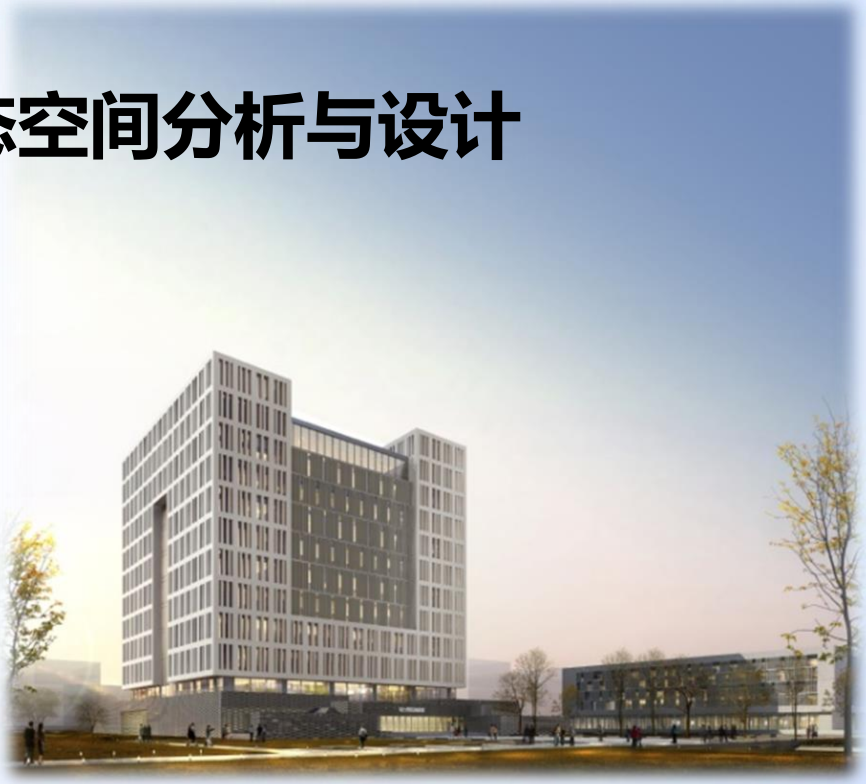
第八章：控制系统状态空间分析与设计



主要内容

- 引言
- 离散状态方程及时域解
- 系统的稳定性、能控性和能观性分析
- 线性定常系统的结构分解
- 闭环控制系统的状态空间分析
- 用极点配置法设计状态控制器
- 用极点配置法设计状态观测器

主要内容

- 引言
- 离散状态方程及时域解
- 系统的稳定性、能控性和能观性分析
- 线性定常系统的结构分解
- 闭环控制系统的状态空间分析
- 用极点配置法设计状态控制器
- 用极点配置法设计状态观测器

问题的提出

1. 控制系统的两种基本描述方法是什么？

输入—输出描述法——经典控制理论

状态空间描述法——现代控制理论

2. 经典控制理论的特点是什么？

优点：对单入—单出系统的分析和综合特别有效。

缺点：内部的信息无法描述，仅适于单入—单出系统。

问题的提出

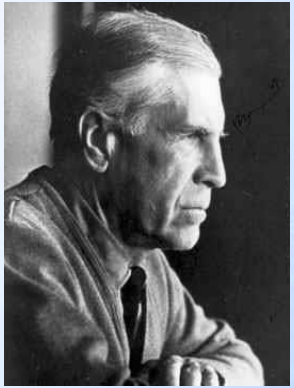
3. 现代控制理论的重要标志

(1) 1892年，俄国数学家李雅普诺夫创立的稳定性理论被引入到控制中；

(2) 五十年代后期，美国科学家贝尔曼等人提出了状态分析法，在1957年提出了动态规划；

(3) 1959年，匈牙利裔美国数学家卡尔曼提出了卡尔曼滤波；1960年在控制系统的研究中成功地应用了状态空间法，并提出了能控性和能观性的概念；

(4) 1961年前苏数学联家庞特里亚金提出了极小（大）值原理。



问题的提出

4. 现代控制理论的特点

(1) 研究对象：线性系统、非线性系统、定常系统、时变系统、多变量系统、连续系统、离散系统；

(2) 数学上：状态空间法；

(3) 方法上：研究系统输入/输出特性和内部特性;

(3) 内容上：线性系统理论、系统辩识、最优控制、自适应控制等.

主要内容

- 引言
- 离散状态方程及时域解
- 系统的稳定性、能控性和能观性分析
- 线性定常系统的结构分解
- 闭环控制系统的状态空间分析
- 用极点配置法设计状态控制器
- 用极点配置法设计状态观测器

离散状态方程

状态空间表达式

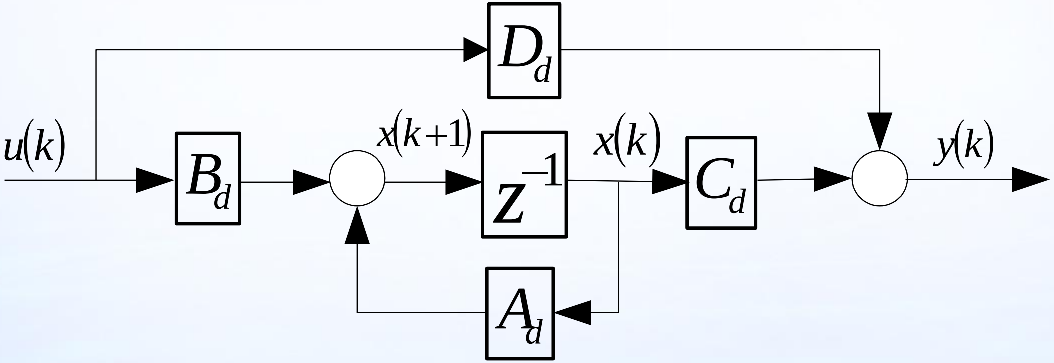
$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad x(0) = x_0$$

离散状态方程为一阶差分方程组

$$y(k) = C_d x(k) + D_d u(k)$$

输出方程

系统框图



离散状态方程的时域解----迭代法

已知$x(0)=x_0$；$u(k)$，求$x(k)$

$\because x(k+1)=A_d x(k)+B_d u(k)$

取$k=0,1,2,\cdots$

$$x(1)=A_d x(0)+B_d u(0)$$

$$x(2)=A_d x(1)+B_d u(1)=A_d\left(A_d x(0)+B_d u(0)\right)+B_d u(1)$$

$$=A_d{}^2 x(0)+A_d B_d u(0)+B_d u(1)$$

$$x(3)=A_d{}^3 x(0)+A_d{}^2 B_d u(0)+A_d B_d u(1)+B_d u(2)$$

$$\vdots$$

归纳出通解：

$$x(k)=A_d{}^k x(0)+\sum_{j=0}^{k-1} A_d{}^{k-j-1} B_d u(j)$$

齐次解　　特解

离散状态方程的时域解----z变换法

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$$ 对状态方程作z变换可得

$$zX(z) - zx(0) = A_d X(z) + B_d U(z)$$

$$zX(z) - A_d X(z) = zx(0) + B_d U(z)$$

$$X(z) = (zI - A_d)^{-1} zx(0) + (zI - A_d)^{-1} B_d U(z)$$ 状态方程的z域解

求z反变换后，可得状态方程的时域解

$$x(k) = Z^{-1}\left[(zI - A_d)^{-1} z\right]x(0) + Z^{-1}\left[(zI - A_d)^{-1} B_d U(z)\right]$$

离散系统的状态转移矩阵

$$x(k) = A_d{}^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A_d{}^{k-j-1} B_d u(j)$$

$$x(k) = Z^{-1}\left[(zI - A_d)^{-1} z\right] x(0) + Z^{-1}\left[(zI - A_d)^{-1} B_d U(z)\right]$$

状态转移矩阵$\Phi(k) = A_d^k = Z^{-1}\left[(zI - A_d)^{-1} z\right]$

$\Phi(k)$的性质:

$(1)\Phi(0) = I$

$(2)\Phi^{-1}(k) = \Phi(-k)$

$(3)\Phi(k-h) = \Phi(k-l)\Phi(l-h) \qquad k < l < h$

离散系统的状态空间模型与脉冲传递函数的关系

对输出方程$y(k)=C_d x(k)+D_d u(k)$取z变换

$$Y(z)=C_d X(z)+D_d U(z)$$

把$X(z)=(zI-A_d)^{-1}zx(0)+(zI-A_d)^{-1}B_d U(z)$代入到上式

$$Y(z)=C_d(zI-A_d)^{-1}zx(0)+C_d(zI-A_d)^{-1}B_d U(z)+D_d U(z)$$

令$x(0)=0$, 可得

$$Y(z)=C_d(zI-A_d)^{-1}B_d U(z)+D_d U(z)=\left(C_d(zI-A_d)^{-1}B_d+D_d\right)U(z)=G(z)U(z)$$

$\therefore$ 脉冲传递函数阵$G(z)=C_d(zI-A_d)^{-1}B_d+D_d$

连续系统的状态转移矩阵的计算方法

1. 第二章所讲的复频域解法

2. 法杰耶娃求逆法

3. 凯莱-哈密尔顿定理

4. 西尔维斯特展开式

状态空间模型性能分析

- **稳定性分析**
- **能控性分析**
- **能观性分析**

稳定性分析

1. 定义

若处于平衡状态下的系统受到扰动后，发生了自由的运动，当它的运动的轨迹总**不超过一个有限域界**时，则定义该系统是**稳定**的；当它最终能**回到原来的平衡状态**时，则定义为**渐近稳定**的。

2. 判据

渐进稳定性定理

连续定常系统渐近稳定的**充分必要条件**是其系统矩阵A的特征方程 $|sI - A| = 0$ 的根（即系统的特征根）全部具有**负实部**。

稳定性分析

3. 举例

☛例8.1　已知 系统的状态空间表达式

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

试判断系统的稳定性。

解：$$|sI-A|=\left|s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}s+2 & 0\\ 1 & s+1\end{vmatrix}=(s+1)(s+2)$$

令$|sI-A|=(s+1)(s+2)=0$

$\therefore s_1=-1; s_2=-2$

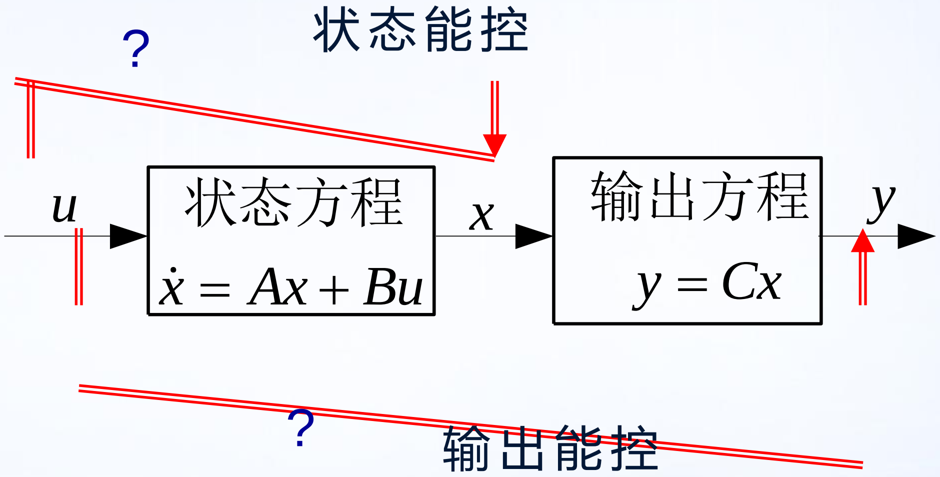
特征根均具有负实部，所以系统稳定。

状态空间模型性能分析

- 稳定性分析
- 能控性分析
- 能观性分析

能控性分析

1. 意义



- 能控性表示u对x的控制能力
-

能控性分析

2. 定义

连续系统**状态**能控： $x(t_0)\xrightarrow[t_0<t<t_1]{u(t)}x(t_1)=0$

3. 能控性判据

连续系统状态能控性判据

线性定常系统（A，B，C）状态完全能控的**充要条件**是其能控性矩阵

$S=\left[B\vdots AB\vdots A^2B\vdots\cdots\vdots A^{n-1}B\right]_{n\times nr}$满秩，即 $rank\left[S\right]=n$

能控性分析

4. 举例

☛例8.2　已知 系统的状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

试判断系统的能控性。

解:

$$S=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix};\therefore rank(S)=1\neq n$$

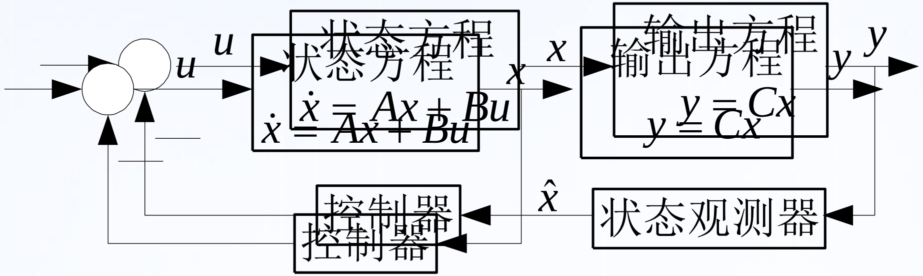
所以系统状态不能控。

状态空间模型性能分析

- **稳定性分析**
- **能控性分析**
- **能观性分析**

能观性分析

1. 意义



为了实现状态反馈，要能够测量全部状态，但实际状态往往是难以测量的。**能观性 ----- y(t)对x(t)的反映能力**

这就需要从可以测量的输出中估计出来，状态估计的任务就是设计状态观测器。

※能够从系统的输出中估计出状态？这就是系统能观性问题。

能观性分析

2. 定义

在给定控制输入$u(t)$ 下，对连续系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

若能在有限时间内，根据从任意初始时刻t_0至t_1的系统输出 $y(t)$ 的量测值，唯一地确定系统在时刻t_0的全部状态 $x(t_0)$，则称此系统是完全能观的，简称系统能观。

若系统有一个状态变量不能由系统的输出唯一确定，则称此系统是不完全能观的，简称系统不能观。

能观性分析

3. 能观性判据

线性定常连续系统状态完全能观的**充分必要条件**是其能观性矩阵 $V=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{nm\times n}$

满秩,即 $rank(V)=n$

能观性分析

4. 举例

☛例8.3　已知 系统的状态空间表达式 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u(t)$

$y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(t)$

试判断系统的能观性。

解：$V=\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$\therefore rank[V]=2$

所以系统能观。

能控性和能观性与传递函数的关系

如果传递函数能够***完全表征***系统，则此系统是最小实现系统，既能控又能观。

否则可能不能控或不能观，或不能控又不能观。

传递函数要能***完全表征***系统，必须在导出过程中无零极点对消情况。

能控性与能观性的对偶系统

[对偶系统定义] 定常系统 (A,B,C) $\Leftrightarrow$ 定常系统 (A',B',C')

$$A' = A^T$$
$$B' = C^T$$
$$C' = B^T$$

[对偶性定理]

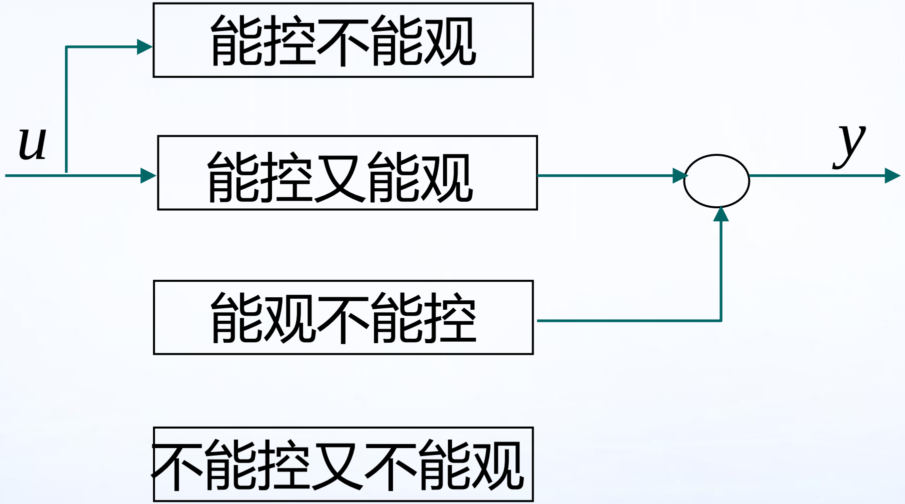
设互为对偶的两个系统(A,B,C)和(A',B',C')，

当系统(A,B,C)状态能控,则系统(A',B',C')状态能观。

若系统**(A,B,C)状态能观**,则系统***(A',B',C')状态能控***。

线性定常系统的结构分解

任一动态系统经线性非奇异变换可分解为如下结构:



相似变换

对一个给定的系统，选取不同的两组状态向量x和x_s,分别写出的状态空间表达式如下

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_s = A_s x_s + B_s u \\ y = C_s x_s + D_s u \end{cases}$$

把状态向量之间的变换关系记为$x = Tx_s$, T为变换矩阵,其逆矩阵记为T^{-1}

则两个状态空间模型之间有如下对应关系

$$\begin{cases} A_s = T^{-1}AT \\ B_s = T^{-1}B \\ C_s = CT \\ D_s = D \end{cases}$$

相似变换

证明：

把$x=Tx_s$代入到$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$ 得：$\begin{cases}T\dot{x}_s=ATx_s+Bu\\ y=CTx_s+Du\end{cases}$

对状态方程两边同时乘以T^{-1},得 $\dot{x}_s=T^{-1}ATx_s+T^{-1}Bu$

$$\left.\begin{array}{l}\text{所以有}\begin{cases}\dot{x}_s=T^{-1}ATx_s+T^{-1}Bu\\ y=CTx_s+Du\end{cases}\\ \begin{cases}\dot{x}_s=A_sx_s+B_su\\ y=C_sx_s+D_su\end{cases}\end{array}\right\}\xRightarrow{\text{对比可得}}\begin{cases}A_s=T^{-1}AT\\ B_s=T^{-1}B\\ C_s=CT\\ D_s=D\end{cases}$$

能控性分解

1. 分解方法

设不完全能控系统$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}$ x为n维状态向量

设能控性矩阵的秩为$q(q<n)$,从能控性矩阵中找出q个线性无关的列向量，再附加

任意（$n-q$）个列向量。构成非奇异变换矩阵P,令$x=P\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$

则有 $\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=P^{-1}AP\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+P^{-1}Bu$ $\quad y=CP\begin{bmatrix}x_c\\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$

式中x_c为q维能控状态子向量；$x_{\bar{c}}$为$(n-q)$维不能控状态子向量,且

$$P^{-1}AP=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c:c}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12}\\ \hdashline \boxed{0} & \bar{A}_{22}\end{array}\right]\begin{array}{l}\}q\\ \}(n-q)\end{array}\end{array}\qquad P^{-1}B=\left[\begin{array}{c}\bar{B}_1\\ \hdashline \boxed{0}\end{array}\right]\qquad CP=\left[\begin{array}{c:c}\bar{C}_1 & \bar{C}_2\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_c \\ \dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c}\bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \hdashline 0 & \bar{A}_{22}\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c \\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}\bar{B}_1 \\ \hdashline 0\end{array}\right]u$$

$$y=\left[\begin{array}{c:c}\bar{C}_1 & \bar{C}_2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c \\ x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{x}_c &= \bar{A}_{11}x_c+\bar{A}_{12}x_{\bar{c}}+\bar{B}_1u \\ \dot{x}_{\bar{c}} &= \bar{A}_{22}x_{\bar{c}} \\ y &= \bar{C}_1x_c+\bar{C}_2x_{\bar{c}}\end{aligned}$$

把y进行分解，$y=y_1+y_2$,则可得两个子系统的动态方程

能控子系统 $\begin{cases}\dot{x}_c = \bar{A}_{11}x_c+\bar{A}_{12}x_{\bar{c}}+\bar{B}_1u \\ y_1=\bar{C}_1x_c\end{cases}$ q维

不能控子系统 $\begin{cases}\dot{x}_{\bar{c}} = \bar{A}_{22}x_{\bar{c}} \\ y_2=\bar{C}_2x_{\bar{c}}\end{cases}$ （$n-q$）维

能控性分解

2. 举例

例8-4:已知系统的状态空间描述（A,B,C）为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

试按能控性进行结构分解.

解:

$$能控性矩阵U_c=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

$rank(U_c)=2<n \quad \therefore$ 系统不完全能控。

选取U_c的第1,2列两个线性无关的向量，再取列向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,组成非奇异矩阵$P$.

$$P=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}\qquad 令x=P\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_c\\\dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=P^{-1}AP\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+P^{-1}Bu\qquad y=CP\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}AP=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -4 & 2\\1 & 4 & -2\\\hline 0 & 0 & 1\end{array}\right]\qquad P^{-1}B=\left[\begin{array}{c}1\\0\\\hline 0\end{array}\right]\qquad CP=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -1\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_c\\\dot{x}_{\bar{c}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & -4 & 2\\1 & 4 & -2\\\hline \boxed{0 \quad 0} & & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\0\\\hline \boxed{0}\end{array}\right]u\\ y=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_c\\x_{\bar{c}}\end{bmatrix}\end{cases}\Longrightarrow$$

能控子系统：$\begin{cases}\dot{x}_c=\begin{bmatrix}0 & -4\\1 & 4\end{bmatrix}x_c+\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}x_{\bar{c}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u\\ y_1=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x_c\end{cases}$

不能控子系统：$\begin{cases}\dot{x}_{\bar{c}}=x_{\bar{c}}\\ y_2=-x_{\bar{c}}\end{cases}$

能观性分解

1. 分解方法

设不完全能观系统$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$ x为n维状态向量

设能观性矩阵的秩为$l(l<n)$,从能控性矩阵中找出l个线性无关的行向量，再附加

任意（$n-l$）个行向量。构成非奇异变换矩阵T,令$x = T^{-1}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$

则有 $\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = TAT^{-1}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + TBu \qquad y = CT^{-1}\begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$

式中x_o为l维能观状态子向量；$x_{\bar{o}}$为$(n-l)$维不能观状态子向量,且

$$TAT^{-1} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c:c} \bar{A}_{11} & 0 \\ \hdashline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\,(n-l) \end{array} \end{array} \qquad TB = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \hdashline \bar{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$CT^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} \bar{C}_1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_o \\ \dot{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \bar{A}_{11} & 0 \\ \hdashline \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \bar{B}_1 \\ \hdashline \bar{B}_2 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{c:c} \bar{C}_1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_o \\ x_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_o &= \bar{A}_{11} x_o + \bar{B}_1 u \\ \dot{x}_{\bar{o}} &= \bar{A}_{21} x_o + \bar{A}_{22} x_{\bar{o}} + \bar{B}_2 u \\ y &= \bar{C}_1 x_o \end{aligned}\right.$$

把y进行分解，$y = y_1 + y_2$,则可得两个子系统的动态方程

能观子系统 $\begin{cases} \dot{x}_o = \bar{A}_{11} x_o + \bar{B}_1 u \\ y_1 = \bar{C}_1 x_o = y \end{cases}$ l维

不能观子系统 $\begin{cases} \dot{x}_{\bar{o}} = \bar{A}_{21} x_o + \bar{A}_{22} x_{\bar{o}} + \bar{B}_2 u \\ y_2 = 0 \end{cases}$ （$n-l$）维

能观性分解

2. 举例

例8-5:已知系统的状态空间描述（A,B,C）为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

试按能观性进行结构分解.

解:

能观性矩阵 $V=\begin{bmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 4 & -7 & 4\end{bmatrix}$

$rank(V)=2 \ < n$ $\quad\therefore$ 系统不完全能观。

选取V的第1,2行两个线性无关的行向量，再取行向量$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,组成非奇异矩阵$T$.

$$T=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad 令x=T^{-1}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\ \dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=TAT^{-1}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+TBu$$

$$y=CT^{-1}\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}$$

$$TAT^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ \hdashline -5 & 3 & 2\end{array}\right]\quad TB=\left[\begin{array}{c}1\\ 2\\ \hdashline 1\end{array}\right]\quad CT^{-1}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_o\\ \dot{x}_{\bar{o}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ \hdashline -5 & 3 & 2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}1\\ 2\\ \hdashline 1\end{array}\right]u\\ y=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_o\\ x_{\bar{o}}\end{bmatrix}\end{cases}\Longrightarrow$$

能观子系统：$\begin{cases}\dot{x}_o=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}x_o+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u\\ y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x_o\end{cases}$

不能观子系统：$\begin{cases}\dot{x}_{\bar{o}}=\begin{bmatrix}-5 & -3\end{bmatrix}x_o+2x_{\bar{o}}+u\\ y_2=0\end{cases}$

闭环控制系统的状态空间分析

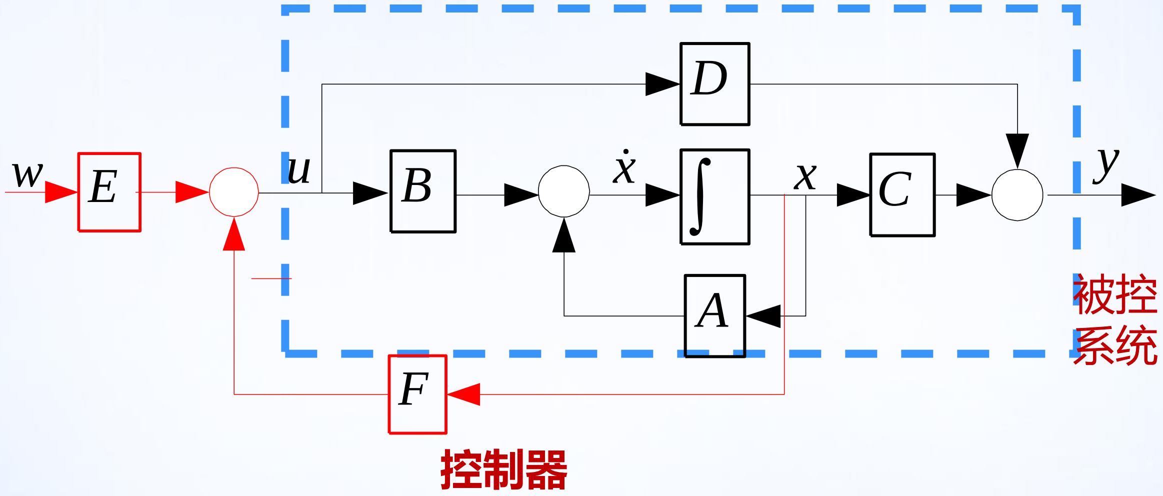
分类

用状态空间法设计的闭环控制系统中最典型的三类为

- **状态反馈控制系统**
- **输出反馈控制系统**
- **带有状态观测的状态反馈系统**

闭环控制系统的状态空间分析

1. 状态反馈控制系统



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + BEw \\ y = (C - DF)x + DEw \end{cases}$$

$$u = Ew - Fx$$

系统分析

1. 稳定性

特征方程 $P(s)=\left|sI-(A-BF)\right|=0$
解特征值，若在s左平面则稳定。

2. 能控性

$$S=\left[BE\vdots(A-BF)BE\vdots(A-BF)^2BE\vdots\cdots\vdots(A-BF)^{n-1}BE\right]$$

满秩则能控，状态反馈可保持系统的能控性。

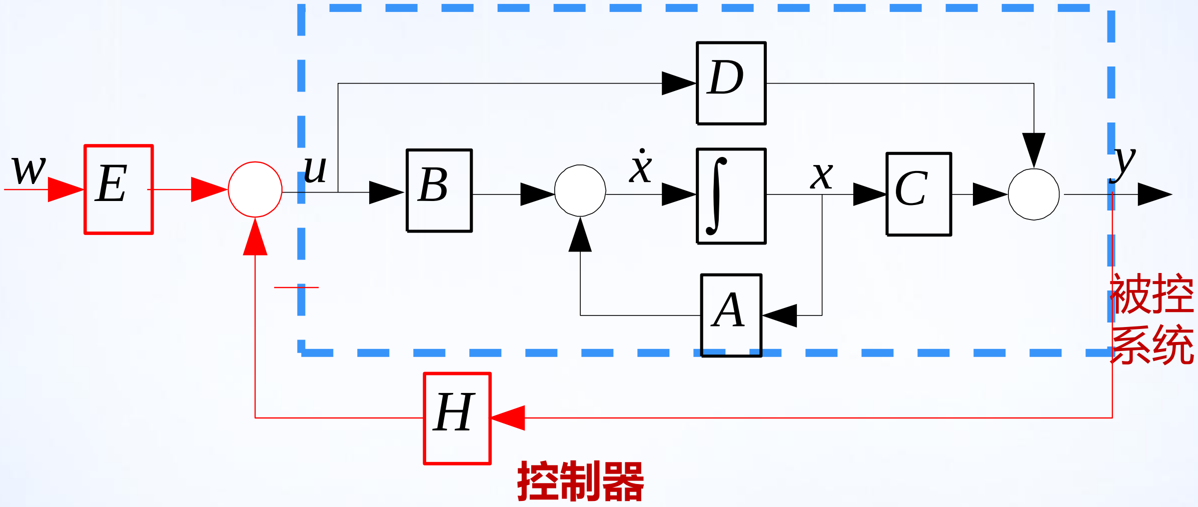
3. 能观性

$$V=\begin{bmatrix} CD-F \\ (CD-F)(A-BF) \\ \vdots \\ (CD-F)(A-BF)^{n-1} \end{bmatrix}$$

满秩则能观，状态反馈会影响系统能观性。

闭环控制系统的状态空间分析

2. 输出反馈控制系统



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(Ew - Hy) \\ y = Cx + D(Ew - Hy) \end{cases}$$

$$u = Ew - Hy$$

闭环控制系统的状态空间分析

2. 输出反馈控制系统

$$\therefore\ \dot{x} = \left[A - BH(I + DH)^{-1}C\right]x + B(I + HD)^{-1}Ew = A_b x + B_b w$$

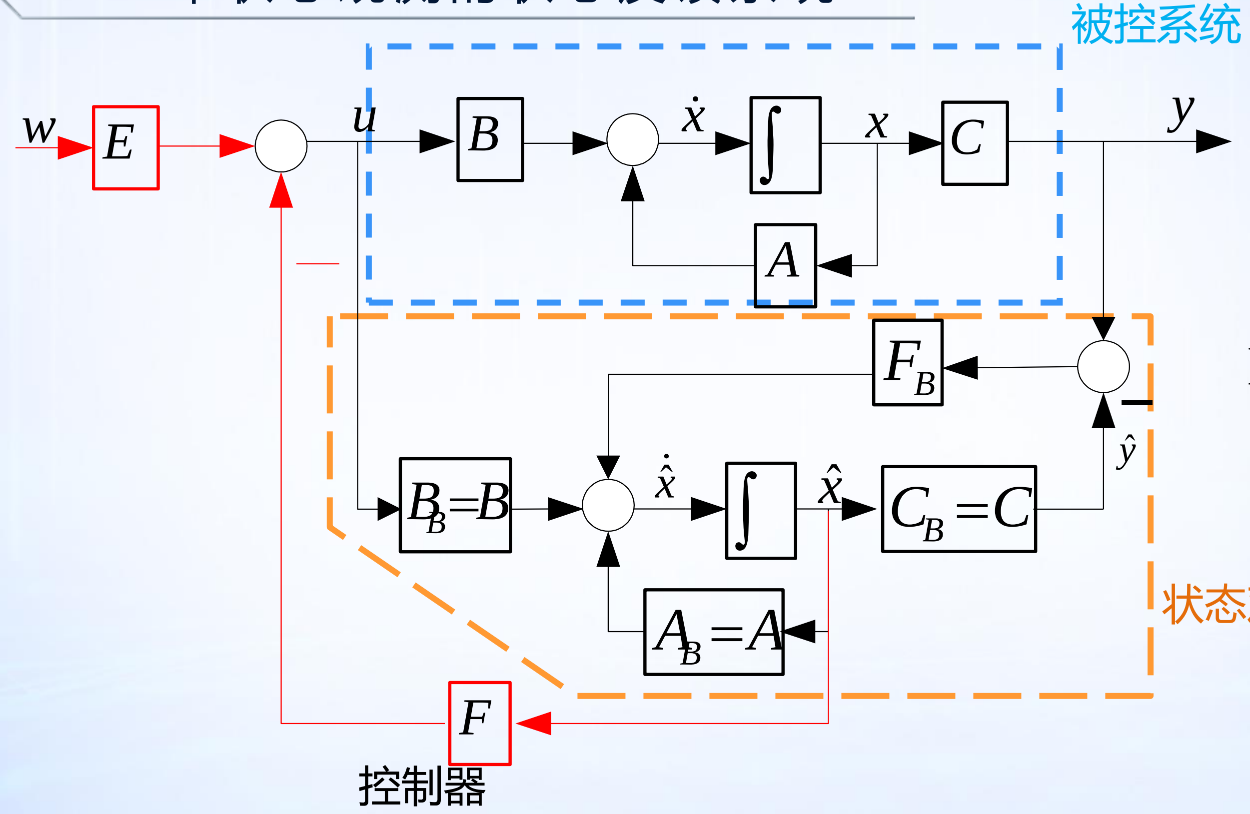
$$y = (I + DH)^{-1}C * x + (I + DH)^{-1}DE * w = C_b x + D_b w$$

$$\therefore \begin{cases} A_b = A - BH(I + DH)^{-1}C \\ B_b = B(I + HD)^{-1}E \\ C_b = (I + DH)^{-1}C \\ D_b = (I + DH)^{-1}DE \end{cases}$$

据此分析系统的稳定性、能控性和能观性

闭环控制系统的状态空间分析

3.　带状态观测的状态反馈系统



$$\lim_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0$$

闭环控制系统的状态空间分析

3. 带状态观测的状态反馈系统

设状态估计误差 $\tilde{e}=x-\hat{x}$

综合有系统状态方程,可导出 $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\tilde{e}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-BF & BF\\ 0 & A-F_BC\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \tilde{e}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}BE\\ 0\end{bmatrix}w$

特征多项式 $$P_G(s)=\left|sI-\begin{bmatrix}A-BF & BF\\ 0 & A-F_BC\end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}sI-(A-BF) & -BF\\ 0 & sI-(A-F_BC)\end{vmatrix}$$

$$=\underbrace{\left|sI-A+BF\right|}_{\text{状态反馈特征式}}\cdot\underbrace{\left|sI-A+F_BC\right|}_{\text{状态观测特征式}}$$

$$\therefore\quad P_G(s)=P(s)P_B(s)=0$$

闭环控制系统的状态空间分析

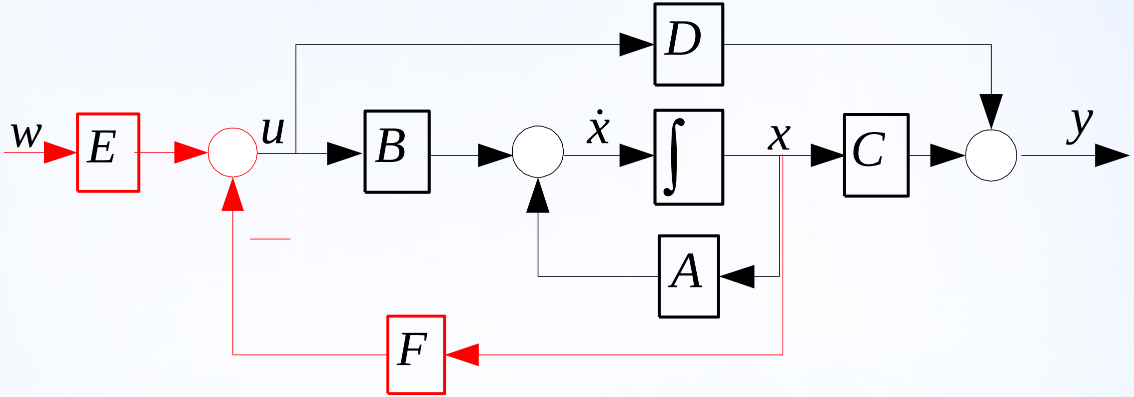
[分离定理]

只要由矩阵A，B，C给定的开环系统是完全能控且能观的，那么观测器的特征方程的n个特征值和闭环系统（不带观测器）的特征方程的n个特征值可以分别配置。

注：**状态观测与状态反馈可分开考虑**，两系统稳定则总系统稳定，状态反馈控制器与观测器可分别独立进行极点配置，常取观测器极点在控制器极点稍左。

用极点配置法设计状态控制器

1. 状态反馈控制系统



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$u = Ew - Fx$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + BEw \\ y = (C - DF)x + DEw \end{cases}$$

若$D = 0$，则$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + BEw \\ y = Cx \end{cases}$

用极点配置法设计状态控制器

1. 状态反馈控制系统

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x} = (A - BF)x + BEw \\ y = (C - DF)x + DEw\end{cases}$$

系统矩阵为A

系统矩阵为$(A - BF)$

原系统的特征根:$|sI - A| = 0$

系统的特征根为$|sI - (A - BF)| = 0$

用极点配置法设计状态控制器

2.状态反馈极点配置定理

对于状态反馈闭环控制系统，只要被控系统（A，B，C）**状态完全能控**，则闭环系统的极点可通过状态反馈矩阵F的确定来任意配置。

- **注:此定理适用于单变量也适用于多变量系统。**
- **在SISO系统中，有唯一解。在MIMO系统中，解不唯一，有自由度考虑其它要求。**
- **在SISO系统中,F的设计不改变系统零点,但在MIMO系统中则不一定,则使配置复杂化。**

用极点配置法设计状态控制器

3.状态反馈矩阵F的设计算法——原理性算法

对n阶系统，设其期望的闭环极点为$\bar{s}_1$、$\bar{s}_2$、$\cdots\bar{s}_n$，则其闭环特征式为

$$(s-\bar{s}_1)(s-\bar{s}_2)(s-\bar{s}_3)\cdots(s-\bar{s}_n)$$
$$=s^n+\bar{\alpha}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{\alpha}_2 s^2+\bar{\alpha}_1 s+\bar{\alpha}_0$$

设计后系统的特征式：

$$|sI-A+BF|$$
$$=s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

这两个多项式的系数相等，可得出：

$$\begin{cases}\alpha_0=\bar{\alpha}_0\\ \alpha_1=\bar{\alpha}_1\\ \quad\vdots\\ \alpha_{n-1}=\bar{\alpha}_{n-1}\end{cases}\Rightarrow$$

α_i中含F阵系数f_{ij}

当F阵为$1\times n$时

n个方程可解n个系数$\{f_i\}$

$(i=1,2,\ldots,n)$

用极点配置法设计状态控制器

3.状态反馈矩阵F的设计算法——适用于用能控标准形表示的SI系统的算法

设系统的能控标准形为$\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$C=\left[(b_0-b_na_0)\quad(b_1-b_na_1)\quad\cdots\quad(b_{n-1}-b_na_{n-1})\right]\qquad D=b_n$$

系统的特征多项式为$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0$

用极点配置法设计状态控制器

3.状态反馈矩阵F的设计算法——适用于用能控标准形表示的SI系统的算法

设系统期望的闭环极点为 $\overline{s}_1$、$\overline{s}_2$、$\cdots$ $\overline{s}_n$ ，则其闭环特征式为

$$\left(s-\overline{s}_1\right)\left(s-\overline{s}_2\right)\left(s-\overline{s}_3\right)\cdots\left(s-\overline{s}_n\right)=s^n+\overline{\alpha}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\overline{\alpha}_2 s^2+\overline{\alpha}_1 s+\overline{\alpha}_0$$

$\because SI$系统 $\therefore$ 设$F=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}$

$$则有:\begin{cases} f_1=\overline{\alpha}_0-a_0 \\ f_2=\overline{\alpha}_1-a_1 \\ \quad\vdots \\ f_n=\overline{\alpha}_{n-1}-a_{n-1} \end{cases}$$

证明：

$$|sI-A+BF|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} s & & & 0 \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} s & & & 0 \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -1 \\ a_0+f_1 & a_1+f_2 & a_2+f_3 & \cdots & a_{n-2}+f_{n-1} & a_{n-1}+f_n+s \end{vmatrix}$$

$$=s^n+(a_{n-1}+f_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+f_2)s+a_0+f_1 \overset{\text{期望特征多项式}}{=} s^n+\bar{\alpha}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{\alpha}_2s^2+\bar{\alpha}_1s+\bar{\alpha}_0$$

$$\therefore \begin{cases} a_0 + f_1 = \bar{\alpha}_0 \\ a_1 + f_2 = \bar{\alpha}_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + f_n = \bar{\alpha}_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \bar{\alpha}_0 - a_0 \\ f_2 = \bar{\alpha}_1 - a_1 \\ \vdots \\ f_n = \bar{\alpha}_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$$

设计后系统的特征多项式为

$$= s^n + \bar{\alpha}_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_1 s + \bar{\alpha}_0$$

设计前系统的特征多项式为

$$= s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

对应系数相减

用极点配置法设计状态控制器

3.状态反馈矩阵F的设计算法——适用于一般SI系统的阿克曼算法

设期望的闭环系统特征多项式：$P(s)=\overline{\alpha}_0+\overline{\alpha}_1 s+\cdots+\overline{\alpha}_{n-1}s^{n-1}+s^n=0$

计算其能控性矩阵：$S=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$

设状态反馈矩阵为$F=\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & \cdots & f_{11}\end{bmatrix}$

则状态反馈矩阵F可由阿克曼公式计算求得，即：$F=e_n S^{-1}P(A)$

式中：$e_n=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$P(A)=\overline{\alpha}_0 I+\overline{\alpha}_1 A+\cdots+\overline{\alpha}_{n-1}A^{n-1}+A^n$$

用极点配置法设计状态控制器

3. 举例

☛例8.6 设系统的状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x$$

试求：（1）求状态反馈矩阵F使闭环系统有期望极点$s_{1,2}=-3\pm 2j$;

（2）绘制带有状态反馈控制器的状态变量图

用极点配置法设计状态控制器

3. 举例

解：（1） $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$

$$rank(S)=rank(B\vdots AB)=rank\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -5\end{bmatrix}\right)=2$$

∴系统能控。

期望闭环系统特征多项式为：

$$(s-s_1)(s-s_2)=(s+3+2j)(s+3-2j)=s^2+6s+13$$

设状态反馈矩阵为 $F=\begin{bmatrix}f_1 & f_2\end{bmatrix}$

用极点配置法设计状态控制器

3. 举例

方法1：$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}+BF| = \left|\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix}\right|$

$$= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 6+f_1 & s+5+f_2 \end{vmatrix} = s^2+(5+f_2)s+6+f_1 = s^2+6s+13$$

$$\therefore \begin{cases} 5+f_2=6 \\ 6+f_1=13 \end{cases} \Rightarrow f_1=7,\ f_2=1 \ \therefore F=\begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}$$

方法2：$\because$ 是能控标准型，所以可知原系统的特征多项式为s^2+5s+6;

设计后系统的特征多项式为$s^2+6s+13$

$\therefore\ f_1=13-6=7;\ f_2=6-5=1 \qquad \therefore F=\begin{bmatrix} 7 & 1 \end{bmatrix}$

用极点配置法设计状态控制器

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-6x_1-5x_2+u$$

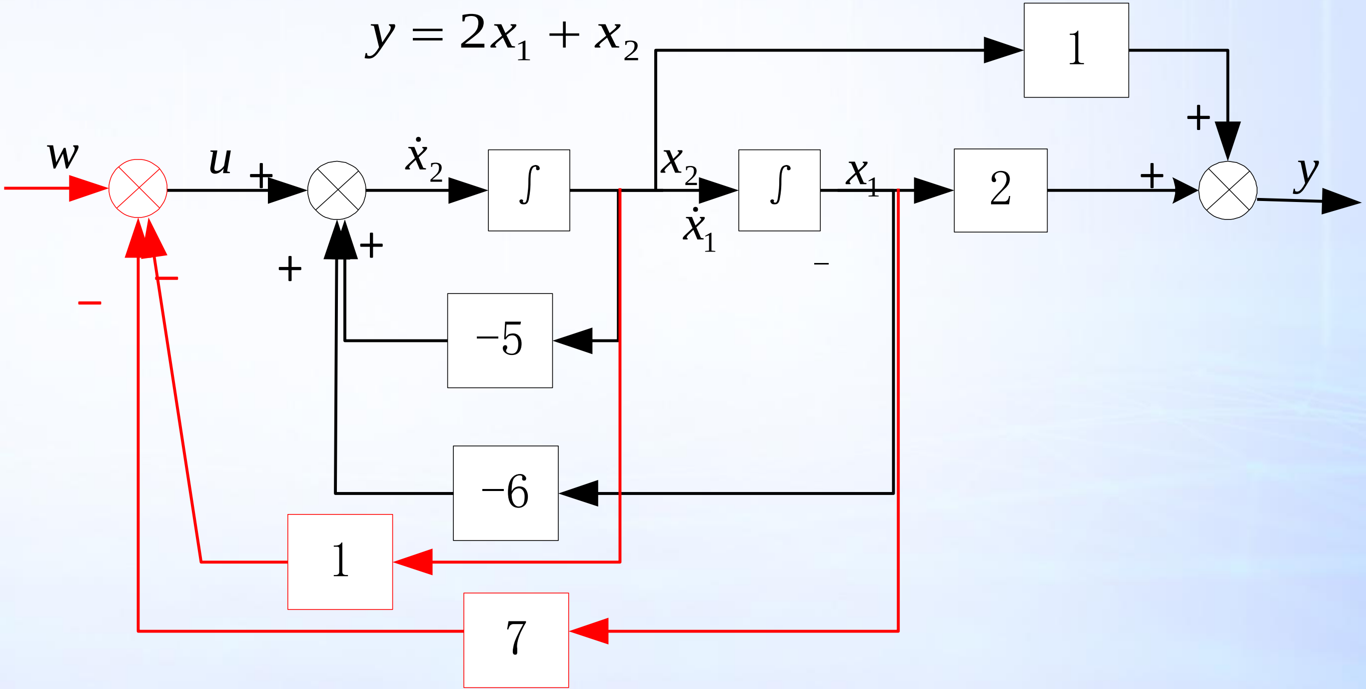
$$y=2x_1+x_2$$

$$F=\begin{bmatrix}7 & 1\end{bmatrix}$$

$$u=Ew-Fx$$

$$=1\times w-\begin{bmatrix}7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$=w-7x_1-x_2$$



用极点配置法设计状态控制器

4.状态反馈对系统零点和能控能观性的影响

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2+5s+6}$$

能控不能观

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -13 & -6\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

$$G(s)=\frac{s+2}{s^2+6s+13}$$

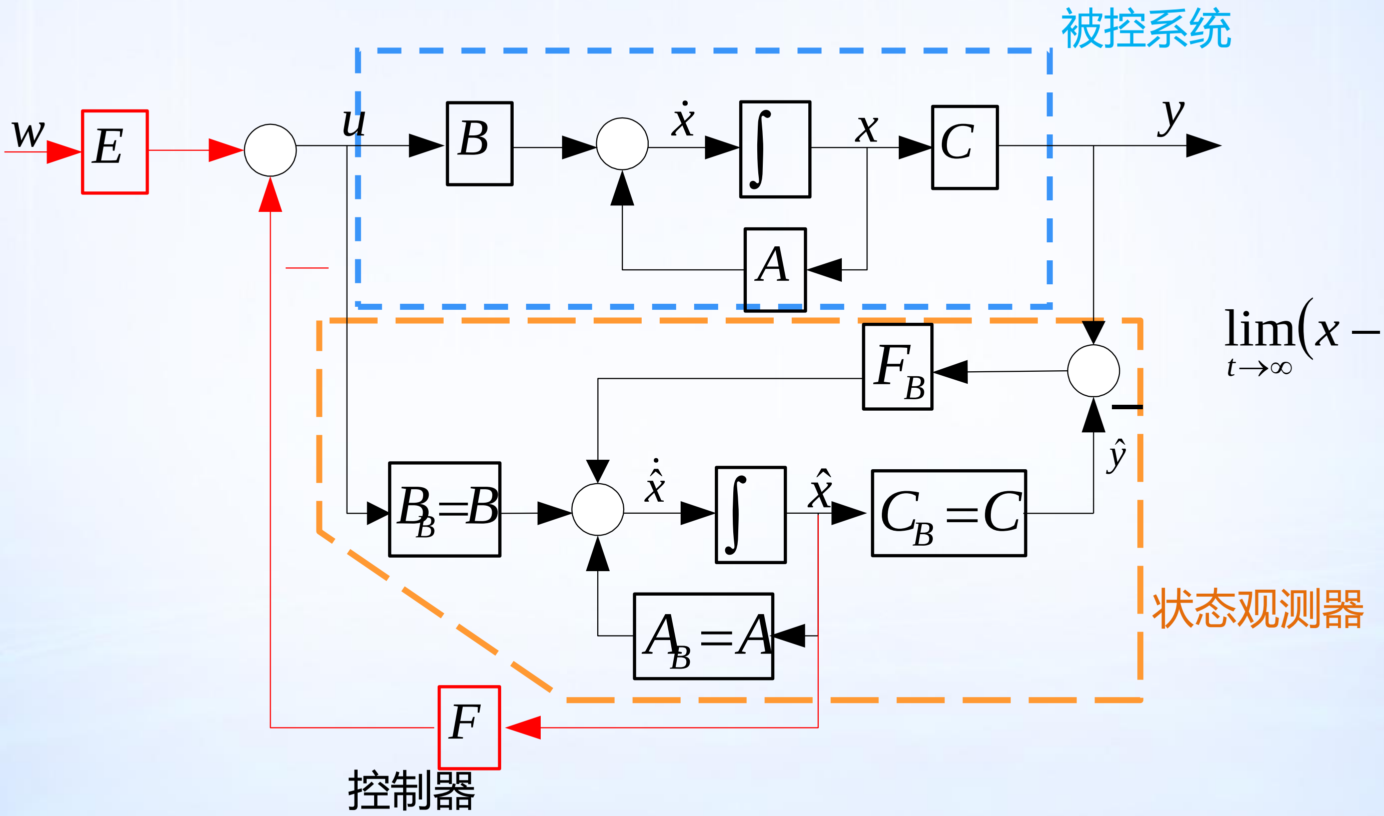
能控能观

结论：1.状态反馈不改变系统的零点(单输入系统)。

2.状态反馈不改变系统的能控性,但可能改变能观性。

用极点配置法设计状态观测器

1.带有状态观测器的状态反馈控制系统



$$\lim_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0$$

用极点配置法设计状态观测器

2.状态观测极点配置定理

对于上图所示的状态观测系统，只要被观测系统只要（A，B，C）**状态完全能观**，则观测系统的极点可通过状态观测矩阵F_B的确定来任意配置。

- 为使估计误差尽快趋于零，极点离虚轴越远越好
- 有噪声存在,频带不宜过宽,极点不要离虚轴太远
- 观测极点配置在控制极点的左侧
- 全维观测器：估计n个状态
- 降维观测器：估计的状态个数小于n

用极点配置法设计状态观测器

3.状态观测器的设计算法——原理性算法（单输出系统）

对n阶系统，设其期望的观测系统极点为$\bar{s}_1$、$\bar{s}_2$、$\cdots\bar{s}_n$，则其对应的期望特征式为

$$\left(s-\bar{s}_1\right)\left(s-\bar{s}_2\right)\left(s-\bar{s}_3\right)\cdots\left(s-\bar{s}_n\right)$$
$$=s^n+\bar{\beta}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{\beta}_2 s^2+\bar{\beta}_1 s+\bar{\beta}_0$$

因为单输出的系统，所以F_{B}为$n\times 1$的矩阵。

设$F_{\mathrm{B}}=\left[g_1 \quad g_2 \quad \cdots \quad g_n\right]^T$

设计闭环观测系统的特征多项式：

$$\left|sI-A+F_B C\right|$$
$$=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0$$

这两个多项式的系数相等，可得出：

$$\begin{cases}\bar{\beta}_0=\beta_0\\ \bar{\beta}_1=\beta_1\\ \quad\vdots\\ \bar{\beta}_{n-1}=\beta_{n-1}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ n个方程可解n个值$\{g_i\}$

$(i=1,2,\ldots,n)$

用极点配置法设计状态观测器

3.状态观测器的设计算法——针对以能观标准形表述的单输出系统

设系统的能观标准形为$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad D = b_n$$

系统的特征多项式为$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

用极点配置法设计状态观测器

3.状态观测器的设计算法——针对以能观标准形表述的单输出系统

对n阶系统，设其期望的观测系统极点为$\overline{s_1}$、$\overline{s_2}$、$\cdots\overline{s_n}$,则其对应的期望特征式为

$$\left(s-\overline{s_1}\right)\left(s-\overline{s_2}\right)\left(s-\overline{s_3}\right)\cdots\left(s-\overline{s_n}\right)=s^n+\bar{\beta}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{\beta}_2 s^2+\bar{\beta}_1 s+\bar{\beta}_0$$

$$\text{则}F_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\beta}_0-a_0 \\ \bar{\beta}_1-a_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{n-1}-a_{n-1} \end{bmatrix}$$

证明： $|sI-A+F_BC|$

$$=\left|\begin{bmatrix} s & & & 0 \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{bmatrix} s & & & 0 \\ & s & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0+g_1) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1+g_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1}++g_n) \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} s & 0 & \cdots & 0 & (a_0+g_1) \\ -1 & s & \cdots & 0 & (a_1+g_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & s+(a_{n-1}++g_n) \end{bmatrix}\right|$$

$$=s^n+(a_{n-1}+g_n)s^{n-1}+\cdots+(a_2+g_3)s^2+(a_1+g_2)s+(a_0+g_1)$$

期望特征多项式

$$=s^n+\bar{\beta}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{\beta}_2s^2+\bar{\beta}_1s+\bar{\beta}_0$$

$$\Rightarrow F_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\beta}_0-a_0 \\ \bar{\beta}_1-a_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_{n-1}-a_{n-1} \end{bmatrix}$$

用极点配置法设计状态观测器

3.状态观测器的设计算法——针对一般单输出系统的阿克曼算法

已知期望特征多项式 $P_B*(s)=\bar{\beta}_0+\bar{\beta}_1 s+\bar{\beta}_2 s^2\cdots+\bar{\beta}_{n-1}s^{n-1}+s^n$

计算特征多项式矩阵 $P_B*(A)=\bar{\beta}_0+\bar{\beta}_1 A+\bar{\beta}_2 A^2\cdots+\bar{\beta}_{n-1}A^{n-1}+A^n$

计算能观性矩阵 $V=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 求 V^{-1}

根据 $F_B=P_B*(A)V^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 计算状态观测矩阵

用极点配置法设计状态观测器

4.举例

例 8- 7 倒立摆系统的状态空间方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

设期望状态观测系统的特征根为$s_1 = -3, s_2 = -4, s_{3,4} = -3 \pm 2j$,

试求： （1）状态观测矩阵F_B;(2)绘制状态观测系统。

解:(1)

$$\text{系统能观性矩阵} V=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(V)=4=n$ 所以系统能观。

状态观测系统期望特征多项式为:

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)=(s+3)(s+4)(s+3-2j)(s+3+2j)$$

$$=s^4+13s^3+67s^2+163s+156$$

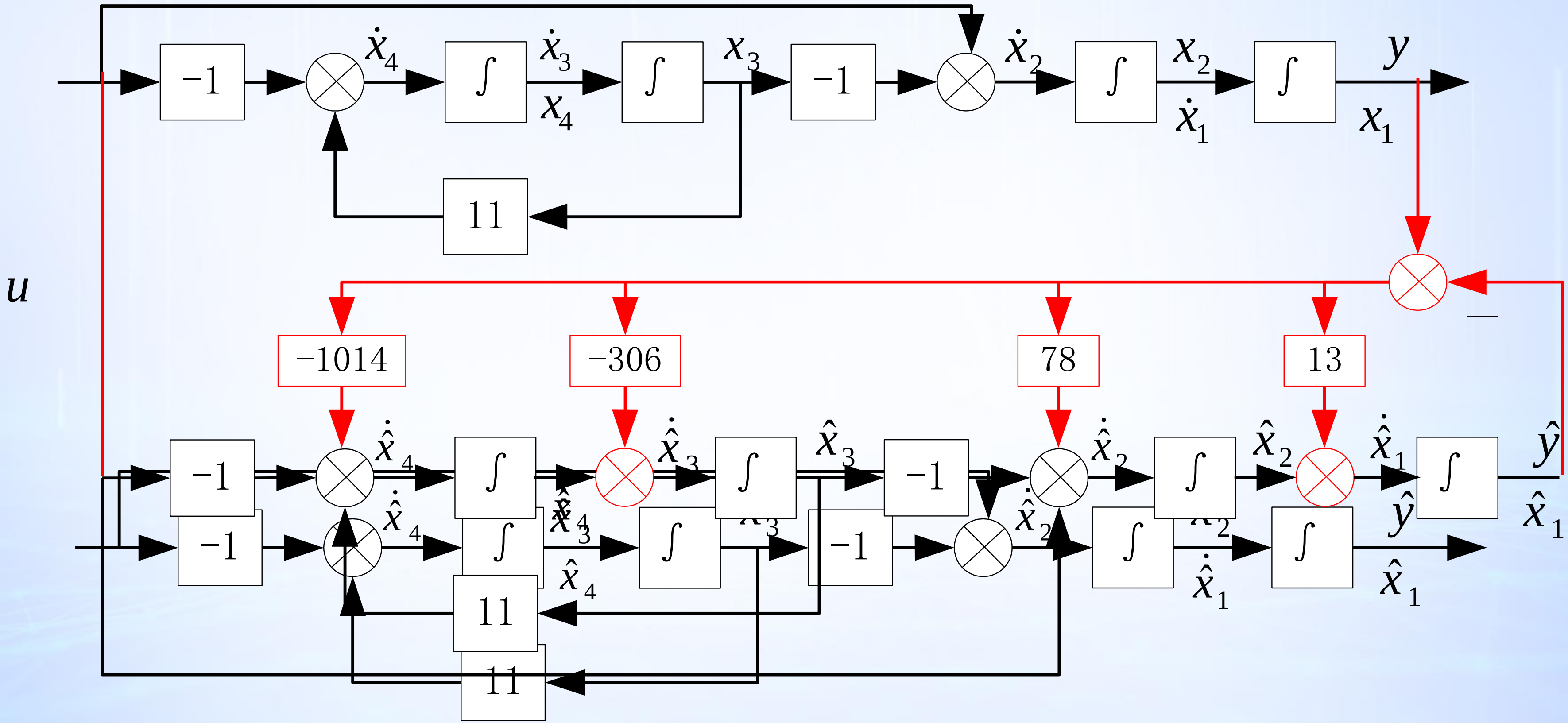
因为单输出的系统，所以F_{B}为$n\times 1$的矩阵,设$F_{\mathrm{B}}=\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{bmatrix}^T$

$$\left|sI - A + F_B C\right| = \begin{vmatrix} s+g_1 & -1 & 0 & 0 \\ g_2 & s & 1 & 0 \\ g_3 & 0 & s & -1 \\ g_4 & 0 & -11 & s \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &= s^4 + g_1 s^3 + (g_2 - 11)s^2 + (-11g_1 - g_3)s + (-11g_2 - g_4) \\ &= s^4 + 13s^3 + 67s^2 + 163s + 156 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = 13 \\ g_2 - 11 = 67 \\ -11g_1 - g_3 = 163 \\ -11g_2 - g_4 = 156 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = 13 \\ g_2 = 78 \\ g_3 = -306 \\ g_4 = -1014 \end{cases} \qquad \therefore F_B = \begin{bmatrix} 13 \\ 78 \\ -306 \\ -1014 \end{bmatrix}$$

(2)：



u
-1
$\dot{x}_4$
$\int$
$\dot{x}_3$
x_4
$\int$
x_3
-1
$\dot{x}_2$
$\int$
x_2
$\dot{x}_1$
$\int$
y
x_1
11
—
-1014
-306
78
13
-1
$\dot{\hat{x}}_4$
$\int$
$\dot{\hat{x}}_3$
$\hat{x}_4$
$\int$
$\hat{x}_3$
-1
$\dot{\hat{x}}_2$
$\int$
$\hat{x}_2$
$\dot{\hat{x}}_1$
$\int$
$\hat{y}$
$\hat{x}_1$
11
11