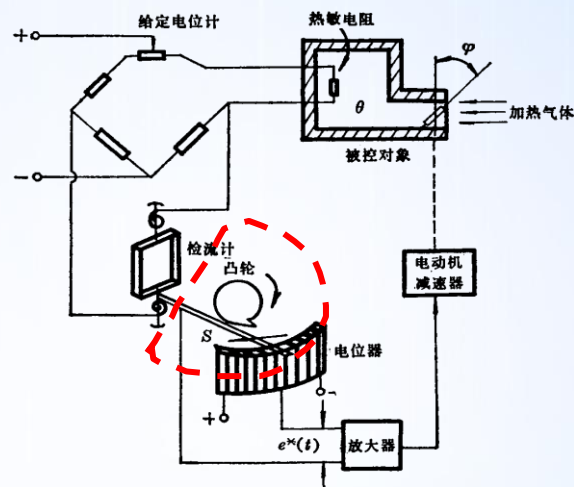
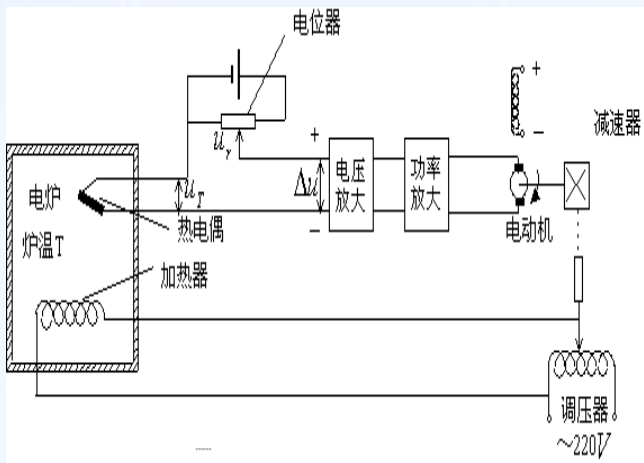


| 第七章：离散控制系统分析与设计





1. 什么是离散控制系统

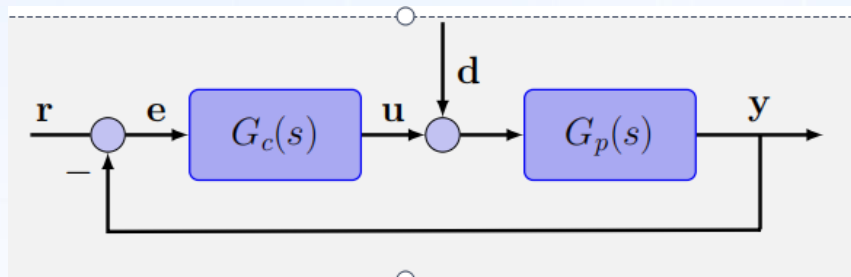


离散是相对于时间、相对于信号、相对于系统中的一个测点而言。

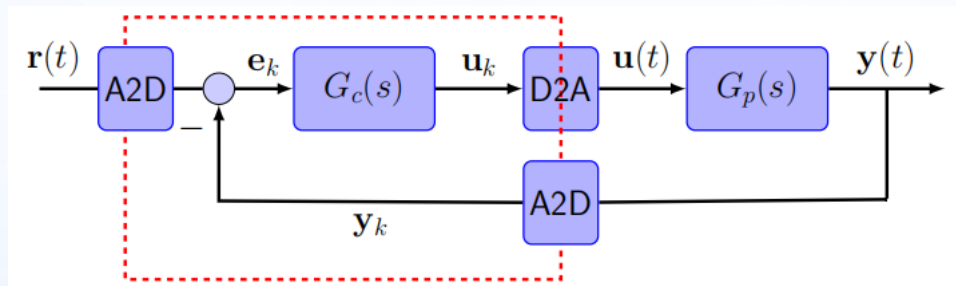
- 采样控制系统——时间离散，数值连续
- 数字控制系统——时间离散，数值量化



1. 什么是离散控制系统



连续控制系统



数字计算机

离散控制系统—计算机控制系统



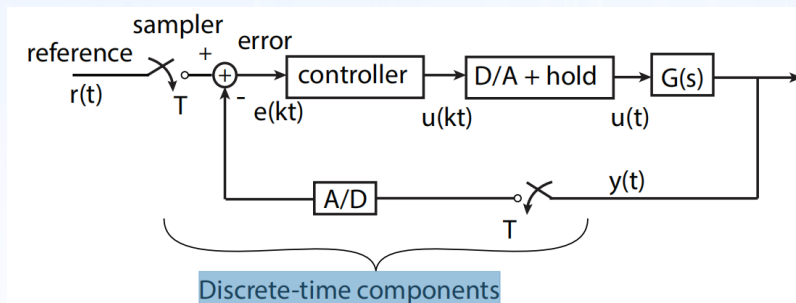
1. 什么是离散控制系统

计算机控制系统的优缺点

- 优点：**
- 1) 控制实现更灵活 (Flexible)：数字控制器的控制律可以编程实现，因此可以实现更复杂的控制算法。
 - 2) 提高系统抗干扰能力 (Noise Suppression)：采样信号，尤其是数字信号的传递可以有效地抑制噪声。
 - 3) 可提高设备利用率 (Efficiency)：可用一台计算机实现分时控制多个控制系统，经济性好。
 - 4) 对于变化较慢且具有传输滞后的控制系统，使用采样控制方式，能够得到较好的控制效果。
- 缺点：**
- 1) 可能会有信息缺失：采样点间信息丢失，与相同条件下的连续系统相比，性能会有所下降；
 - 2) 结构更复杂，成本更高：需附加A/D, D/A转换装置。

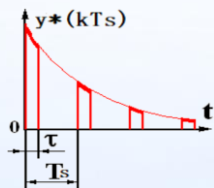
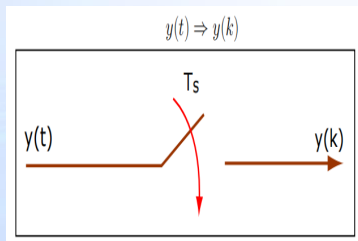


2. 计算机控制系统的组成与实现



1) A2D:

- ✓采样：按固定的时间间隔 (T_s) 对连续信号 ($y(t)$) 进行采样 ($y(k)$)
- ✓量化：将某物理量转换成二进制数 (常用8、12、14位表示)



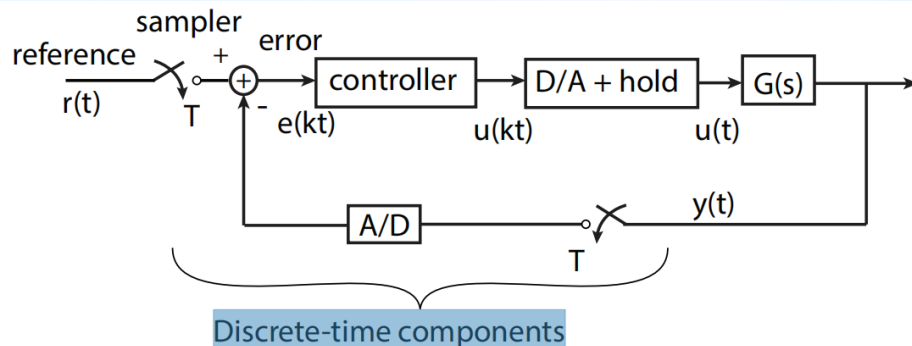
$\tau \ll T_s$, 字长足够长
 T_s 足够短

$$y(kT_s) = y^*(kT_s)?$$

$$y(t) = \sum y^*(kT_s)?$$



2. 计算机控制系统的组成与实现

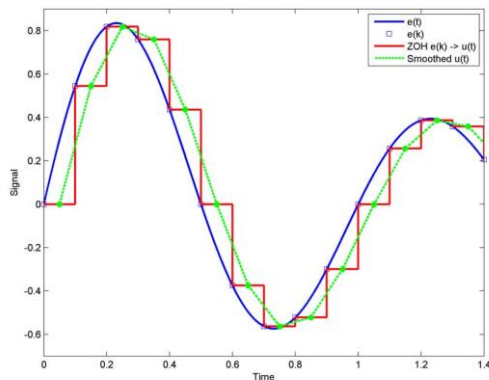


2) D2A:

- ✓二进制量转化成模拟量
- ✓离散信号 ($u(k)$)转化成连续信号($u(t)$)

最简单直接的方法： 在下一个采样周期到来之前保持前一个时刻值。

——零阶保持器法 (Zero Order Holder ZOH) 如红线所示

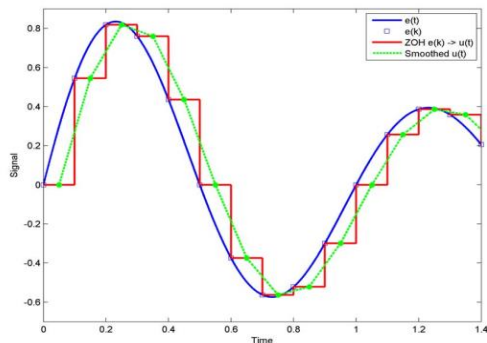
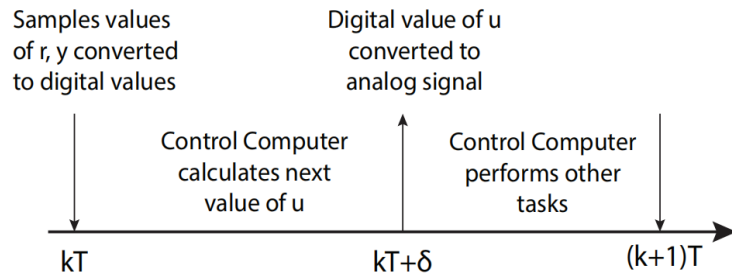




2. 计算机控制系统的组成与实现

采样与保持分析

1) 连接 $u(k)$ 的中点，可以得到更接近于原始信号的曲线，可以看出ZOH存在近似 $T_s/2$ 的迟延。显然如果 T_s 过大会会有问题，那么 T_s 是否受到什么因素的制约呢？



2) T_s 取决于我们根据测量值计算控制量的时间的长短，受到以下因素的制约

- 设备：传感检测装置、控制器设备、A2D、D2A设备的质量；
- 算法：控制算法的复杂程度、算法实现的效率等；
- 经济性：质量越好，造假越高



2. 计算机控制系统的组成与实现

控制器(Controller)算法的实现

串联校正控制器: $G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p} = \frac{U(s)}{E(s)}$

写出微分方程: $\dot{u} + pu = K_c(\dot{e} + ze)$

$$\dot{u}|_{t=kT_s} \approx \frac{1}{T_s} [u((k+1)T_s) - u(kT_s)] \equiv \frac{u_{k+1} - u_k}{T_s} \text{ (前向差分)}$$



$$\frac{u_{k+1} - u_k}{T_s} + pu_k = K_c \left(\frac{e_{k+1} - e_k}{T} + ze_k \right) \quad (\text{在 } kT_s \text{ 时刻})$$

or: $u_{k+1} = (1 - pT_s)u_k + K_c e_{k+1} - K_c(1 - zT_s)e_k$ (便于计算机实现)



2. 计算机控制系统的组成与实现

控制器(Controller)算法的实现

$$u_{k+1} = (1 - pT_s)u_k + K_c e_{k+1} - K_c (1 - zT_s)e_k$$

令: $u_{old} = (1 - pT_s)u_k - K_c (1 - zT_s)e_k$, 有

$$u_{k+1} = K_c e_{k+1} + u_{old}$$

程序代码:

初始化 u_{old} , $r_1 = 1 - pT_s$, $r_2 = K_c(1 - zT_s)$

while $k < N$ do

$k = k + 1$

(采样) read y_{k+1}, r_{k+1}

(计算) $e_{k+1} = r_{k+1} - y_{k+1}$

(更新) $u_{k+1} = K_c e_{k+1} + u_{old}$

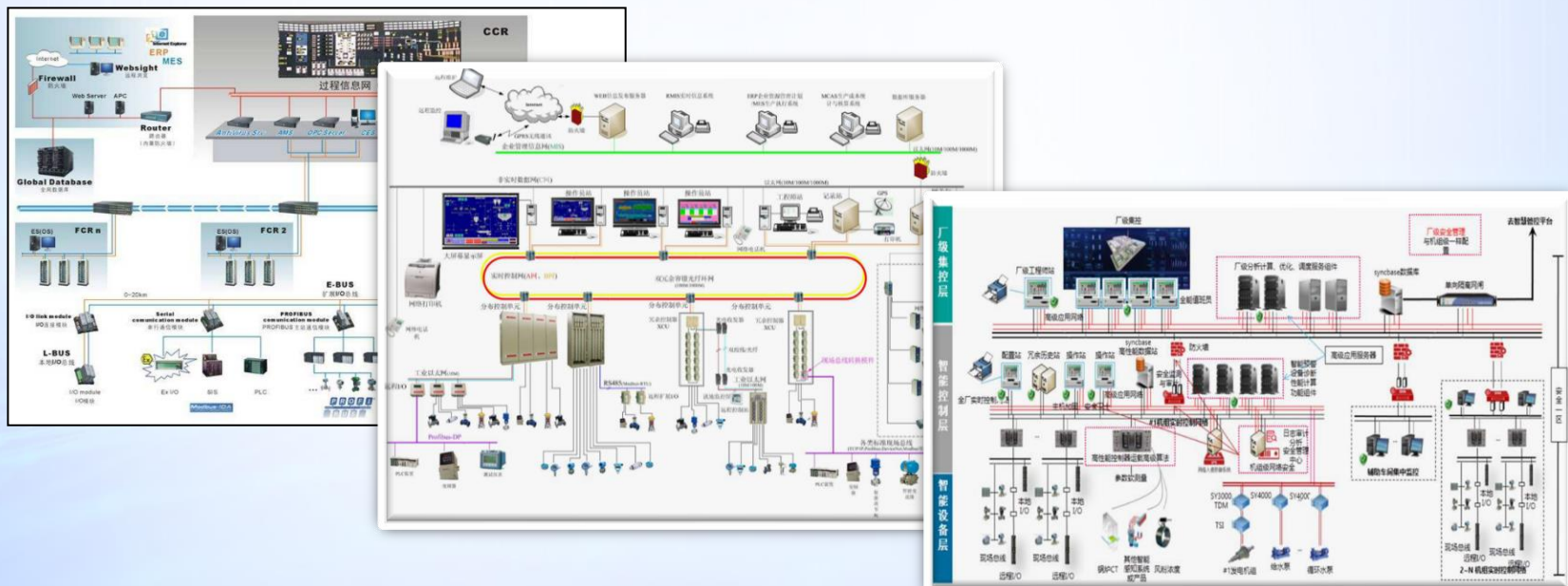
(更新) $u_{old} = r_1 u_{k+1} + r_2 e_{k+1}$



3. 典型的计算机控制系统——DCS

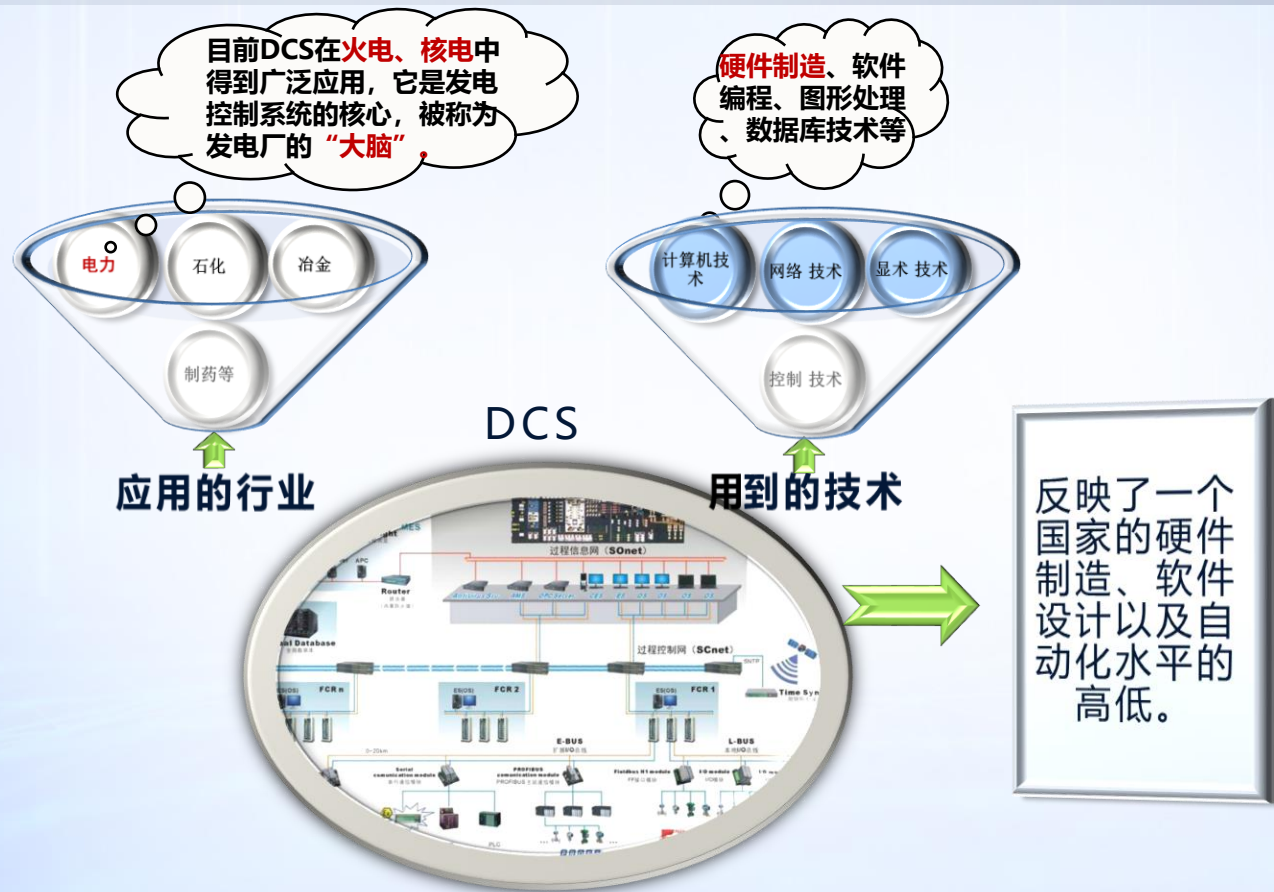
分散控制系统 (Distributed Control System, 简称DCS) 是一个由过程控制级和过程监控级组成的、以通信网络为纽带的大型计算机控制平台。

DCS的特点：分散控制、集中操作、分级管理、配置灵活、组态方便。





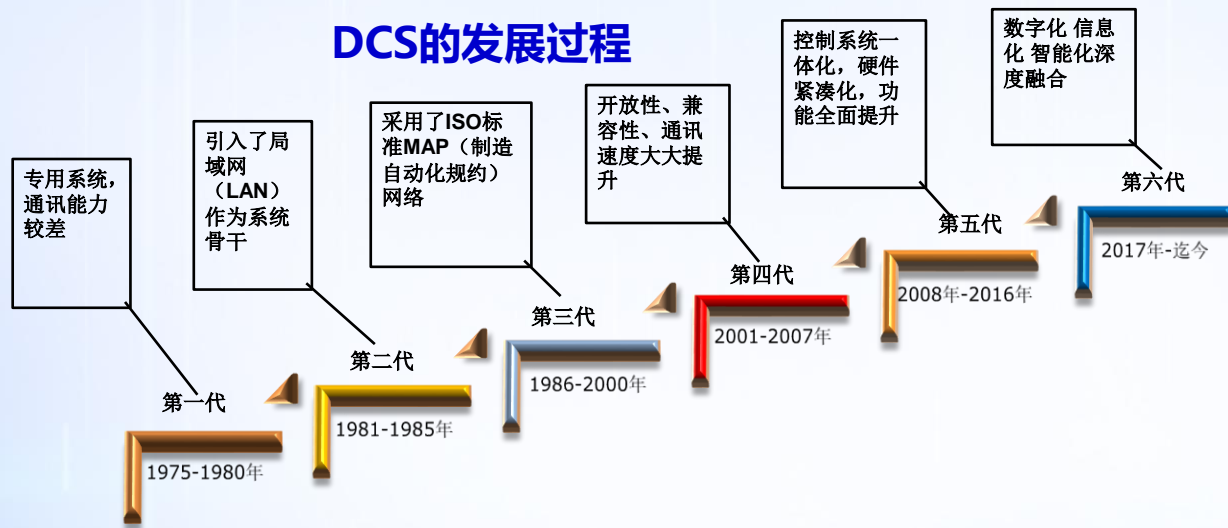
3. 典型的计算机控制系统——DCS





3. 典型的计算机控制系统——DCS

DCS的发展过程



国外DCS厂家主要有：西屋（艾默生）、FOXBORO、ABB、西门子、霍尼韦尔、横河、山武 - 霍尼韦尔公司、FISHER-ROSEMOUNT公司等。

国产DCS的开发和应用起始于上世纪90年代，目前主要有：国电智深、鲁能控制、上海新华、南京科远、浙大中控、和利时、上海华文、上海乐华、浙江中自等。



3. 典型的计算机控制系统——DCS

2020年11月6

国内首套100%全国产化DCS在福州电厂35万千瓦机组成功投用！

华能睿渥DCS从CPU等核心芯片到基础电子元器件，从操作系统、数据库等基础软件到应用软件全部使用自主技术，是国内首个软、硬件国产化率达到100%的工业控制系统，实现了锅炉、汽轮机（含DEH）、发电机的全覆盖控制。

经检测，华能睿渥DCS的硬件板卡精度、抗干扰能力与运行环境适应性等多项指标优于国内外同类产品。



■ 典型的计算机控制系统——DCS

2020年12月4日

中国华能牢记中央企业“大国重器”的责任担当，联合中国电子、南瑞继保等中央企业，成功研制出基于**国产芯片、国产操作系统的、具有完整自主知识产权的“华能睿渥”（HN Revival）DCS**,实现了软、硬件的全国产化。玉环电厂的成功示范是国内首套**100%全国产化**百万千瓦级DCS，也是目前全国产化DCS应用容量最大、参数等级最高的机组。



自主可控是安全核心，国家“十四五”规划中对于着力解决“卡脖子”问题，加快建立自主可控的产业链体系做出了明确要求。**工业控制系统是工业的“核心大脑”**，其安全问题已成为事关经济基础、社会发展、国家安全的重大战略问题。历来工业控制领域软硬件技术、关键核心芯片主要被欧美等国家垄断，存在较大的安全风险，将对我国能源安全构成十分重大的威胁。



3. 典型的计算机控制系统——DCS

2021年5月6日

2021年5月6日22点23分，随着2号机组成功并网发电，大唐南京发电厂2号660MW机组100%自主可控智能控制系统NT6000(V5)正式投入商业运行，实现**进口替代**，成为国内**首台超超临界全机组DCS、DEH系统‘100%自主可控’机组**。

大唐南京发电厂2号机组原使用完全进口**DCS、DEH**控制系统，已运行近**11**年。为解决核心技术“卡脖子”问题，进一步提升机组效率，汇集大唐南京发电厂、大唐华东院、科远智慧公司等多方力量，在中国大唐集团和电力行业内率先开展**DCS**自主可控项目改造。

习近平总书记多次强调，关键核心技术是要不来、买不来、讨不来的。我们必须走好自主创新的自力更生之路。

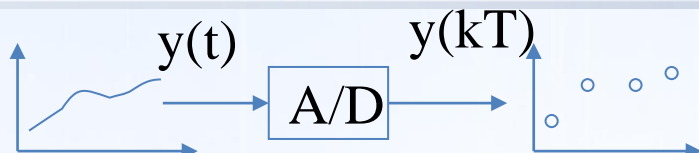
热烈庆祝大唐南京发电厂2号超超临界机组
完全自主可控智能控制系统示范应用项目成功投产



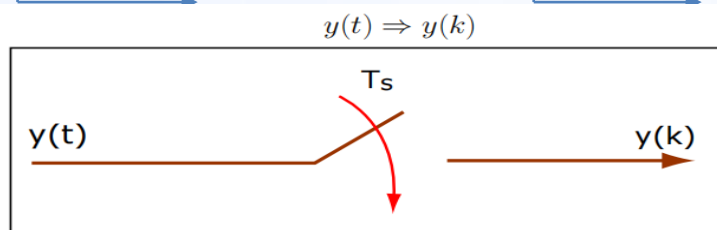


1. 信号的采样

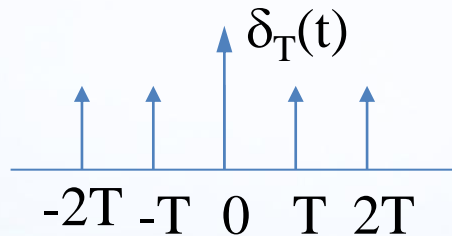
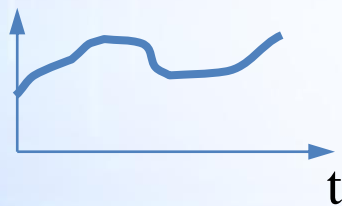
➤ 采样的物理实现



➤ 数学抽象分析



$y(t)$



$$\delta_T(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad y^*(t) = y(t)\delta_T(t)$$

原始信号

理想采样序列

采样信号



1. 信号的采样

1) 采样信号

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \delta_T(t - kT)$$

2) 采样信号的拉氏变换

$$Y^*(s) = L(y^*(t))$$

$$L[y^*(t)] = L[\cdots y(0)\delta(t) + y(T)\delta(t-T) + y(2T)\delta(t-2T) + \cdots]$$

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) e^{-kTs}$$

表示: $Y^*(s)$ 与 $y(t)$
在采样点上取值之间
的关系, 用于求 $y^*(t)$
的 Z 变换或系统的时间响应

3) 采样信号的傅里叶变换

脉冲传递函数的傅立叶级数表示为: $\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega_s t}$,

其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ 为角频率, 有

$$y^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} y(t) e^{jk\omega_s t}$$



1. 信号的采样

据延迟定理: $L[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} X(s)$

$$L[\delta(t)] = 1$$

复平移定理: $L[e^{-at} x(t)] = X(s + a)$

$$L[y^*(t)] = L\left[\frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} y(t) e^{jk\omega_s t}\right]$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} Y(s - jk\omega_s)$$

$$Y^*(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[j(\omega - k\omega_s)]$$

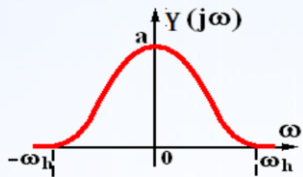
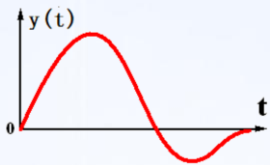
表示 $Y^*(s)$ 与 $Y(s)$ 的关系, 一般用于 $Y^*(s)$ 频谱分析

采样信号的频率特性为原信号的无限项谐频特性之和。

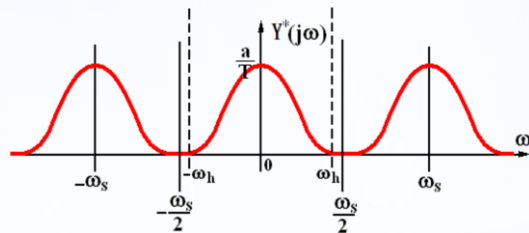
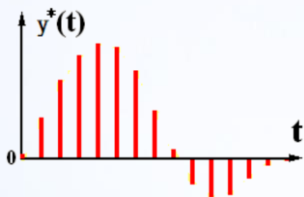


2. 连续信号与采样信号的频谱分析

$y(t)$
连续信号



$y^*(t)$
离散信号



$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot e^{-kTs}$$

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s)$$

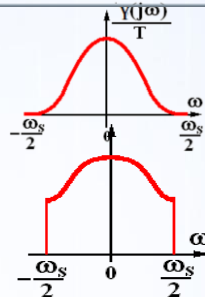
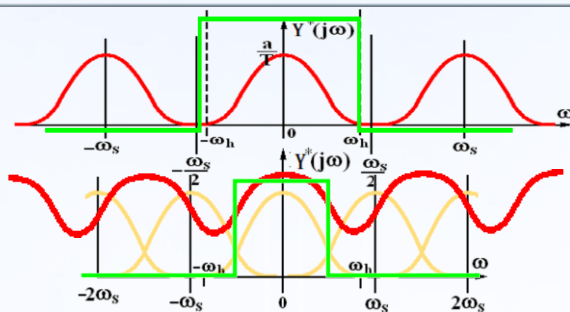


2. 连续信号与采样信号的频谱分析

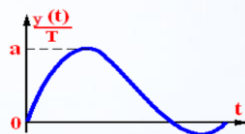
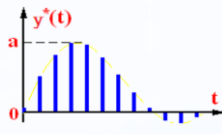
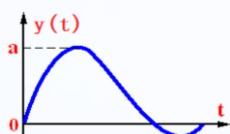
香农(Shannon)采样定理 — 信号完全复现的必要条件

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$$

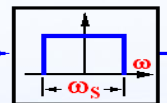
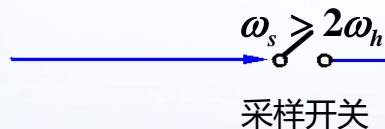
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} < 2\omega_h$$



$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$$



$$T < \frac{\pi}{\omega_h}$$



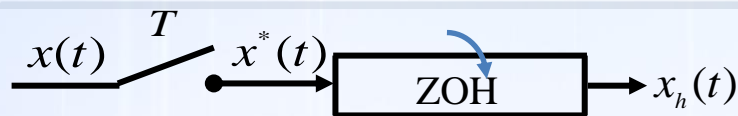
理想滤波器

若 $\omega_s \geq 2\omega_h$ 或 $T \leq \frac{\pi}{\omega_h}$ 则采样信号包含原信号的全部信息，有可能复现原信号。f (为什么要考虑采样信号的复现性)

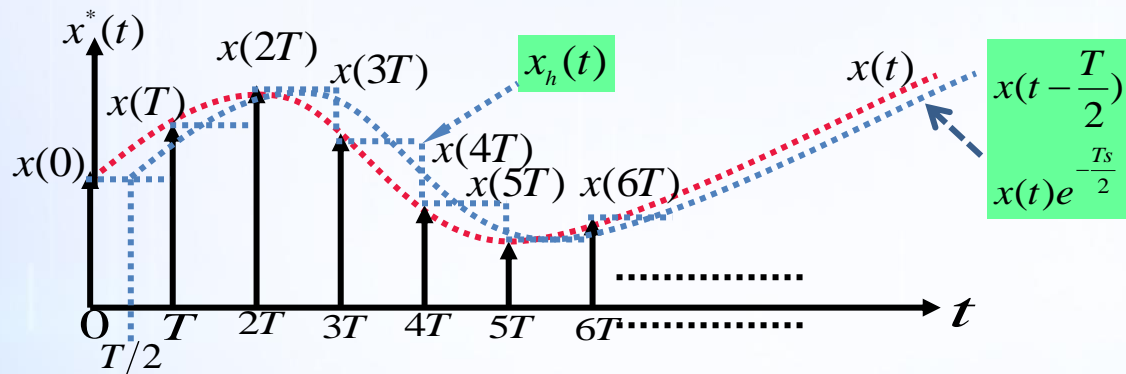




3. 零阶保持器



最常用；用在所有的D/A中。还有一阶、三角保持器等。



蓝色虚线表示的复原后连续信号比采样前的连续信号在时间上滞后 $\frac{T}{2}$

ZOH表达式:
$$x_h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \{1(t - kT) - 1[t - (k+1)T]\}$$

ZOH传函:
$$X_h(s) = L[x_h(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) = X^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

$$\therefore G_h(s) = \frac{X_h(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \approx e^{-\frac{T}{2}s}$$



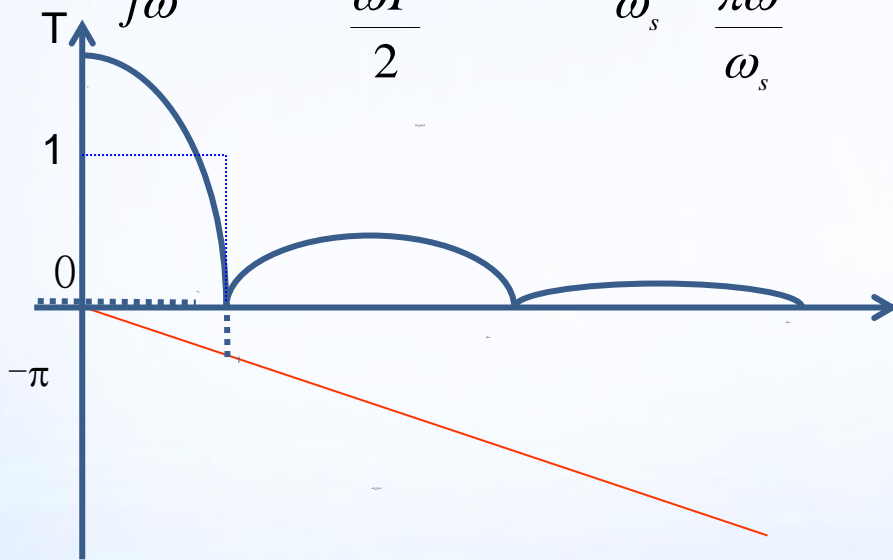
3. 零阶保持器

零阶保持器的频谱分析

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}} = \frac{2\pi}{\omega_s} \frac{\sin \frac{\pi\omega}{\omega_s}}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_s}}$$

幅频特性

相频特性

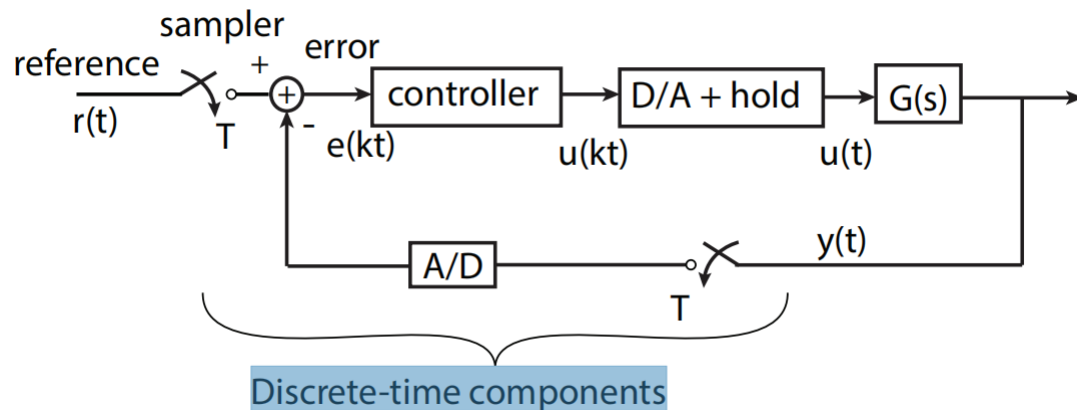


零阶保持器是一相位滞后的低通滤波器，高频分量尚不能完全滤尽，因此它只能近似地复原连续信号。



采样与保持

课程小结



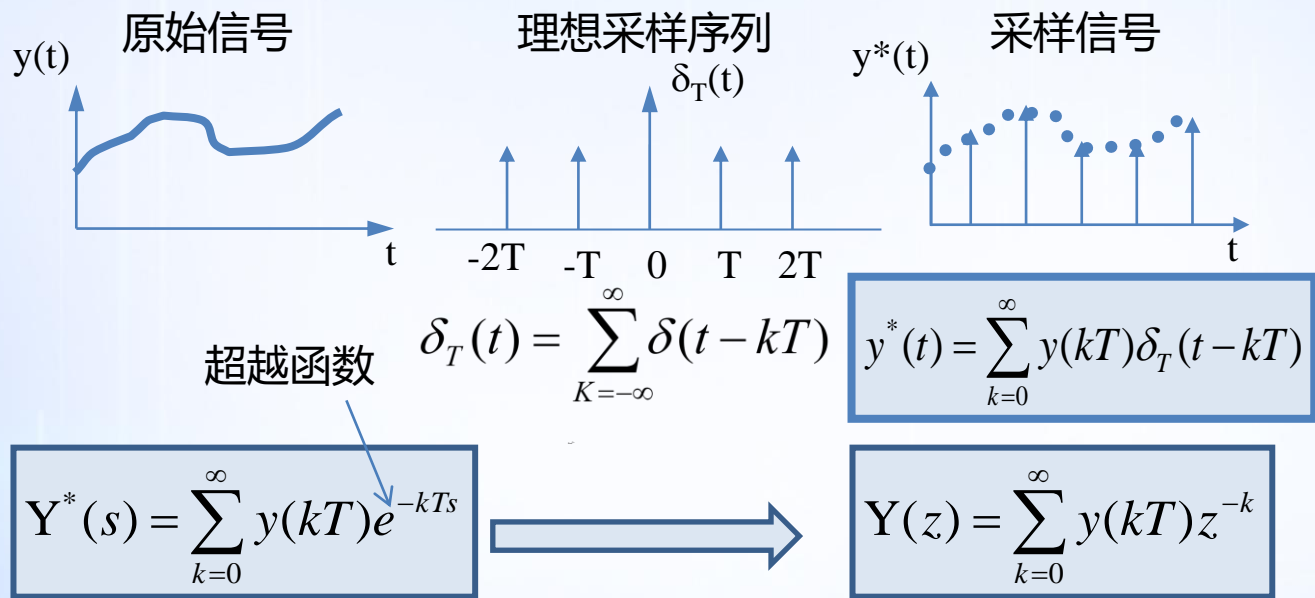
$$\text{A/D: } \begin{cases} \tau \ll T \\ \text{字长足够} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{等效为理想采样开关} \\ e^*(t) = e(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \cdot \delta(t - nT) \end{cases}$$

D/A: 用 ZOH 实现

Shannon定理 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_h$ 或 $T < \frac{\pi}{\omega_h}$



1. Z变换的定义



$$Y(z) = Z[y^*(t)] = Z[Y(s)] = Z[Y^*(s)] = Z[y(t)]$$

只有采样序列才有Z变换！ $Y(z)$ 对应唯一的 $y^*(t)$ ，但不对应唯一的 $y(t)$



1. Z变换的定义

z变换的基本定理

- 1) 线性性质 $Z[a \cdot e_1^*(t) \pm b \cdot e_2^*(t)] = a \cdot E_1(z) \pm b \cdot E_2(z)$
- 2) 实位移定理
$$\begin{cases} \text{延迟定理} & Z[e(t - nT)] = z^{-n} E(z) \\ \text{超前定理} & Z[e(t + nT)] = z^n \left[E(z) - \sum_{k=0}^{n-1} e(kT) \cdot z^{-k} \right] \end{cases}$$
- 3) 复位移定理 $Z[e(t) \cdot e^{\mp at}] = E(z \cdot e^{\pm aT})$
- 4) 初值定理 $\lim_{n \rightarrow 0} e(nT) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z)$
- 5) 终值定理 $\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \cdot E(z)$
- 6) 卷积定理 $c^*(t) = e^*(t) * g^*(t) \Rightarrow C(z) = E(z) \cdot G(z)$



2. Z变换的方法

➤ 幂级数法 (定义法)

例1: $e(t) = a^{\frac{t}{T}}$

解: $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$

例2: $e(t) = t$

解:
$$\begin{aligned} E(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} nT \cdot z^{-n} = T[z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots] \\ &= Tz[z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \dots] = -Tz \left[\frac{d}{dz} z^{-1} + \frac{d}{dz} z^{-2} + \frac{d}{dz} z^{-3} + \dots \right] \\ &= -Tz \left[\frac{d}{dz} z^{-1} + \frac{d}{dz} z^{-2} + \frac{d}{dz} z^{-3} + \dots \right] = -Tz \frac{d}{dz} z^{-1} [1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots] \\ &= -Tz \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = -Tz \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z - 1} \right] = \frac{Tz}{(z - 1)^2} \end{aligned}$$



2. Z变换的方法

➤ 部分分式展开法 (查表法)

例3: $Y(s) = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$

解: $\because Y(s) = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{s+p_i} = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+\alpha} (\because y(t) = 1 - e^{-\alpha t})$

$$\therefore Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\alpha T}} = \frac{z(1-e^{-\alpha T})}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$$

例4: $Y(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$

解: $Y(s) = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{(s+a)-(s+b)}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a} \right]$

$$(\because y(t) = \frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}))$$

$$Y(z) = \frac{1}{a-b} \left[\frac{z}{z-e^{-bT}} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \right]$$



2. Z变换的方法

➤ 留数法

$$\text{单极点: } R_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i) \left[X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$m_i \text{重极点: } R_i = \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{s \rightarrow -p_i} \frac{d^{m_i-1}}{ds^{m_i-1}} \left[(s + p_i)^{m_i} X(s) \frac{z}{z - e^{sT}} \right]$$

$$\text{解: } \because X(s) = L[t] = \frac{1}{s^2},$$

$$\therefore Z[t] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[s^2 \frac{1}{s^2} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] = \left. \frac{zTe^{sT}}{(z - e^{sT})^2} \right|_{s=0} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\because X(s) = L[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

$$\therefore Z[t^2] = R_1 = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2}{ds^2} \left[s^3 \frac{2}{s^3} \frac{z}{z - e^{sT}} \right] = \left. \frac{zT^2 e^{sT} (z - e^{sT} + 2)}{(z - e^{sT})^3} \right|_{s=0} = \frac{T^2 z(z+1)}{(Z-1)^3}$$



3. Z反变换

由 $X(z)$ 求出 $x(kT)$ 或 $x^*(t)$ 叫Z反变换, 一般记为:

$$x^*(t) = x(kT) = Z^{-1}[X(z)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{幂级数法 (长除法)} \\ \text{查表法 (部分分式展开法)} \quad \text{以 } \frac{E(z)}{z} \text{ 的形式展开} \\ \text{留数法 (反演积分法)} \quad e(nT) = \sum \text{Res} [E(z) \cdot z^{n-1}] \end{array} \right.$$

例6: 求 $X(z) = \frac{(1-e^{-\alpha T})z}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})}$ 的原函数.

$$\text{解: } \because \frac{X(z)}{z} = \frac{(1-e^{-\alpha T})}{(z-1)(z-e^{-\alpha T})} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-\alpha T}}$$

$$\therefore X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$$

$$\because x(kT) = 1 - e^{-\alpha kT} \quad \therefore x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-\alpha kT}) \delta(t - kT)$$



3. Z反变换

例7: 求 $Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ 的原函数 $y^*(t)$.

解: $\because Y(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2} = z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + \dots$

$$\begin{array}{r} z^{-1} + 3z^{-2} + \dots \\ z^2 - 3z + 2 \overline{) z} \\ \underline{-z - 3 + 2z^{-1}} \\ 3 - 2z^{-1} \\ \underline{-3 + 9z^{-1} + 6z^{-2}} \\ 7z^{-1} - 6z^{-2} \\ \vdots \end{array}$$

$$\therefore y^*(t) = \delta(t-T) + 3\delta(t-2T) + 7\delta(t-3T) + 15\delta(t-4T) + \dots$$



3. Z反变换

例8: 求 $Y(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$ 的原函数 $y^*(t)$.

解:
$$Y(z) = \frac{10z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{10z}{(z-1)(z-2)}$$

$$y(nT) = \sum \text{Res}[Y(z) \cdot z^{n-1}]$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \cdot \frac{10z \cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} \right] + \lim_{z \rightarrow 2} \left[(z-2) \cdot \frac{10z \cdot z^{n-1}}{(z-1)(z-2)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{10z^n}{z-2} \right] + \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{10z^n}{z-1} \right] = -10 + 10 \times 2^n = 10(2^n - 1) \end{aligned}$$

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} 10(2^n - 1) \cdot \delta(t - nT)$$



离散控制系统分析与设计——Z变

换 课程小结

$$Y(z) = Z[y^*(t)] = Y^*(s) \Big|_{z=e^{Ts}} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot z^{-k}$$

- 只有采样序列才有Z变换!
- $Y(z)$ 对应唯一的 $y^*(t)$, 但不对应唯一的 $y(t)$

Z变换 {
级数求和法 (定义法)
查表法 (部分分式展开法)
留数法

Z反变换 {
长除法
查表法 (部分分式展开法)
留数法 (反演积分法)

⇒ {
只反映采样点的信息
有时连续信号在采样点会有跳变



1. 离散控制系统的数学模型

差分方程

脉冲传递函数

离散状态方程

□ 差分方程

直接表明输入 $x(k)$ 与输出 $y(k)$ 的关系，易于计算机实现，有以下3种形式

$$\begin{aligned} 1) \quad & y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n) \quad \text{展开式} \\ & = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_n x(k-n) \end{aligned}$$

$$2) \quad y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i x(k-i) \quad \text{级数和式}$$

$$3) \quad y(k) = \sum_{i=0}^n b_i x(k-i) - \sum_{i=0}^n a_i y(k-i) \quad \text{计算机式}$$



1. 离散控制系统的数学模型

□ 脉冲传递函数 (Z传递函数, 离散传递函数)

➤ 定义:

在零初始条件下, 线性定常离散控制系统的输出序列的Z变换和输入序列的Z变换之比为该系统的脉冲传递函数。

➤ 表达式:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Z[y^*(t)]}{Z[x^*(t)]} = \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \\ &= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} \cdots + a_n} \end{aligned}$$



1. 离散控制系统的数学模型



差分方程与脉冲传递函数的关系

对1) 式两边Z变换:

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_{n-1} y(k-n+1) + a_n y(k-n) \\ = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \cdots + b_n x(k-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}) \\ = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}) \\ G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \end{aligned}$$

系数 $\{a_i, b_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n\}$ 为差分方程和脉冲传递函数共用。



对比微分方程与传递函数的关系



1. 离散控制系统的数学模型

➤ 常见式:

$$G(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n} \quad (m < n)$$

$$\text{若 } x^*(t) = \delta(t), \quad X(z) = 1$$

$$Y(z) = G(z)X(z) = G(z)$$

$$g(kT) = Z^{-1}[Y(z)] = Z^{-1}[G(z)]$$

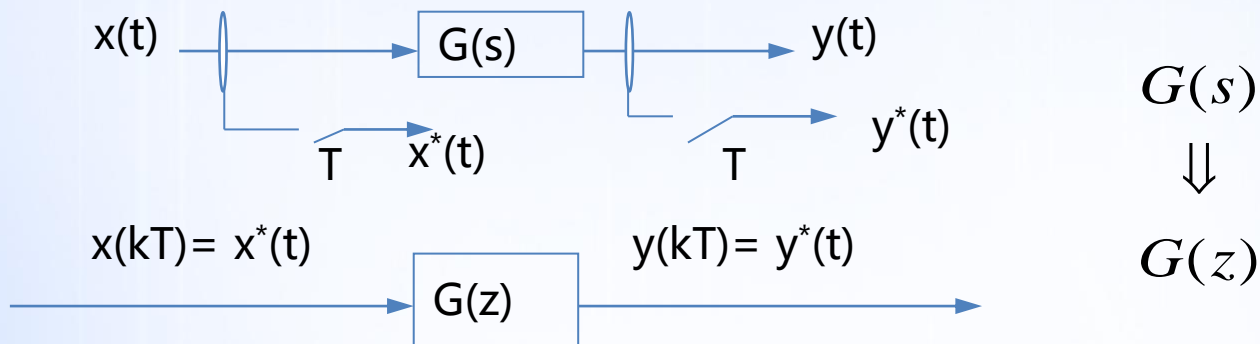
$$Z[g(kT)] = G(z)$$

$G(z)$ 为单位脉冲响应的 Z 变换



2. 连续函数的离散化

为什么要离散化？便于离散系统的分析和设计



离散化的要求： $G(z)$ 特性等价于 $G(s)$ 被采样

常用四种离散化方法:

数值微积分法
替换法
根匹配法
保持器等价法



2. 连续函数的离散化

□ **数值微积分法：**适用于低阶的连续系统。

✓ 数值积分：

$$\int_0^{mT} e(t) dt = \sum_{j=1}^m e(j-1) \cdot T$$

前向矩形

$$\int_0^{mT} e(t) dt = \sum_{j=1}^m e(j) \cdot T$$

后向矩形

$$\int_0^{mT} e(t) dt = \sum_{j=1}^m \frac{e(j) + e(j-1)}{2} \cdot T$$

梯形



2. 连续函数的离散化

✓ 差分定义 $e(kT)$ 简记为 $e(k)$

前向差分	{	1阶前向差分	$\Delta e(k) = e(k+1) - e(k)$	$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta e(k)}{T} = \frac{de(t)}{dt}$
		2阶前向差分	$\Delta^2 e(k) = \Delta e(k+1) - \Delta e(k)$	
			$= e(k+2) - 2e(k+1) + e(k)$	
		·		
		n阶前向差分	$\Delta^n e(k) = \Delta^{n-1} e(k+1) - \Delta^{n-1} e(k)$	
后向差分	{	1阶后向差分	$\nabla e(k) = e(k) - e(k-1)$	$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{\nabla e(k)}{T} = \frac{de(t)}{dt}$
		2阶后向差分	$\nabla^2 e(k) = \nabla e(k) - \nabla e(k-1)$	
			$= e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)$	
		·		
		n阶后向差分	$\nabla^n e(k) = \nabla^{n-1} e(k) - \nabla^{n-1} e(k-1)$	



2. 连续函数的离散化

例1 .求惯性环节的离散化模型及其阶跃响应

解: 设惯性环节可表示为

$$T_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_0 x(t)$$

$$\text{令 } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T}, \quad T: \text{离散化步长}$$

$$y(t) = y(k-1), \quad x(t) = x(k-1)$$

$$\frac{T_0}{T} [y(k) - y(k-1)] + y(k-1) = K_0 x(k-1)$$

$$y(k) - \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) y(k-1) = K_0 x(k-1) \frac{T}{T_0}$$



2. 连续函数的离散化

取Z变换:

$$Y(z) \left[1 - \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) z^{-1} \right] = K_0 z^{-1} X(z) \frac{T}{T_0}$$

$$Y(z) = \frac{K_0 z^{-1} \frac{T}{T_0}}{1 - \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) z^{-1}} X(z) = \frac{b z^{-1}}{1 - a z^{-1}} X(z) \quad b = K_0 \frac{T}{T_0}, \quad a = 1 - \frac{T}{T_0}$$

$$\text{当 } x(kT) = 1(kT), \text{ 则 } X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{b z^{-1}}{(1 - a z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{b}{1 - z} \cdot \left(\frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - a} \right)$$

$$y(kT) = Z^{-1}[y(z)] = \frac{b}{1 - a} \cdot (1^k - a^k) = \frac{b}{1 - a} \cdot (1 - a^k)$$



2. 连续函数的离散化

例2 .试将PID控制器离散化 $u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)$

解:
$$u(k) = K_p \left(e(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{j=0}^k e(j)T + T_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right)$$

$$u(k-1) = K_p \left(e(k-1) + \frac{1}{T_i} \sum_{j=0}^{k-1} e(j)T + T_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T} \right)$$

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_i} e(k) + \frac{T_d}{T} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)) \right)$$



2. 连续函数的离散化

或整理为

$$u(k) = u(k-1) + b_0 e(k) + b_1 e(k-1) + b_2 e(k-2)$$

$$b_0 = K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$b_1 = -K_p \left(1 + \frac{T_d}{T} \right)$$

$$b_2 = K_p \frac{T_d}{T}$$

增量式PID控制器



2. 连续函数的离散化

□ **替换法** $G(s = f(z)) = G(z)$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \quad \text{Tustin变换、双线性变换}$$

$$\text{推导: } s = \frac{\ln z}{T}, \quad z = e^{Ts}, \quad \ln z = Ts$$

$$\ln z = 2 \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right]$$

$$s = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{2n+1} + \dots \right]$$

$$\approx \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$$

特点: 线性, 稳定, 有一定精度



2. 连续函数的离散化

例3 .用Tustin法离散化 $G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1}$

解：代入 $s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{\left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0.2 \cdot \left(\frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1}\right) + 1} \\ &= \frac{T^2(z^2 + 2z + 1)}{(T^2 + 0.4T + 4)z^2 + (2T^2 - 8)z + (T^2 - 0.4T + 4)} \end{aligned}$$



2. 连续函数的离散化

□ 根匹配法

设原系统为
$$G(s) = \frac{K(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

构造新系统
$$G(z) = \frac{K_z(z - e^{q_1 T})(z - e^{q_2 T}) \cdots (z - e^{q_m T}) f_1(z) f_2(z) \cdots f_{n-m}(z)}{(z - e^{p_1 T})(z - e^{p_2 T}) \cdots (z - e^{p_n T})}$$

利用 $z = e^{sT}$ 关系使零极点一一对应

n 个极点: $s - p_i \Rightarrow z - e^{p_i T}$

m 个零点: $s - q_i \Rightarrow z - e^{q_i T}$

$n - m$ 个无穷零点 $\Rightarrow f_1(z) f_2(z) \cdots f_{n-m}(z)$



2. 连续函数的离散化

K_z 由 $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)E(s) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})G(z)E(z)$ 确定

$$f_i(z) = \begin{cases} z & s_i = -\infty \pm j\omega \\ z + e^{\sigma T} & s_i = \sigma \pm j\omega \\ 1 & s_i = +\infty \pm j\omega \end{cases}$$

ω 为任意值, σ 为有限值, s_i 的确定用根轨迹法。



2. 连续函数的离散化

例4 求 $\frac{K}{s+a}$ 的根匹配离散模型。

解: $p = -a, \quad q = -\infty + j0$

$$G(z) = \frac{K_z z}{z - e^{-aT}}$$

$$e(t) = 1(t), \quad E(s) = \frac{1}{s}, \quad E(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1 - z^{-1}) K_z z}{z - e^{-aT}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{K_z}{1 - e^{-aT}}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK/(s+a)}{s} = \frac{K}{a}$$

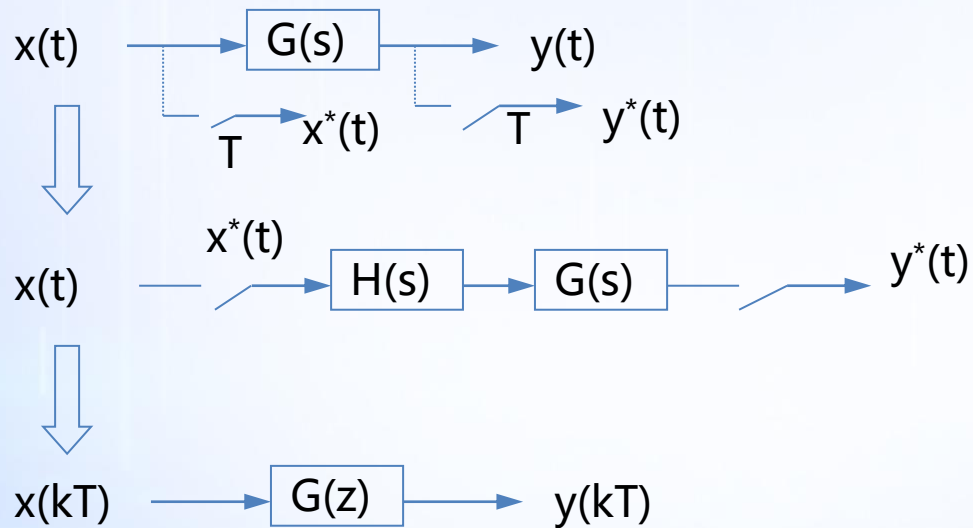
$$K_z = \frac{K}{a} (1 - e^{-aT})$$

$$G(z) = \frac{K}{a} \frac{(1 - e^{-aT}) z}{z - e^{-aT}}$$



2. 连续函数的离散化

□ 保持器等价法



零阶保持器 $H(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G(s) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$



2. 连续函数的离散化

□ MATLAB中的离散化函数

$\text{SYSD} = \text{C2D}(\text{SYSC}, T_s, \text{METHOD})$ converts the continuous-time LTI

model SYSC to a discrete-time model SYSD with sample time T_s .

The string METHOD selects the discretization method among the following:

'zoh' Zero-order hold on the inputs 零阶保持器

'foh' Linear interpolation of inputs (triangle appx.) (一阶保持器)

'imp' Impulse-invariant discretization (脉冲输入不变)

'tustin' Bilinear (Tustin) approximation (双线性变换)

'prewarp' Tustin approximation with frequency prewarping.

The critical frequency W_c (in rad/sec) is specified
as fourth input by

$\text{SYSD} = \text{C2D}(\text{SYSC}, T_s, \text{'prewarp'}, W_c)$ (预修正双线性变换)

'matched' Matched pole-zero method (for SISO systems only). (根轨迹匹配)

The default is 'zoh' when METHOD is omitted. (默认为零阶保持)



脉冲传递函数的性质与应用

- (1) $G(z) \sim z$ 的复函数;
- (2) $G(z) \sim$ 系统的结构参数;
- (3) $G(z) \sim$ 系统差分方程;
- (4) $G(z) \sim Z[k^*(t)]$;
- (5) $G(z) \sim z$ 平面零极点图。

Z变换、Z平面零极点分布、脉冲传递函数、数字控制器设计。

离散控制与连续控制的系统分析之间的比较

离散控制

连续控制

Z变换

S变换

脉冲传递函数 $G(z)$

传递函数 $G(s)$

Z平面零极点分布

S平面零极点分布

Z平面根轨迹

S平面根轨迹

差分方程

微分方程

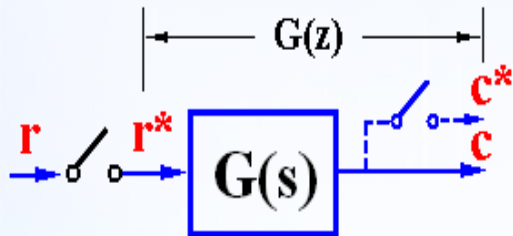
朱里判据

劳斯判据



1. 脉冲传递函数的定义

□ **定义：** 零初始条件下离散系统输出z变换对输入z变换之比



$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$$

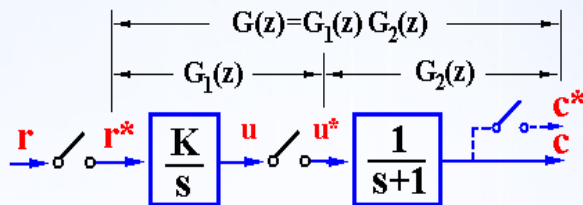


2. 开环系统的脉冲传递函数

(1) 环节之间有开关时

$$G(z) = \overline{G_1(z) G_2(z)} = Z\left[\frac{K}{s}\right] \cdot Z\left[\frac{1}{s+1}\right]$$
$$= \frac{Kz}{z-1} \cdot \frac{z}{z-e^{-T}} = \frac{Kz^2}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

注意: $\overline{G_1 G_2(z)} \neq \overline{G_1(z)} \overline{G_2(z)}$



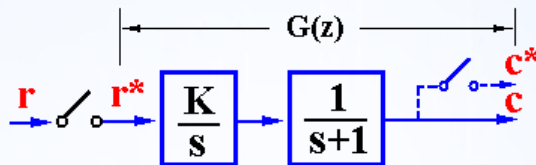
环节串联后的 $G(z)$ 计算依据于环节间有采样器，无时则先将 $G_i(s)$ 相乘，再求 $G(z)$ ；有时则先求各 $G_i(z)$ ，再求 $G(z)$ 。



2. 开环系统的脉冲传递函数

(2) 环节之间无开关时

$$\begin{aligned} G(z) &= Z[G_1(s) \cdot G_2(s)] = \overline{G_1 G_2}(z) \\ &= K \left[\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}} \right] = \frac{(1-e^{-T})Kz}{(z-1)(z-e^{-T})} \end{aligned}$$

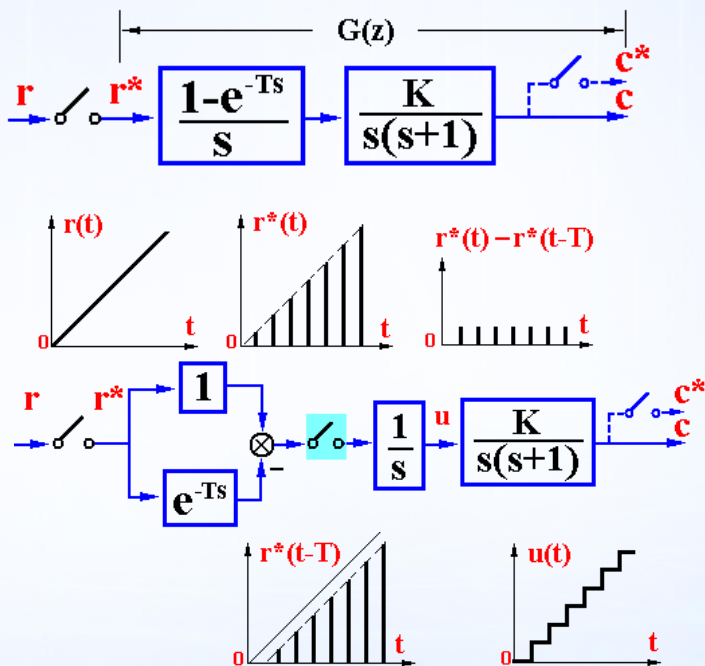




2. 开环系统的脉冲传递函数

(3) 有ZOH 时

$$\begin{aligned}
 G(z) &= Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}\right] \\
 &= K(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right] \\
 &= K\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] \\
 &= K\frac{z-1}{z}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-e^{-T}}\right] \\
 &= K\left[\frac{T}{z-1} - 1 + \frac{z-1}{z-e^{-T}}\right] \\
 &= K\frac{(T-1+e^{-T})z + (1-Te^{-T}-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}
 \end{aligned}$$

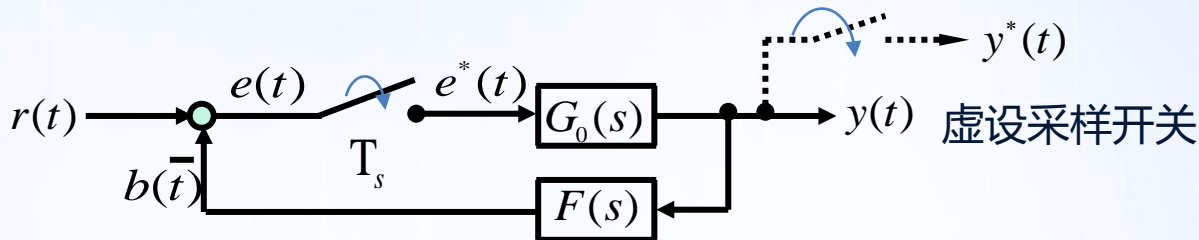


注：加ZOH 不改变系统的阶数，不改变开环极点，只改变开环零点。



3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

由于采样开关在闭环系统中可以有多种配置可能性，系统的结构图较连续系统的结构图来的复杂。下图是一种常见的离散闭环系统的结构图形式：



$$\because e(t) = r(t) - b(t) \quad e^*(t) = r^*(t) - b^*(t) \quad \therefore E(z) = R(z) - B(z)$$

$$\because B(z) = Z[G_0(s)F(s)]E(z) = \overline{G_0 F}(z)E(z) \quad \therefore E(z) = R(z) - \overline{G_0 F}(z)E(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + \overline{G_0 F}(z)} R(z) = \phi_{er}(z) R(z), \quad \phi_{er}(z) = \frac{1}{1 + \overline{G_0 F}(z)}$$

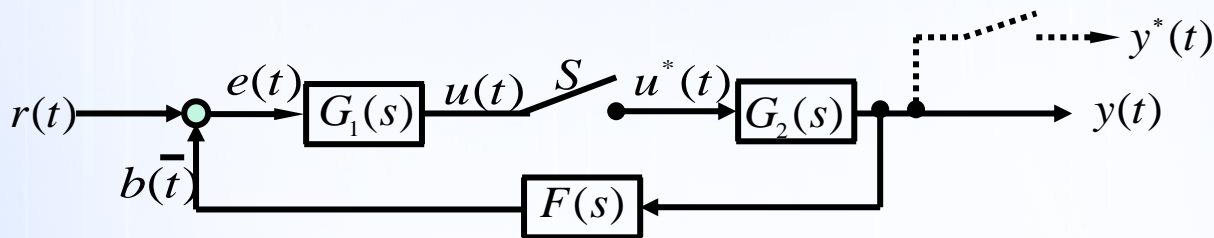
$$Y(z) = G_0(z)E(z) \Rightarrow \phi_{yr}(z) = \frac{G_0(z)}{1 + \overline{G_0 F}(z)}$$

其中： $1 + \overline{G_0 F}(z)$ 是闭环系统的特征多项式； $G_0 F(z)$ 是闭环系统的开环传递函数



3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

在有些情况下,无法得到闭环系统的Z传递函数, 而只能得到闭环系统输出的变换表达式, 见下图:



$$\therefore U(z) = \overline{RG_1}(z) - U(z)\overline{G_2FG_1}(z)$$

$$\therefore Y(z) = G_2(z)U(z) = \frac{\overline{RG_1}(z)G_2(z)}{1 + \overline{G_1G_2F}(z)}$$



3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

例1.

$$C(z) = G(z) \cdot E(z)$$

$$E(z) = R(z) - B(z)$$

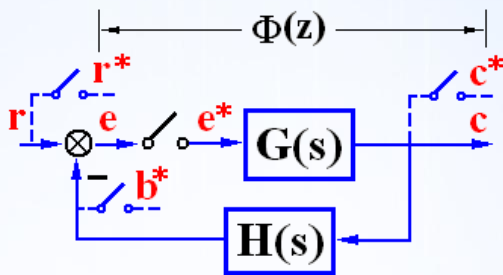
$$= R(z) - GH(z) \cdot E(z)$$

$$[1 + GH(z)]E(z) = R(z)$$

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)}$$

$$C(z) = G(z) \frac{R(z)}{1 + GH(z)}$$

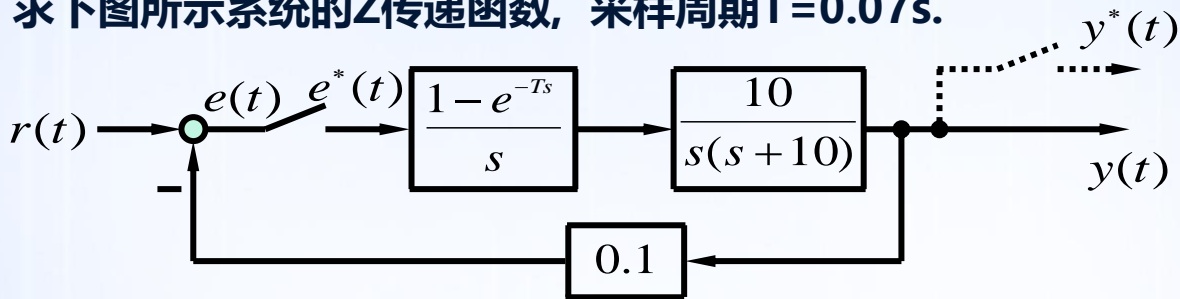
$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$





3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

例2: 求下图所示系统的Z传递函数, 采样周期 $T=0.07s$.



解:

$$\because T = 0.07s \quad \therefore e^{-10T} = e^{-0.7} \approx 0.5$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{G_h G_2}(z) &= Z \left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{10}{s(s+10)} \right] = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{10}{s^2(s+10)} \right] \\ &= \frac{(10T-1+e^{-10T})z + (1-e^{-10T}-10Te^{-10T})}{10(z-1)(z-e^{-10T})} = \frac{0.2z+0.15}{10z^2-15z+5} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{G_h G_2 F}(z) = 0.1 \overline{G_h G_2}(z) = \frac{0.02z+0.015}{10z^2-15z+5}$$

$$\phi_{yr}(z) = \frac{\overline{G_h G_2}(z)}{1 + \overline{G_h G_2 F}(z)} = \frac{0.2z+0.15}{10z^2-14.98z+5.015}$$



3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

例3.求 $\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)}$, $\Phi_n(z) = \frac{C(z)}{N(z)}$ 。

$$C(z) = G_2 G_3(z) \cdot E(z) + G_3 H_3(z) \cdot N(z)$$

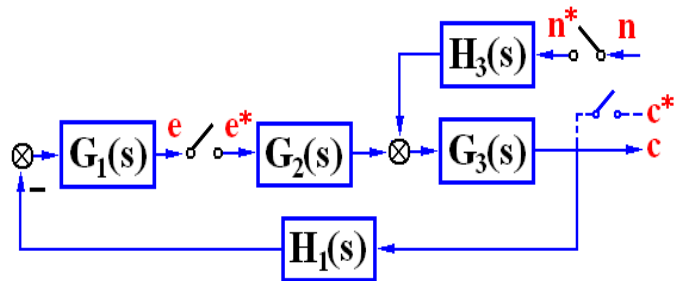
$$E(z) = -G_1 H_1 G_3 G_2(z) \cdot E(z) - G_1 H_1 G_3 H_3(z) \cdot N(z)$$

$$[1 + G_1 G_2 G_3 H_1(z)] E(z) = -G_1 G_3 H_1 H_3(z) \cdot N(z)$$

$$E(z) = \frac{-G_1 G_3 H_1 H_3(z)}{1 + G_1 G_2 G_3 H_1(z)} \cdot N(z)$$

$$C(z) = G_2 G_3(z) \cdot \frac{-G_1 G_3 H_1 H_3(z)}{1 + G_1 G_2 G_3 H_1(z)} \cdot N(z) + G_3 H_3(z) \cdot N(z)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{-G_2 G_3(z) \cdot G_1 G_3 H_1 H_3(z) + G_3 H_3(z) [1 + G_1 G_2 G_3 H_1(z)]}{1 + G_1 G_2 G_3 H_1(z)}$$



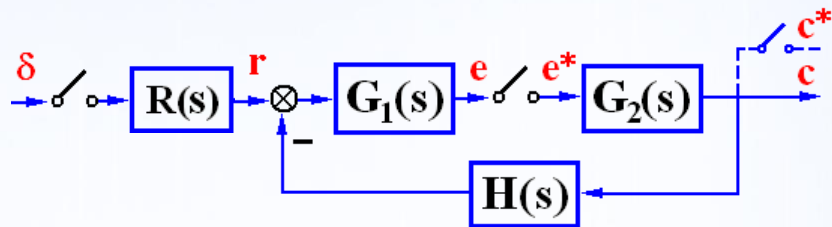


3. 闭环系统脉冲传递函数 $F(z)$

以下两种情况可以利用Mason公式求 $F(z)$ 或 $C(z)$

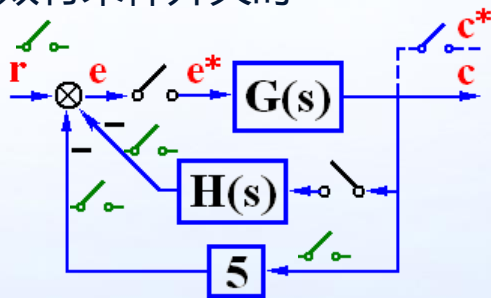
I. 单回路（无前馈通道）离散系统，在前向通道存在至少一个实际的采样开关时

$$\frac{C(z)}{1} = \frac{G_2(z) \cdot G_1 R(z)}{1 + G_1 G_2 H(z)}$$



II. 离散系统结构图中各环节之间均有或者等效有采样开关时

$$\Phi(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)H(z) + 5G(z)}$$





脉冲传递函数的常用求法

- 1) 由定义求 $G(z)$;
- 2) 由 $G(s)$ 求 $G(z)$;
- 3) 由离散系统结构图求;

注意:

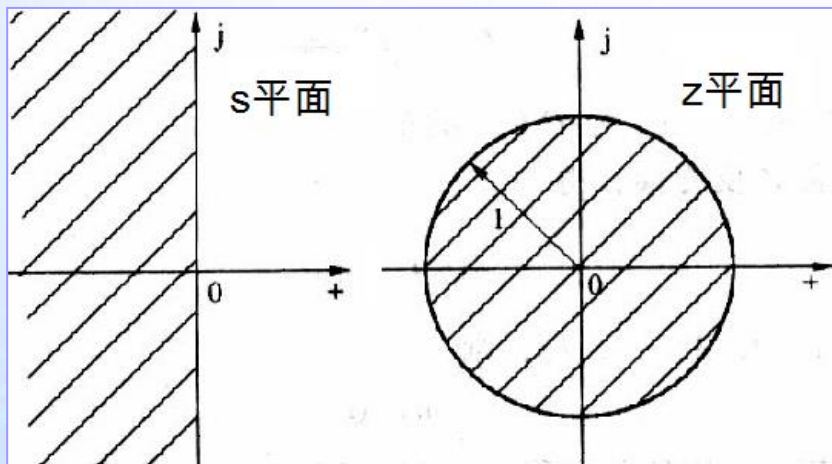
- ✓ 环节串联后的 $G(z)$ 计算依据于环节间有采样器, 无时则先将 $G_i(s)$ 相乘, 再求 $G(z)$; 有时则先求各 $G_i(z)$, 求 $G(z)$ 。
- ✓ 加ZOH 不改变系统的阶数, 不改变开环极点, 只改变开环零点。
- ✓ 实际的系统输出一般是连续信号, 需在输出端虚设一采样开关, 才可得到闭环系统输出对输入的脉冲传递函数。



1. 离散系统的稳定性

- 定义：若离散系统在**有界输入序列**作用下，其**输出序列也是有界的**，则该离散系统是**稳定的**。
- 离散系统稳定的充要条件

s 域到 z 域的映射：



$$\because z = e^{Ts} \Rightarrow z = e^{T(\sigma + j\omega)}$$

$$\therefore |z| = e^{T\sigma}$$

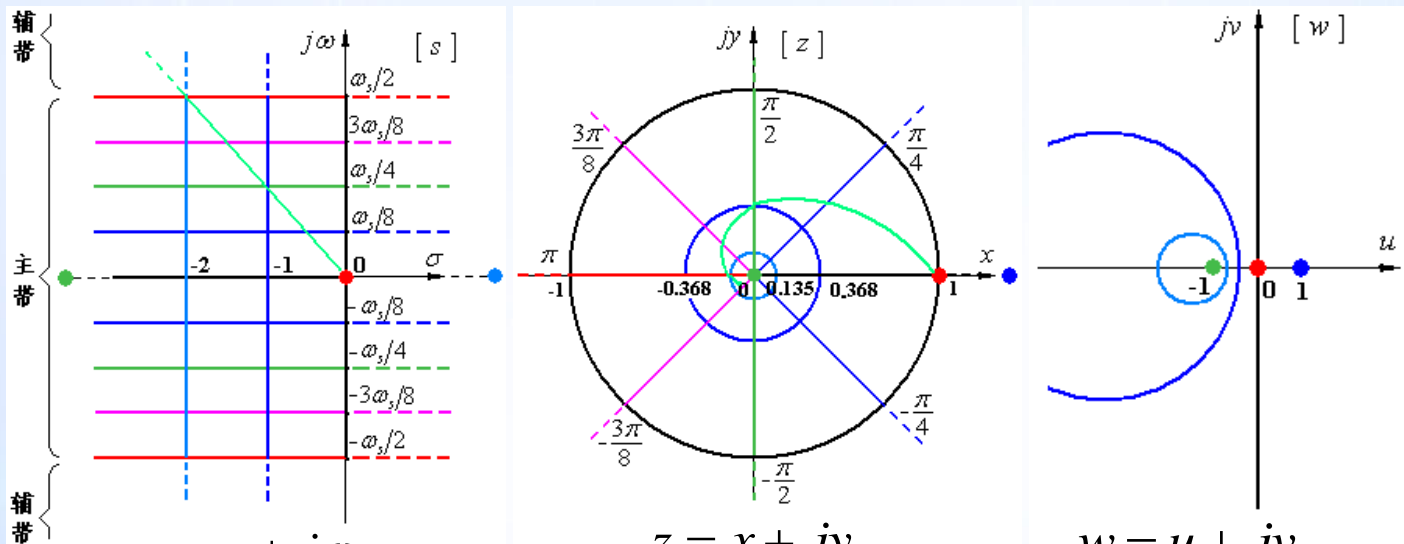
$$\angle z = T\omega$$

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1$$

—— $F(z)$ 的全部极点均位于 z 平面的单位圆内



1. 离散系统的稳定性



$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = x + jy$$

$$w = u + jv$$

$$\begin{cases} z = e^{Ts} = e^{(\sigma + j\omega)T} \\ = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = |z| \angle z \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega T \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{w+1}{w-1} \\ w = \frac{z+1}{z-1} \end{cases}$$



2. 离散系统的稳定性判据

➤ 朱里判据

离散系统稳定的充要条件为：

$$(1) \quad P(1) = P(z)|_{z=1} > 0$$

$$(2) \quad (-1)^n P(-1) > 0 \text{ (偶数时大于零, 奇数时小于零)}$$

(3) 朱里阵列中的系数满足 $(n-1)$ 个约束条件

$$|a_0| < a_n, |b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, \dots, |l_0| > |l_3|, |m_0| > |m_2|$$

$$\text{其中 } P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n > 0)$$

为系统特征多项式



2. 离散系统的稳定性判据

朱里阵列定义为

↑ {	a_0	a_1	a_n	↑ }	上行正序下行逆序
	a_n	a_{n-1}	a_0		
↑ {	b_0	b_1		b_{n-1}	↑ }	
	b_{n-1}	b_{n-2}		b_0		
↑ {	c_0	c_1	...		c_{n-2}		↑ }	
	c_{n-2}	c_{n-3}	...		c_0			
			...					

其中 $b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix}$

$c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-i} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix}$

稳定看首列，第一组头小尾大，
其余组头大尾小。

左列头至尾，右列尾去*i*至*i*。



2. 离散系统的稳定性判据

例1: $G(z) = \frac{K(0.368z + 0.264)}{z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368)}$ 求稳定时的K值范围。

解:
$$\begin{aligned} P(1) &= a_2 + a_1 + a_0 \\ &= 1 + 0.368K - 1.368 + 0.264K + 0.368 \\ &= (0.368 + 0.264)K \end{aligned}$$

①

$$\begin{aligned} P(z) &= z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) \\ &= a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \end{aligned}$$

若 $P(1) > 0$, 则有 $K > 0$



2. 离散系统的稳定性判据

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \quad (-1)^2 P(-1) &= a_2 - a_1 + a_0 \\ &= 1 - 0.368K + 1.368 + 0.264K + 0.368 \\ &= 2.736 - 0.104K > 0\end{aligned}$$

$$K < \frac{2.736}{0.104} = 26.31$$

③ 朱里阵列满足一个约束条件

$$|a_0| < a_2$$

$$|0.264K + 0.368| < 1$$

$$0.264K < 1 - 0.368$$

$$K < \frac{(1 - 0.368)}{0.264} = 2.394$$

综合 $0 < K < 2.394$



2. 离散系统的稳定性判据

例2: $P(z) = z^4 - 1.368z^3 + 0.4z^2 + 0.08z + 0.002$ 求是否稳定。

解: $a_0 = 0.002$ $a_1 = 0.08$ $a_2 = 0.4$ $a_3 = -1$ $a_4 = 1$

①朱里阵列元素计算:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_4 & a_0 \end{vmatrix} = -1 \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_4 & a_1 \end{vmatrix} = 1.368$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = -0.399 \quad b_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix} = -0.082$$

$$c_0 = \begin{vmatrix} b_0 & b_3 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} = 0.993 \quad c_1 = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = -1.40 \quad c_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = 0.511$$

②朱里阵列:

行	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	0.002	0.08	0.4	-1.368	1
2	1	-1.368	0.4	0.08	0.002
3	-1	1.368	-0.399	-0.082	
4	-0.082	-0.399	1.368	-1	
5	0.993	-1.401	0.511		

③ 判别稳定性:

$$P(1) = 1^4 - 1.368*1^3 + 0.4*1^2 + 0.08*1 + 0.002 = 0.114 > 0$$

$$P(-1) = 1 + 1.368 + 0.4 - 0.08 + 0.002 = 2.69 > 0$$

$$|a_0| = 0.002 < a_4 = 1$$

$$|b_0 = -0.028| > |b_3 = -1|$$

$$|c_0 = 0.993| > |c_2 = 0.511|$$

综合判别：系统稳定



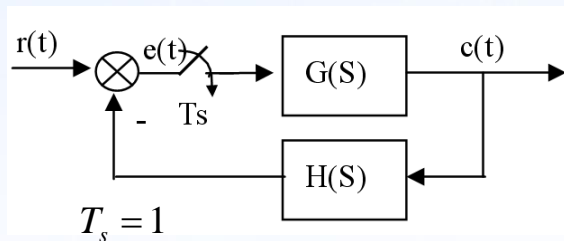
2. 离散系统的稳定性判据

例3:

解:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$H(s) = 1$$



$$\Rightarrow G(z) = \frac{10(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})}$$

$$\Rightarrow 1 + G(z) = 1 + \frac{10(1-e^{-1})z}{(z-1)(z-e^{-1})} = 0$$

$$\Rightarrow z^2 + 4.952z + 0.368 = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = -0.076, \quad z_2 = -4.876 \quad |z_2| > 1$$

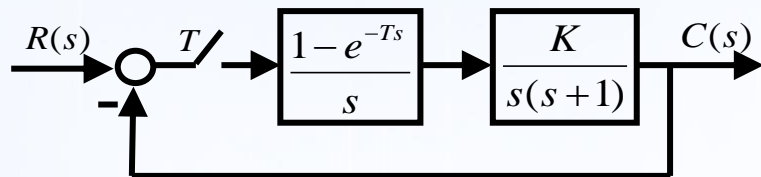
系统不稳定。



3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

例4: 如图所示系统, 求1) 采样周期 T 分别为 $1s$, $0.5s$ 时, 系统的临界开环增益。

2) $r(t)=1(t)$, $K=1$ 时, $T=0.1s$, $1s$, $2s$, $4s$ 时系统的输出响应。



当 $T=1$ 时, 有 **解:** 系统的开环脉冲传递函数为

$$z^2 + (0.368K - 1.368)z + (0.264K + 0.368) = 0$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{s^2(s+1)}{s^2(s+1)} \right]$$

令 $z = \frac{\omega+1}{\omega-1}$, 得: $0.632K\omega^2 + (1.264 - 0.528K)\omega + (2.736 - 0.104K) = 0$

$$= K \frac{(e^{-T} + T - 1)z + (1 - e^{-T} - Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

令 $\begin{cases} 0.632K > 0 \\ 1.264 - 0.528K > 0 \\ 2.736 - 0.104K > 0 \end{cases}$ **闭环特征方程为** $1 + G(z) = 0$ 得; **即:** $K < 2.4 \quad \therefore K_c = 2.4$

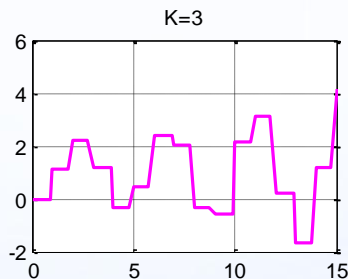
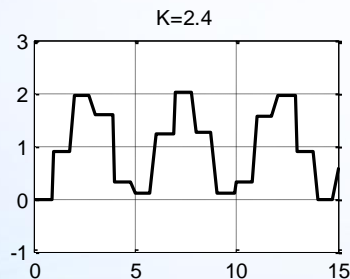
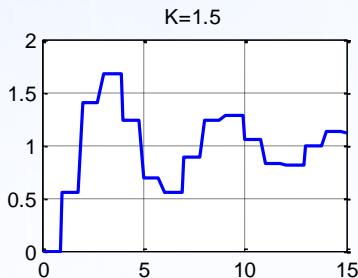
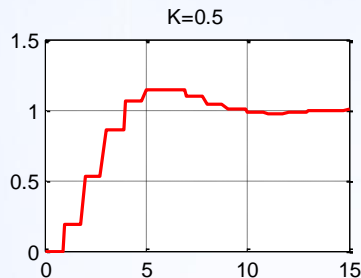
$$z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - 1 - e^{-T}]z + K(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T} = 0$$



3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

T=1时, 不同K的仿真结果

$$K_c = 2.4$$





3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

闭环特征方程:

$$z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - 1 - e^{-T}]z + K(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T} = 0$$

当 $T = 0$ 时, 闭环特征方程为:

$$z^2 + (0.107K - 1.607)z + (0.09K + 0.607) = 0$$

令 $z = \frac{\omega + 1}{\omega' - 1}$
得:

$$0.197K\omega^2 + (0.786 - 0.18K)\omega + (3.214 - 0.017K) = 0$$

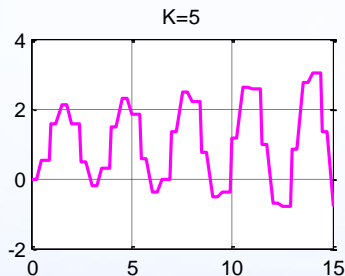
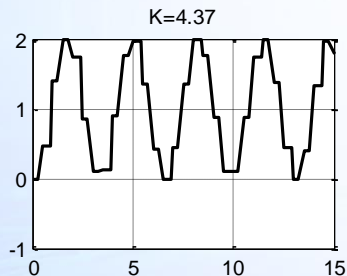
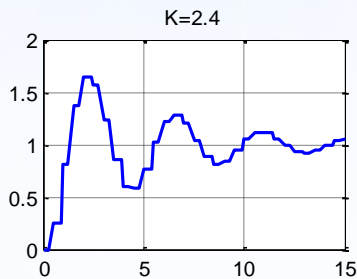
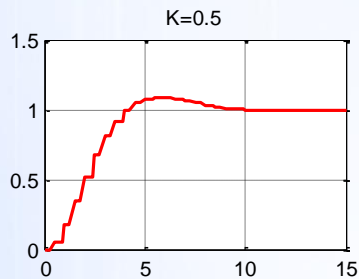
$$\text{令 } \begin{cases} 0.197K > 0 \\ 0.786 - 0.18K > 0 \\ 3.214 - 0.017K > 0 \end{cases} \text{ 得: } 0 < K < 4.37 \quad \therefore K_c = 4.37$$



3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

T=0.5时，不同K的仿真结果

$$K_c = 4.37$$



结论:

采样周期一定时，增大开环增益会使离散系统的稳定性变差，甚至使系统不稳定。



3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

闭环特征方程：

$$z^2 + [K(e^{-T} + T - 1) - 1 - e^{-T}]z + K(1 - e^{-T} - Te^{-T}) + e^{-T} = 0$$

$K=1$ 时，得： $z^2 + (T-2)z + 1 - Te^{-T} = 0$ 不容易直接计算出临界稳定的 T

取输入 $r(t) = 1(t)$

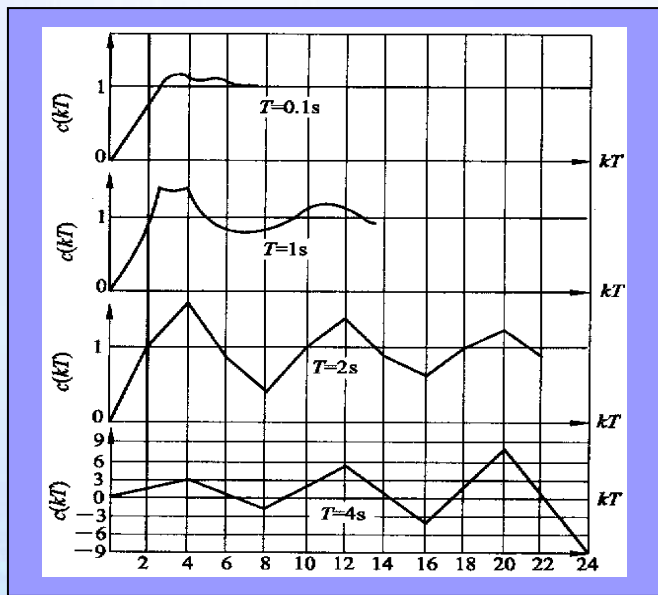
$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

令 $K=1$ ，分别取 $T=0.1s, 1s, 2s, 4s$ ，做出仿真解



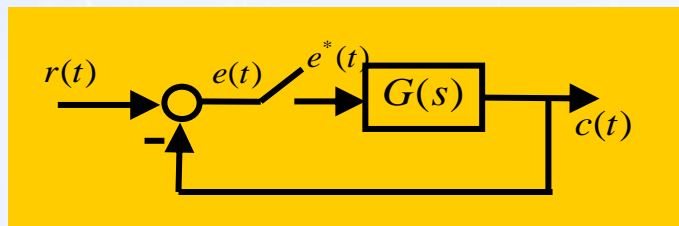
3. 采样周期与开环增益对稳定性的影响

K=1



结论:

开环增益一定时，采样周期越长，丢失的信息越多，对离散系统的稳定性及动态性能均不利，甚至可使系统失去稳定性。



$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = \frac{1}{1 + G(z)} \cdot R(z)$$

若系统稳定，则可以应用终值定理：

$$e_{ss} = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)E(z)$$

或

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z)$$

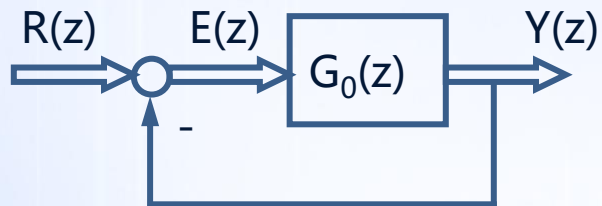
控制系统的稳态误差

不仅与开环系统的结构有关，

而且与输入信号的形式有关。



1. 离散系统的稳态误差 (条件:系统稳定)



误差脉冲传递函数

$$G_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G_0(z)}$$



2. 离散控制系统的型别与静态误差系数

在离散系统中，把开环脉冲传递函数 $G(z)$ 具有 $z=1$ 的极点个数 ν 作为划分离散系统型别的标准。分为0型, I型, II型等。

(1)单位阶跃输入

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{z}{z-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z}{1+G(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} G(z)}$$

令 $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z)$ **系统的静态位置误差系数**

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_p}$$

0型 $K_p = K \neq \infty$

I型以上 $K_p = \infty$



2. 离散控制系统的型别与静态误差系数

(2) 单位斜坡输入

$$R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{1+G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1)[1+G(z)]} \end{aligned}$$

令 $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G(z)]$

系统的静态速度误差系数

$$e(\infty) = \frac{T}{K_v}$$

0型

$$K_v = 0$$

I型

$$K_v = K \neq \infty$$

II型以上

$$K_v = \infty$$



2. 离散控制系统的型别与静态误差系数

(3) 单位抛物线输入

$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{T^2 z(z+1)}{2[1+G(z)](z-1)^3} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2 z(z+1)}{2[1+G(z)](z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(z-1)^2 G(z)} \end{aligned}$$

$$\text{令 } K_a = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G(z)]$$

系统的静态加速度误差系数

$$e(\infty) = \frac{T^2}{K_a}$$

0型I型	$K_a = 0$
II型	$K_a = K \neq \infty$
III型以上	$K_a = \infty$



2. 离散控制系统的型别与静态误差系数

影响系统的稳态误差的因素：

(1)输入作用的类型；

(2)采样周期大小，缩短采样周期将会降低稳态误差；

(3)系统的开环脉冲传递函数 $G(z)$ 中 $z = 1$ 的极点（积分环节）的个数。



离散控制系统的动态响应分析

➤ 离散系统的动态响应取决于系统传递函数 $G(z)$ 在 z 平面的零极点分布。

➤ 举例分析：

设在阶跃输入下,传递函数 $G(z)$ 无重极点

$$Y(z) = G(z)R(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot \frac{z}{z-1}$$

部分分式展开

$$Y(z) = \frac{A_0 z}{z-1} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z-p_i}$$

其中 $A_0 = \frac{N(1)}{D(1)}$

$$A_i = \frac{(z-p_i)N(z)}{(z-1)D(z)} \Big|_{z=p_i}$$



离散控制系统的动态响应分析

所以 $y(k) = Z^{-1}[Y(z)] = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i (p_i)^k$

可见系统响应为各极点响应之和

设 $p_i = r_i e^{j\theta_i} = r_i (\cos \theta_i + j \sin \theta_i)$

则 $y_{p_i}(k) = A_i r_i^k (\cos k\theta_i + j \sin k\theta_i)$

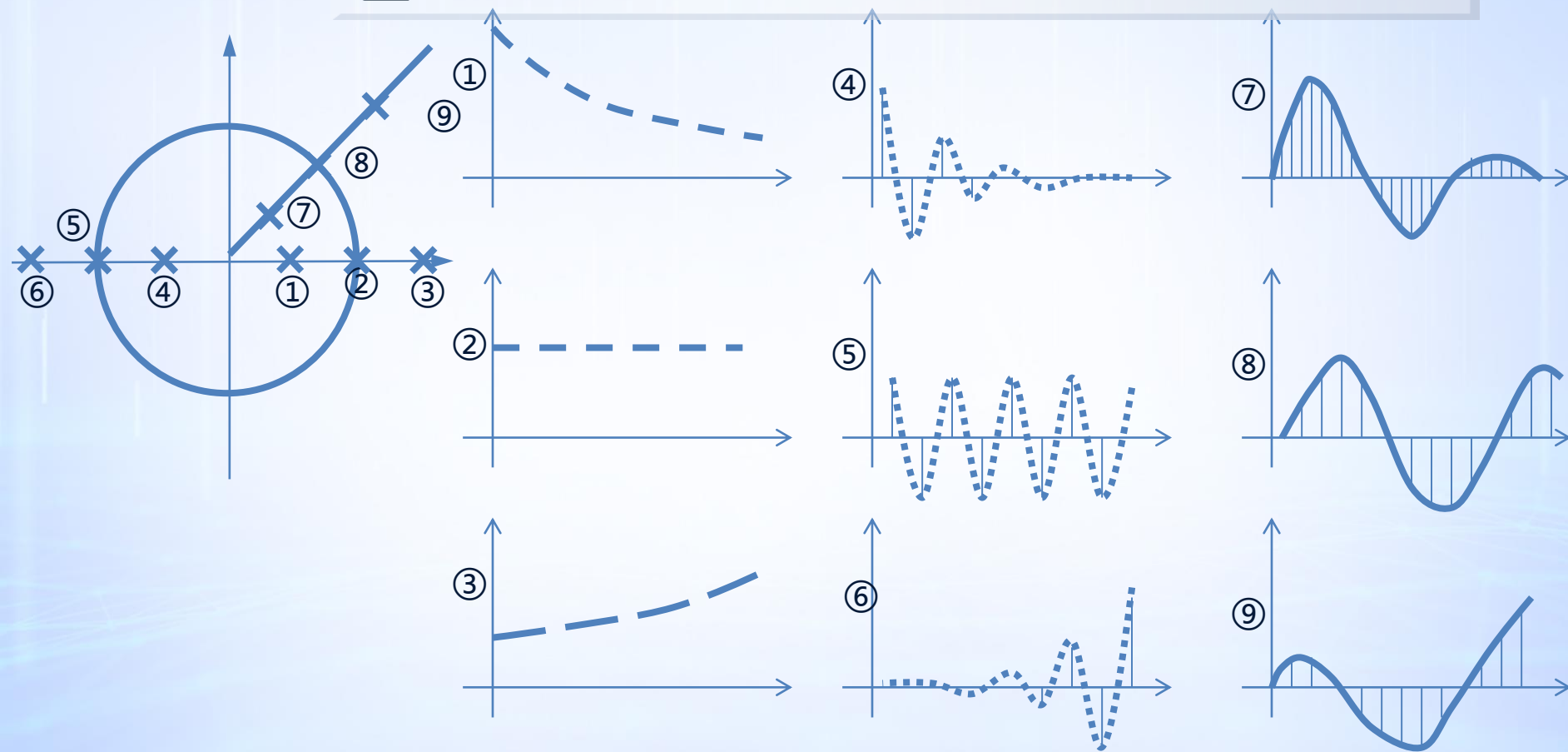


$$\begin{cases} r_i < 1 & \text{收敛序列 } \textcircled{1} \textcircled{4} \textcircled{7} \\ r_i > 1 & \text{发散序列 } \textcircled{3} \textcircled{6} \textcircled{9} \\ r_i = 1 & \text{等幅序列 } \textcircled{2} \textcircled{5} \textcircled{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_i = 0^\circ & \text{单调过程 } \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \\ \theta_i \neq 0^\circ & \text{振荡过程 } \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \textcircled{7} \textcircled{8} \textcircled{9} \\ \theta_i = 180^\circ & \text{振荡频率最高 } \textcircled{4} \textcircled{5} \textcircled{6} \end{cases}$$



离散控制系统的动态响应分析





离散控制系统的动态响应分析

例1:系统结构图如图所示, $T=K=1$,

求系统动态指标($\sigma\%$, t_s)。

解
$$G(z) = Z \left[\frac{K}{s(s+1)} \right] = \frac{K(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

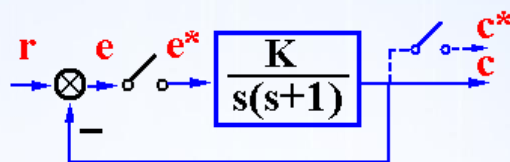
$$\stackrel{K=T=1}{=} \frac{0.632z}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.632z}{z^2 - 0.736z + 0.368}$$

$$c(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

$$C(z) = \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0.632z^2}{z^3 - 1.736z^2 + 1.104z - 0.368}$$

用长除法求系统单位阶跃响应序列 $h(k)$ 。



$$h(0) = 0$$

$$h(1) = 0.632$$

$$h(2) = 1.097$$

$$h(3) = 1.207 \quad \left\{ \begin{array}{l} t_p = 3T \\ \sigma\% = 20.7\% \end{array} \right.$$

$$h(4) = 1.117$$

$$h(5) = 1.014 \quad t_s = 5T$$

$$h(6) = 0.964$$

$$h(7) = 0.970$$

$$h(8) = 0.991$$

$$h(9) = 1.004$$

$$h(10) = 1.007$$

$$h(11) = 1.003$$

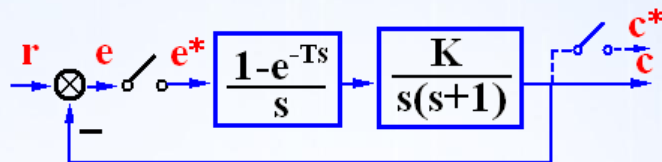
$$h(12) = 1.000$$

\vdots



离散控制系统的动态响应分析

例2 系统结构图如图所示, $T=K=1$,
求系统动态指标($\sigma\%$, t_s).



解
$$G(z) = K \frac{z-1}{z} Z \left[\frac{1}{s^2(s+1)} \right]$$

$$= K \frac{(T-1+e^{-T})z + (1-e^{-T}-Te^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

$$\stackrel{K=T=1}{=} \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)}$$

$$\Phi(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0.368z + 0.264}{z^2 - z + 0.632}$$

$$c(\infty T) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = 1$$

$$C(z) = \Phi(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{(0.368z + 0.264)z}{z^3 - 2z^2 + 1.632z - 0.632}$$

$$h(0)=0$$

$$h(1)=0.3679$$

$$h(2)=1.0000$$

$$h(3)=1.3996$$

$$h(4)=1.3996$$

$$h(5)=1.1470$$

$$h(6)=0.8944$$

$$h(7)=0.8015$$

$$h(8)=0.8682$$

$$h(9)=0.9937$$

$$h(10)=1.0770$$

$$h(11)=1.0810$$

$$h(12)=1.0323$$

$$h(13)=0.9811$$

$$h(14)=0.9607$$

⋮

$$\left\{ \begin{array}{l} t_p = 4T \\ \sigma\% = 40\% \end{array} \right.$$

$$t_s = 12T$$



离散控制系统的动态响应分析

