图算法篇：最小生成树I

提纲

问题背景

通用框架

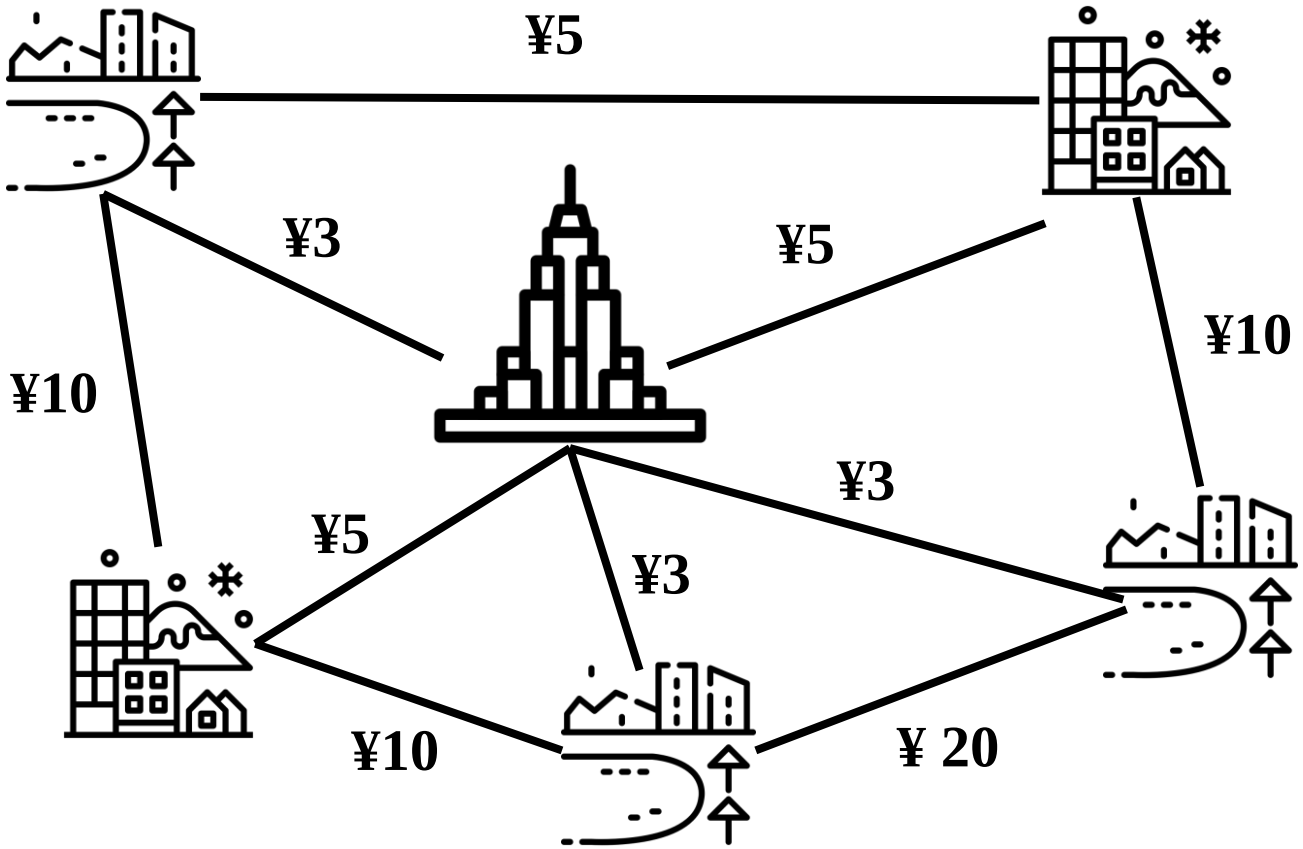
Prim算法

算法实例

算法分析

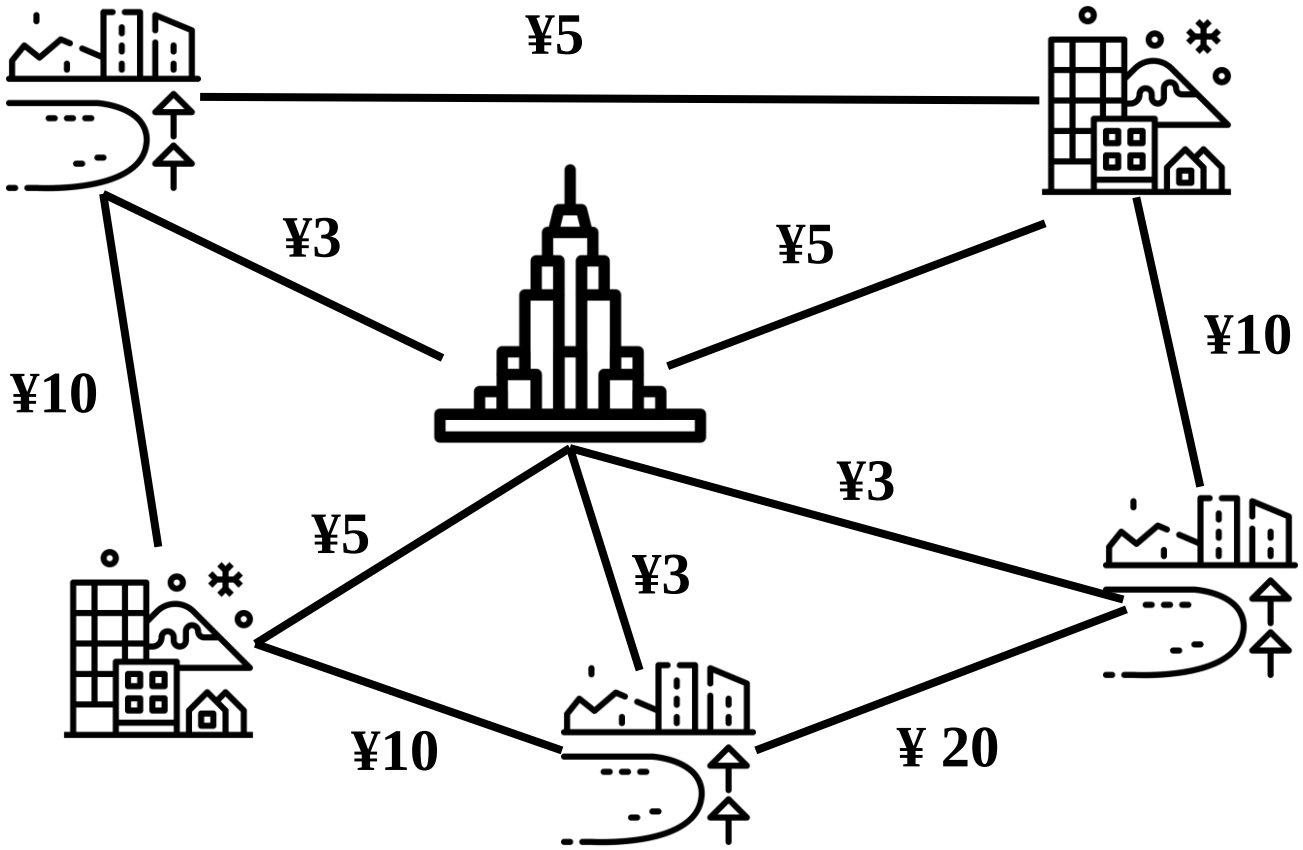
问题背景：道路修建

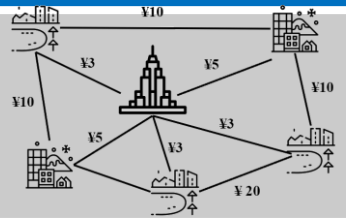
- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同



问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同

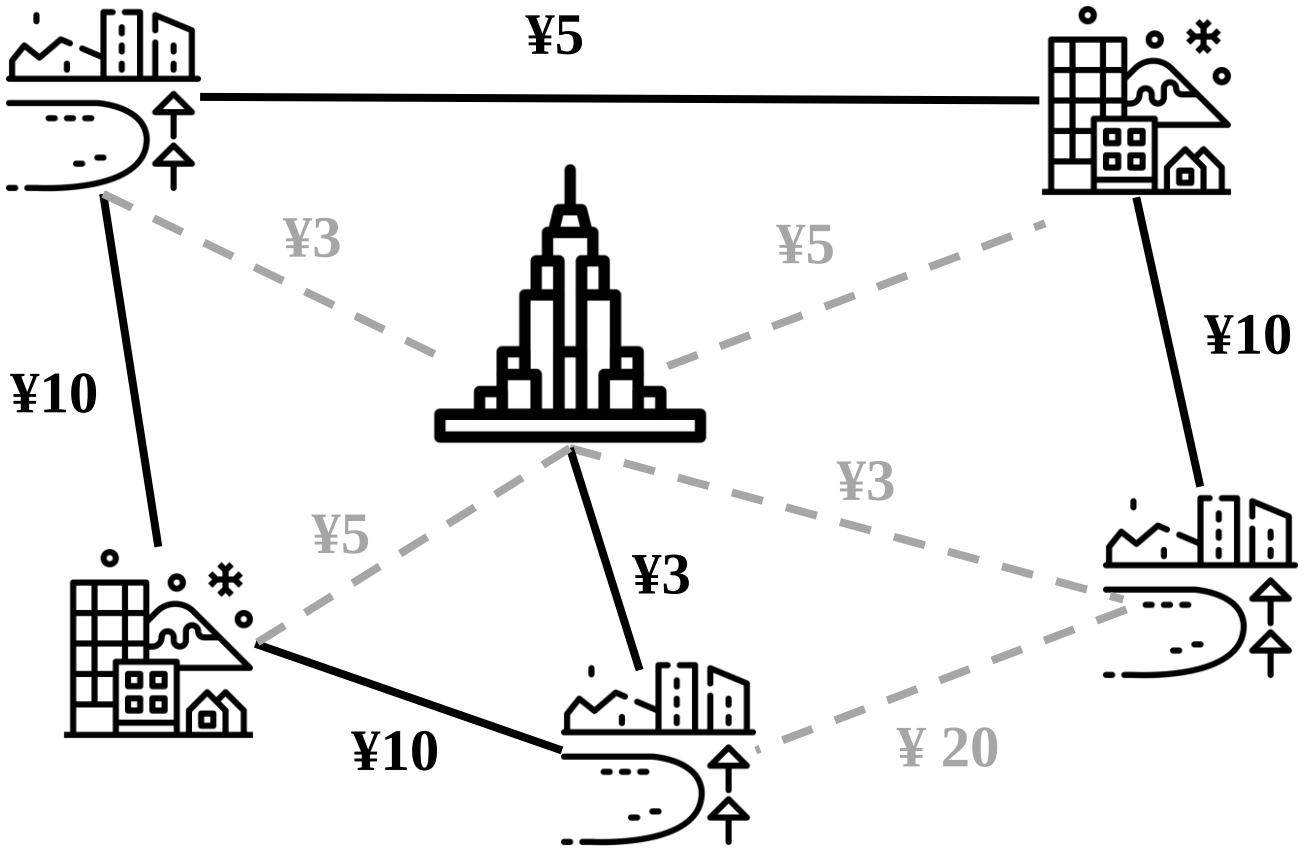


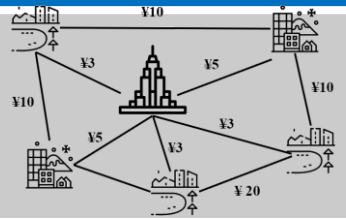
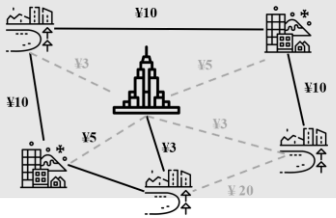
方案	花费
	¥74

花费：$10+10+10+5+20+3+3+5+3+5=74$

问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同

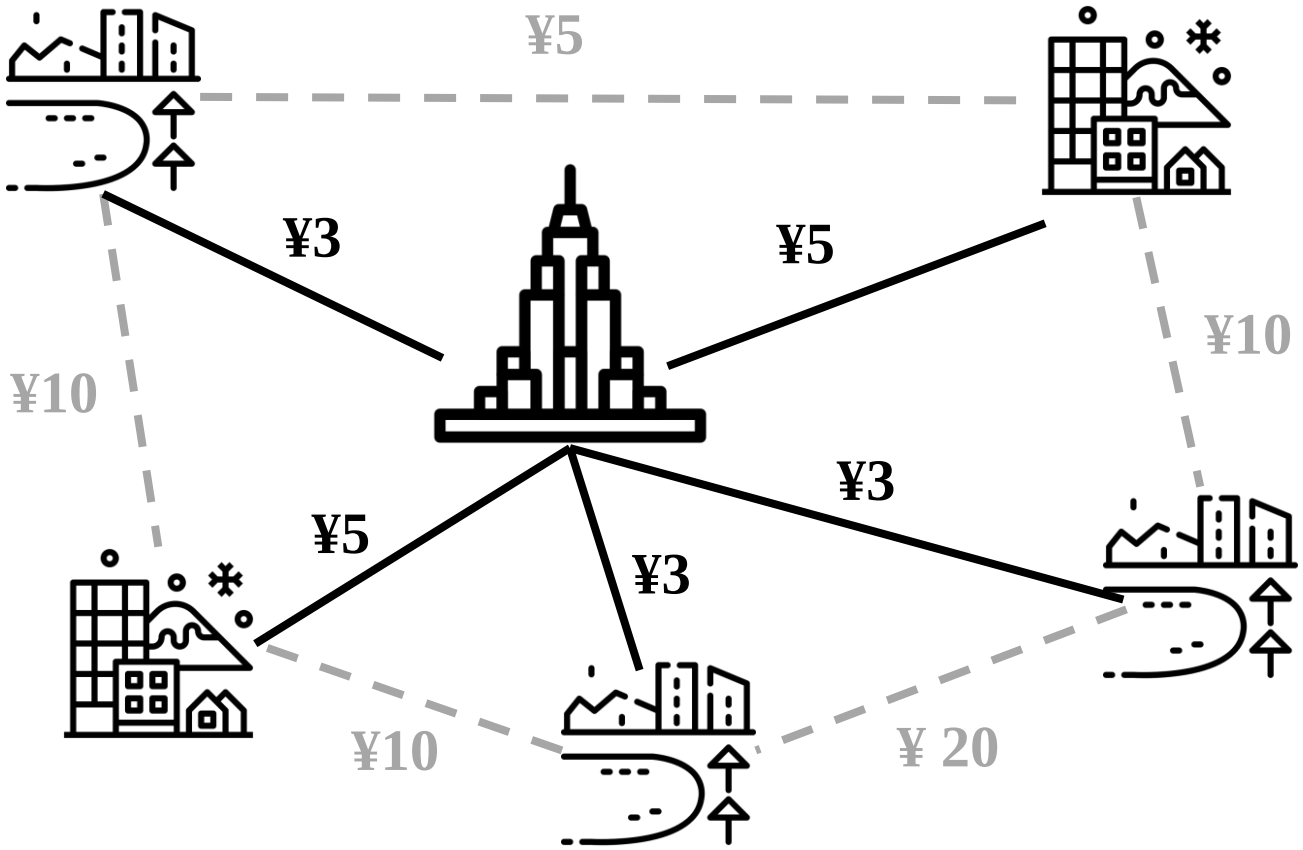


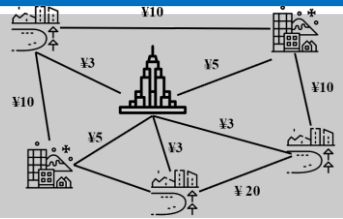
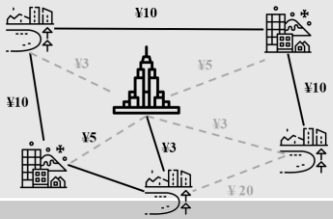
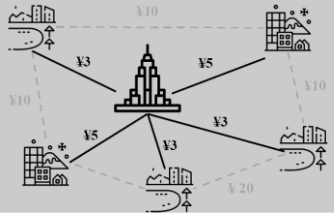
方案	花费
	¥74
	¥38

花费：$10 + 10 + 10 + 5 + 3 = 38$

问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同

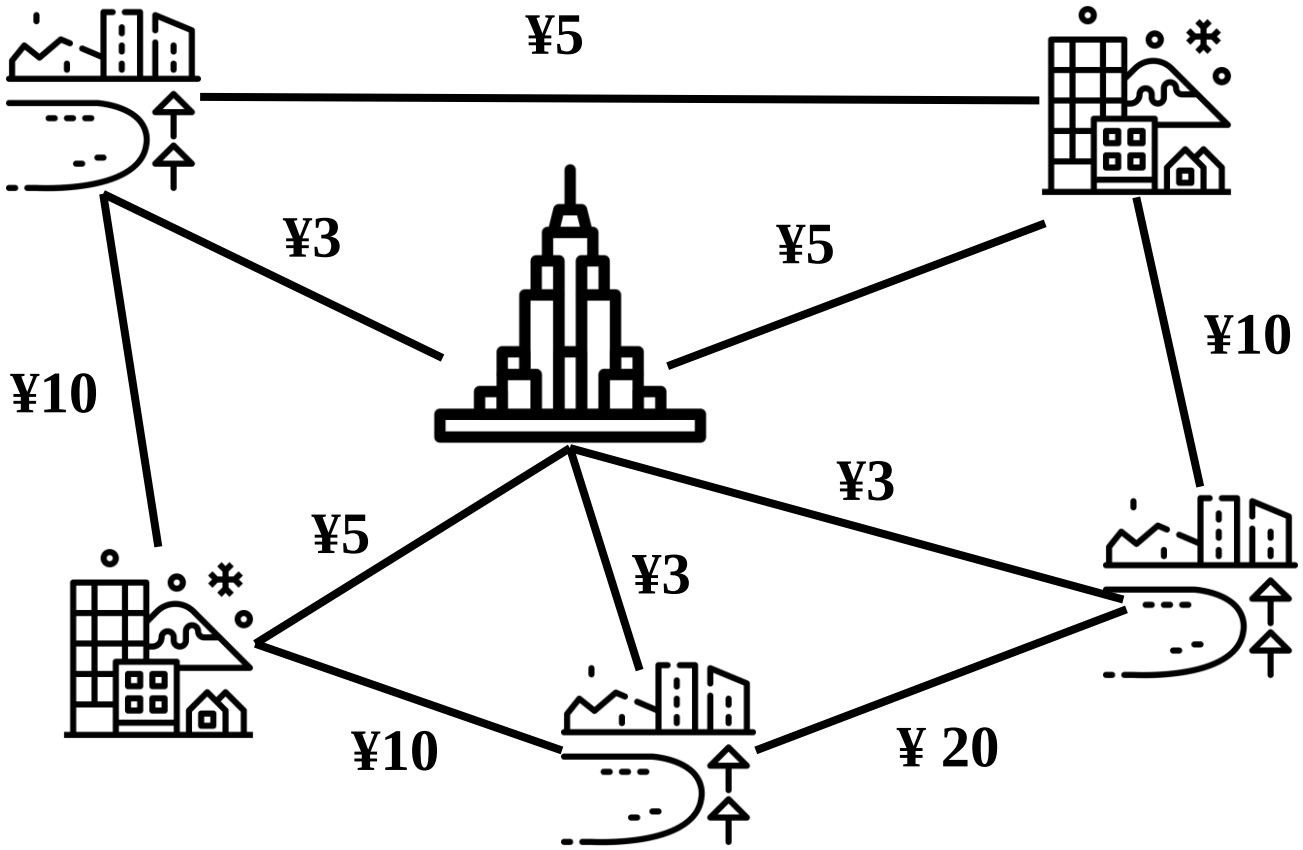


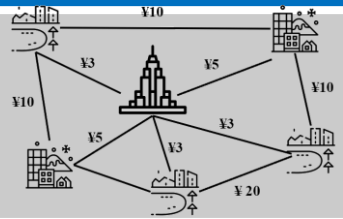
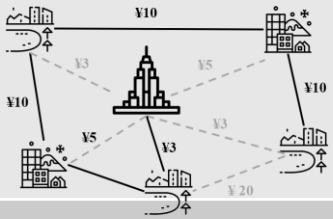
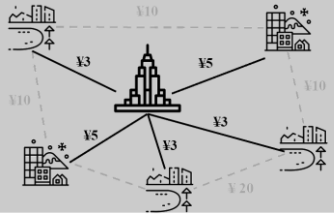
方案	花费
	¥74
	¥38
	¥19

花费：$3+3+5+3+5=19$

问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同

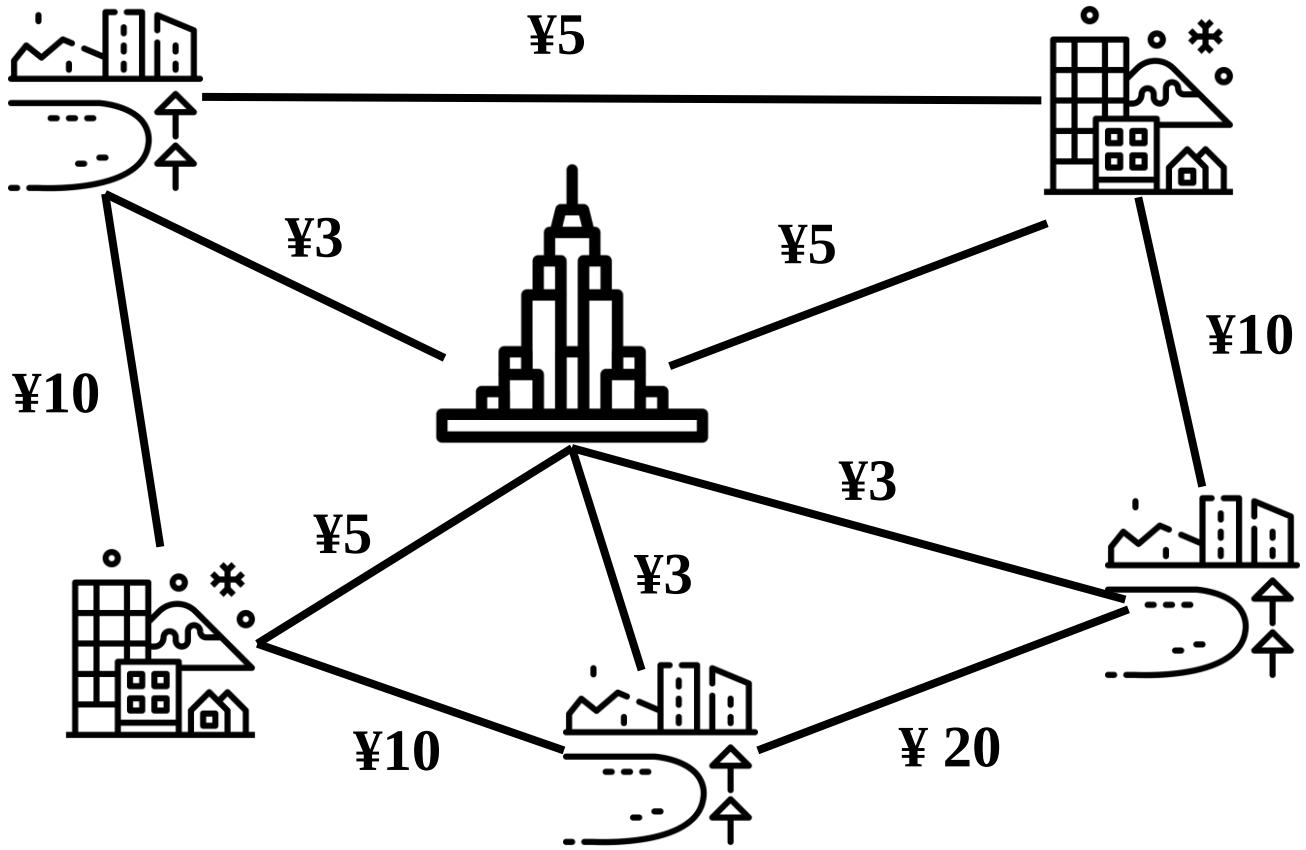


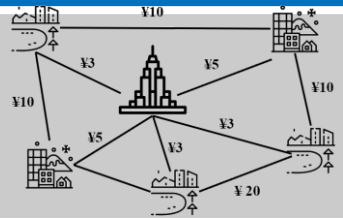
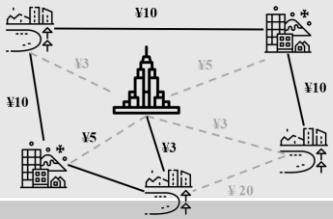
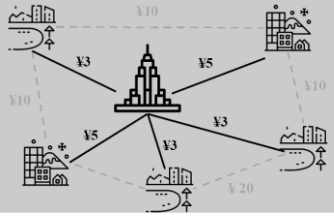
方案	花费
	¥74
	¥38
	¥19

问题：连通各城市的最小花费是多少？

问题背景：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同



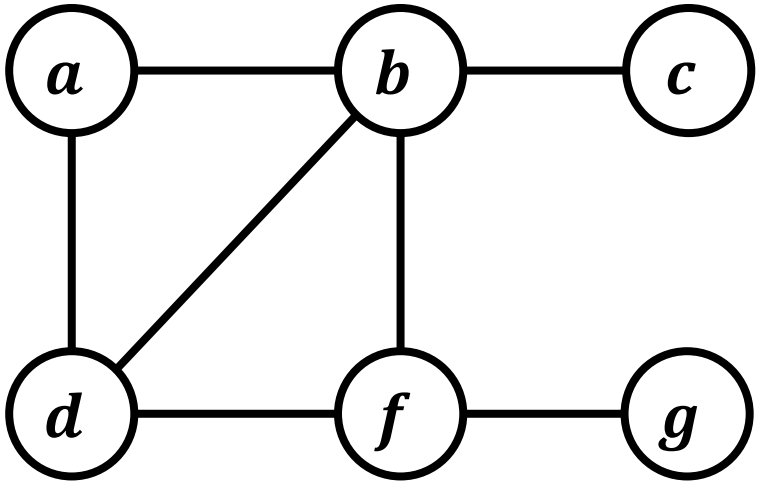
方案	花费
	¥74
	¥38
	¥19

问题：连通各城市的最小花费是多少？

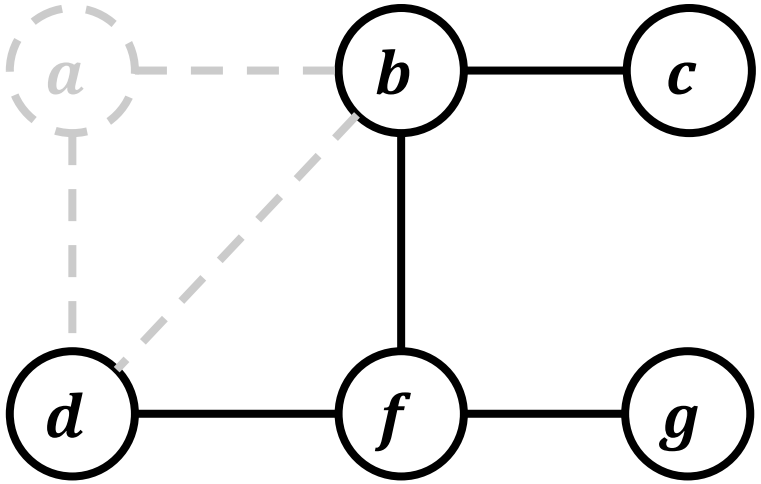
权重最小的连通生成子图

图的概念回顾：生成子图

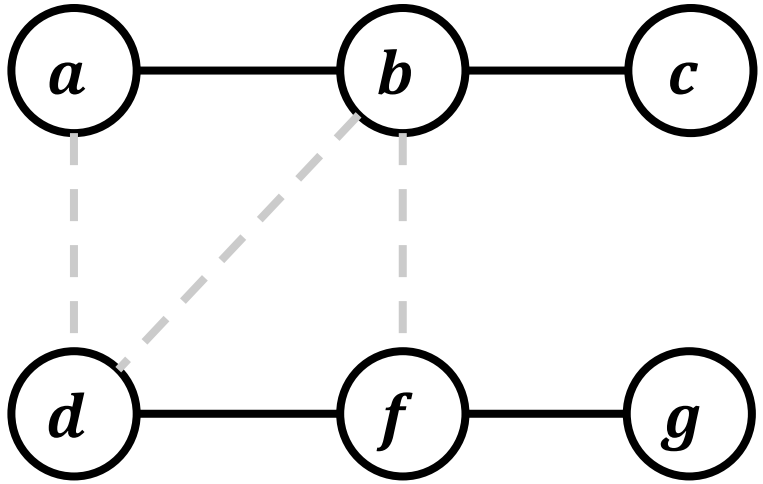
- 子图(Subgraph)
  - 如果$V' \subseteq V, E' \subseteq E$，则称图$G' =< V', E' >$是图$G$的一个子图
- 生成子图(Spanning Subgraph)
  - 如果$V' = V, E' \subseteq E$，则称图$G' =< V', E' >$是图G的一个生成子图



图G



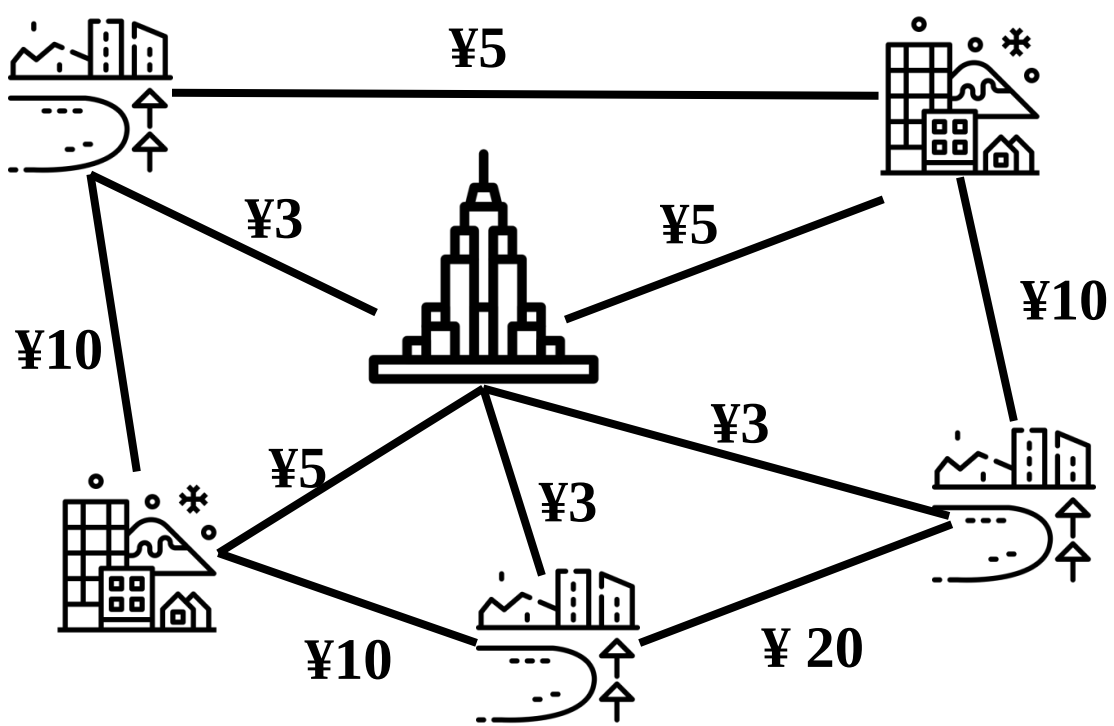
G的子图

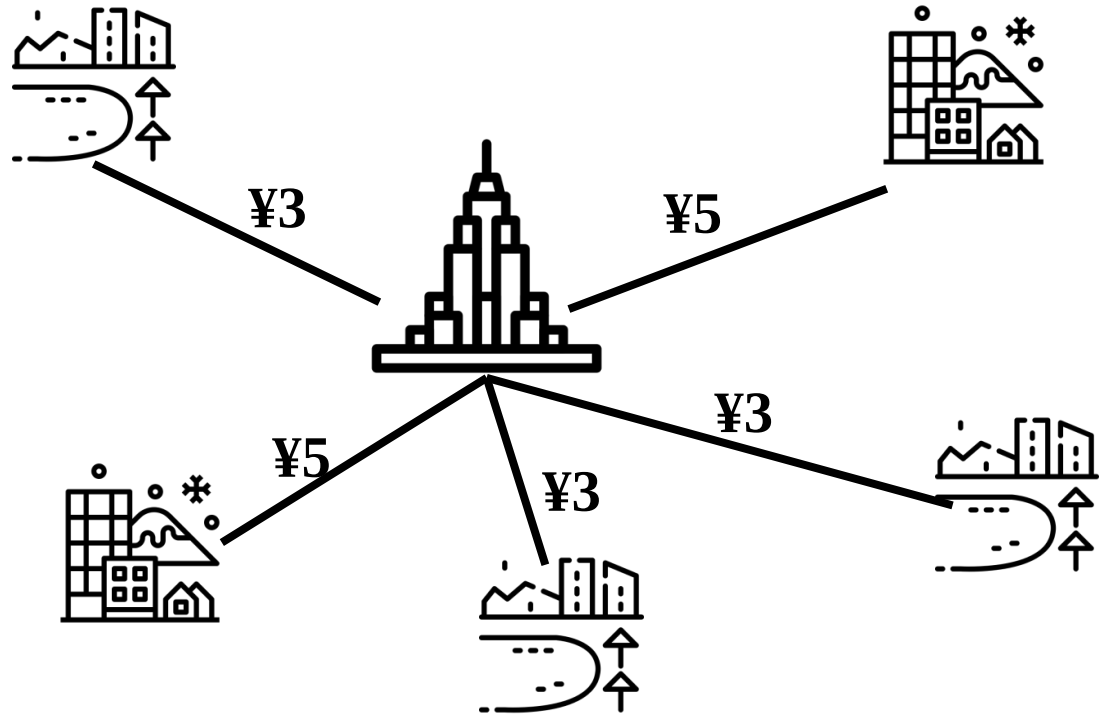


G的生成子图

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)



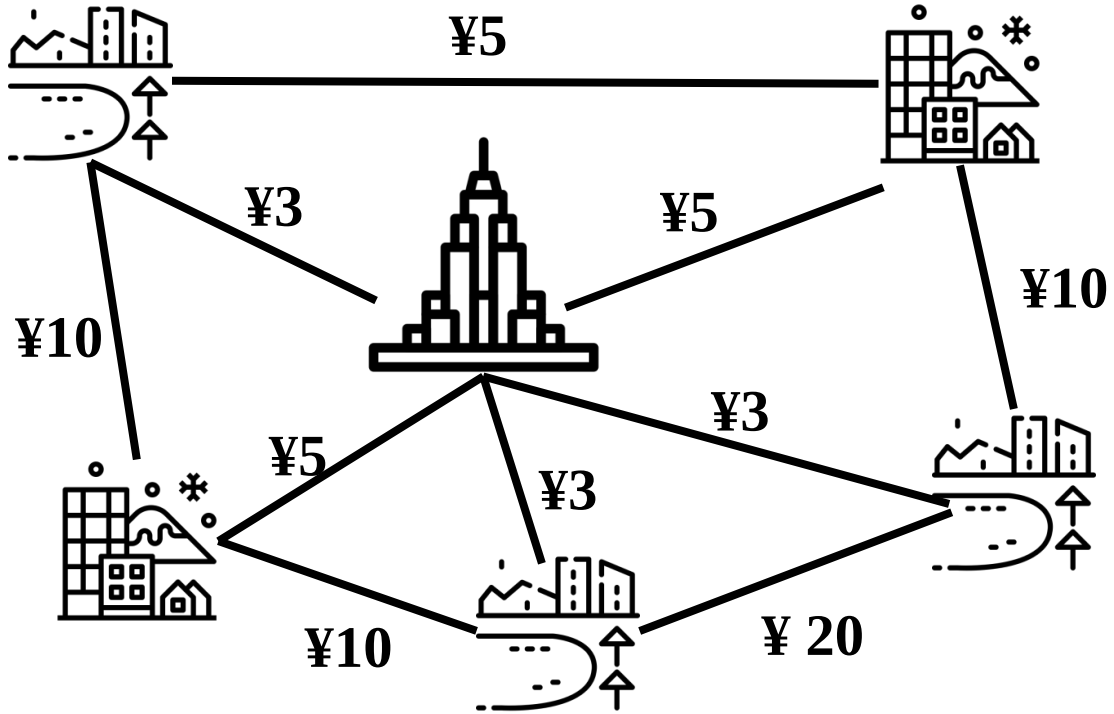


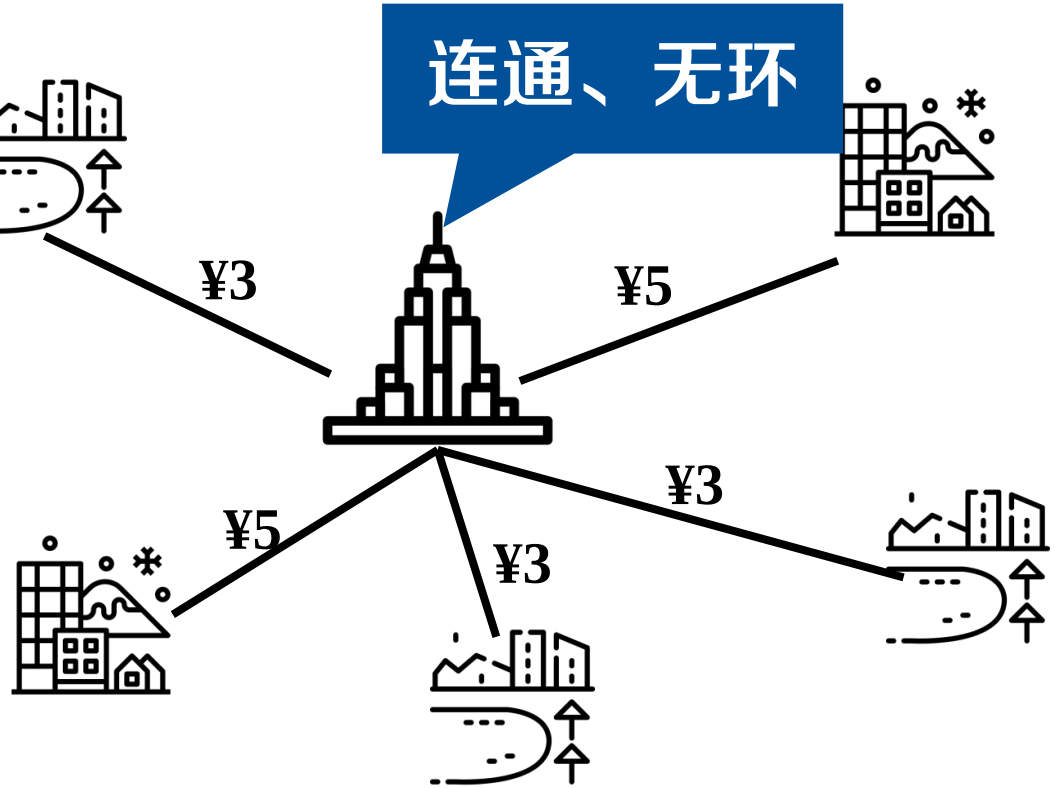
问题：连通各城市的最小花费是多少？

权重最小的连通生成子图

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)



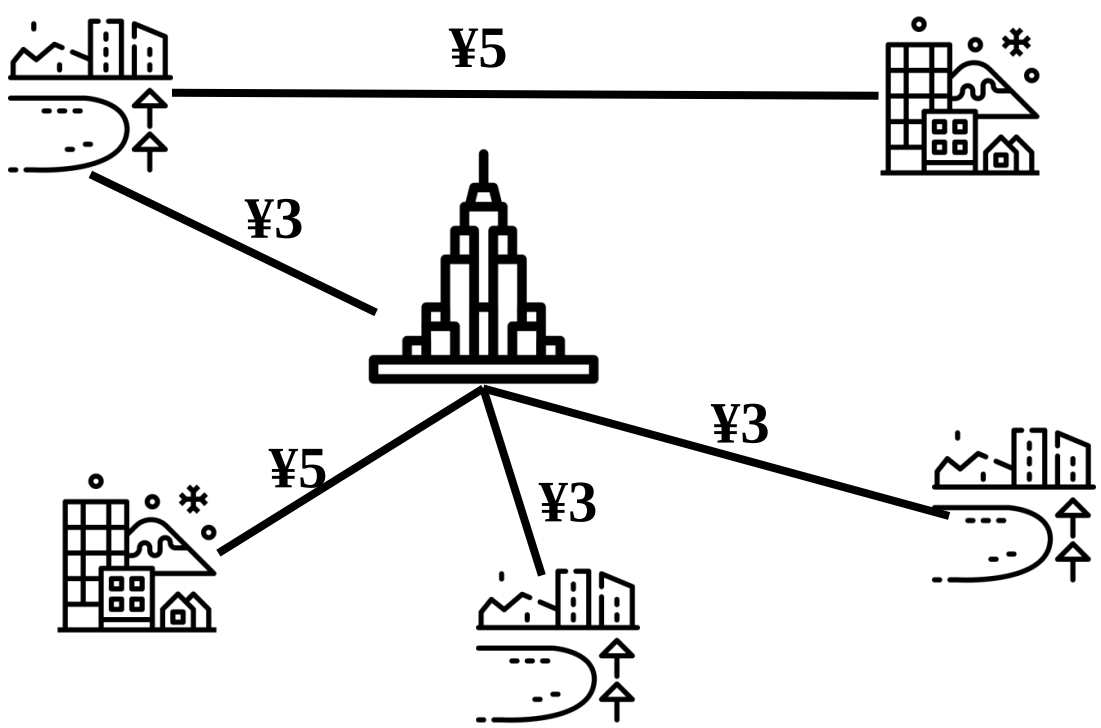


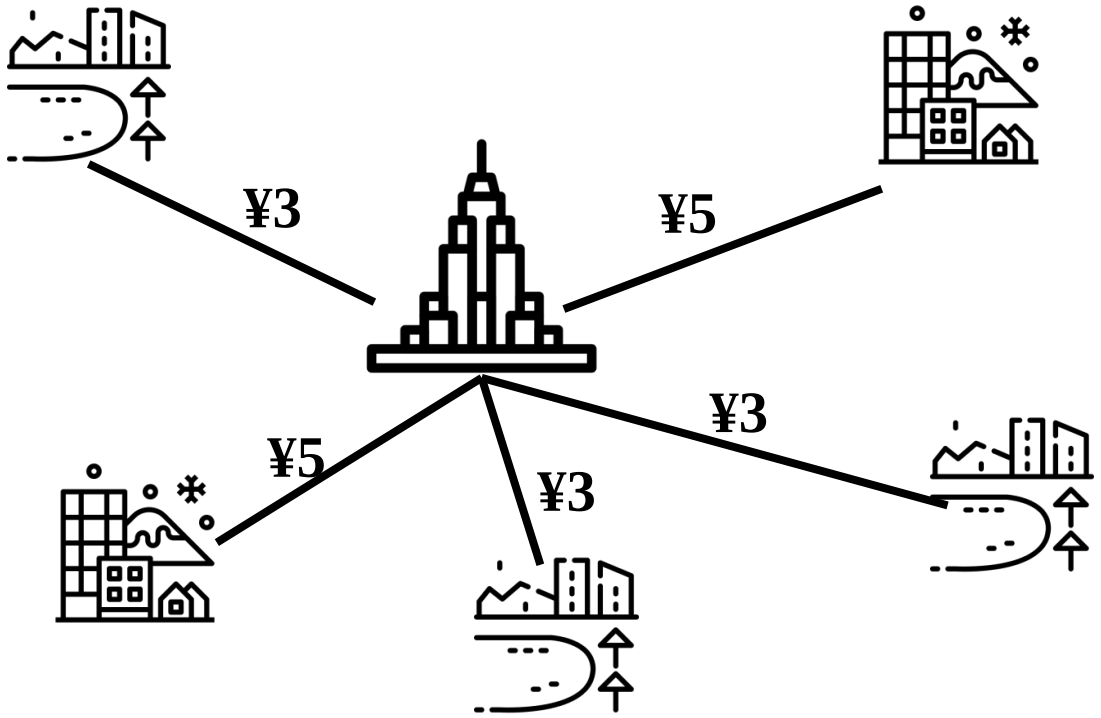
问题：连通各城市的最小花费是多少？

权重最小的生成树

图的概念：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)





权重最小的生成树可能不唯一！

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T =< V_T, E_T >$

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T =< V_T, E_T >$

$$min \sum_{e \in E_T} w(e)$$

$$s.t. \quad V_T = V, E_T \subseteq E$$

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T =< V_T, E_T >$

$$min \sum_{e \in E_T} w(e)$$

优化目标

$$s.t. \quad V_T = V, E_T \subseteq E$$

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

输出

- 图G的最小生成树$T =< V_T, E_T >$

$$min \sum_{e \in E_T} w(e)$$ 优化目标

$$s.t. \quad V_T = V, E_T \subseteq E$$ 约束条件

提纲

问题背景

通用框架

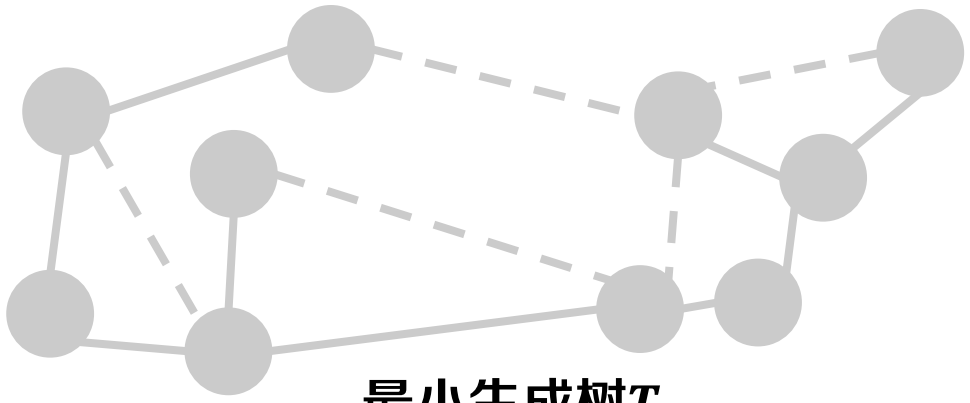
Prim算法

算法实例

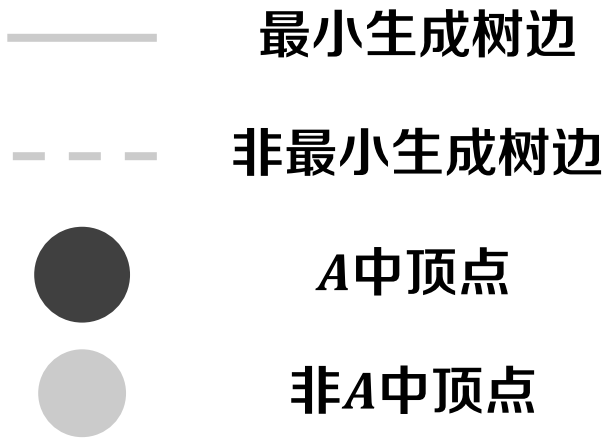
算法分析

通用框架

- 生成树是一个无向图中的连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树

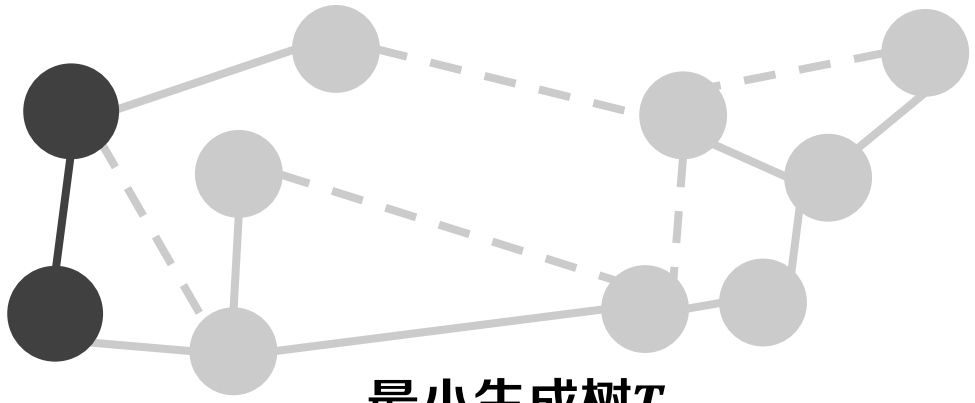


最小生成树T

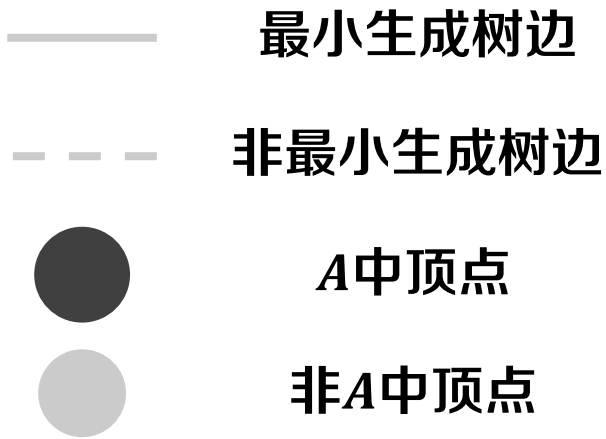


通用框架

- 生成树是一个无向图中的连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边

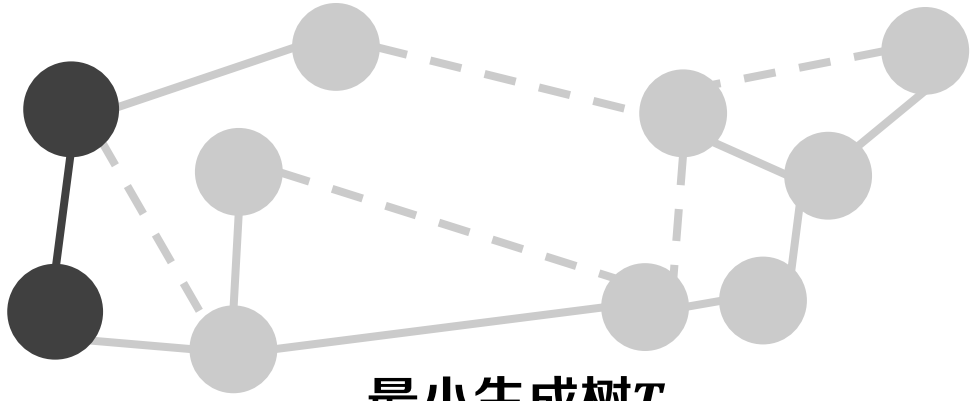


最小生成树T

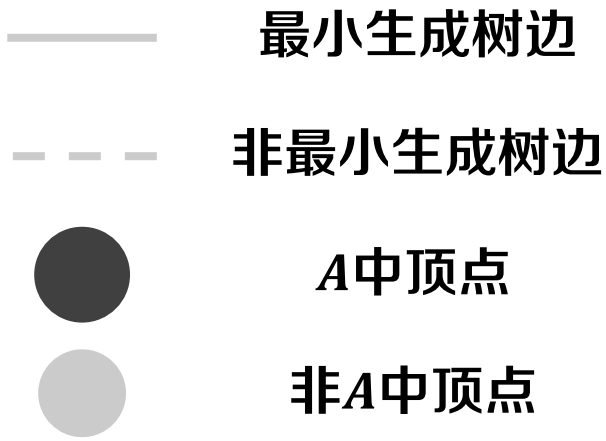


通用框架

- 生成树是一个无向图中的连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

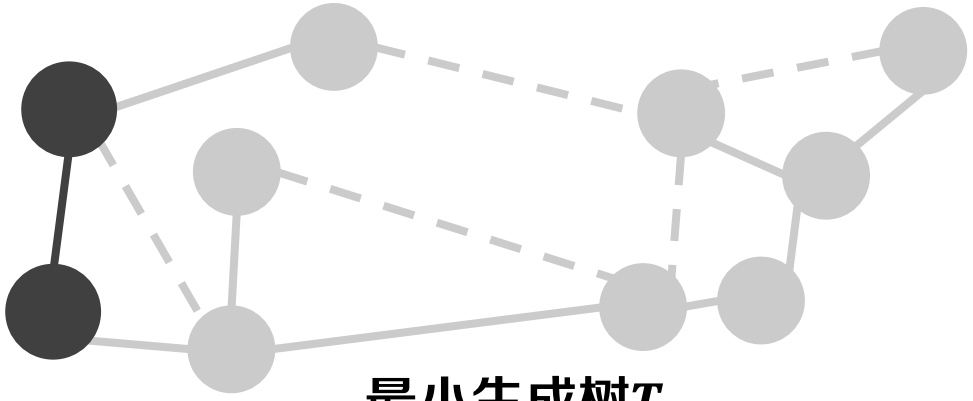


最小生成树T

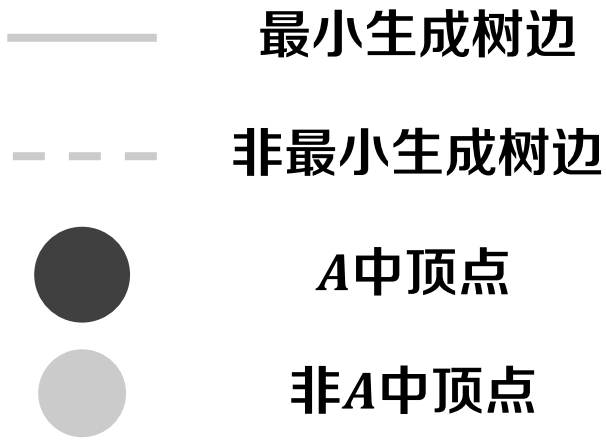


通用框架

- 生成树是一个无向图中的连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集



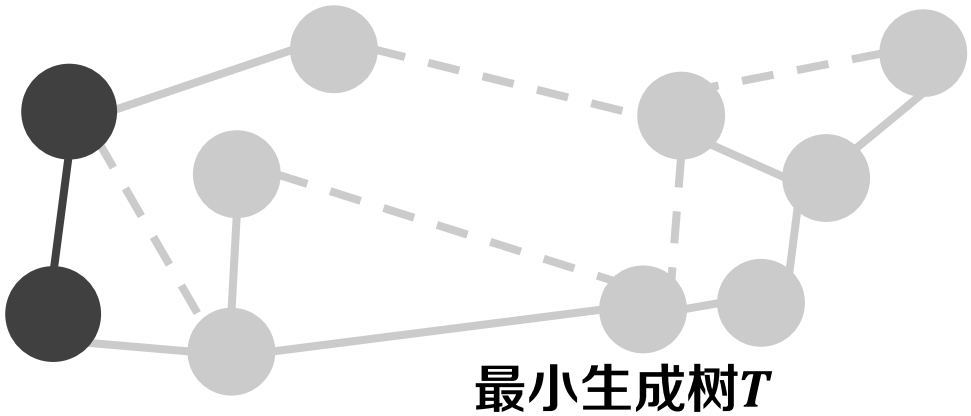
最小生成树T



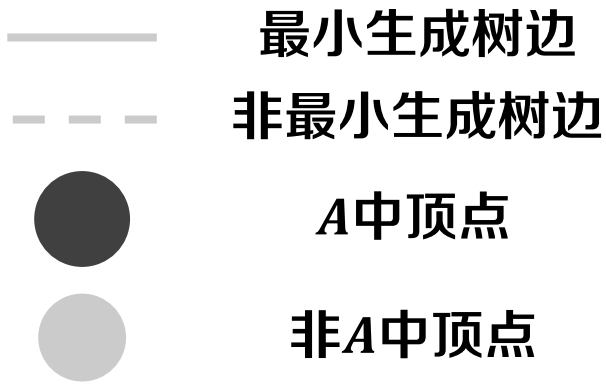
问题：如何保证边集A仍是最小生成树的子集?

相关概念

- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的安全边

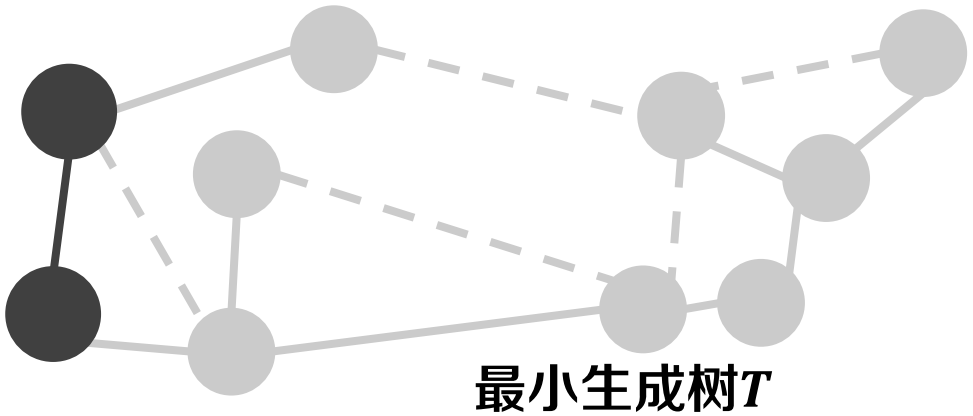


最小生成树T

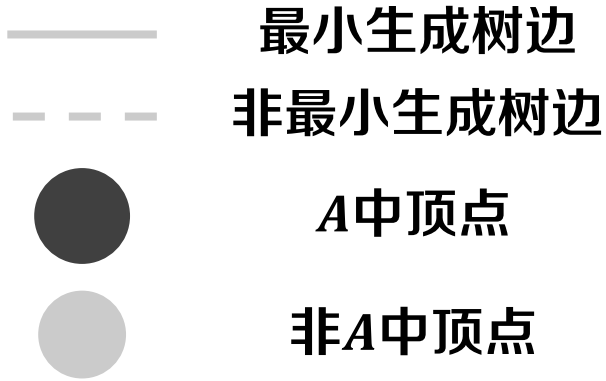


相关概念

- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的安全边



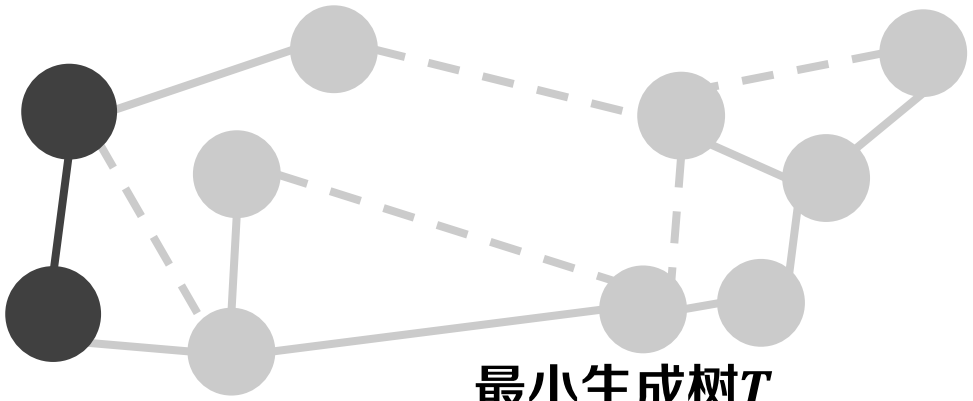
最小生成树T



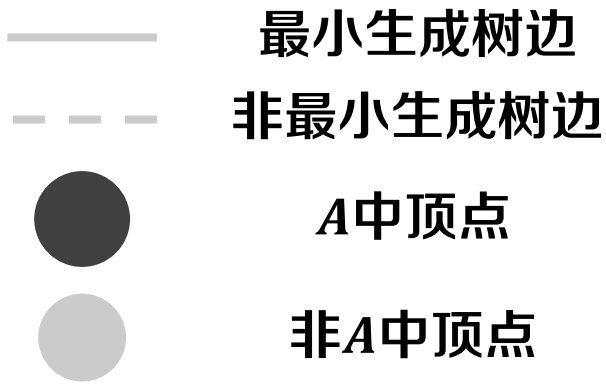
若每次向边集A中新增安全边，可保证边集A是最小生成树的子集

相关概念

- **安全边(Safe Edge)**
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的**安全边**



最小生成树T

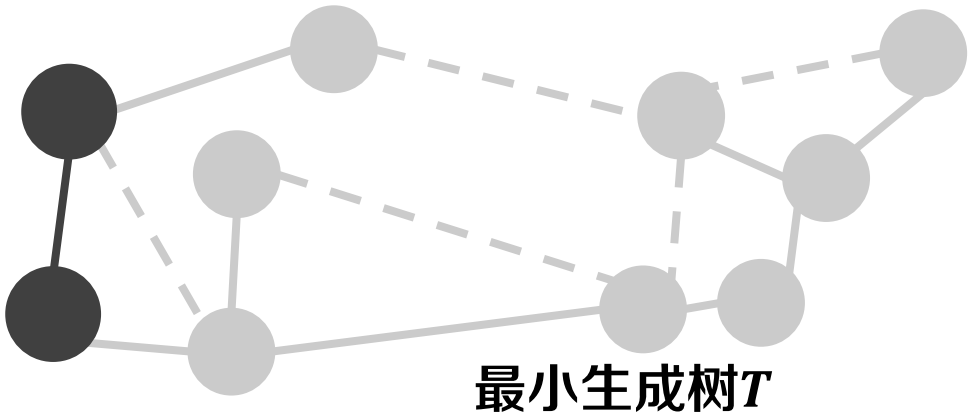


- **Generic-MST(G)**

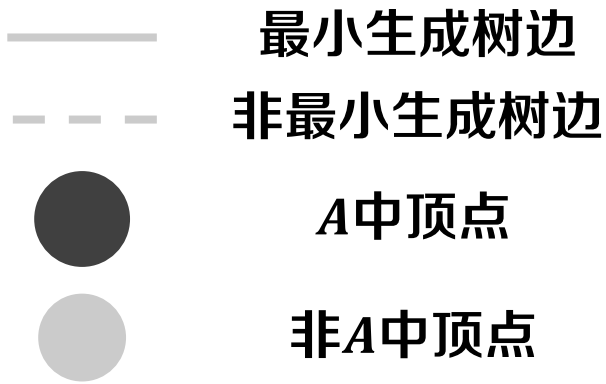
```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

相关概念

- **安全边(Safe Edge)**
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的**安全边**



最小生成树T



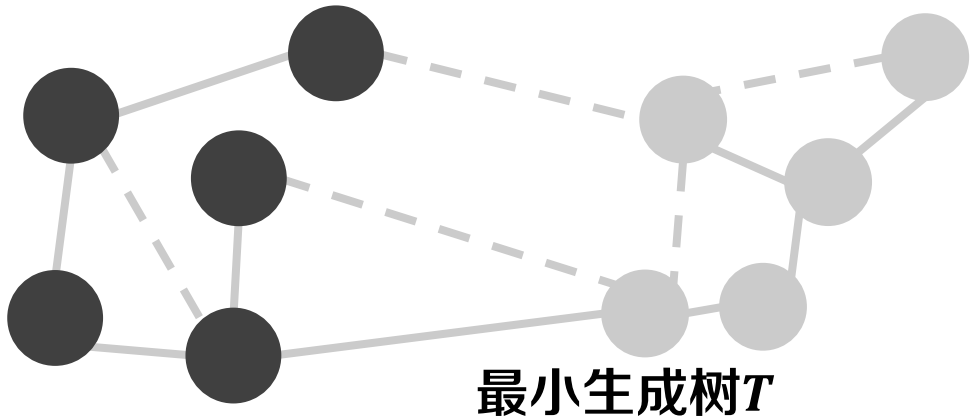
- **Generic-MST(G)**

```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

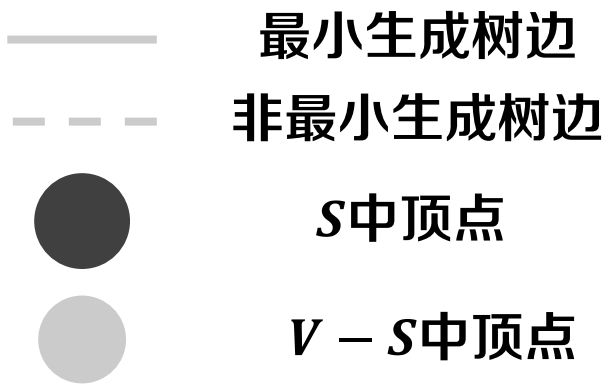
问题：如何有效辨识安全边?

相关概念

- 割(Cut)
  - 图$G =< V, E >$是一个连通无向图，割$(S, V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分

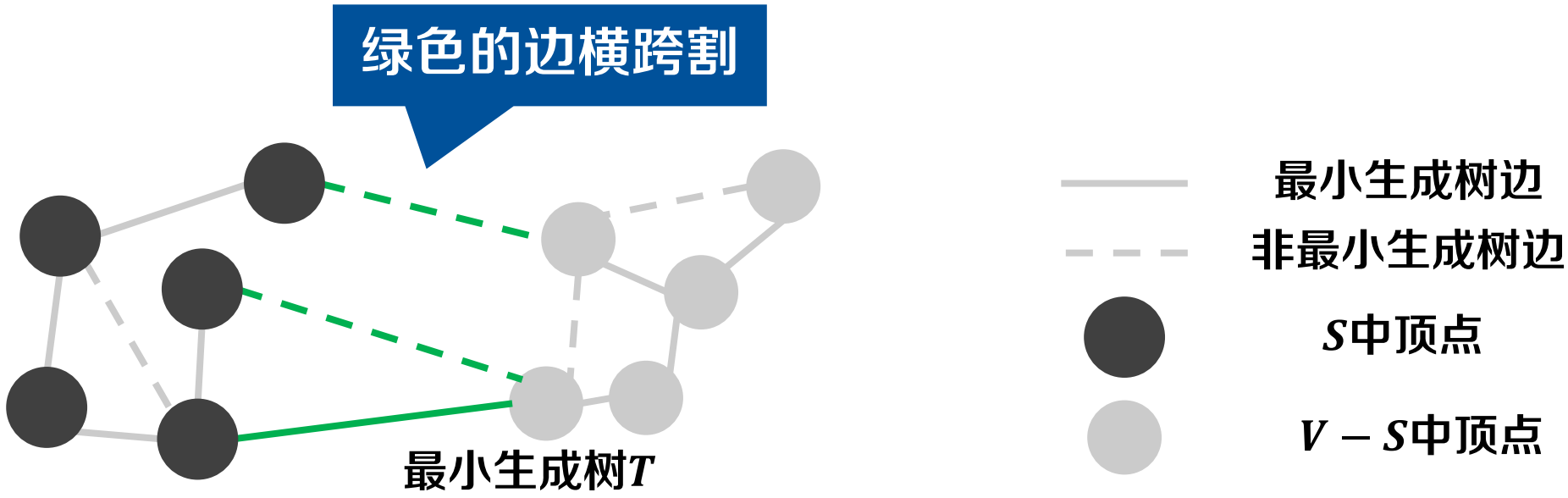


最小生成树T



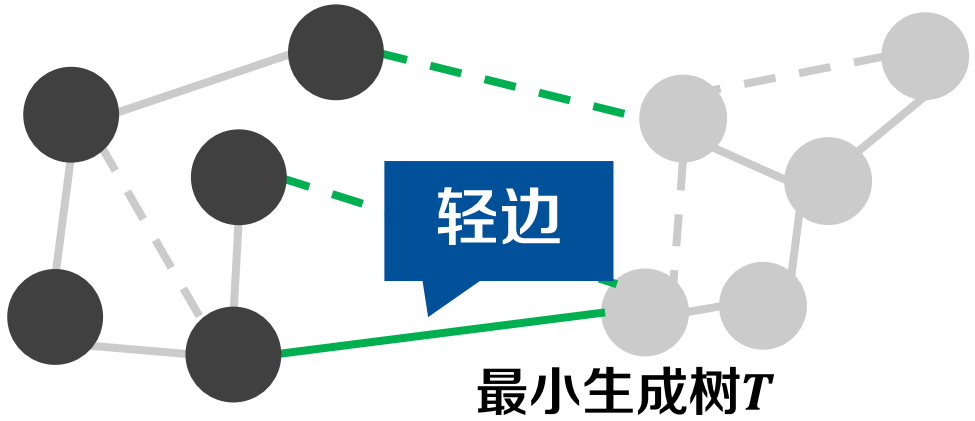
相关概念

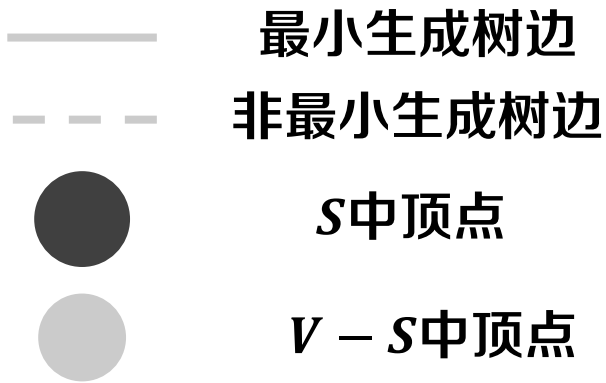
- 割(Cut)
  - 图$G =< V, E >$是一个连通无向图，割$(S, V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分
- 横跨(Cross)
  - 给定割$(S, V-S)$和边(u, v)，$u \in S$，$v \in V-S$，称边(u, v)横跨割$(S, V-S)$



相关概念

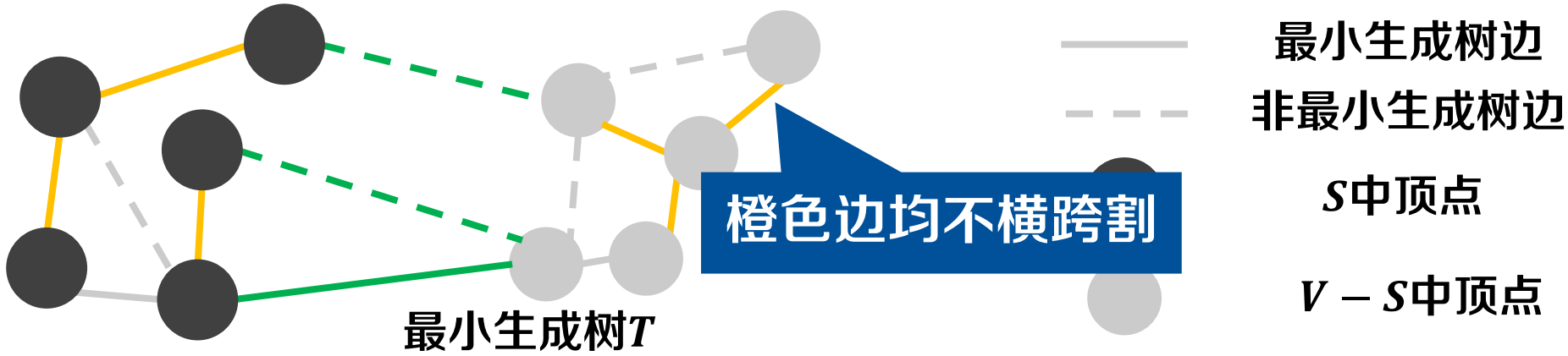
- 割(Cut)
  - 图$G =< V, E >$是一个连通无向图，割$(S, V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分
- 横跨(Cross)
  - 给定割$(S, V-S)$和边(u, v)，$u \in S$，$v \in V-S$，称边(u, v)横跨割$(S, V-S)$
- 轻边(Light Edge)
  - 横跨割的所有边中，权重最小的称为横跨这个割的一条轻边





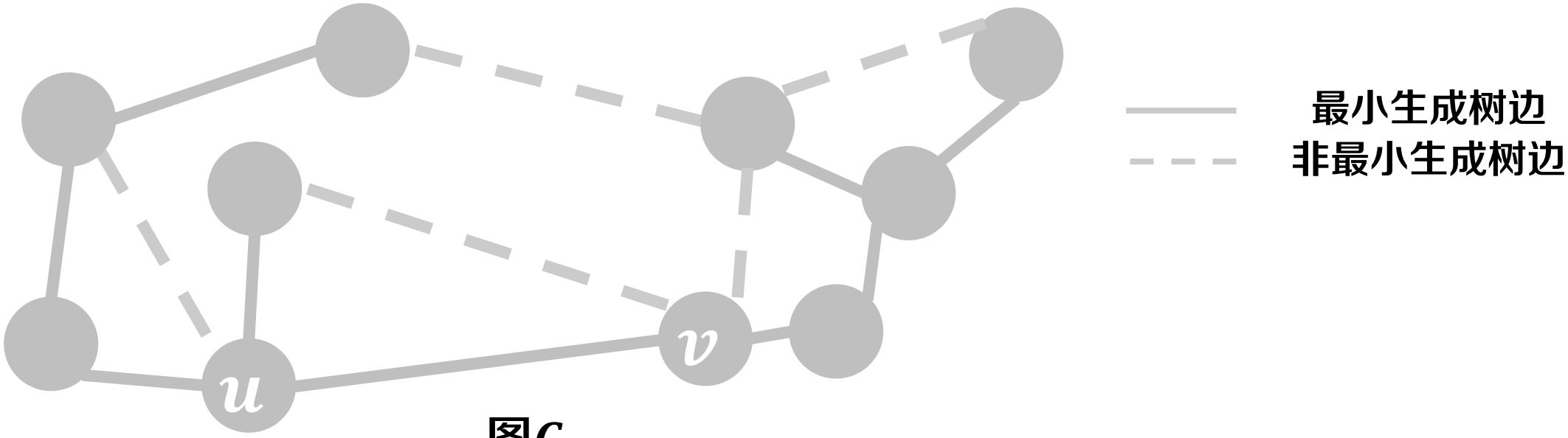
相关概念

- 割(Cut)
  - 图$G =< V, E >$是一个连通无向图，割$(S, V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分
- 横跨(Cross)
  - 给定割$(S, V-S)$和边(u, v)，$u \in S$，$v \in V-S$，称边(u, v)横跨割$(S, V-S)$
- 轻边(Light Edge)
  - 横跨割的所有边中，权重最小的称为横跨这个割的一条轻边
- 不妨害(Respect)
  - 如果一个边集A中没有边横跨某割，则称该割不妨害边集A



安全边辨识定理

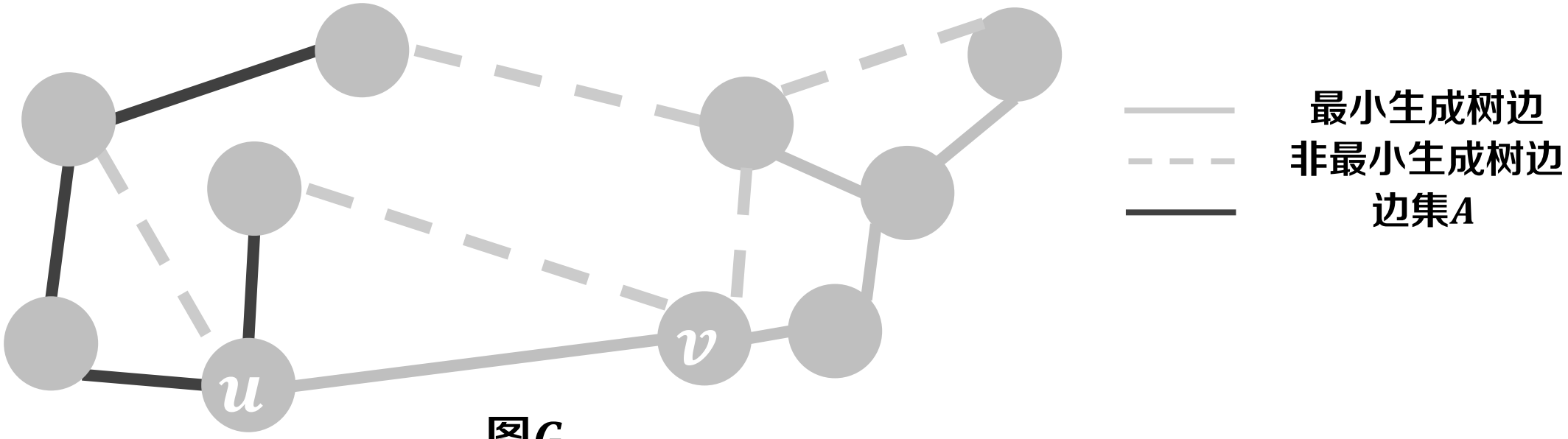
- 给定图$G =< V, E >$是一个带权的连通无向图



图G

安全边辨识定理

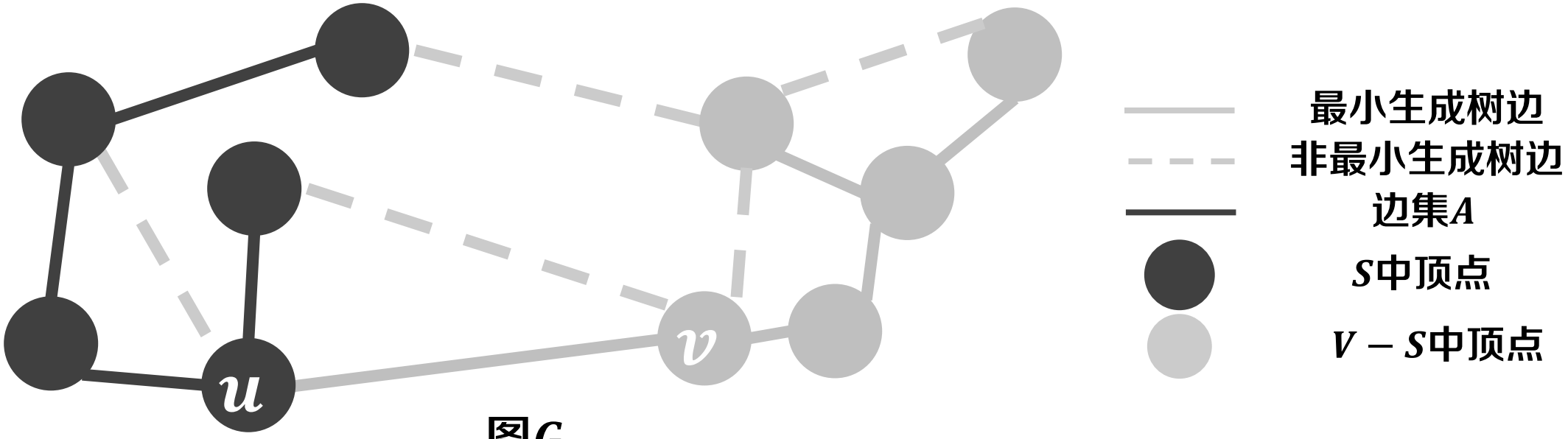
- 给定图$G=<V,E>$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中



图G

安全边辨识定理

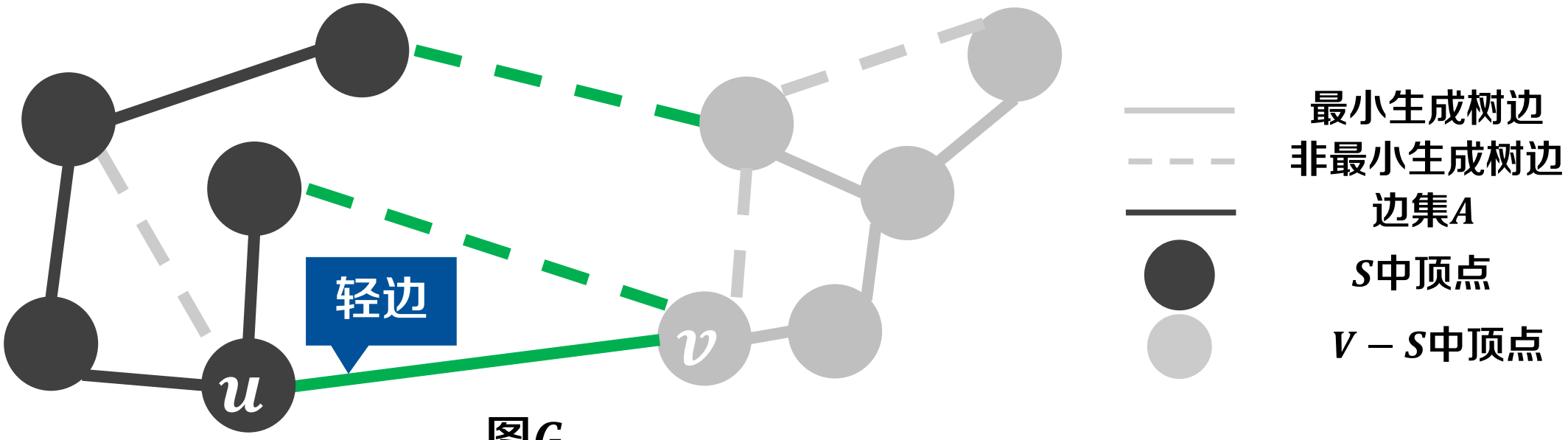
- 给定图$G=<V,E>$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中
  - 若割$(S,V-S)$是图G中不妨害边集A的任意割



图G

安全边辨识定理

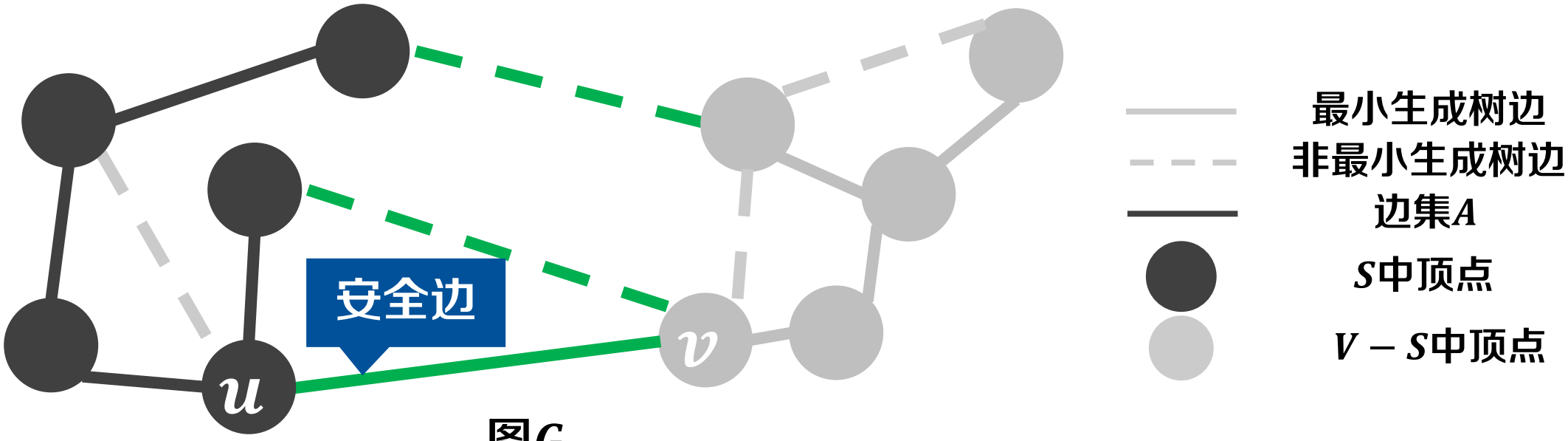
- 给定图$G =< V, E >$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中
  - 若割$(S, V-S)$是图G中不妨害边集A的任意割，且(u, v)是横跨该割的轻边



图G

安全边辨识定理

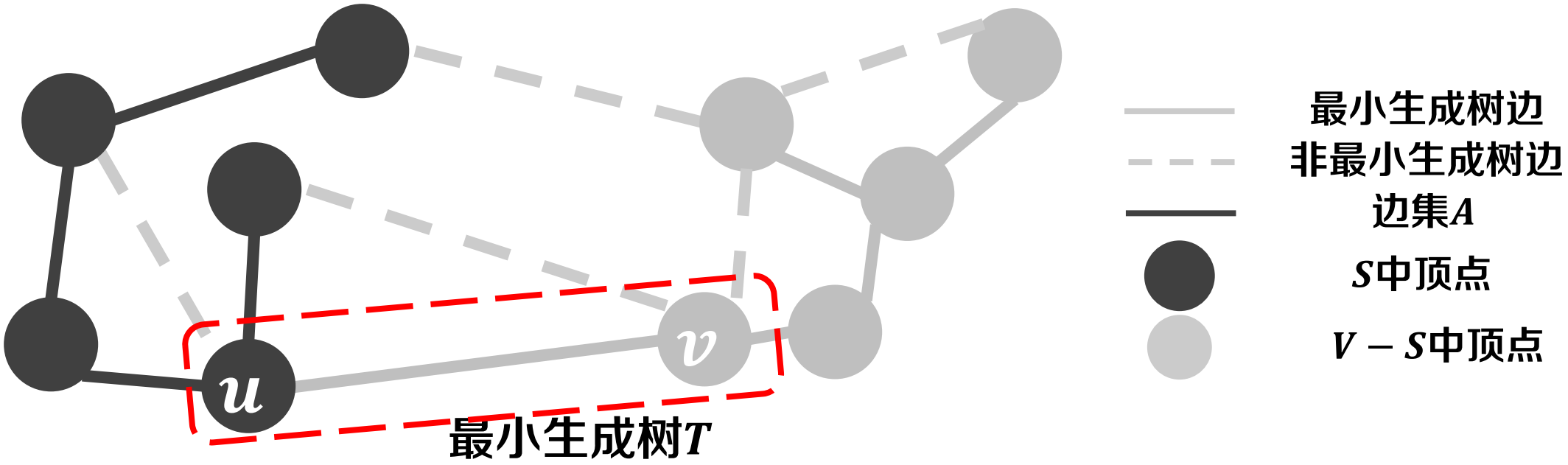
- 给定图$G =< V, E >$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中
  - 若割$(S, V-S)$是图G中不妨害边集A的任意割，且(u, v)是横跨该割的轻边
  - 则对于边集A，边(u, v)是其安全边



图G

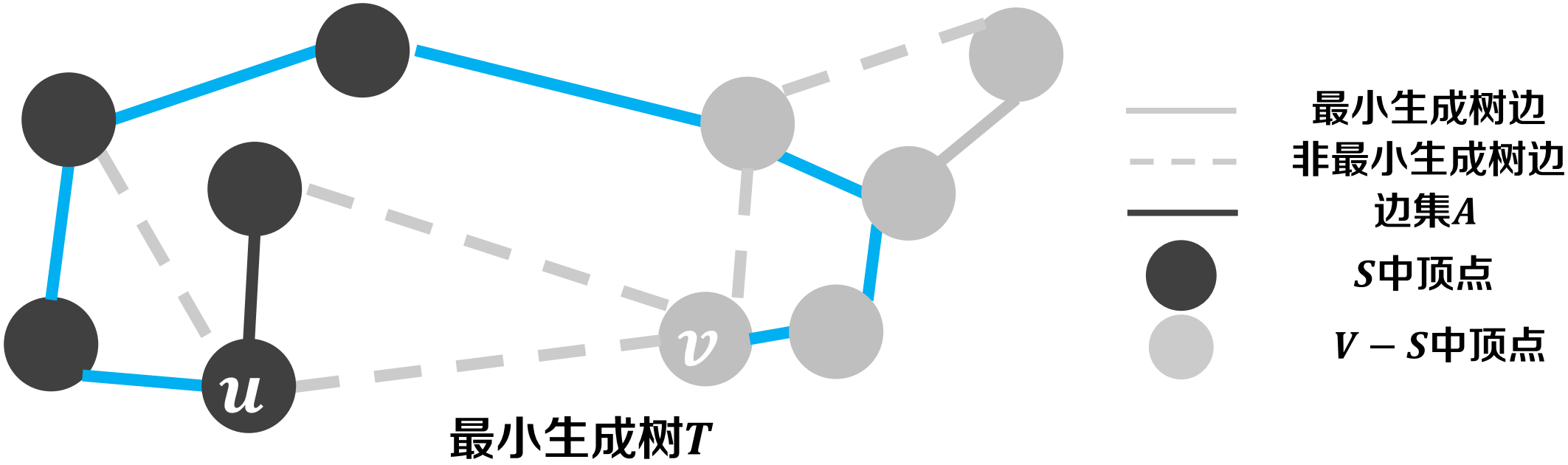
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证



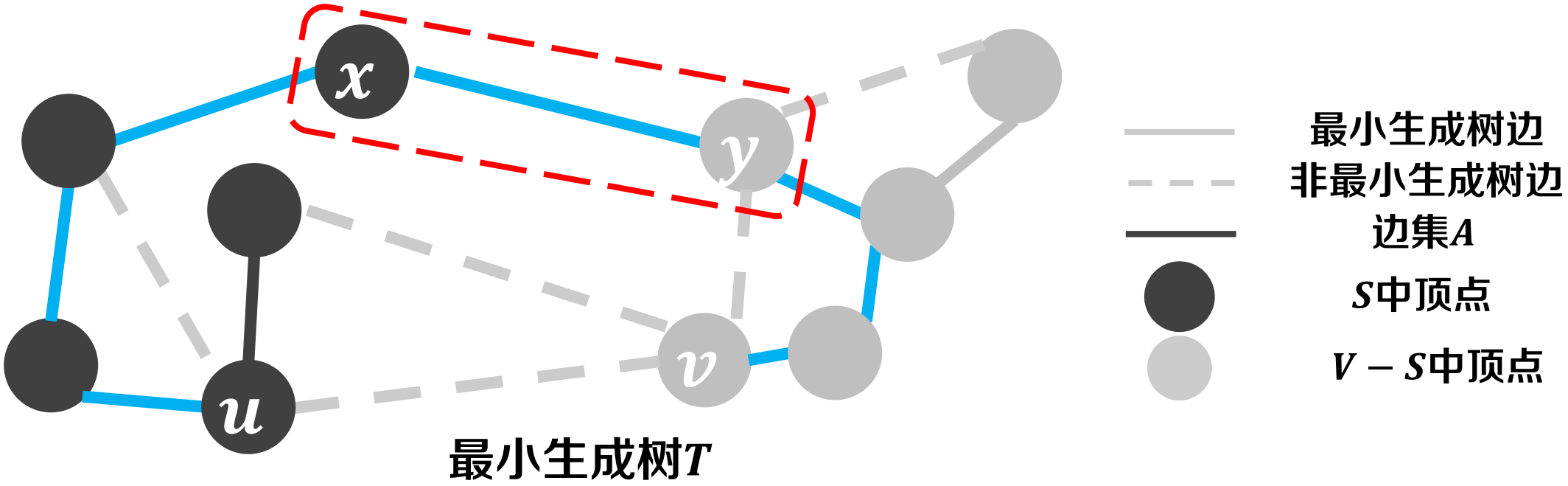
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P



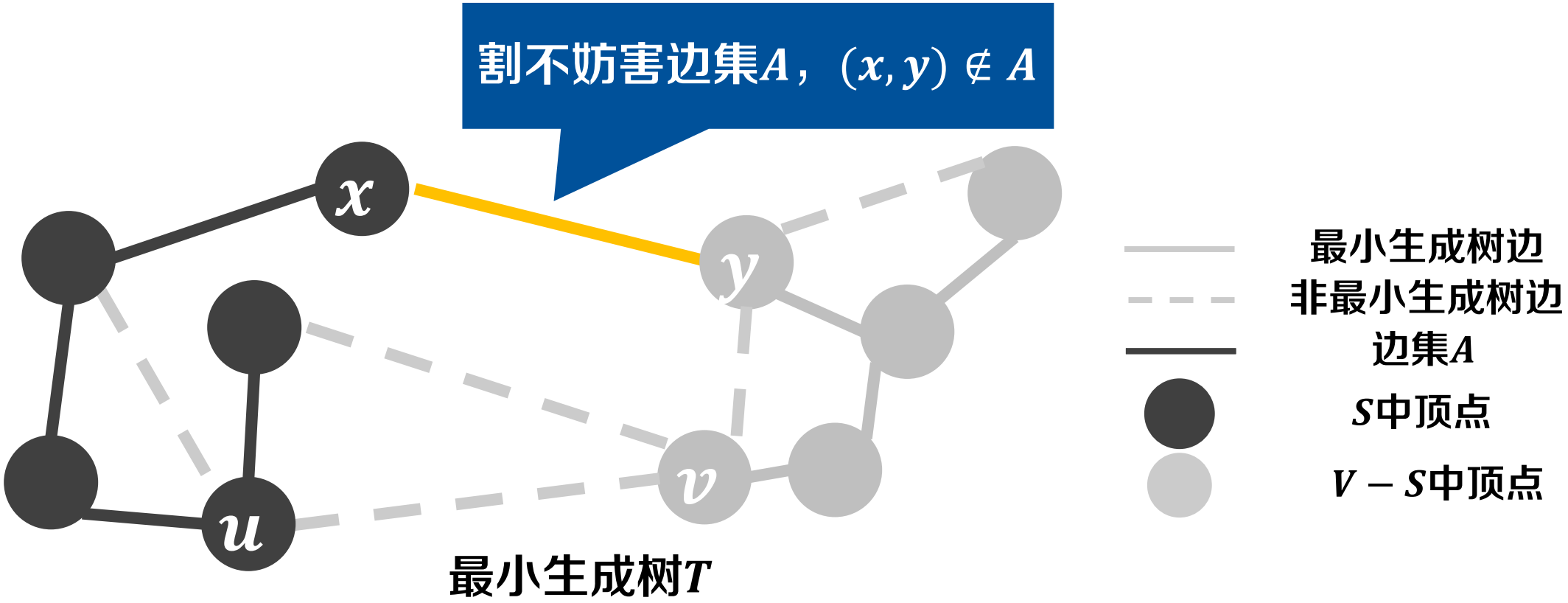
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)



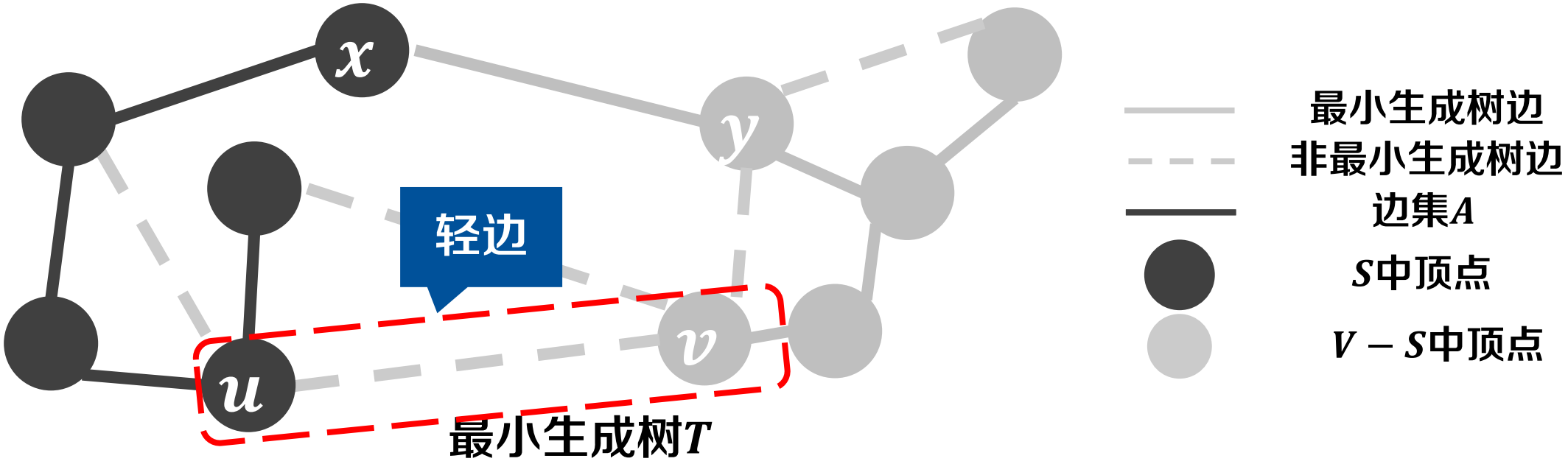
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)



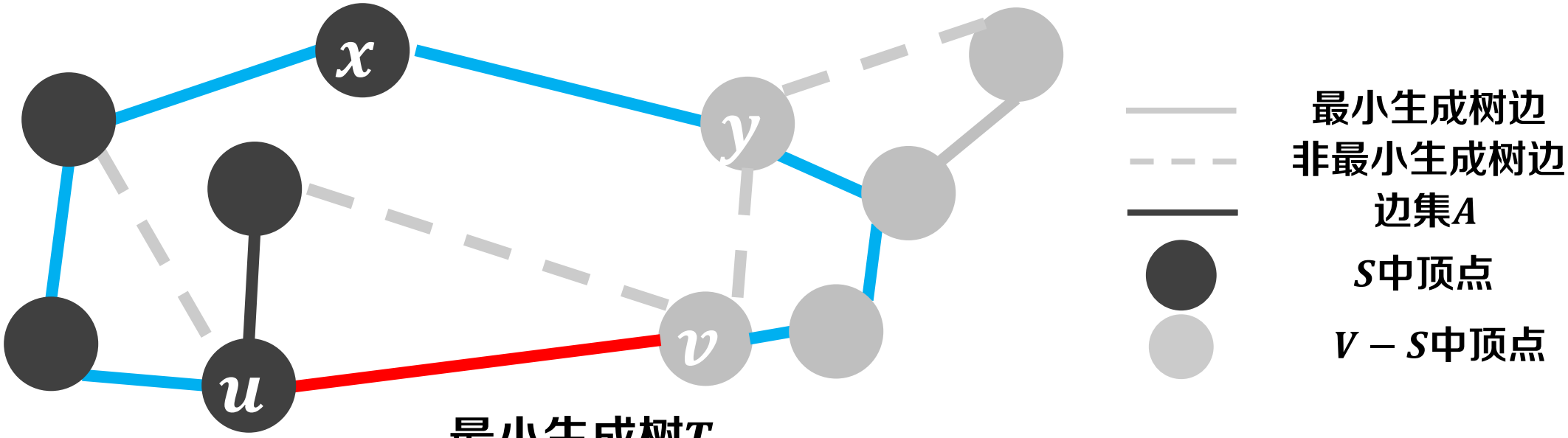
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$



安全边辨识定理

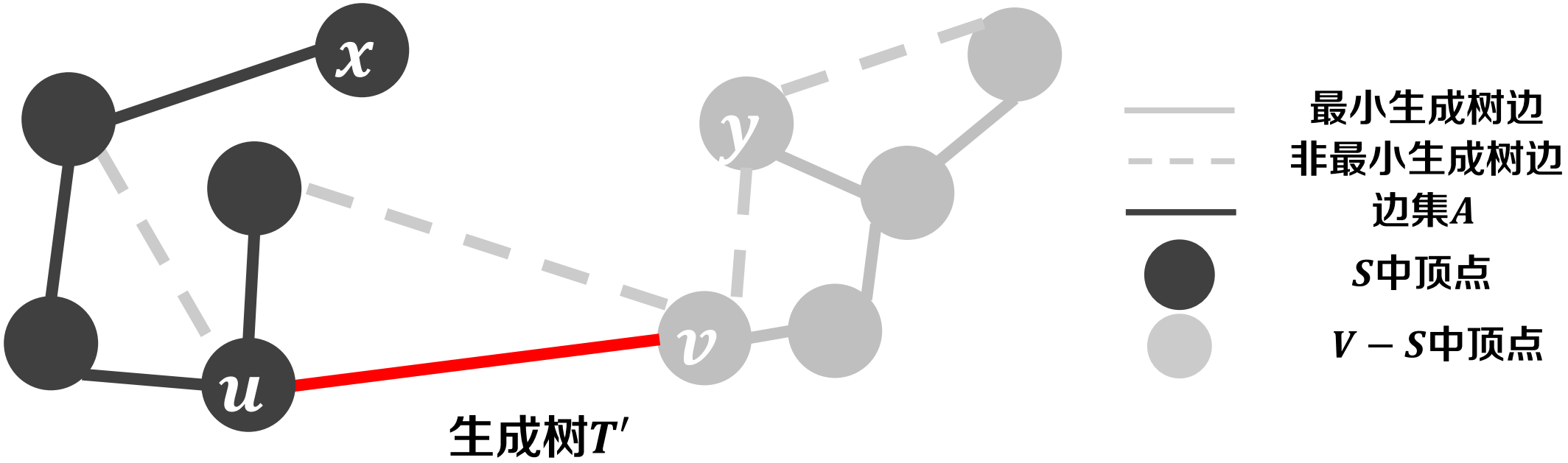
- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路



最小生成树T

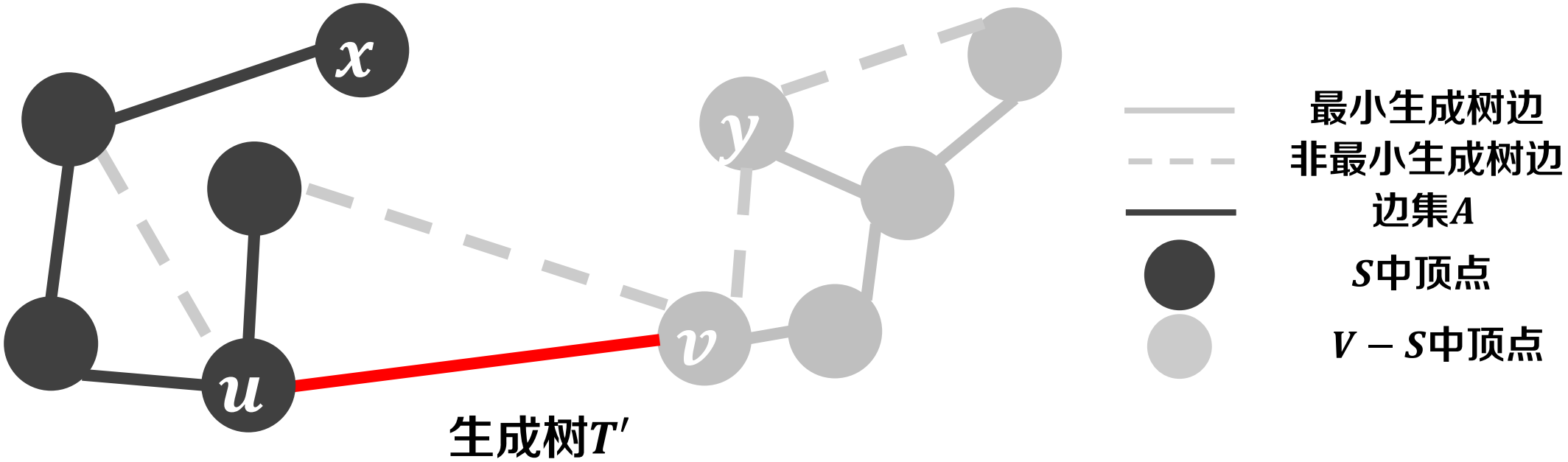
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'



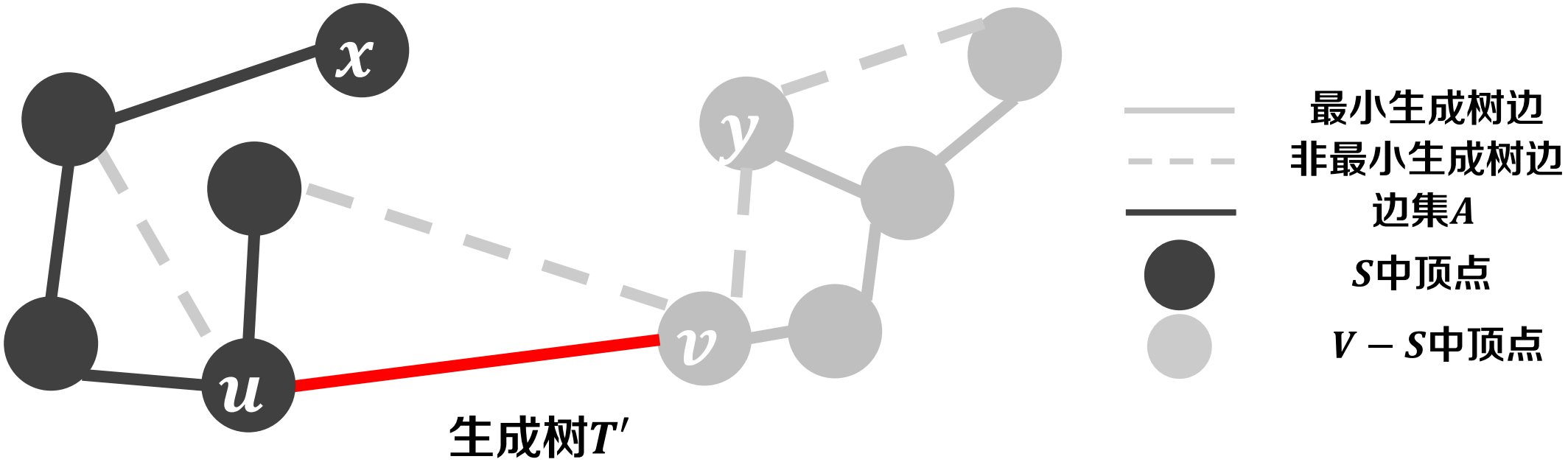
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'
    - $w(T') = w(T) + w(u,v) - w(x,y)$



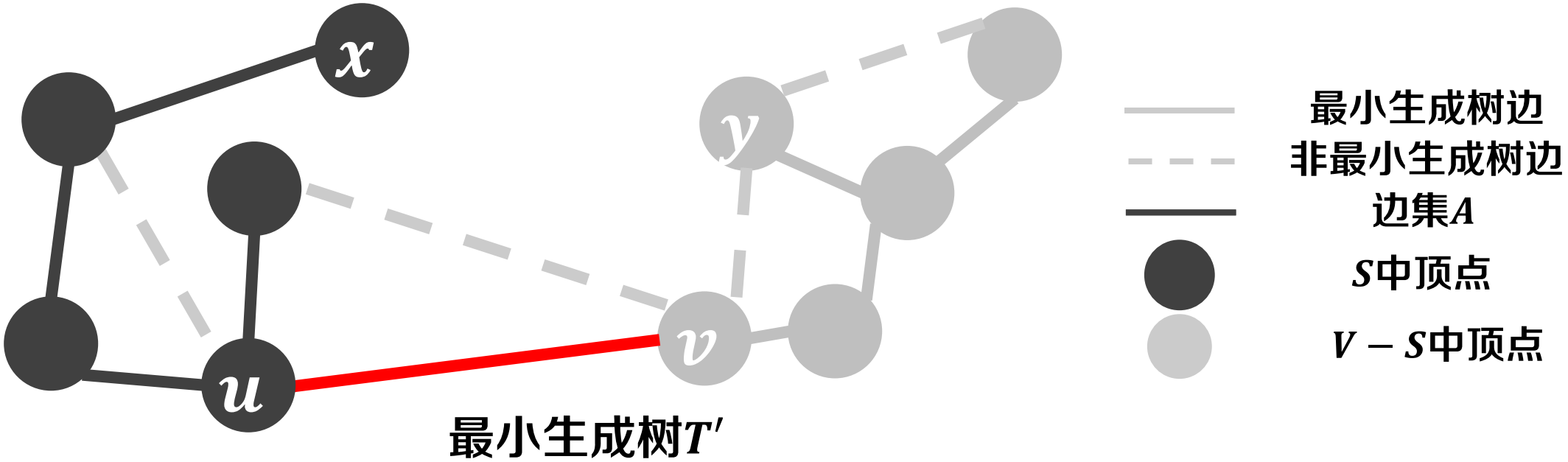
安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'
    - $w(T') = w(T) + w(u,v) - w(x,y) \leq w(T)$



安全边辨识定理

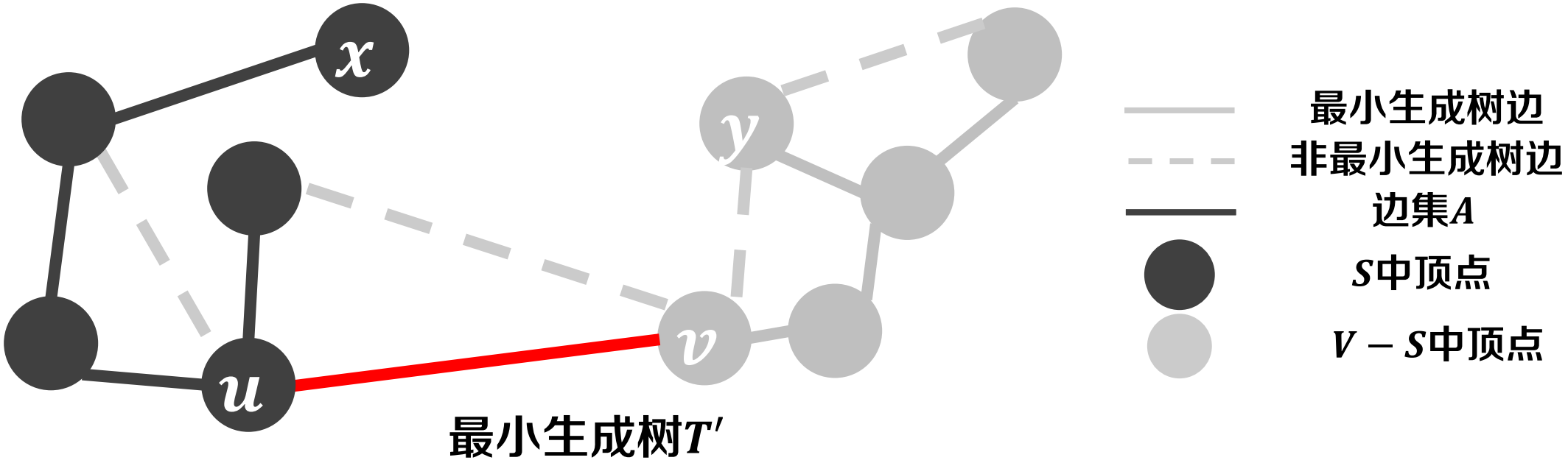
- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'
    - $w(T') \leq w(T)$，T'也是最小生成树



最小生成树T'

安全边辨识定理

- 证明
  - 若$(u,v) \in T$，由于$A \subseteq T$，则$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T$，由安全边定义可证
  - 若$(u,v) \notin T$，则T中必存在u到v的路径P
    - 不妨设路径P中，横跨割$(S, V-S)$的一条边为(x,y)
    - 边(u,v)是横跨割的轻边，所以$w(u,v) \leq w(x,y)$
    - 将边(u,v)加入到T中会形成环路，再去掉边(x,y)会形成另一棵树T'
    - $w(T') \leq w(T)$，T'也是最小生成树，$A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$，边$(u,v)$是安全边



通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略？

通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略?

- Prim算法
- Kruskal算法

通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略？

Prim算法

Kruskal算法

提纲

问题背景

通用框架

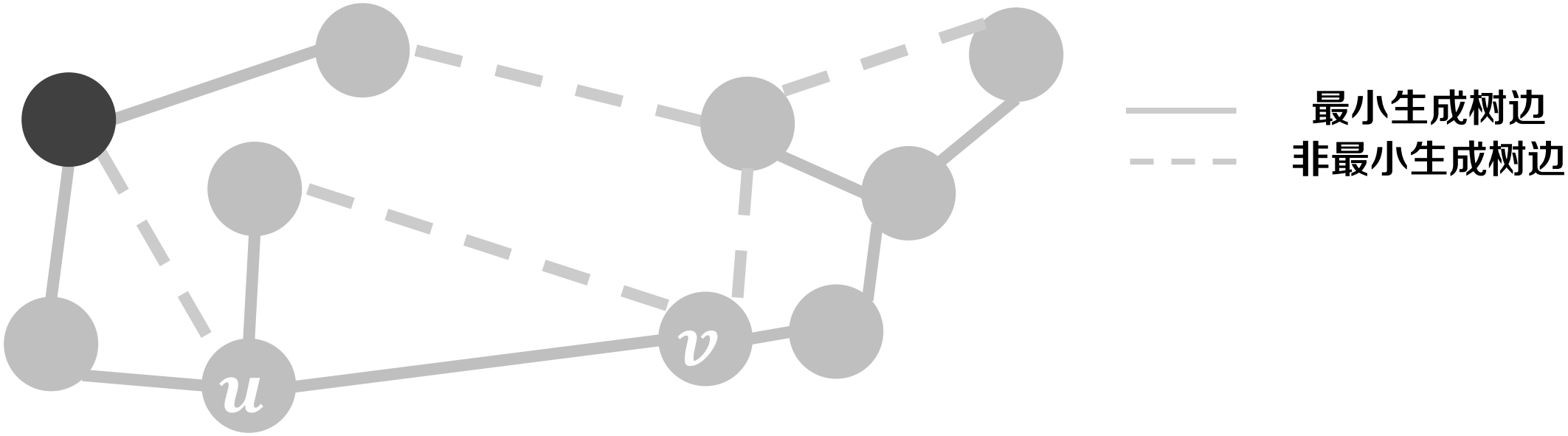
Prim算法

算法实例

算法分析

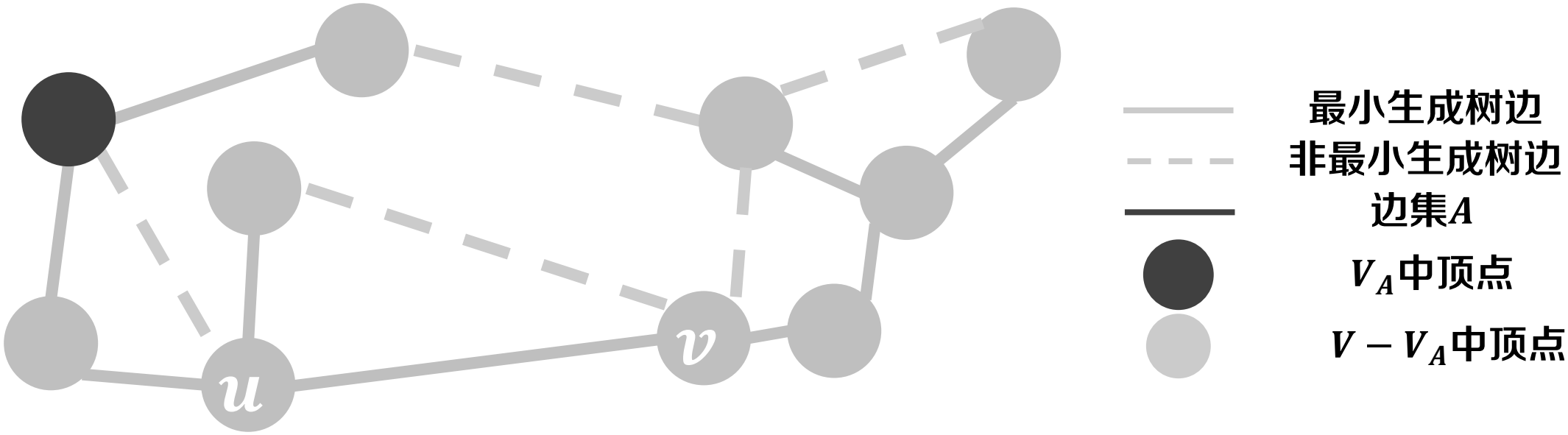
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点



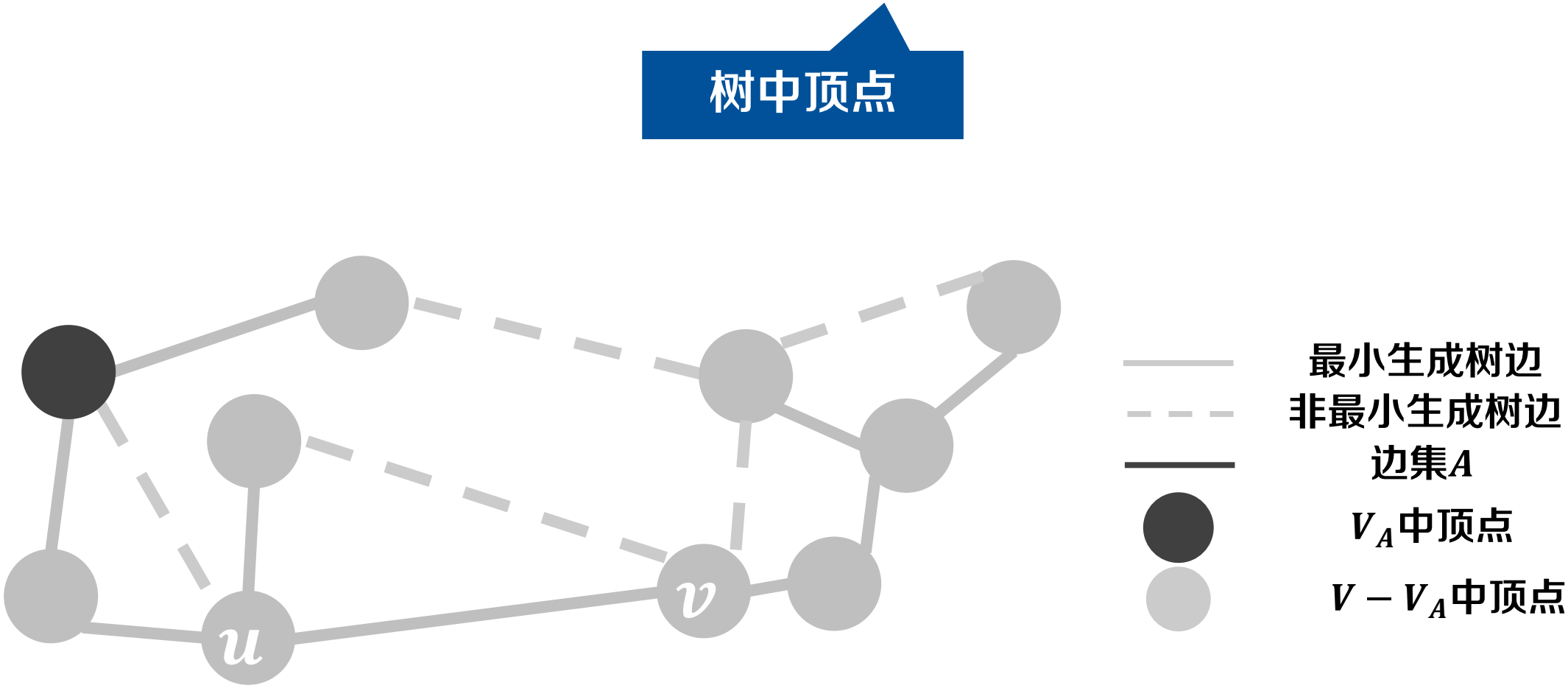
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树



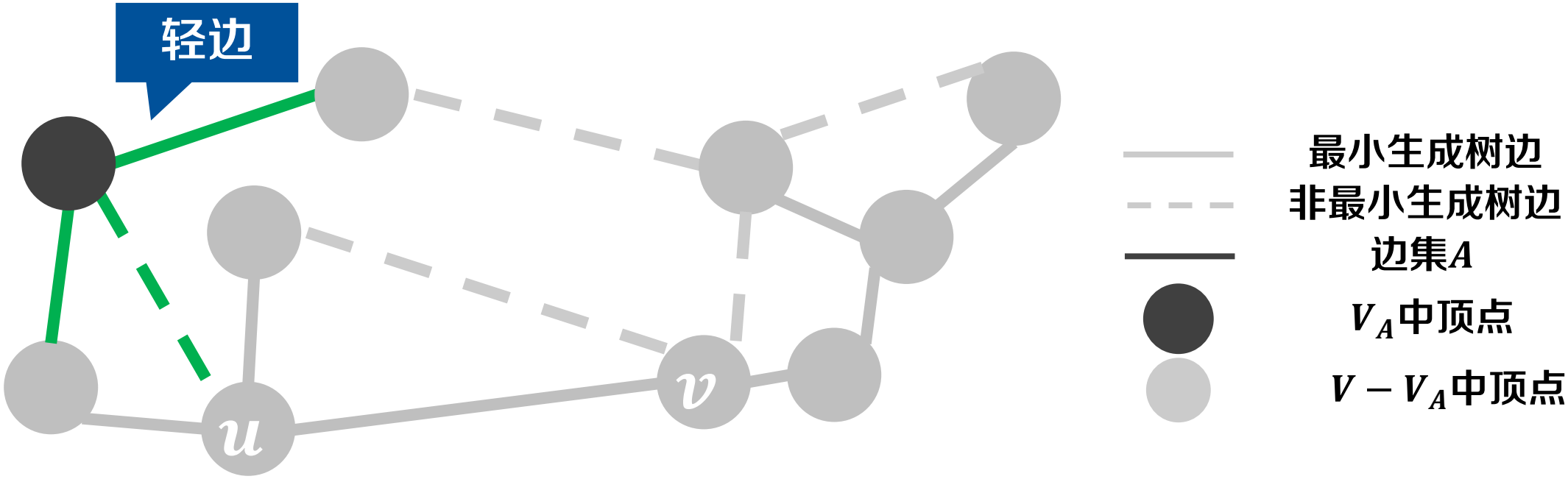
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树，选择割$(V_A, V-V_A)$



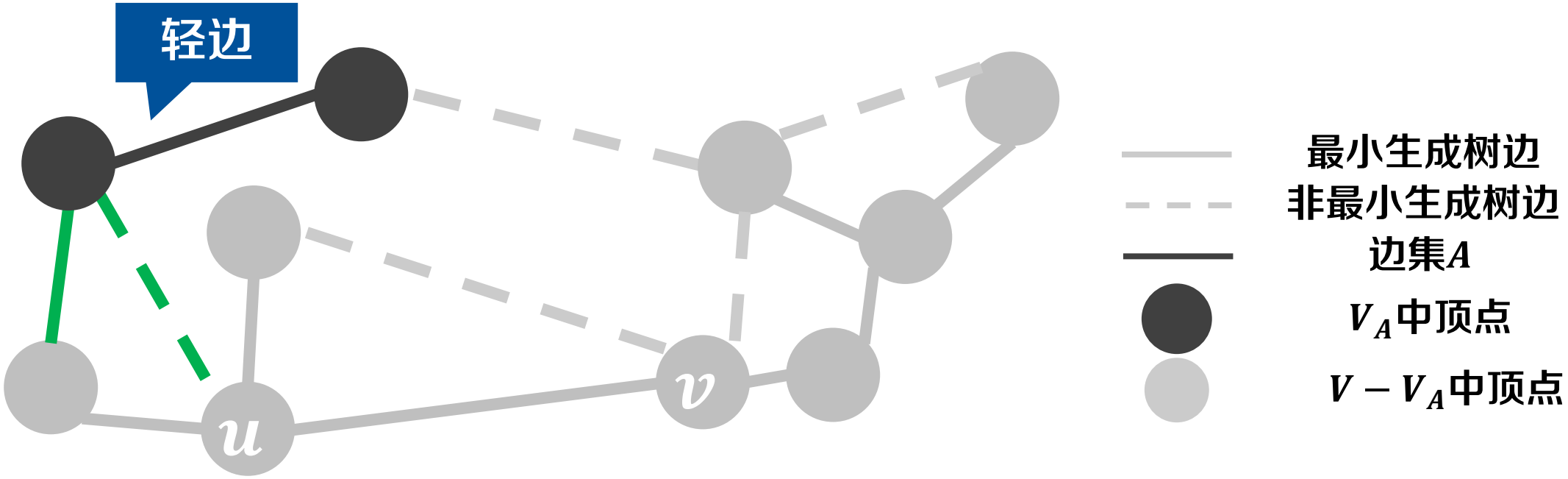
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树，选择割$(V_A, V-V_A)$
  - 步骤3：选择横跨割$(V_A, V-V_A)$的轻边



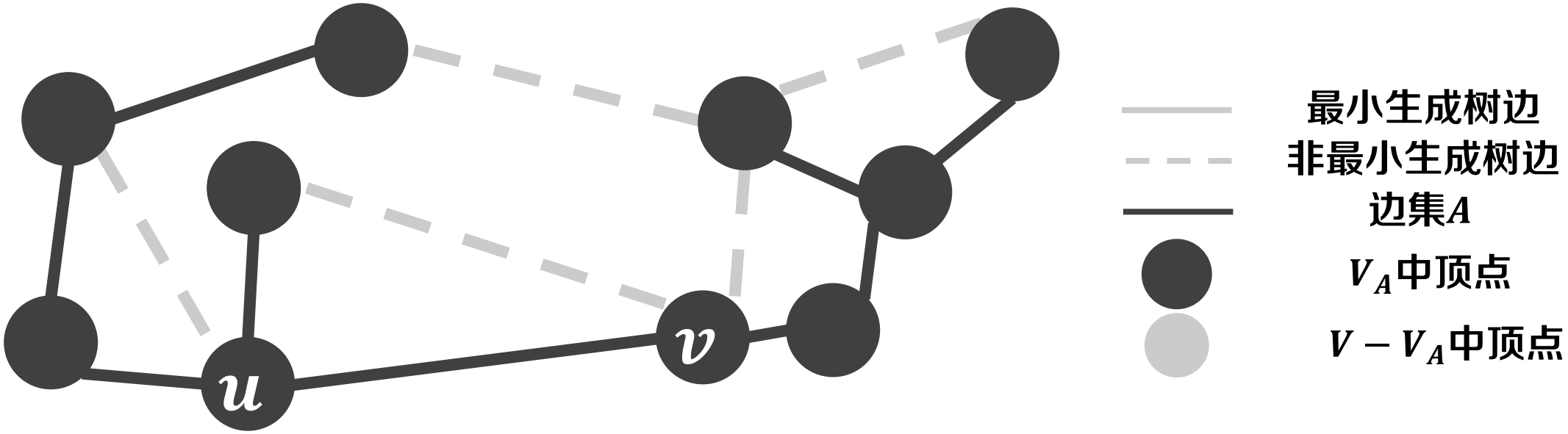
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树，选择割$(V_A, V-V_A)$
  - 步骤3：选择横跨割$(V_A, V-V_A)$的轻边，添加到边集A中



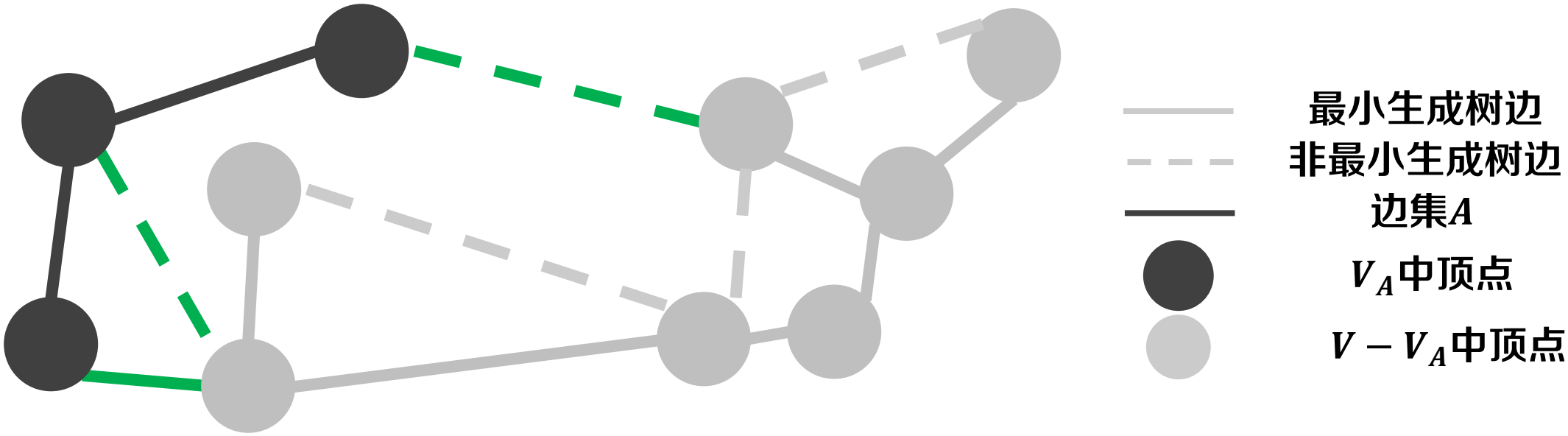
Prim算法

- 算法思想
  - 步骤1：选择任意一个顶点，作为生成树的起始顶点
  - 步骤2：保持边集A始终为一棵树，选择割$(V_A, V-V_A)$
  - 步骤3：选择横跨割$(V_A, V-V_A)$的轻边，添加到边集A中
  - 步骤4：重复步骤2和步骤3，直至覆盖所有顶点



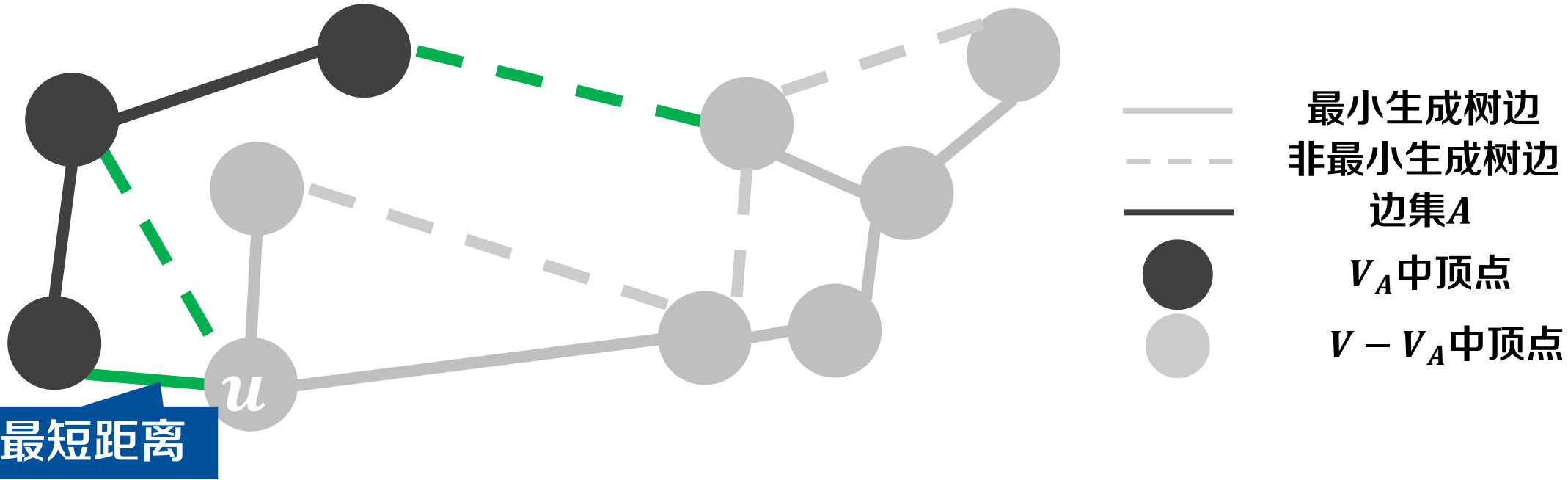
Prim算法

- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$



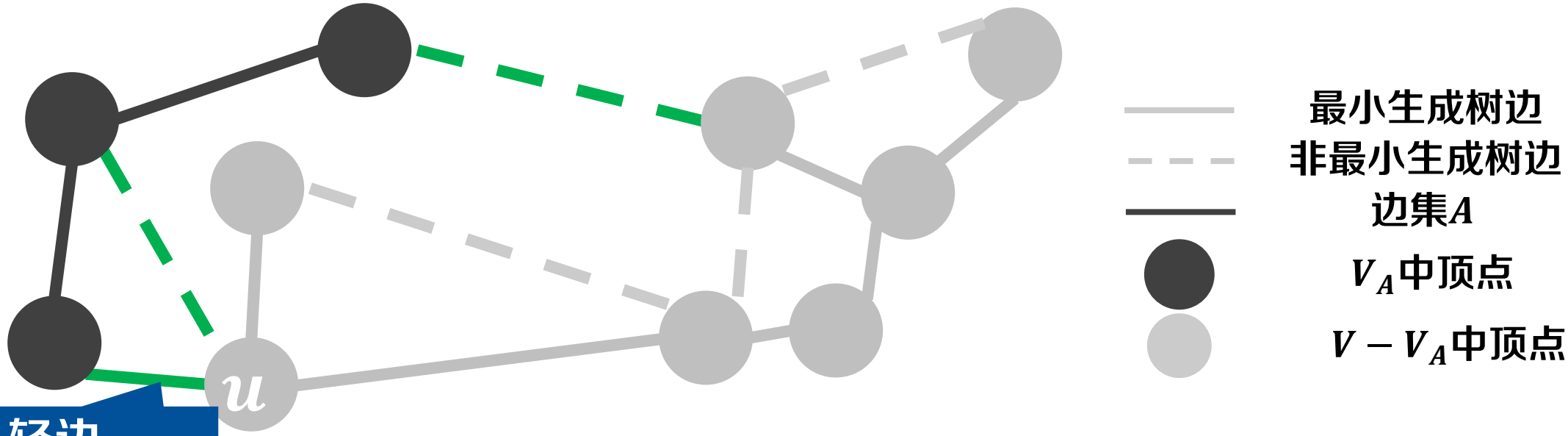
Prim算法

- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$
  - $dist$记录横跨$(V_A, V - V_A)$边的权重
    - 顶点集V_A到顶点u的最短距离，$dist[u] = \min\{w(x,u)\}, \forall x \in V_A$



Prim算法

- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$
  - $dist$记录横跨$(V_A, V - V_A)$边的权重
    - 顶点集V_A到顶点u的最短距离，$dist[u] = \min\{w(x,u)\}, \forall x \in V_A$
    - 轻边：$\min\{dist[u]\}, \forall u \in V - V_A$



Prim算法

- 辅助数组
  - $color$表示顶点状态
    - 黑色顶点u已覆盖， $u \in V_A$
    - 白色顶点u未覆盖， $u \in V - V_A$
  - $dist$记录横跨$(V_A, V - V_A)$边的权重
    - 顶点集V_A到顶点u的最短距离，$dist[u] = \min\{w(x,u)\}, \forall x \in V_A$
    - 轻边：$\min\{dist[u]\}, \forall u \in V - V_A$
  - $pred$表示前驱顶点
    - $(pred[u], u)$为最小生成树的边

提纲

问题背景

通用框架

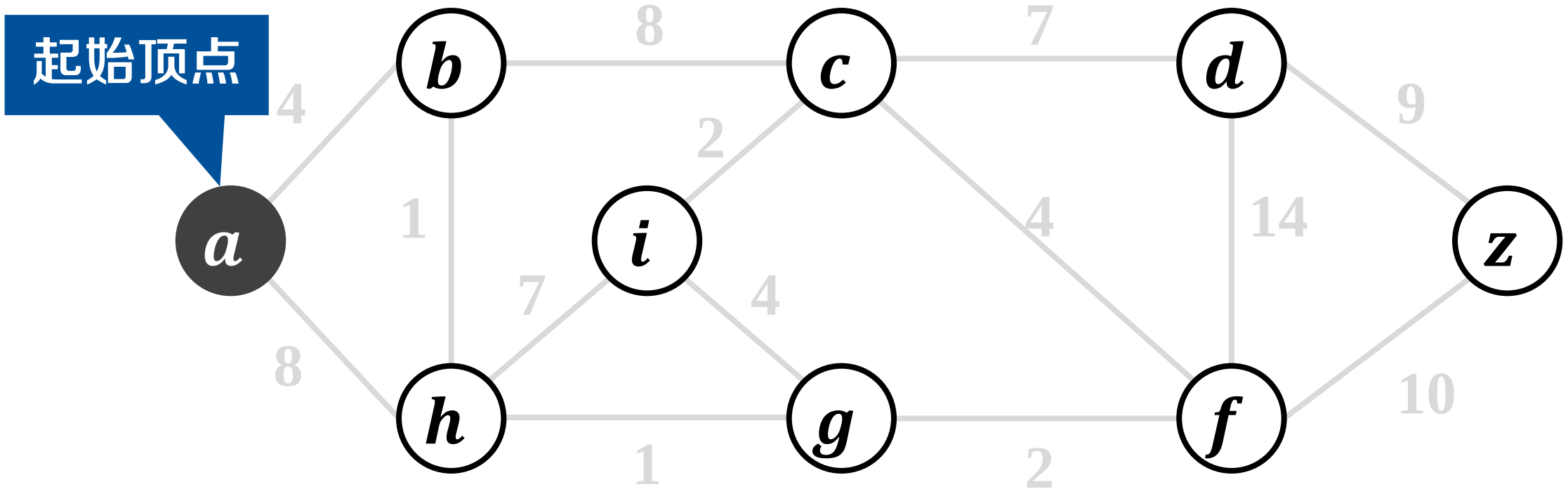
Prim算法

算法实例

算法分析

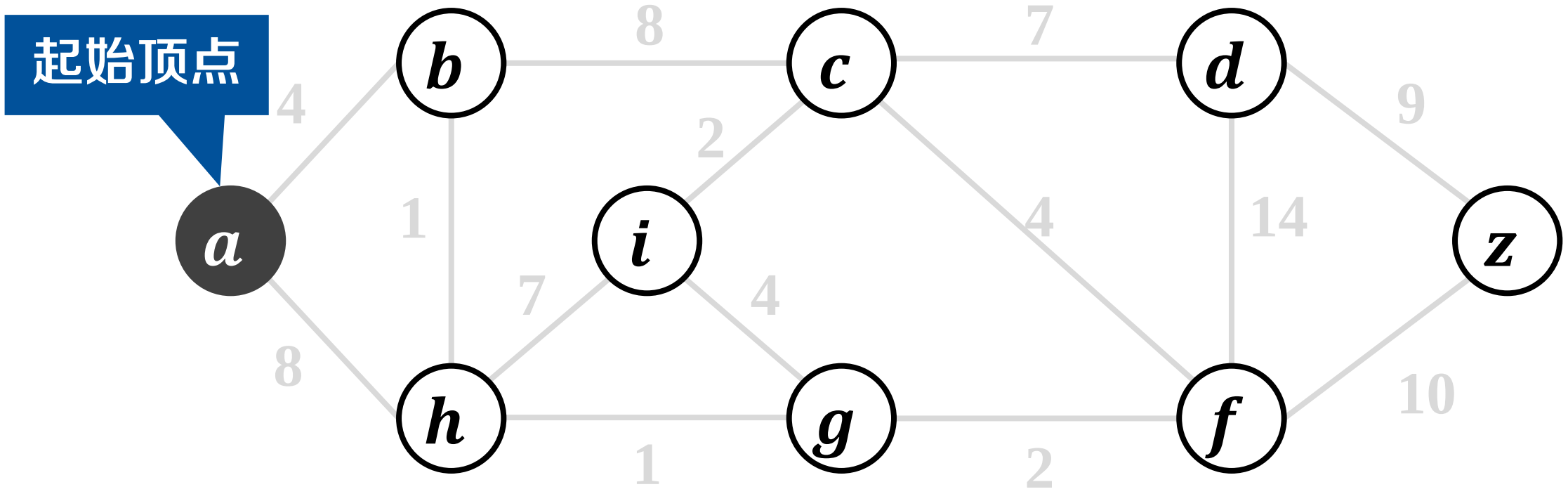
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
$color$	W	W	W	W	W	W	W	W	W
$dist$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$pred$	N	N	N	N	N	N	N	N	N



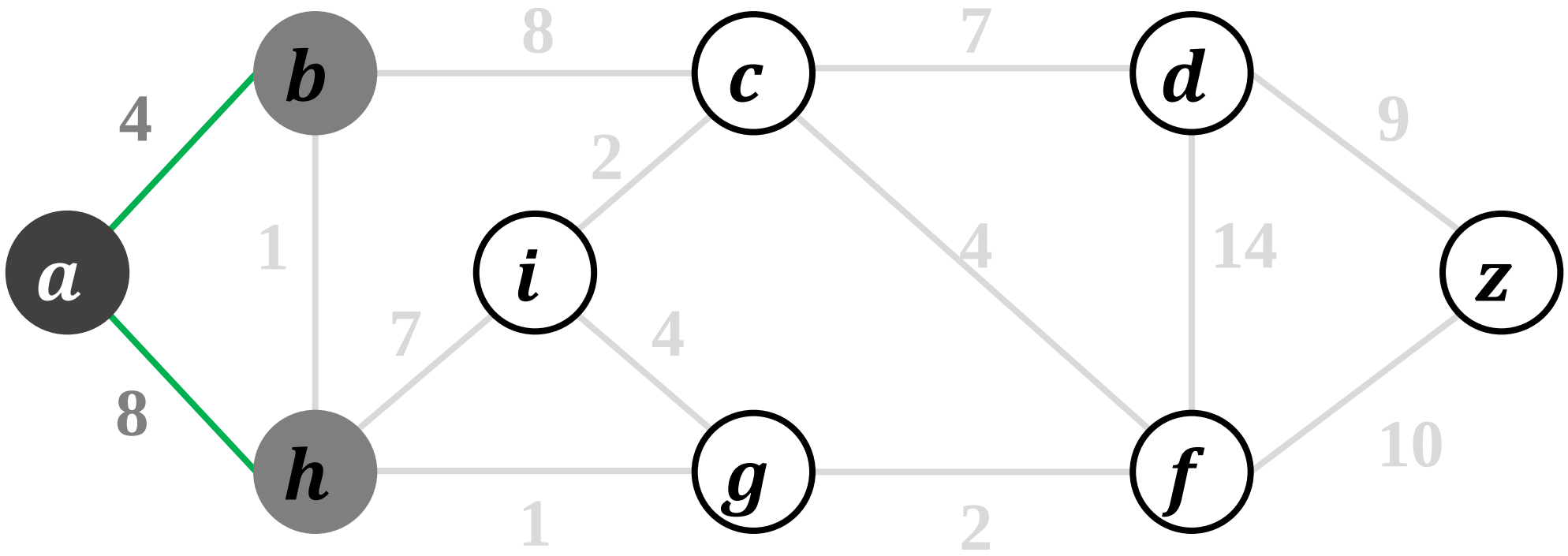
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
$color$	B	W	W	W	W	W	W	W	W
$dist$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$pred$	N	N	N	N	N	N	N	N	N



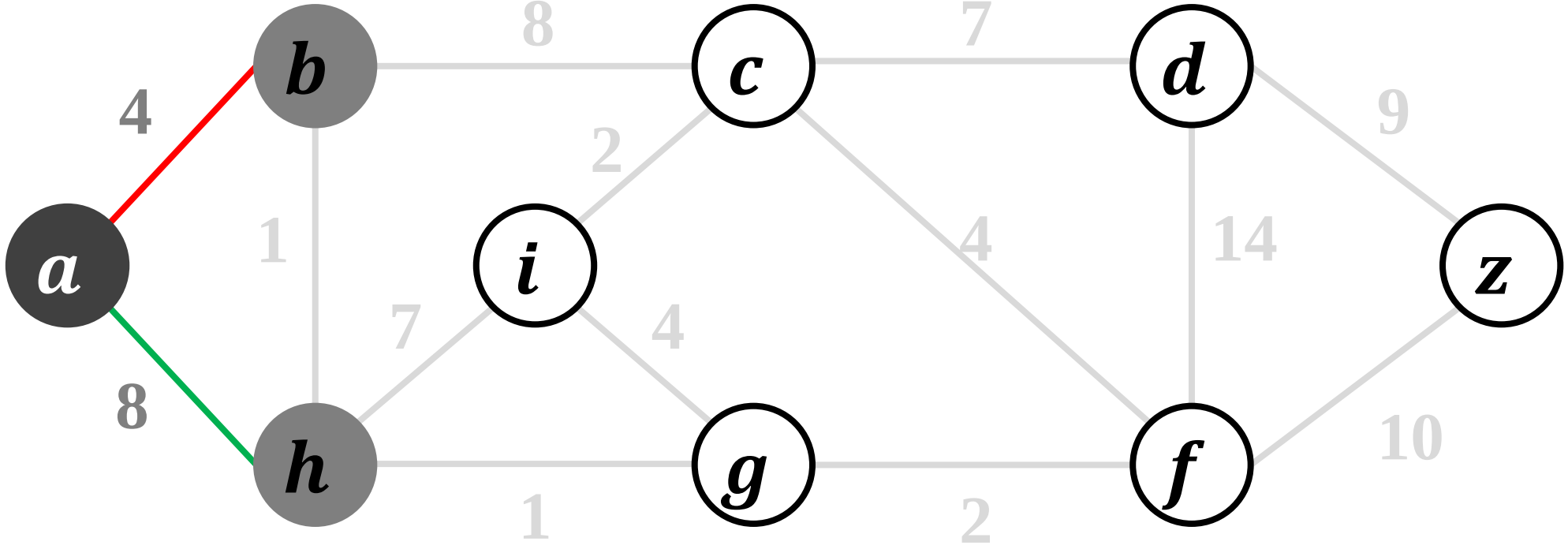
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	W	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	∞	∞	∞	∞	8	∞	∞
pred	N	a	N	N	N	N	a	N	N



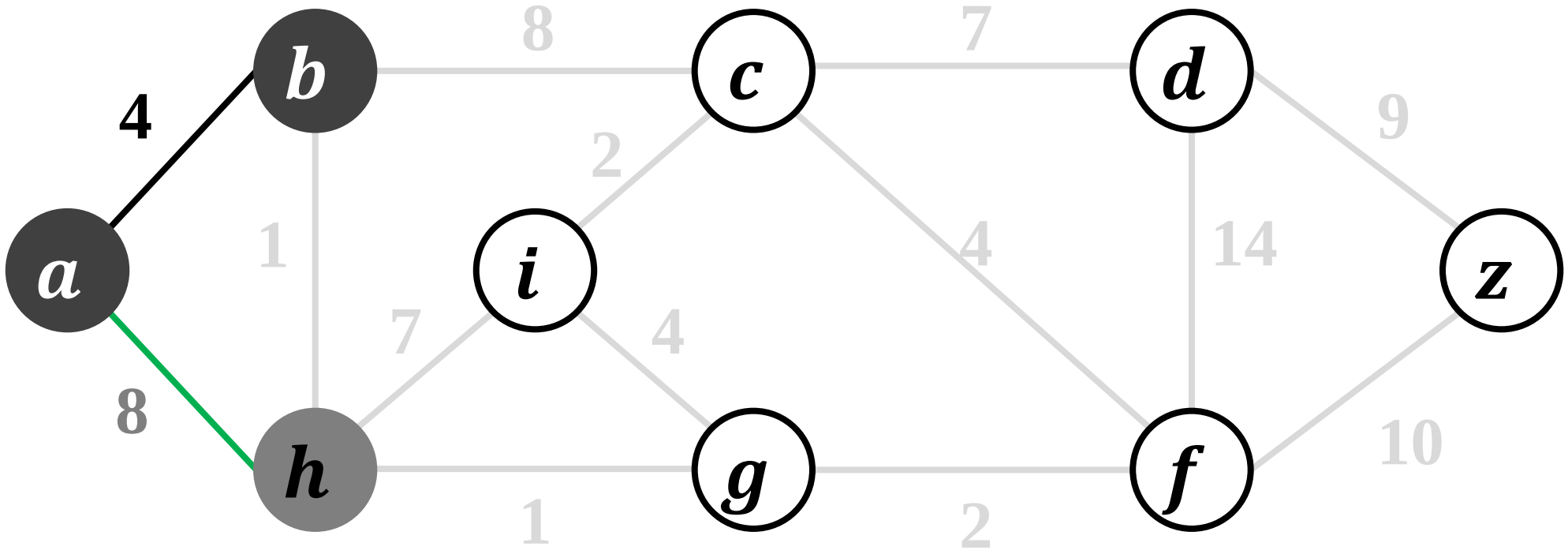
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	W	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	∞	∞	∞	∞	8	∞	∞
pred	N	a	N	N	N	N	a	N	N



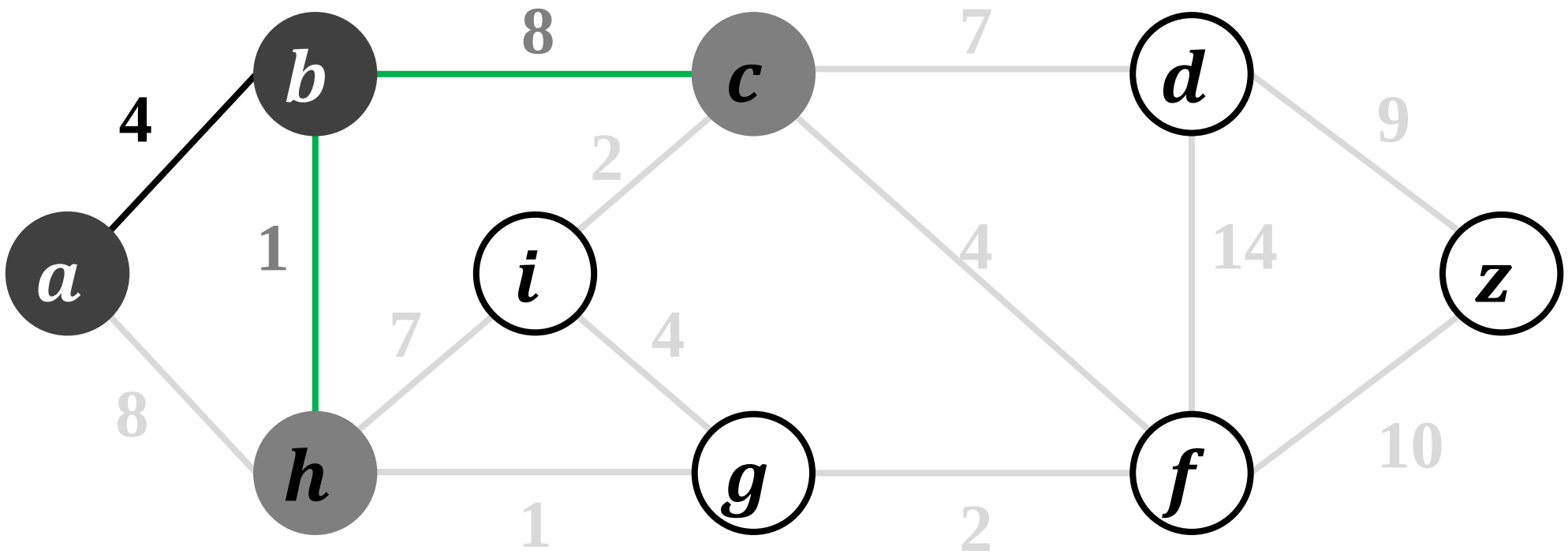
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	∞	∞	∞	∞	8	∞	∞
pred	N	a	N	N	N	N	a	N	N



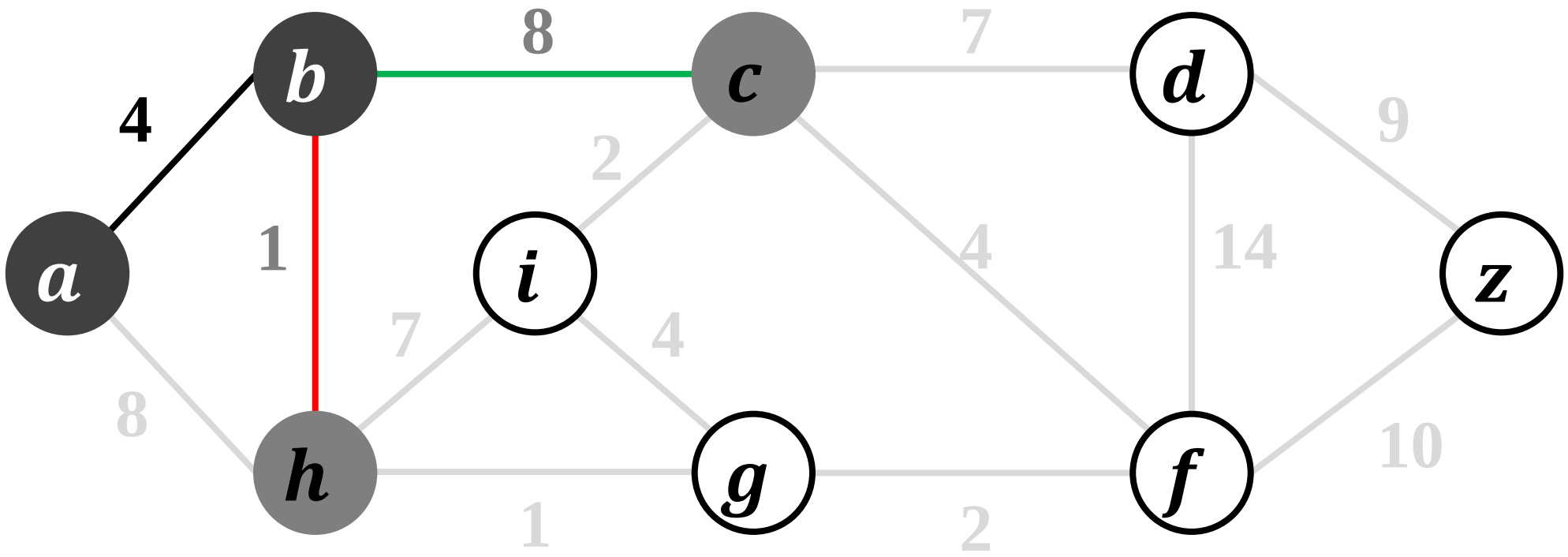
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	∞	1	∞	∞
pred	N	*a*	*b*	N	N	N	*b*	N	N



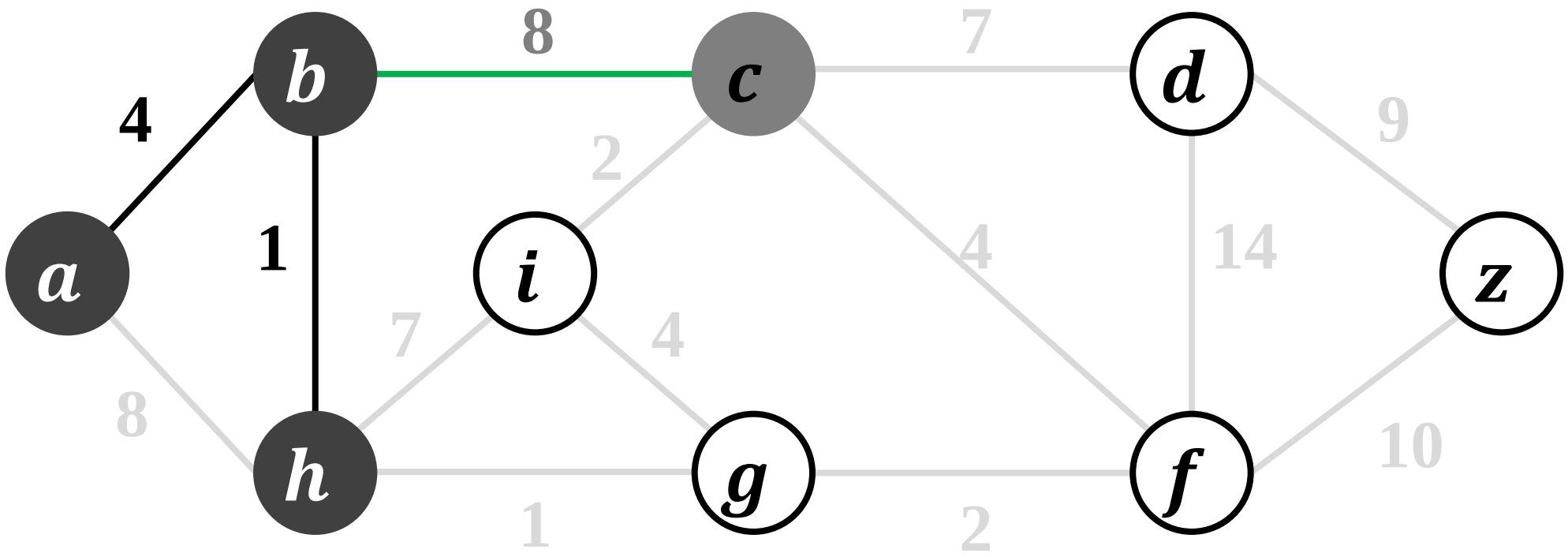
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	W	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	∞	1	∞	∞
pred	N	a	b	N	N	N	b	N	N



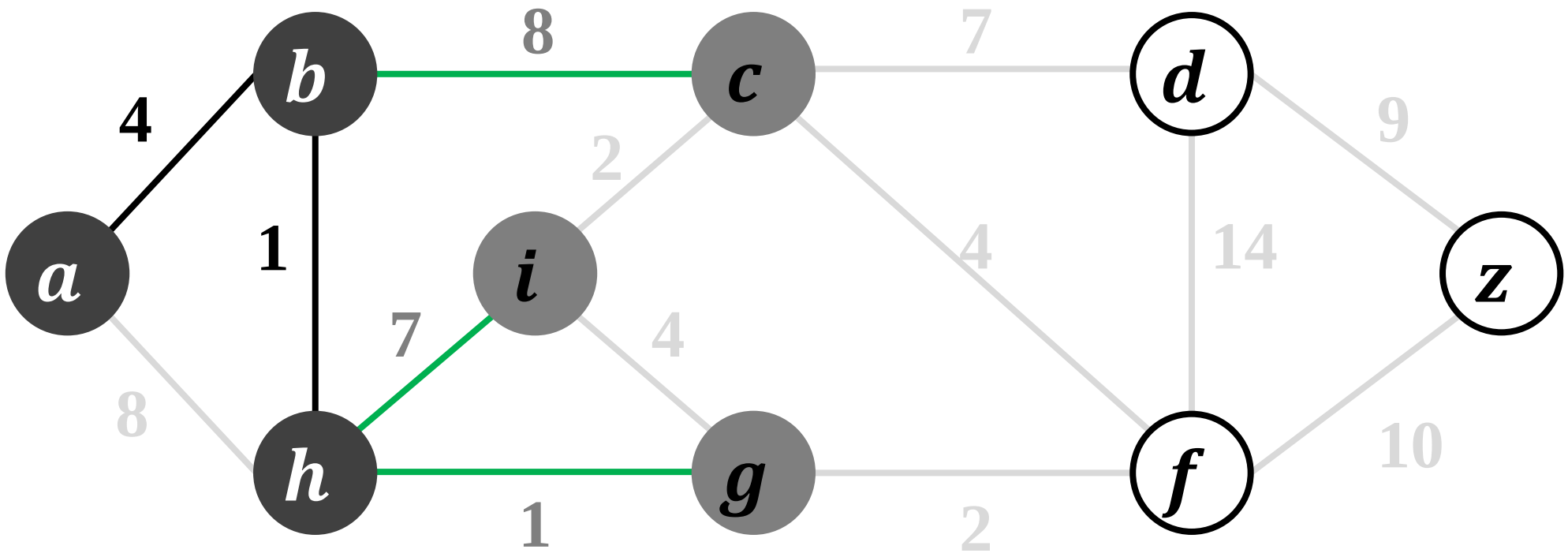
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	B	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	∞	1	∞	∞
pred	N	*a*	*b*	N	N	N	*b*	N	N



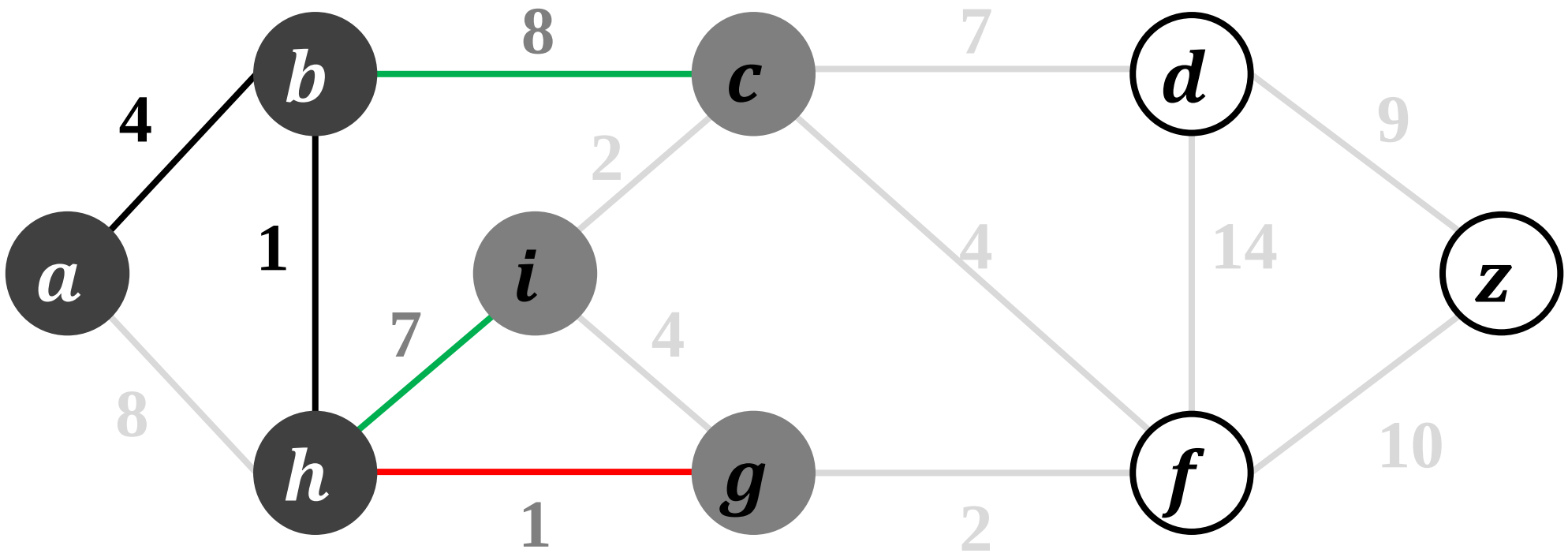
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	B	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	1	1	7	∞
pred	N	a	b	N	N	h	b	h	N



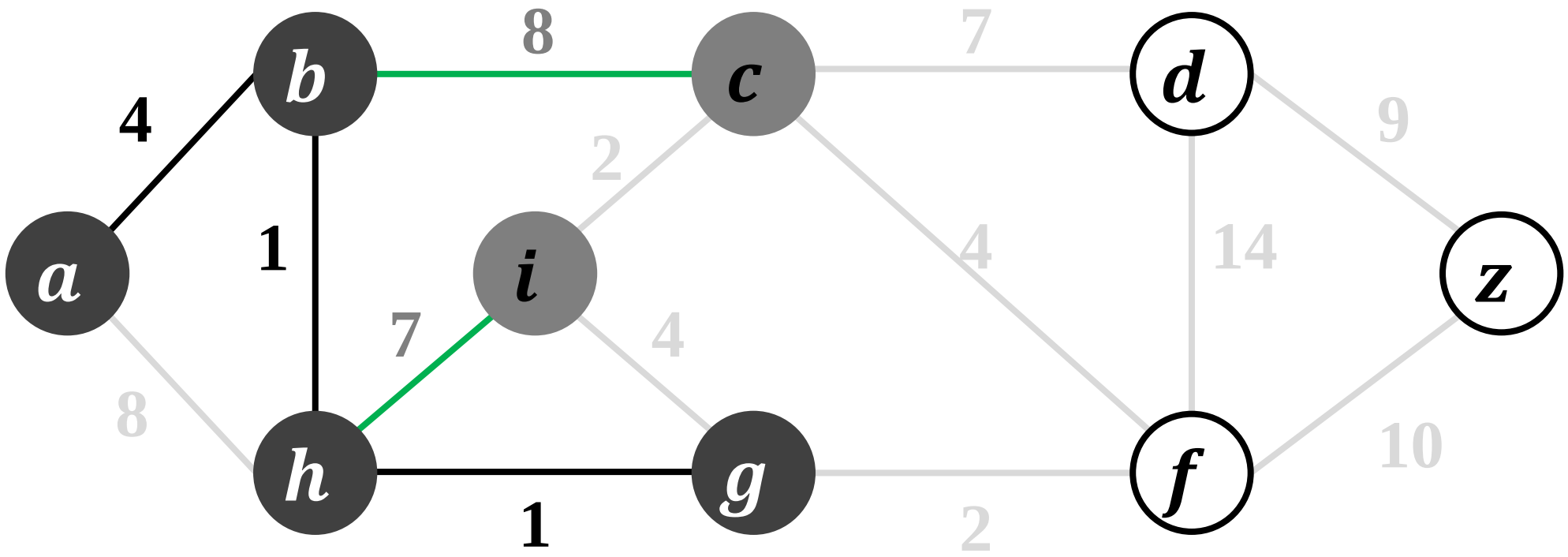
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	W	B	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	1	1	7	∞
pred	N	*a*	*b*	N	N	*h*	*b*	*h*	N



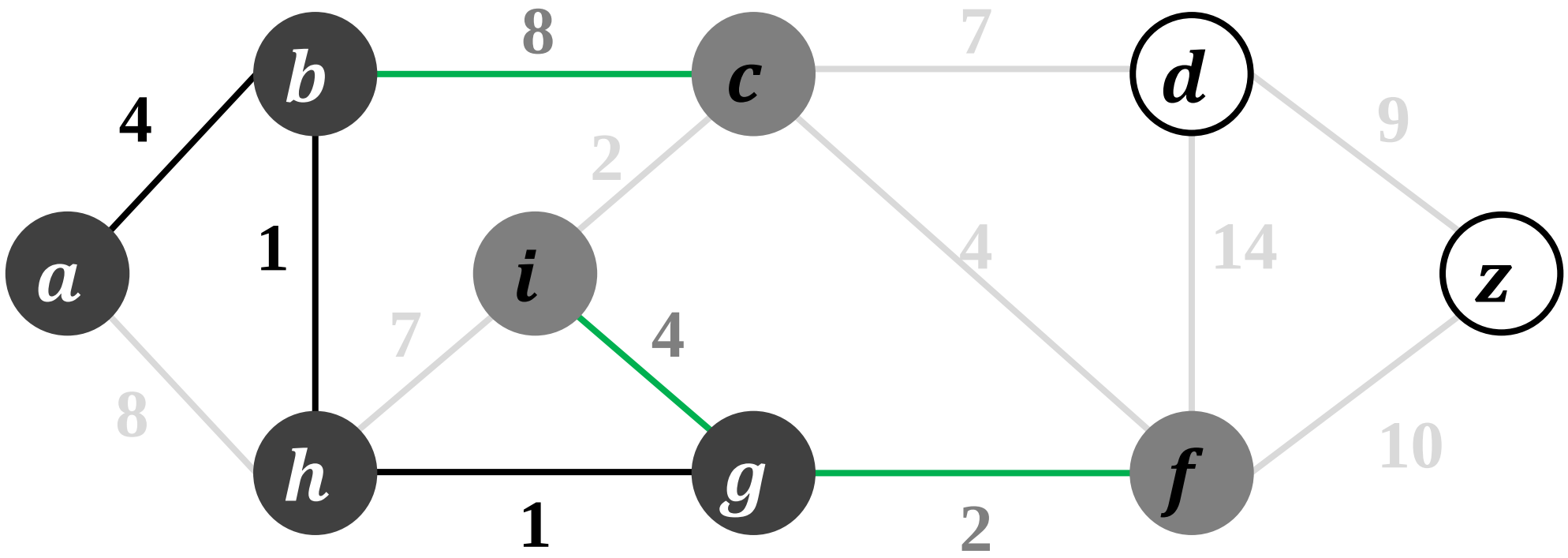
算法实例

V	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*z*
color	B	B	W	W	W	B	B	W	W
dist	0	4	8	∞	∞	1	1	7	∞
pred	N	*a*	*b*	N	N	*h*	*b*	*h*	N



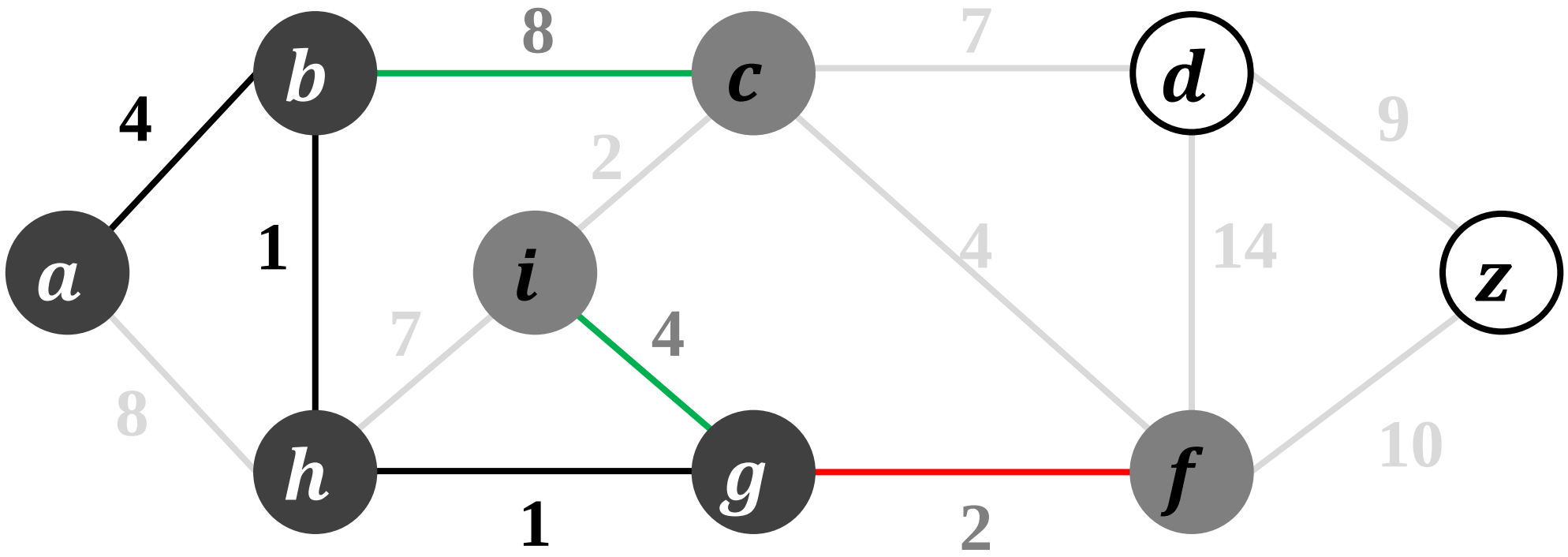
算法实例

V	*a*	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*	*z*
color	B	B	W	W	W	B	B	W	W
dist	0	4	8	∞	2	1	1	4	∞
pred	N	*a*	*b*	N	*g*	*h*	*b*	*g*	N



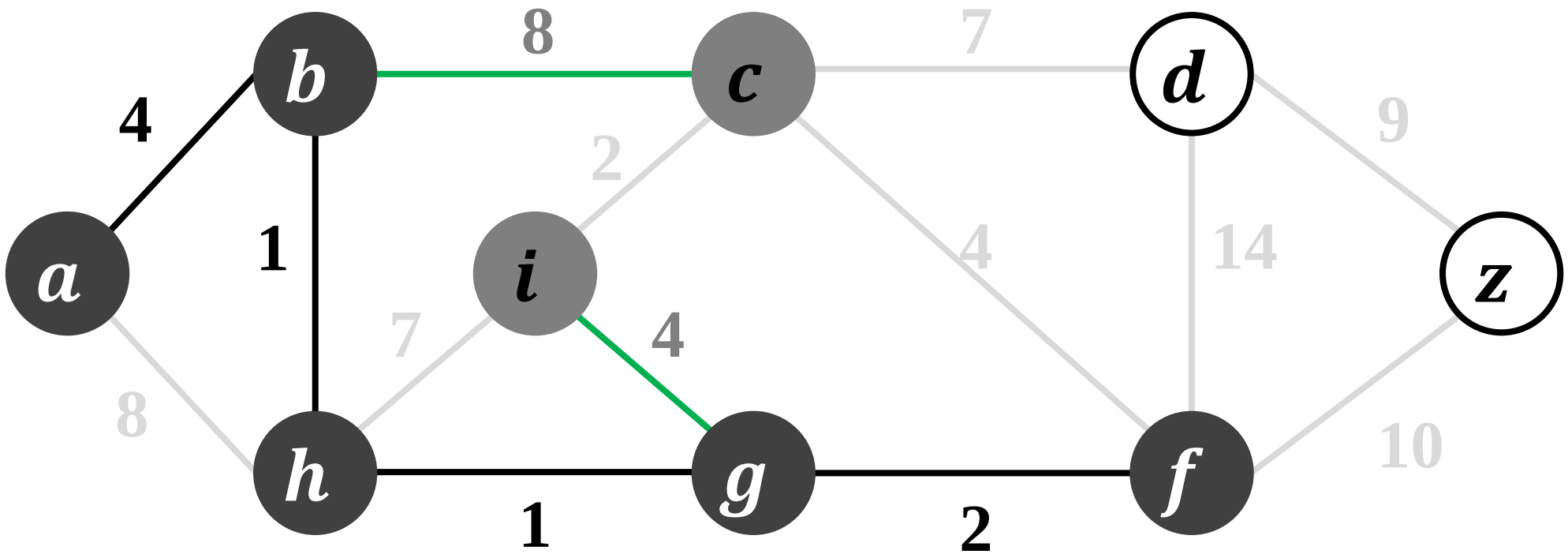
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	W	B	B	W	W
dist	0	4	8	∞	2	1	1	4	∞
pred	N	*a*	*b*	N	*g*	*h*	*b*	*g*	N



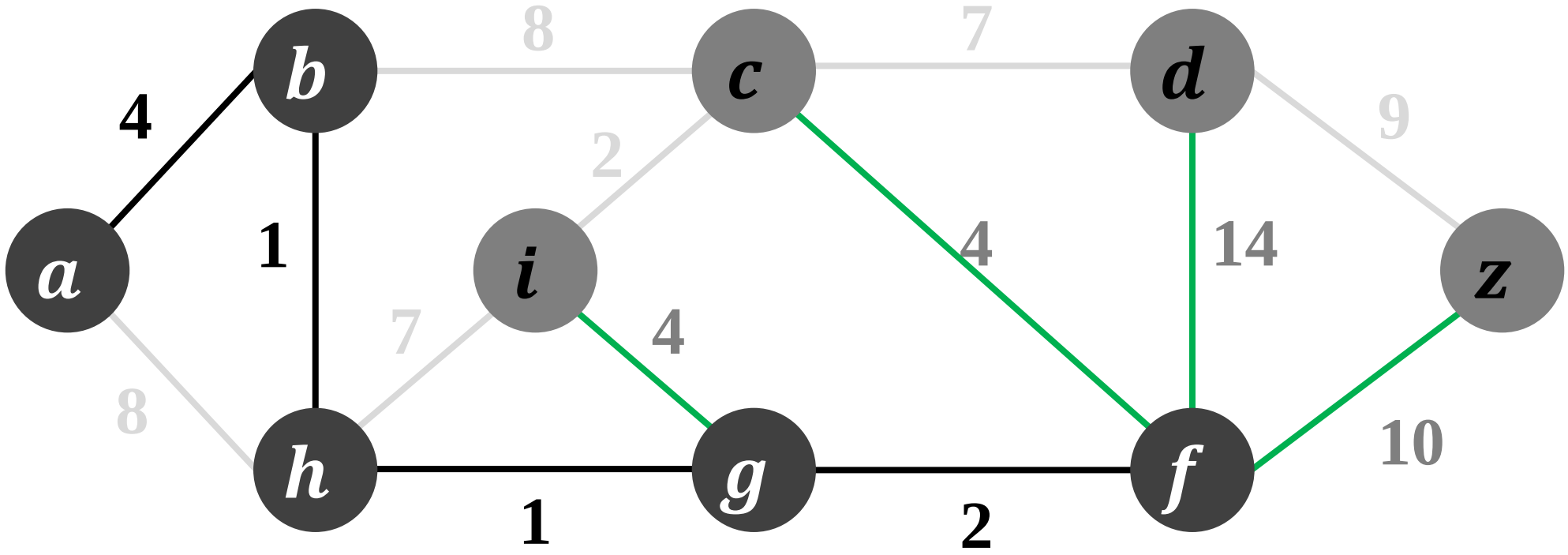
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
$color$	B	B	W	W	B	B	B	W	W
$dist$	0	4	8	∞	2	1	1	4	∞
$pred$	N	a	b	N	g	h	b	g	N



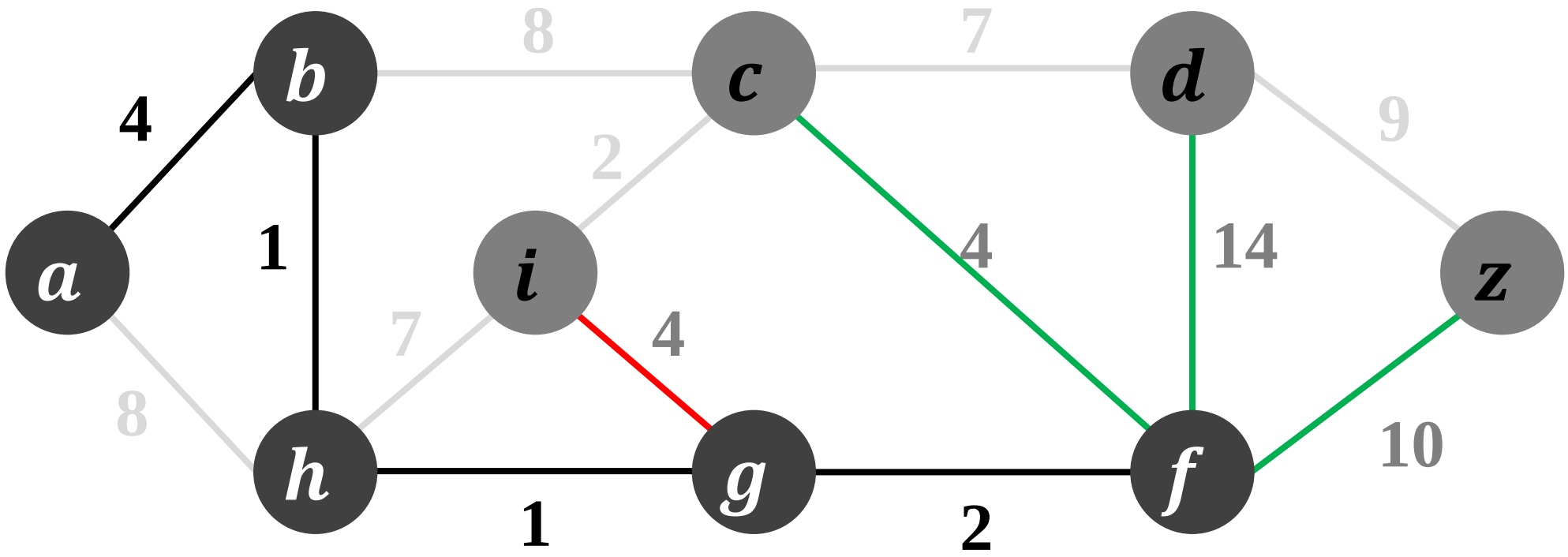
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	B	B	B	W	W
dist	0	4	4	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	f	f	g	h	b	g	f



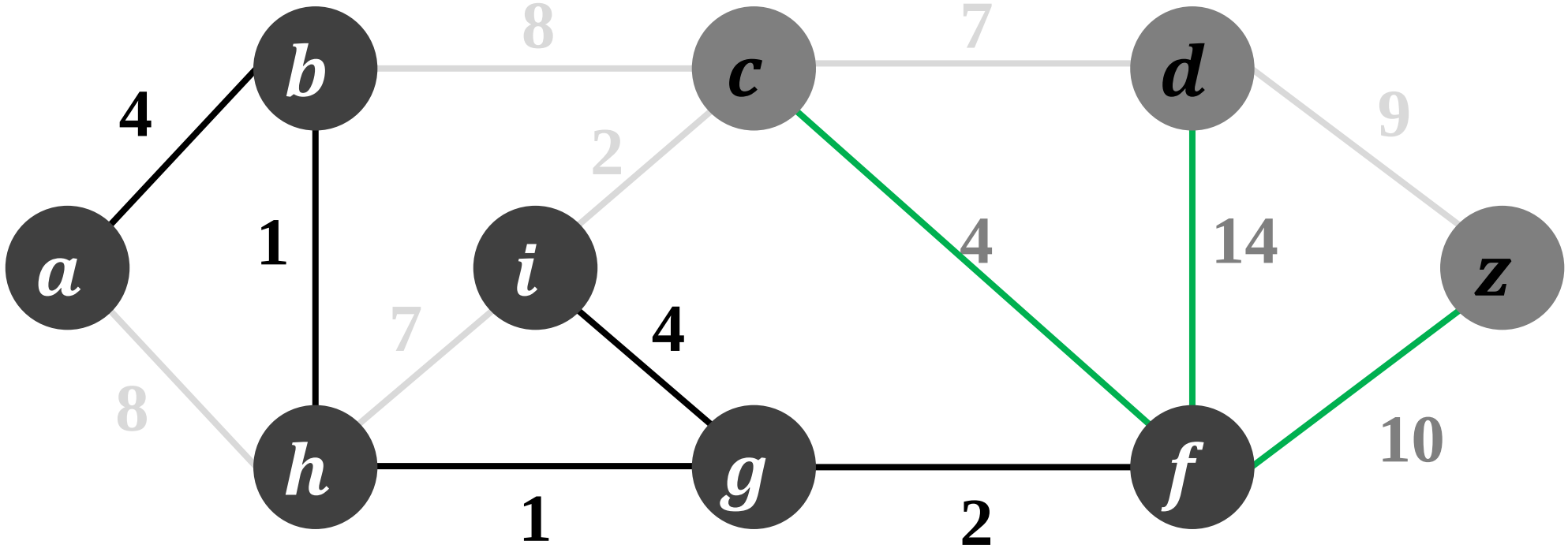
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	B	B	B	W	W
dist	0	4	4	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	f	f	g	h	b	g	f



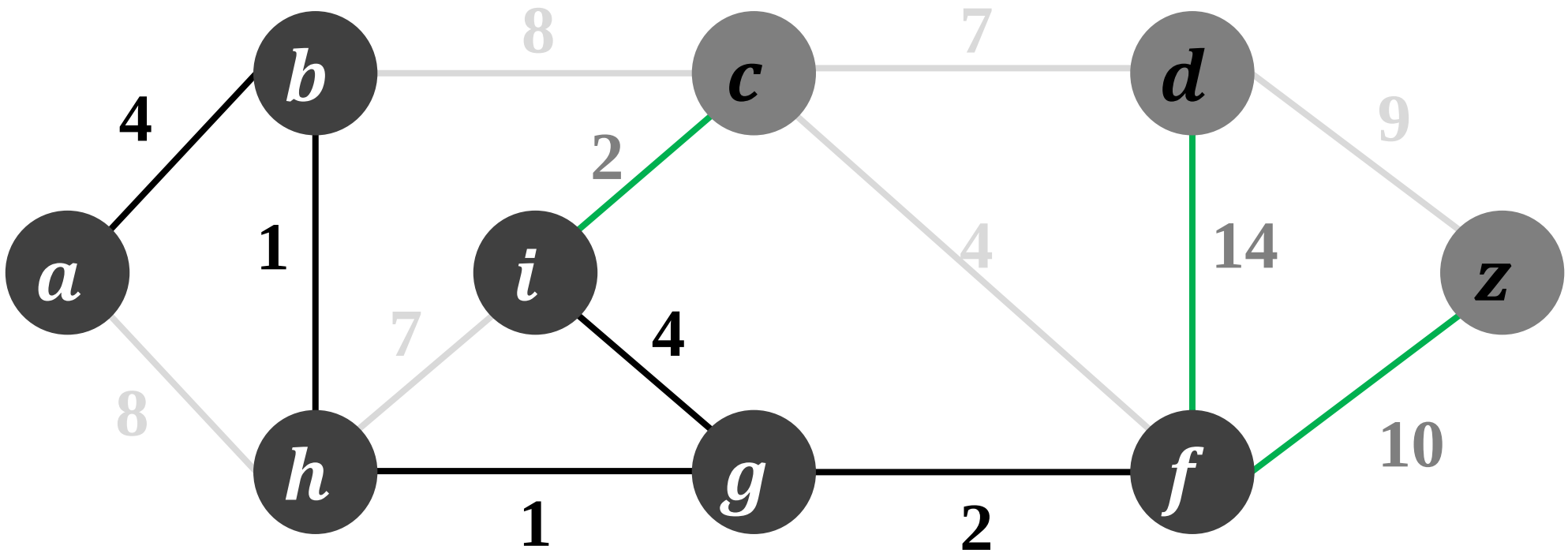
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	4	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	f	f	g	h	b	g	f



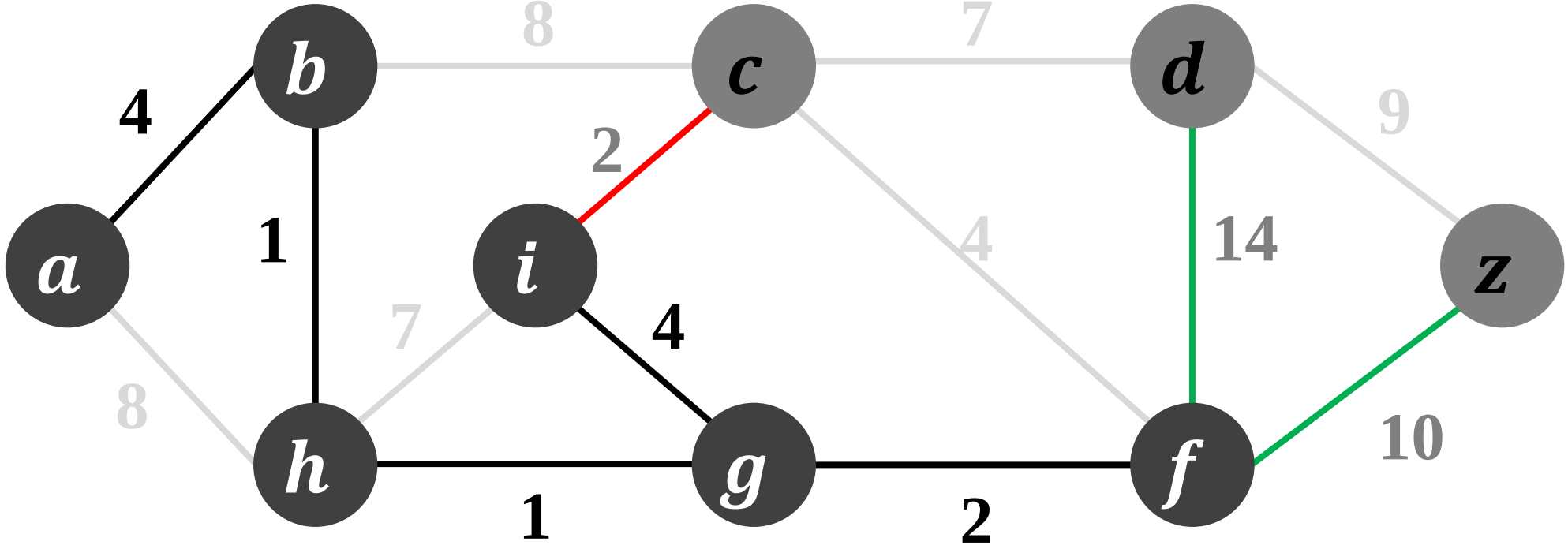
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	f	g	h	b	g	f



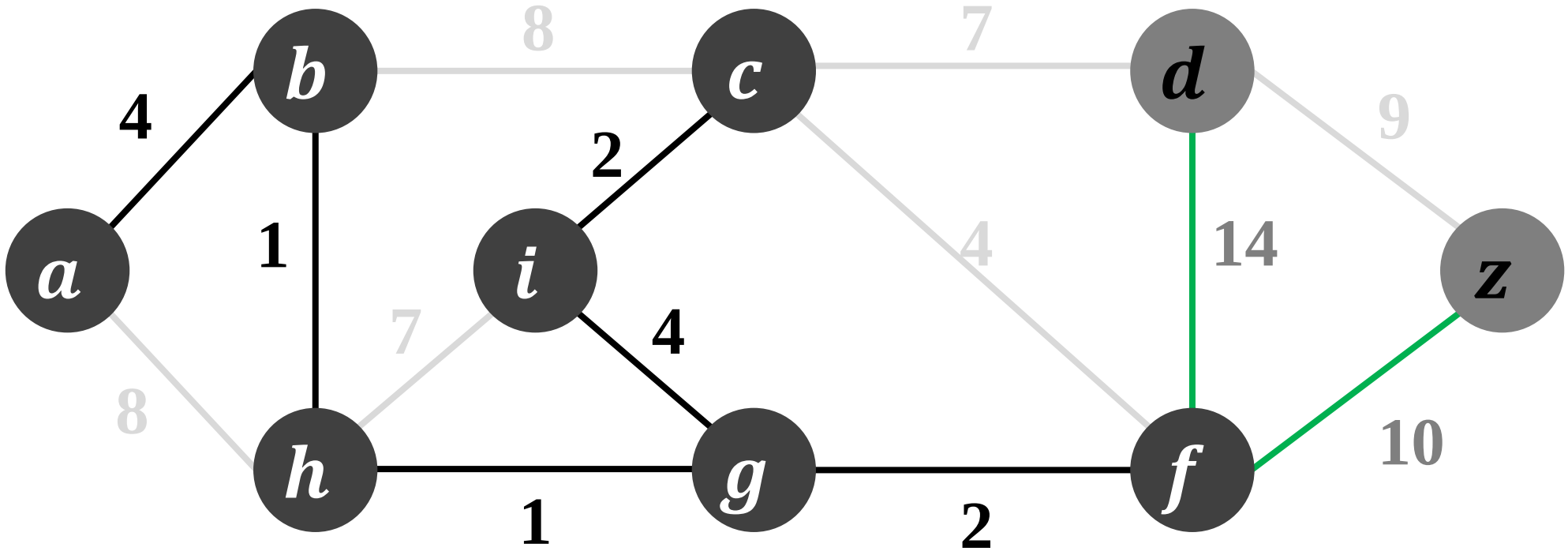
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	W	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	f	g	h	b	g	f



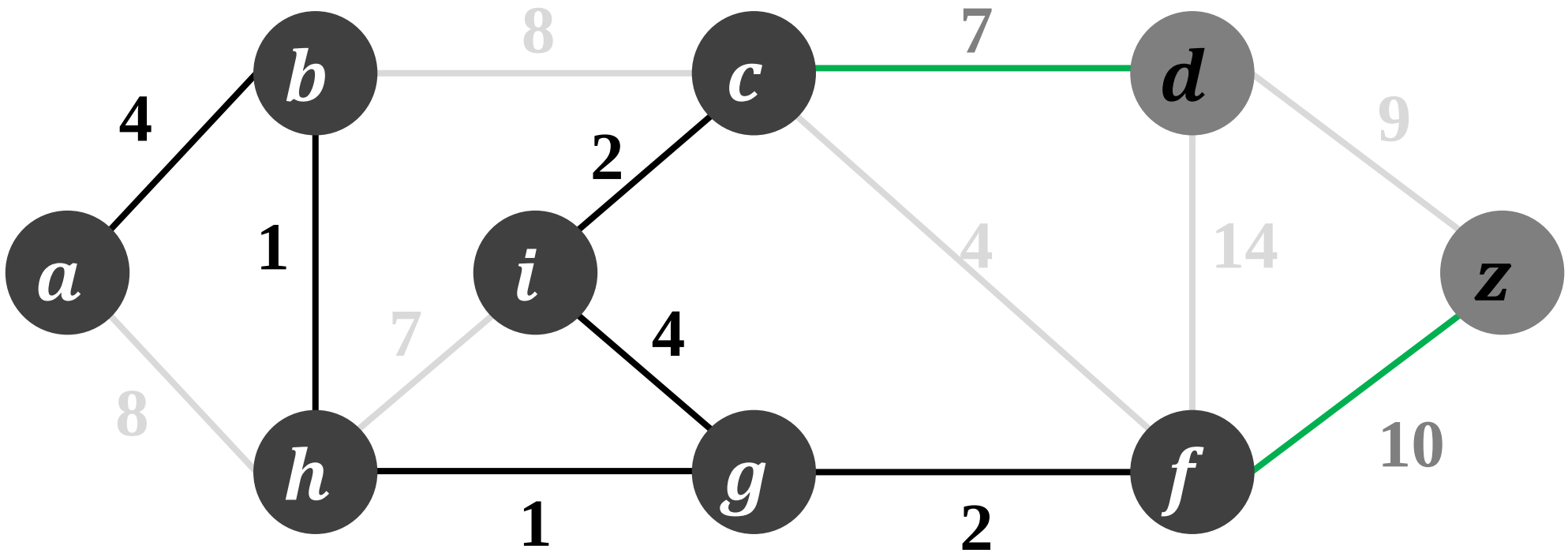
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	14	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	f	g	h	b	g	f



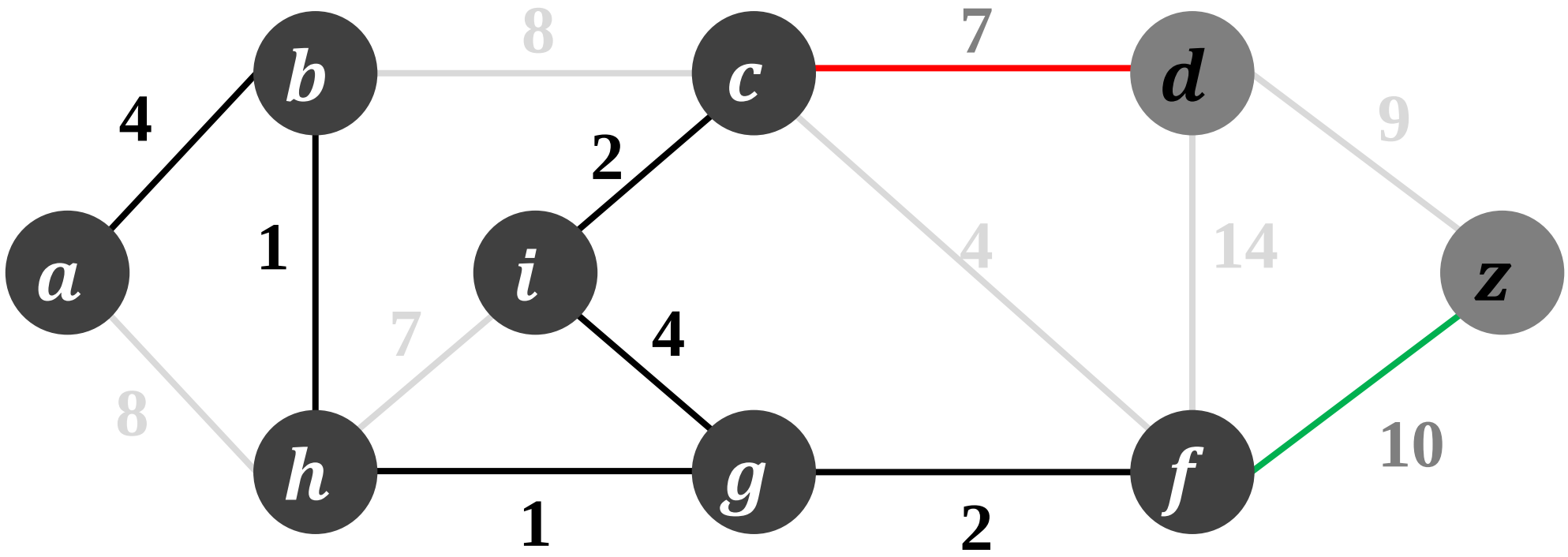
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	f



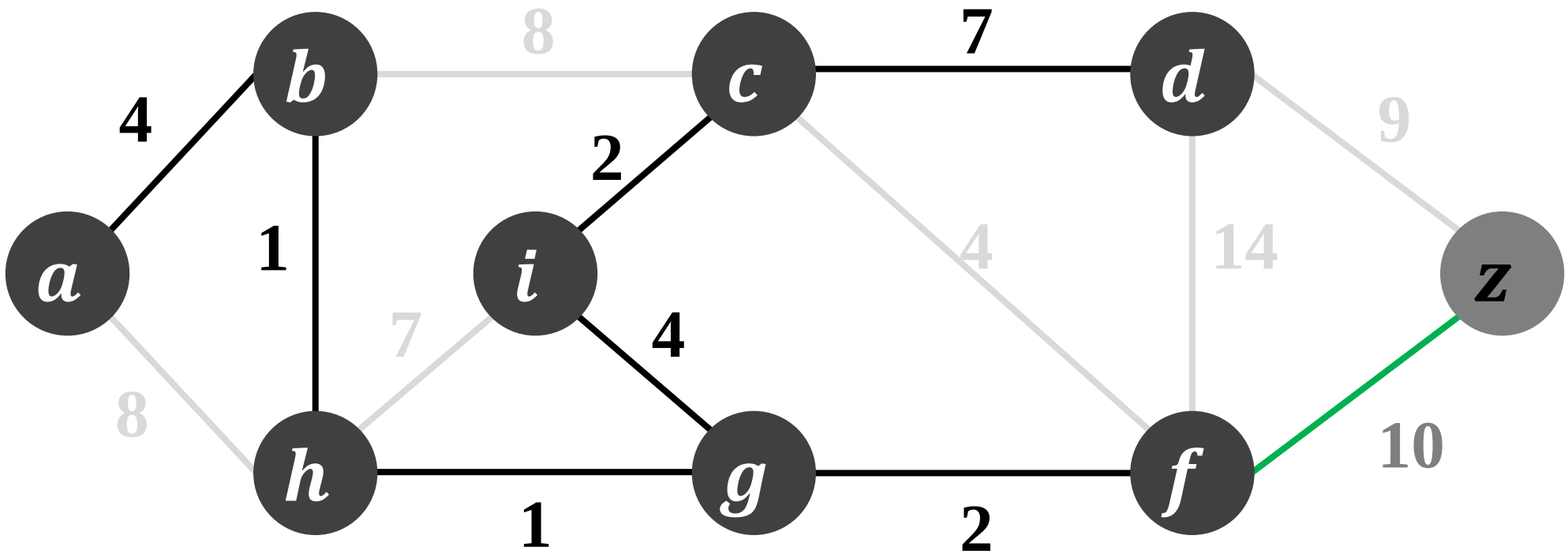
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	W	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	f



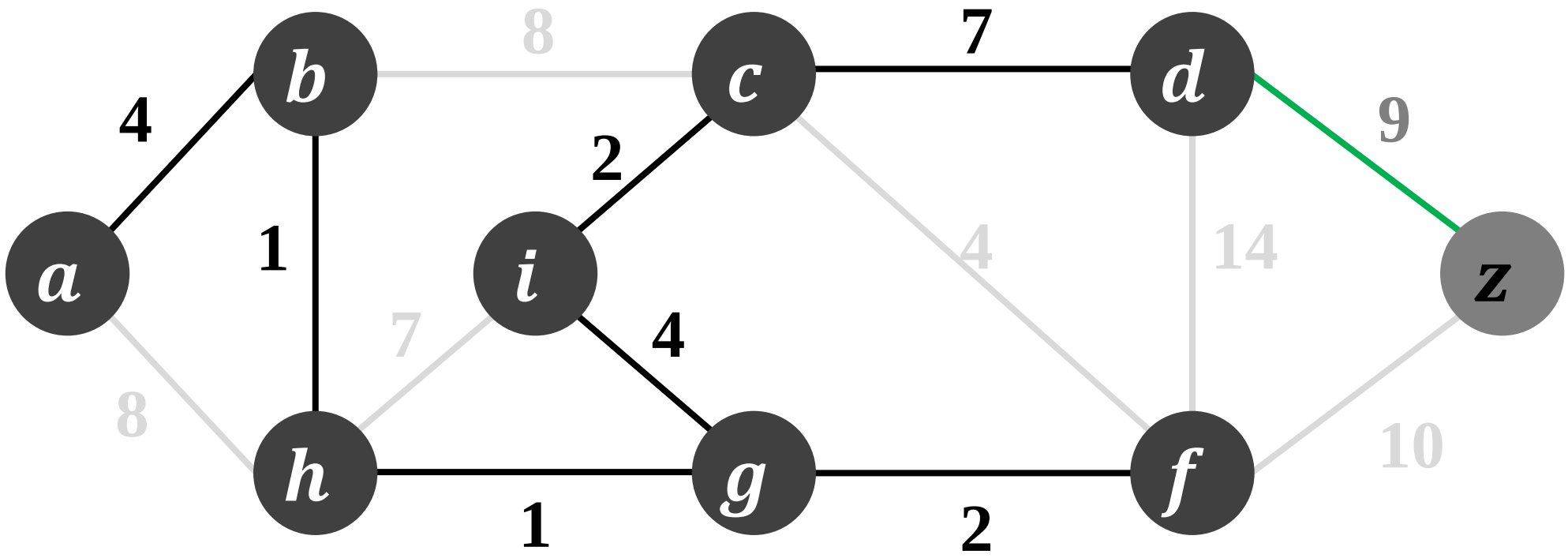
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	10
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	f



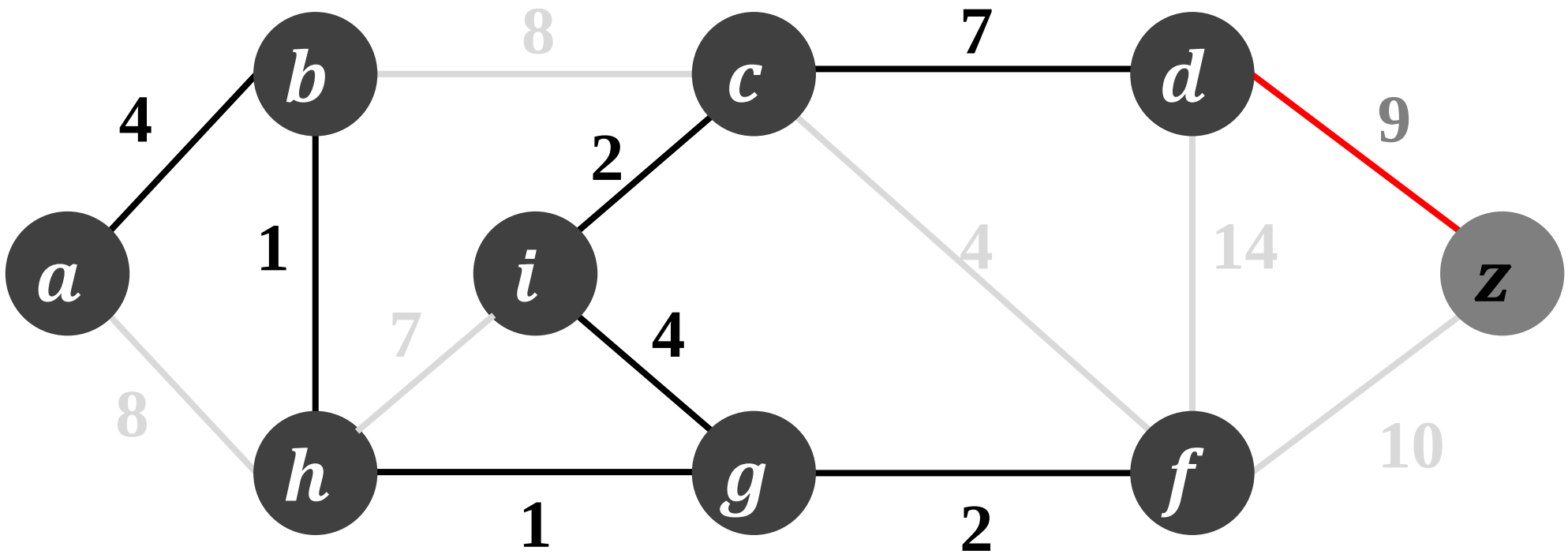
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	9
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	d



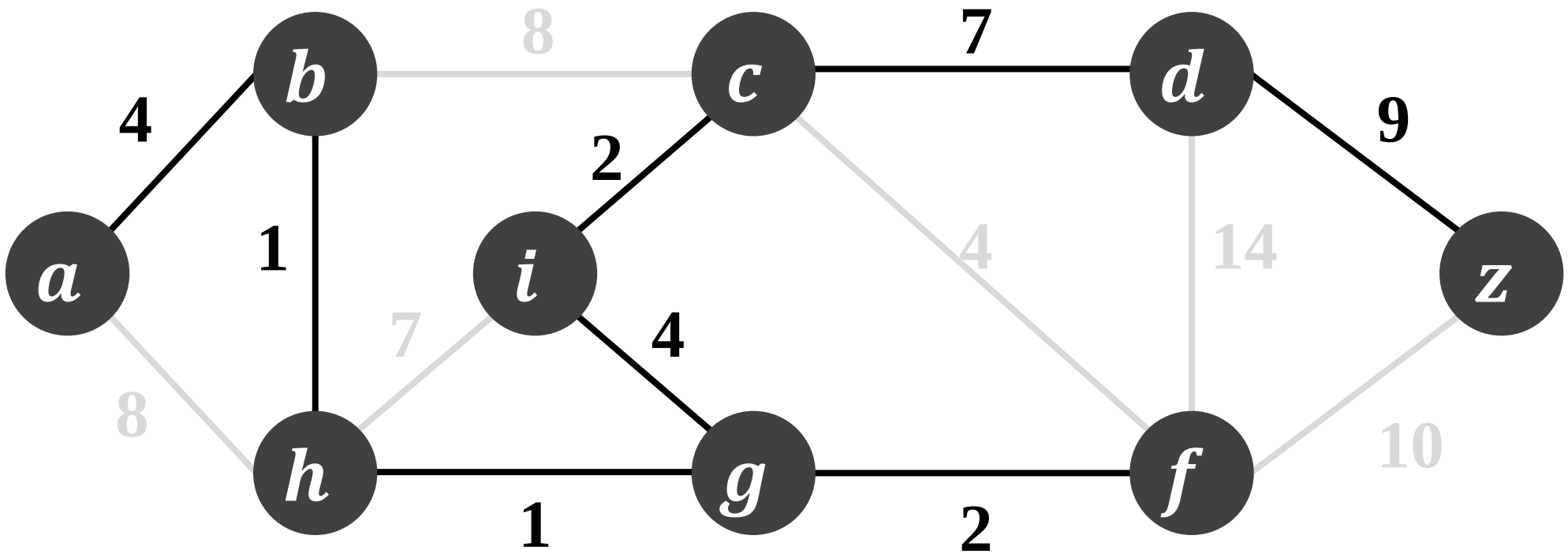
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	W
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	9
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	d



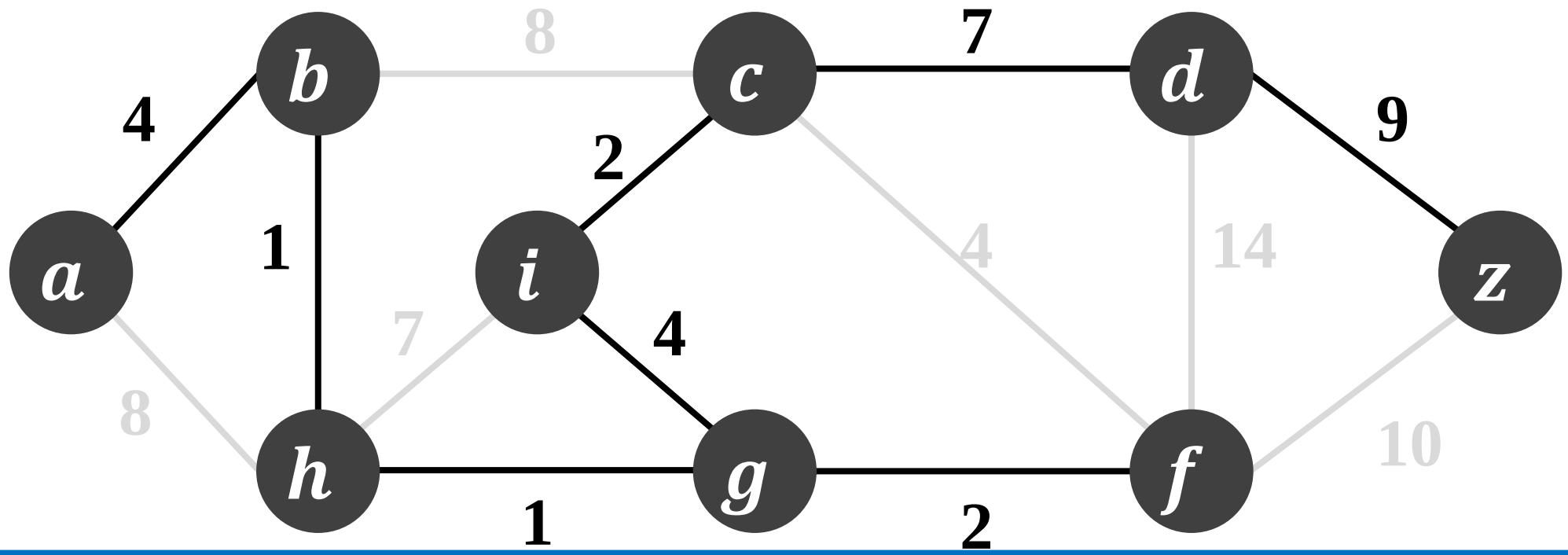
算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
color	B	B	B	B	B	B	B	B	B
dist	0	4	2	7	2	1	1	4	9
pred	N	a	i	c	g	h	b	g	d



算法实例

V	a	b	c	d	f	g	h	i	z
$color$	B	B	B	B	B	B	B	B	B
$dist$	0	4	2	7	2	1	1	4	9
$pred$	N	a	i	c	g	h	b	g	d



$$W(T) = 0 + 4 + 2 + 7 + 2 + 1 + 1 + 4 + 9 = 30$$

提纲

问题背景

通用框架

Prim算法

算法实例

算法分析

伪代码

- **MST-Prim(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ do
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$

初始化各个辅助数组

伪代码

- **MST-Prim(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ **do**
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$

选择任意顶点作为起点

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

依次添加其他顶点

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

记录最小权值

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

记录安全边的端点

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

记录新增的安全边

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

更新$dist$数组

伪代码

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

标记顶点处理完成

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
//初始化
for $u \in V$ do
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$

$O(|V|)$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(\deg(u))$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(|V| \cdot |V|) = O(|V|^2)$

$O(\deg(u))$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(|V| \cdot |V|) = O(|V|^2)$

$O(\deg(u))$

$\sum_{u \in V} \deg(u) = 2|E|$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(\deg(u))$

$O(|V|^2 + |E|)$

$O(|V|^2)$

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(\deg(u))$

$O(|V|^2 + |E|)$

$O(|V|^2)$

问题：能否进一步优化?

复杂度分析

- **MST-Prim(G)**

```
//执行最小生成树算法
for i ← 1 to |V| do
    minDist ← ∞
    rec ← 0
    for j ← 1 to |V| do
        if color[j] ≠ BLACK and dist[j] < minDist then
            minDist ← dist[j]
            rec ← j
        end
    end
    for u ∈ G.Adj[rec] do
        if w(rec, u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(rec, u)
            pred[u] ← rec
        end
    end
    color[rec] ← BLACK
end
```

$O(|V|)$

$O(?)$

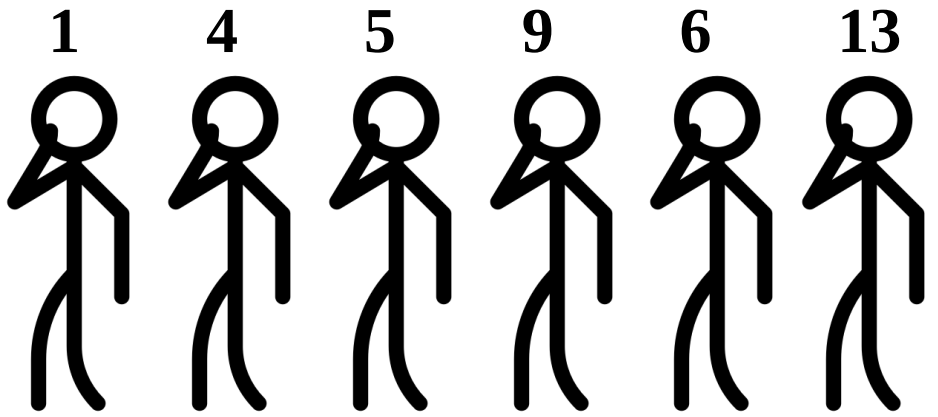
$O(|V|^2)$

数据结构加速最小值查询

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列

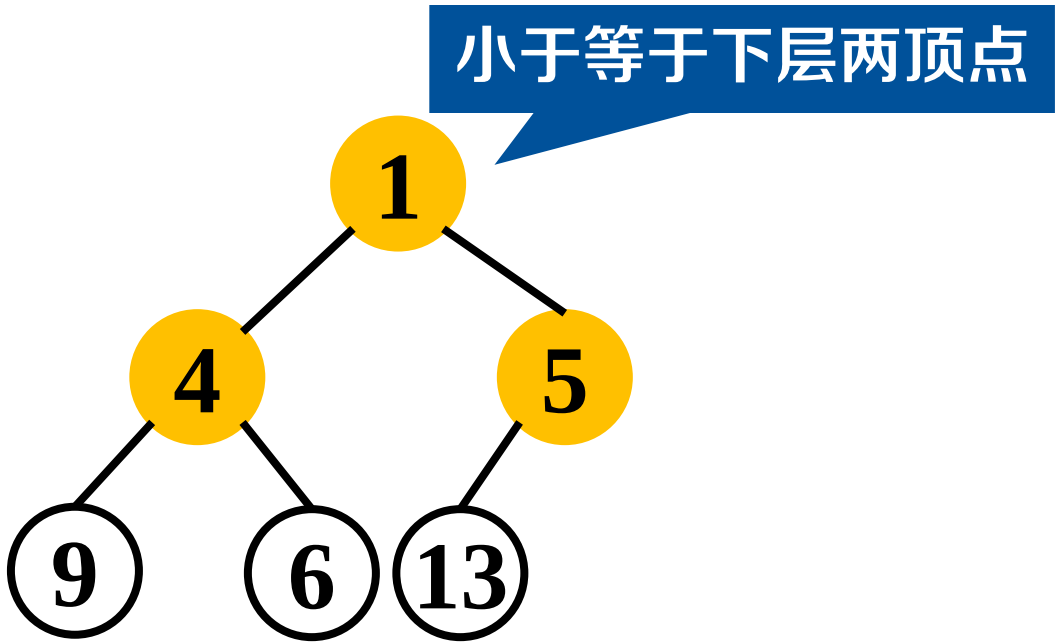


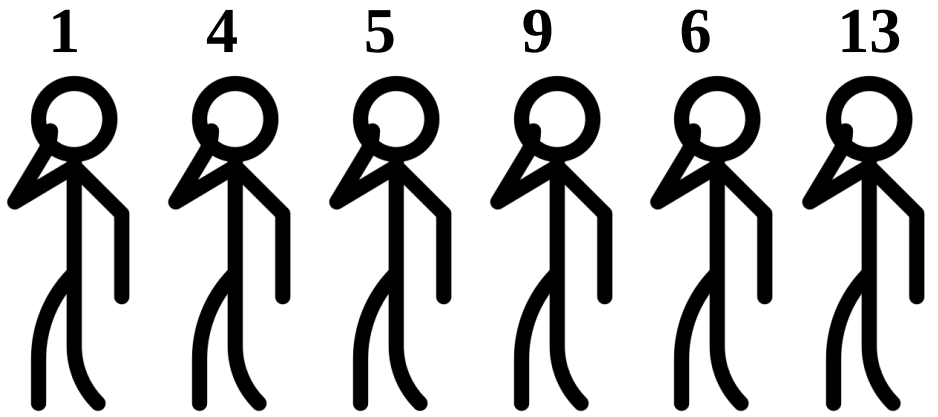
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列



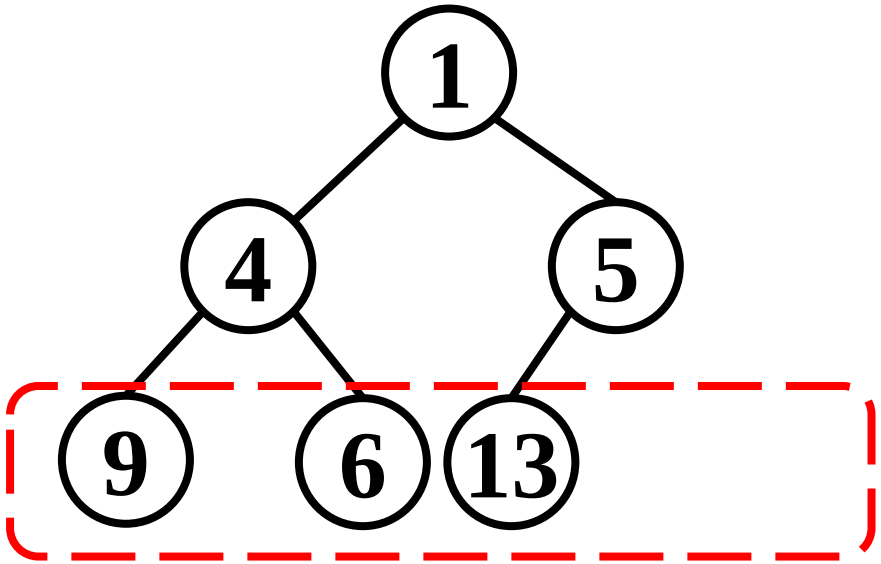


优先队列Q

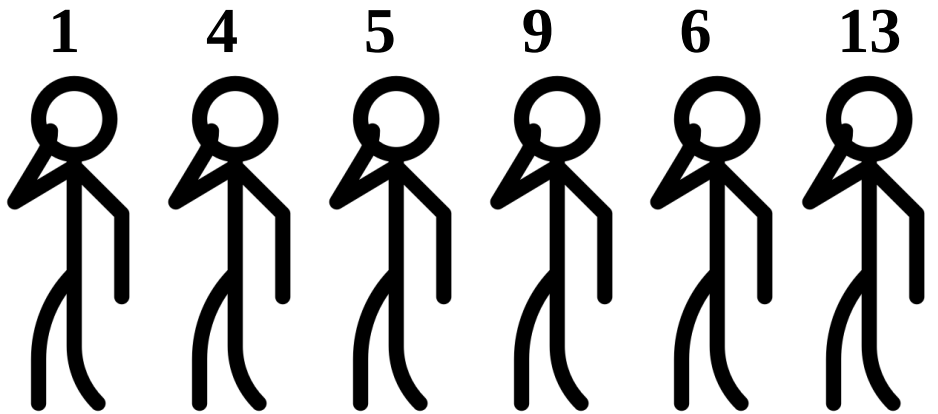
数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列



除最底层，第h层有2^{h-1}个顶点

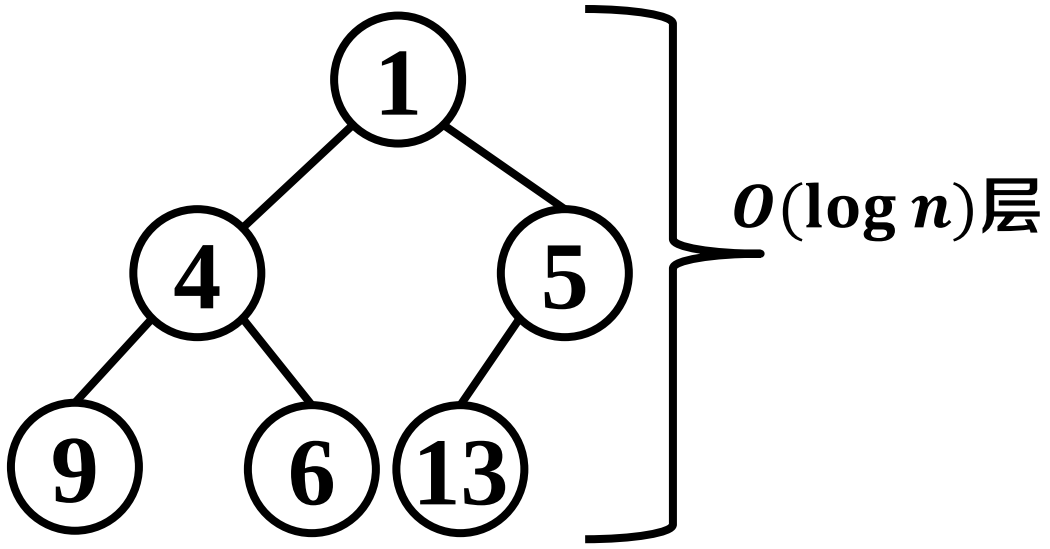


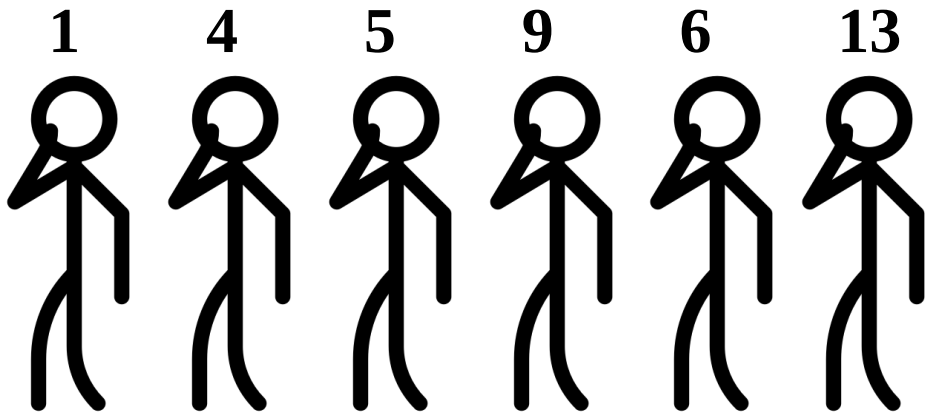
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列



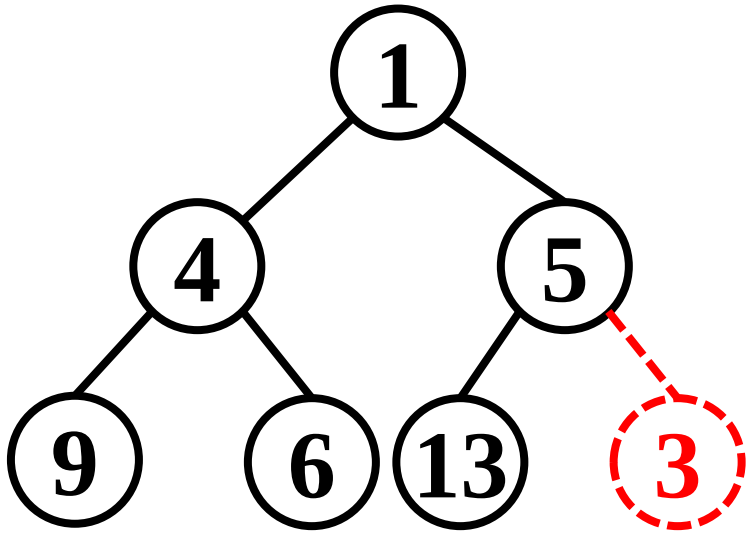


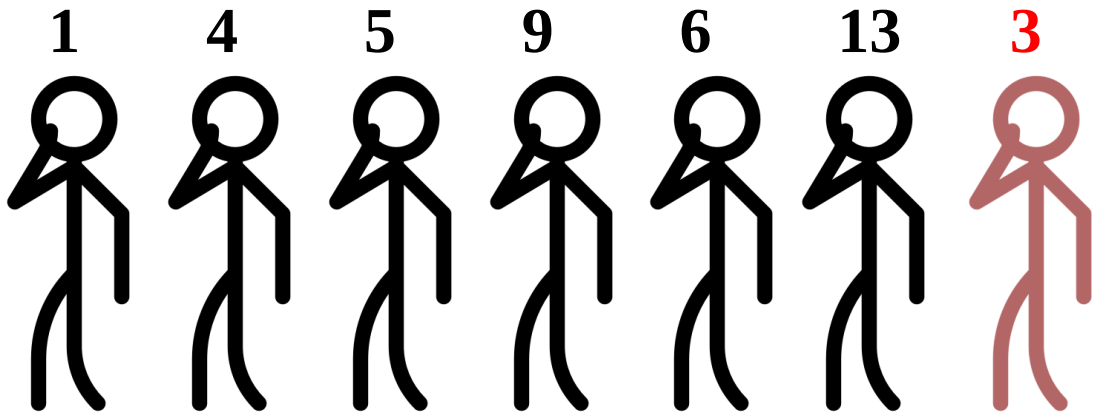
除最底层，第h层有2^{h-1}个顶点

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$



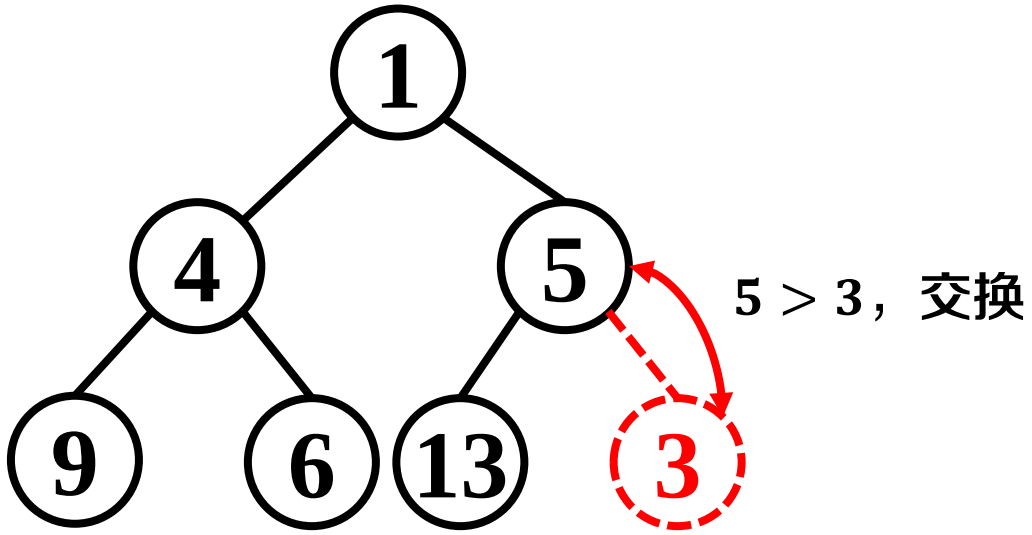


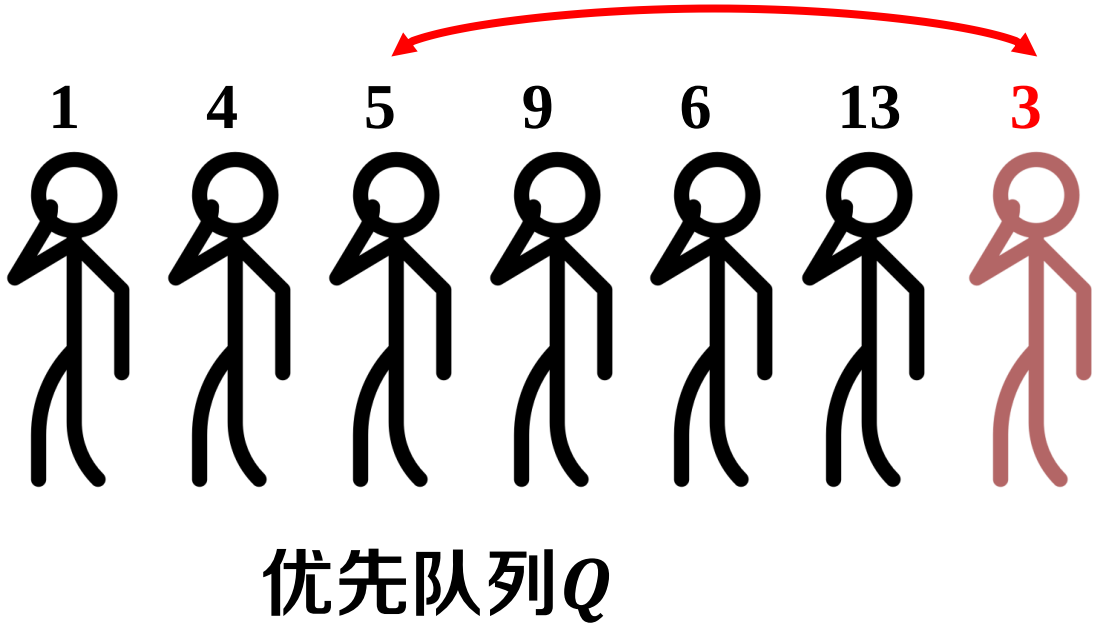
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$

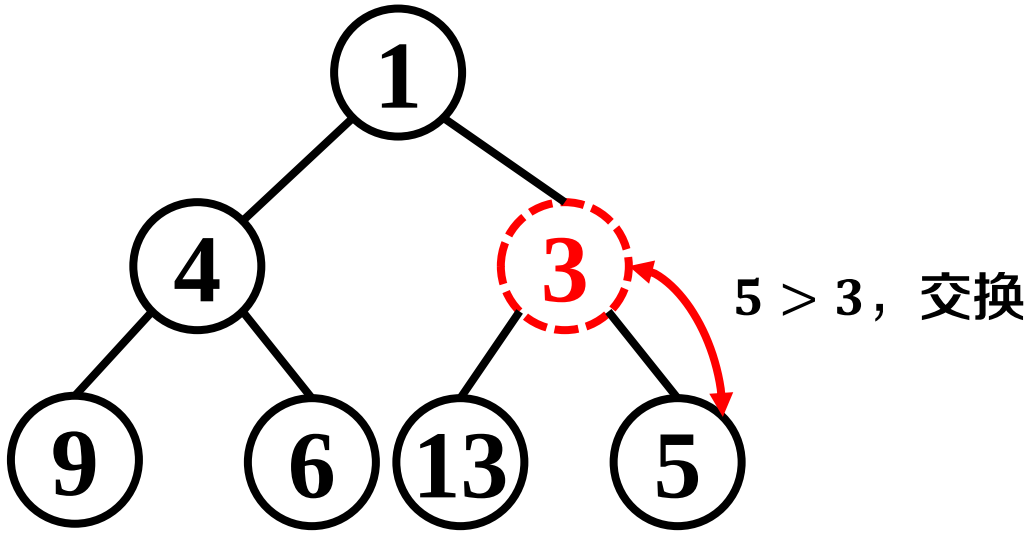


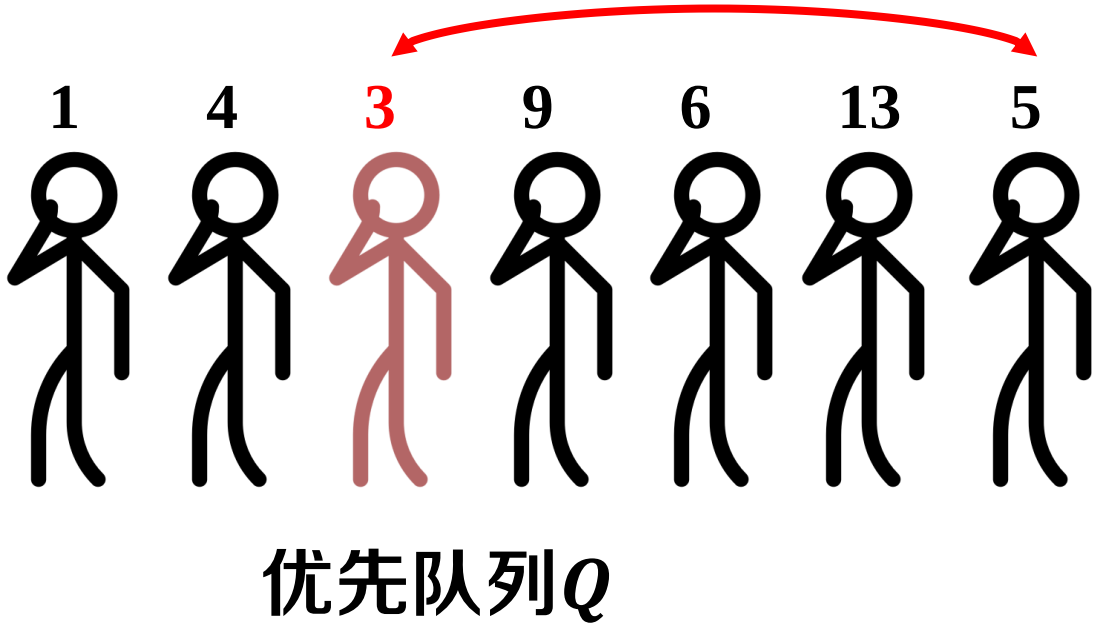


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$

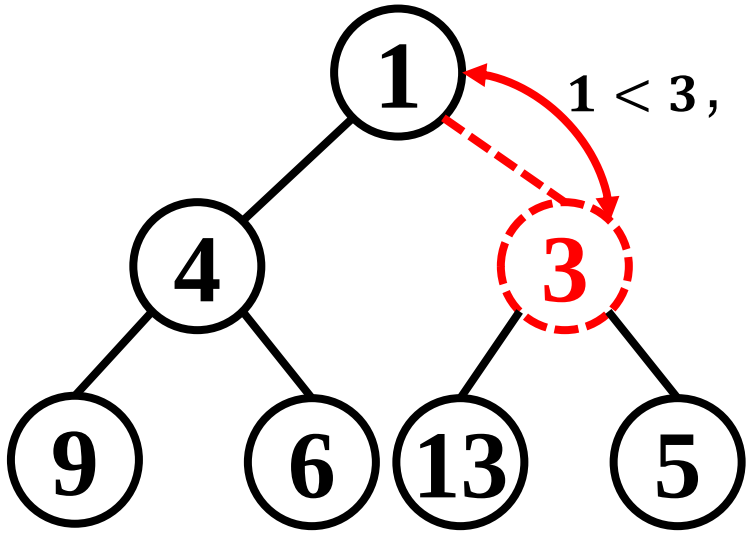


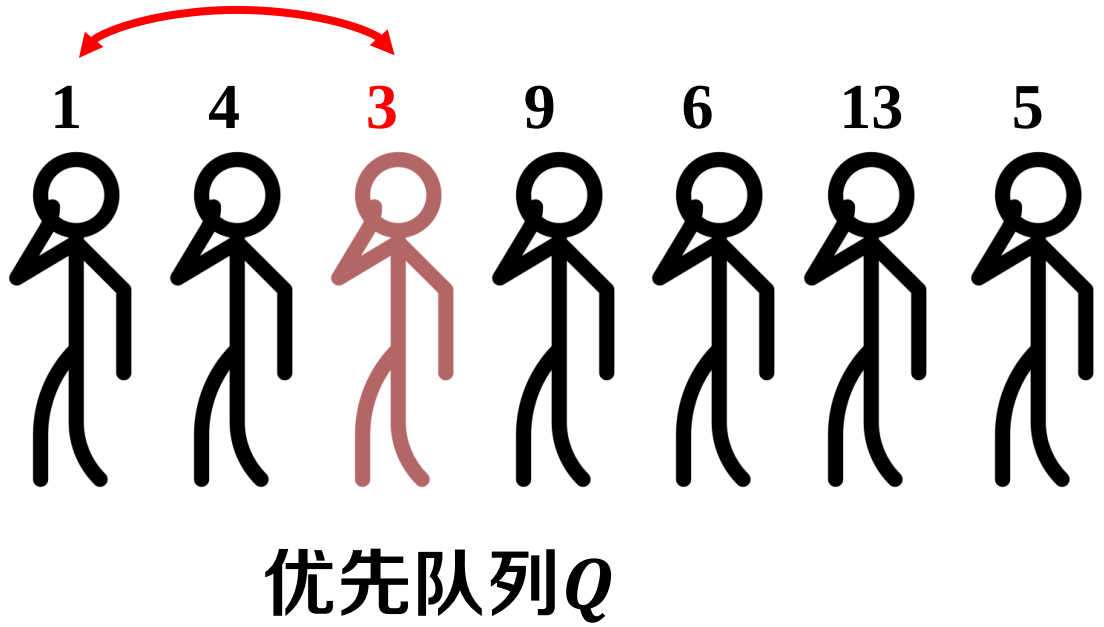


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$

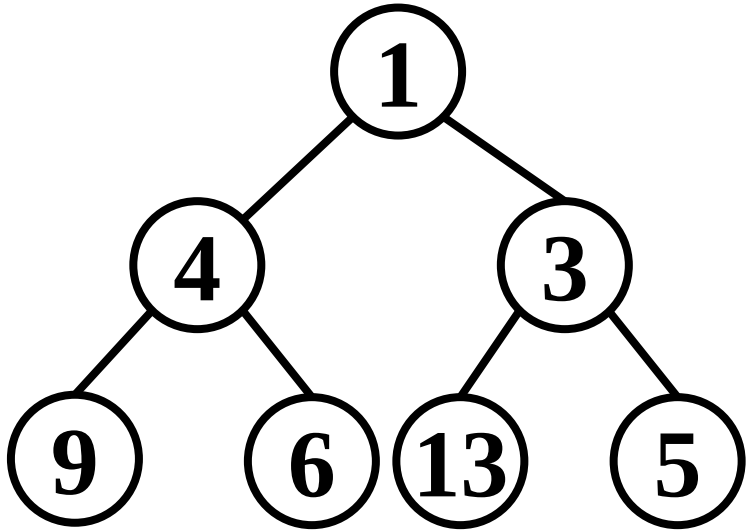


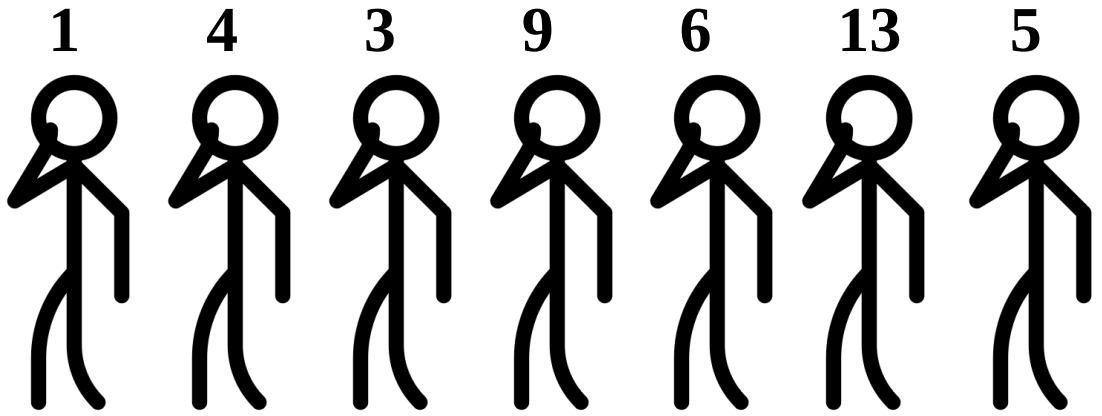


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$



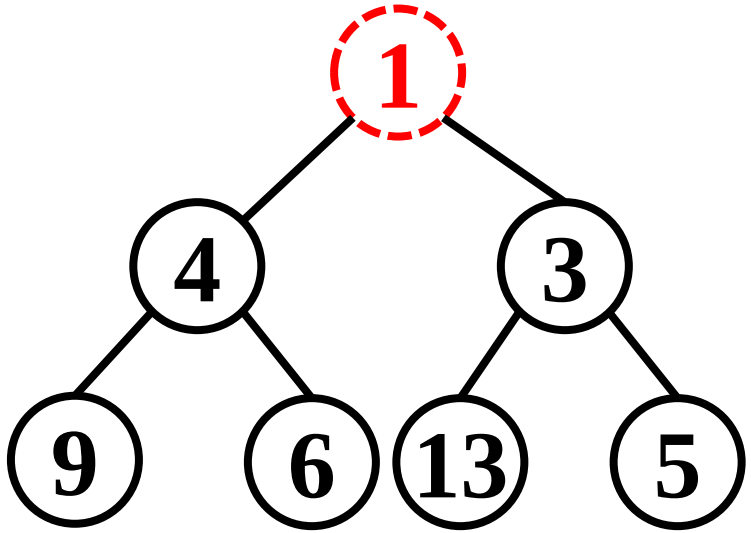


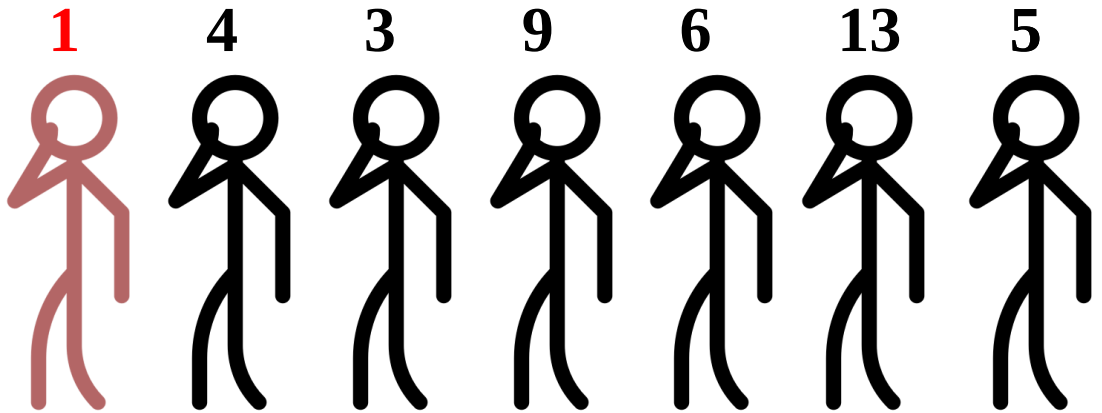
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$



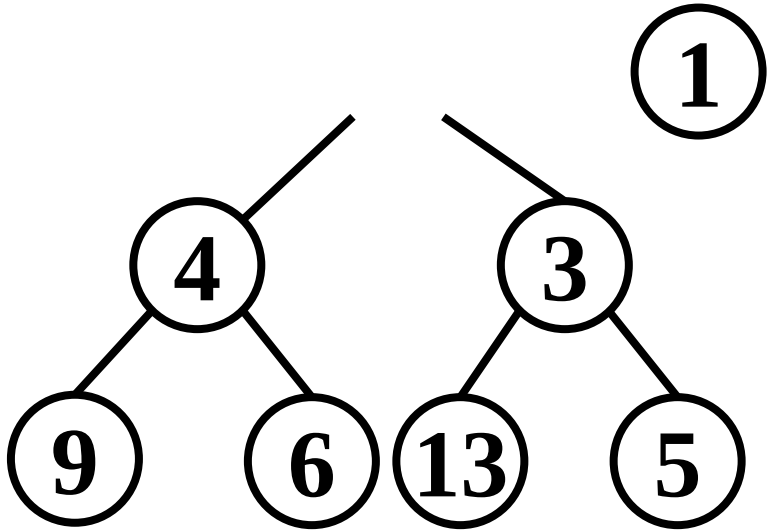


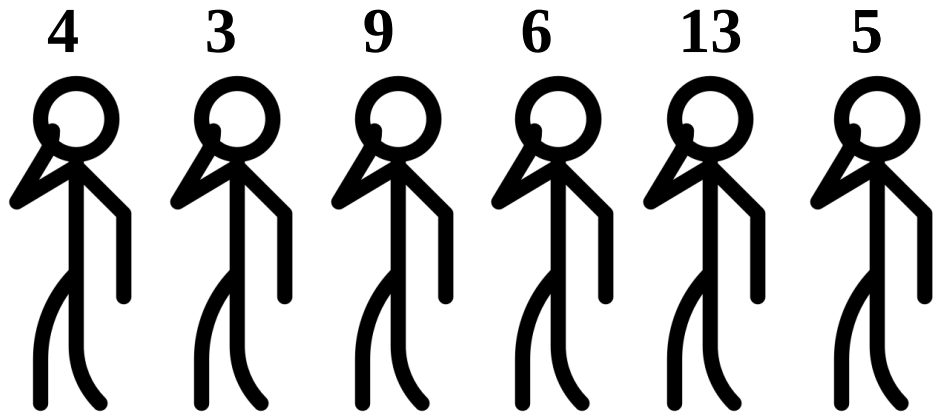
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$



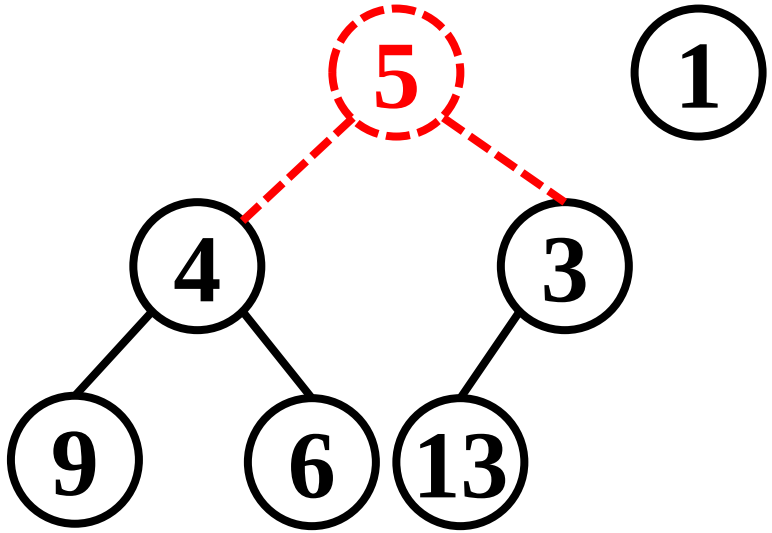


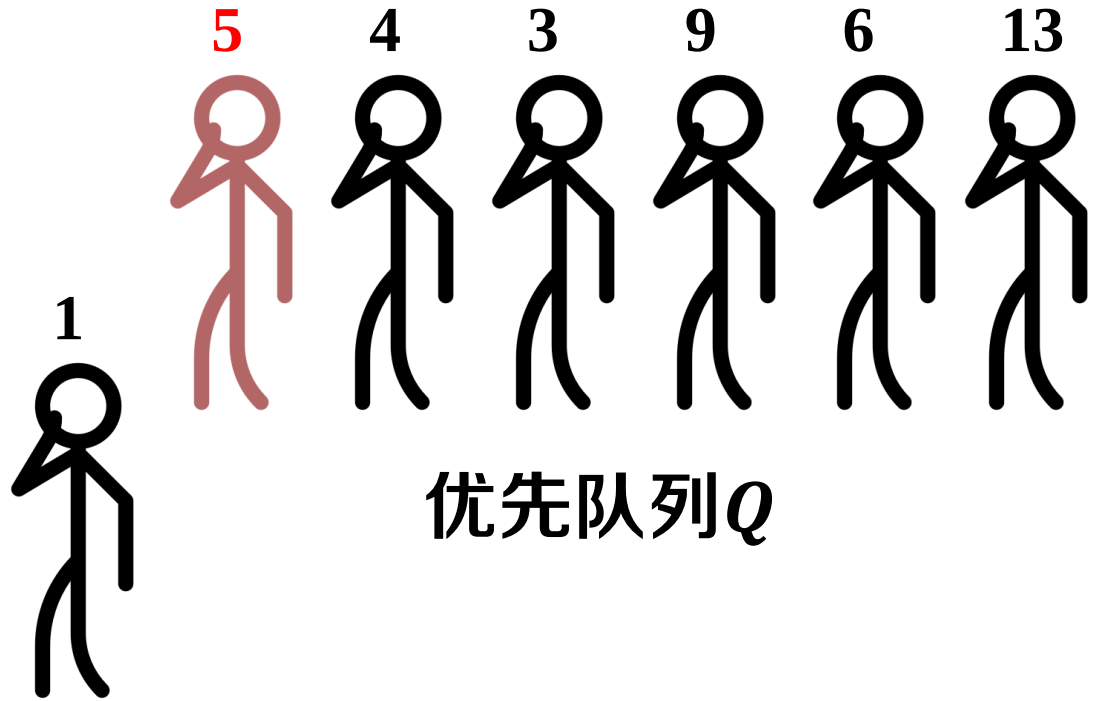
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$

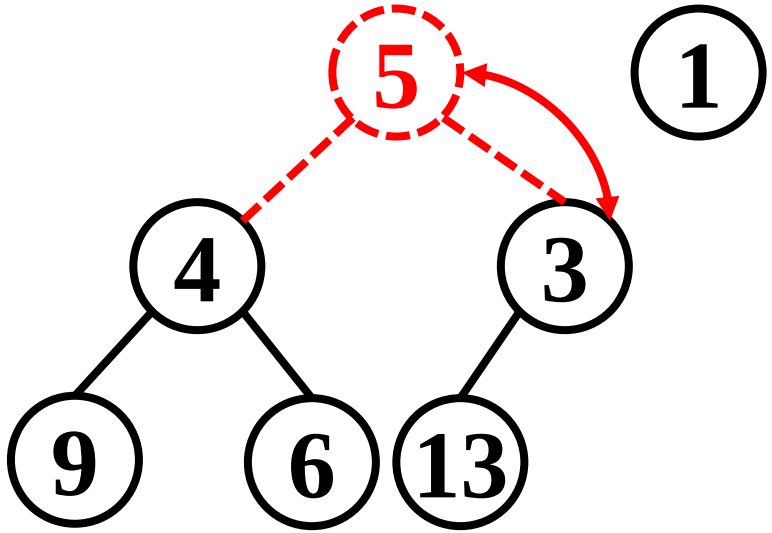


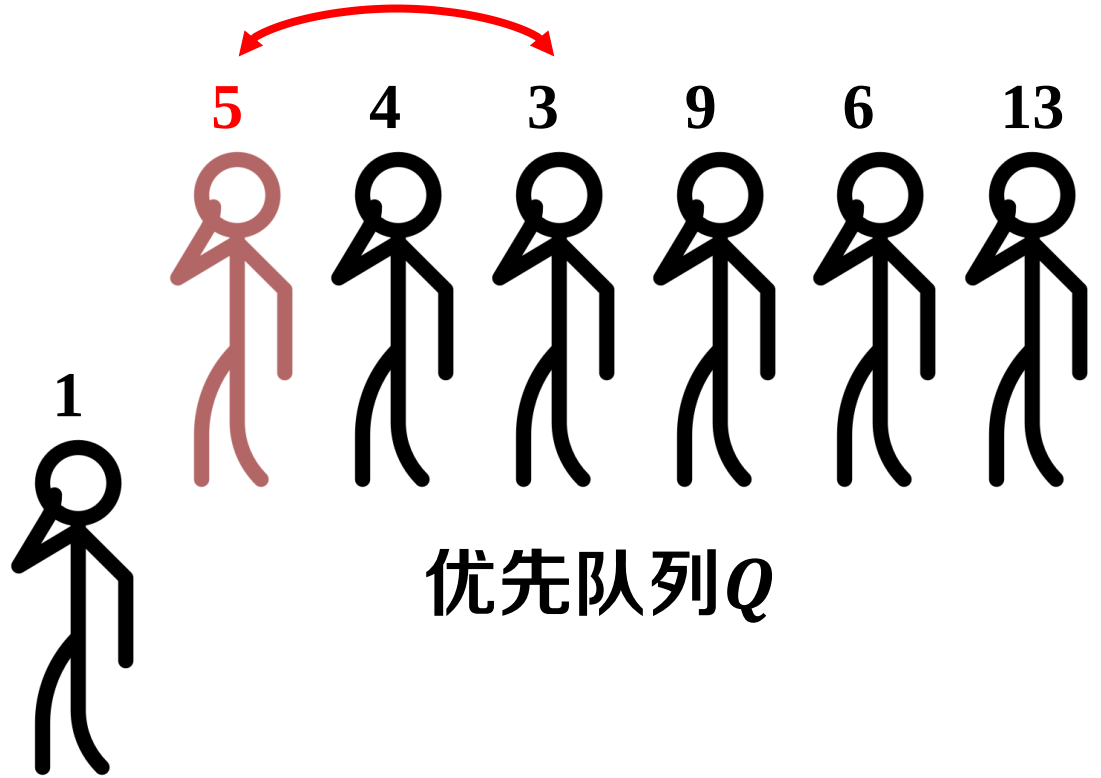


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$

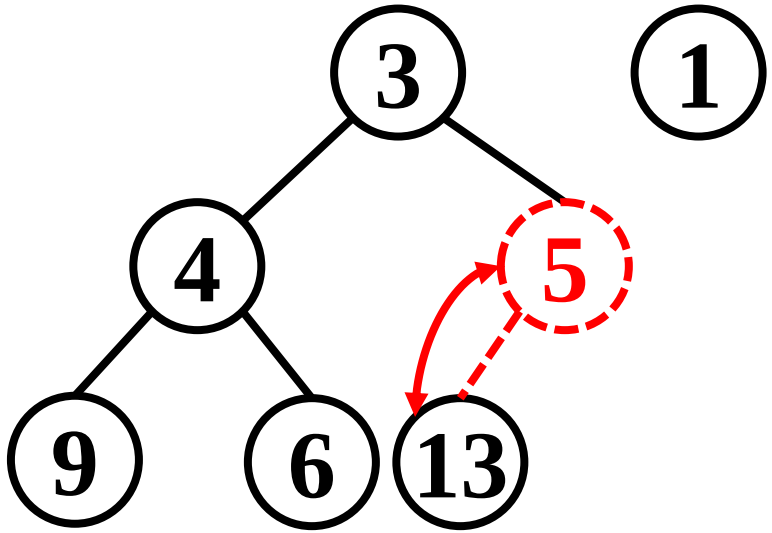


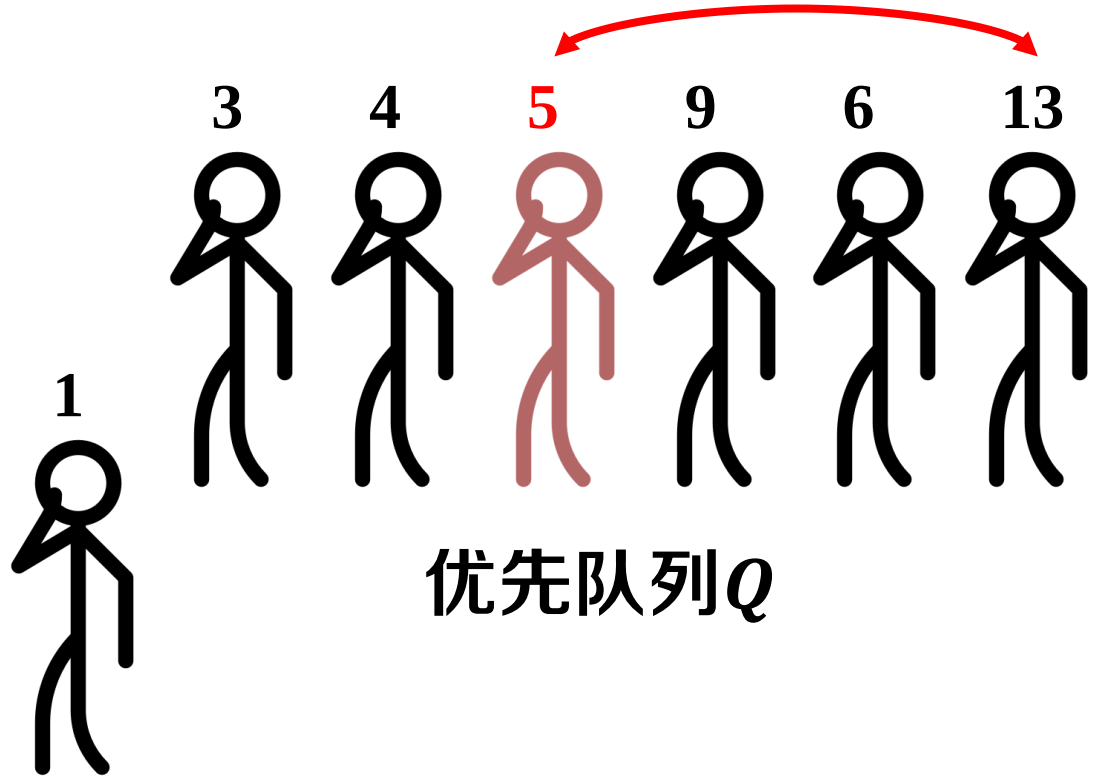


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$

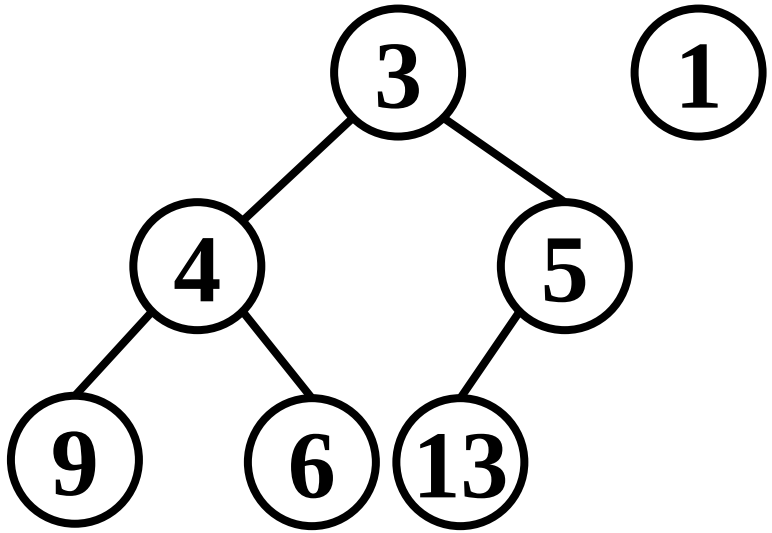


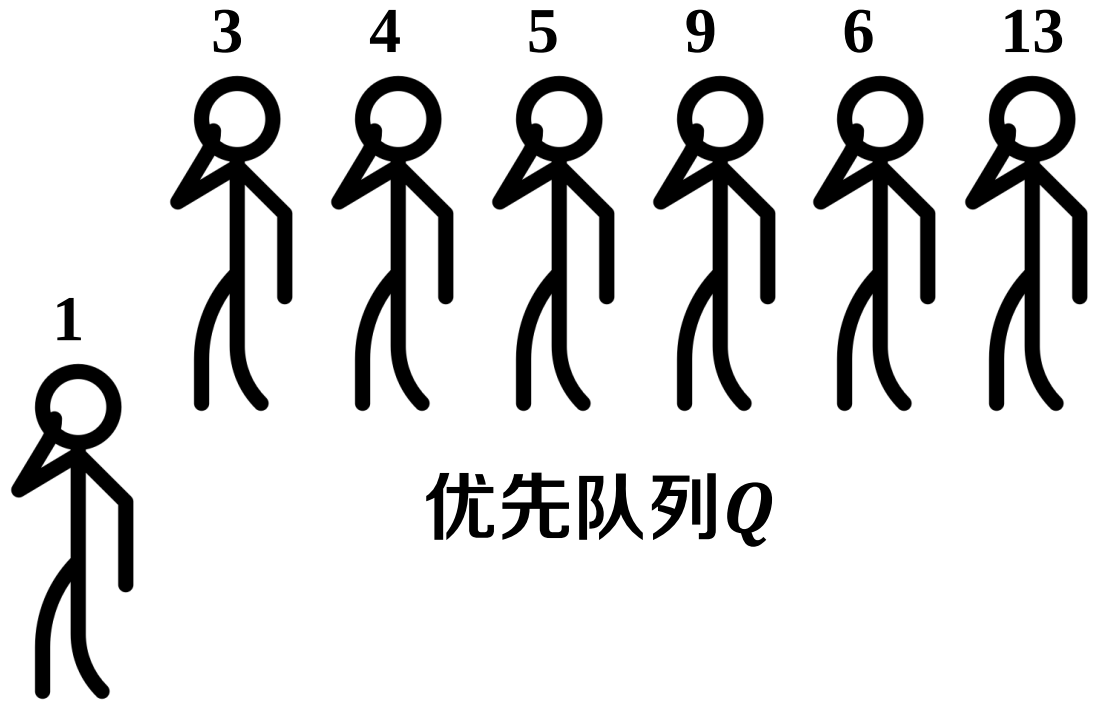


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$

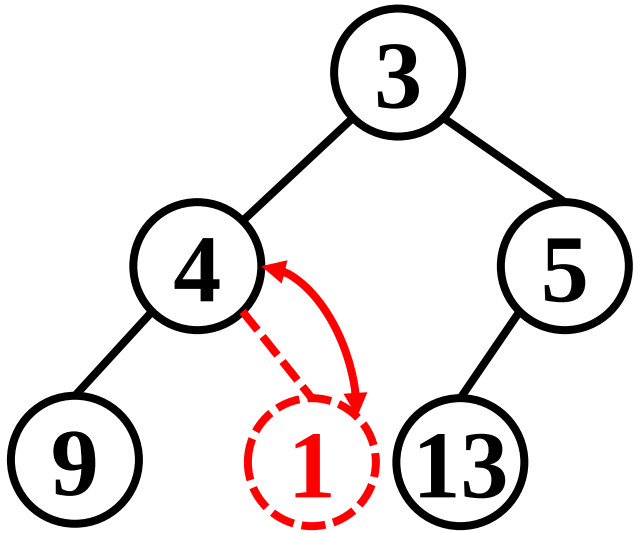


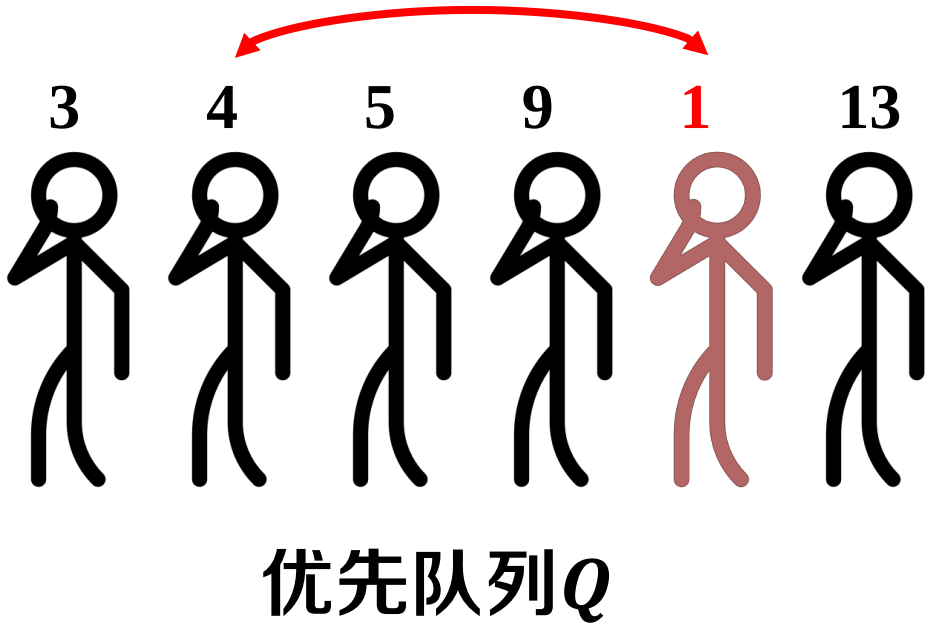


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$
  - $Q.DecreaseKey()$

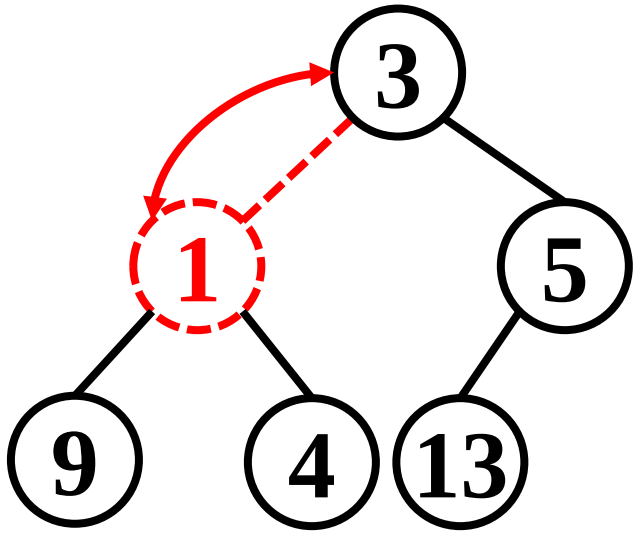


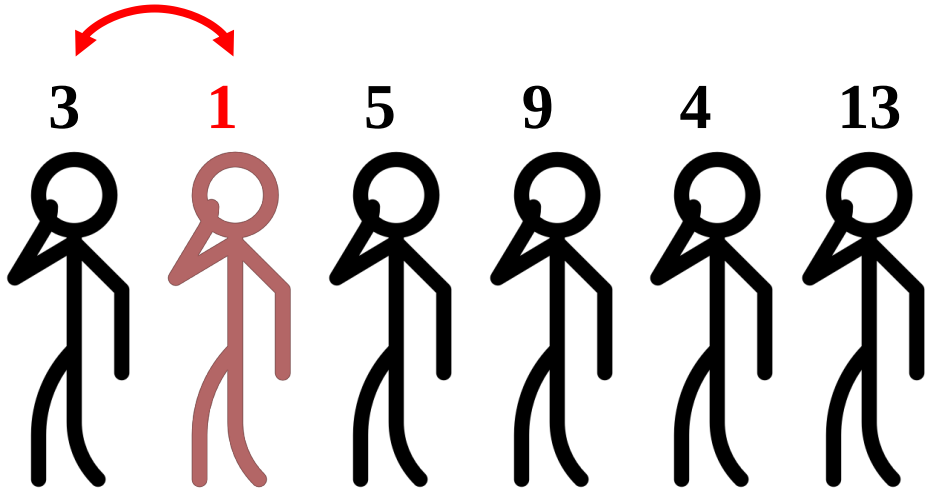


数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$
  - $Q.DecreaseKey()$



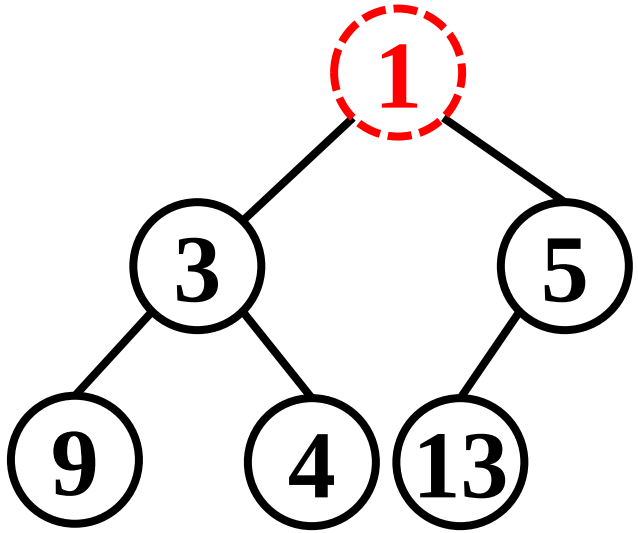


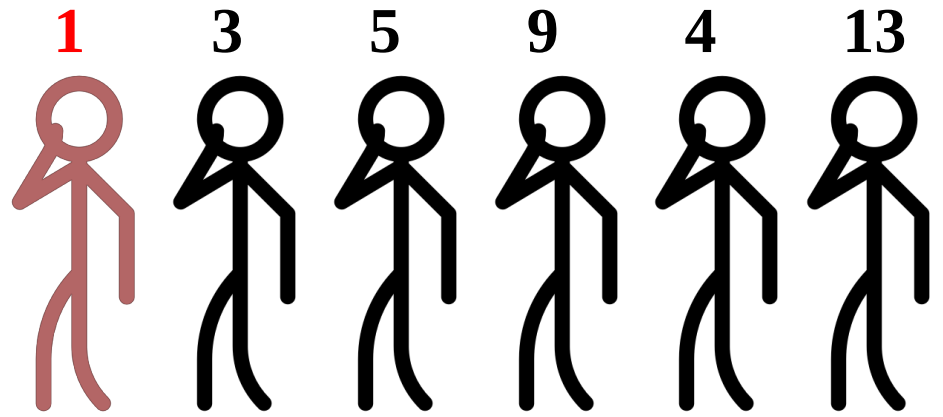
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$
  - $Q.DecreaseKey()$



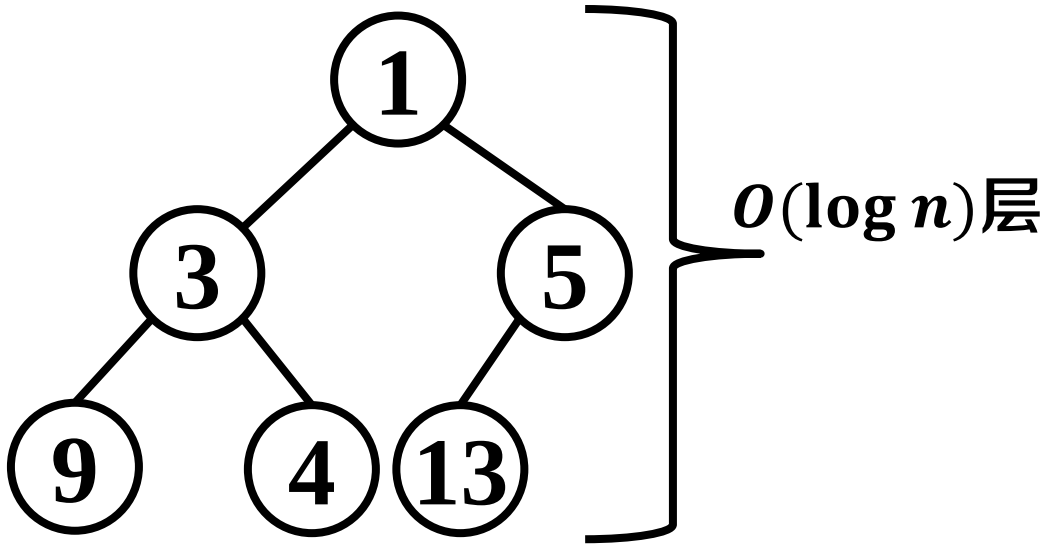


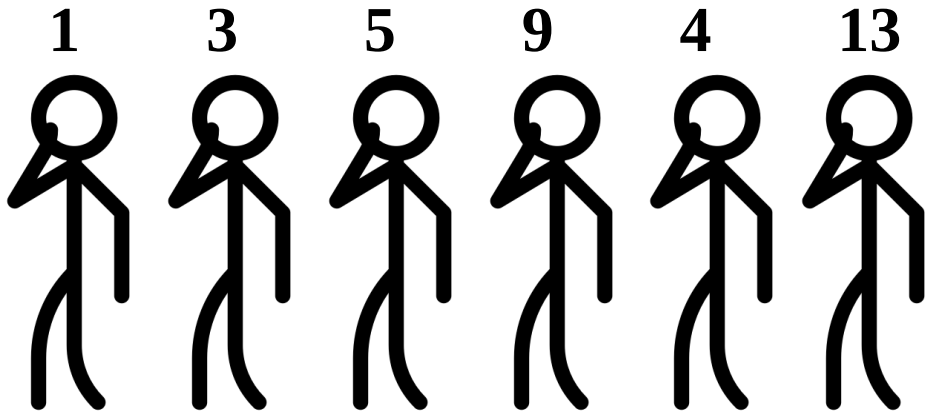
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$
  - $Q.ExtractMin()$
  - $Q.DecreaseKey()$



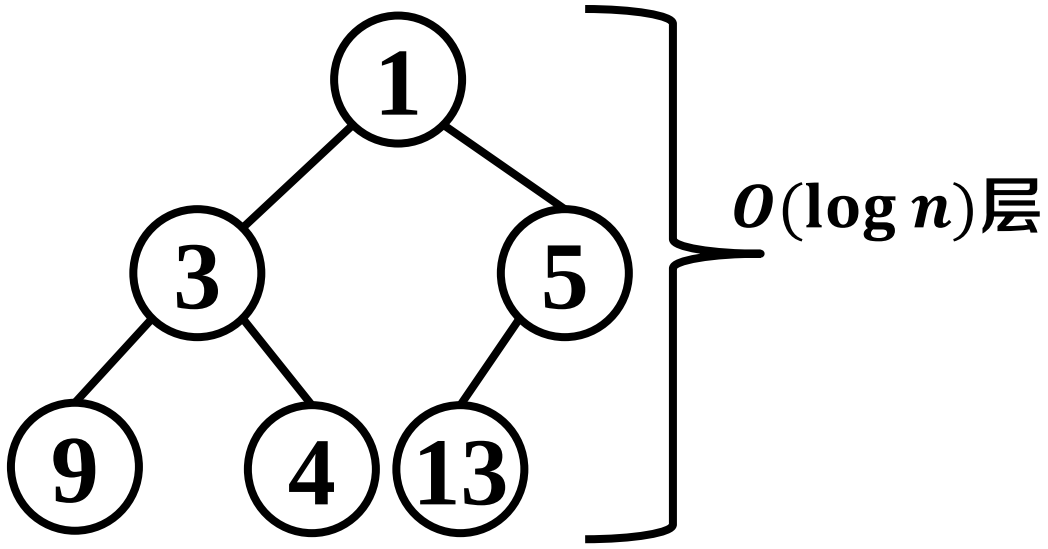


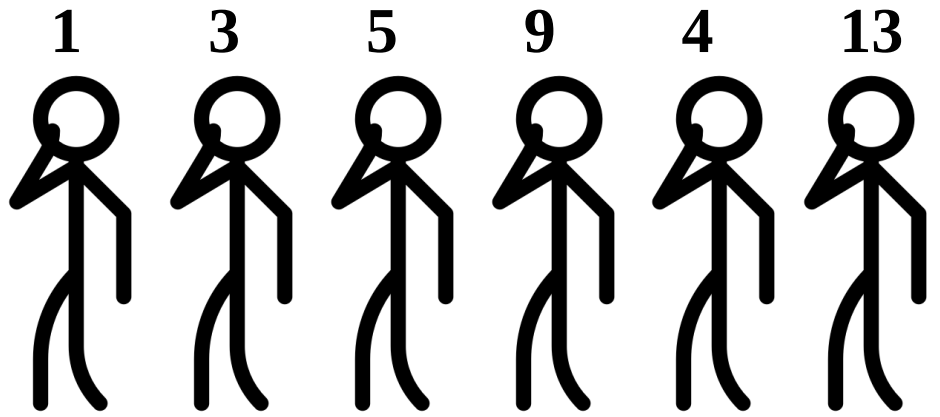
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.ExtractMin()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.DecreaseKey()$ 时间复杂度$O(\log n)$



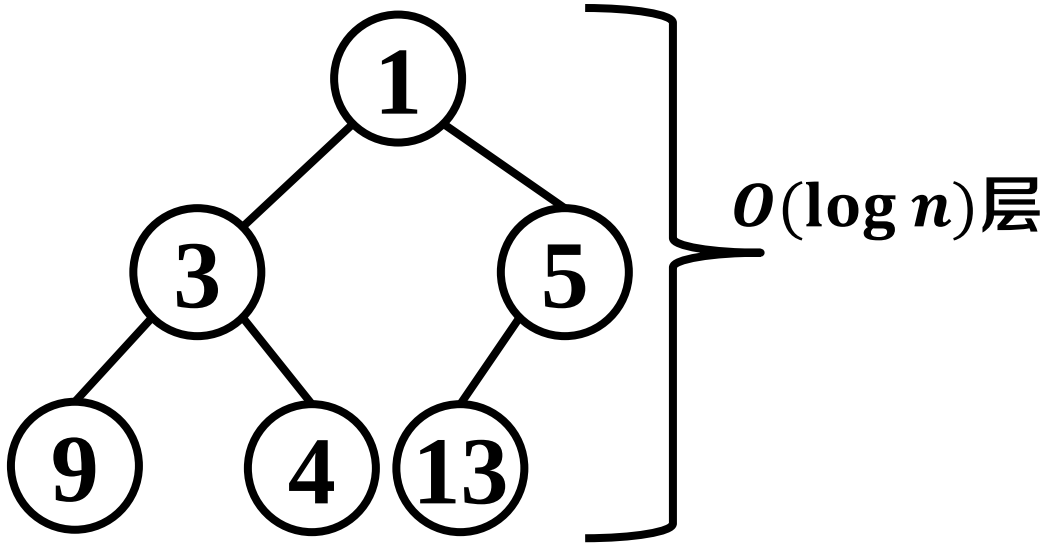


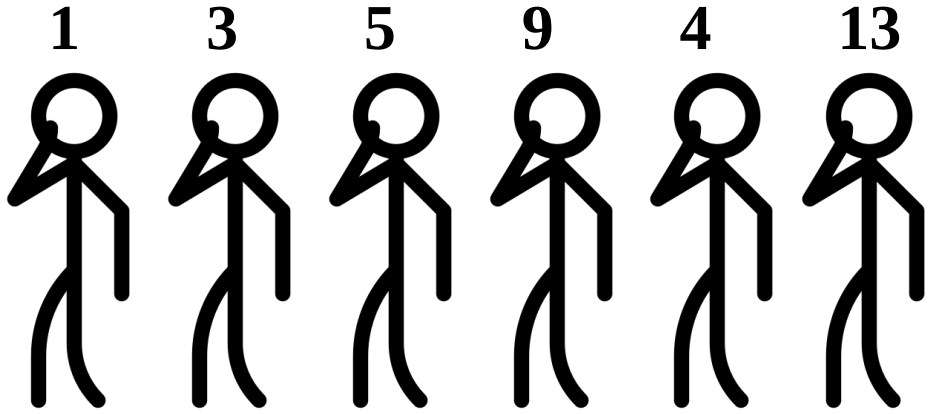
优先队列Q

数据结构：优先队列

优先队列

- 队列中每个元素有一个关键字，依据关键字大小离开队列
- 通过二叉堆来实现优先队列
  - $Q.Insert()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.ExtractMin()$ 时间复杂度$O(\log n)$
  - $Q.DecreaseKey()$ 时间复杂度$O(\log n)$





优先队列Q

使用优先队列，高效查找的安全边

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ **do**
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

初始化辅助数组

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ **do**
    $color[u] \leftarrow WHITE$
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

选择任意起点

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ **do**
  $color[u] \leftarrow WHITE$
  $dist[u] \leftarrow \infty$
  $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

初始化优先队列

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

依次添加其他顶点

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

选择安全边

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

更新距离数组，调整优先队列

伪代码

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

标记顶点处理完成

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

输入: 图$G =< V, E, W >$
输出: 最小生成树T
新建一维数组$color[1..|V|]$, $dist[1..|V|]$, $pred[1..|V|]$
新建空优先队列Q
//初始化
for $u \in V$ do
    $color[u] \leftarrow WHITE$
    $dist[u] \leftarrow \infty$
    $pred[u] \leftarrow NULL$
end
$dist[1] \leftarrow 0$
$Q.Insert(V, dist)$

$O(|V|)$

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()                                  ---------- O(log|V|)
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))                 ---------- O(log|V|)
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

$O(\log|V|)$

$O(\deg(u)\log|V|)$

$O(\log|V|)$

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

$O(\log|V|)$

$O(|V|\log|V|)$

$O(\deg(u)\log|V|)$

$O(\log|V|)$

复杂度分析

- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

$O(\log|V|)$

$O(\deg(u)\log|V|)$

$O(|V|\log|V|)$

$O(|E|\log|V|)$

$$\sum_{u\in V}\deg(u) = 2|E|$$

复杂度分析

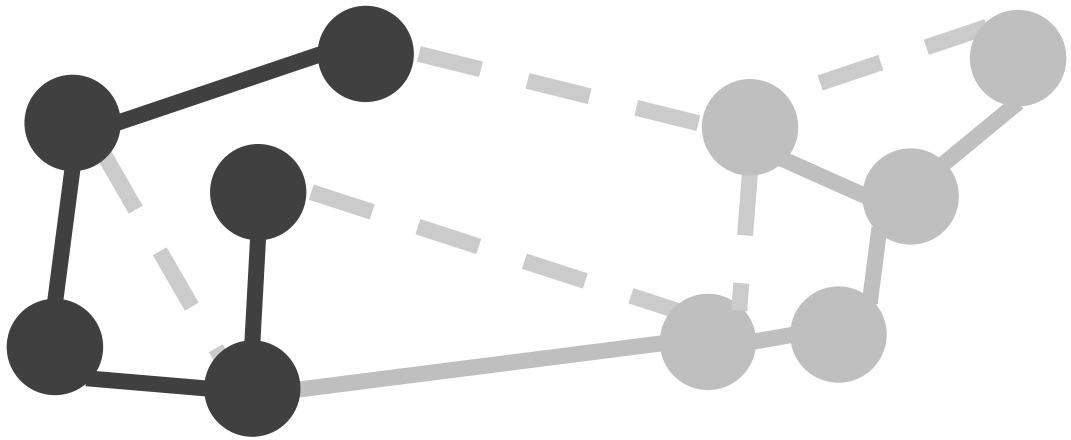
- **MST-Prim-PriQueue(G)**

```
//执行最小生成树算法
while 优先队列Q非空 do
    v ← Q.ExtractMin()
    for u ∈ G.Adj[v] do
        if color[u] = WHITE and w(v,u) < dist[u] then
            dist[u] ← w(v,u)
            pred[u] ← v
            Q.DecreaseKey((u, dist[u]))
        end
    end
    color[v] ← BLACK
end
```

$O(|E| \cdot \log|V|)$

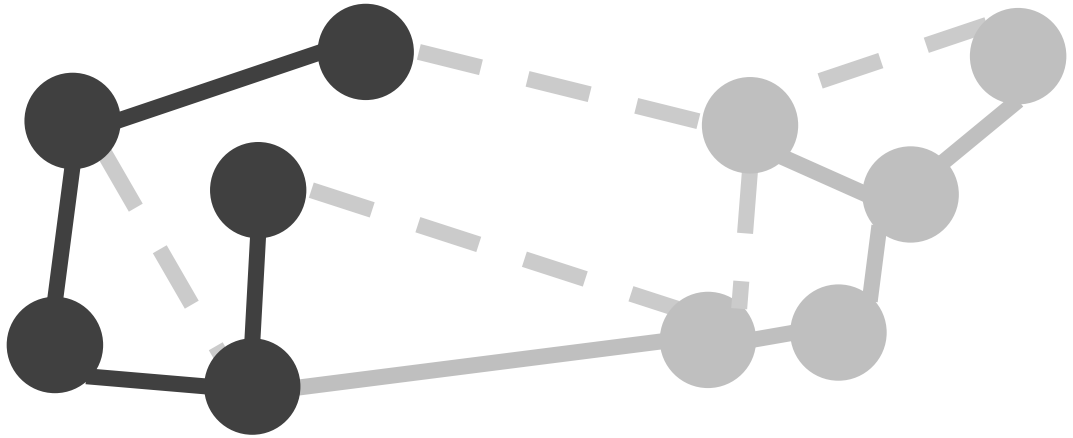
小结

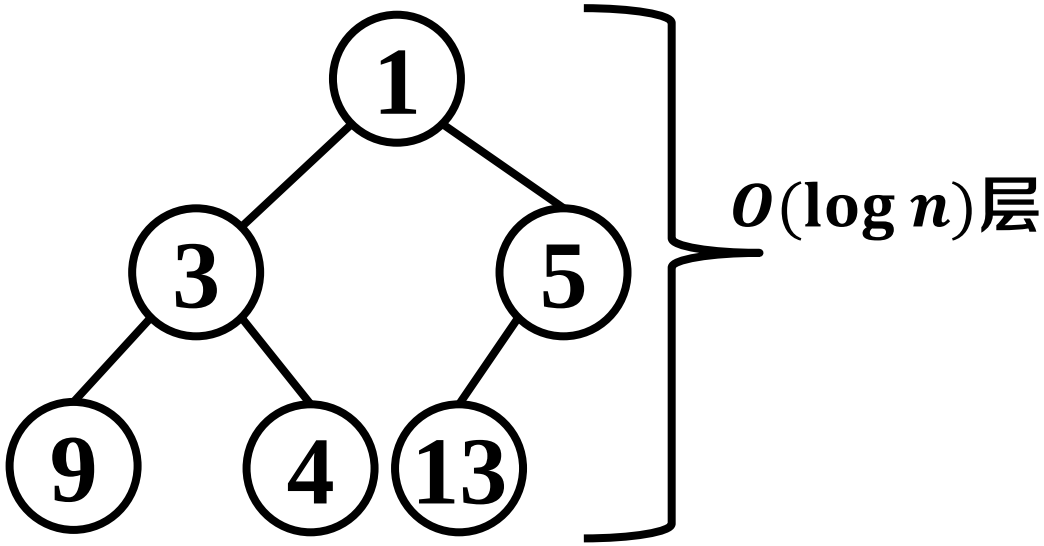
通用框架	Prim算法
判断是否成环	保持树的结构



小结

通用框架	Prim算法
判断是否成环	保持树的结构
高效寻找轻边	使用优先队列





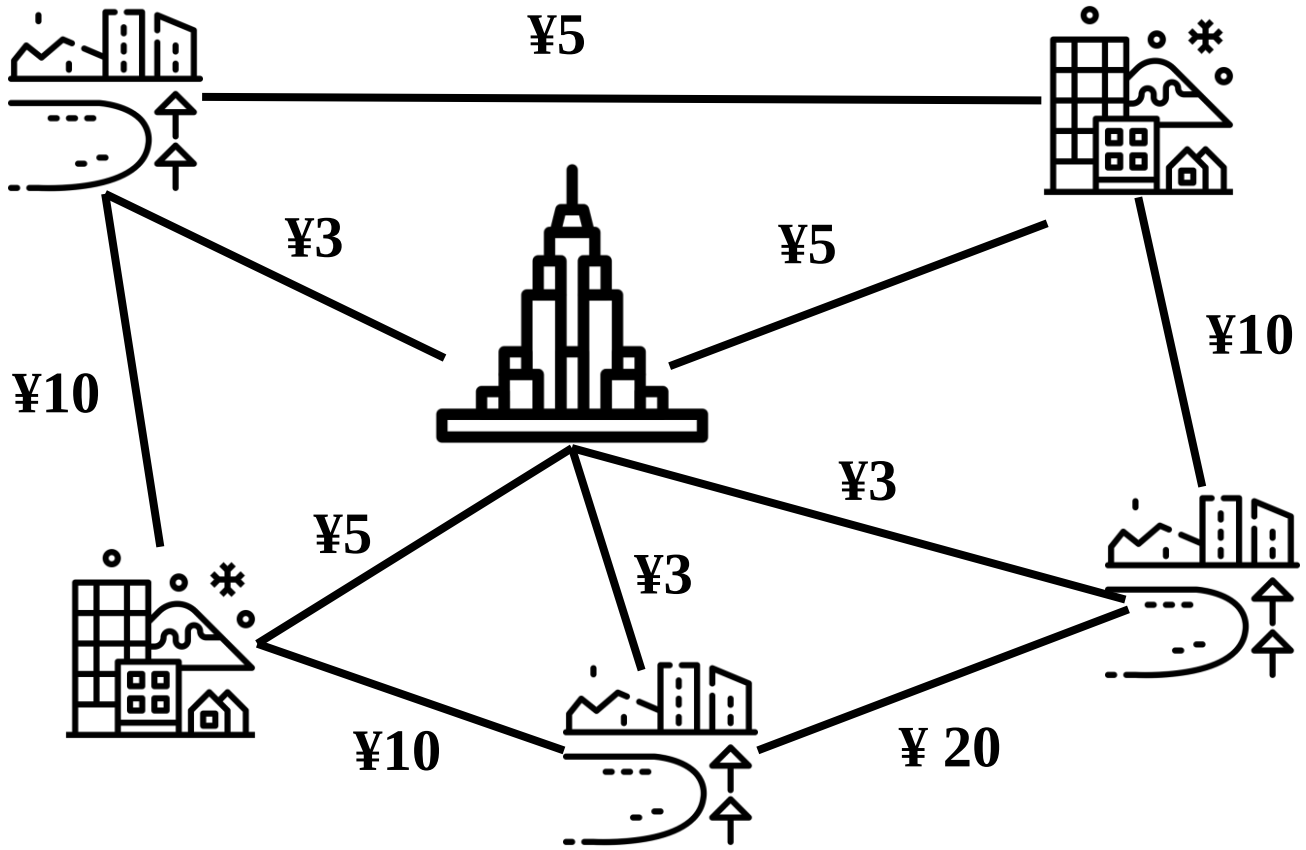
图算法篇：最小生成树之Kruskal算法

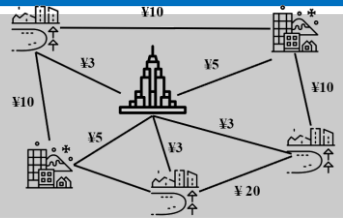
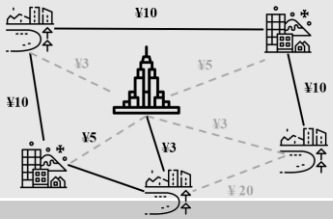
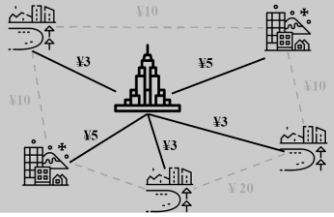
提纲

- 问题的回顾
- 算法与实例
- 正确性证明
- 不相交集合
- 复杂度分析

背景回顾：道路修建

- 需要修建道路连通城市，各道路花费不同



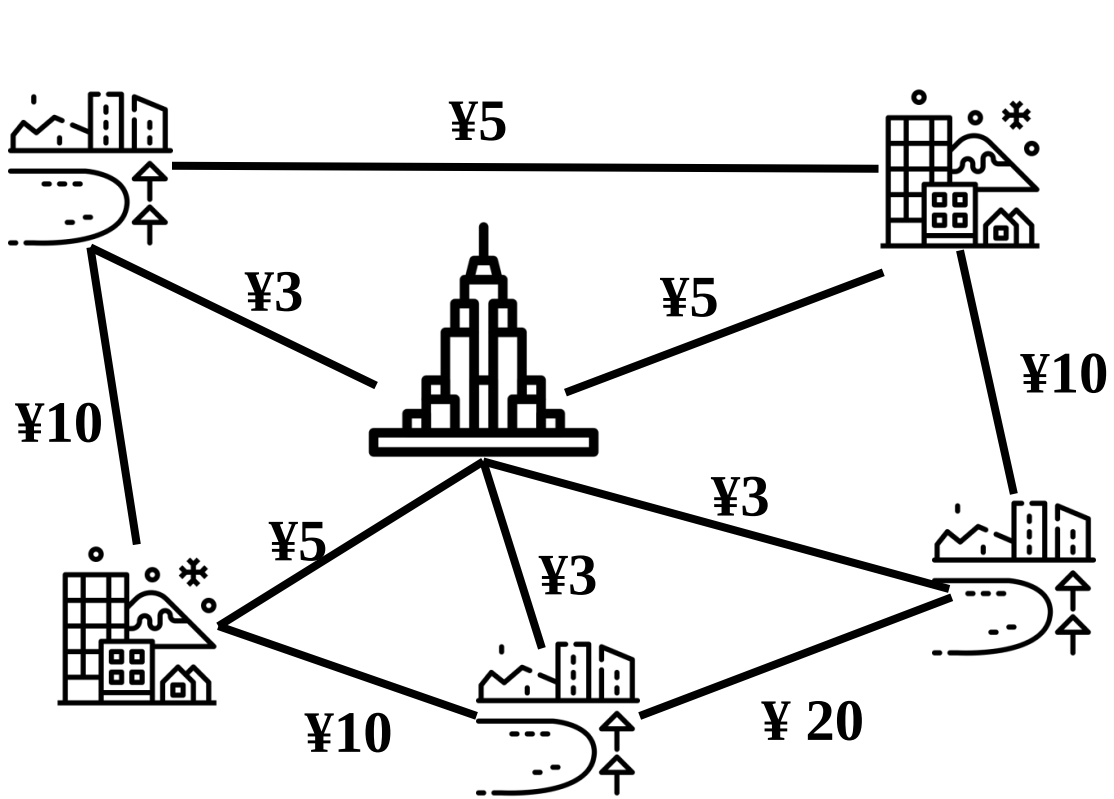
方案	花费
	¥74
	¥38
	¥19

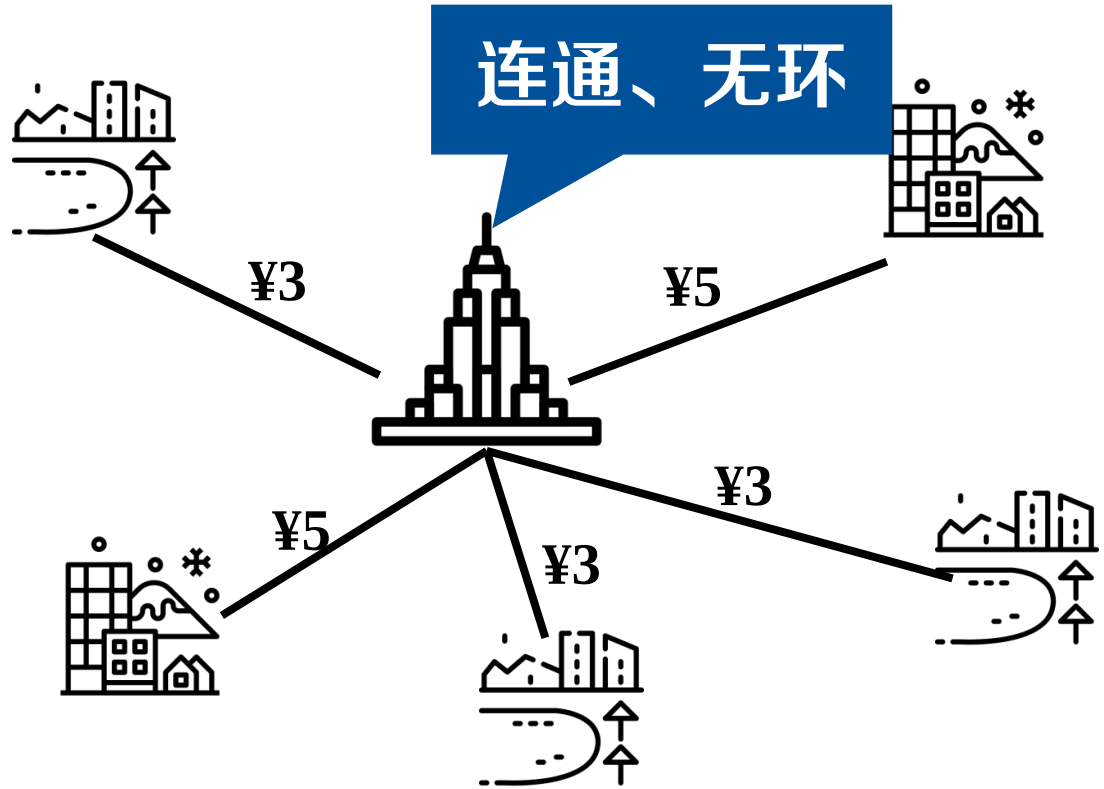
问题：连通各城市的最小花费是多少？

权重最小的连通生成子图

概念回顾：生成树

- 生成树(Spanning Tree)
  - 图$T' =< V', E' >$是无向图G的一个生成子图，并且是连通、无环路的(树)





问题：连通各城市的最小花费是多少？

权重最小的生成树

问题定义

最小生成树问题

Minimum Spanning Tree Problem

输入

- 连通无向图$G =< V, E, W >$, 其中$w(u, v) \in W$表示边(u, v)的权重

输出

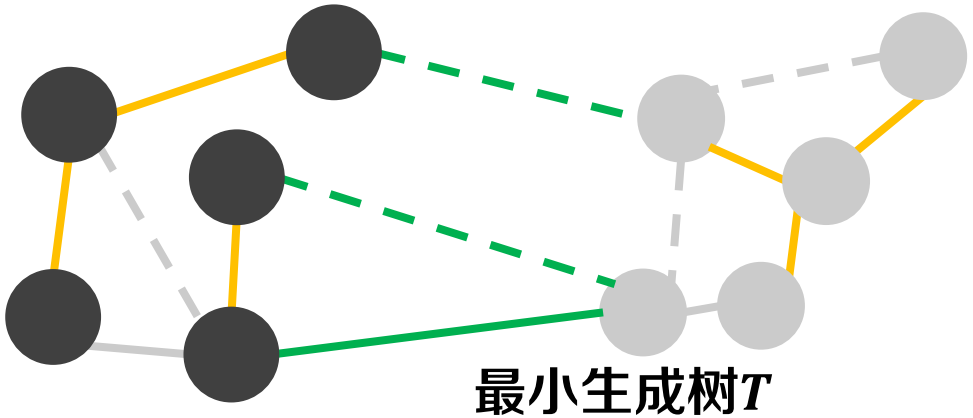
- 图G的最小生成树$T =< V_T, E_T >$

$$min \sum_{e \in E_T} w(e)$$ 优化目标

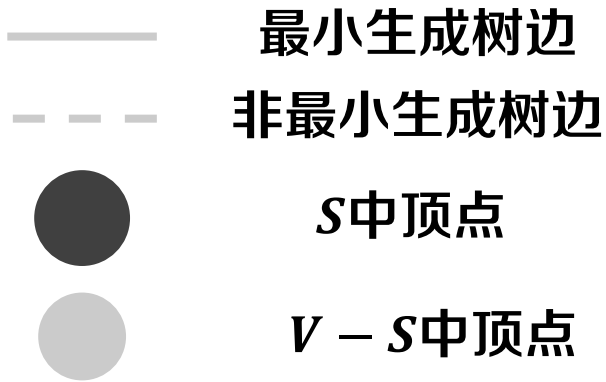
$$s.t. \quad V_T = V, E_T \subseteq E$$ 约束条件

框架回顾：相关概念

- 割(Cut)
  - 图$G =< V, E >$是一个连通无向图，割$(S, V-S)$将图G的顶点集V划分为两部分
- 横跨(Cross)
  - 给定割$(S, V-S)$和边(u, v)，$u \in S$，$v \in V-S$，称边(u, v)横跨割$(S, V-S)$
- 轻边(Light Edge)
  - 横跨割的所有边中，权重最小的称为横跨这个割的一条轻边
- 不妨害(Respect)
  - 如果一个边集A中没有边横跨某割，则称该割不妨害边集A

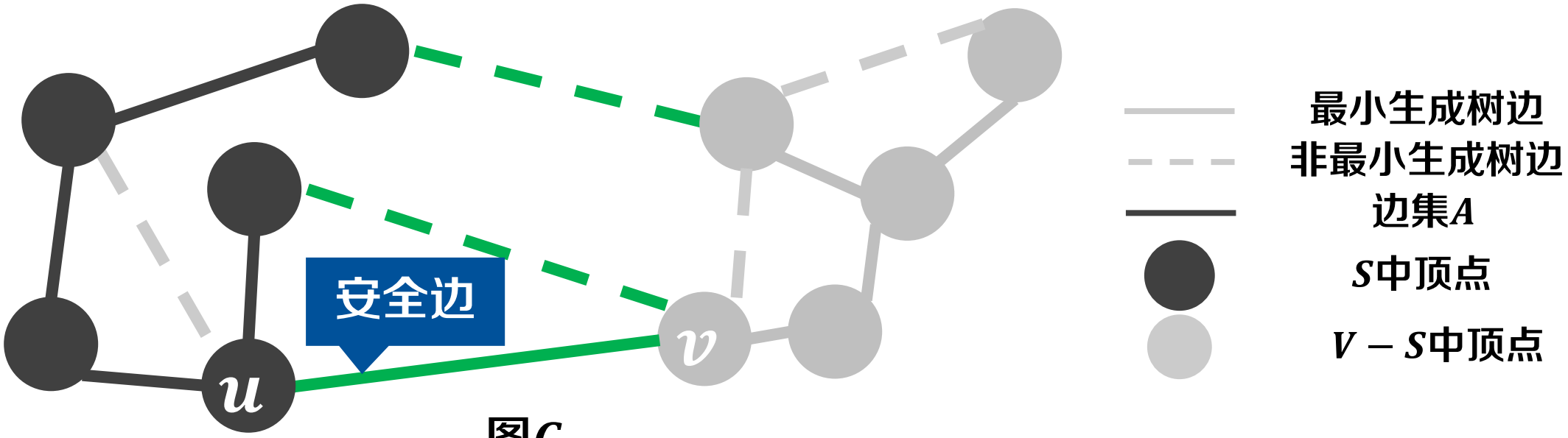


最小生成树T



框架回顾：安全边辨识定理

- 给定图$G =< V, E >$是一个带权的连通无向图，令A为边集E的一个子集，且A包含在图G的某棵最小生成树中
  - 若割$(S, V-S)$是图G中不妨害边集A的任意割，且(u, v)是横跨该割的轻边
  - 则对于边集A，边(u, v)是其安全边



图G

框架回顾：通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略？

- Prim算法
- Kruskal算法

框架回顾：通用框架

- 生成树是一个连通、无环的生成子图
  - 新建一个空边集A，边集A可逐步扩展为最小生成树
  - 每次向边集A中新增加一条边
    - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

添加一条轻边

问题：如何有效地实现此贪心策略？

Prim算法

Kruskal算法

提纲

问题的回顾

算法与实例

正确性证明

不相交集合

复杂度分析

Kruskal算法

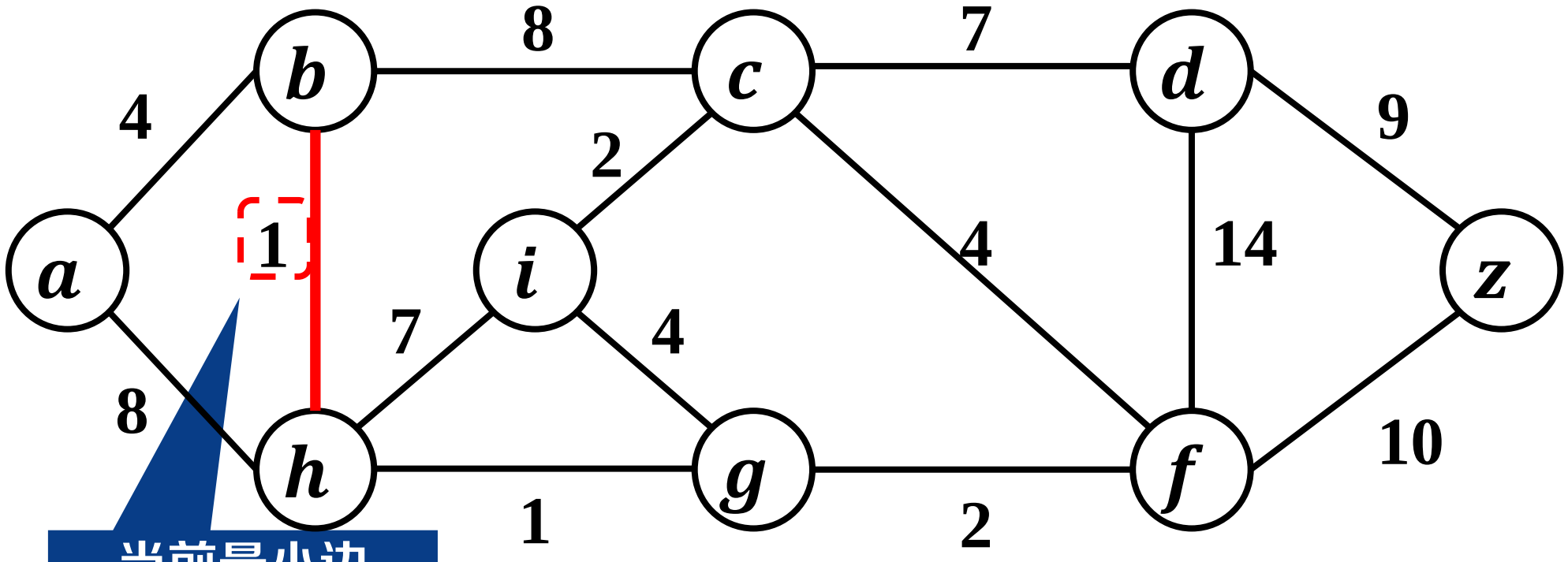
- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集

Kruskal算法

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边

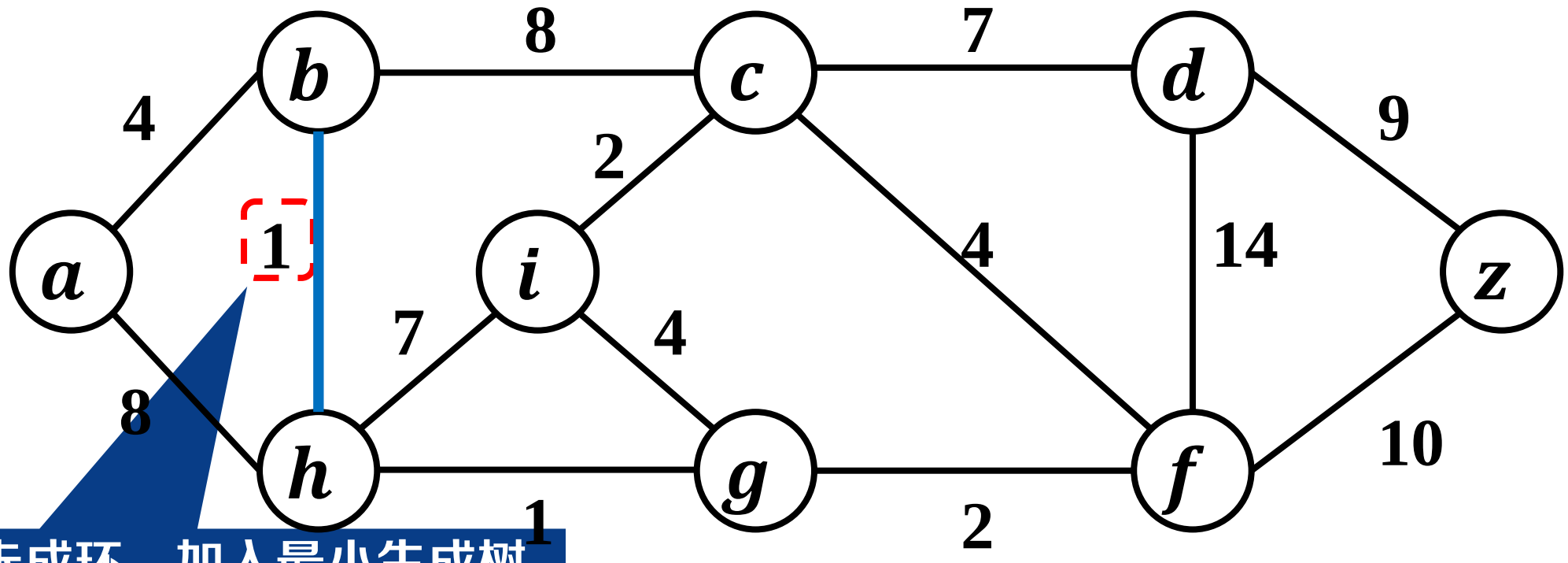
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



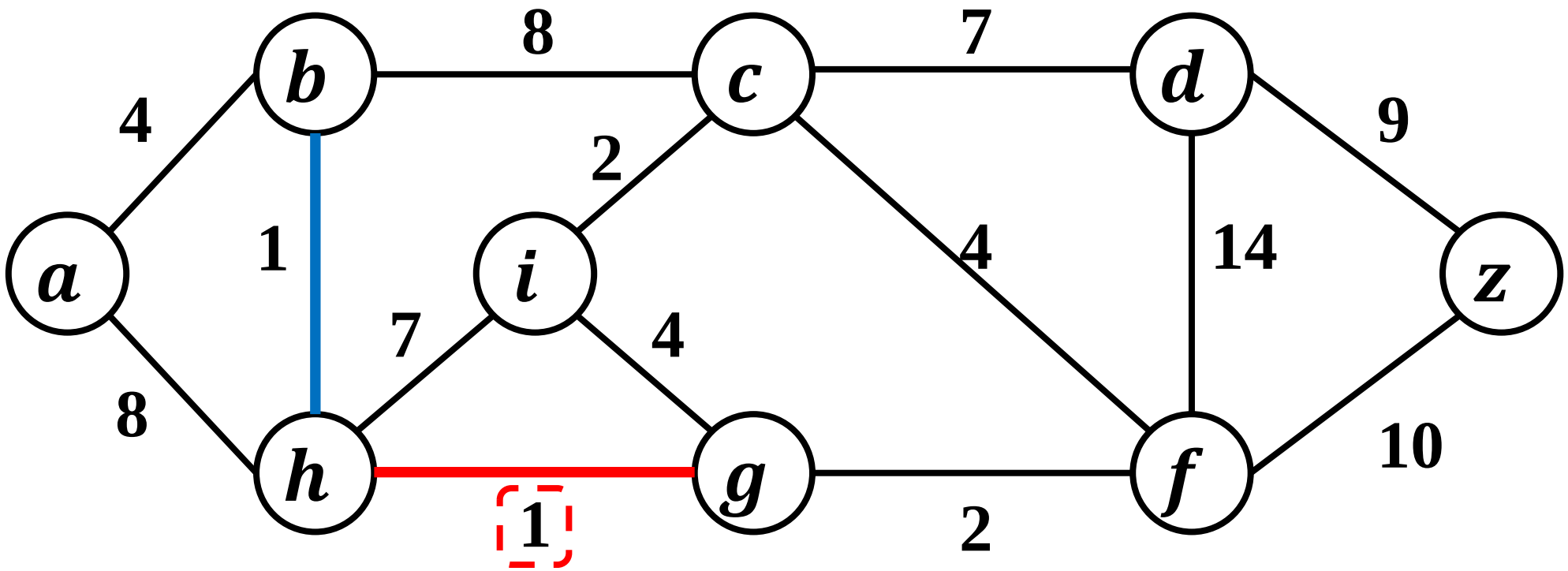
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



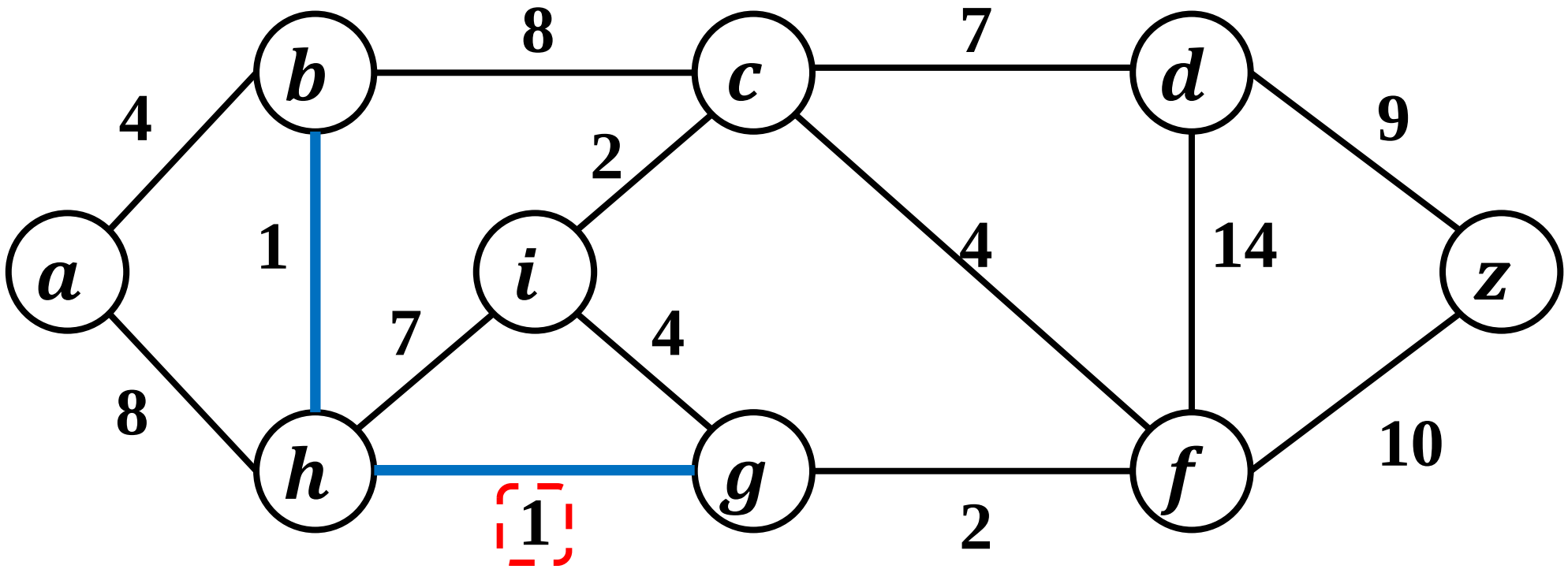
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



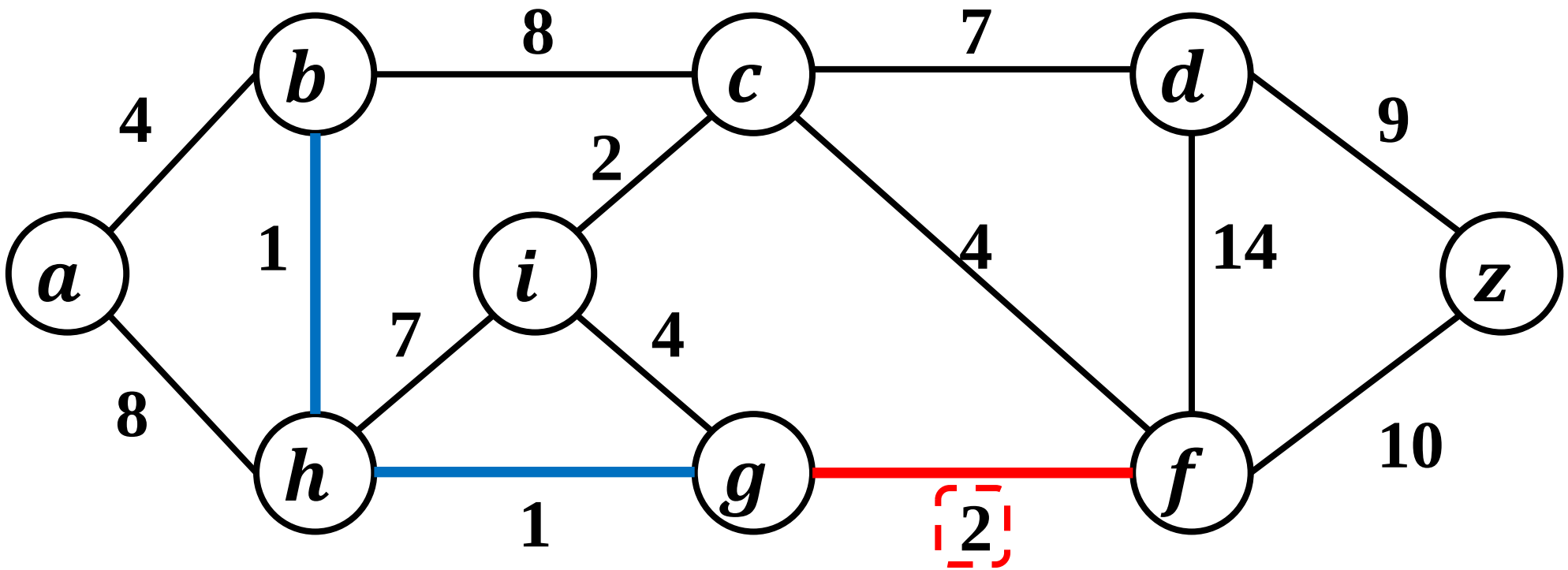
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



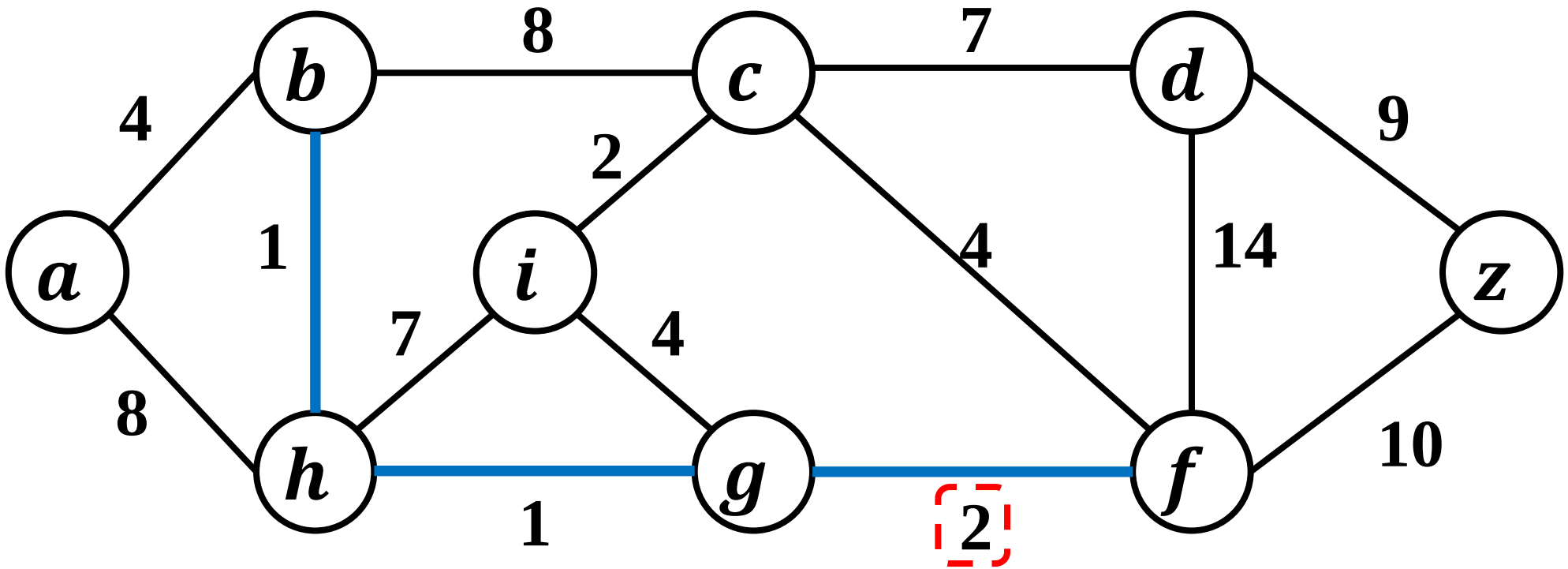
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



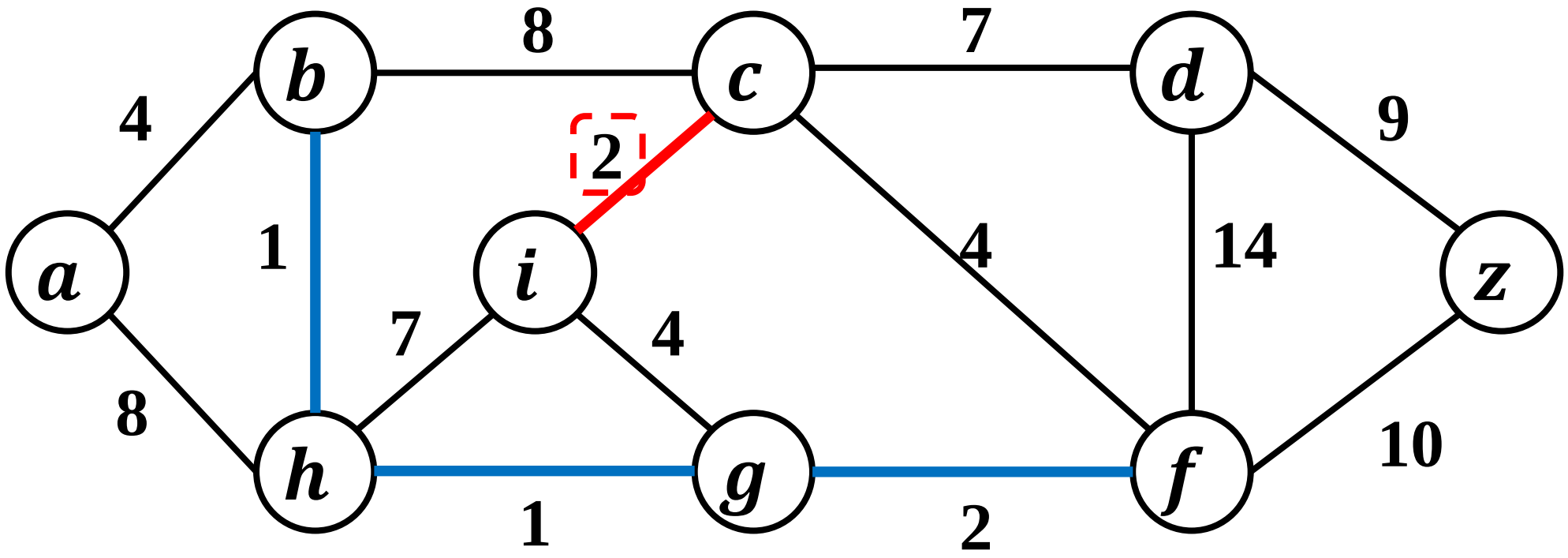
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



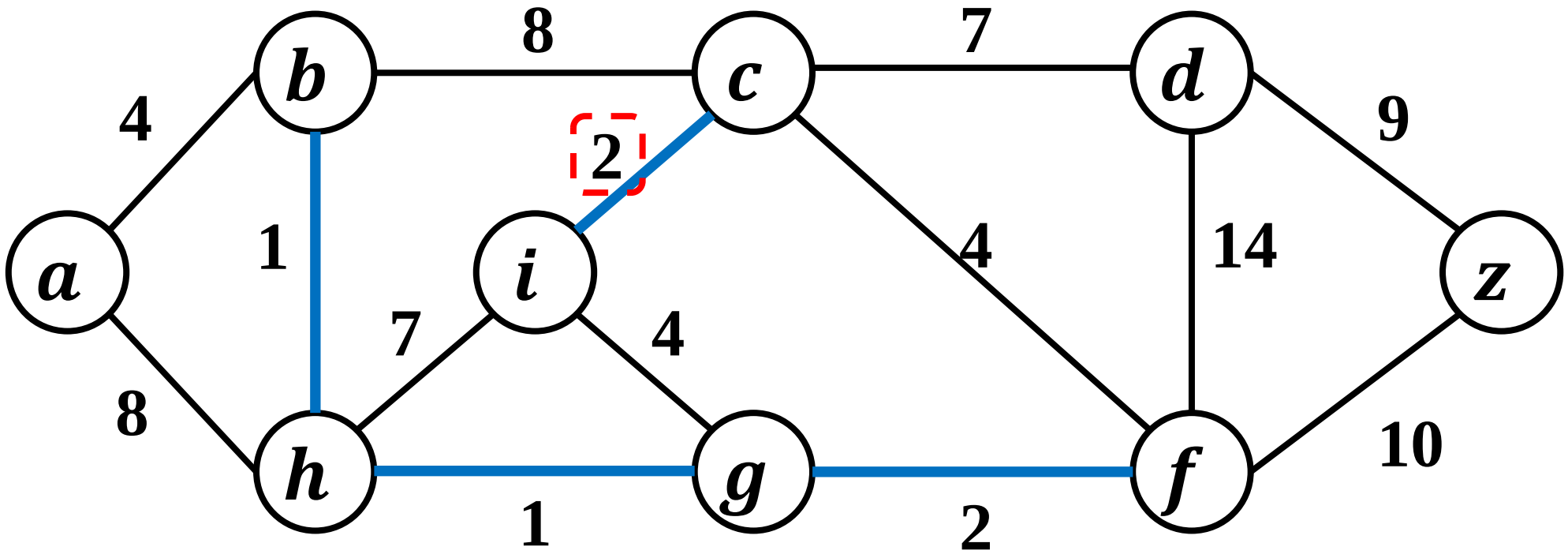
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



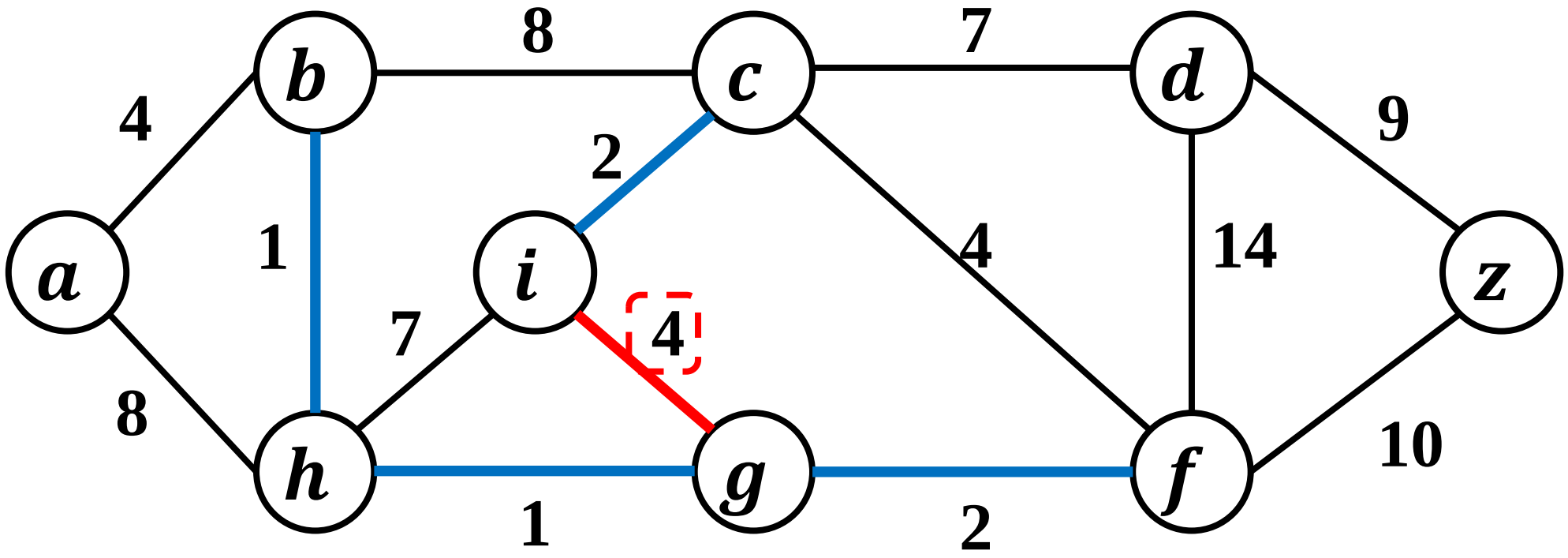
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



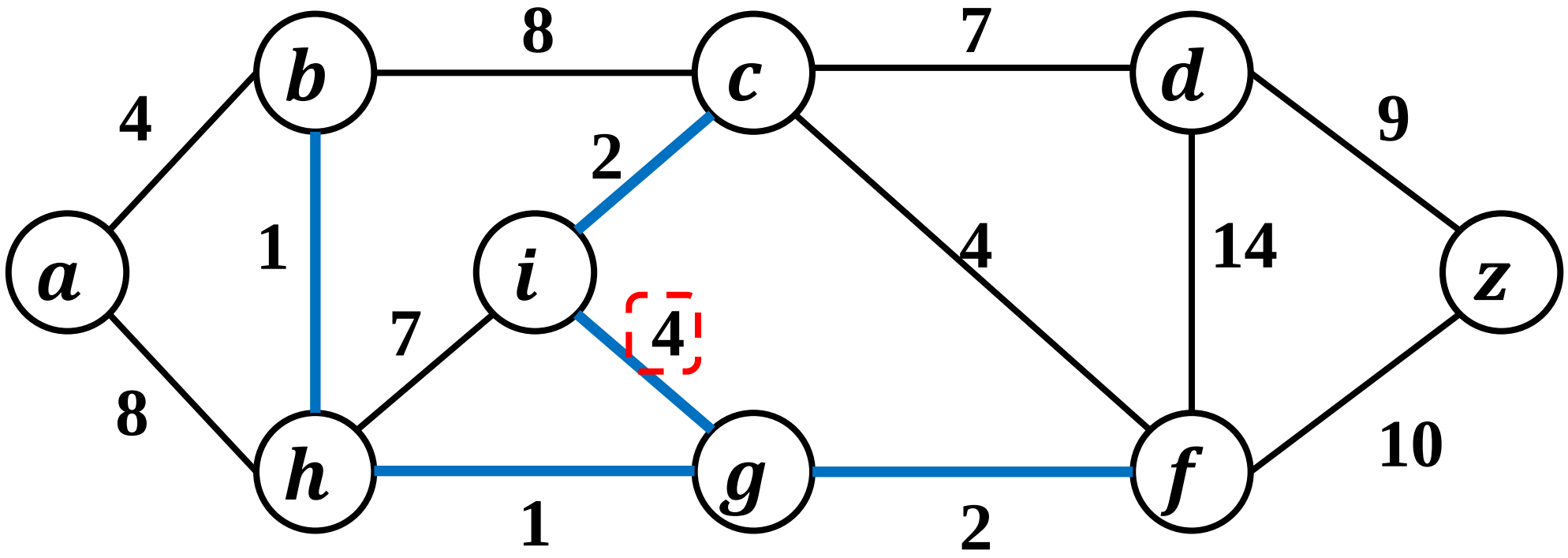
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



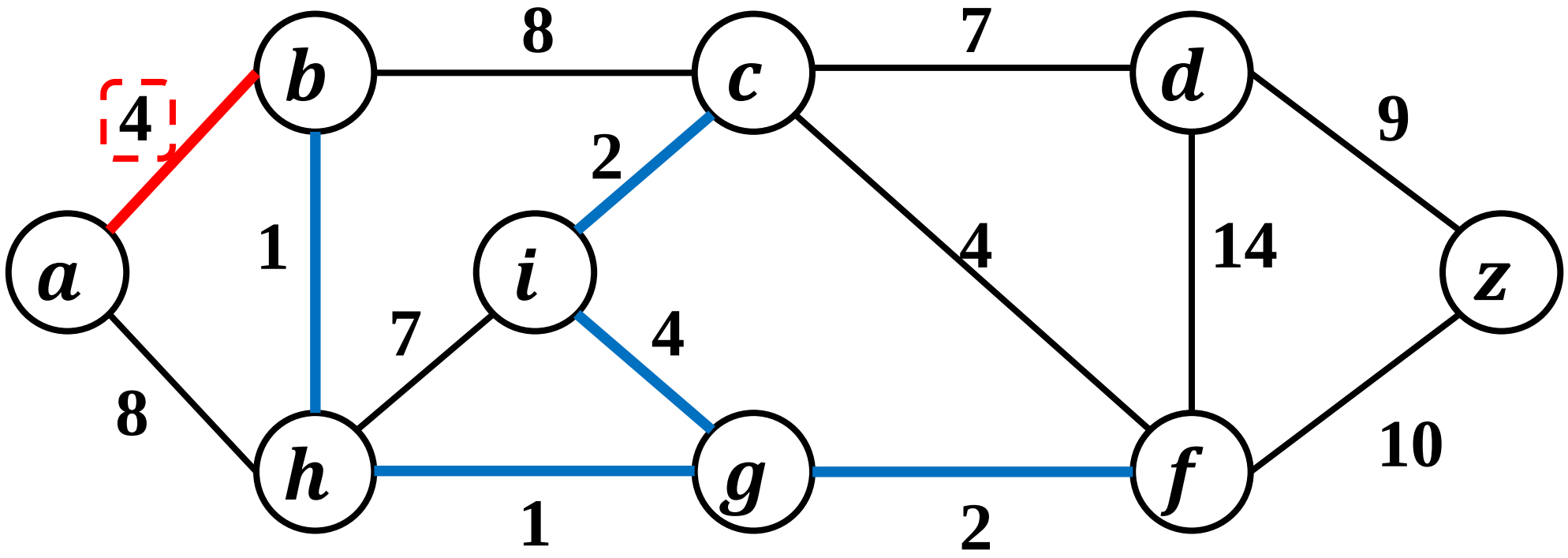
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



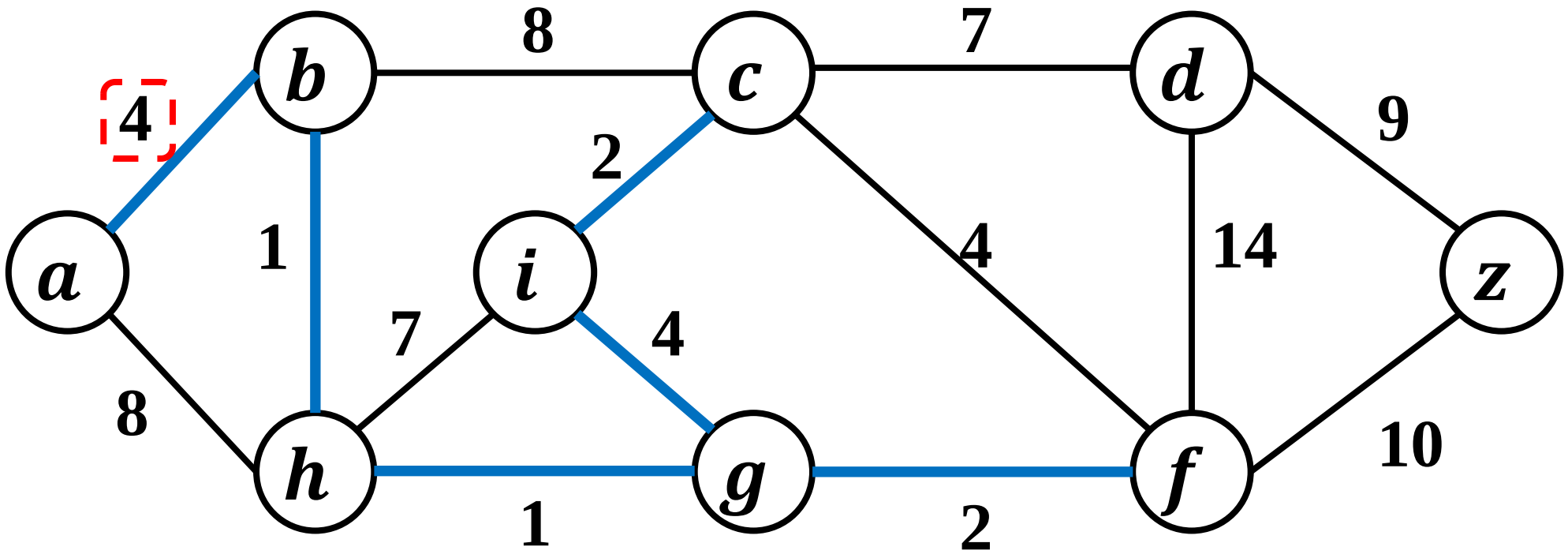
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



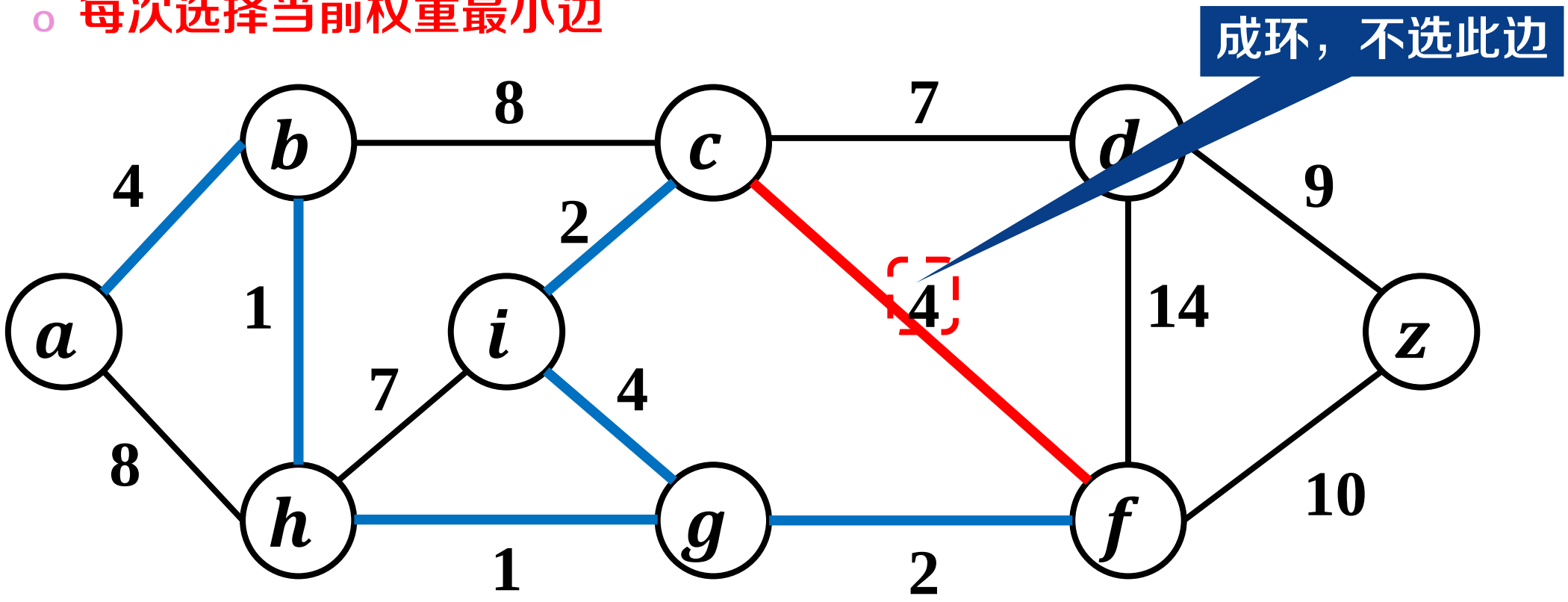
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



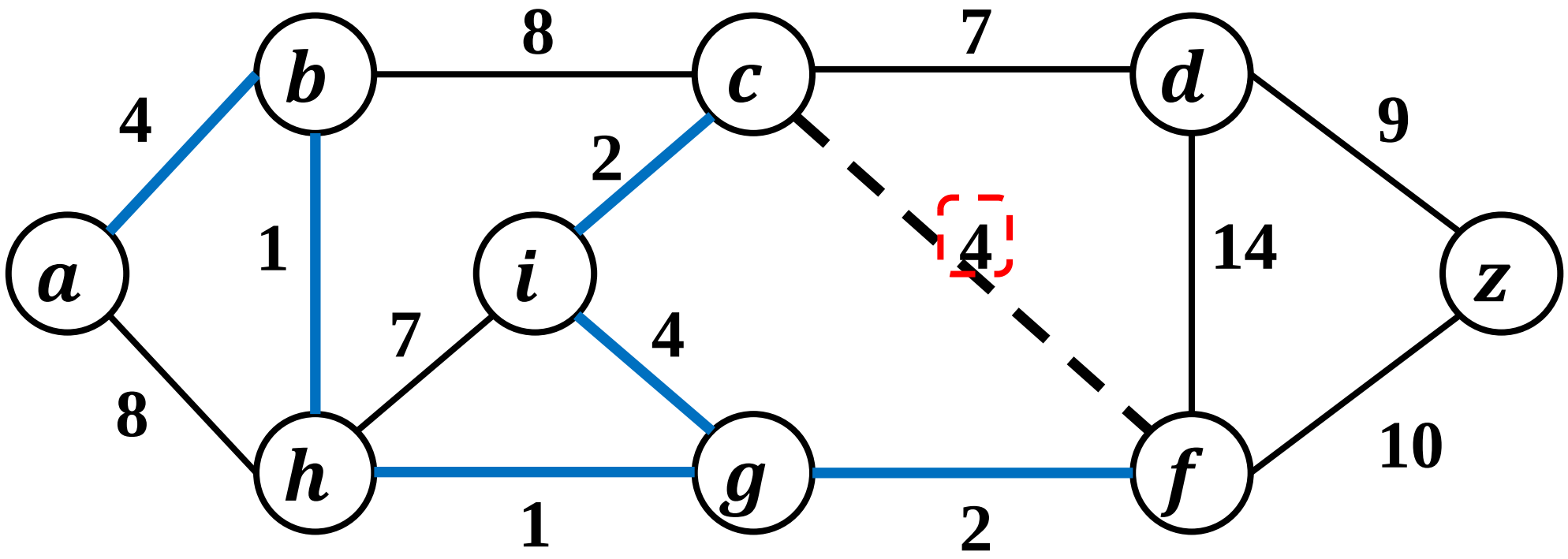
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



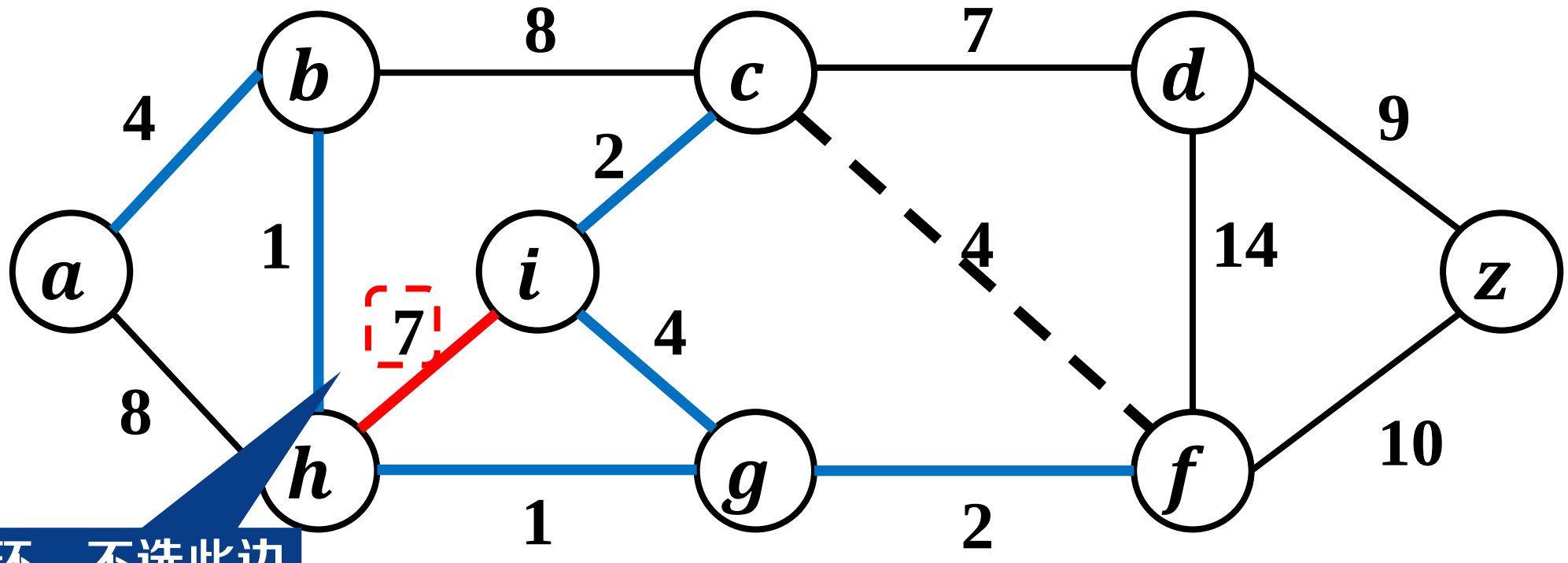
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



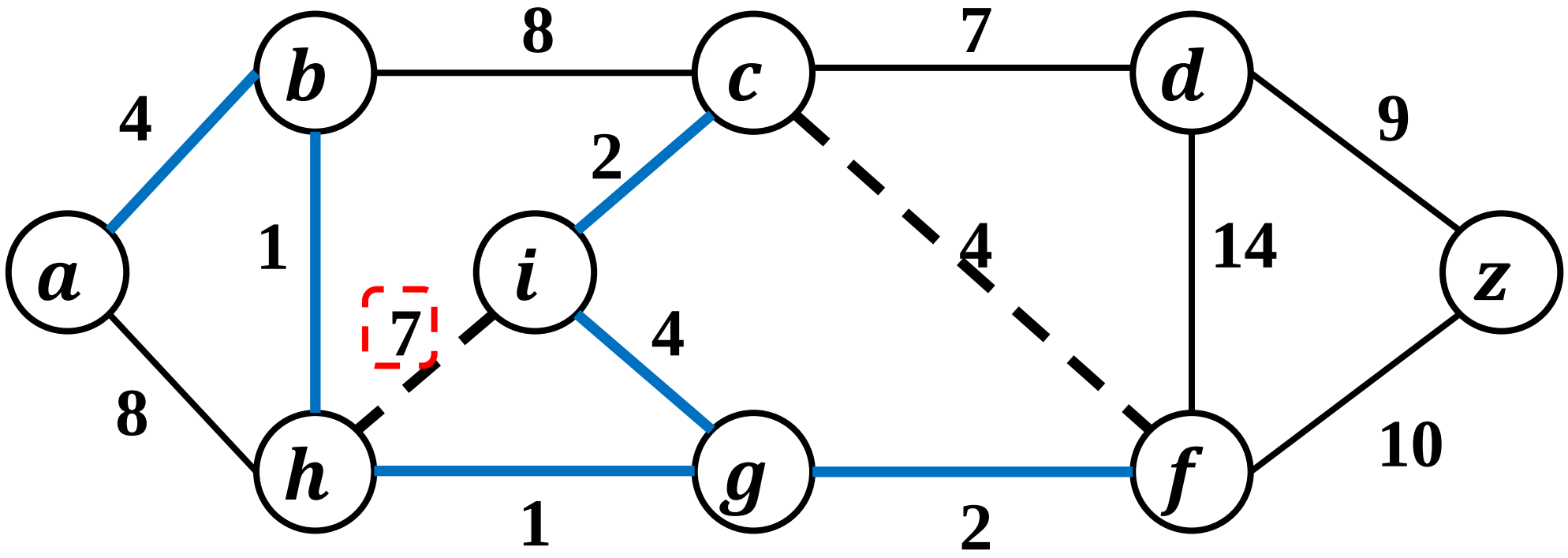
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



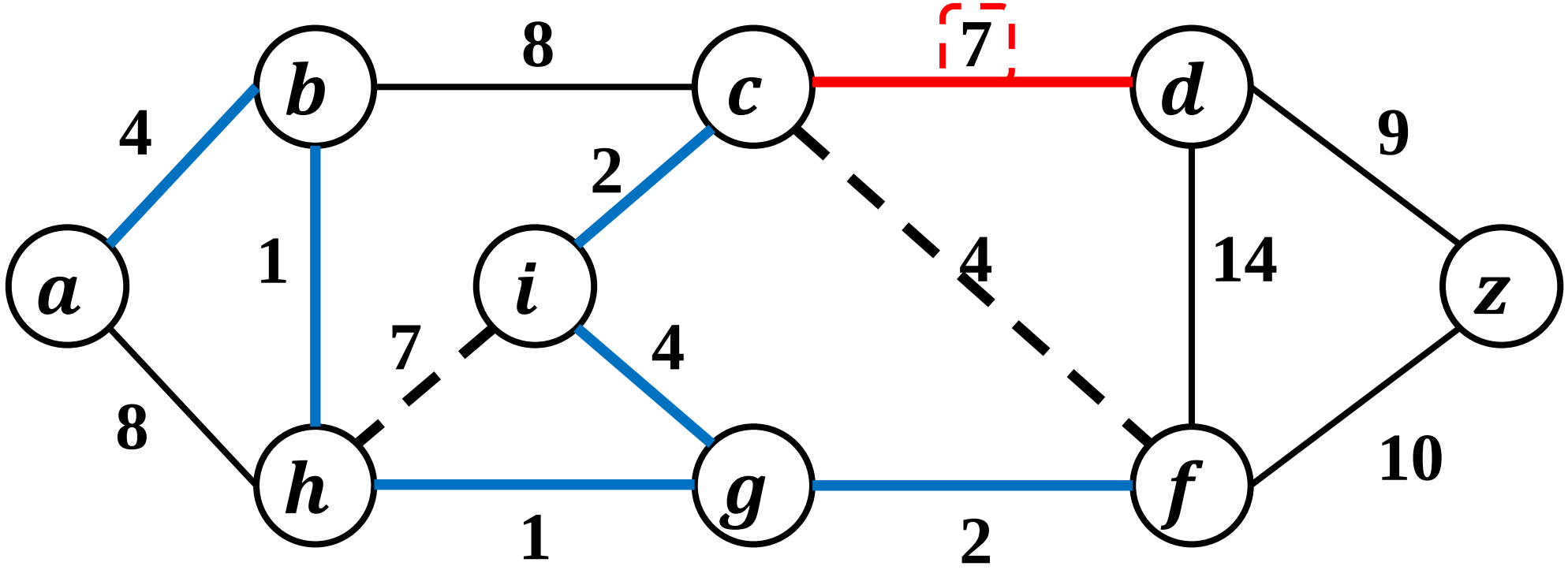
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



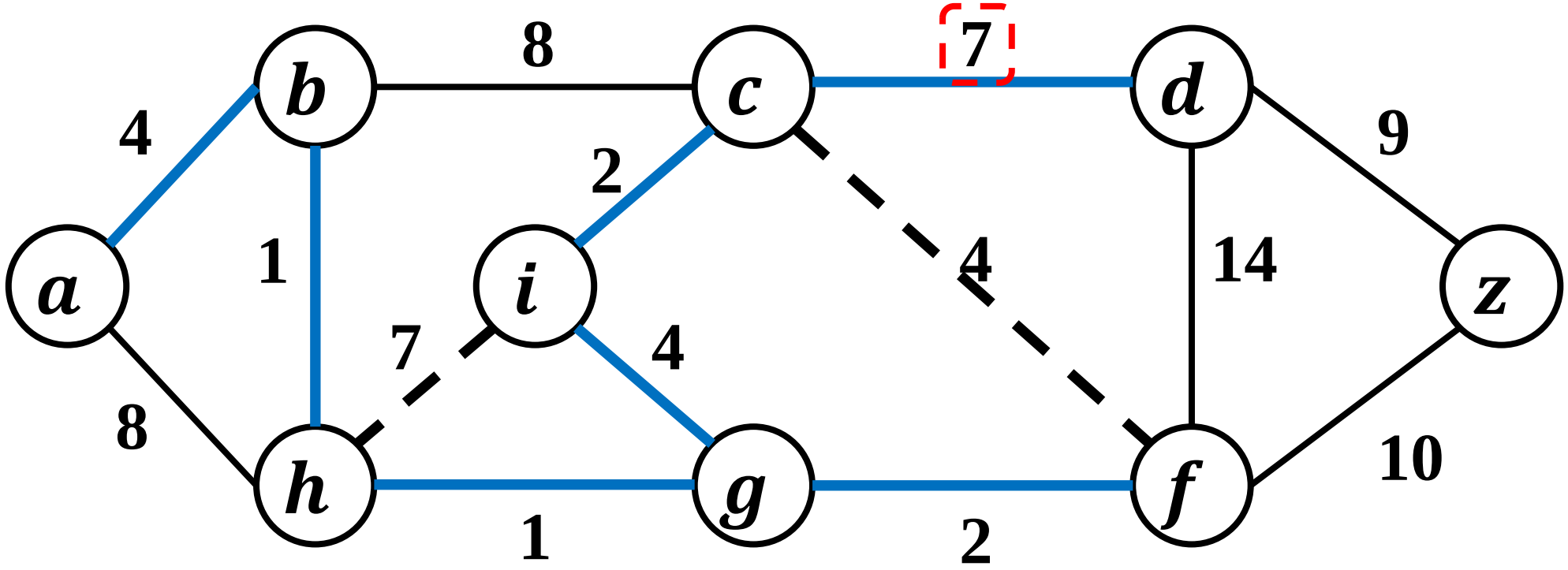
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



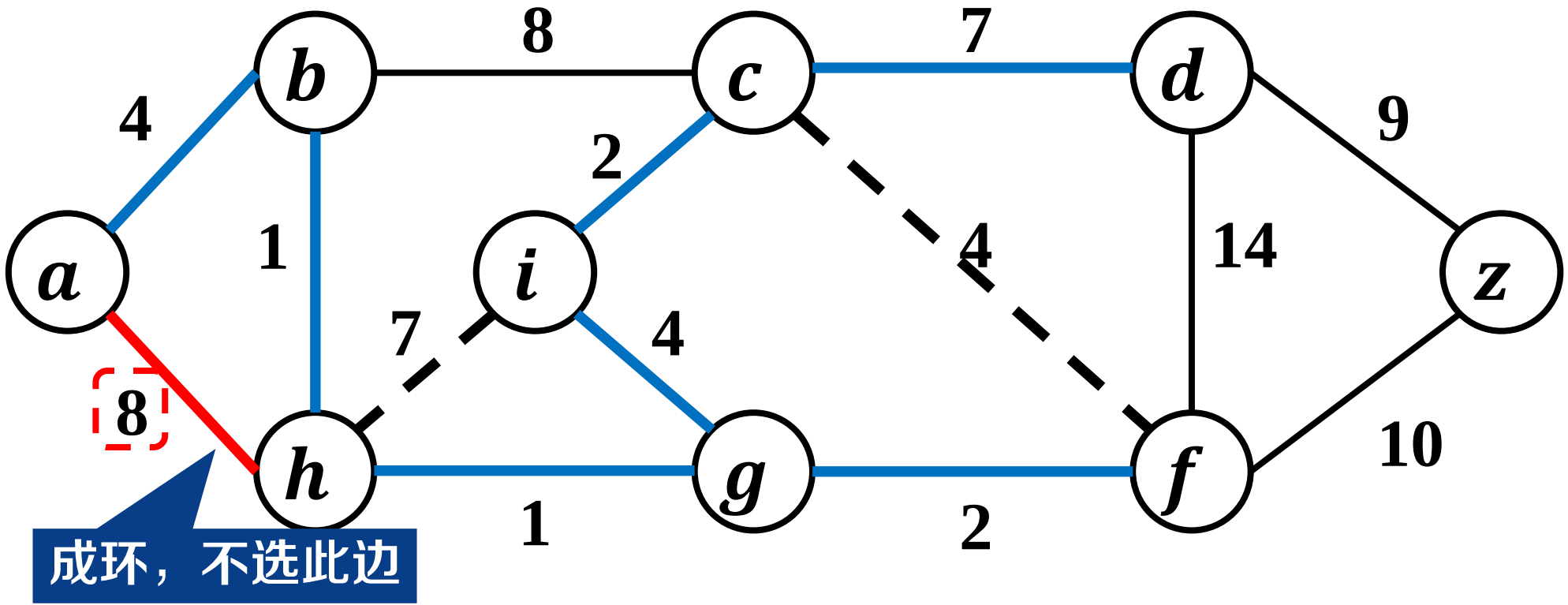
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



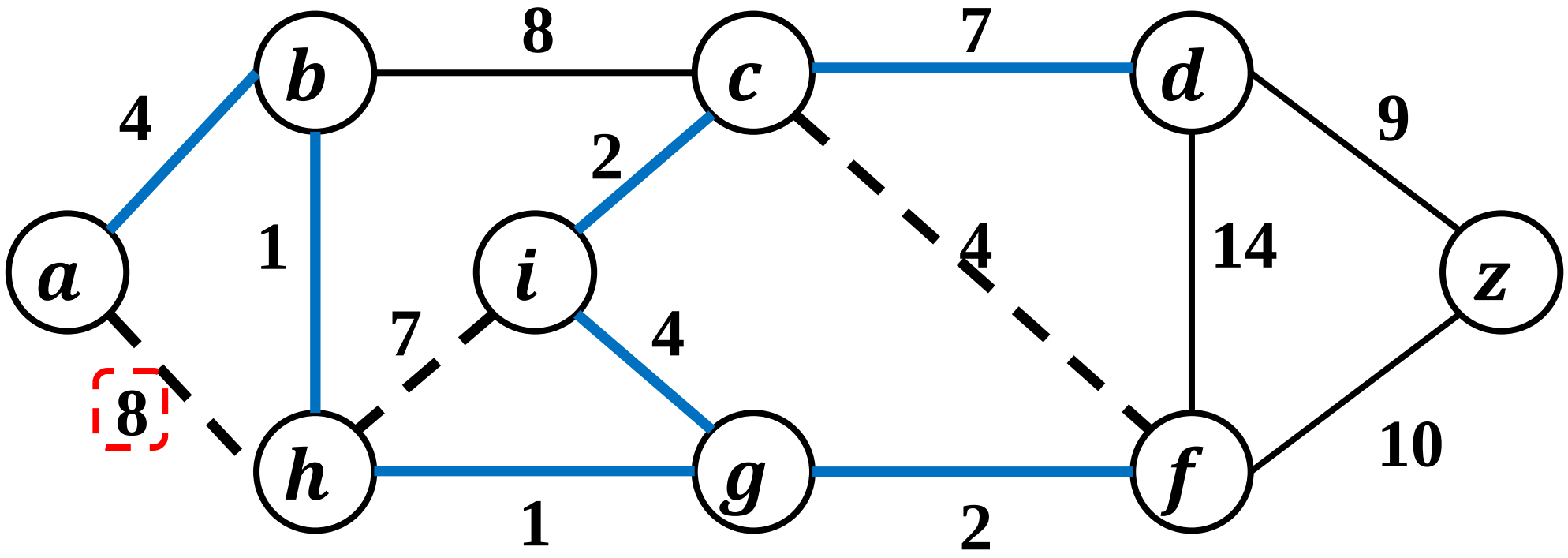
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



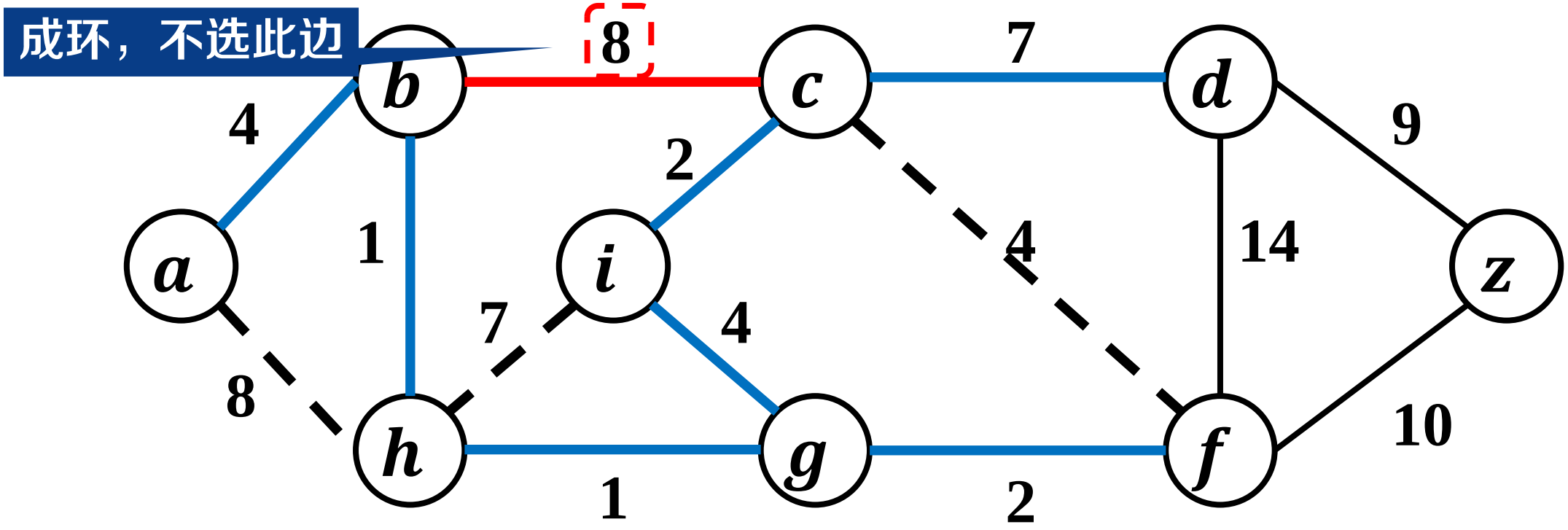
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



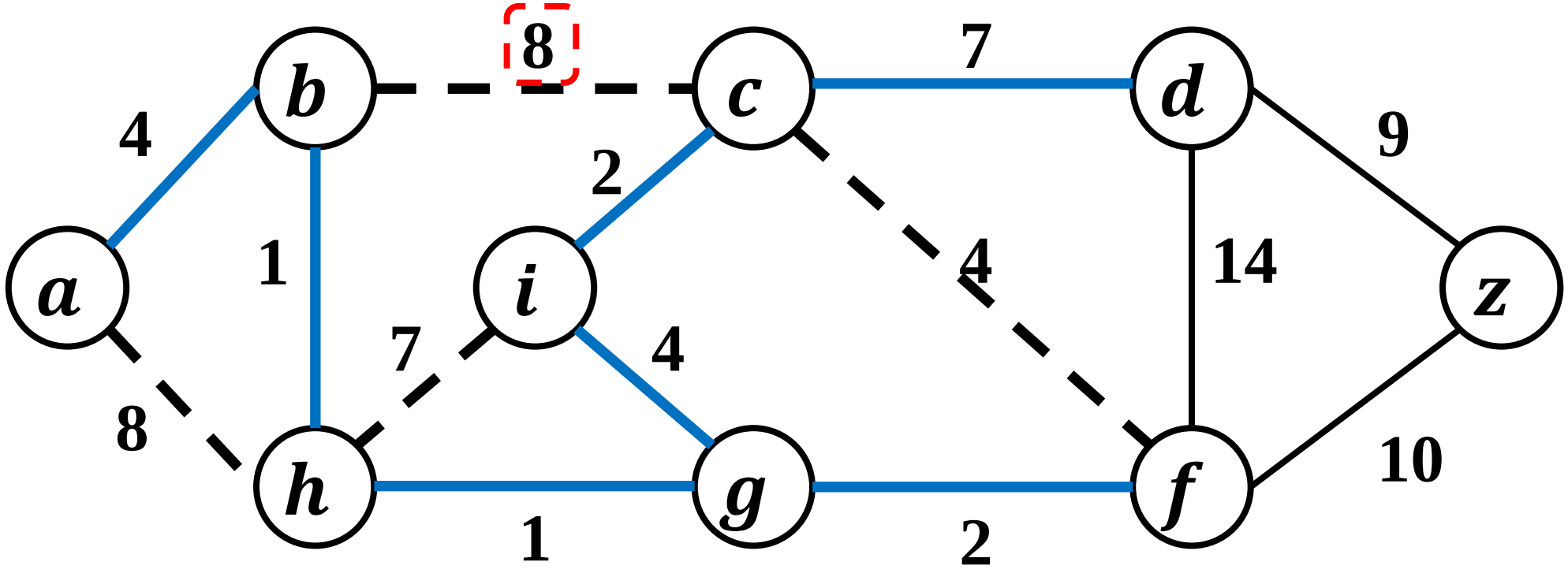
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



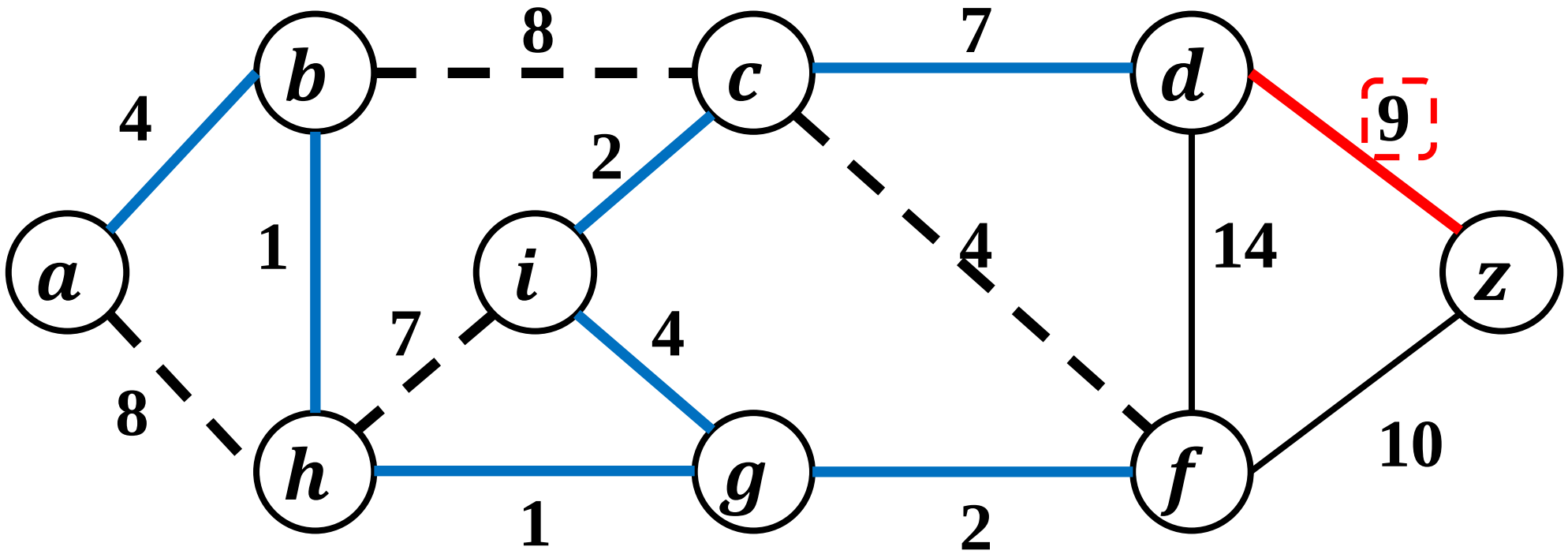
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



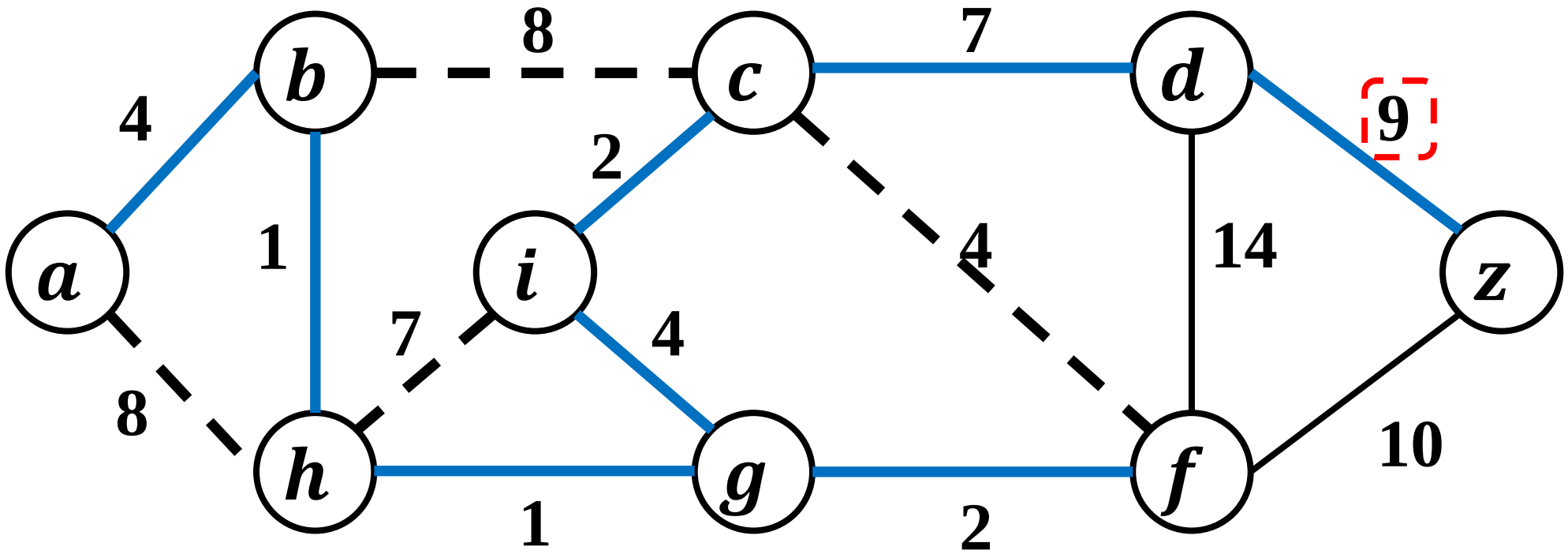
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



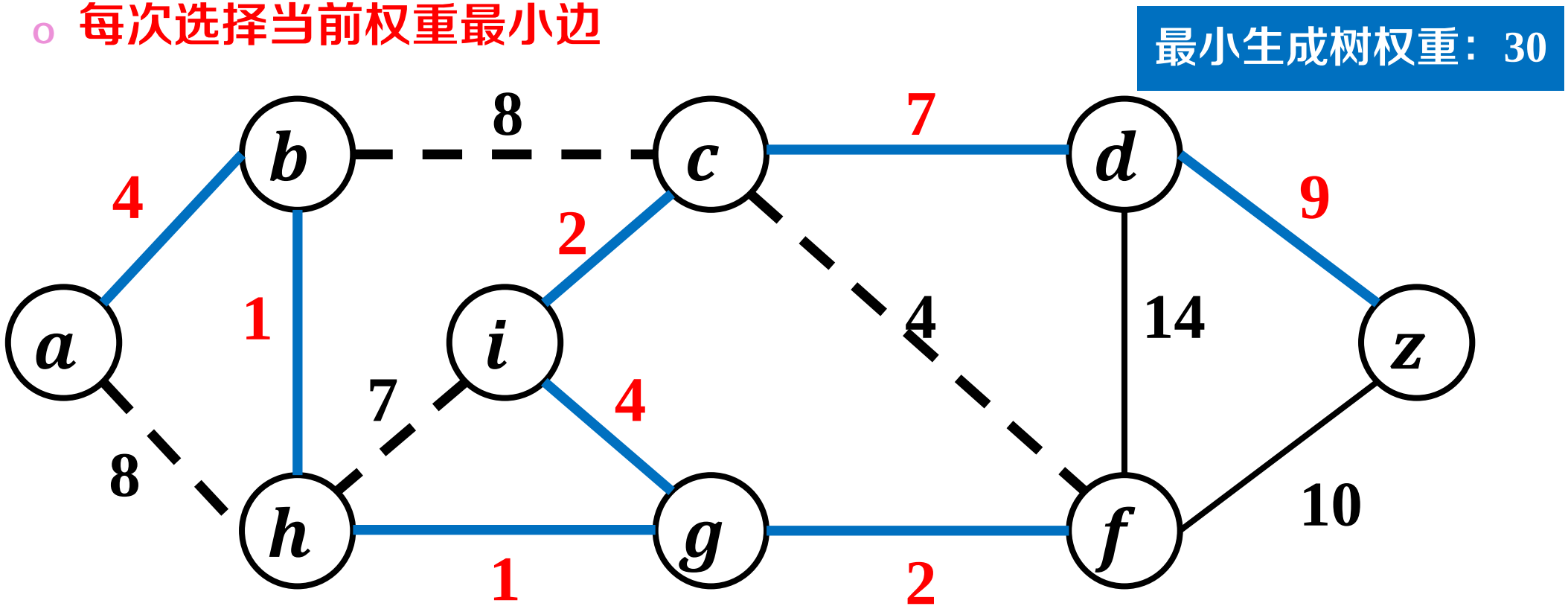
算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



算法实例

- 算法思想：直接实现通用框架
  - 需保证边集A仍是一个无环图
    - 选边时避免成环
  - 需保证边集A仍是最小生成树的子集
    - 每次选择当前权重最小边



算法思想精炼

- **Generic-MST(G)**

```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

不成环的最小边，是一种贪心策略

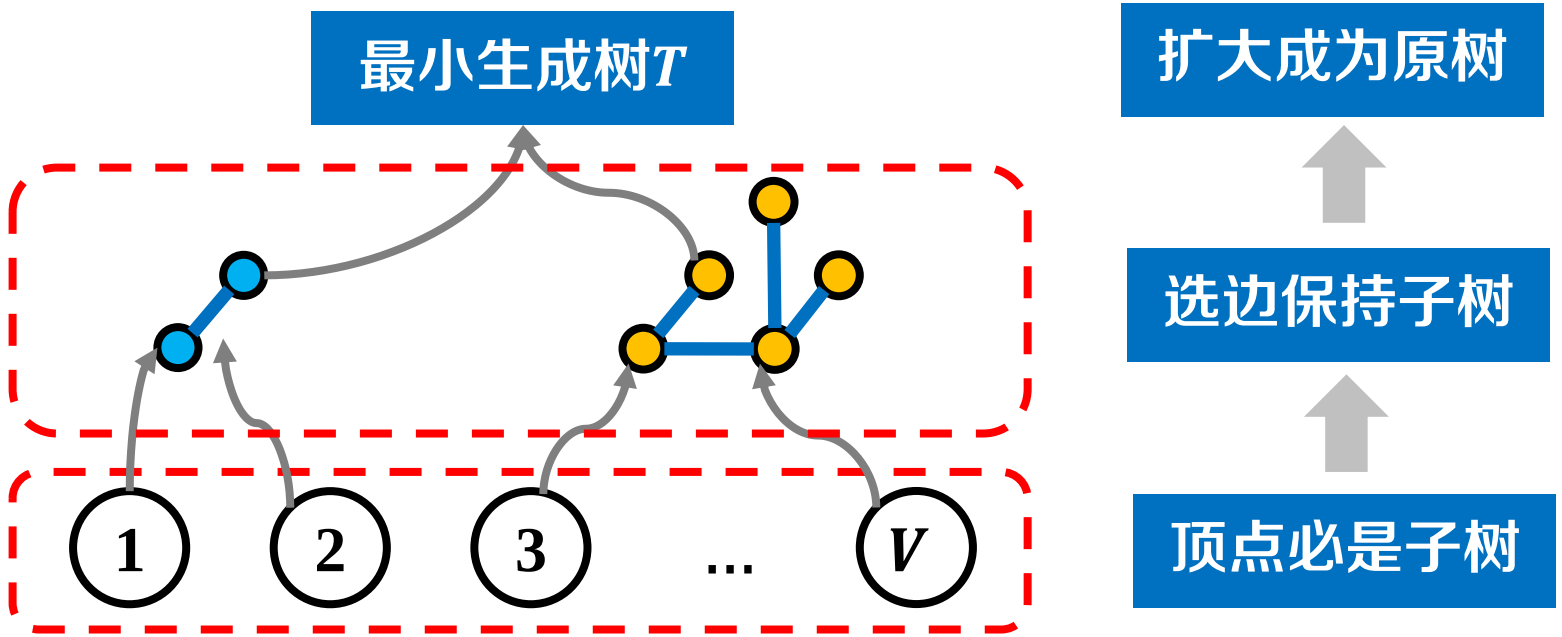
算法思想精炼

- **Generic-MST(G)**

```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

森林不断合并子树最终形成一棵树

不成环的最小边，是一种贪心策略



算法思想精炼

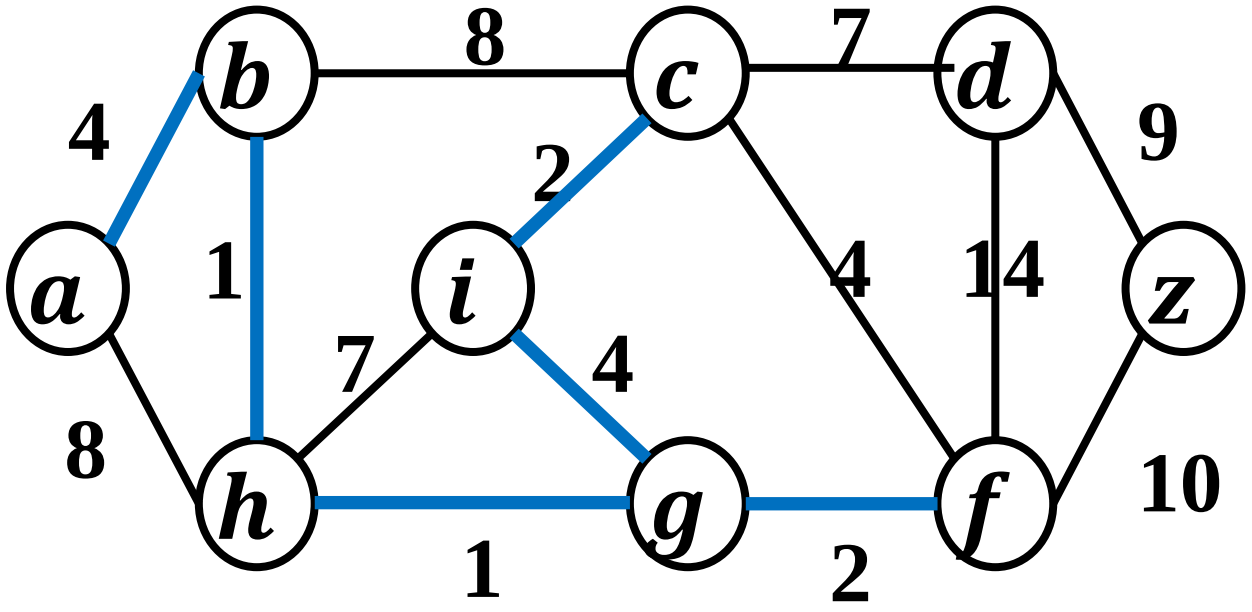
- **Generic-MST(G)**

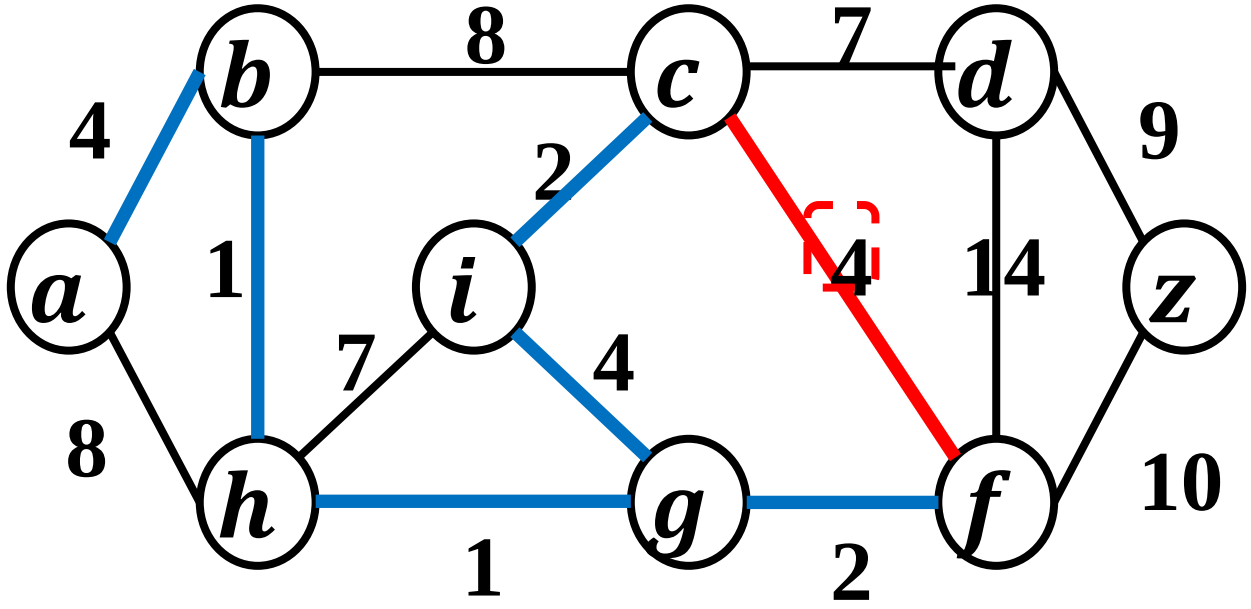
```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

森林不断合并子树最终形成一棵树

不成环的最小边，是一种贪心策略

判断所选边的顶点是否在一棵子树





算法思想精炼

- **Generic-MST(G)**

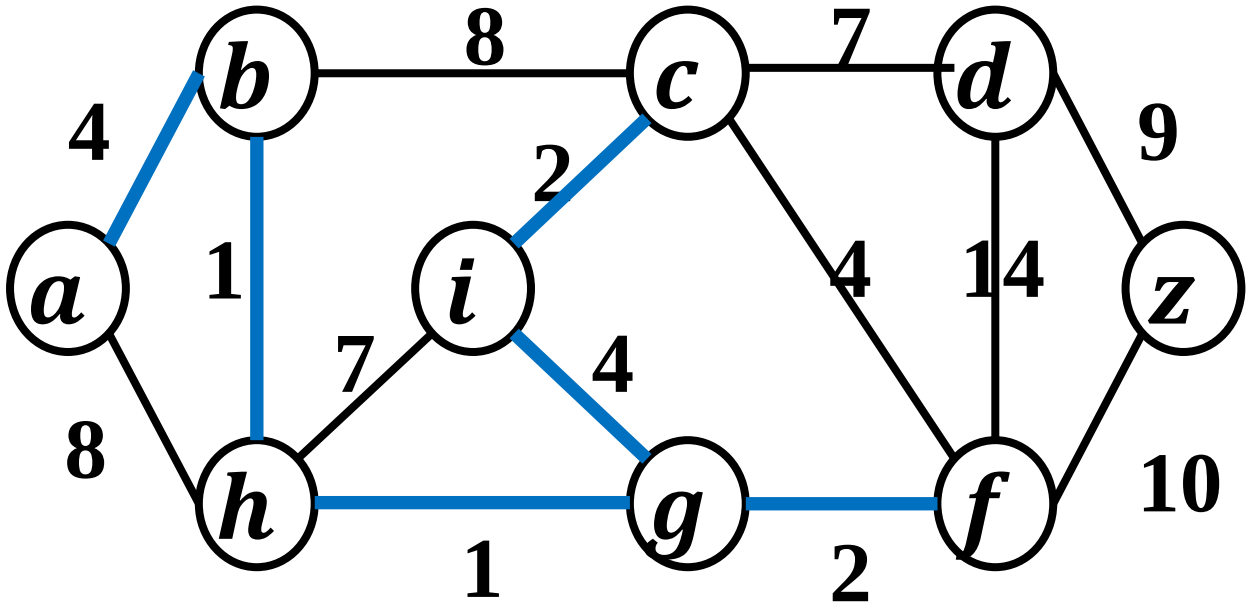
```
A ← ∅
while 没有形成最小生成树 do
    寻找A的安全边(u, v)
    A ← A ∪ (u, v)
end
return A
```

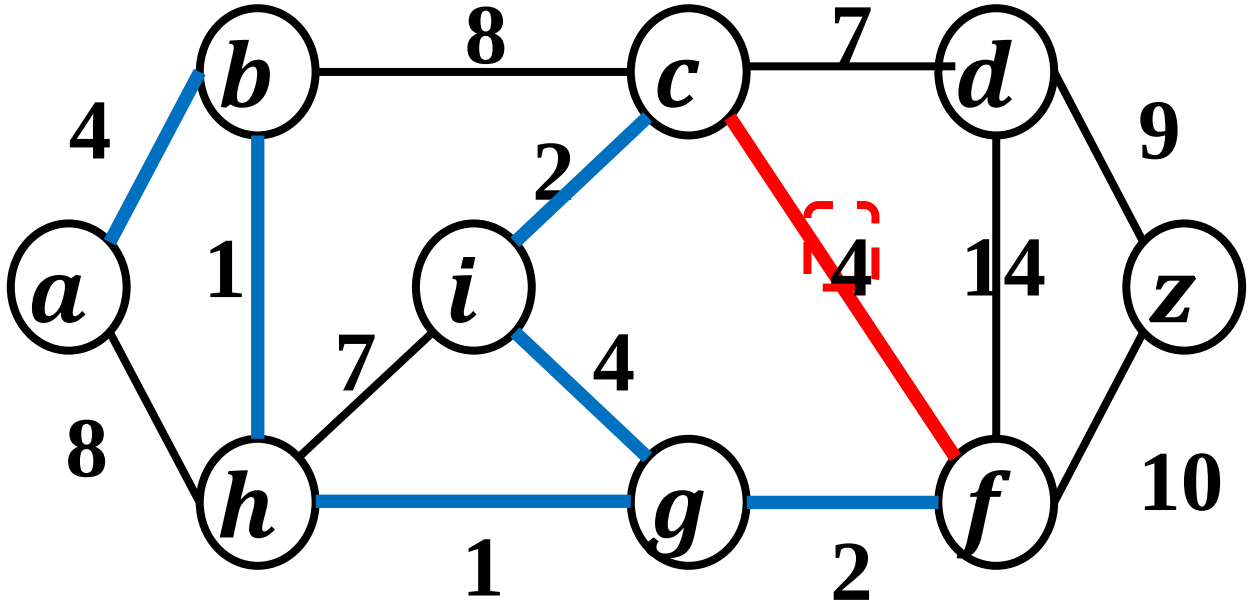
算法正确性的关键

森林不断合并子树最终形成一棵树

不成环的最小边，是一种贪心策略

判断所选边的顶点是否在一棵子树





提纲

问题的回顾

算法与实例

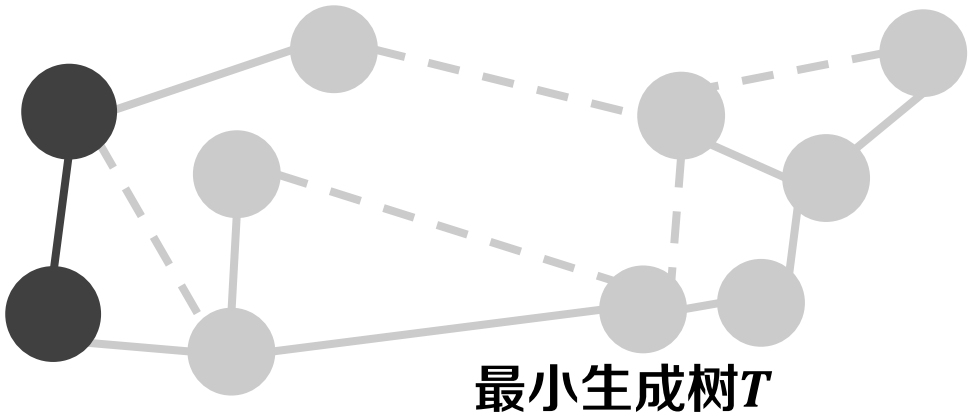
正确性证明

不相交集合

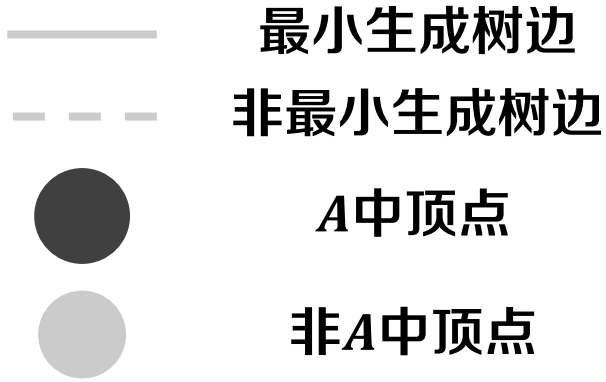
复杂度分析

贪心策略原理回顾

- 安全边(Safe Edge)
  - A是某棵最小生成树T边的子集，$A \subseteq T$
  - $A \cup \{(u,v)\}$仍是T边的一个子集，则称(u,v)是A的安全边



最小生成树T



若每次向边集A中新增安全边，可保证边集A是最小生成树的子集

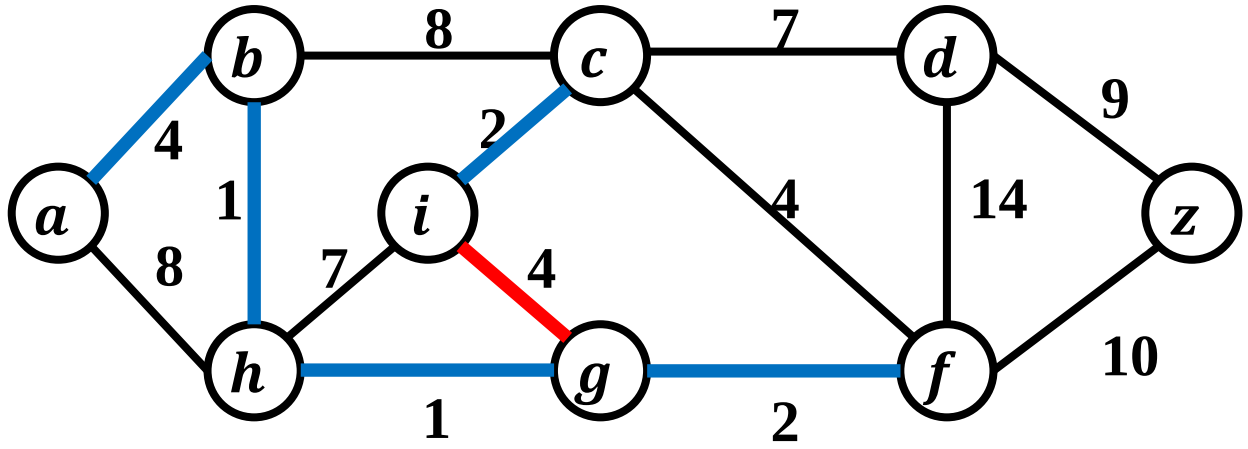
问题：Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边?

正确性证明

- **Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！**

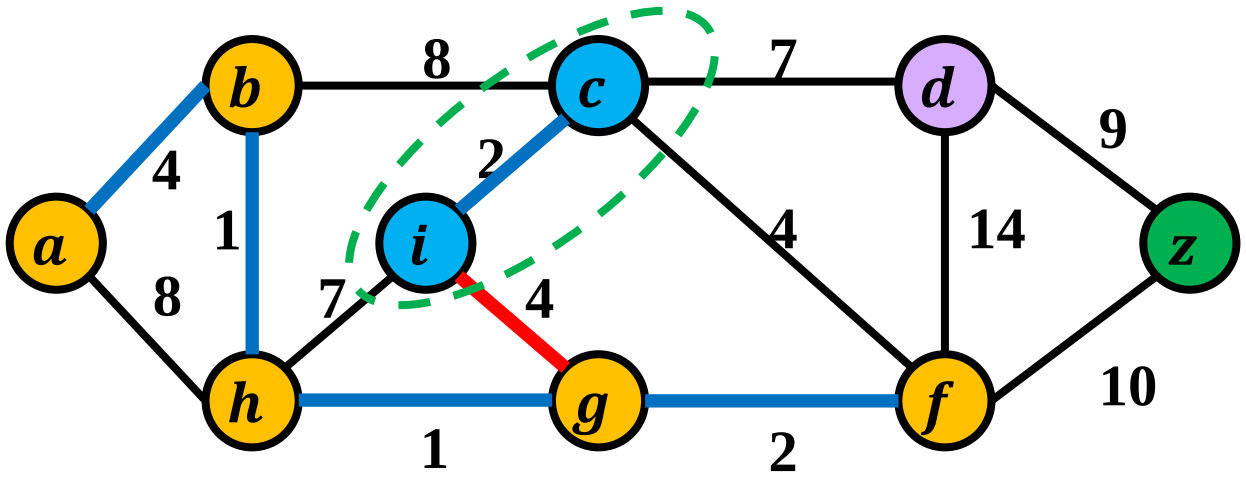
正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i, g)



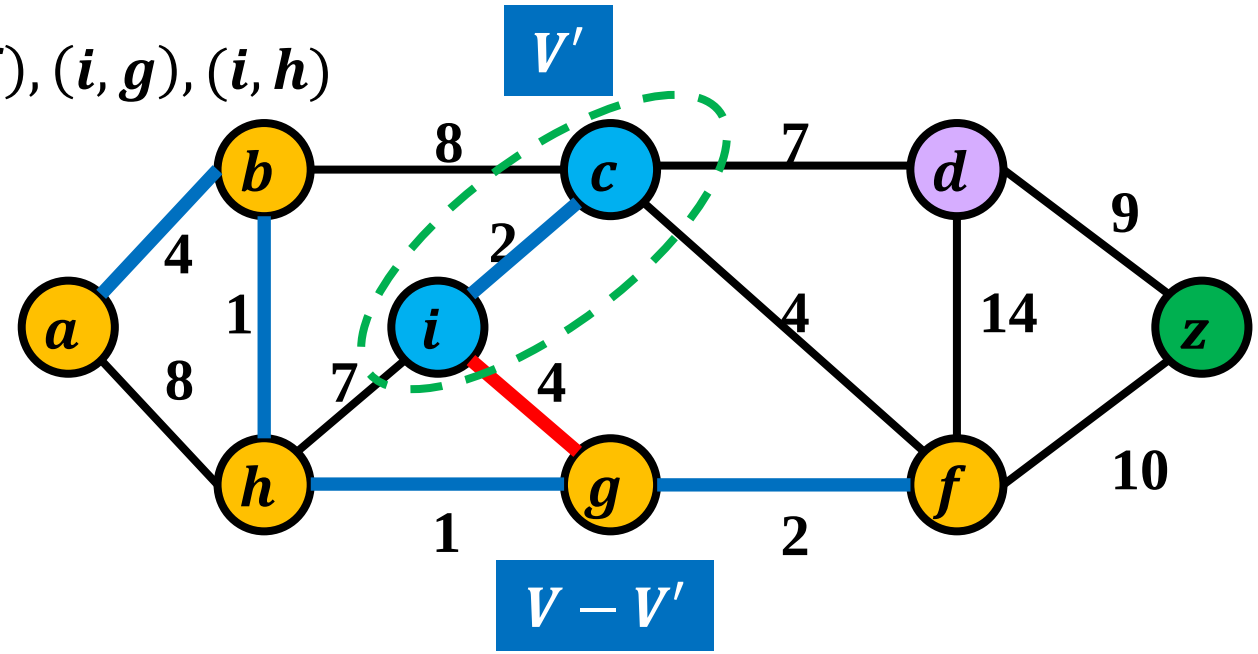
正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i, g)
  - 已选边集A把图分成为若干棵子树，其中(V', E')是包含顶点i的子树



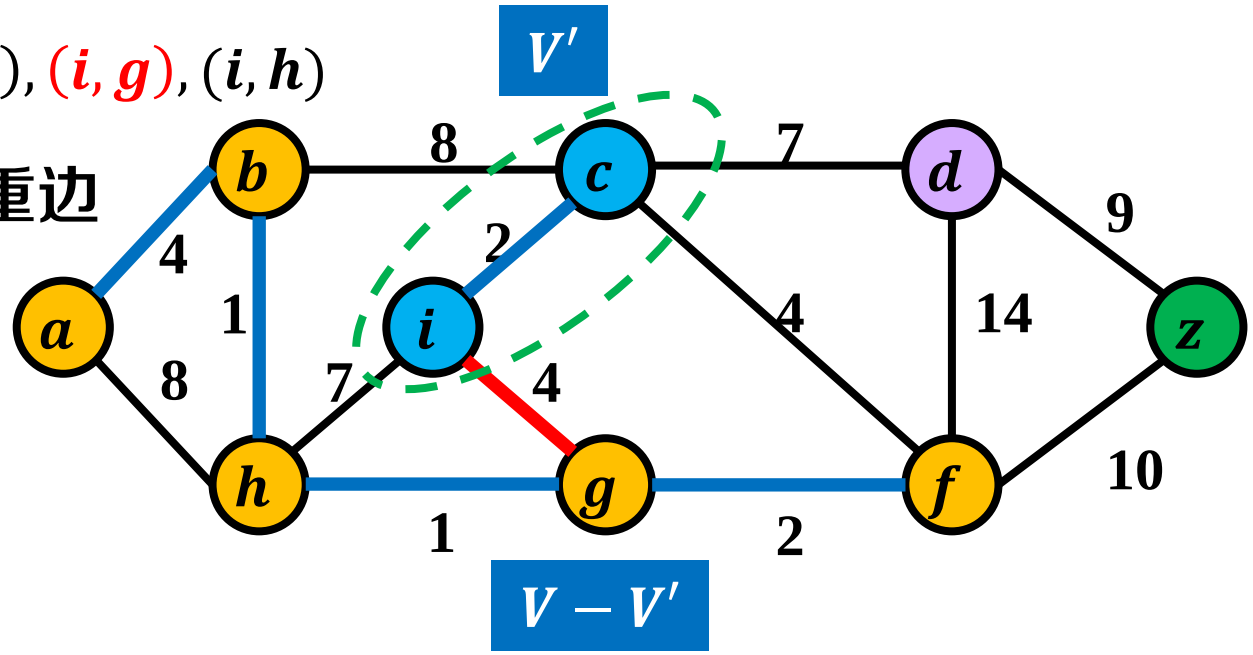
正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i, g)
  - 已选边集A把图分成为若干棵子树，其中(V', E')是包含顶点i的子树
  - 构造割$(V', V - V')$，割**不妨害**边集A，换言之A中的边不会横跨$(V', V - V')$
    - 边集A不包含横跨边$(b, c), (c, d), (c, f), (i, g), (i, h)$



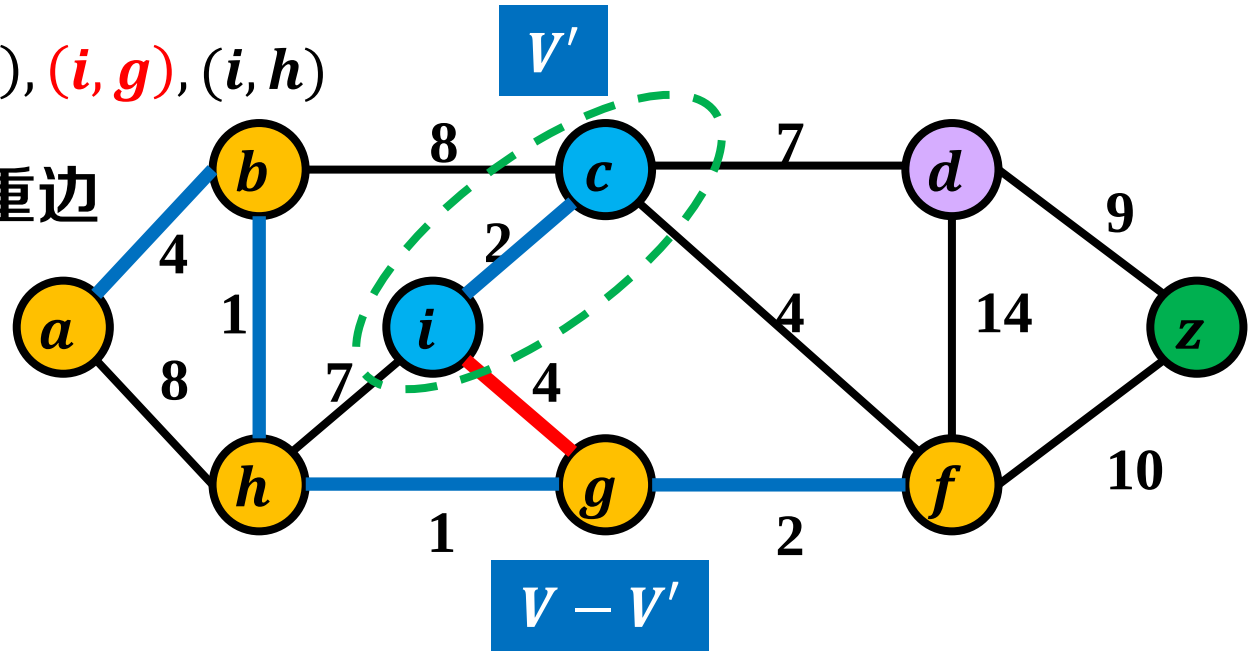
正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i, g)
  - 已选边集A把图分成为若干棵子树，其中(V', E')是包含顶点i的子树
  - 构造割$(V', V - V')$，割不妨害边集A，换言之A中的边不会横跨$(V', V - V')$
    - 边集A不包含横跨边$(b, c), (c, d), (c, f), (i, g), (i, h)$
  - (i, g)是横跨割$(V', V - V')$的最小权重边



正确性证明

- Kruskal算法选边策略能否保证每次都选择了安全边？——能！
- 证明
  - 不妨设当前已选边集为A，下一条选择的边是(i, g)
  - 已选边集A把图分成为若干棵子树，其中(V', E')是包含顶点i的子树
  - 构造割$(V', V - V')$，割不妨害边集A，换言之A中的边不会横跨$(V', V - V')$
    - 边集A不包含横跨边$(b, c), (c, d), (c, f), (i, g), (i, h)$
  - (i, g)是横跨割$(V', V - V')$的最小权重边
  - (i, g)是关于割$(V', V - V')$轻边
  - 由于割$(V', V - V')$不妨害边集A
  - 轻边(i, g)为安全边



伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then**
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树
  end
end
return T

按权重排序

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if u, v 不在同一子树 then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        合并u, v所在子树
    end
end
return T
```

按照权重从小到大考察边

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then**
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树
  end
end
return T

加入该边不成环

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then**
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树
  end
end
return T

加入该边，更新连通状态

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if u, v 不在同一子树 then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        合并u, v所在子树
    end
end
return T
```

问题：如何高效判定和维护所选边的顶点是否在一棵子树?

提纲

问题的回顾

算法与实例

正确性证明

不相交集合

复杂度分析

不相交集合

- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then**
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树
  end
end
return T

问题：如何高效判定和维护所选边的顶点是否在一棵子树?

不相交集合

- **MST-Kruskal(G)**

输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
$T \leftarrow \{\}$
for $(u, v) \in E$ **do**
  if u, v 不在同一子树 **then**
    $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$
    合并u, v所在子树
  end
end
return T

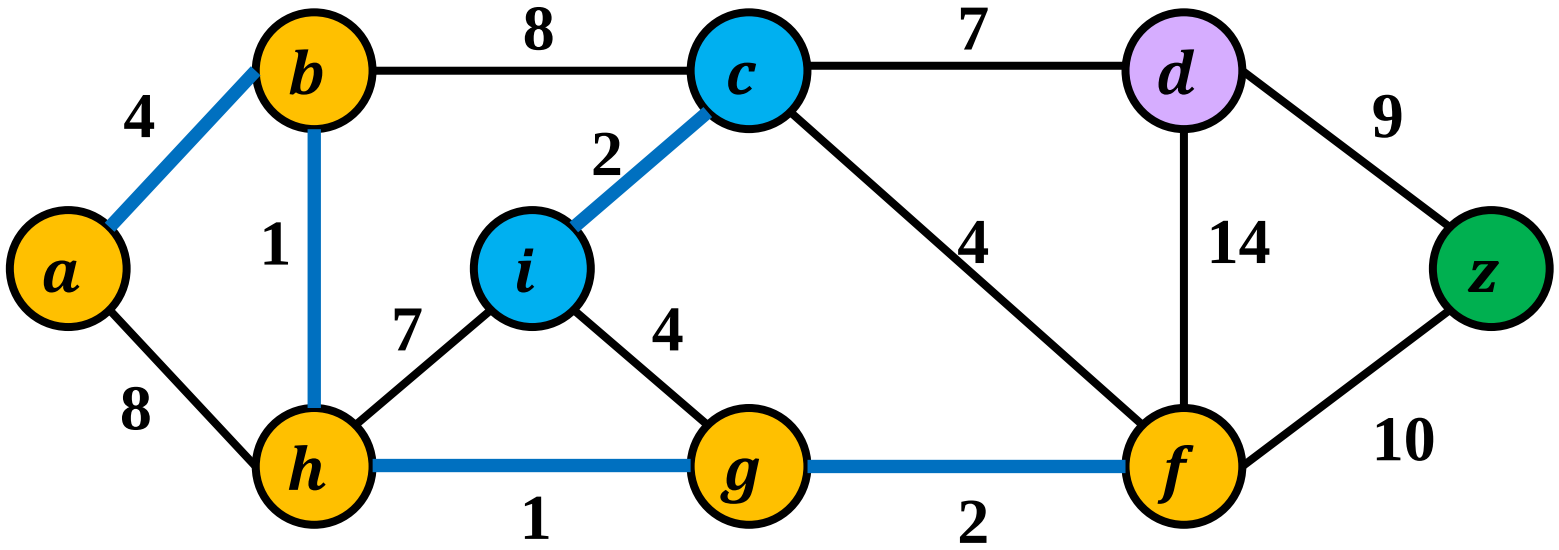
需要高效查找顶点所属子树

需要高效合并顶点所在子树

同时高效完成两类操作需借助数据结构：不相交集合

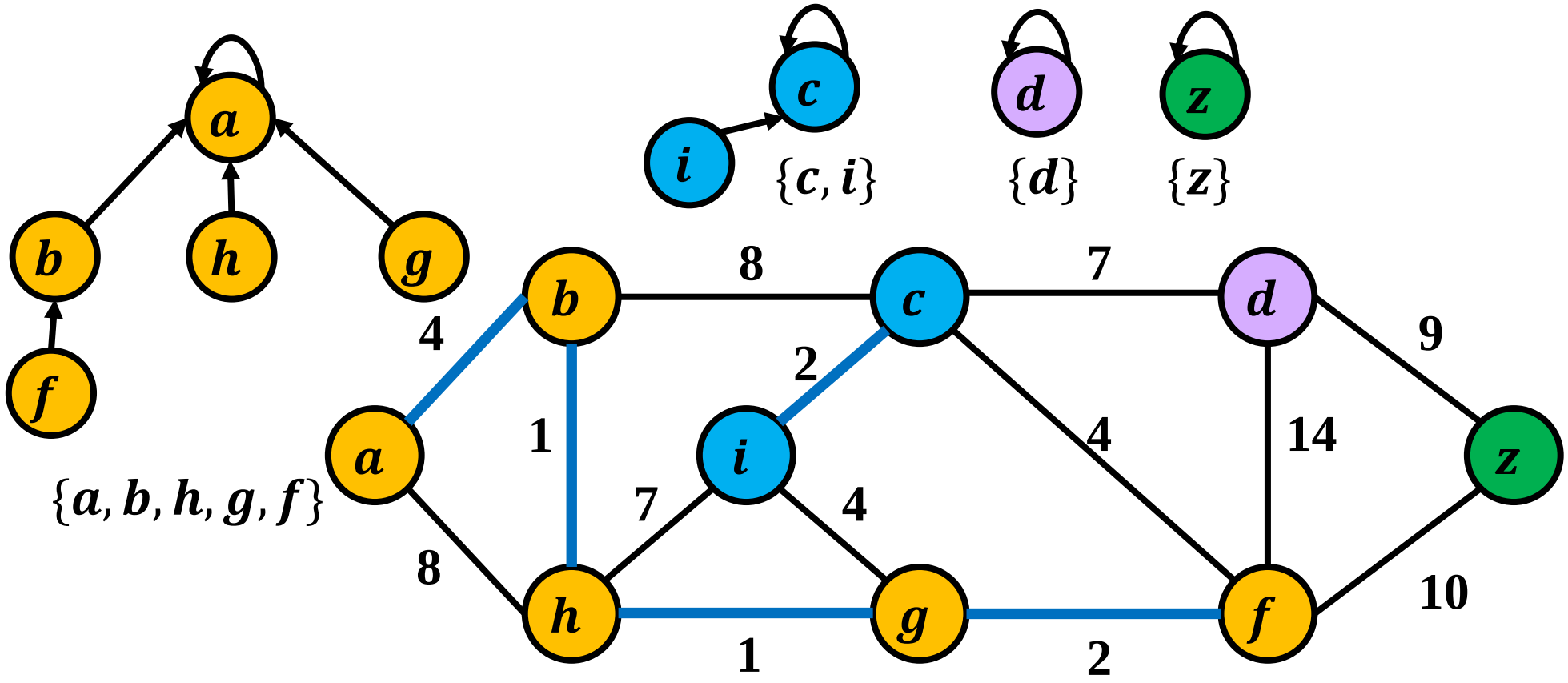
不相交集合

- 把每棵生成子树看作一个顶点集合



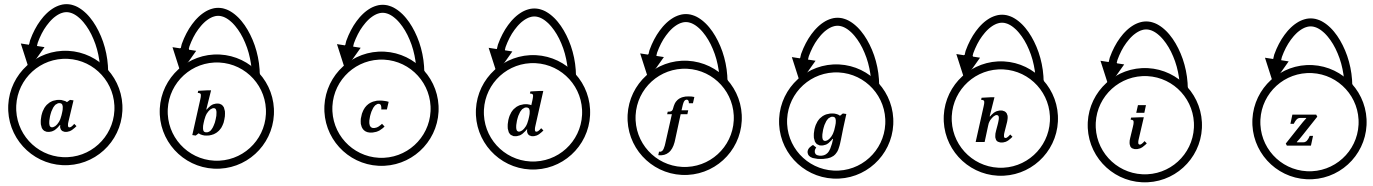
不相交集合

- 把每棵生成子树看作一个顶点集合
  - 每个集合表示为一棵有向树，多个不相交集合构成不相交集合森林
  - 集合元素表示为树结点
  - 树边由子结点指向父结点，根结点有一条指向自身的边

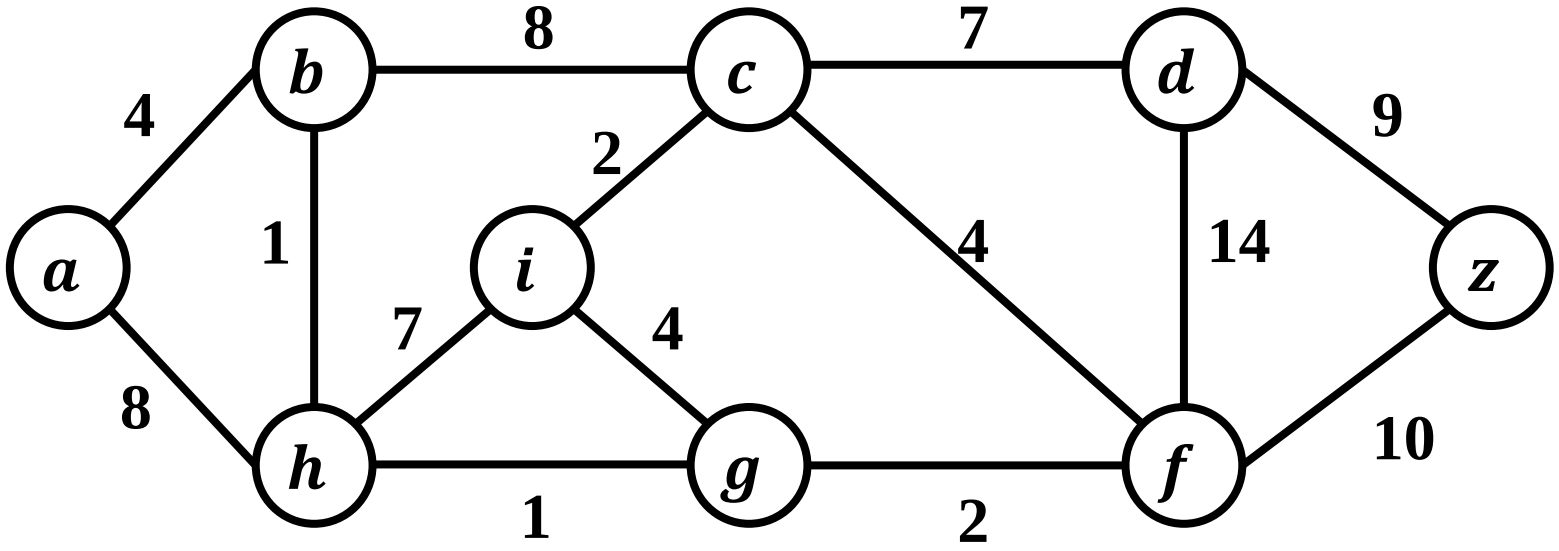


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边



$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$ $\{f\}$ $\{g\}$ $\{h\}$ $\{i\}$ $\{z\}$



不相交集合：伪代码

- **Create-Set(x)**

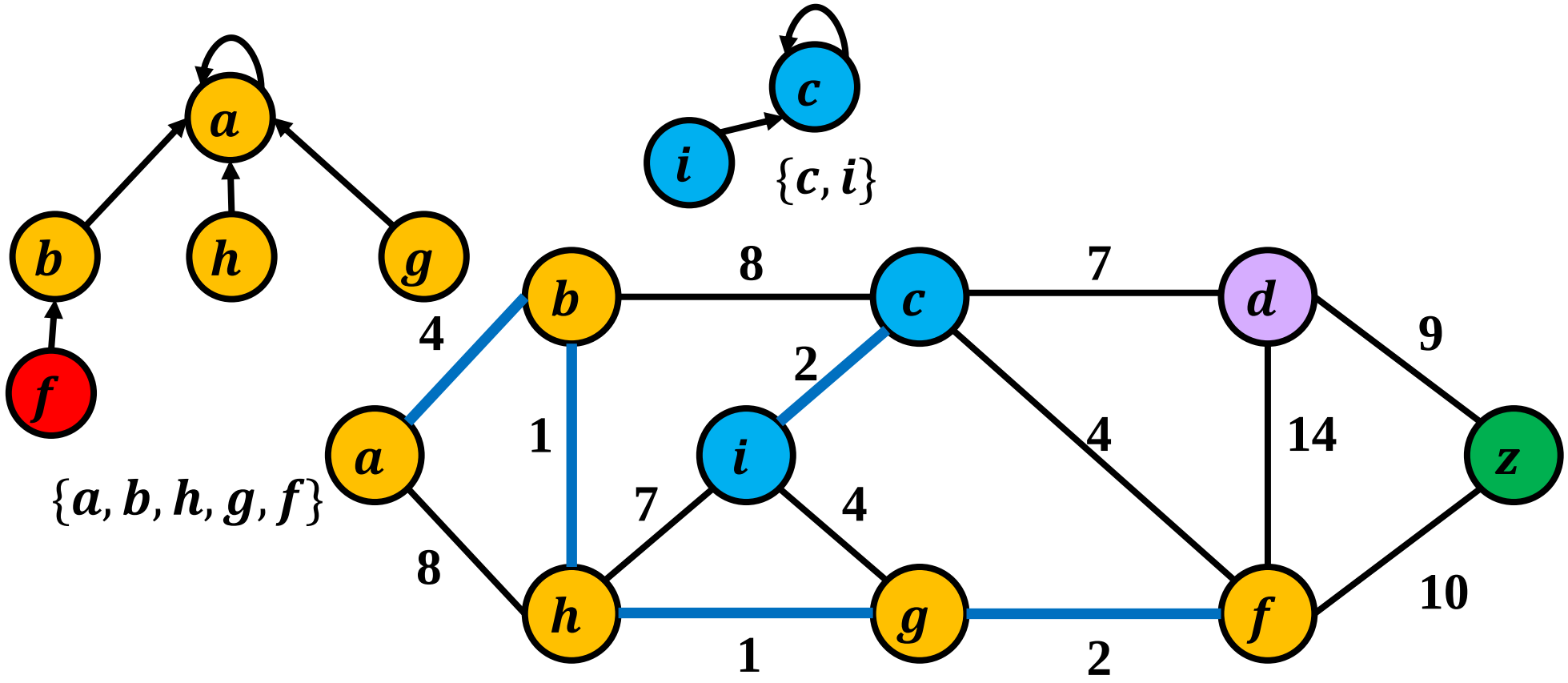
输入: 顶点 x
输出: 并查集
$x.parent \leftarrow x$
return x

自身为树根

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

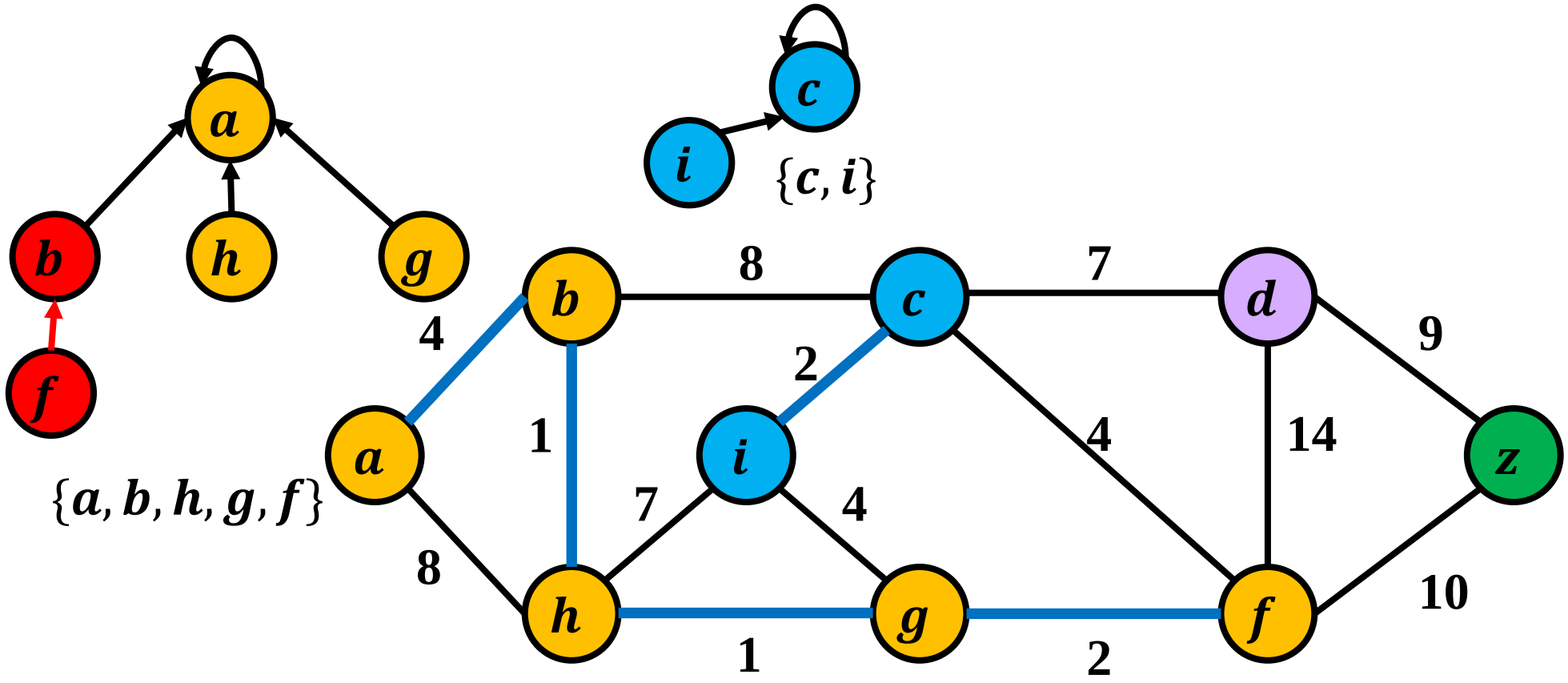
查找f的树根：



不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

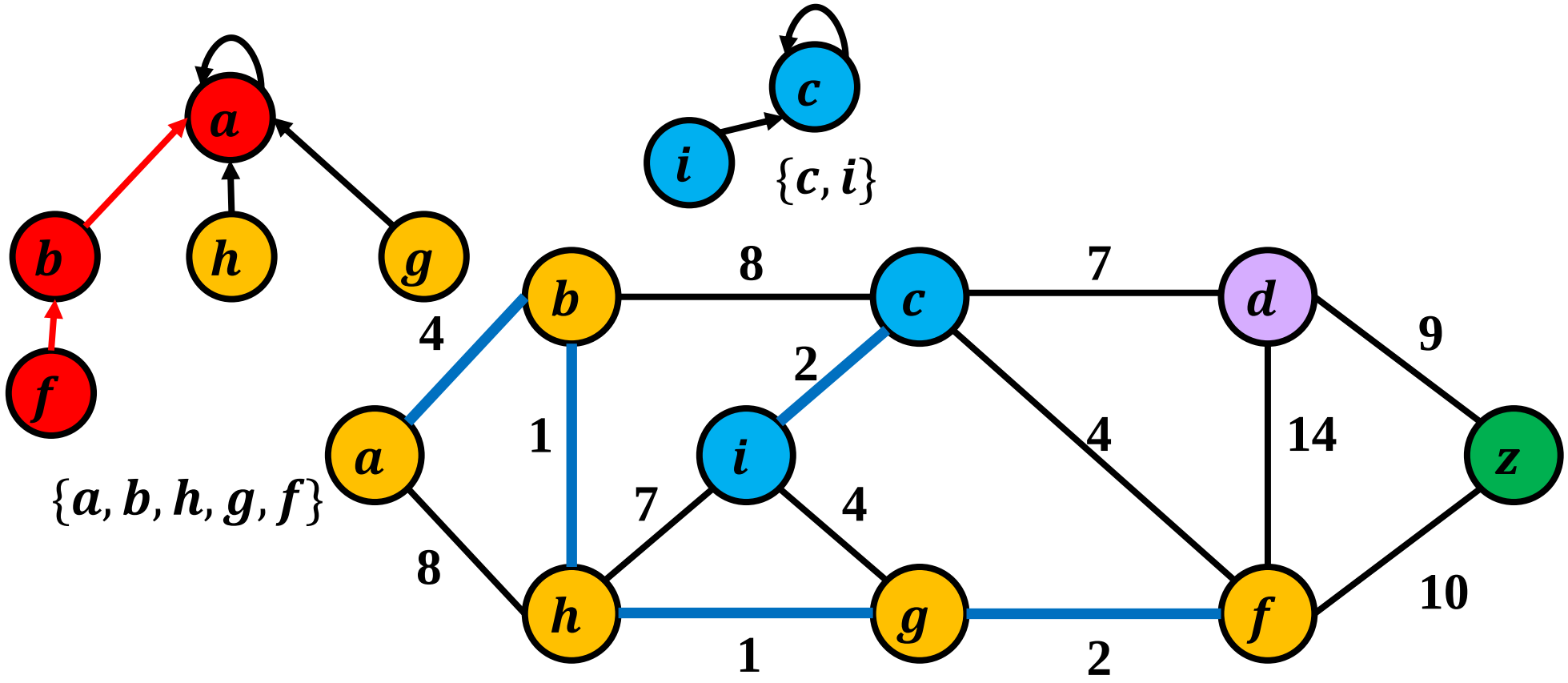
查找f的树根：



不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

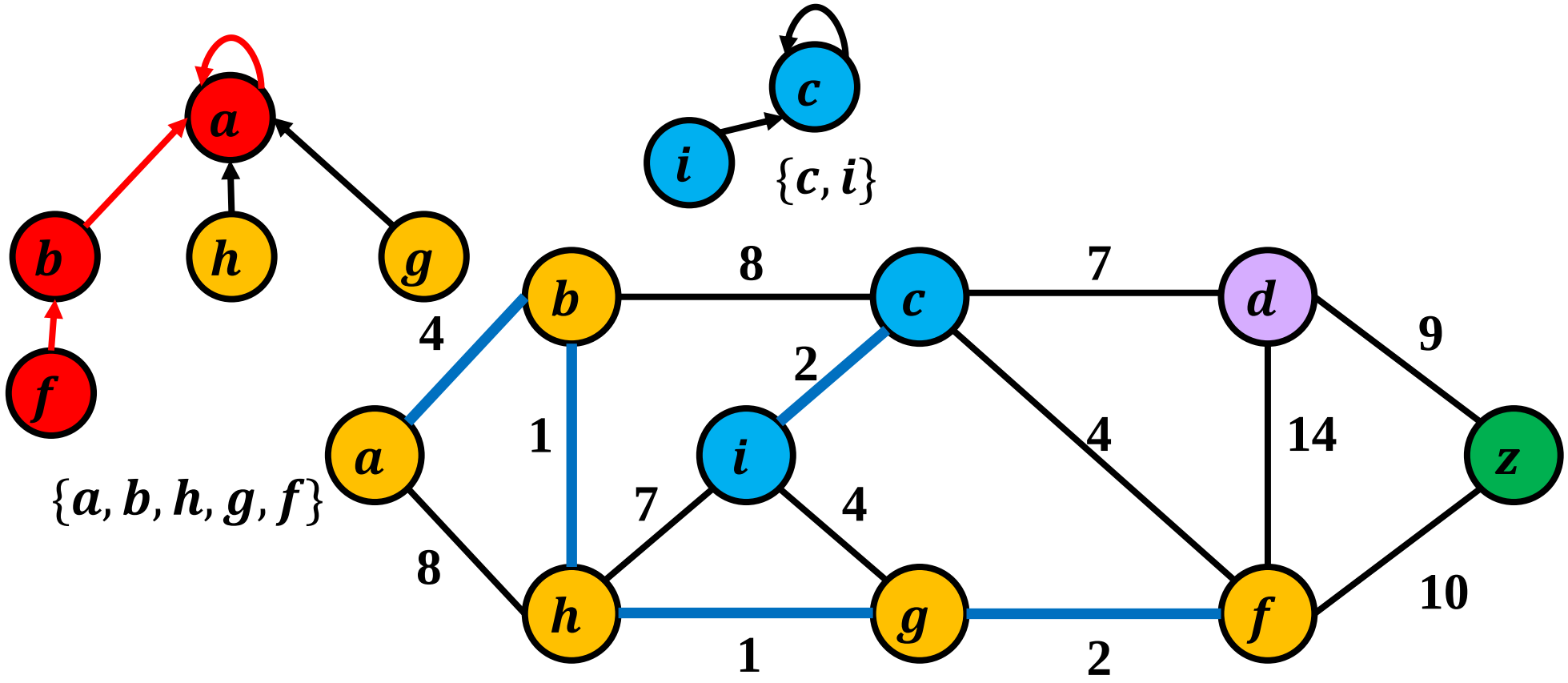
查找f的树根：



不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

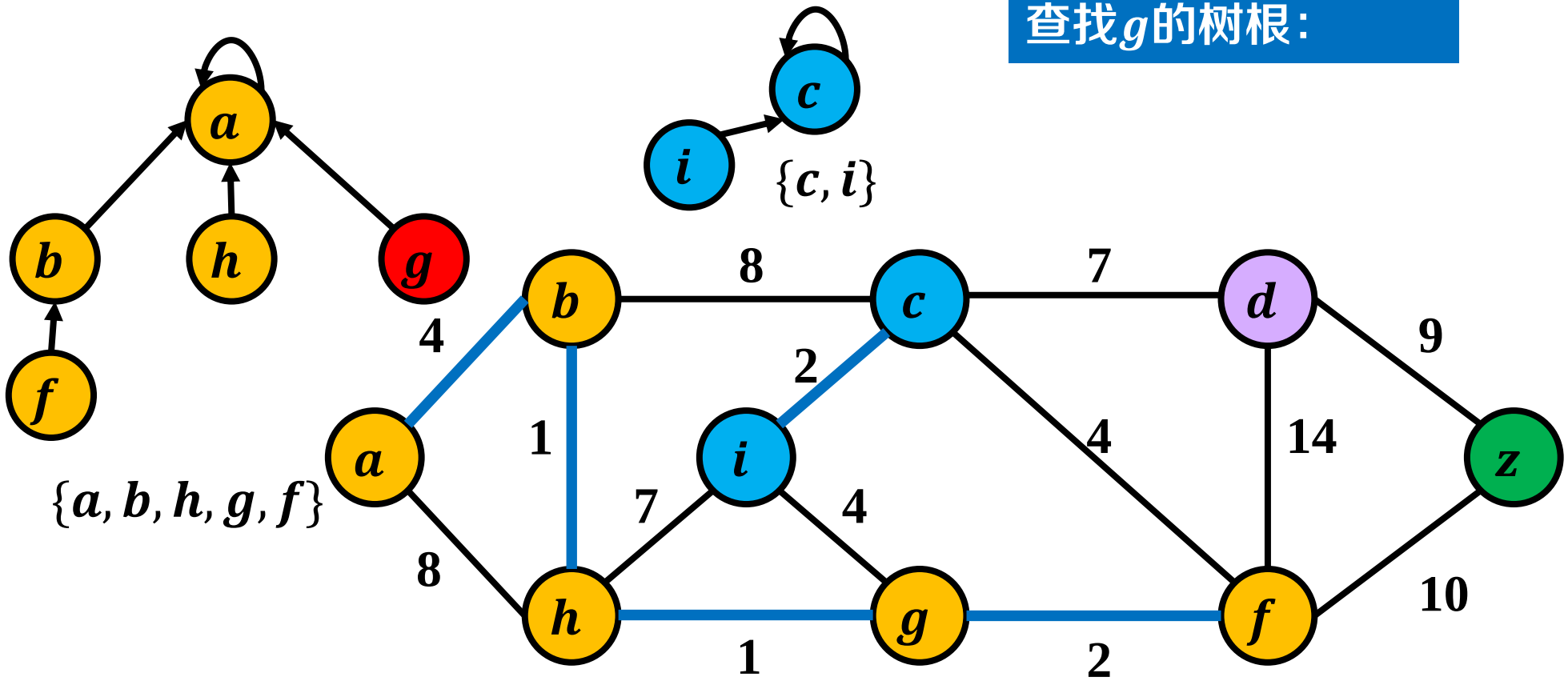


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

查找g的树根：

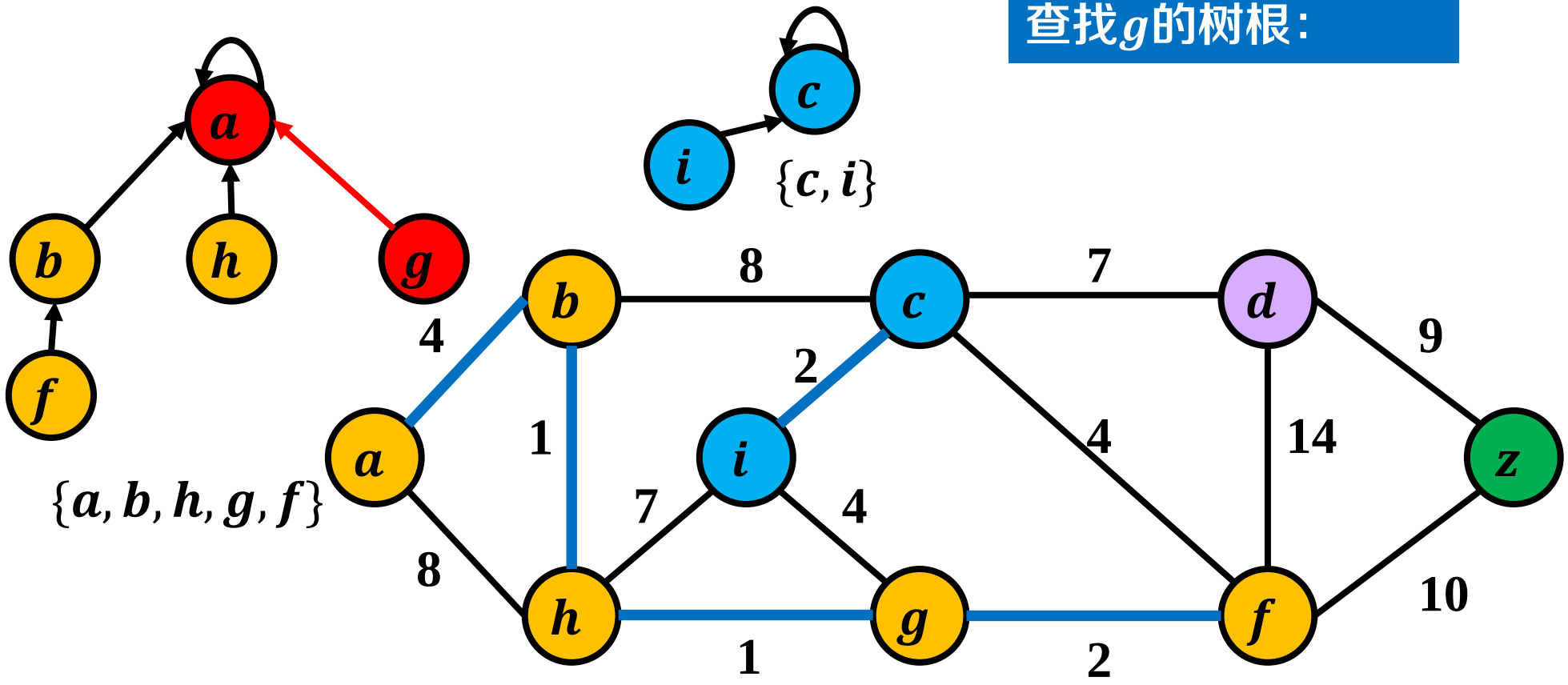


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

查找g的树根：

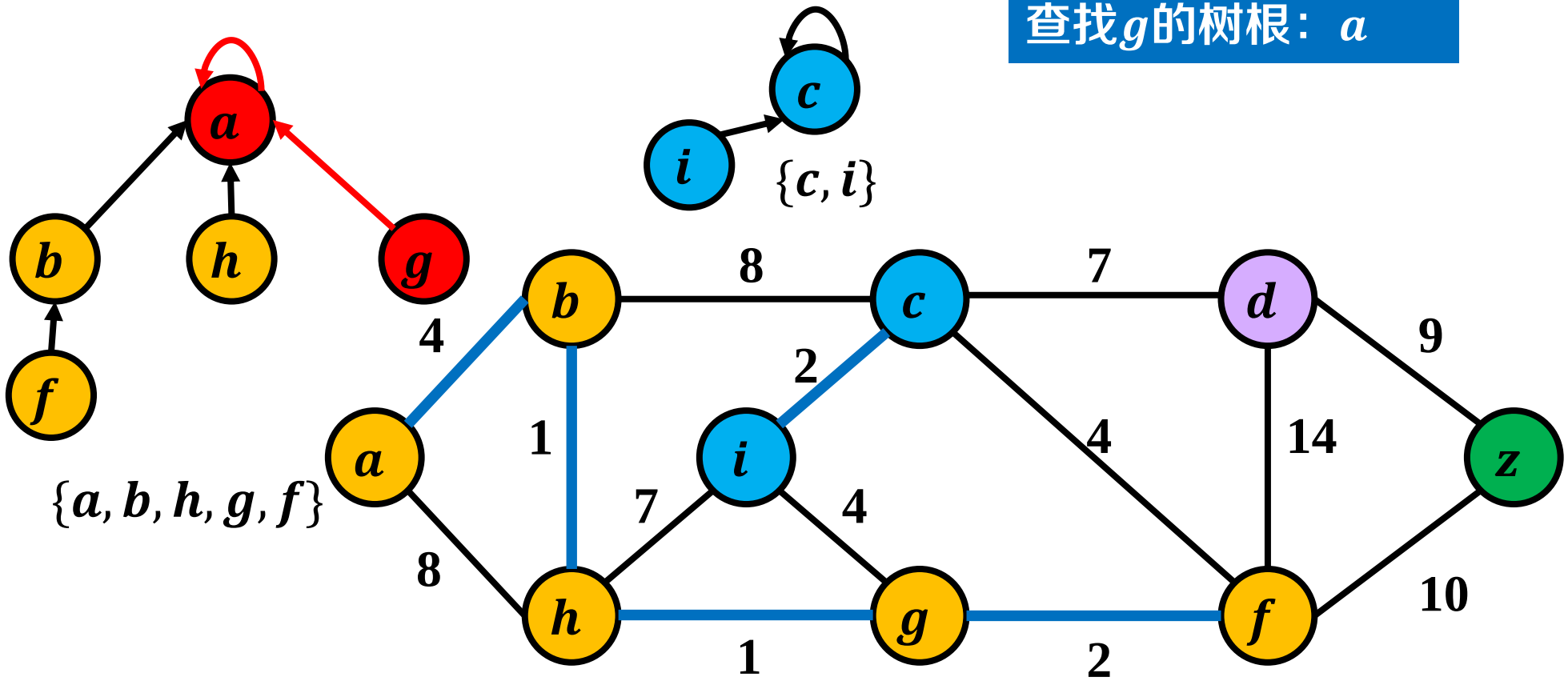


不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

查找g的树根：a



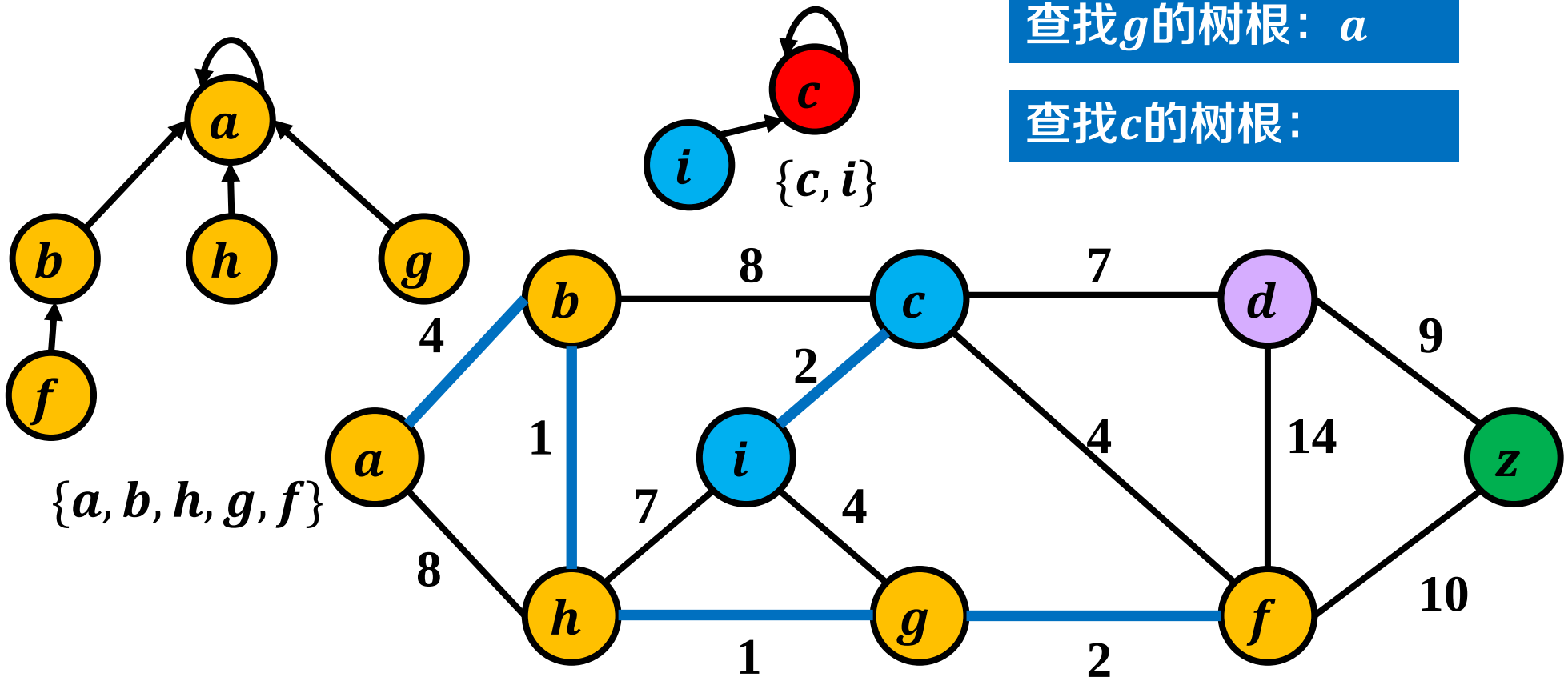
不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

查找g的树根：a

查找c的树根：



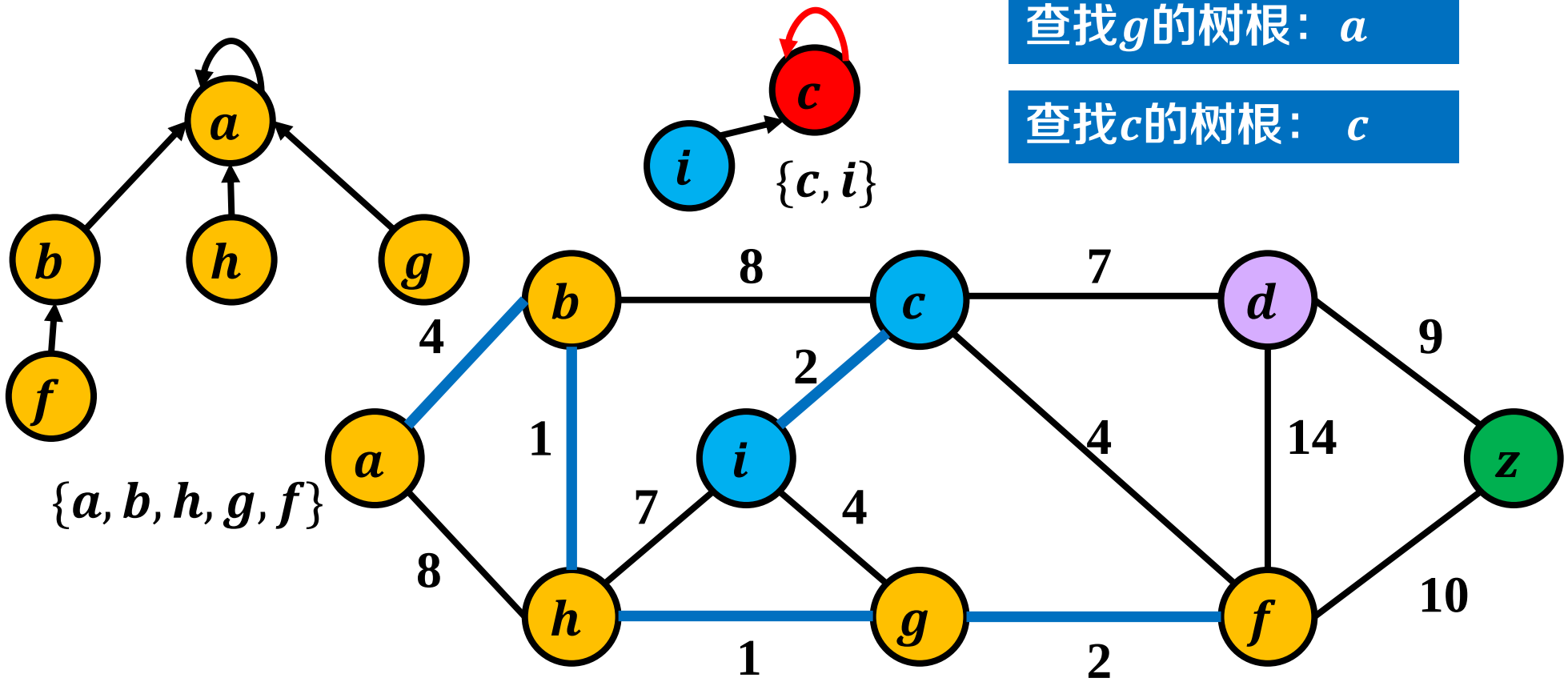
不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

查找f的树根：a

查找g的树根：a

查找c的树根：c



不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同

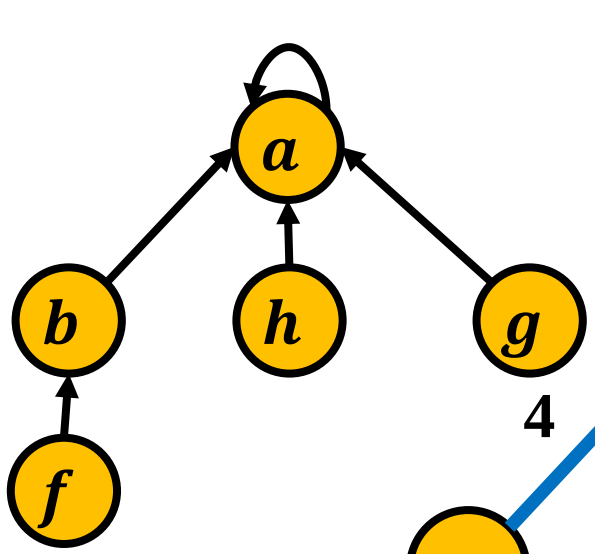
查找f的树根：a

查找g的树根：a

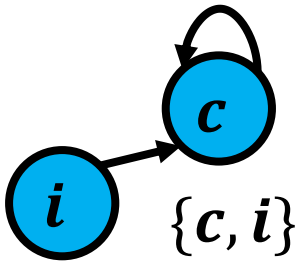
f与g在同一集合

查找c的树根：c

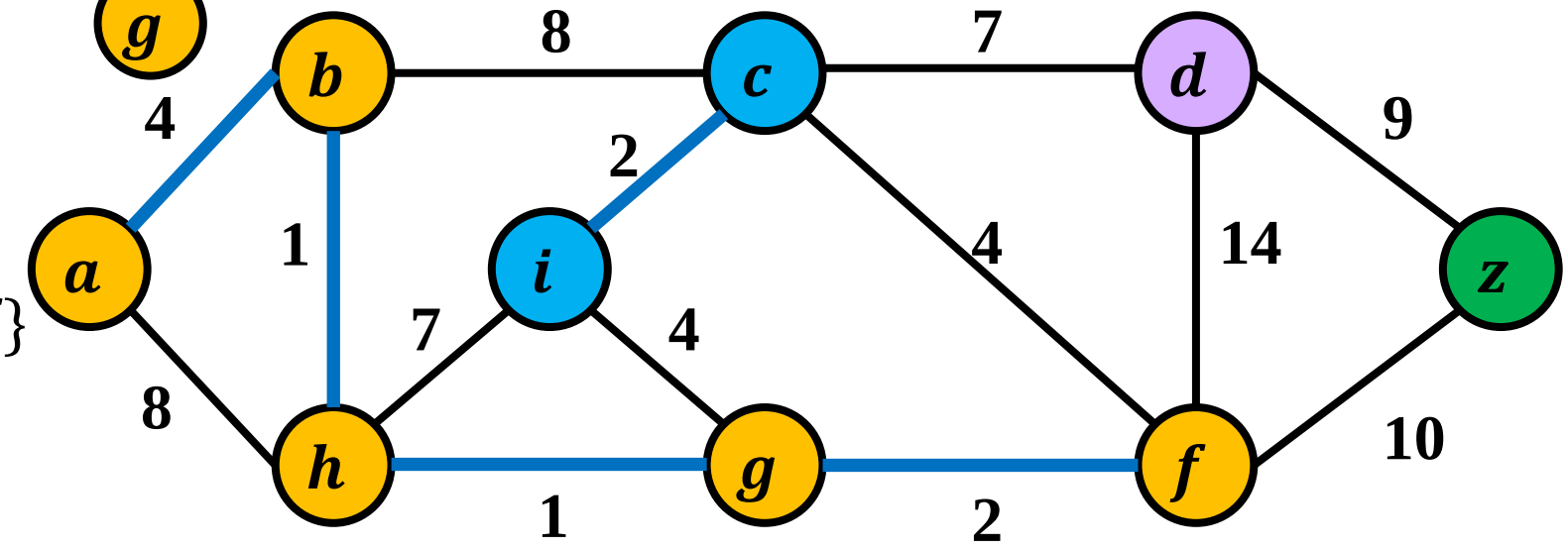
c与f,g不在同一集合



$\{a,b,h,g,f\}$



$\{c,i\}$



不相交集合：伪代码

- **Create-Set(x)**

```
输入: 顶点 x
输出: 不相交集合树
x.parent ← x
return x
```

- **Find-Set(x)**

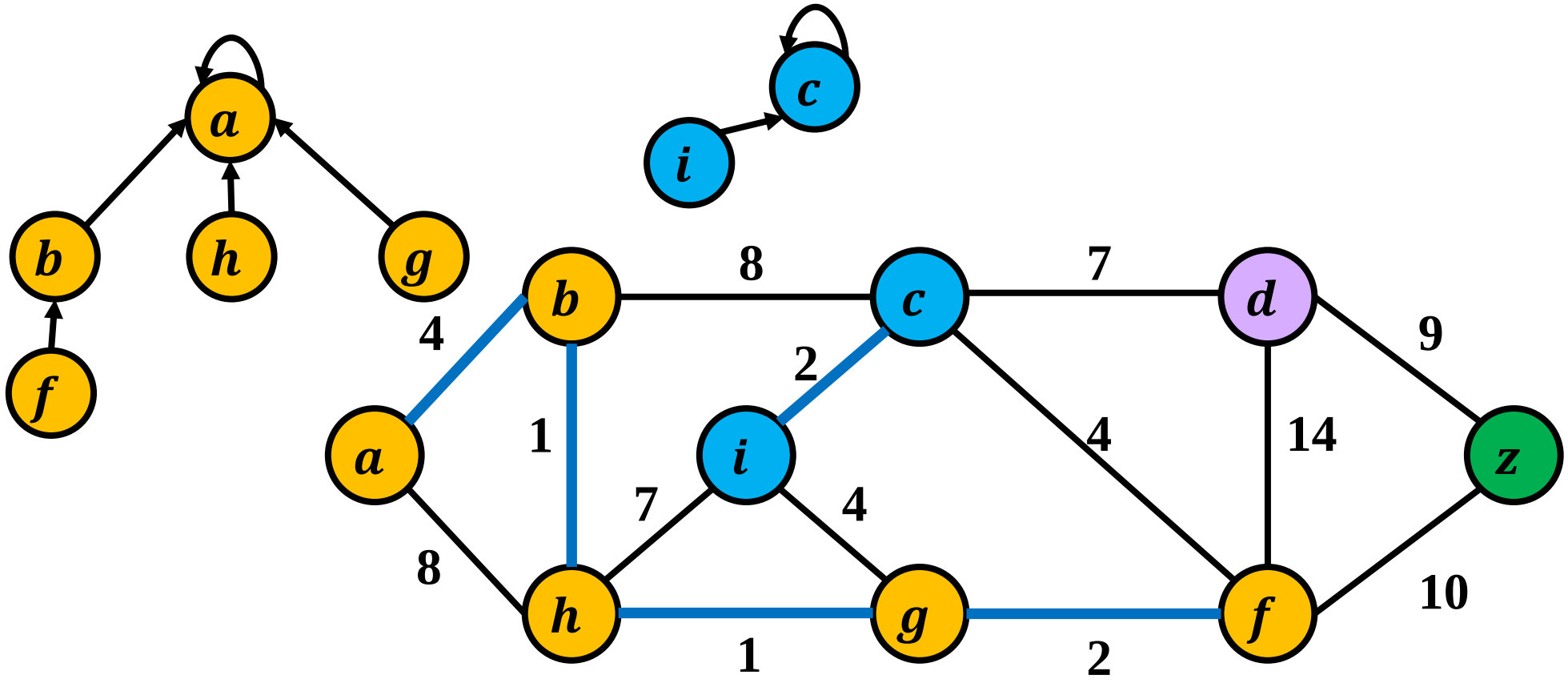
```
输入: 顶点 x
输出: 所属连通分量
while x.parent ≠ x do
|   x ← x.parent
end
return x
```

回溯查找

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树

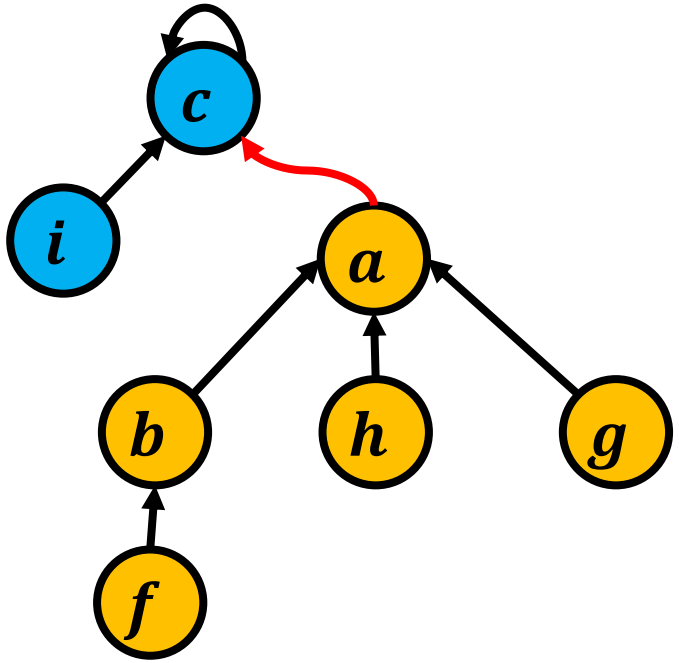
$\{a, b, h, g, f\} \cup \{c, i\}$



不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树

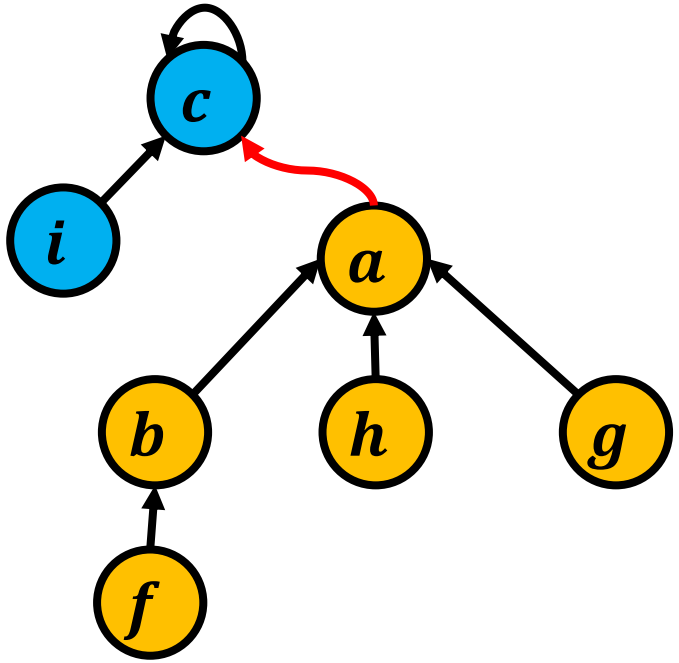
$$\{a, b, h, g, f\} \cup \{c, i\}$$

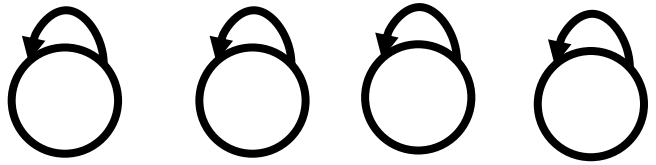


简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



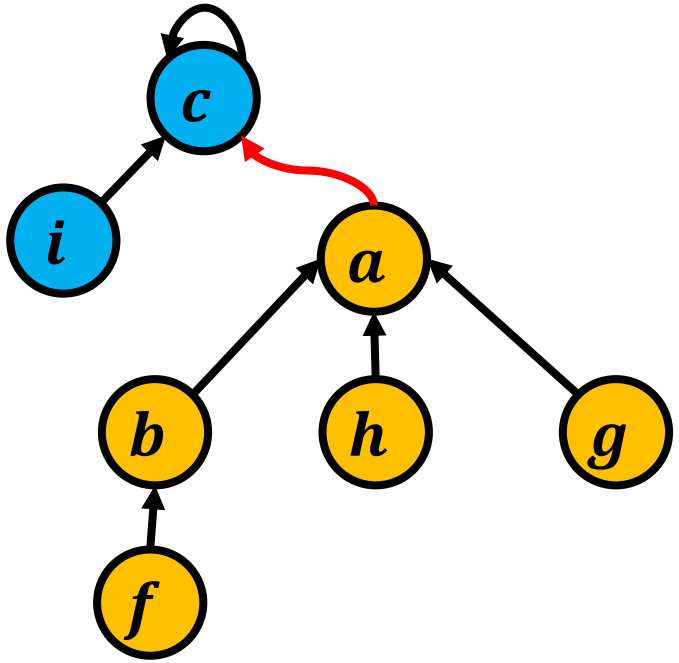


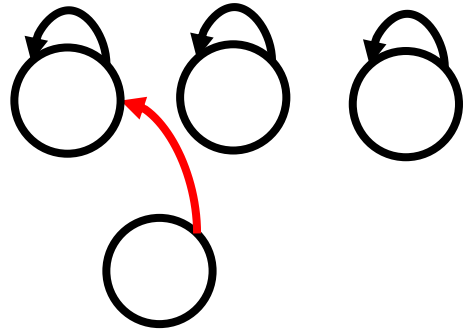
简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

潜在问题：树深度过大，降低查找效率

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



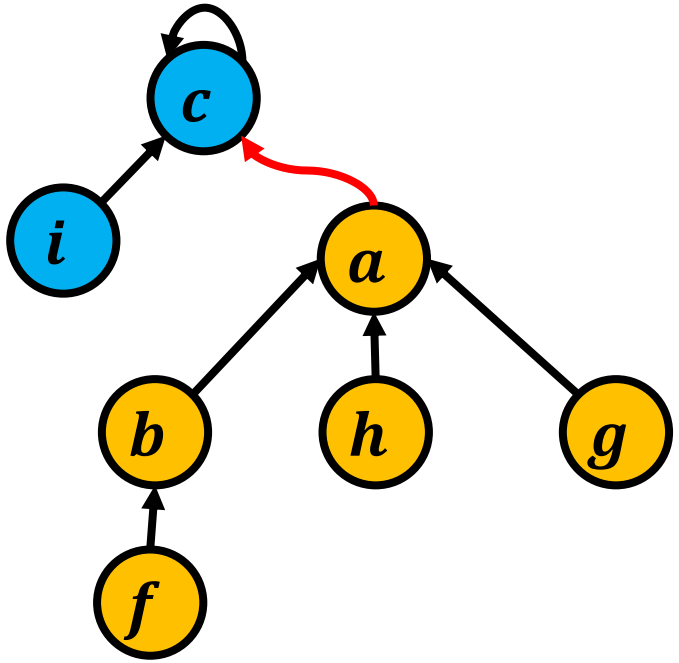


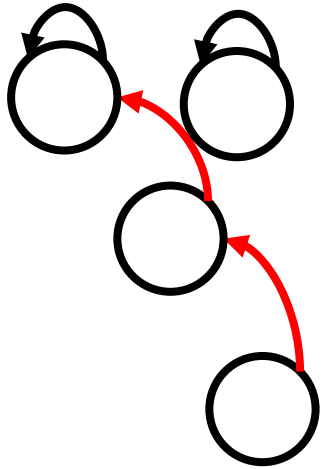
简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

潜在问题：树深度过大，降低查找效率

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



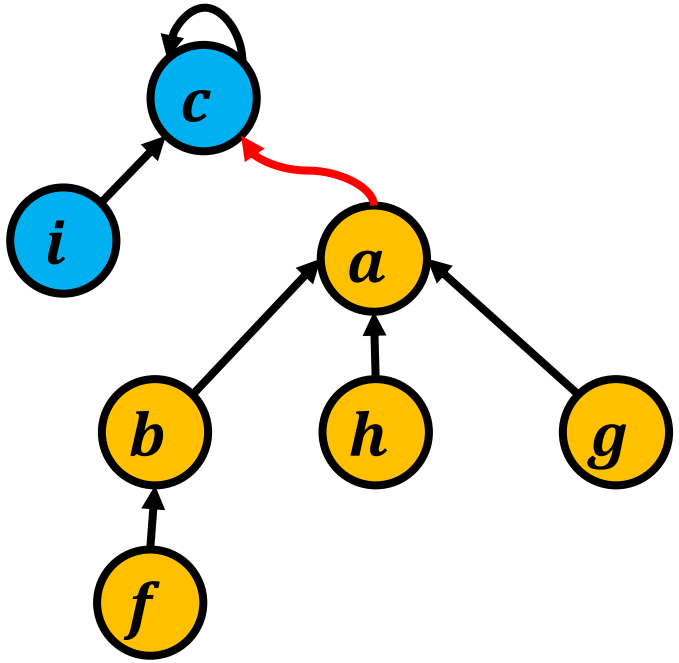


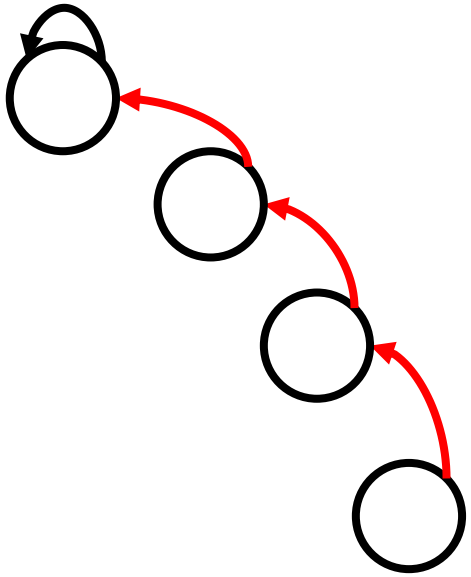
简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

潜在问题：树深度过大，降低查找效率

不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



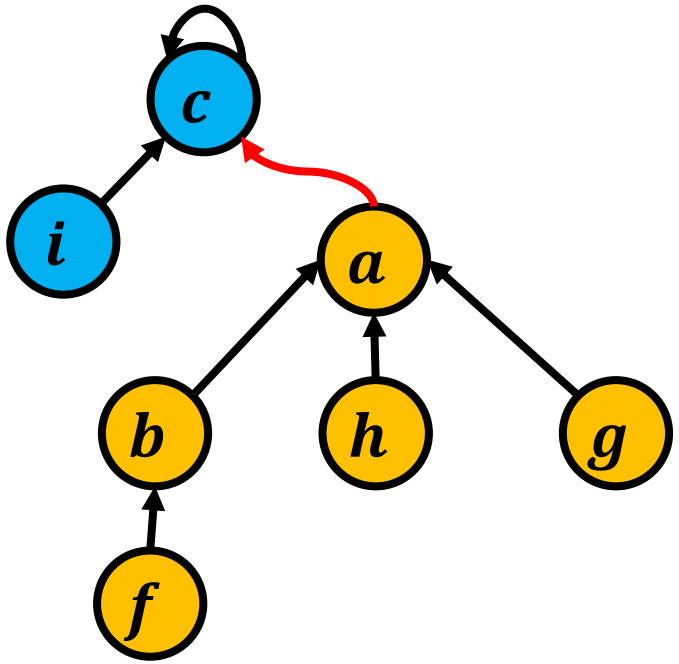


简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

潜在问题：树深度过大，降低查找效率

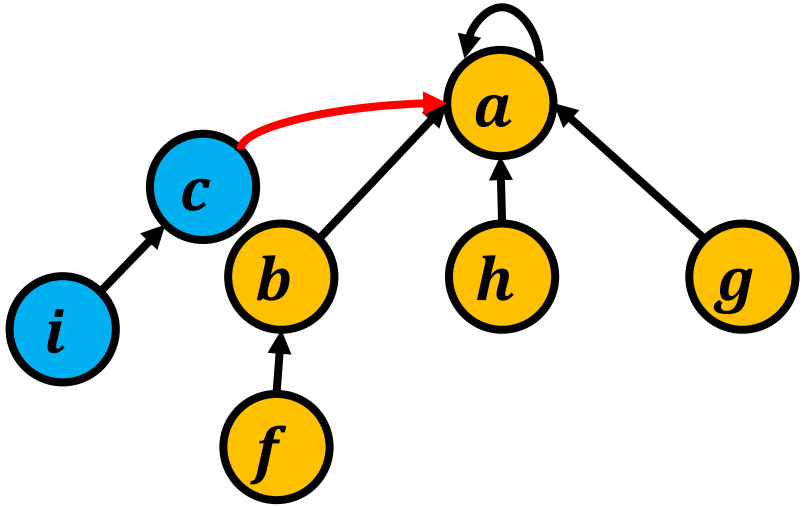
不相交集合

- 初始化集合：创建根结点，并设置一条指向自身的边
- 判定顶点是否在同一集合：回溯查找树根，检查树根是否相同
- 合并集合：合并两棵树



简单实现：找到两树根，任意连接两棵树

尽可能降低树高度
提高树根查找效率



高效实现：树高小的树连接到树高大的树上

不相交集合：伪代码

- **Union-Set(x)**

```
输入: 顶点 x, y
a ← Find-Set(x)
b ← Find-Set(y)
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

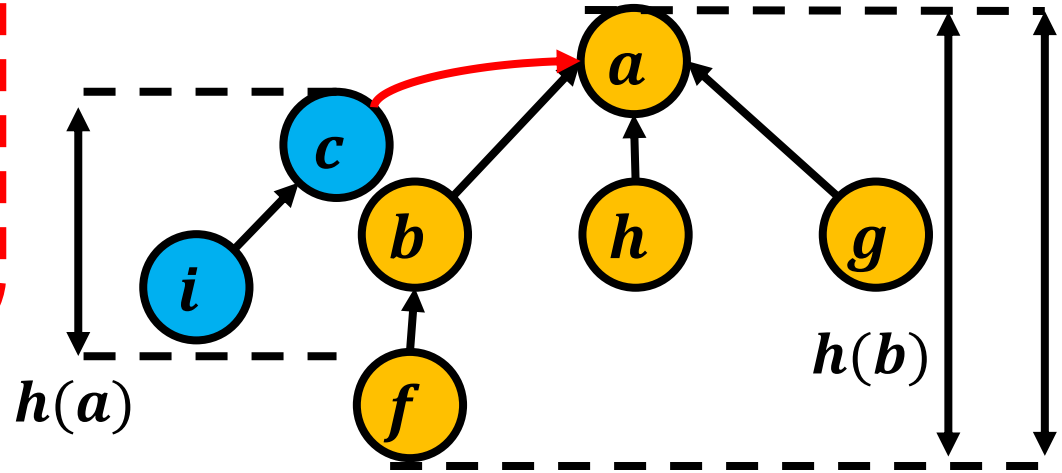
找到两树根

不相交集合：伪代码

- **Union-Set(x)**

```
输入: 顶点 x, y
a ← Find-Set(x)
b ← Find-Set(y)
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

高度小的连到高度大的树



$\max\{h(a), h(b)\}$

不相交集合：伪代码

- **Union-Set(x)**

输入: 顶点 x, y

$a \leftarrow$ Find-Set(x)

$b \leftarrow$ Find-Set(y)

if $a.height \leq b.height$ **then**

  if $a.height = b.height$ **then**

    $b.height \leftarrow b.height + 1$

  end

  $a.parent \leftarrow b$

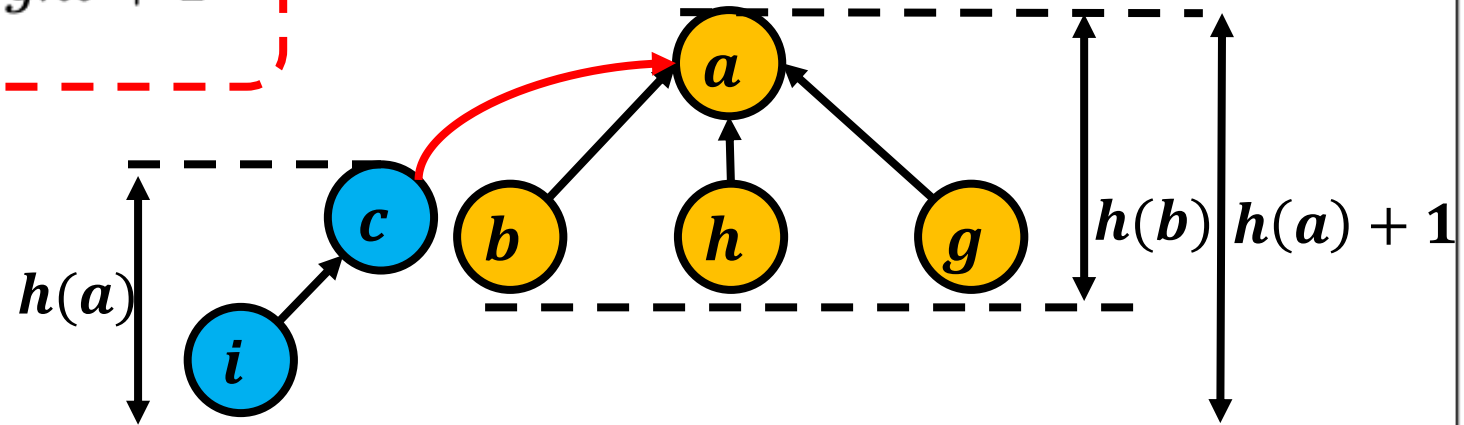
end

else

  $b.parent \leftarrow a$

end

高度相同，需要更新



不相交集合：时间复杂度

- **Create-Set(x)**

```
输入: 顶点 x
输出: 不相交集合树
x.parent ← x
return x
```

时间复杂度：$O(1)$

- **Find-Set(x)**

```
输入: 顶点 x
输出: 所属连通分量
while x.parent ≠ x do
  |   x ← x.parent
end
return x
```

h为树高

$O(h)$

时间复杂度：$O(h)$

不相交集合：时间复杂度

- **Union-Set(x)**

```
输入: 顶点 x, y
a ← Find-Set(x)
b ← Find-Set(y)
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

$O(h)$

$O(1)$

时间复杂度：$O(h)$

不相交集合：时间复杂度

- **Union-Set(x)**

```
输入: 顶点 x, y
a ← Find-Set(x)
b ← Find-Set(y)
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

$O(h)$

$O(1)$

时间复杂度：$O(h)$

问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系？

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b}$

依照假设

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}}$

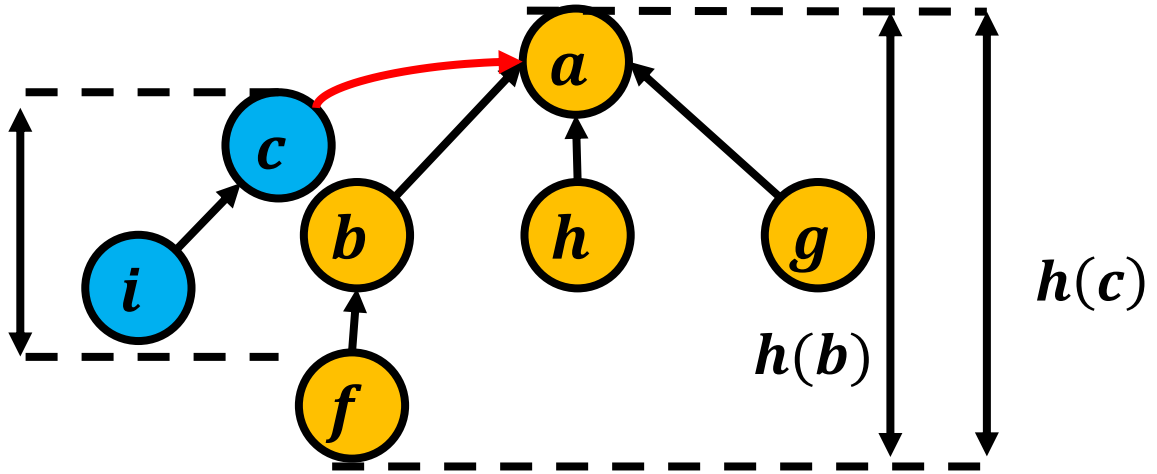
两正数之和大于其中任何一个

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$

```
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

高度不同，新树高为原树中的较大者



$h(c) = \max\{h(a), h(b)\}$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1}$

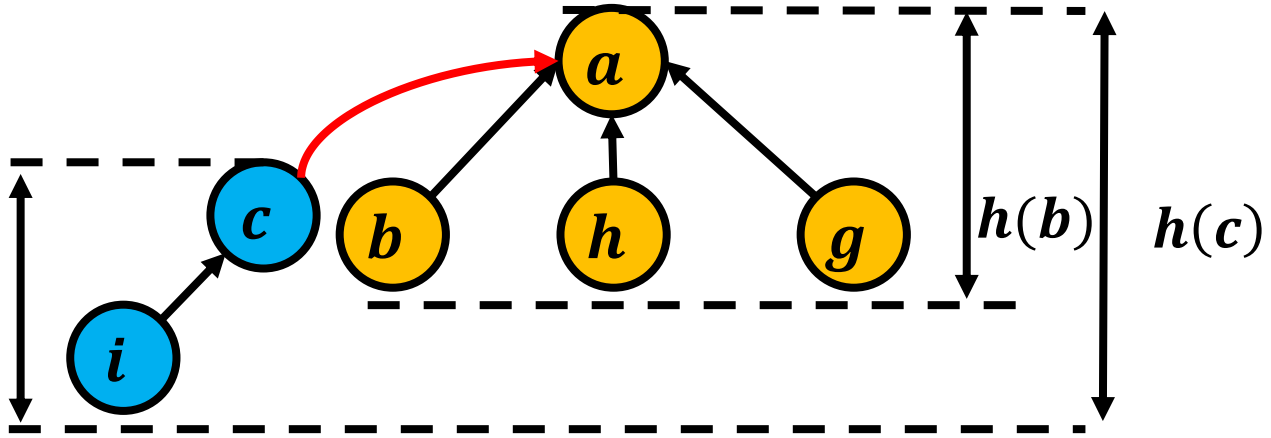
$$h_a = h_b$$
$$2^{h_a} + 2^{h_b} = 2 \times 2^{h_a} = 2^{h_a+1}$$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1} = 2^{h_c}$

```
if a.height ≤ b.height then
    if a.height = b.height then
        b.height ← b.height + 1
    end
    a.parent ← b
end
else
    b.parent ← a
end
```

高度相同，新树高为原树高+1



$h(c) = h(a) + 1$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1} = 2^{h_c}$
  - 综上，所有不相交集和都满足$|V| \geq 2^h$，即$h \leq \log|V|$

初始化产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

合并产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

不相交集合：时间复杂度

- 问题：树的高度h和顶点规模$|V|$有何关系 ⟶ $|V| \geq 2^h$
- 归纳法证明
  - 只有一个顶点，规模$|V| = 1$，高度$h = 0$，显然$1 \geq 2^0$
  - 假设：任意不相交集合m，高度h_m和规模V_m满足$V_m \geq 2^{h_m}$
  - 归纳：两不相交集合a, b拟做合并，设合并产生的新不相交集合为c
    - 若$h_a \neq h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} \geq 2^{\max\{h_a, h_b\}} = 2^{h_c}$
    - 若$h_a = h_b$：$V_c = V_a + V_b \geq 2^{h_a} + 2^{h_b} = 2^{h_a+1} = 2^{h_c}$
  - 综上，所有不相交集和都满足$|V| \geq 2^h$，即$h \leq \log|V|$
- Create-Set(x)：$O(1)$
- Find-Set(x)：$O(h) = O(\log|V|)$
- Union-Set(x)：$O(h) = O(\log|V|)$

初始化产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

合并产生的不相交集合满足$|V| \geq 2^h$

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if u, v 不在同一子树 then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        合并u, v所在子树
    end
end
return T
```

问题：如何高效判定和维护顶点所在的子树?

伪代码

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
为每个顶点建立不相交集
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        Union-Set(u, v)
    end
end
return T
```

创建不相交集

关系检查

合并不相交集

提纲

问题的回顾

算法与实例

正确性证明

不相交集合

复杂度分析

复杂度分析

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序                          ---------- O(|E|log|E|)
为每个顶点建立不相交集                        ---------- O(|V|)
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
        T ← T ∪ {(u, v)}                      } O(log|V|)
        Union-Set(u, v)                       }
    end                                       } O(|E|log|V|)
end
return T
```

- **时间复杂度**
  - $O(|E|\log|E| + |E|\log|V|)$

复杂度分析

- **MST-Kruskal(G)**

```
输入: 图 G
输出: 最小生成树
把边按照权重升序排序
为每个顶点建立不相交集
T ← {}
for (u, v) ∈ E do
    if Find-Set(u) ≠ Find-Set(v) then
        T ← T ∪ {(u, v)}
        Union-Set(u, v)
    end
end
return T
```

$O(|E|\log|E|)$

$O(|V|)$

$O(\log|V|)$

$O(|E|\log|V|)$

- **时间复杂度**

假设$|E| = O(|V|^2)$

$$O(|E|\log|E| + |E|\log|V|) = O(|E|\log|V|^2 + |E|\log|V|) = O(|E|\log|V|)$$

小结

- **Prim算法和Kruskal算法比较**

	Prim算法	Kruskal算法
核心思想	保持一棵树，不断扩展	子树森林，合并为一棵树
数据结构	优先队列	不相交集合
求解视角	微观视角，基于当前点选边	宏观视角，基于全局顺序选边
算法策略	都是采用贪心策略的图算法	