第五章：控制系统的根轨迹分析与设计

根轨迹的基本概念与根轨迹方程

- **根轨迹的基本概念**
- **根轨迹方程**

根轨迹的基本概念

定义

控制系统的特性主要取决于系统闭环传递函数的**特征根**，尤其是**稳定性**。

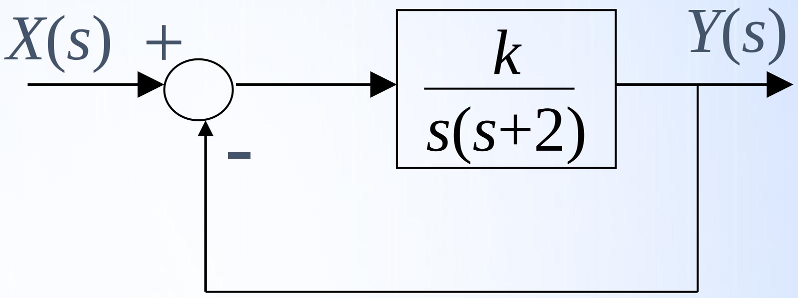
在一个控制系统中确定了系统模型后，整定参数的过程就是当一个或多个参数在一定范围内变化时，根据性能要求寻求最佳的参数。

根轨迹的定义： **开环传函**某个参数（或某些参数）在一定范围内变化（多为**0→∞**）时**闭环特征根**在s平面上移动的轨迹。

根轨迹的基本概念

举例

1)开环传函: $G_0(s)=\dfrac{k}{s(s+2)}$



开环极点:$s_1=0$

$s_2=-2$

开环零点: 无

2)闭环传函: $G_c(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{k}{s^2+2s+k}$

3) 闭环特征方程: $s^2+2s+k=0$

根轨迹的基本概念

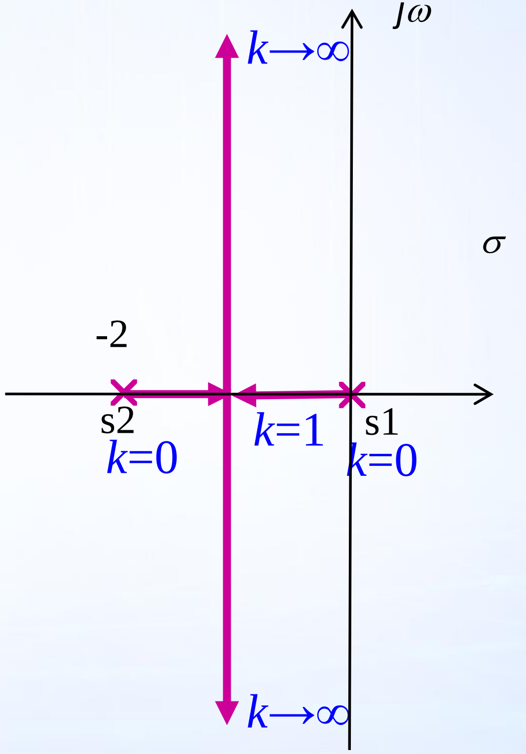
举例

闭环特征方程：$s^2+2s+k=0$

4）闭环特征根： $s_1=-1+\sqrt{1-k}$

$$s_2=-1-\sqrt{1-k}$$

k	s_1	s_2
0	0	-2
0.25	$-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-1-\sqrt{\frac{3}{2}}$
1	-1	-1
2	$-1+j$	$-1-j$
5	$-1+2j$	$-1-2j$
…	…	…
∞	$-1+j\infty$	$-1-j\infty$



根轨迹的基本概念

分析：（1）$0<k<1$，两个负实根，过阻尼；

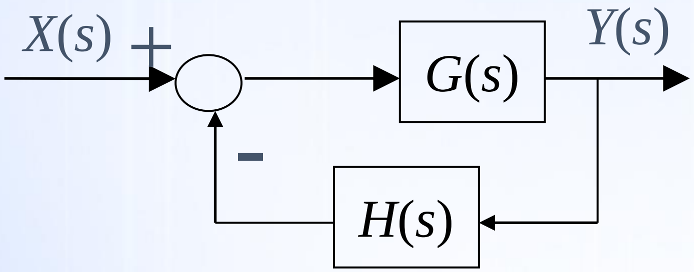
（2）$k=1$，重根，临界阻尼；

（3）$k>1$，共轭复根，欠阻尼，衰减振荡，且k越大 ζ 越小，振荡越烈；

根轨迹的基本概念与根轨迹方程

- 根轨迹的基本概念
- 根轨迹方程

根轨迹方程



闭环传函：$G_{close}(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

开环传函：

$$G(s)H(s)=k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$

闭环特征方程：$G(s)H(s)=-1$

或

$$k\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$$

根轨迹方程

根轨迹方程

移项得： $$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+k\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)=0$$

k称为**根轨迹增益**

注：

$0\le k<\infty$**常规根轨迹**，简称**根轨迹**；

$-\infty<k\le 0$**补根轨迹** 或 **余根轨迹**；

$-\infty<k<\infty$**完全根轨迹**，简称**全根轨迹**。

根轨迹方程

根轨迹方程：$k\dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=-1$

幅值条件方程(模相等)：$|G(s)H(s)|=1$ 或 $k\dfrac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=1$ 或 $k=\dfrac{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}$

确定根轨迹上某点对应的k值

相角条件方程(相角相等)：

$$\angle G(s)H(s)=\pm(2l+1)\pi$$

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)=\pm(2l+1)\pi$$

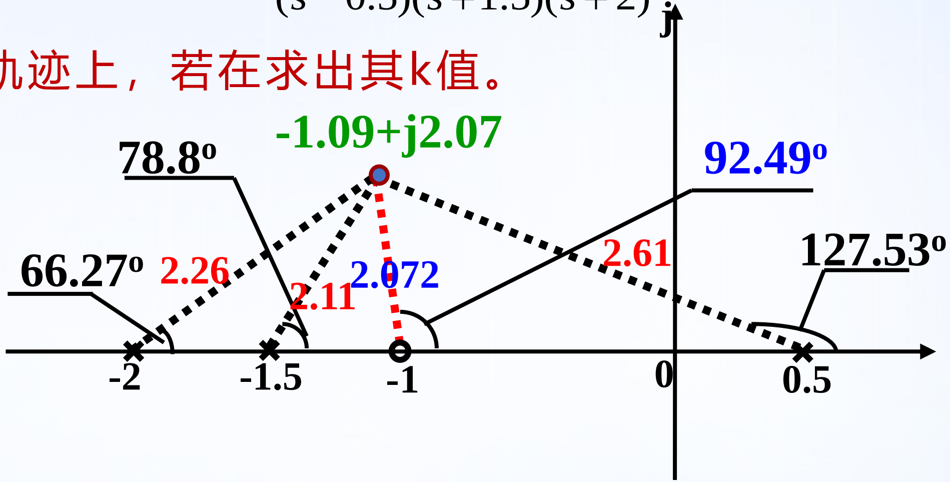
$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i-\sum_{j=1}^{n}\beta_j=\pm(2l+1)\pi$$

绘制根轨迹的充要条件

幅值条件与相角条件的应用

求模求角例题（补充）$G(s)H(s)=\dfrac{k(s+1)}{(s-0.5)(s+1.5)(s+2)}$

确定该点在不在根轨迹上，若在求出其k值。



$92.49^{\circ}-66.27^{\circ}-78.8^{\circ}-127.53^{\circ}=-180^{\circ}$　该点在根轨迹上

$$k=\frac{2.26\times 2.11\times 2.61}{2.072}=6$$

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则1

[规则1]：根轨迹分支数 = n

证：n阶特征方程有n个根，k从0→∞时，n个根随之变化，故有n条根轨迹。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则2、3

[规则2]：根轨迹的n个分支，分别起始于各自的开环极点($-p_j$)。

[规则3]：根轨迹的n个分支，有m个分支终止于开环有限零点($-z_i$)，其余分支终止于根平面的无穷远处。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则2

证：由幅值条件：

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=\frac{1}{k}$$

当 $k=0$ 时，必有 $\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|=0$

$$\therefore s=-p_j(j=1,2,\cdots,n)$$

既根轨迹从-pj起。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则3

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=\frac{1}{k}$$

当$k\to\infty$时，必有

$$\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|=0$$

$$|(s+z_i)|=0$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

必有$s=-z_i$

$\therefore s$以$-z_i$或∞终。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则4

[规则4]：根轨迹与实轴对称

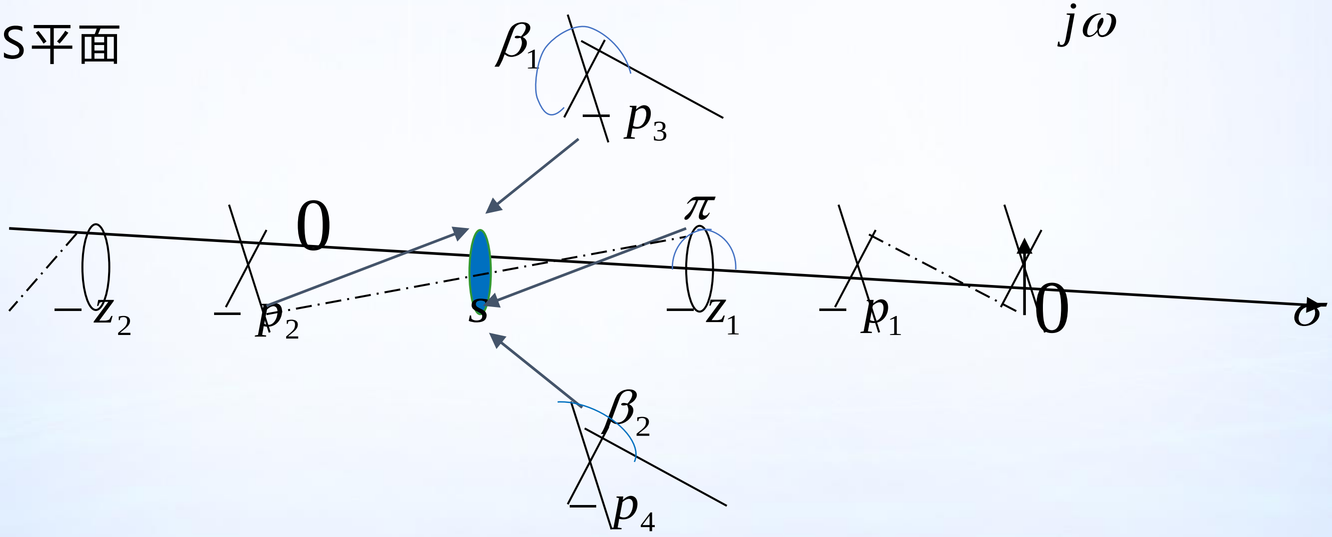
证：特征方程式各项系数为实数，则特征根要么实根，要么为共轭复根，所以必与实轴对称。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则5

[规则5]：实轴上根轨迹区段**右**边的**开环零点和开环极点总数**为**奇数。**

S平面



根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则6

[规则6]：有n-m条根轨迹分支沿渐近线趋于无穷远。

其渐近线与正实轴的夹角为：

$$\varphi_\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m}$$

$$l = 0,1,2,\cdots$$

与实轴的交点为：

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j)-\sum_{i=1}^{m}(-z_i)}{n-m} = \frac{\text{极点和}-\text{零点和}}{n-m}$$

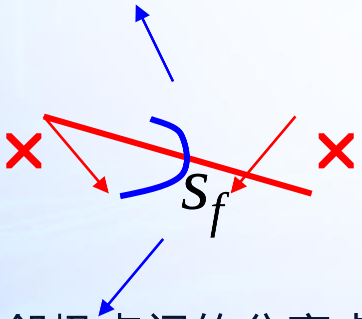
根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则7

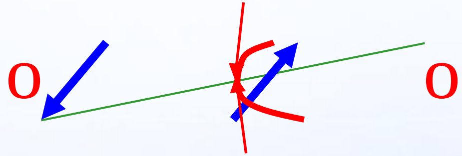
[规则7] ： 确定根轨迹的分离点

定义：

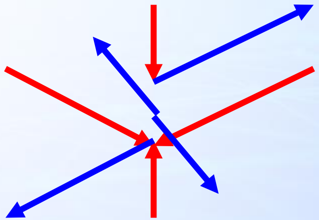
根轨迹分离点 — L条根轨迹在s平面上相遇又分开的点，分离点为重根点，L为重根数。



相邻极点间的分离点



相邻零点间的会合点



四重根

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则7

[规则7]：分离点或会合点 s_f

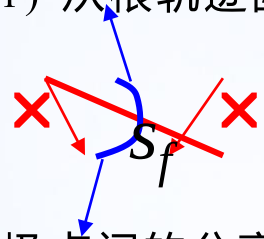
满足 $\dfrac{d[G(s)H(s)]}{ds}=0$ 或 $\dfrac{dk}{ds}=0$

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则7

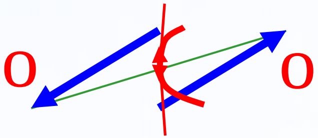
重根数L的判别：

(1) 从根轨迹图判别较容易，如：



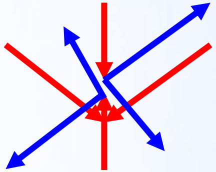
相邻极点间的分离点

（2重根）



相邻零点间的会合点

（2重根）



四重根

(2) 或从 $\dfrac{dk}{ds}=0$判别，当有$(s+b)^m=0$时

可能有重根数$L=m+1$

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则7

[规则7]：分离点或会合点d确立

分离点的另一种计算方法

$$\frac{dk}{ds}=\frac{d}{ds}\frac{\prod(s+p_i)}{\prod(s+z_j)}=0$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d+z_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d+p_i}}$$

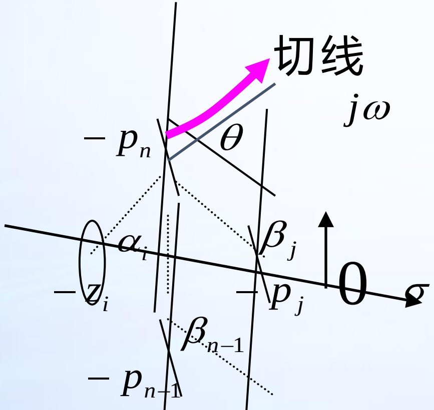
根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则8

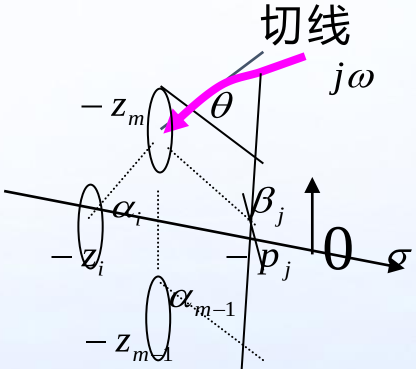
[规则8]：起始**（出射）角**与终止**（入射）角**的计算

出射角： 开环**共轭复极点**处根轨迹的切线对正实轴的**倾角**

入射角： 开环**共轭复零点**处根轨迹的切线对正实轴的**倾角**



a)出射角



b)入射角

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则8

[规则8]： 起始**（出射）角**与终止**（入射）角**的计算公式为：

$$\begin{cases} \theta_{p_j} = (2L+1)\pi + \left(\sum_{i=1}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{i=1,i\neq j}^{n} \angle(s+p_i) \right)_{s=-p_j} \\ \theta_{z_j} = (2L+1)\pi - \left(\sum_{i=1,i\neq j}^{m} \angle(s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s+p_i) \right)_{s=-z_j} \end{cases}$$

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则9

[规则9]：根轨迹**与虚轴上的交点**对应的临界增益可用**jω代入特征方程**中求出**或**利用**劳斯判据**求出。

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则10

[规则10]：求根轨迹上任一点s_1对应的k值

$$k=\frac{\prod_{j=1}^{n}\left|s_1+p_j\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s_1+z_i\right|}$$

分子：————各开环极点到s_1的向量长度之积

分母：————各开环零点到s_1的向量长度之积

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则11

[规则11]：

若 $n-m\geq 2$，则系统所有闭环**特征根之和等于常数**并等于开环特征根之和；

若 $n>m$，则系统所有闭环**特征根之积乘以 $(-1)^n$ 等于**闭环特征方程**常数项。**

根轨迹绘制规则

根轨迹绘制规则11

注：该规则有两个作用：

- **（1）定性判断根轨迹走向；**
- **（2）已知几个闭环根可求出其它一个或两个根。**

例如： 因为闭环特征根之和为常数，所以对于$n-m \geq 2$的系统，随k的变化，一部分根轨迹分支向左移动，另一部分将向右移动。

根轨迹图分析

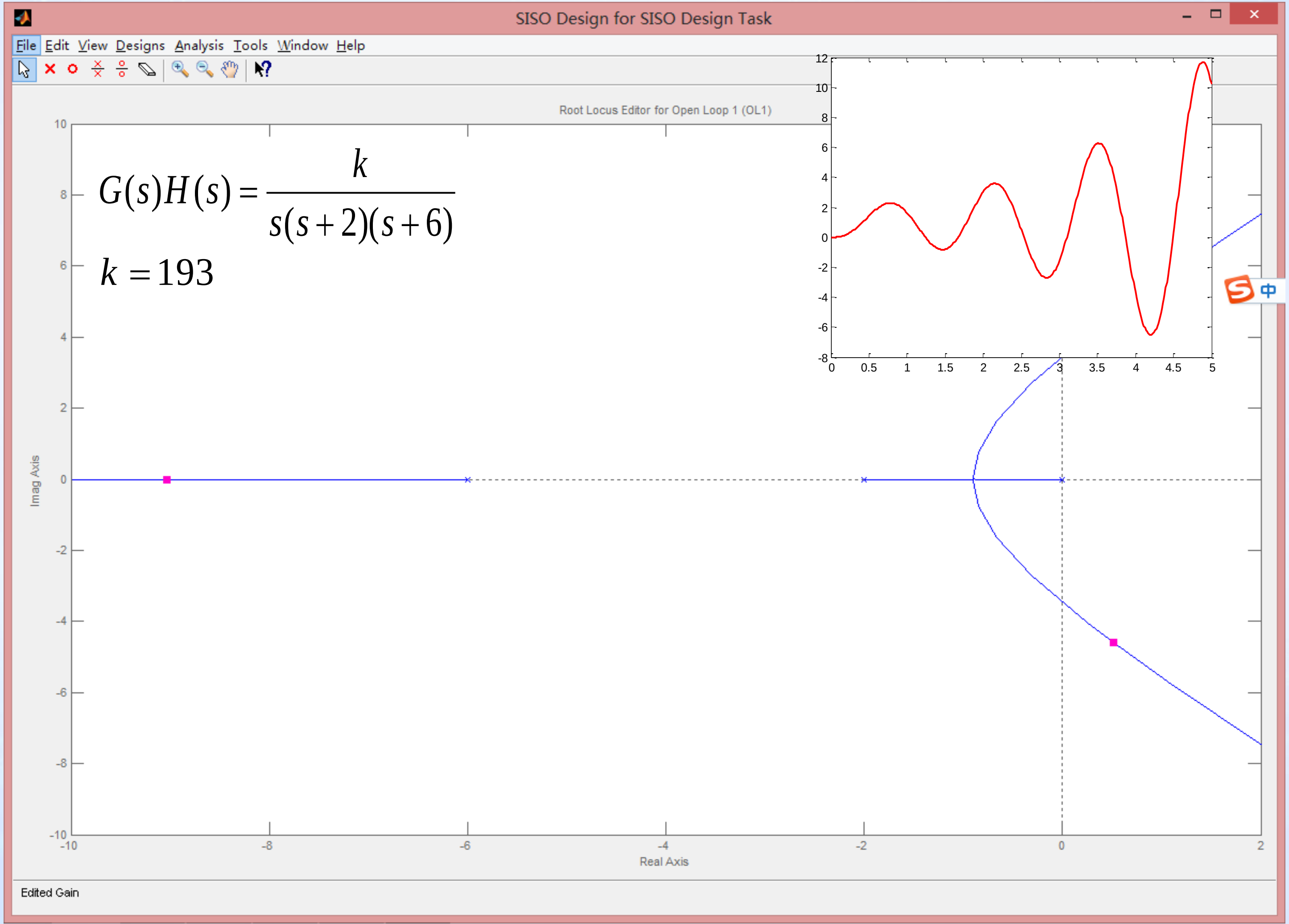
根据根轨迹图分析系统的稳定性

✓闭环特征根在**左**半平面则**稳定**；

✓闭环特征根在**右**半平面则**不稳定**；

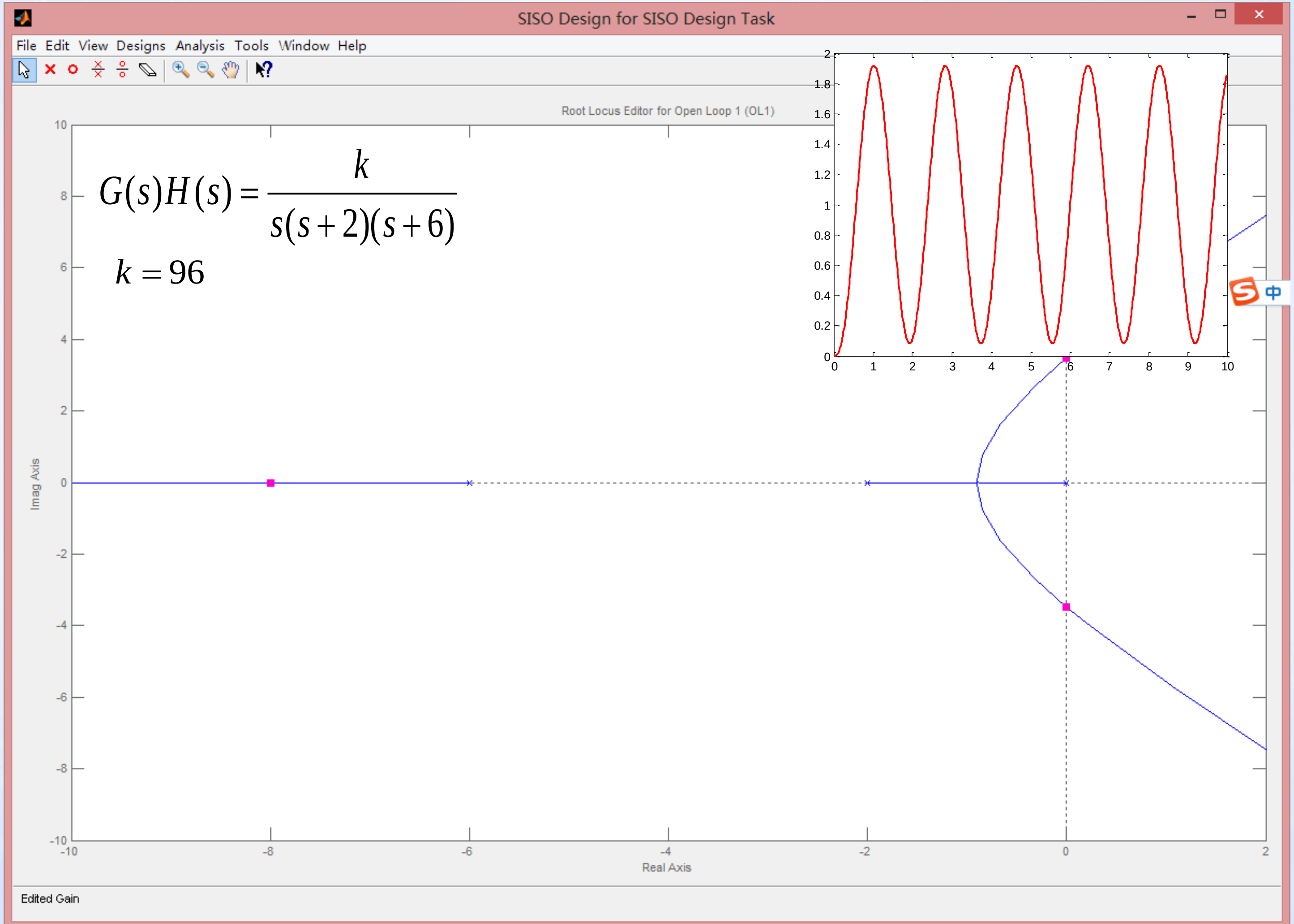
✓闭环特征根在**虚轴上**则**临界振荡（无阻尼）**；

✓一组闭环特征根如果有在右半平面的不稳定值，则呈现不稳定特性；如果没有在右半平面的根，但是有在虚轴上的根，则呈现临界振荡特性。



$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+6)}$$

$$k=193$$

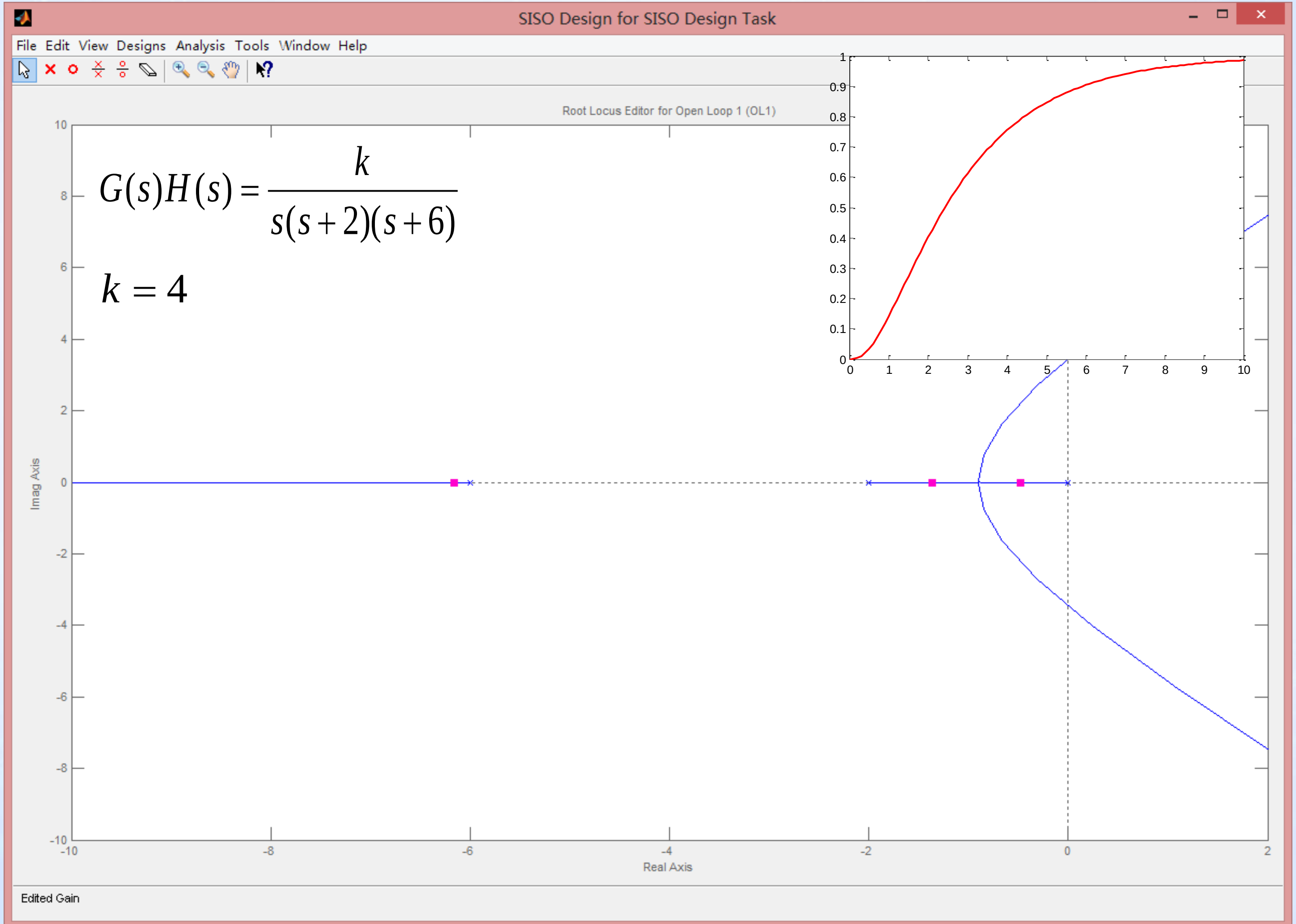

SISO Design for SISO Design Task
File Edit View Designs Analysis Tools Window Help
Root Locus Editor for Open Loop 1 (OL1)
$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+6)}$
$k=96$
Imag Axis
Real Axis
Edited Gain

根轨迹图分析

根据根轨迹图定性分析系统的动态特性

✓稳定的闭环特征根在**负实轴**上，为**过阻尼（非周期特性）**；

✓稳定的闭环特征根在**复平面（有虚部）**上则**欠阻尼（衰减振荡）**；



SISO Design for SISO Design Task
File Edit View Designs Analysis Tools Window Help
Root Locus Editor for Open Loop 1 (OL1)
$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+6)}$
$k=4$
Imag Axis
Real Axis
Edited Gain

根轨迹图分析

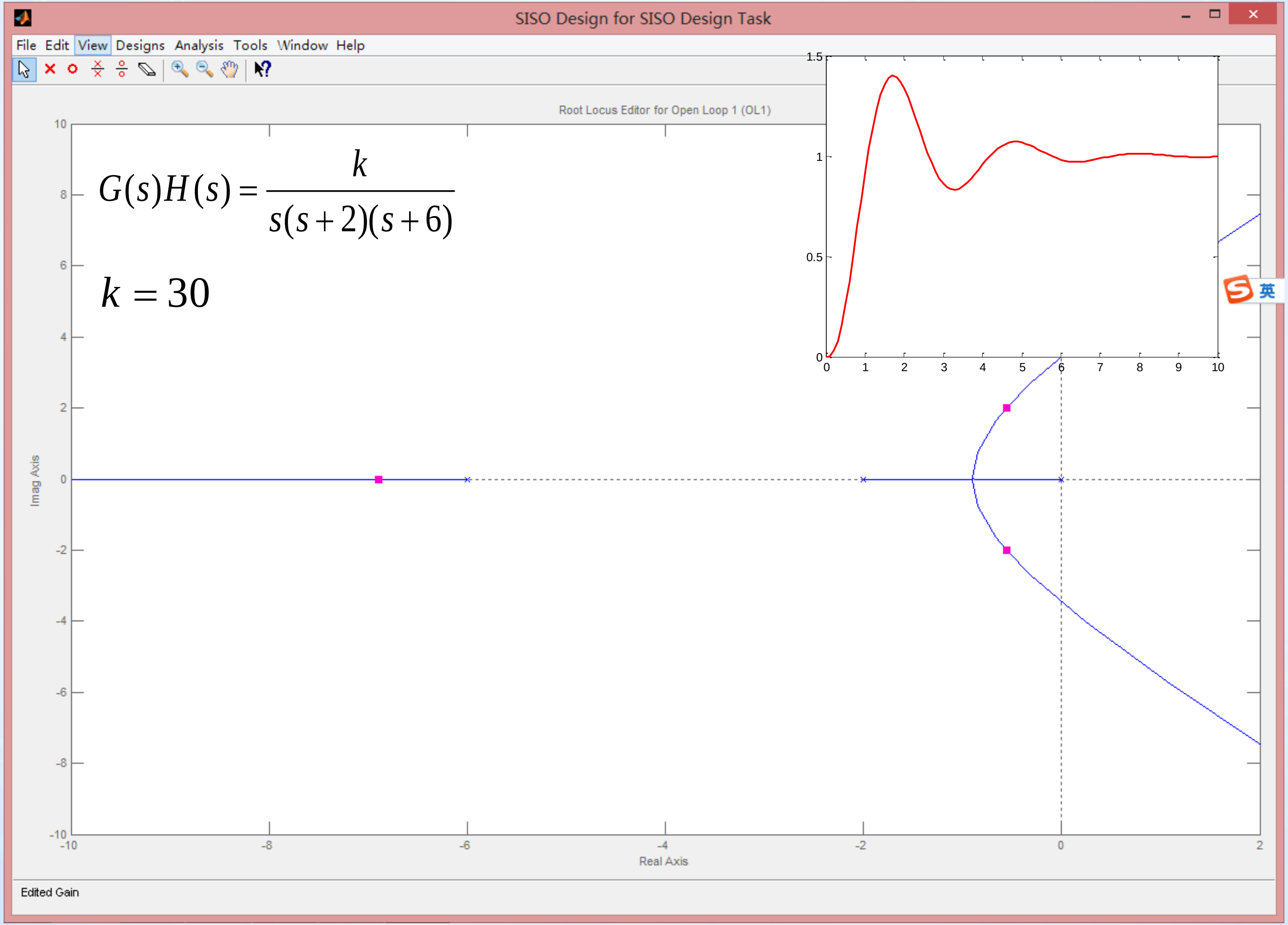
根据根轨迹图定性分析系统的动态特性

一组闭环特征根皆稳定——

✓如果有**主导极点**，按主导极点特性分析系统；

$$G(s)H(s)=\frac{k}{s(s+2)(s+6)}$$

$$k=30$$



根轨迹图分析

根据根轨迹图定性分析系统的动态特性

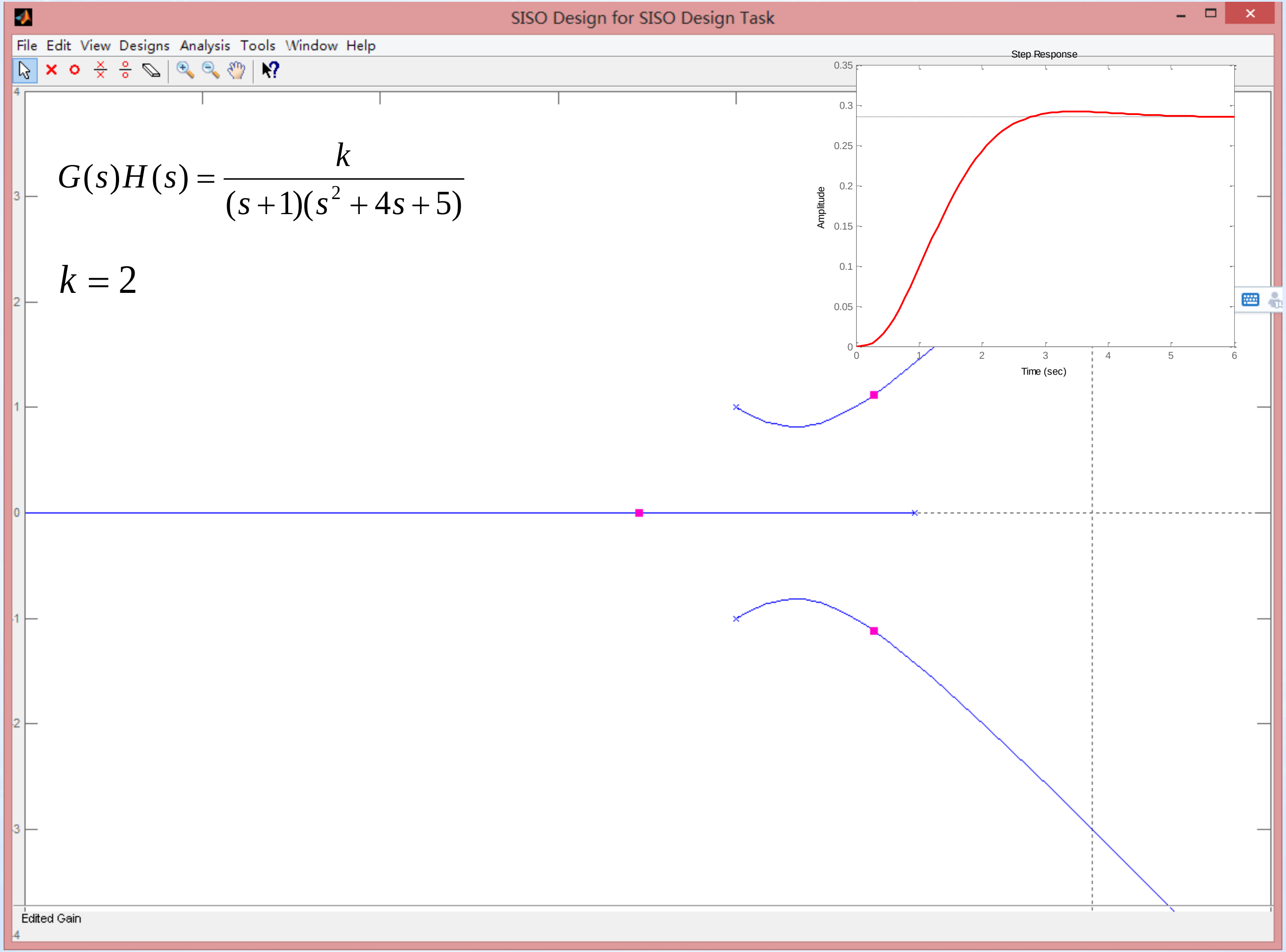
一组闭环特征根皆稳定——

✓如果有**主导极点**，按主导极点特性分析系统；

✓如果主导极点不明显，则可认为是若干个特征根特性的**总和**，即如果衰减振荡和非周期特性同时存在，可以定性认为呈衰减振荡趋势。

$$G(s)H(s)=\frac{k}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

$$k=2$$



根轨迹图分析

根据根轨迹图定量估算系统动态性能

✓根据确定的**主导极点**，定性估算系统的**动态性能**；

✓根据**动态性能**的要求，在根轨迹图上可以**确定主导极点**的位置，进而**确定**系统**相关参数**。

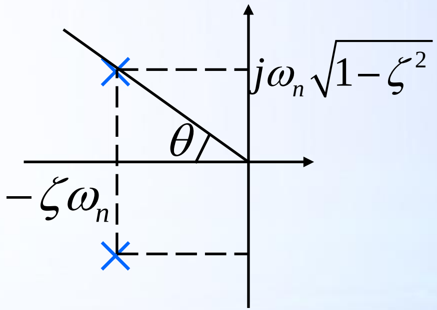
根轨迹图分析

根据根轨迹图定量估算系统动态性能

以二阶系统为例：**开环传递函数**为 $G_0(s)=\dfrac{\omega_n{}^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$

闭环传递函数为 $G(s)=\dfrac{\omega_n{}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n{}^2}$

欠阻尼时共轭**特征根**为 $s_{1,2}=-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



闭环极点的阻尼角 θ 为：

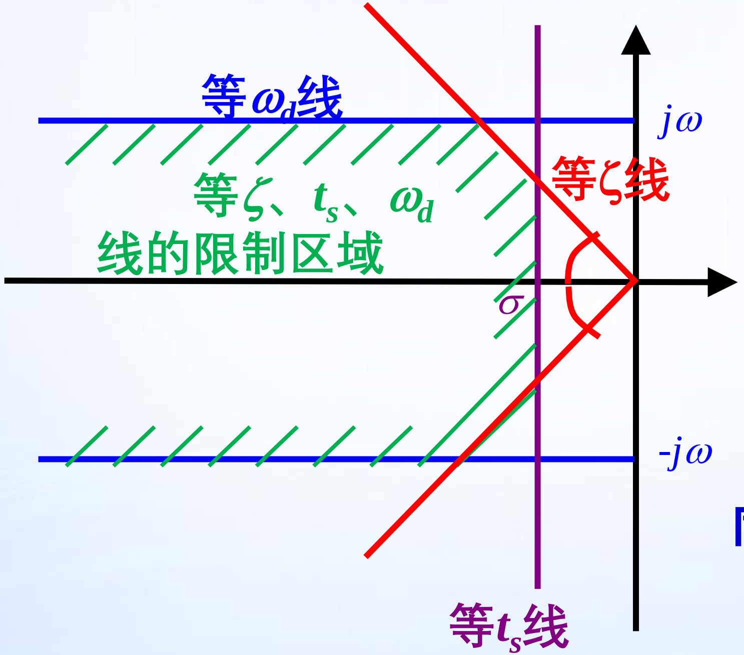
$$\cos\theta=\frac{\zeta\omega_n}{\sqrt{(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2+(\zeta\omega_n)^2}}=\zeta, \therefore \theta=\cos^{-1}\zeta$$

θ称为阻尼角。斜线称为等阻尼线。而根据二阶系统性能，在等阻尼线上，系统的超调量、衰减率也是相等的。

根轨迹图分析

根据根轨迹图定量估算系统动态性能

同理对于二阶系统相同调整时间ts、振荡周期ωd分别对应于根平面上垂直于实轴和平行于实轴的线。



$$\sigma_p\% = e^{-\pi ctg\theta}$$

$$t_s = \frac{3\text{ or }4}{\sigma}$$

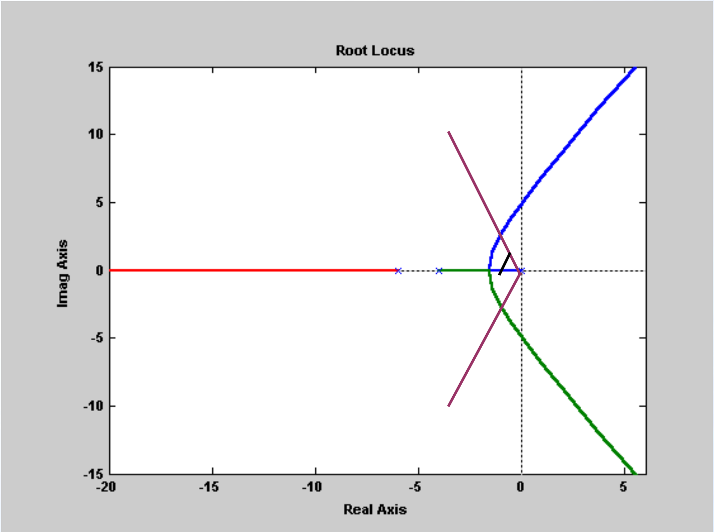
$$\omega_d = \omega$$

同样可适用于具有主导极点的高阶系统

根轨迹图分析

☛例：单位反馈系统的开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{k}{s(s+4)(s+6)}$ 若要求闭环单位阶跃响应的最大超调量 $\sigma_p\% \le 20\%$，试确定 k。

解：首先画出根轨迹如右。



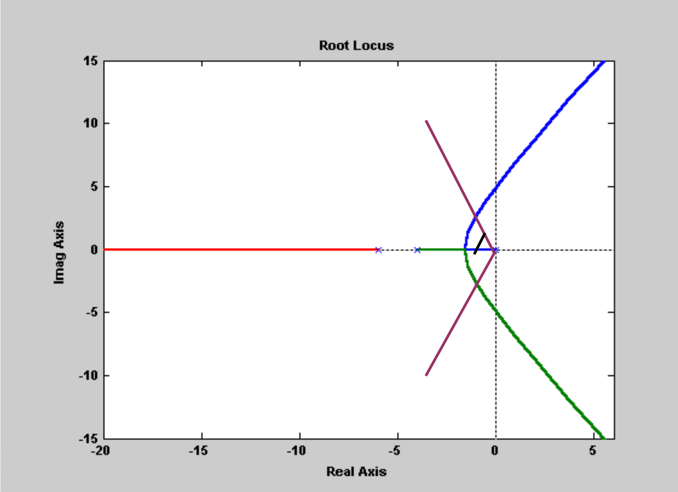
由图可以看出：根轨迹与虚轴的交点为+j5,-j5，这时的临界增益 $k_s = 240$,当 $k>240$ 时，闭环系统不稳定。

根轨迹图分析

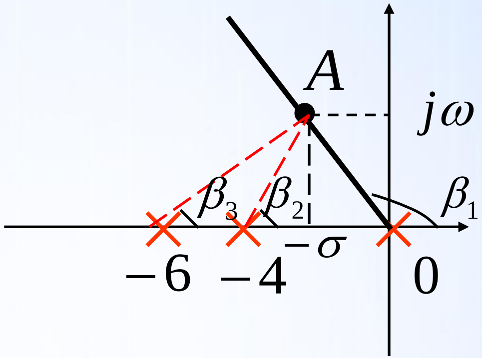
由$\sigma_p\% = e^{-\pi \cot^{-1}\theta} \times 100\%$，当 $\sigma_p\% \le 20\%$ 时近似取解得阻尼比：$\zeta \ge 0.5$

则阻尼角 $\theta \le \dfrac{\pi}{3}$

在根轨迹图上过原点，在第二和第三象限画两条与实轴夹角为 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 的直线，与根轨迹交与A、B两点。则A、B两点就是闭环共轭主导极点，这时系统的超调量≤16.3%。



根轨迹图分析



设A点坐标为：$-\sigma + j\omega$

则：$\dfrac{\omega}{\sigma} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (1)

由相角条件：$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$

$$\frac{2\pi}{3} + \tan^{-1}\frac{\omega}{4-\sigma} + \tan^{-1}\frac{\omega}{6-\sigma} = \pi \quad (2)$$

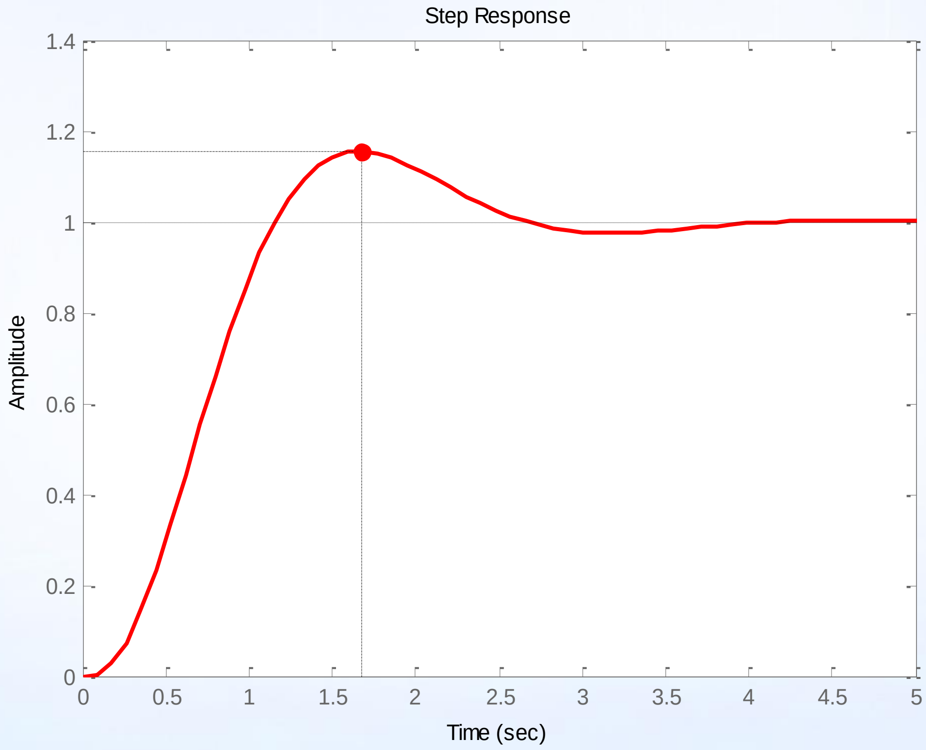
由(1)，(2)式解得：$\sigma = 1.2, \omega = 2.1$ 共轭主导极为：$s_{1,2} = -1.2 \pm j2.1$。

计算对应的根轨迹增益。由幅值条件：$\left|\dfrac{k}{s(s+4)(s+6)}\right|_{s=-1.2+j2.1} = 1$

解得：$k \approx 44$

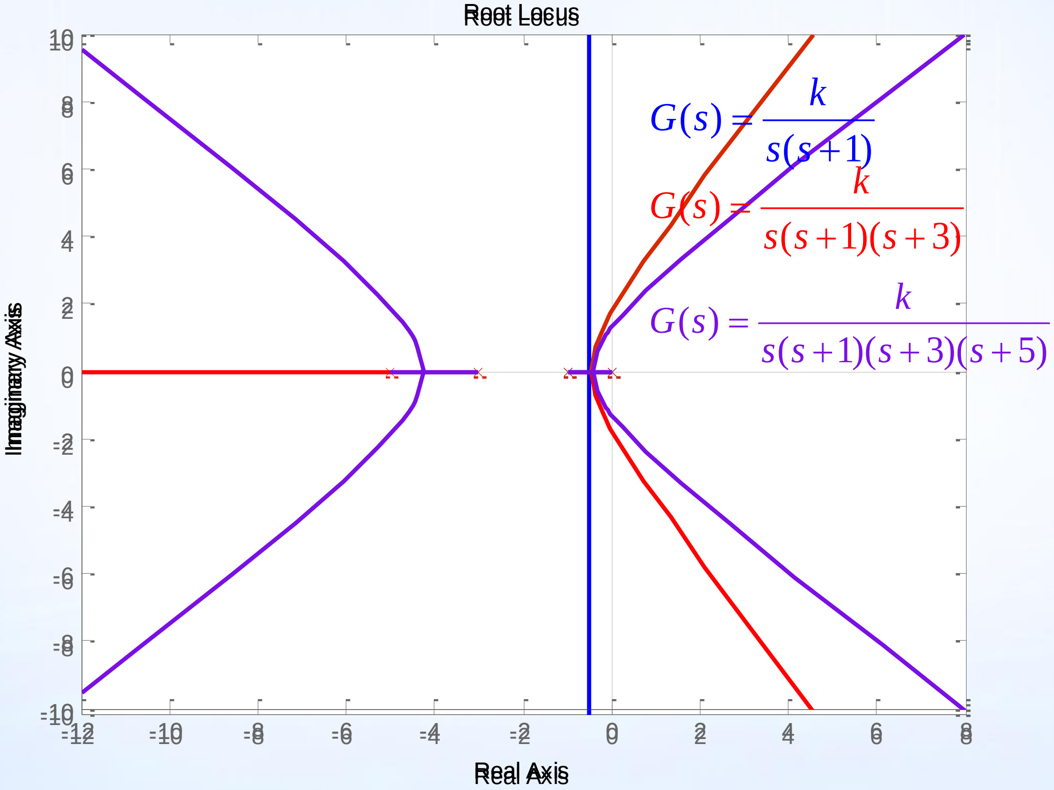
由于闭环极点之和等于开环极点之和，所以另一个闭环极点为：$-s_3 = -7.6$

闭环单位阶跃响应

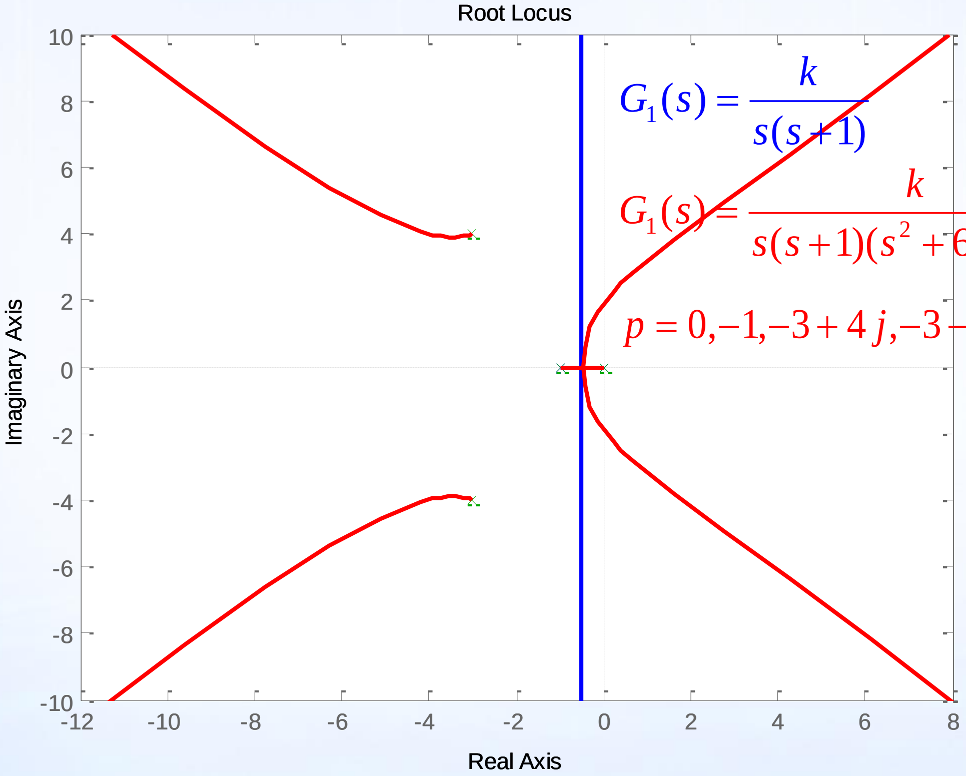


Step Response
Amplitude
Time (sec)
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5

开环零极点对根轨迹的影响



开环零极点对根轨迹的影响



$$G_1(s)=\frac{k}{s(s+1)}$$

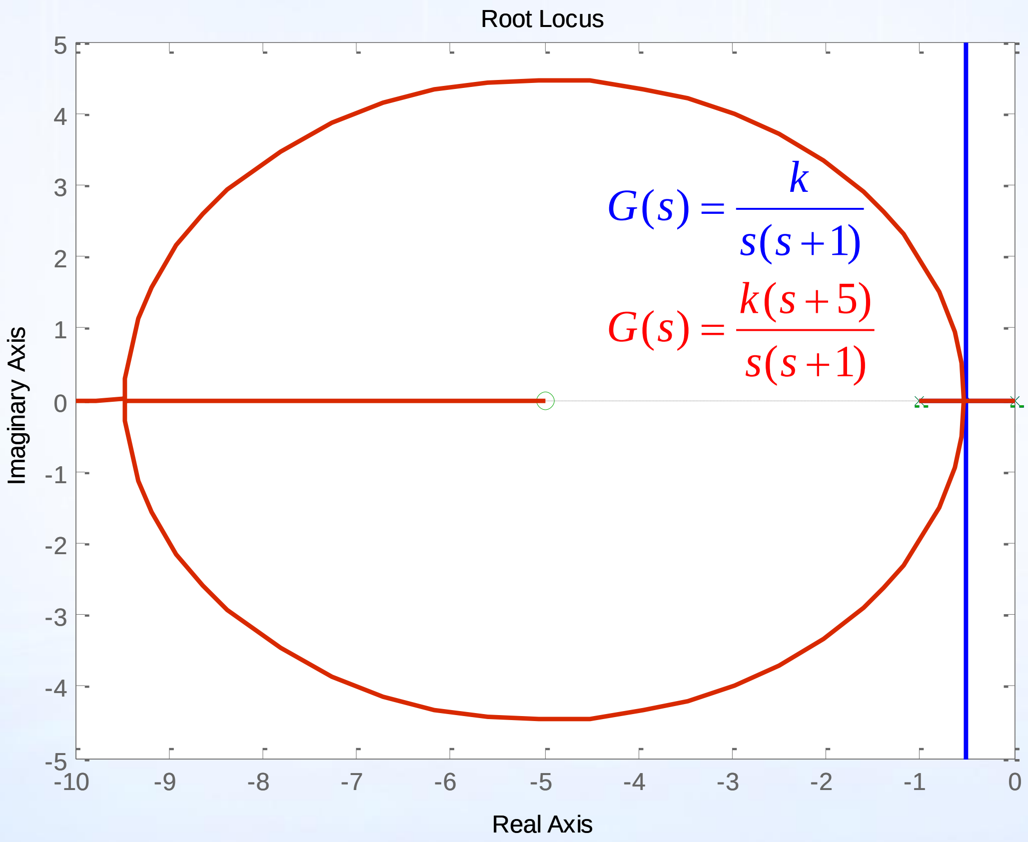
$$G_1(s)=\frac{k}{s(s+1)(s^2+6s+25)}$$

$$p=0,-1,-3+4j,-3-4j$$

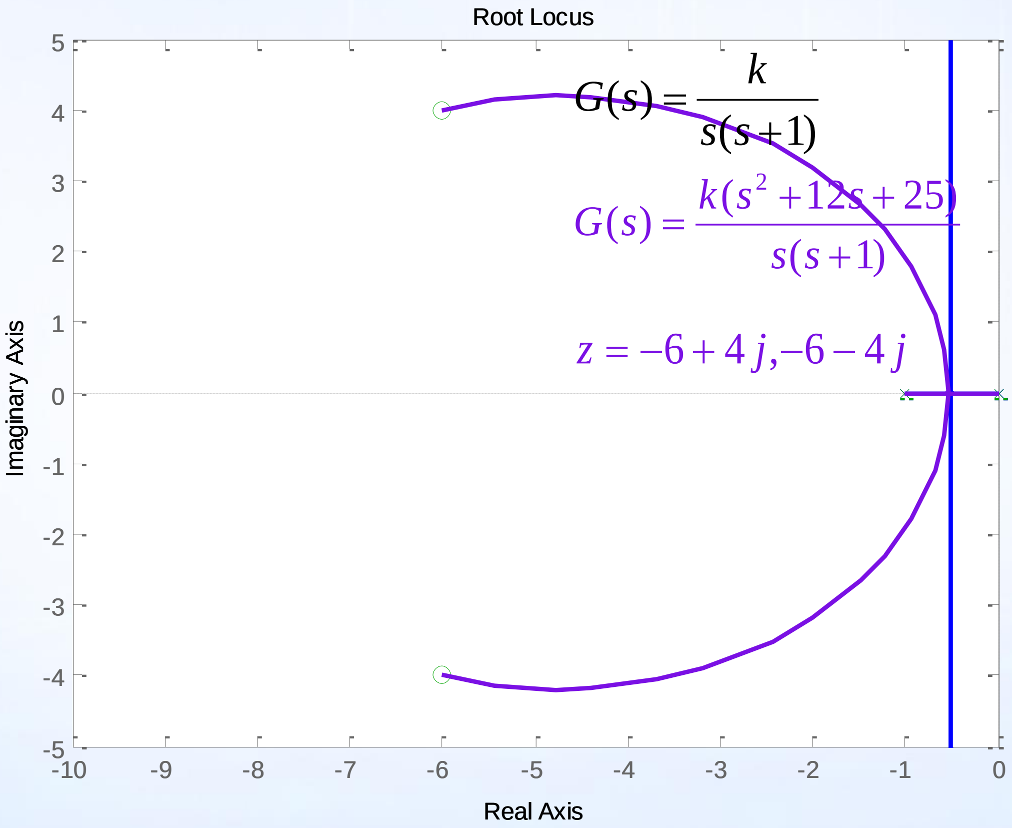
开环零极点对根轨迹的影响

- **增加开环极点：**
  - **增加**的**极点**将对原根轨迹产生**排斥**作用，使原根轨迹向**背离**所增极点的方向变形。
  - 增加在**左**半平面的**极点**会使根轨迹的渐近线向右平移，使根轨迹**向右倾斜**，**越靠近原点**的极点，向右倾斜趋势**越明显**。

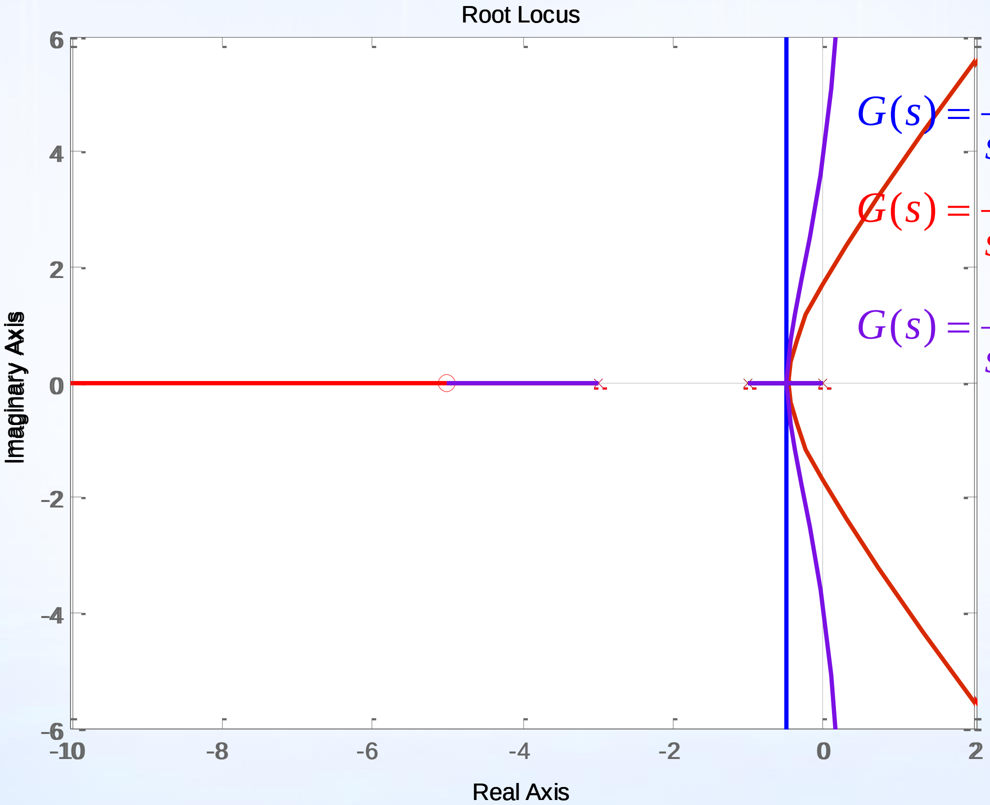
开环零极点对根轨迹的影响



开环零极点对根轨迹的影响



开环零极点对根轨迹的影响



$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)}$$

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+3)}$$

$$G(s)=\frac{k(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$$

开环零极点对根轨迹的影响

- **增加开环零点**：
  - **增加**的**零点**将对原根轨迹产生**吸引**作用，使原根轨迹变形。
  - 增加在**左**半平面的**零点**，会使根轨迹渐近线向左平移，使根轨迹**向左倾斜**，**越靠近原点**的零点，向左倾斜趋势**越明显**。