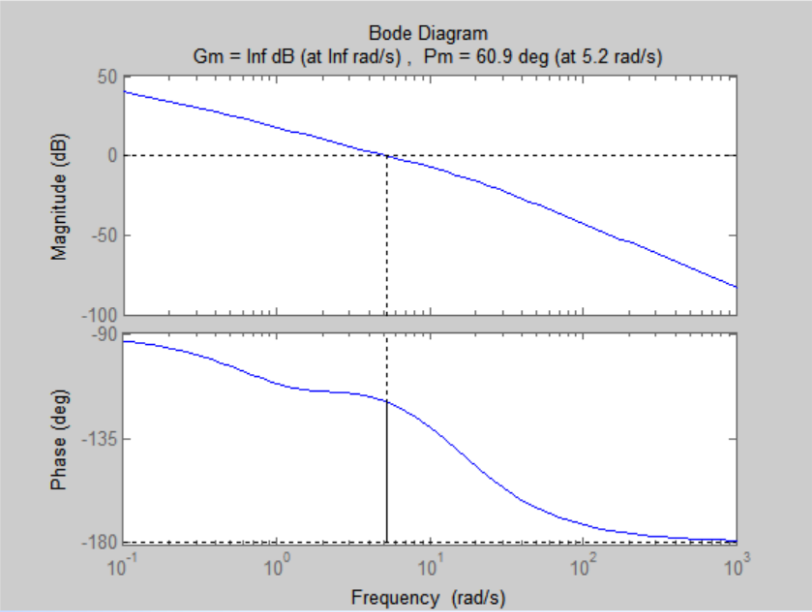
$$G_c(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=\frac{1+0.5292s}{1+0.0701s}$$

$$G_0(s)G_c(s)=\frac{10}{s(s+1)}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

控制系统的频域设计



☛例6.8-1已知$G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$，设计一校正环节使$K_v \geq 10(1/s)$, $\omega_c \geq 5rad/s, \gamma \geq 60^\circ, K_g^b \geq 10dB$



5. 性能校核

$$G_0(s)G_c(s)=\frac{10}{s(s+1)}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

$$=\frac{10}{s(s+1)}\cdot\frac{1+0.5292s}{1+0.0701s}$$

满足设计性能要求，设计完成

控制系统的频域设计

4. 基于串联校正典型控制器的频域设计

典型相位超前控制器设计小结

实质：利用超前环节相角超前特性提高系统的相位裕量

适用： $\omega_{c0} \le \omega_c^*$， $\gamma_0 \le \gamma^*$

效果：

- **保持低频段**　　**满足稳态精度** e_{ss}
- **改善中频段**　　$\omega_c \uparrow$, $\gamma \uparrow$ **动态性能提高**
- **抬高高频段**　　**抗高频干扰能力降低**

控制系统的频域设计

课程小结

- 串联校正控制器的特性
- 串联校正控制器的频域设计方法及对比

校正方法	校正特点	应用场合	效果
① 超前校正	幅值增加 相角超前	$\begin{cases}\omega_{c0} < \omega_c^* \\ \gamma_0 < \gamma^*\end{cases}$	$\begin{cases}\omega_c \uparrow, \quad \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \uparrow\end{cases}$
② 滞后校正	幅值衰减 相角滞后	$\begin{cases}\omega_{c0} > \omega_c^* \\ \gamma_0 < \gamma^*\end{cases}$	$\begin{cases}\omega_c \downarrow, \quad \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \downarrow\end{cases}$
③ 滞后超前	幅值衰减 相角超前	滞后超前 均不奏效	$\begin{cases}\omega_c \sim, \quad \gamma \uparrow \\ \text{高频段} \sim\end{cases}$