

## | 第二章：控制系统的数学模型



## 第二章 控制系统的数学模型

2.1 微分方程、传递函数和阶跃响应

2.2 机理分析建模方法

2.3 典型环节的动态特性

2.4 方框图等效变换和信号流图

2.5 状态空间模型及求解

2.6 状态空间模型的标准形

2.7 实验建模方法



# 微分方程、传递函数和阶跃响应

2.1.1 引言

2.1.2 微分方程

2.1.3 传递函数

2.1.4 阶跃响应



# 引言

## 控制系统数学模型的定义

描述控制系统输入输出变量之间静态或动态关系的数学表达式或图表。

## 数学模型的类型

按功能分：静态特性模型和动态特性模型。

静态特性模型：代数方程、静态结构图、静态关系表，等。

动态特性模型：微分方程、传递函数、频率特性函数、差分方程、状态方程、方框图、信号流图、动态结构图、阶跃响应曲线，等。



# 数学模型的建立

## 数学模型的建立原则

分清主次，合理简化，

选定类型，整理归纳。

## 数学模型的建立方法

**机理分析建模法：** 根据系统遵循的物理化学规律推导出模型。

**实验建模法：** 根据实验数据拟合出模型。



## 微分方程

数学式定义：设输入为 $r(t)$ ，输出为 $y(t)$ ，则 $n$ 阶线性动态系统的微分方程为：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{r} + b_0 r$$

式中： $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_0, b_1, \cdots, b_m$ 均为常系数；且有阶数 $n \geq m$ 。



## 传递函数

### 定义

文字定义：零初始条件下系统输出信号的拉氏变换与输入信号的拉氏变换之比。

数学式定义：设输入为  $r(t)$ ，输出为  $y(t)$ ，则系统的传递函数为  $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 。

### 传递函数的求取方法

- 1) 对微分方程进行拉氏变换（零初始条件）
- 2) 对脉冲响应进行拉氏变换
- 3) 实验建模方法（详见第2.7节）



## 传递函数的求取方法

1) 对微分方程进行拉氏变换（零初始条件）

系统微分方程：

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m r^{(m)} + b_{m-1} r^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{r} + b_0 r$$

零初始条件拉氏变换：

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

整理得传递函数：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

规范形式：A(s)为首一多项式，即 $a_n=1$ 。





## 传递函数的求取方法

2) 对脉冲响应进行拉氏变换



取输入  $x(t)=\delta(t)$ , 则有  $X(s)=1$ ,

所以输出  $Y(s)=G(s)X(s)=G(s)$ ,

这样有传递函数的求取公式: 当  $x(t)=\delta(t)$ ,  $G(s)=L[y(t)]$ 。

**系统的传递函数等于单位脉冲响应的拉氏变换。**



## 传递函数的性质

1. 传递函数只与系统本身的结构和特性参数有关，而与输入量、初始条件等外部因素无关。
2. 实际系统的传递函数是 $s$ 的有理分式 ( $n \geq m$ ) 。
3. 传递函数是物理系统的数学模型，但不能反映物理系统的性质，不同的物理系统可有相同的传递函数。
4. 传递函数只适用于线性时不变系统。



## 阶跃响应

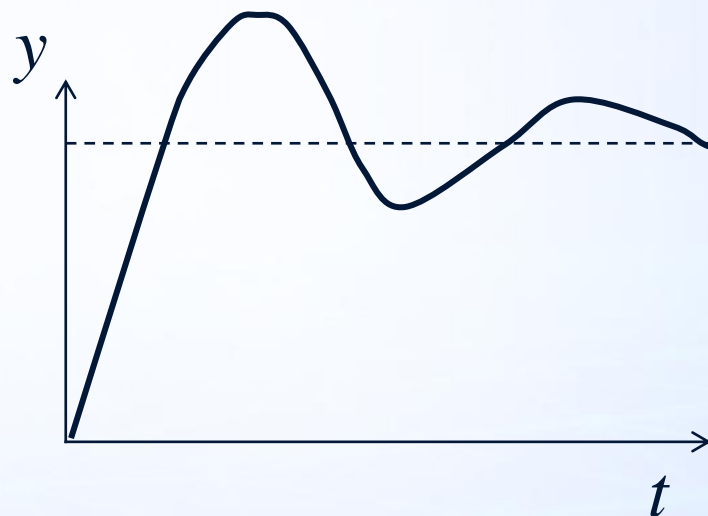
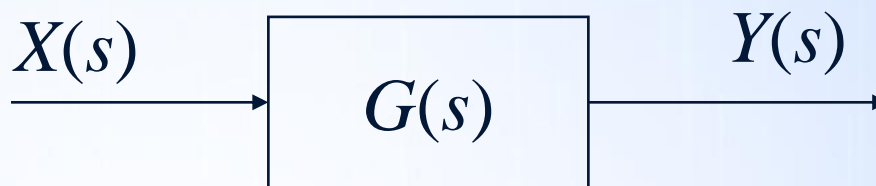
通过观察系统的阶跃响应曲线，可以直观地比较和分析不同系统的动态特性。

已知系统的传递函数，可通过对传递函数与单位阶跃输入信号拉氏变换的乘积进行拉氏反变换，求取系统的单位阶跃响应。

若输入  $x(t)=1(t)$ ，则有  $X(s)=1/s$ ，

所以输出  $Y(s)=G(s)/s$ ，

可求得阶跃响应的表达式： $y(t)=L^{-1}[G(s)/s]$ 。





## 本节内容回顾

了解**数学模型**的定义、类型及主要的建模方法。

掌握**微分方程**模型的定义和形式。

掌握**传递函数**模型的定义、性质及求取方法。

掌握**阶跃响应**的求取方法。

# | 机理分析建模方法





## 机理分析建模方法

### 2.2.1 机理建模的步骤

### 2.2.2 机理建模典型范例

机械系统      牛顿运动定律

电气系统      基尔霍夫定律

液力系统      质量守恒定律

热力系统      能量守恒定律

### 2.2.3 物理系统的相似性



## 机理建模的步骤

1. 将系统划分成若干**元件**，确定各元件的**输入量**和**输出量**。



2. 根据物理化学规律，列写各元件的**动态方程式**，为使问题简化可**忽略次要因素**。

(物理化学规律例如：牛顿运动定律，基尔霍夫定律，质量守恒定律，能量守恒定律，等。)



3. 列写各元件动态方程式中的**中间变量**关系式。



4. 消去中间变量，整理出系统的**输入输出关系式**。



## 机械系统：弹簧-质量-阻尼系统

已知：弹簧弹性系数  $K$ ，质量块质量  $M$ ，阻尼器阻尼系数  $f$ 。

求：以外力  $F$  为输入，位移  $y$  为输出的系统动态方程式。

解：根据**牛顿第二定律**：

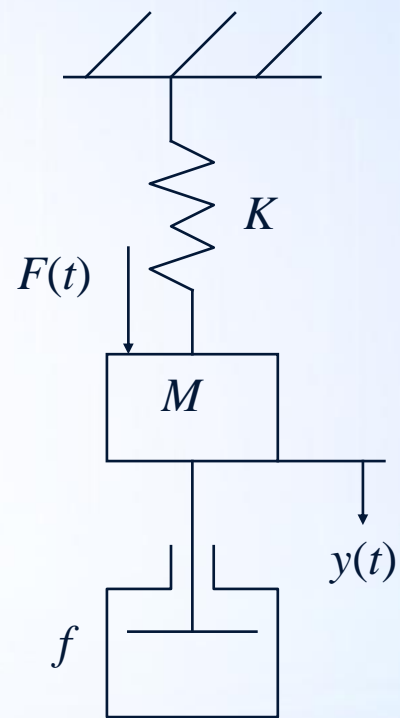
$$F(t) - F_1(t) - F_2(t) = Ma$$

代入阻尼器和弹簧的特性：

$$F(t) - f \frac{dy(t)}{dt} - Ky(t) = M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

整理成规范形式：

$$\left( \frac{M}{K} \right) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left( \frac{f}{K} \right) \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \left( \frac{1}{K} \right) F(t)$$



弹簧-质量-阻尼系统





## 机械系统：转动系统

已知：转动惯量 $J$ ，转矩 $T$ ，摩擦系数 $f$ ，转角 $\theta$ 。

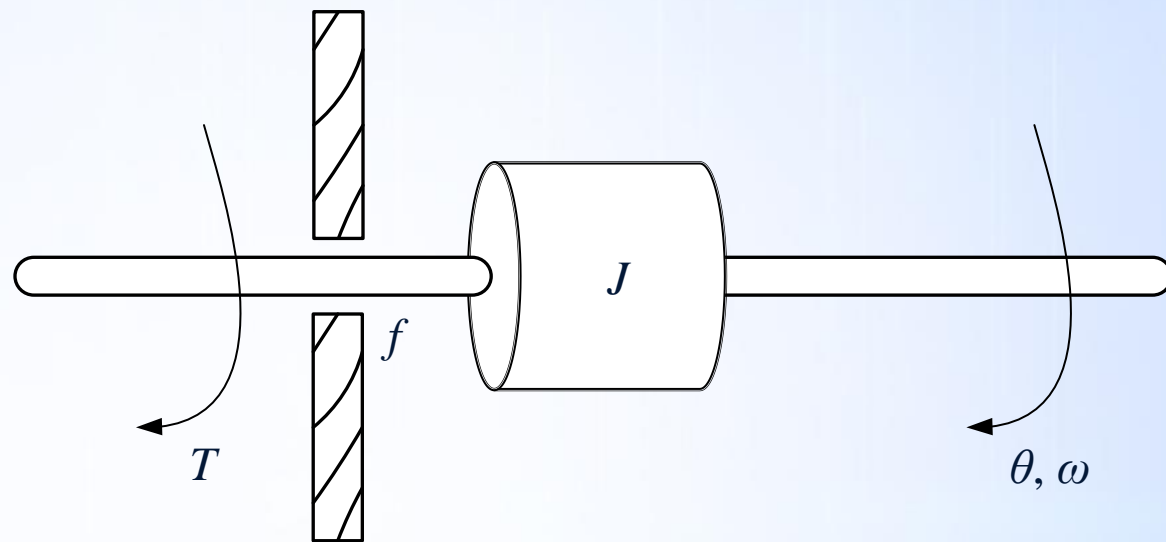
求：以转矩 $T$ 为输入，转角 $\theta$ 为输出的系统动态方程式。

解：根据刚体定轴转动定律得：

$$J \frac{d\omega}{dt} = T - f\omega$$

将  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  代入并整理后可得：

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt} = T$$



机械转动系统



## 电气系统：RLC电路

已知：电阻 $R$ ，电感 $L$ ，电容 $C$ ，电流 $i$ 。

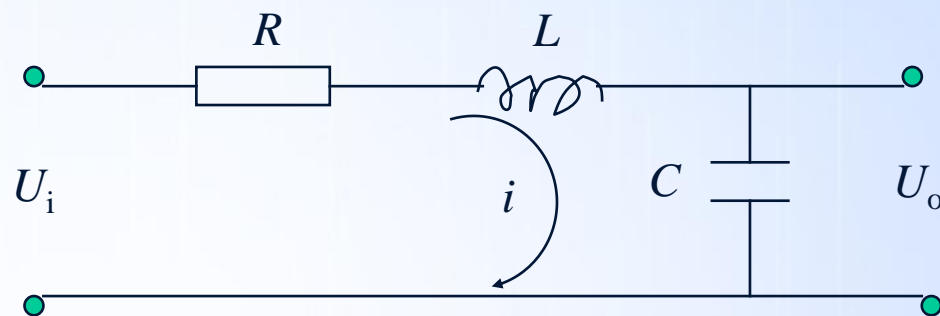
求：以 $U_i$ 为输入， $U_o$ 为输出的系统动态方程式。

解：根据基尔霍夫定律：

$$U_i = U_R + U_L + U_o = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

考虑到：  $i = C \frac{dU_o}{dt}$

则有：  $LC \frac{d^2 U_o(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_o(t)}{dt} + U_o(t) = U_i(t)$



RLC电路



## 液力系统：单容水箱

已知：水箱入口体积流量 $Q_i$ ，出口体积流量 $Q_o$ ，截面积 $A$ ，液位 $H$ 。

求：以  $Q_i$  为输入， $H$  为输出的系统动态方程式。

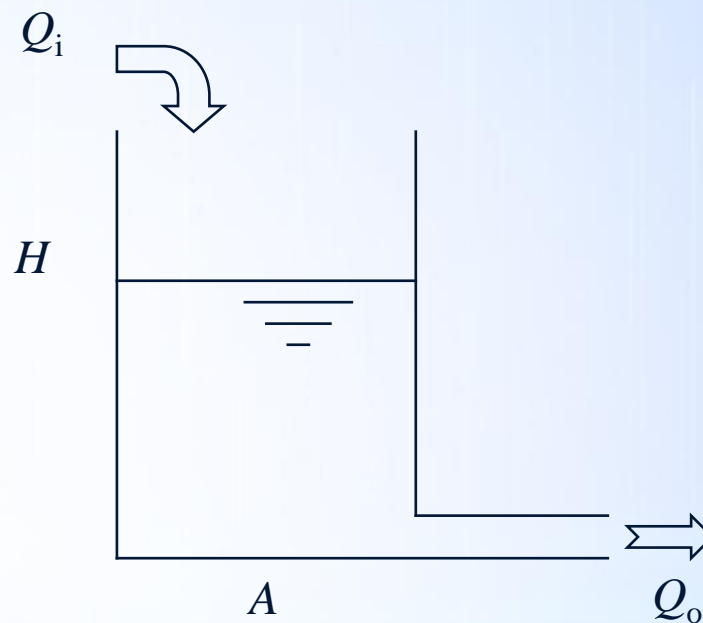
解：根据**质量守恒定律**得：
$$\frac{dH}{dt} = \frac{(Q_i - Q_o)}{A}。$$

$Q_o$ 为中间变量，考虑流量公式  $Q_o = \alpha\sqrt{H}$ ，

对其做线性化处理得： $\Delta Q_o = \alpha'\Delta H$ 。

将其代入上述微分方程得：
$$\frac{d\Delta H}{dt} = \frac{1}{A}(\Delta Q_i - \alpha'\Delta H)。$$

整理成规范形式：
$$\left(\frac{A}{\alpha'}\right)\frac{d\Delta H}{dt} + \Delta H = \left(\frac{1}{\alpha'}\right)\Delta Q_i。$$



单容水箱



## 热力系统：绝热加热过程

已知：进热流量 $Q_i$ ，出热流量 $Q_o$ ，工质质量流量 $G$ ，温度 $\theta$ ，比热 $C_p$ ，容器内质量 $M$ 。

求：以 $Q_i$ 为输入， $\theta$ 为输出的系统动态方程式。

解：根据**能量守恒定律**（外加能量=内能变化）得：

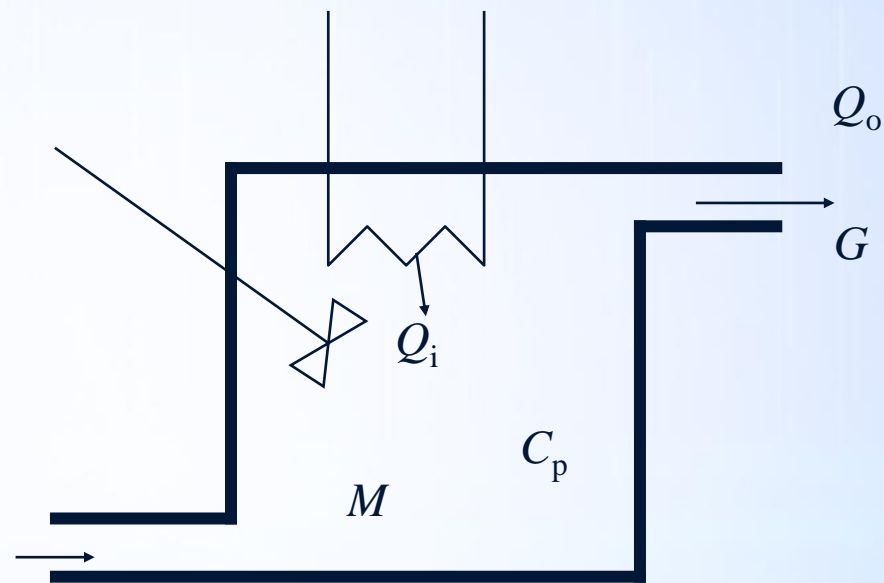
$$MC_p \frac{d\theta}{dt} = Q_i - Q_o$$

中间变量为 $Q_o$ ，考虑关系式 $Q_o = GC_p \theta$ ，代入上式得：

$$MC_p \frac{d\theta}{dt} + GC_p \theta = Q_i$$

整理成规范形式：

$$M \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{1}{GC_p} Q_i$$



绝热加热过程



## 物理系统的相似性

不同的物理系统机理不同，但其数学模型确可能有相同的结构形式，也就是说具有相似性。

上述四种物理系统的相似性：

物理系统	势	流	阻	容	感
机械系统	$F(T)$	$v(\omega)$	$f$	$1/K$	$m(J)$
电气系统	$U$	$i$	$R$	$C$	$L$
液力系统	$H$	$Q$	$R$	$A$	
热力系统	$\theta$	$Q$	$R$	$C$	

利用物理系统的相似性，有时可使机理分析建模工作大为简化。



## 本节内容回顾

掌握机理分析建模方法。

了解物理系统的相似性。



## 典型环节的数学模型

2.3.1 比例环节

2.3.2 积分环节

2.3.3 微分环节

2.3.4 惯性环节

2.3.5 振荡环节

2.3.6 迟延环节

2.3.7 PID控制器

P控制器

PI控制器

PD控制器

PID控制器



## 分析环节动态特性的基本步骤

1. 列写动态方程式
2. 用拉氏变换求传递函数
3. 用拉氏反变换解出阶跃响应
4. 记住响应特点和对应的物理实例

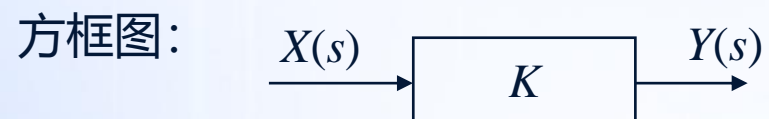




## 比例环节

动态方程:  $y(t)=Kx(t)$

传递函数:  $G(s)=K$

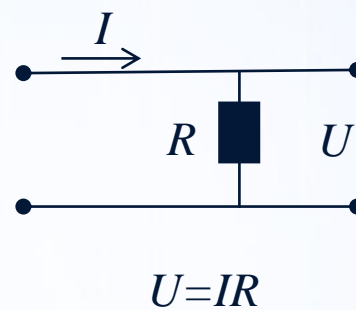


阶跃响应:



特点: 输出与输入成比例。

实例:

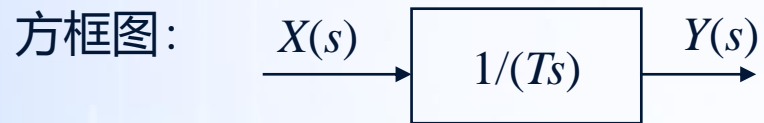




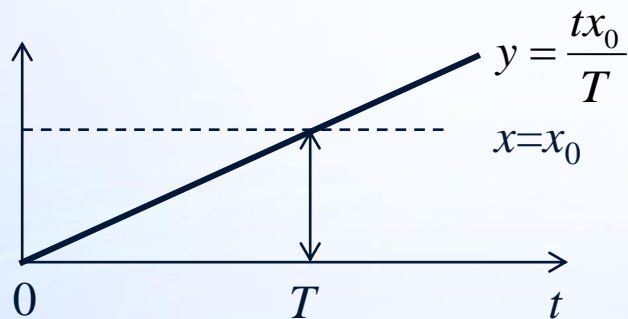
## 积分环节

动态方程:  $y(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x(t) dt$

传递函数:  $G(s) = \frac{1}{Ts}$

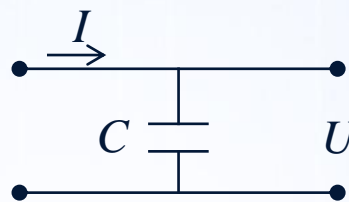


阶跃响应:



特点:  $T$ 越大则积分越慢。

实例:



$$U = \frac{1}{C} \int I dt$$



## 微分环节

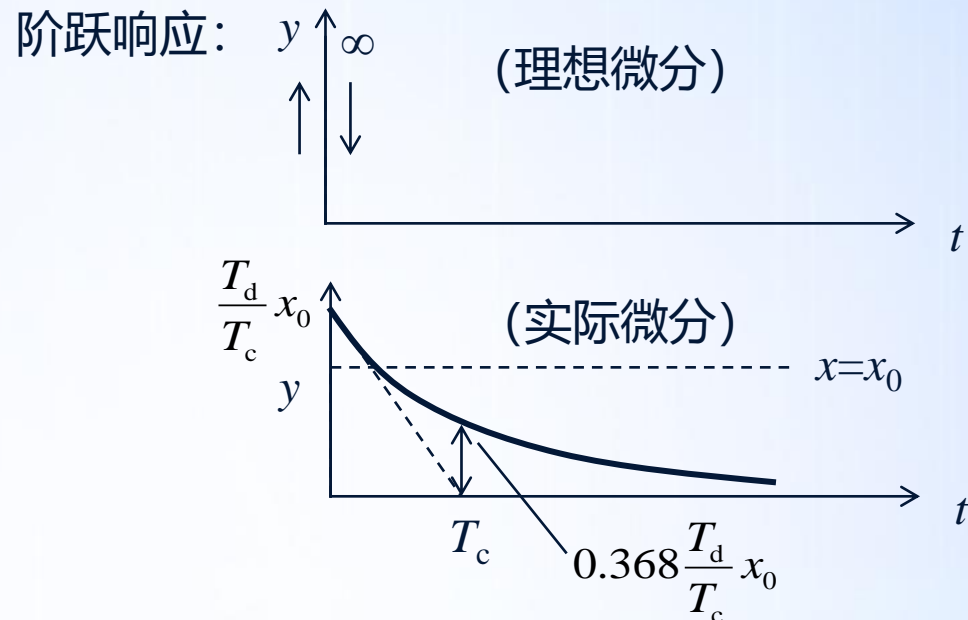
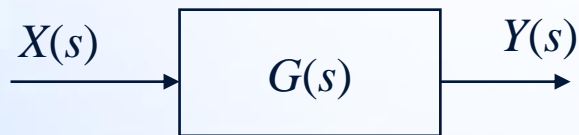
动态方程:  $y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}$  (理想微分)

$T_c \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = T_d \frac{dx(t)}{dt}$  (实际微分)

传递函数:  $G(s) = T_d s$  (理想微分)

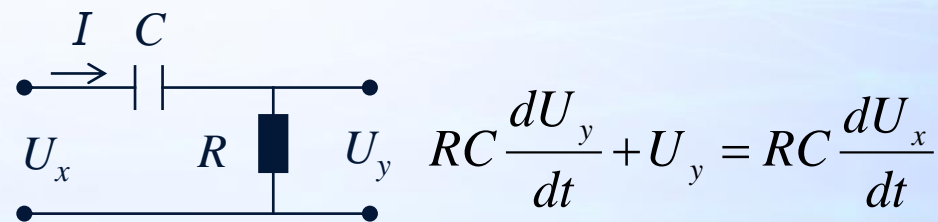
$G(s) = \frac{T_d s}{T_c s + 1}$  (实际微分)

方框图:



特点:  $T_d$  决定微分作用时间;  $T_c$  决定过渡过程时间。

实例:

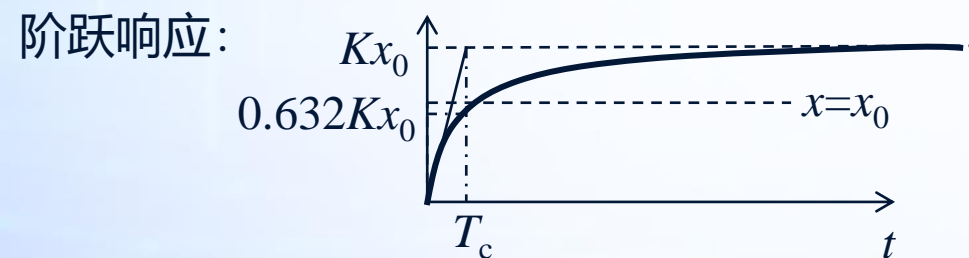




## 惯性环节

动态方程:  $T_c \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$

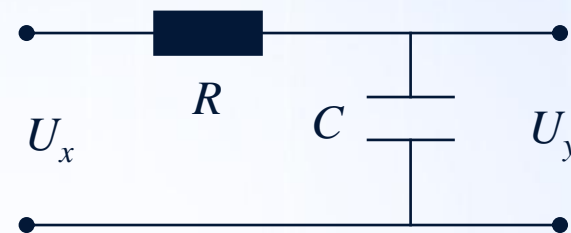
传递函数:  $G(s) = \frac{K}{T_c s + 1}$



$$y(t) = Kx_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_c}} \right)$$

特点:  $T_c$  决定过渡过程时间;  $K$  决定稳态输出值。

实例:



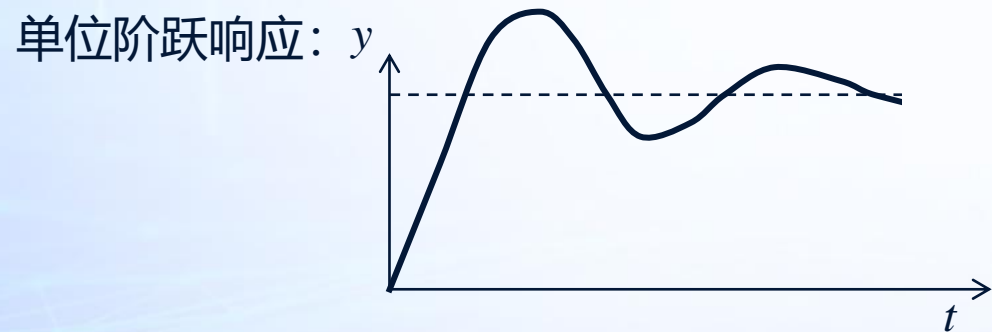
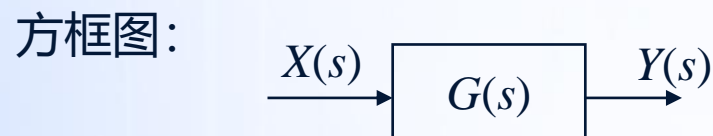
$$RC \frac{dU_y}{dt} + U_y = U_x$$



## 振荡环节

动态方程:  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)$

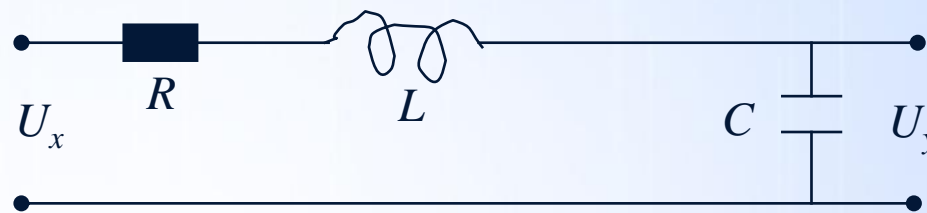
传递函数:  $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 < \zeta < 1$



$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad 0 < \zeta < 1$$

特点:  $\zeta$  决定振荡特性;  $\omega_n$  决定振荡周期。

实例:



$$LC \frac{d^2 U_y(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_y(t)}{dt} + U_y(t) = U_x(t)$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

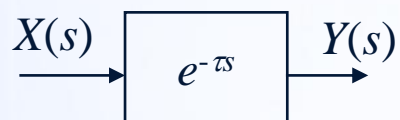


## 迟延环节

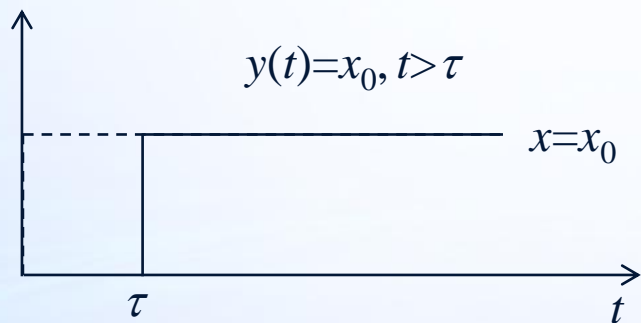
动态方程:  $y(t) = x(t - \tau)$

传递函数:  $G(s) = e^{-\tau s}$

方框图:

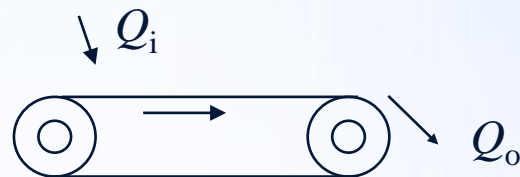


阶跃响应:



特点:  $y(t)$ 比 $x(t)$ 迟延了一段时间 $\tau$ 。

实例:



$$Q_o(t) = Q_i(t - \tau)$$



# PID控制器

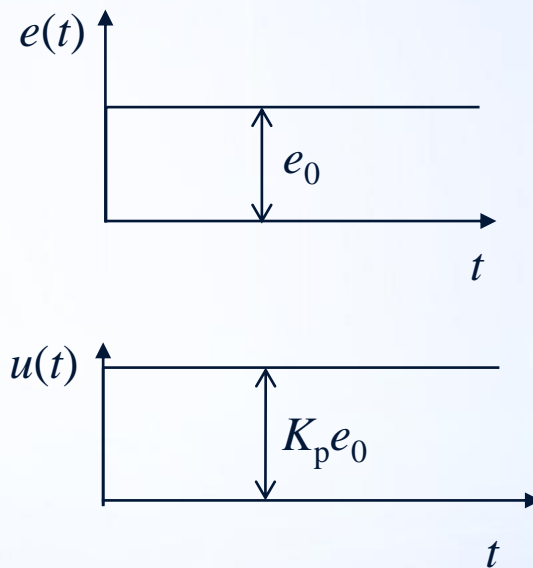
## P控制器

动态方程:  $u(t) = K_p e(t) = \frac{1}{\delta} e(t)$   
 $K_p$ : 比例增益;  $\delta$ : 比例带。

传递函数:  $G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p = \frac{1}{\delta}$



阶跃响应:





# PID控制器

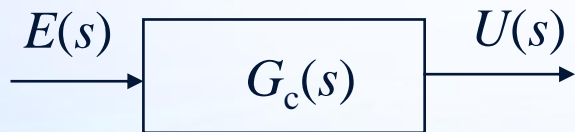
## PI控制器

动态方程:  $u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt \right]$

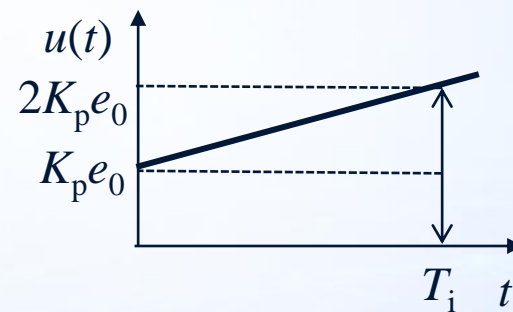
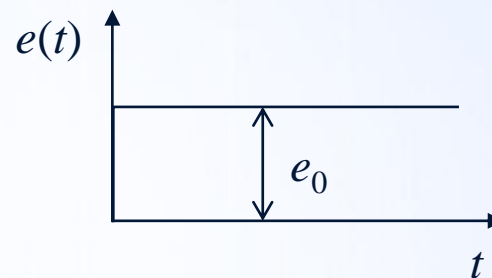
$K_p$ : 比例增益;  $T_i$ : 积分时间。

传递函数:  $G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \frac{1}{s} \left( s + \frac{1}{T_i} \right)$

方框图:



阶跃响应:







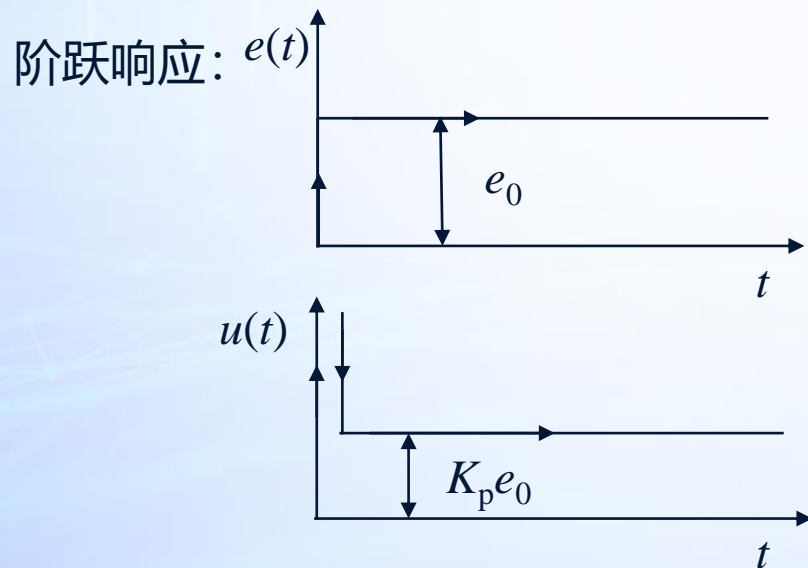
# PID控制器

## 理想PD控制器

动态方程:  $u(t) = K_p \left[ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$

$K_p$ : 比例增益;  $T_d$ : 微分时间。

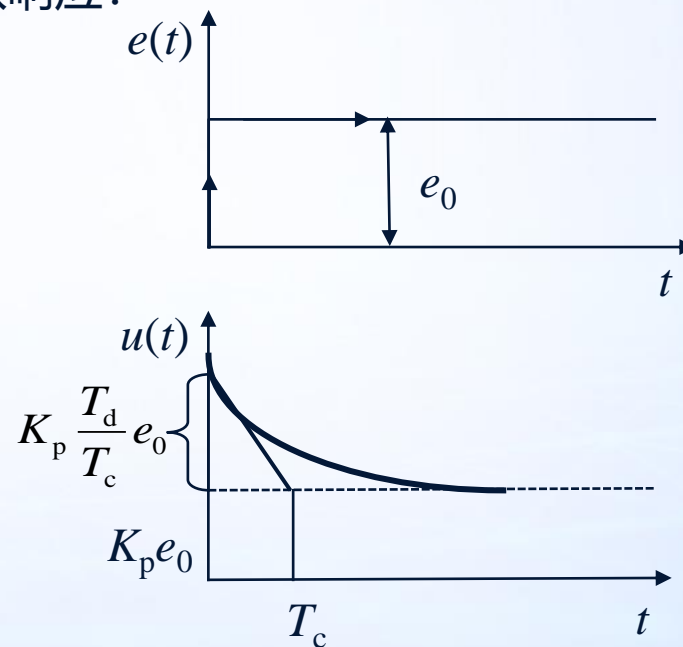
传递函数:  $G_c(s) = \frac{u(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s)$



## 实际PD控制器

传递函数:  $G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{T_d s}{1 + T_c s} \right)$

阶跃响应:





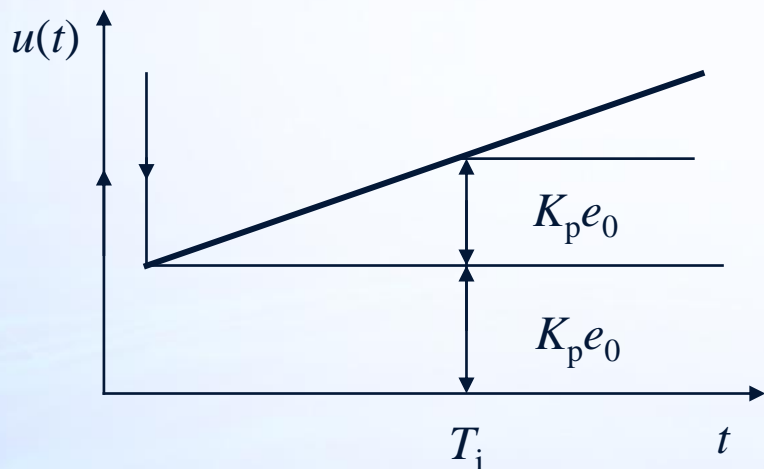
# PID控制器

## 理想PID控制器

动态方程: 
$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

传递函数: 
$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

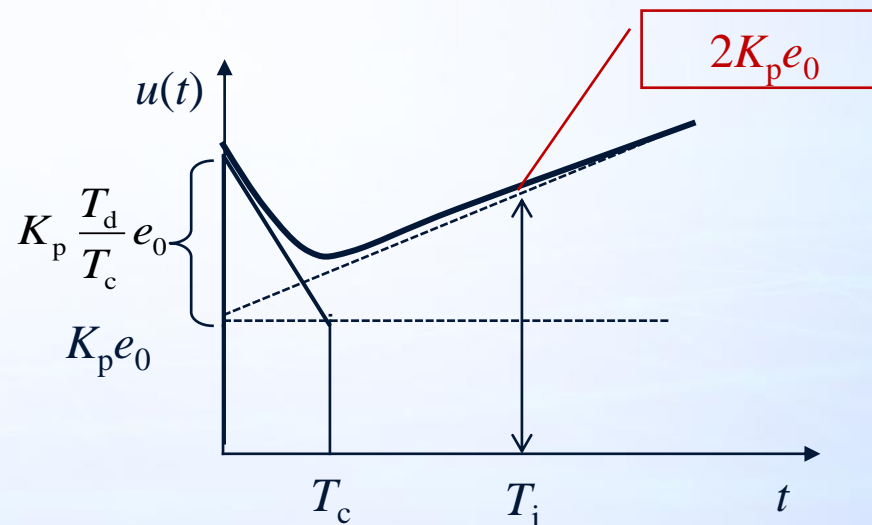
阶跃响应:



## 实际PID控制器

传递函数: 
$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_c s} \right)$$

阶跃响应:





## 本节内容回顾

掌握6种基本环节的动态特性。

掌握4种PID控制器的动态特性。



## 方框图等效变换和信号流图

### 2.4.1 方框图等效变换

基本概念

等效变换规则

应用举例

### 2.4.2 信号流图

定义、性质及绘制

梅森增益公式

应用举例



## 方框图等效变换

基本概念：

**方框图**——一种常用的描述控制系统的图解模型。

**等效变换**——方框图变换前后输入输出关系不变，效果等同。

等效变换规则：

①串联 ②并联 ③反馈

④分点前移 ⑤分点后移

⑥合点后移 ⑦合点前移

⑧分点与合点互移 ⑨分点或合点间互移

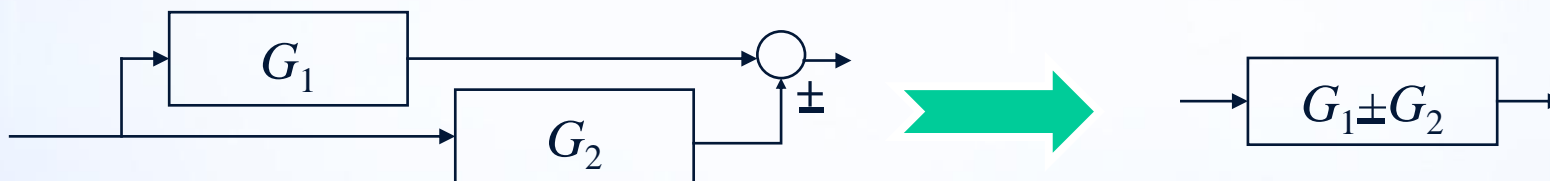


## 等效变换规则

### ① 串联



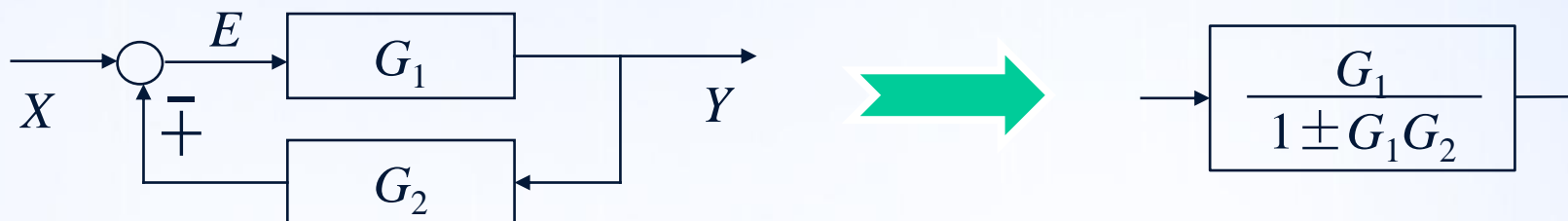
### ② 并联





## 等效变换规则

### ③反馈



推导过程 根据方框图可得：

$$Y = G_1 E = G_1 (X \mp G_2 Y) = G_1 X \mp G_1 G_2 Y$$

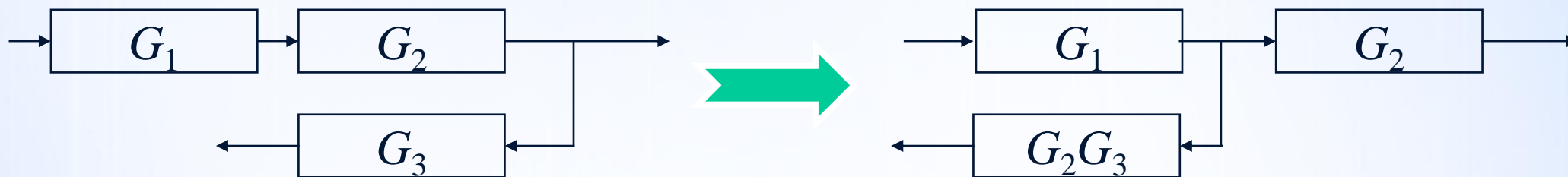
移项后并合并同类项可得：

$$(1 \pm G_1 G_2) Y = G_1 X \implies \frac{Y}{X} = \frac{G_1}{1 \pm G_1 G_2}$$



## 等效变换规则

### ④分点前移



### ⑤分点后移







## 等效变换规则

### ⑥合点后移



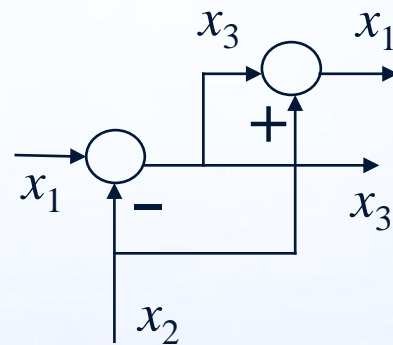
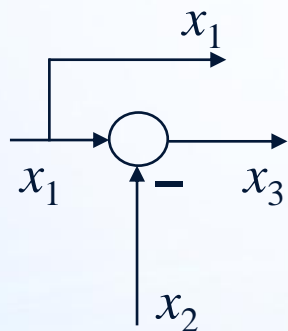
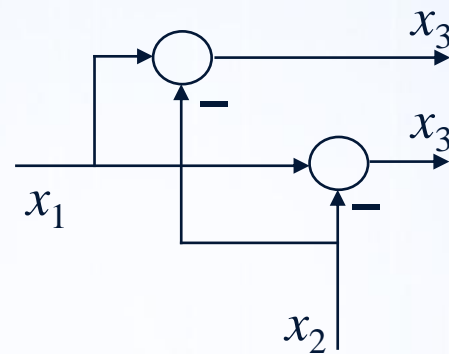
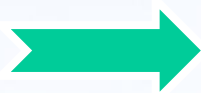
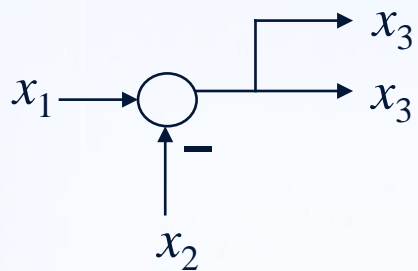
### ⑦合点前移





## 等效变换规则

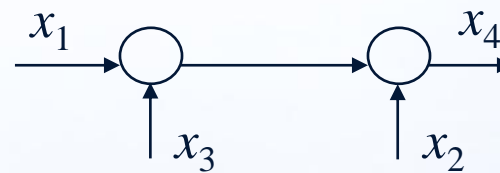
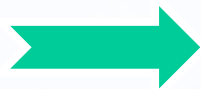
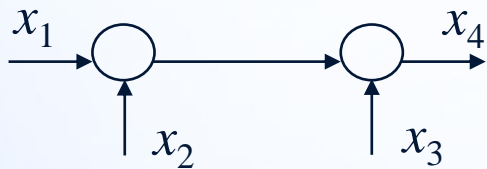
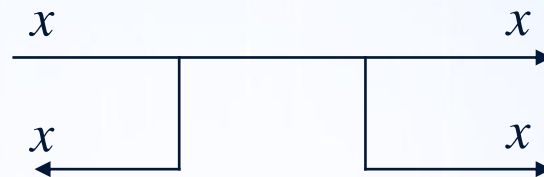
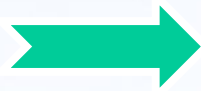
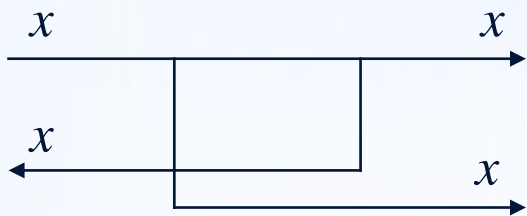
### ⑧分点与合点互移





## 等效变换规则

### ⑨分点互移或合点互移





## 等效变换规则总结

- 1) **分点**前移则函数相乘；分点后移则函数相除。
- 2) **合点**前移则函数相除；合点后移则函数相乘。
- 3) **串联**时函数相乘；**并联**时函数相加减；**反馈**时分子式为前向通道传函，分母式则为1减或加回路传函，正反馈时为减，负反馈时为加。
- 4) **分点之间**、**合点之间**直接互移。



## 等效变换注意事项

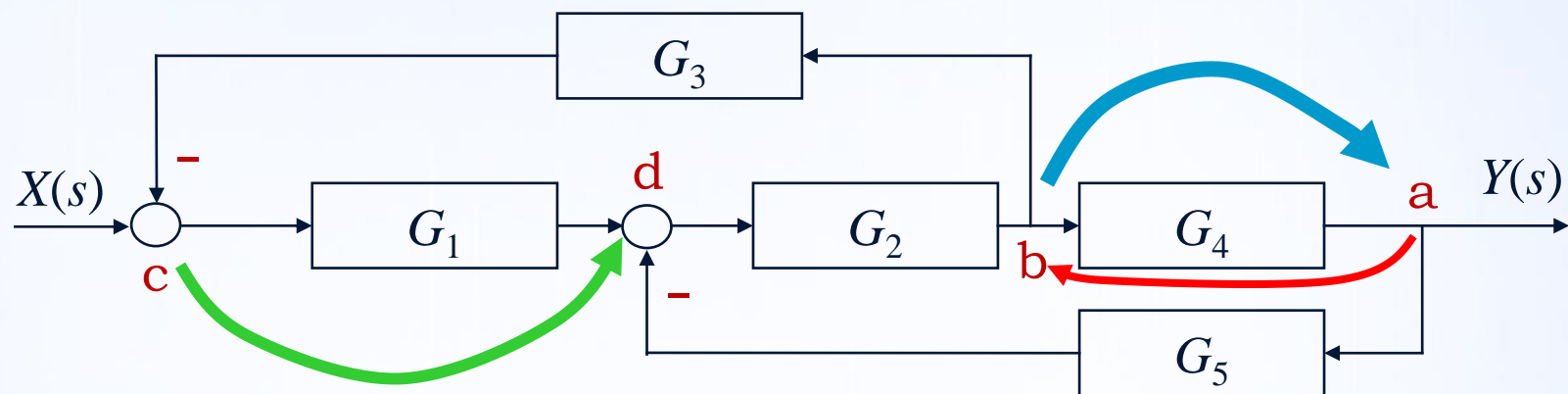
在初学方框图变换时，**最容易犯的错误**是不加区别地将分点和合点互移：做分点移动时不加处理地越过了合点，或做合点移动时不加处理地越过了分点。

**正确的处理策略**是避开合点与分点的互移变换，只用分点前移或后移、合点前移或后移的变换处理，解除回路之间的耦合，然后依次使用反馈规则化简系统方框图。



## 应用举例

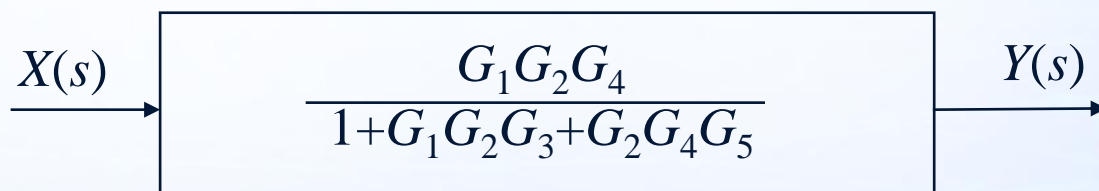
例题：试用方框图变换方法求下图所示系统的传递函数  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$  。



思路1：b移至a前，ba交换

思路2：a移至b后，ab交换

思路3：c移至d前，cd交换





## 信号流图

定义：

信号流图——是除了方框图之外，另一种常用的描述控制系统的图解模型。

信号流图有**三要素**，即：节点、支路、传输。

节点——表示变量或信号的点或圆圈。如右图中的 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 。

支路——连接两个节点的有向线段。如右图中的 $x_1 \rightarrow x_2$ 、 $x_2 \rightarrow x_3$ 、 $x_3 \rightarrow x_2$ 、 $x_4 \rightarrow x_3$ 等。

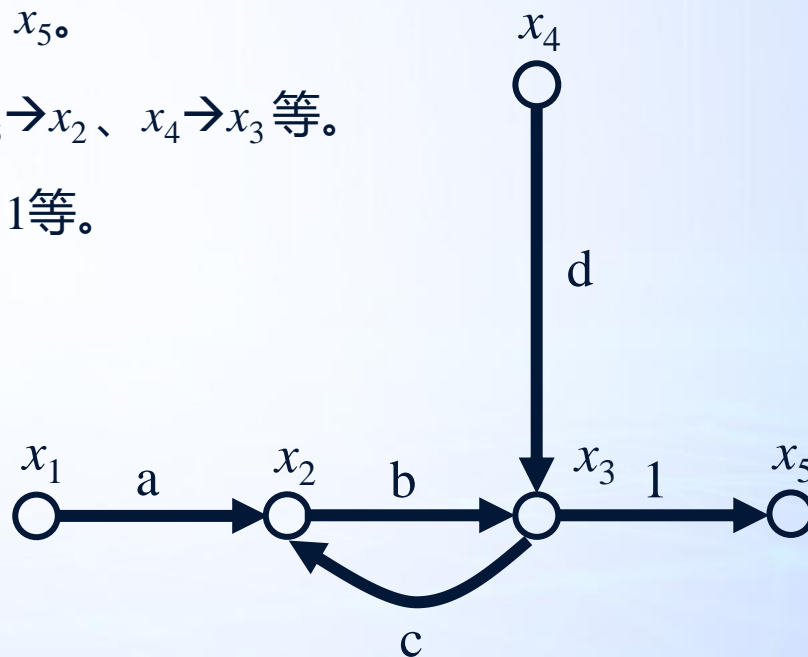
传输——支路上标注的增益或传递函数。如右图中的 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $1$ 等。

输入节点——只有输出支路的节点。如右图中的 $x_1$ 、 $x_4$ 。

输出节点——只有输入支路的节点。如右图中的 $x_5$ 。

混合节点——既有输出支路又有输入支路的节点。

如右图中的 $x_2$ 、 $x_3$ 。





## 信号流图

定义：

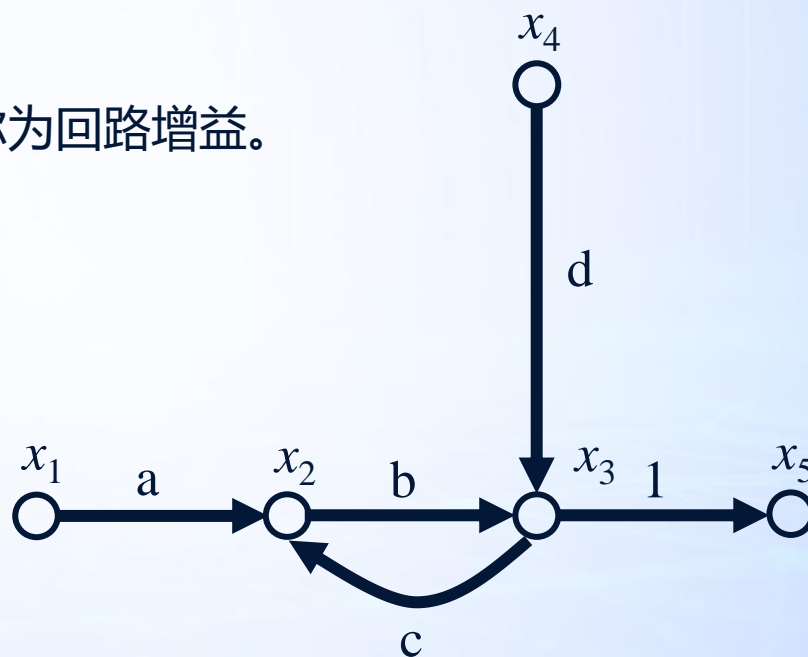
通路——沿支路箭头方向形成的路径。与任一节点相交不多于一次通路称为**开通路**；起始节点与终止节点为同一节点，且与任何其它节点相交不多于一次的通路称为**闭通路**。如下图中， $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5$  为开通路； $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$  为闭通路。

回路和回路增益——回路就是闭通路，回路中各支路传输的乘积称为回路增益。

如右图中， $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$  为回路，其增益为 $bc$ 。

不接触回路——一些没有公共节点的回路。

前向通路和前向通路增益——从输入节点至输出节点的开通路称为前向通路，前向通路中各支路传输的乘积称为前向通路增益。







## 信号流图

主要性质：

- 1) 支路表示一个信号对另一个信号的函数关系，信号只能沿支路的箭头方向传送。
- 2) 节点可以把所有输入支路的信号叠加，并把叠加后的信号传送到所有的输出支路。
- 3) 混合节点可以通过增加一个增益为1 的支路，把它变成输出节点。
- 4) 给定系统的信号流图不唯一。



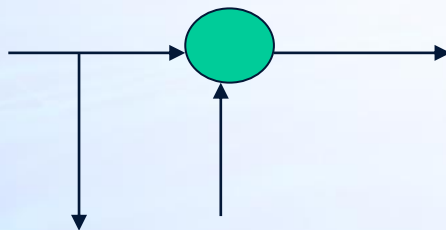
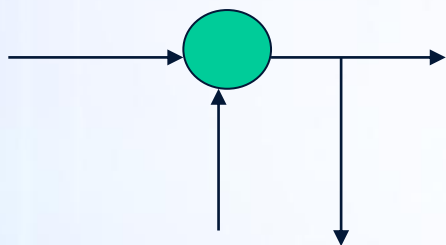
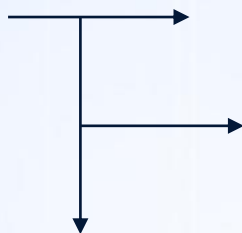
## 信号流图

根据方框图绘制信号流图的要点：

- 1) 把方框图中所有的分点和合点都绘成信号流图的节点。
- 2) 把方框图中所有的方框绘成信号流图的支路，并在支路线上标上函数名。
- 3) 两节点间若没有方框，则绘成增益为1的支路。
- 4) 可将合点在前、分点在后的相邻节点或几个相邻的分点合并为一个混合节点；  
分点在前、合点在后的相邻节点不能合并为一个混合节点。

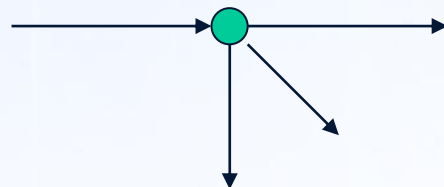


## 画信流图的节点处理问题

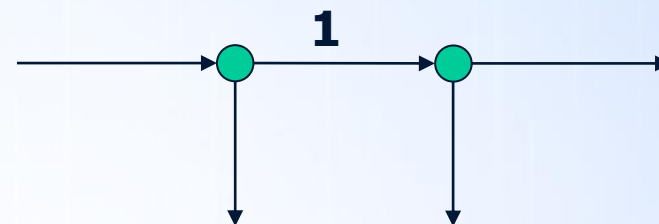


1) 合并节点

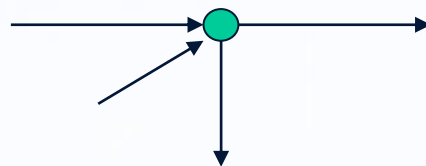
2) 节点不变



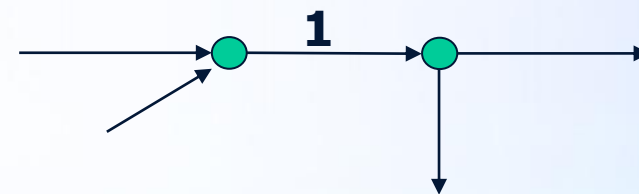
1) 对



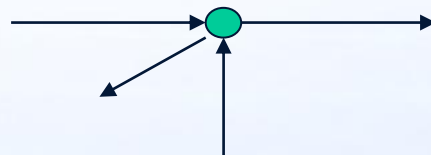
2) 对



1) 对



2) 对



1) 错



2) 对



## 梅森增益公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k$$

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

式中：  $n$ ——从输入节点到输出节点的前向通路数。

$P_k$ ——从输入节点到输出节点第  $k$  条前向通路的增益。

$\Delta$ ——信号流图的特征式。

$\sum L_a$ ——所有不同回路的增益之和。

$\sum L_b L_c$ ——任两个互不接触回路增益乘积之和。

$\sum L_d L_e L_f$ ——任三个互不接触回路增益乘积之和。

$\Delta_k$ ——第  $k$  条前向通路的余因子（计算时利用  $\Delta$  公式，凡与该前向通路接触的回路项代入零）。



## 应用举例

例题：已知两个串联水箱的信号流图如下图所示，求传递函数  $G(s) = \frac{Q_2(s)}{\dot{Q}(s)}$

解：（1）仅有一条前向通路：

$$P_1 = \frac{1}{R_1 R_2 F_1 F_2 s^2}$$

（2）有三个回路：

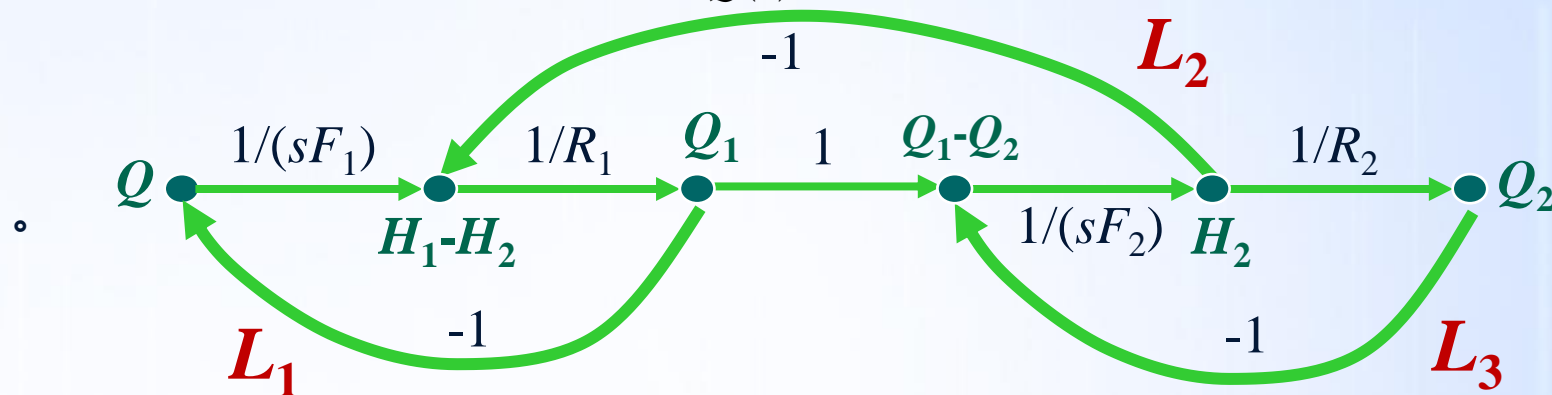
$$L_1 = -\frac{1}{R_1 F_1 s} \quad L_2 = -\frac{1}{R_1 F_2 s} \quad L_3 = -\frac{1}{R_2 F_2 s}$$

（3） $L_1$ 和 $L_3$ 互不接触，则信号流图的特征式为： $\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3$ 。

（4） $P_1$ 与 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 都接触，所以其余因子  $\Delta_1 = 1$ 。

则根据梅森增益公式可得：

$$P = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{R_1 R_2 F_1 F_2 s^2 + (R_1 F_1 + R_1 F_2 + R_2 F_2)s + 1}$$





## 本节内容回顾

掌握方框图的等效变换规则。

掌握信号流图的绘制以及梅森增益公式。



## 状态空间模型及求解

2.5.1 基本概念

2.5.2 连续系统的状态空间模型

2.5.3 连续状态方程的时域解

2.5.4 连续状态方程的频域解



## 基本概念

**状态**：系统过去、现在和将来的状况。例：质点做直线运动，系统状态为位置和速度。

**状态变量**：确定系统状态的最少数目的一组变量，具有非唯一性。

**状态向量**：以 $n$ 个状态变量构成的向量。

**状态空间**：状态向量所有可能值的集合。

**状态方程**：描述系统状态变量与系统输入变量之间关系的一阶微分方程组。

**输出方程**：描述系统状态变量与系统输出变量之间关系的代数方程组。

**状态空间表达式**：状态方程+输出方程。

**状态空间分析**：对以状态空间表达式描述的系统进行性能分析，分析的主要内容有系统的稳定性、能控性、能观性等。





## 连续系统的状态空间模型

一个 $n$ 阶线性时不变连续时间动态系统的状态空间模型的一般形式：

$$\text{状态方程: } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(t_0) = x_0$$

$$\text{输出方程: } y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

式中： $x(t)$ 为 $n$ 维状态向量； $u(t)$ 为 $r$ 维输入或控制向量； $y(t)$ 为 $m$ 维输出向量； $A$ 为 $(n \times n)$ 的系统矩阵；  
 $B$ 为 $(n \times r)$ 的输入或控制矩阵； $C$ 为 $(m \times n)$ 的输出或观测矩阵； $D$ 为 $(m \times r)$ 的连接矩阵。

若输入 $u(t)=0$ ，则有齐次方程：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t_0) = x_0$$

该方程表达了系统的固有特性，所描述的系统称为自治系统（无控制的系统）。



## 连续系统的状态空间模型

线性时变连续时间动态系统的状态空间模型的一般形式：

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

非线性连续时间动态系统的状态空间模型的一般形式：

$$\dot{x}(t) = f_1[x(t), u(t), t]$$

$$y(t) = f_2[x(t), u(t), t]$$

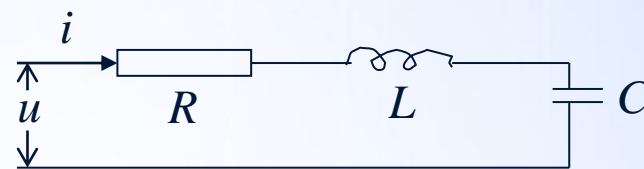


## 连续系统的状态空间模型

例题：设 $u(t)$ 为输入， $i(t)$ 为输出，求右图所示RLC电路的状态空间表达式。

解：根据基尔霍夫定律，可建立该系统的微分方程为：

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int idt = u$$



设  $x_1 = i$  ,  $x_2 = \int idt$  , 可得状态空间模型：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

设：  
型： $x_1 = Li + R \int idt$  ,  $x_2 = \int idt$  , 可得状态空间模

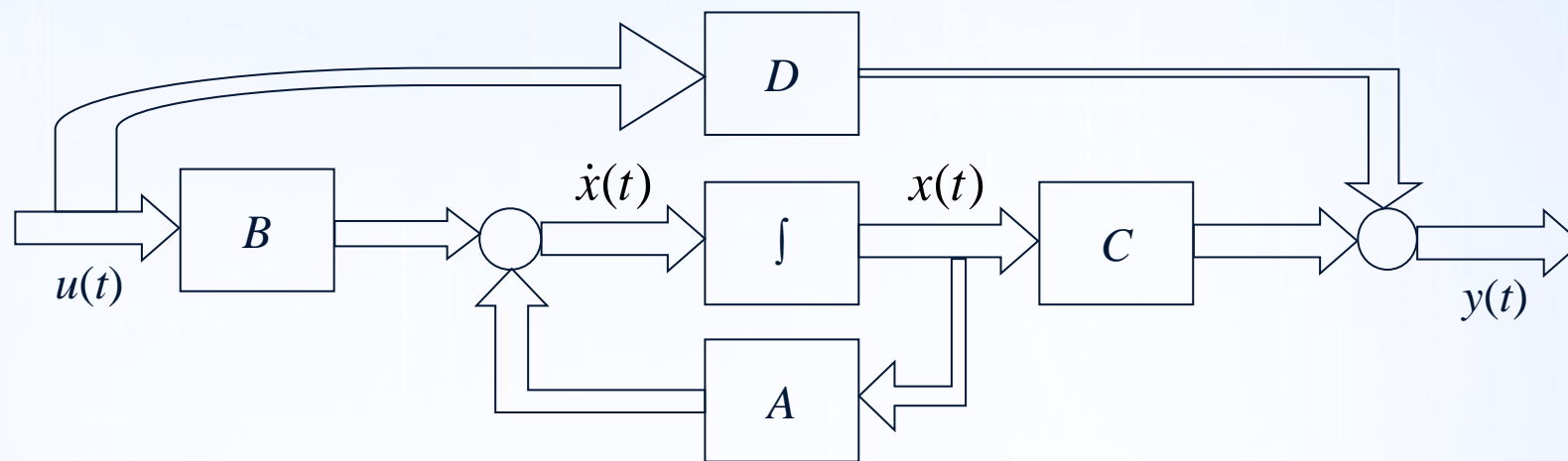
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

**同一物理系统状态变量的选择不是唯一的，但状态变量的个数是相等的！**

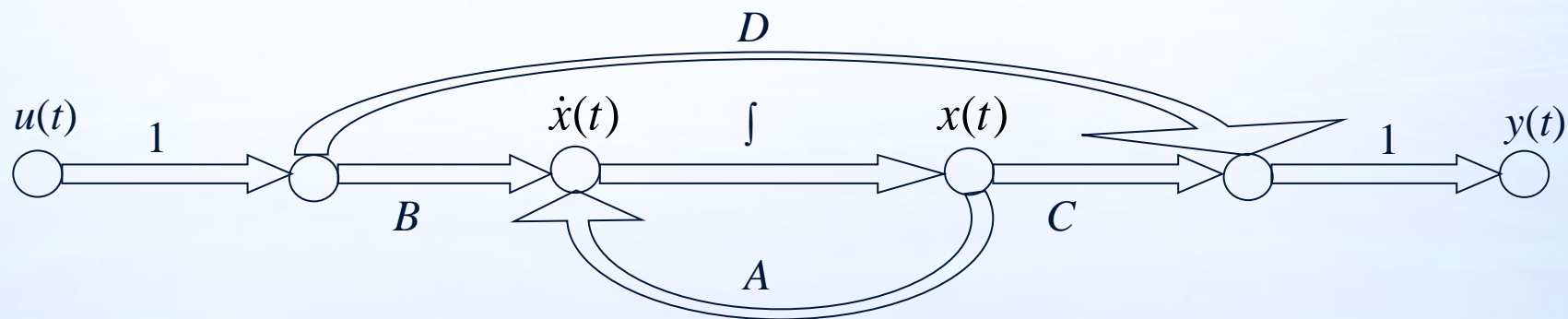


## 连续系统的状态空间模型

状态空间表达的系统方框图



状态空间表达的系统信号流图





## 连续状态方程的时域解

当初始时刻 $t_0=0$ 时，线性时不变连续状态方程的时域解为：

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

式中： $e^{At}$ 是一个矩阵指数函数，称为状态转移矩阵，通常记为 $\Phi(t)$ ，且有：

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

可以证明：上述无穷级数对所有矩阵 $A$ 在  $|t| < \infty$  时绝对收敛。

可以看到时域解 $x(t)$ 由两部分组成：等式右边第一项表示由初始状态引起的自由响应，第二项表示由控制激励作用引起的强迫响应。



## 连续状态方程的时域解

状态转移矩阵有如下基本性质：

$$\Phi(0) = I$$

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1) = \Phi(t_1 + t_2)$$

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$



## 连续状态方程的频域解

对连续状态方程  $\dot{x} = Ax + Bu$  进行拉氏变换可得：

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

移项并合并同类项得：

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

进而得到连续状态方程的频域解如下：

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

与连续状态方程的时域解比较后，可得到状态转移矩阵的求法：

$$\Phi(t) = L^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \right\}, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} \text{adj}(sI - A)$$



## 连续状态方程的频域解

由状态空间模型求传递函数矩阵

考虑某多变量系统，设 $G(s)$ 为系统的传递函数矩阵，则有：

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

其中， $G(s) = \{G_{ij}(s)\} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, r)$

在状态方程的频域解中令 $x(0)=0$ ，可得：

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

对输出方程进行拉氏变换可得：

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

由以上两式可得：

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

从而得到由状态空间模型求传递函数矩阵的变换公式如下：

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$





## 连续状态方程的频域解

例题：已知系统矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ ，求状态转移矩阵  $\Phi(t)$ 。

解：

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -6 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

**主对角线元素调换，  
副对角线元素反号。**

$$|sI - A| = s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} s+5 & 6 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-3t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$



## 本节内容回顾

了解状态空间分析法的基本概念。

掌握连续系统状态空间模型的形式。

掌握连续状态方程的时域解。

掌握连续状态方程的频域解。



## 状态空间模型的标准形

标准形：以特定的状态空间基底导出的状态空间模型。标准形的ABCD中元素与系统特征参数直接相关。标准形便于进行分析和处理，便于转换成结构方框图和传递函数。

四种标准形：

- 1) **能控标准形**——由传递函数直接确定；
- 2) **能观标准形**——与能控标准形相对偶；
- 3) **对角标准形**——是完全解耦的系统；
- 4) **约当标准形**——有重极点的系统。



## 能控标准形

设传递函数：

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ns^n}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} = \frac{Y(s)}{V(s)} \frac{V(s)}{U(s)} \\ &= (b_0 + b_1s + \cdots + b_ns^n) \frac{1}{a_0 + a_1s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \end{aligned}$$

可用微分方程表达为：

$$y(t) = b_0v + b_1\dot{v} + \cdots + b_nv^{(n)}$$

$$a_0v + a_1\dot{v} + \cdots + a_{n-1}v^{(n-1)} + v^{(n)} = u(t)$$

$$v_0^{(n)} = \cdots = v(0) = 0 \quad (\text{零初始条件})$$



## 能控标准形

$$\text{令} \quad \begin{cases} x_1 = v \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 = \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n = x_1^{(n-1)} \end{cases} \quad \text{式 (I)}$$

$$\text{则有: } y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_n \dot{x}_n \quad \text{式 (II)}$$

$$a_0 x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_n + \dot{x}_n = u(t) \quad \text{式 (III)}$$

从式 (III) 解出  $\dot{x}_n$  并代入式 (II) , 得:

$$y(t) = (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u \quad \text{式 (IV)}$$

据式 (I) 、 (III) 可得状态方程, 据式 (IV) 可得输出方程。



## 能控标准形

能控标准形的具体形式如下：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

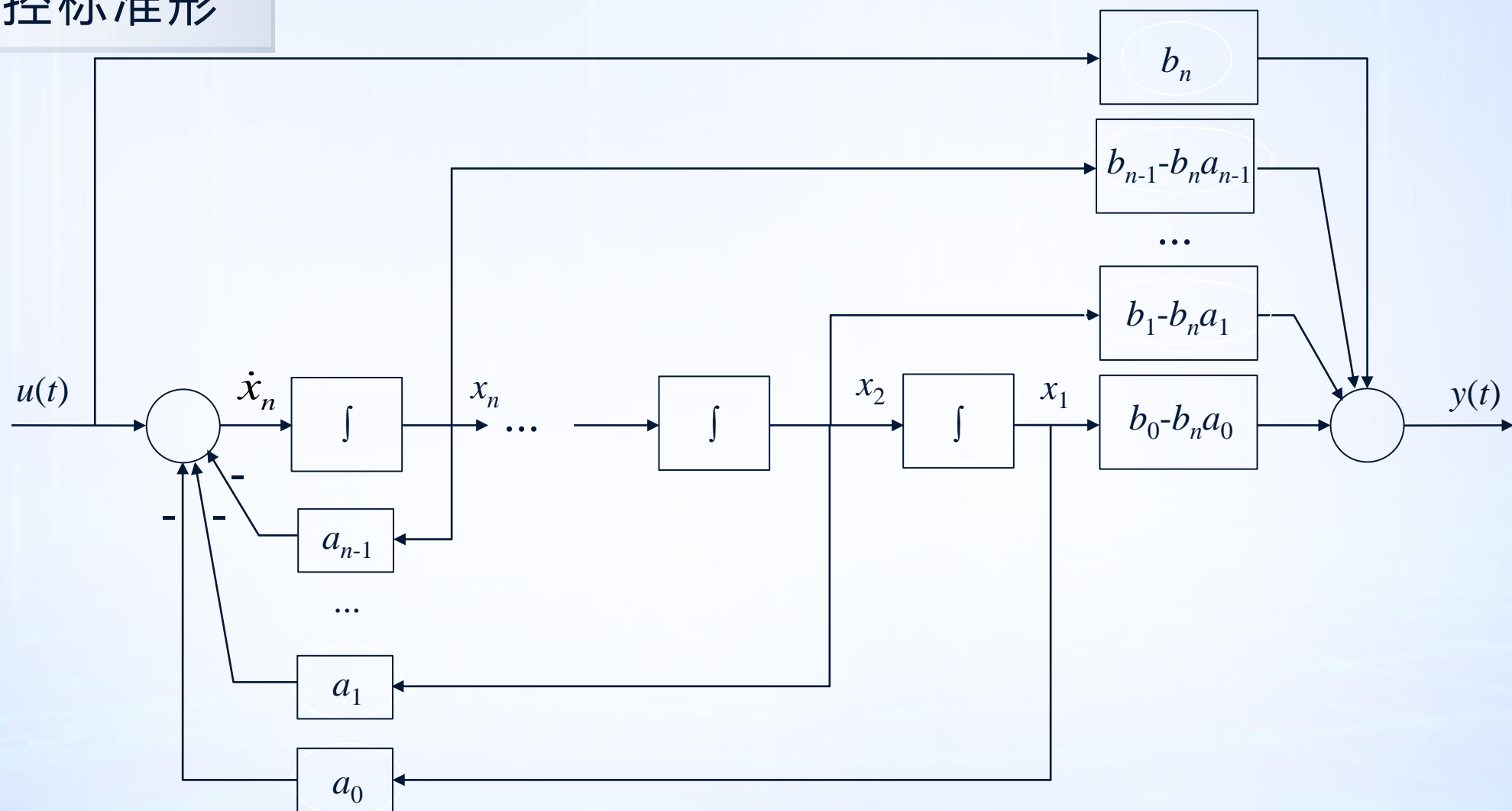
式中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

$$C = [(b_0 - b_n a_0) \quad (b_1 - b_n a_1) \quad \cdots \quad (b_{n-1} - b_n a_{n-1})] \quad D = b_n$$



## 能控标准形



能控标准形系统的状态变量结构图



## 能观标准形

设微分方程:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u + b_1\dot{u} + \cdots + b_nu^{(n)}$$

对其积分 $n$ 次得:

$$y(t) = b_nu(t) + \int_0^t [b_{n-1}u(\tau) - a_{n-1}y(\tau)]d\tau + \cdots + \int_0^t \cdots \int_0^t [b_0u(\tau) - a_0y(\tau)](d\tau)^n$$

再令:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_0y + b_0u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_1y + b_1u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_2y + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}y + b_{n-1}u \end{cases} \quad \text{式 (I)}$$

$$\text{则有: } y = x_n + b_nu \quad \text{式 (II)}$$

将式 (II) 代入式 (I), 即可得到能观标准形的状态方程;  
式 (II) 即为能观标准形的输出方程。





## 能观标准形

能观标准形的具体形式如下：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\text{式中: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

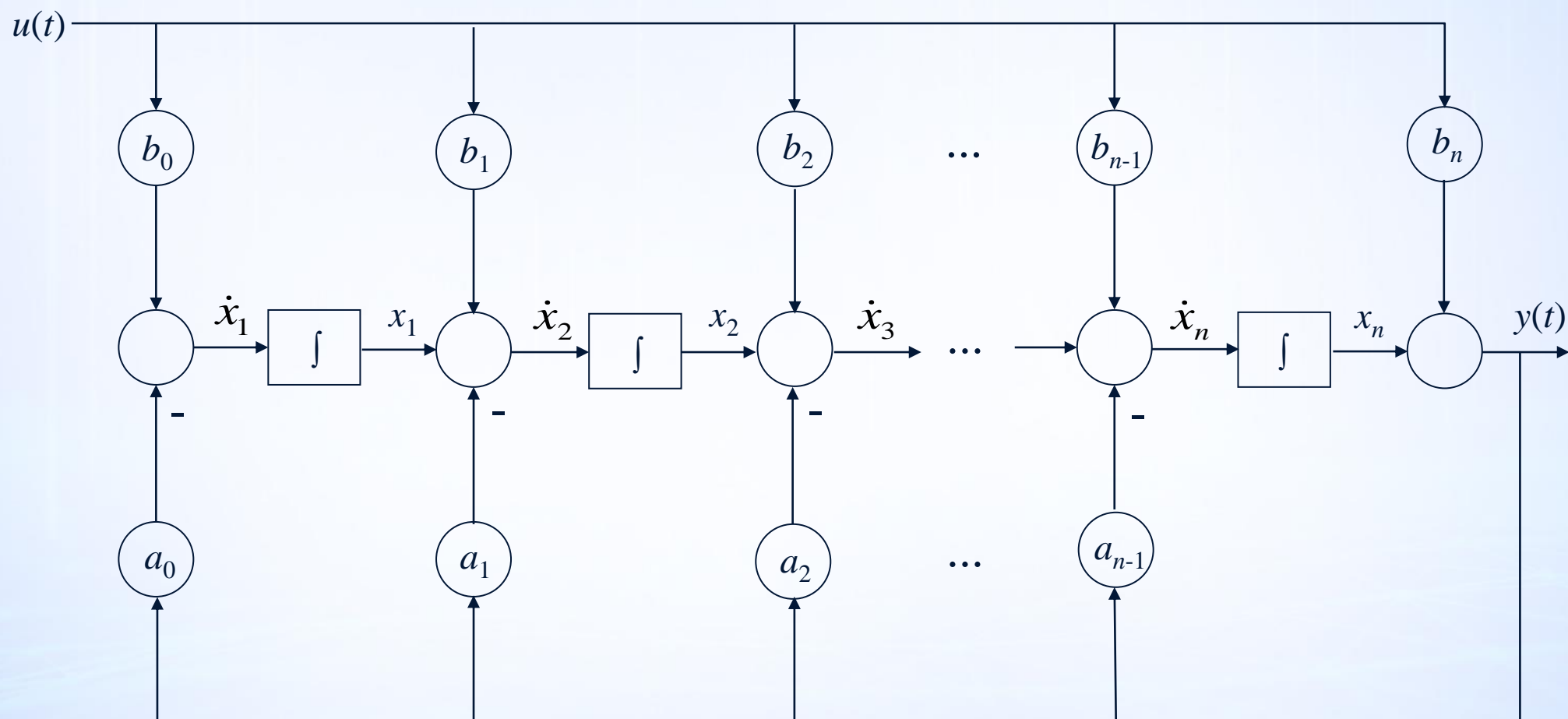
$$C = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \quad , D = b_n$$

能观标准形与能控标准形互为对偶：

$$\begin{cases} A_c = A_o^T \\ B_c = C_o^T \\ C_c = B_o^T \end{cases} \quad \begin{cases} A_o = A_c^T \\ B_o = C_c^T \\ C_o = B_c^T \end{cases}$$



## 能观标准形



能观标准形系统的状态变量结构图



## 对角标准形和约当标准形

考虑如下真有理传递函数：

$$G'(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \cdots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \cdots + s^n} \quad (m < n)$$

式中： $N(s)$ 为特征多项式，或称极点多项式； $Z(s)$ 为零点多项式。

按照系统特征根的不同情况，并利用  $G'(s)$  的部分分式展开来定义状态变量，可以得出**对角标准形**和**约当标准形**。



## 对角标准形和约当标准形

(1) 当 $N(s)=0$ 只有互异实根时。

$G'(s)$ 以部分分式展开如下:

$$G'(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - s_k}$$

输入与输出之间的关系可以表达为:

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{s - s_k} U(s)$$

选择状态变量 $x_k$ , 使其满足:

$$X_k(s) = \frac{1}{s - s_k} U(s)$$

则有状态方程和输出方程:

$$\dot{x}_k = s_k x_k + u \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

对应的状态空间模型的系数矩阵为:

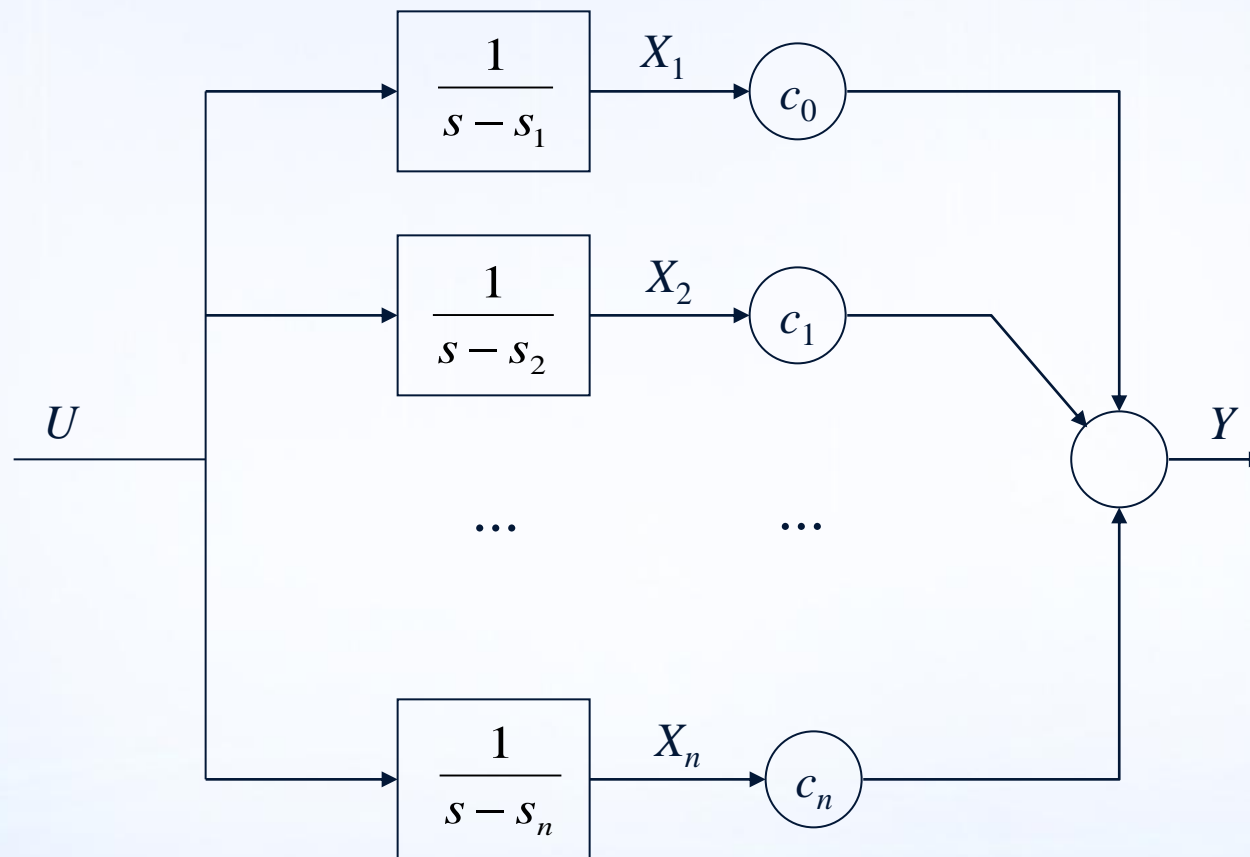
$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]$$

该状态空间模型形式称为**对角标准形**。



## 对角标准形和约当标准形



对角标准形系统的状态变量结构图



## 对角标准形和约当标准形

(2) 当 $N(s)=0$ 只有多个重根时。

$$\text{设 } N(s) = (s - s_1)^{r_1} (s - s_2)^{r_2} \cdots (s - s_p)^{r_p}$$

此时 $G'(s)$ 的部分分式为：

$$G'(s) = \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{c_{k,1}}{s - s_k} + \frac{c_{k,2}}{(s - s_k)^2} + \cdots + \frac{c_{k,r_k}}{(s - s_k)^{r_k}} \right\}$$

输入与输出之间的关系可以表达为：

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{k=1}^p \left\{ \frac{c_{k,1}}{s - s_k} + \frac{c_{k,2}}{(s - s_k)^2} + \cdots + \frac{c_{k,r_k}}{(s - s_k)^{r_k}} \right\} U(s) \\ &= \sum_{k=1}^p Y_k(s) U(s) \end{aligned}$$

$$\text{状态方程: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = s_1 x_i + x_{i+1} \\ \dot{x}_{r_1} = s_1 x_{r_1} + u \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, r_1 - 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{i+r_2} = s_2 x_{i+r_1} + x_{i+r_1+1} \\ \dot{x}_{r_2} = s_2 x_{r_2+r_1} + u \\ \vdots \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, r_2 - 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = s_p x_i + x_{i+1} \\ \dot{x}_n = s_p x_n + u \end{array} \right. \quad (i = n - r_p + 1, n - r_p + 2, \dots, n - 1)$$

$$\text{输出方程: } y = c_{1,r_1} x_1 + c_{1,r_1-1} x_2 + \dots + c_{1,r_2} x_{r_1} + c_{2,r_2} x_{r_1+1} + c_{2,r_2-1} x_{r_1}$$

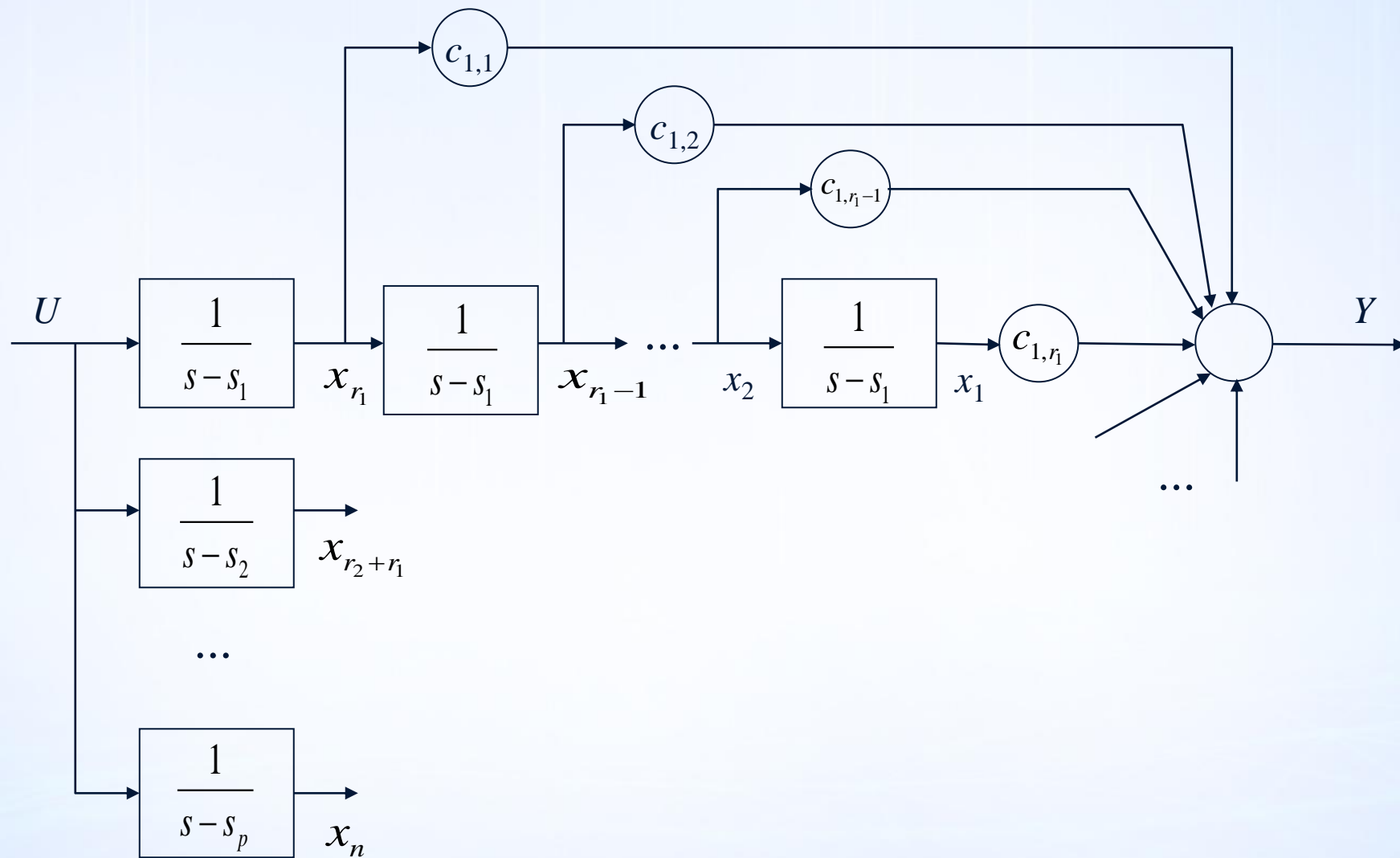
状态空间模型的系数矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & & \\ & s_1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & s_1 & 0 & \\ & & & s_2 & 1 & \\ & & & & s_2 & 1 & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & s_2 & 0 & \\ & & & & & s_3 & & \ddots \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$C = [c_{1,r_1} \quad c_{1,r_1-1} \quad \cdots \quad c_{1,1} \quad c_{2,r_2} \quad \cdots]$$

该状态空间模型形式称为**约当标准形**。





只有重极点时约当标准形系统的状态变量结构图



## 对角标准形和约当标准形

(3) 当 $N(s)=0$ 具有共轭复根时。

设有一对共轭复极点  $s_{1,2}$  的子系统  $G_{12}(s)$  用部分分式表达为:

$$G_{12}(s) = \frac{c_1}{s - \sigma - j\omega} + \frac{c_2}{s - \sigma + j\omega}$$

式中,  $c_1$ 和 $c_2$ 为共轭复数, 即:  $c_{1,2} = \delta \pm j\varepsilon$

两个分式相加得:

$$G_{12}(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

式中实系数:

$$\begin{cases} a_0 = \sigma^2 + \omega^2 & a_1 = -2\sigma \\ b_0 = -2(\sigma\delta + \omega\varepsilon) & b_1 = 2\delta \end{cases}$$

这个子系统可用能控标准形表示:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \quad b_1]$$

采用该方法处理,  $A$ 阵成为分块矩阵结构, 对角线元素不全是系统极点。



## 本节内容回顾

掌握能控标准形的形式及状态变量结构图的绘制。

掌握能观标准形的形式及状态变量结构图的绘制。

了解对角标准形和约当标准形的形式及状态变量结构图的绘制。



## 实验建模方法

### 2.7.1 引言

### 2.7.2 有自平衡型阶跃响应曲线图解建模方法

含有迟延函数的过程传递函数模型

不含迟延函数的过程传递函数模型

### 2.7.3 无自平衡型阶跃响应曲线图解建模方法

含有迟延函数的过程传递函数模型

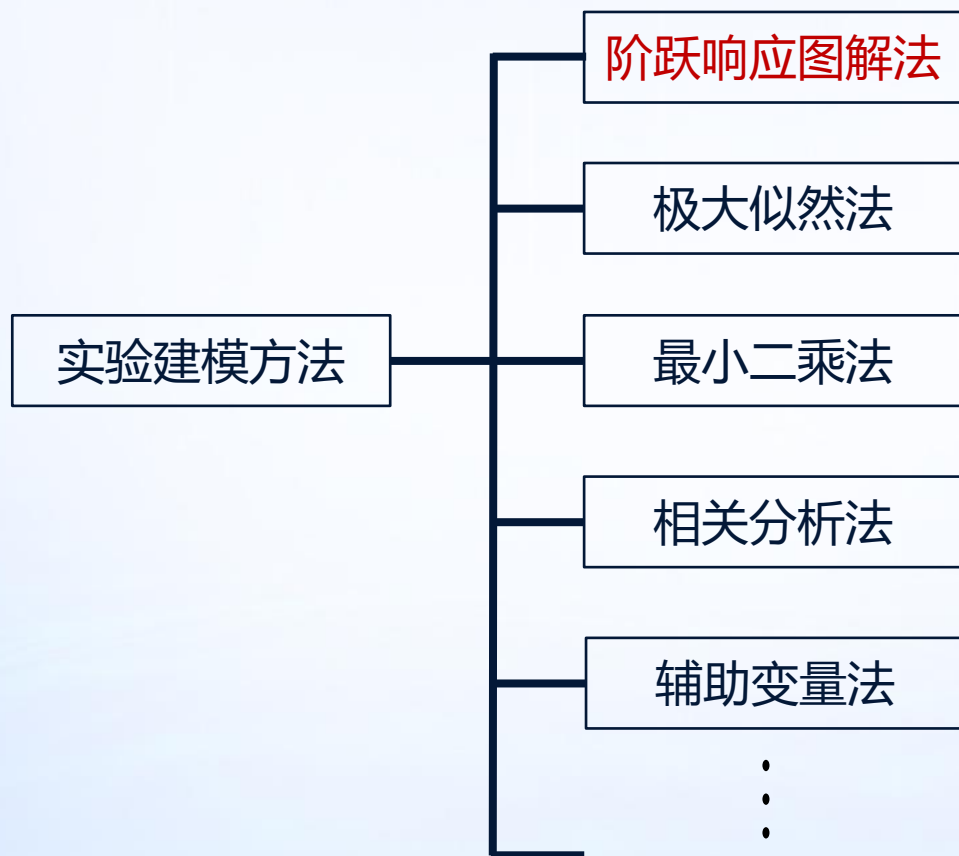
不含迟延函数的过程传递函数模型

### 2.7.4 衰减振荡型阶跃响应曲线图解建模方法



# 引言

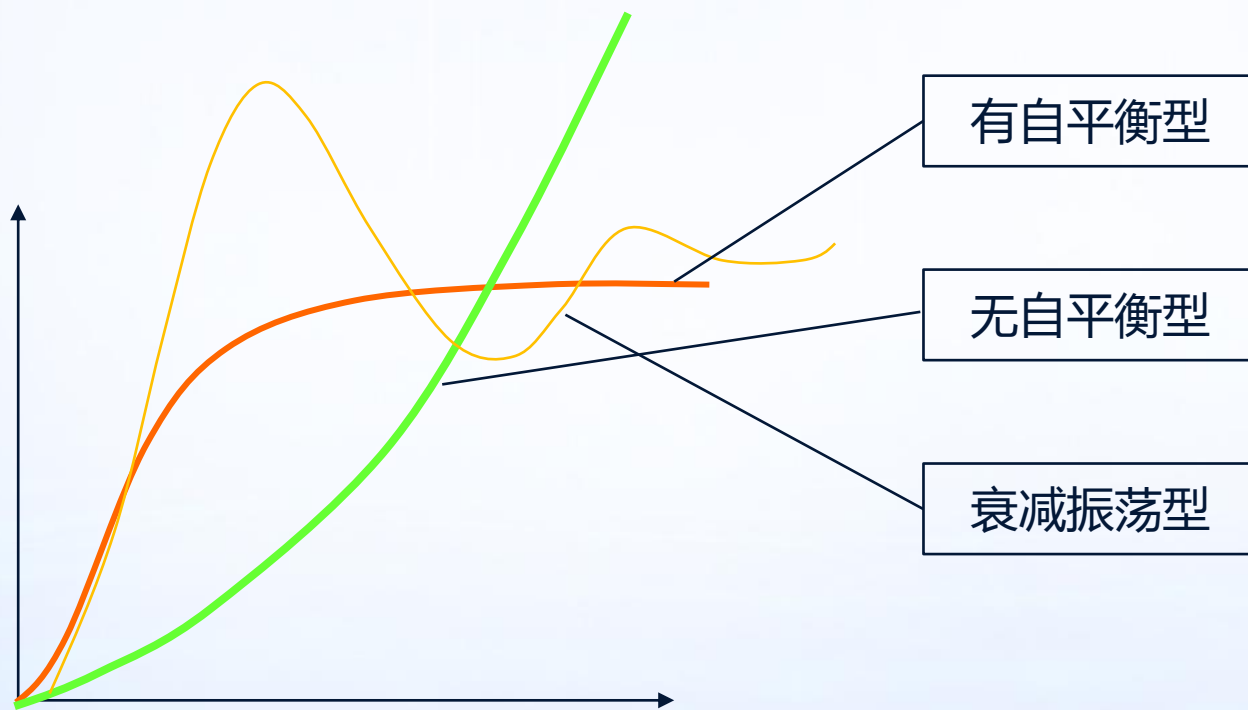
**实验建模方法：**直接对生产过程进行实验，根据实验所获得的输入、输出数据或曲线，经处理后建立受控对象或系统的数学模型。





## 引言

**阶跃响应图解法：**在受控对象或系统的输入端，人为地加入阶跃输入信号，然后测量并记录系统的阶跃响应曲线，再根据此曲线应用图解和计算相结合的方法求出系统的数学模型（传递函数形式）。





## 有自平衡型阶跃响应曲线图解法

### 1) 含有迟延函数的过程传递函数模型

给对象施加阶跃输入 $x(t)=x_0 \times 1(t)$ , 响应曲线如右图所示。

若将对象特性建模为如下形式:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{\frac{1}{\rho} \times e^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

式中:  $K$ 为过程增益,  $\rho$ 为自平衡率, 且有 $K=1/\rho$ ;

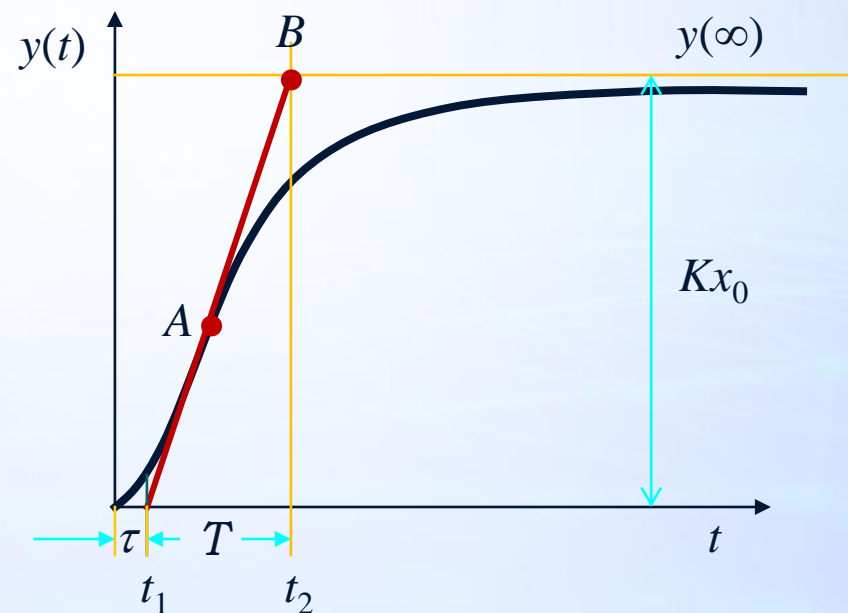
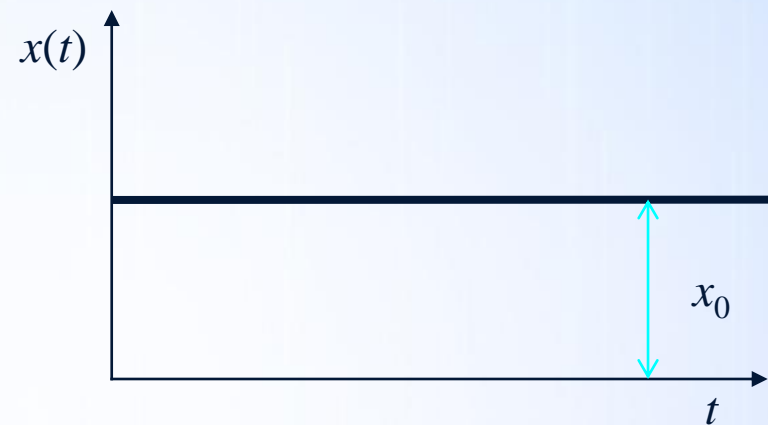
$T$ 为惯性环节的时间常数;  $\tau$ 为迟延时间。

模型参数可根据阶跃响应曲线 $y(t)$ 由图解法得到:

$$K = \frac{y(\infty)}{x_0}$$

$$T = t_2 - t_1$$

$$\tau = t_1$$





## 有自平衡型阶跃响应曲线图解法

### 2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

#### (1) 切线法

设对象的阶跃响应曲线如右图所示, 其传递函数可表示为:

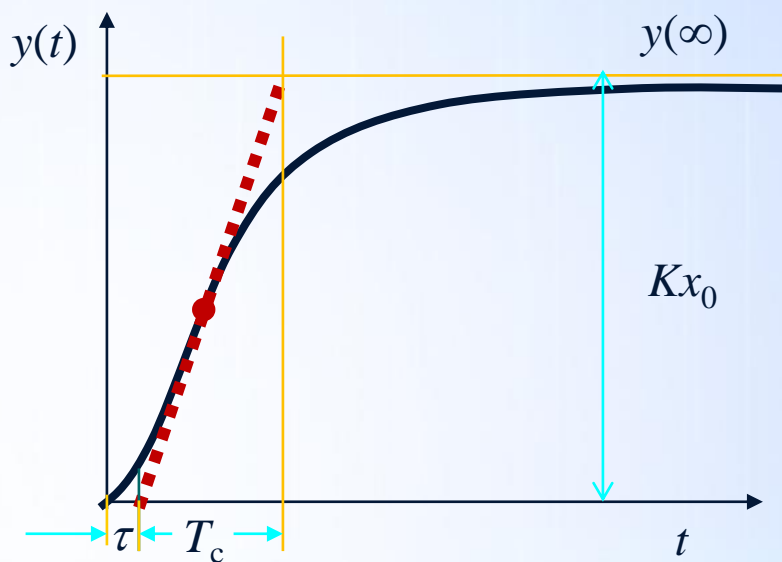
$$G(s) = \frac{K}{(T_0 s + 1)^n} \quad \text{式 (I)}$$

从阶跃响应曲线上求出 $y(\infty)$ 、 $\tau$ 和 $T_c$ , 则模型参数 $K$ 、 $T_0$ 、 $n$ 可按下述方法求出:

a)  $K = \frac{y(\infty)}{x_0}$

b) 据 $\frac{\tau}{T_c}$ 查表得 $n$ 、 $(\frac{\tau}{T_c})$ 再算出 $T_0$ 。

若从表格中求得的 $n$ 不是整数, 令 $n \approx n_1(\text{整数部分}) + \alpha(\text{小数部分})$   
需将对象传递函数调整为式 (II) 所示的形式。



$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_0 s)^{n_1} (1 + \alpha T_0 s)} \quad \text{式 (II)}$$



表：  
关系

$$G_0(s) = \frac{K}{(1 + T_0 s)^n}$$

中的 $n$ 、 $T_0$ 值与响应曲线上 $\tau$ 、 $T_c$ 值的

$n$	1	2	3	4	5	6
$\frac{\tau}{T_c}$	0	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493
$\frac{\tau}{T_0}$	0	0.282	0.805	1.43	2.10	2.81
$\frac{T_c}{T_0}$	1	2.718	3.695	4.46	5.12	5.7
$n$	7	8	9	10	14	25
$\frac{\tau}{T_c}$	0.570	0.642	0.710	0.773	1.0	1.5
$\frac{\tau}{T_0}$	3.56	4.31	5.08	5.86	9.12	18.5
$\frac{T_c}{T_0}$	6.22	6.71	7.16	7.6	9.10	12.32

例题：用实验方法测得**锅炉主汽温**在喷水量阶跃扰动下的响应曲线为有自平衡型阶跃响应曲线（如下图所示）。已知喷水量的阶跃幅值为 $x_0=-2\text{t/h}$ 。从阶跃响应曲线上量得 $y(\infty)=18^\circ\text{C}$ ， $\tau=63\text{s}$ ， $T_c=153\text{s}$ 。试求此汽温对象以喷水量为输入信号、主汽温为输出信号的近似传递函数 $G_0(s)$ 。

解：设近似传递函数的形式为：

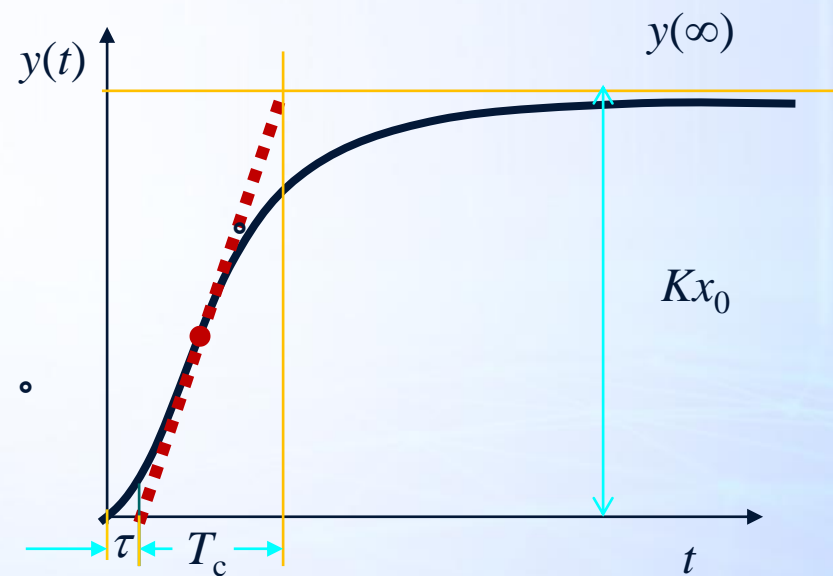
$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{K}{(1+T_0s)^n}$$

传递函数中的负号表示当喷水量增加时，主汽温下降。

$$\text{可求得：} K = \frac{y(\infty)}{x_0} = \frac{18}{-2} = -9 \left[ \frac{^\circ\text{C}}{\text{t/h}} \right] \quad \frac{\tau}{T_c} = \frac{63}{153} = 0.412$$

$$\text{查表可得：} n \approx 5, \frac{T_c}{T_0} = 5.12, \text{ 可求得 } T_0 = \frac{T_c}{5.12} = \frac{153}{5.12} \approx 30\text{s}。$$

$$\text{因此近似传递函数为：} G_0(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{9}{(1+30s)^5}。$$





## 有自平衡型阶跃响应曲线图解法

### 2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

#### (2) 两点法

设对象的阶跃响应曲线如右图所示，其传递函数可以表示为：

$$G(s) = \frac{K}{(T_0 s + 1)^n}$$

从阶跃响应曲线上获取三个数据： $y(\infty)$ 、 $y(t)|_{t=t_1} = 0.4 y(\infty)$  对应的  
的  $y(t)|_{t=t_1} = 0.8 y(\infty)$

时间 $t_1$ 、对应的时间 $t_2$ ，则模型参数 $K$ 、 $T_0$ 、 $n$ 可

按下述方法求出：

a) 计算  $\frac{t_1}{t_2}$  然后查表得到 $n$ 值；

b) 增益 $K$ 和时间常数 $T_0$ 分别根据下式计算。

$$K = \frac{y(\infty)}{x_0} \quad T_0 = \frac{t_1 + t_2}{2.16n}$$

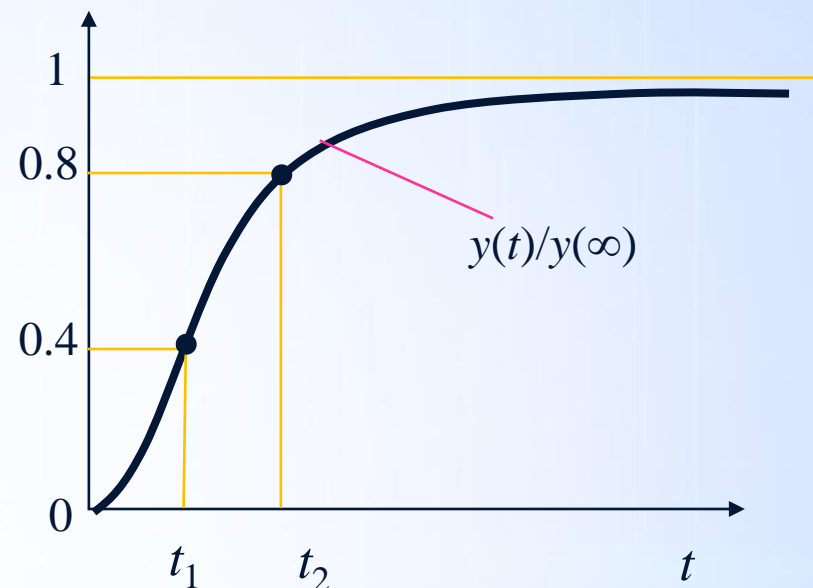


表:  $\frac{t_1}{t_2} = f(n)$

$n$	1	2	3	4	5	6
$t_1/t_2$	0.32	0.46	0.53	0.58	0.62	0.65
$n$	7	8	9	10	12	14
$t_1/t_2$	0.67	0.685	0.70	0.71	0.735	0.75



## 无自平衡型阶跃响应曲线图解法

### 1) 含迟延函数的过程传递函数模型

给对象施加阶跃输入 $x(t)=x_0 \times 1(t)$ ，设对象的阶跃响应曲线如右图所示，其传递函数可以表示为：

$$G(s) = \frac{1}{Ts} e^{-\tau s} = \frac{\varepsilon}{s} e^{-\tau s}$$

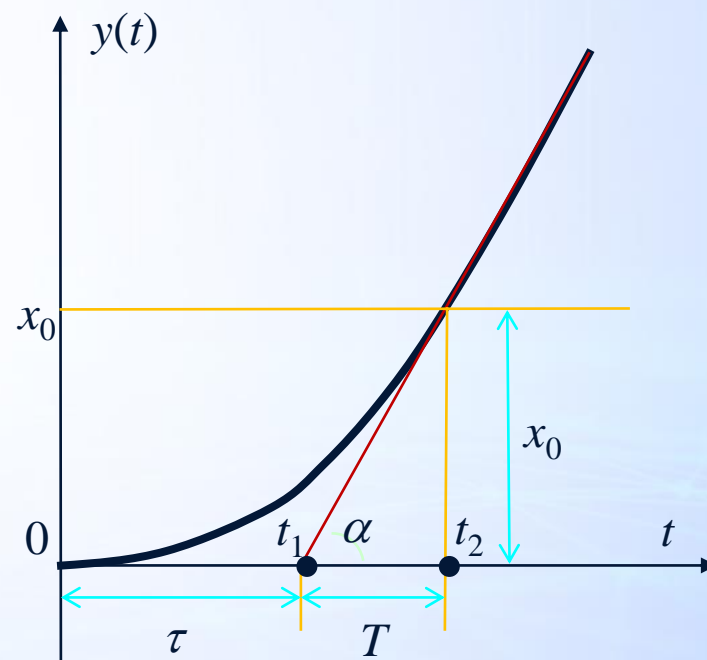
式中： $T$ 为积分时间常数； $\varepsilon=1/T$ ，为飞升速度； $\tau$ 为迟延时间。

模型参数 $\tau$ 和 $T$ 可按下述方法求得：

a) 作阶跃响应曲线的渐近线，渐近线与时间轴的交点为 $t_1$ ，从原点到 $t_1$ 的时间间隔即为 $\tau$ ；

b) 时间常数  $T = t_2 - t_1$

$$T = \frac{x_0}{\tan \alpha}$$





## 无自平衡型阶跃响应曲线图解法

### 2) 不含迟延函数的过程传递函数模型

给对象施加阶跃输入 $x(t)=x_0 \times 1(t)$ ，设对象的阶跃响应曲线如右图所示，

其传递函数可以表示为：
$$G(s) = \frac{1}{T_a s (1 + T_0 s)^n}$$

式中： $T_a$ 、 $T_0$ 为时间常数， $n$ 为惯性环节的阶数。

作阶跃响应曲线的渐近线，渐近线与横坐标轴交于 $D$ 点，与纵坐标轴交于 $H$ 点，则可按以下方法求得模型参数 $T_a$ 、 $n$ 和 $T_0$ 。

a) 时间常数

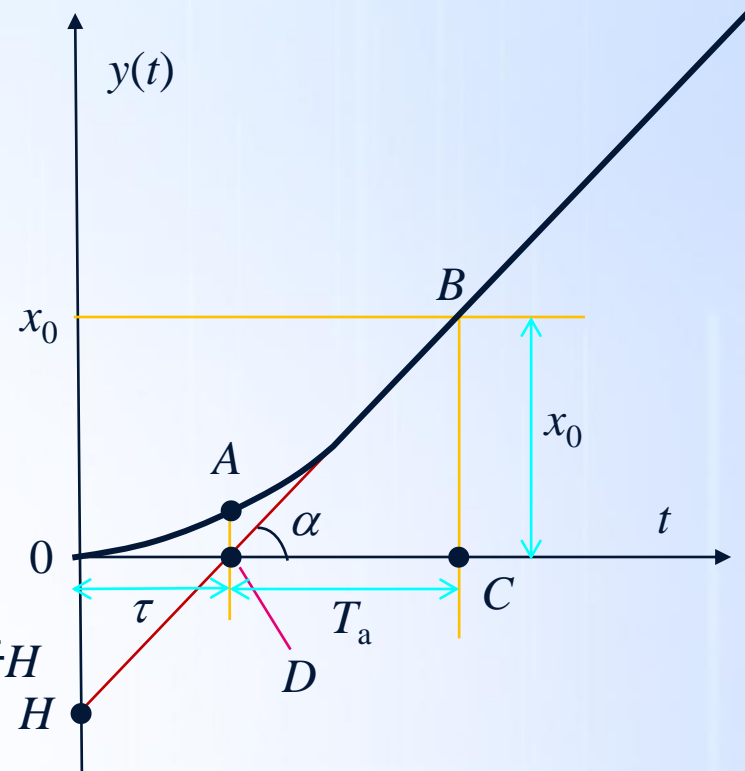
$$T_a = \frac{x_0}{\tan \alpha} = \frac{x_0}{0H / 0D} = \frac{\tau x_0}{0H} ;$$

b) 阶数 $n$ 根据

查表得到；

c) 时间常数

$$T_0 = \frac{\tau}{n}$$



表： $\frac{DA}{0H}$  和 $n$ 对应表

$n$	1	2	3	4	5	6
$DA/0H$	0.368	0.271	0.224	0.195	0.176	0.161

若查表得到的 $n$ 值不是整数，令 $n \approx n_1$  (整数部分) +  $\beta$  (小数部分)

需将传递函数形式调整为：
$$G(s) = \frac{1}{T_a s (1 + T_0 s)^{n_1} (1 + \beta T_0 s)}$$



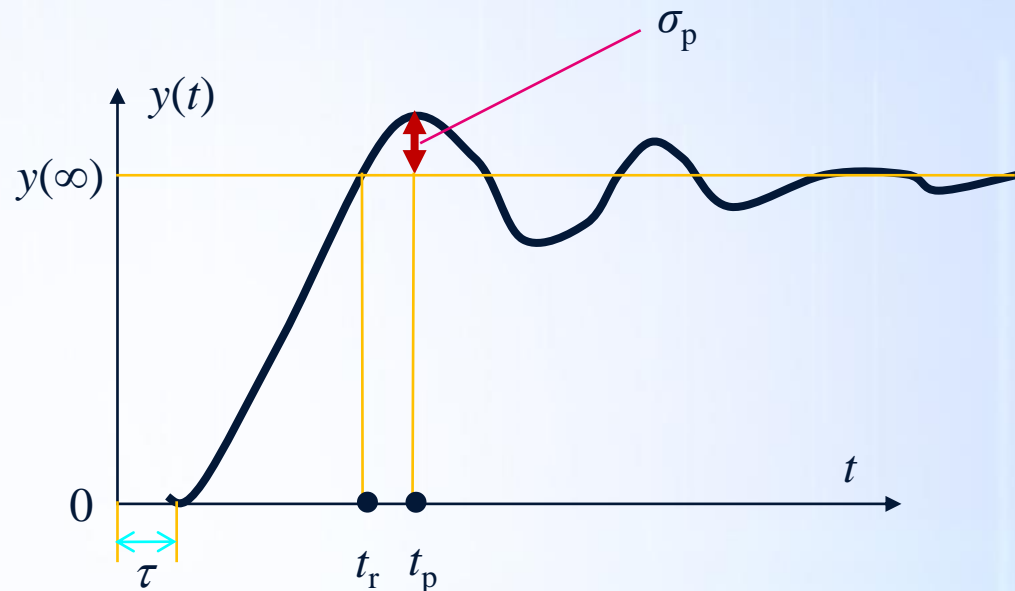
## 衰减振荡型阶跃响应曲线图解法

给对象施加阶跃输入 $x(t)=x_0 \times 1(t)$ ，设对象的阶跃响应曲线为**衰减振荡型**（如右图所示），其传递函数可以表示为：

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

式中： $K$ 为放大系数， $T$ 为时间常数， $\zeta$ 为阻尼系数， $\tau$ 为迟延时间。

从右图中获取 $t_r$ 、 $t_p$ 、 $\sigma_p$ 、 $y(\infty)$ ，则可按以下方法求得模型参数 $K$ 、 $T$ 、 $\zeta$ 和 $\tau$ ：



$$K = \frac{y(\infty)}{x_0} \quad m = -\ln \sigma_p \quad \zeta = \frac{m}{\sqrt{\pi^2 + m^2}} \quad T = (t_p - t_r) \sqrt{\frac{1 - \zeta^2}{\lg^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}}} \quad \tau = t_p - \frac{\pi T}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$



## 本节内容回顾

掌握有自平衡型阶跃响应曲线图解法。

掌握无自平衡型阶跃响应曲线图解法。

了解衰减振荡型阶跃响应曲线图解法。



## 建模方法、开普勒及科学发展模式

### 机理和实验两种建模方法特点比较

	优点	缺点
机理建模法	<ul style="list-style-type: none"><li>● 无需做实验；</li><li>● 无需数据或仅需要很少量的数据。</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>● 必须了解过程机理（物理、化学规律）；</li><li>● 对于复杂过程，所得模型形式可能会较复杂。</li></ul>
实验建模法	<ul style="list-style-type: none"><li>● 无需了解过程机理（物理、化学规律）。</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>● 需要做实验，并从中得到较多的数据用于建模；</li><li>● 需要先确定模型结构，而模型结构的确定缺乏通用方法。</li></ul>

**有趣的问题：过程机理又是如何发现的呢？**





## 建模方法、开普勒及科学发展模式

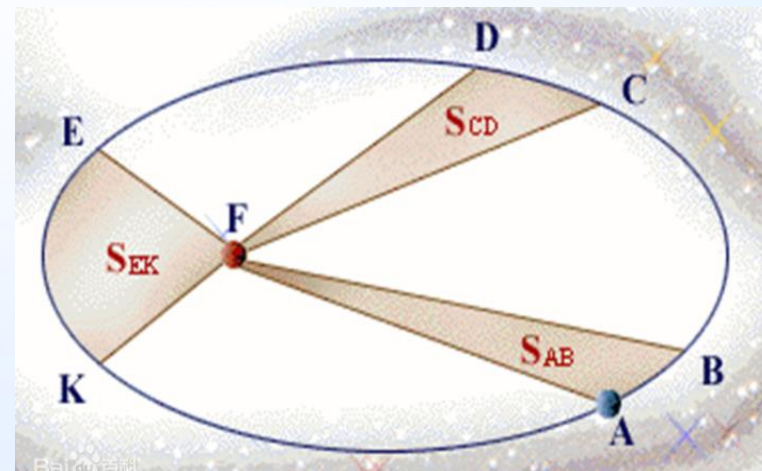
### 举例：行星运动的三大定律

- **第一定律（轨道定律）**：所有行星围绕太阳运行的轨道都是椭圆，而太阳位于椭圆的一个焦点处。
- **第二定律（面积定律）**：对任一行星来说，它与太阳间的连接线（矢径）在相等时间内扫过的面积相等。
- **第三定律（周期定律）**：围绕太阳运行的所有行星，其各自椭圆轨道半长轴的立方与其公转周期的平方之比是一个常数。



开普勒

( Johannes Kepler, 1571-1630 )





## 建模方法、开普勒及科学发展模式

### 三大定律的发现过程及历史意义

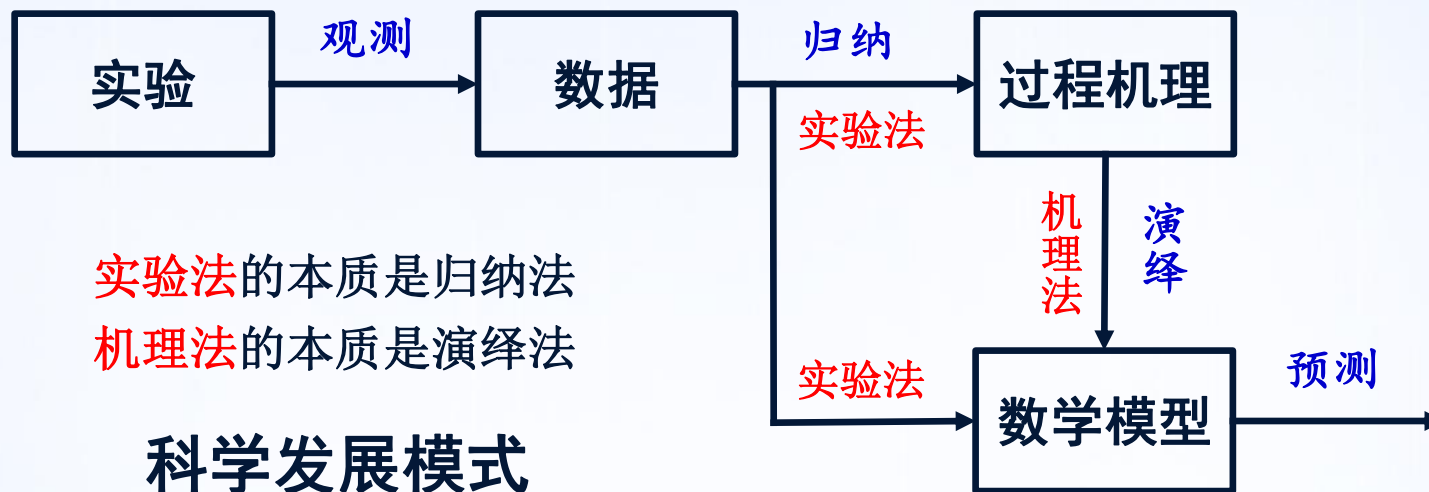
- 丹麦天文学家第谷（Tycho Brahe, 1546–1601）曾花20多年的时间观察星辰，并在离世前将平生积累的大量观测数据给了自己的德意志学徒开普勒。
- 基于第谷的数据，开普勒进行了深入的研究，于1609年在《新天文学》杂志上公开发表了第一、第二定律，于1619年在《宇宙和谐论》一书中公开发表了第三定律。
- 行星运动的三大定律构成了牛顿经典力学的重要基石。



布拉格市开普勒大街1号草坪上的  
第谷和开普勒雕像



## 建模方法、开普勒及科学发展模式



- 归纳法和演绎法的交替使用是科学发展的一种重要模式。
- 数学模型的建立归根到底是来源于数据，来源于对客观世界的观测。