概率论与数理统计A复习题

一. 选择填空

1. P（A）$=0.6$, $P(A-B)=0.2$,则P（$B|A$）$=$_____

   A.1/3； B. 2/3； C. 3/4； D. 4/5.

   解 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-P(AB)=0.2$，所以$P(AB)=0.6-0.2=0.4$。

   $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.6}=\dfrac{2}{3}$. 所以选B

2. P（A）$=0.4$, P（$A\bigcup B$）$=0.9$, A与B互斥，则P（B）$=$_______

   A.0.2; B. 0.3; C.0.4; D. 0.5.

   解 因为A与B互斥，所以$P(AB)=0$。$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+P(B)-0$,

   结合$P(A\bigcup B)=0.9$, 所以$P(B)=0.5$

3. $P(A\bigcup B)=0.6$, $P(B)=0.2$且A与B相互独立，则P（AB）$=$_____

   A. 0.1; B.0.2; C.0.3; D.0.4.

   解
   $$\begin{aligned}P(A\bigcup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=P(A)+0.2-0.2P(A)\end{aligned}$$

   将$P(A\bigcup B)=0.6$代入上式，解出$P(A)=0.5$.结合$P(B)=0.2$，

   $P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times 0.2=0.1$,所以选A

4. 设A，B，C是三个随机事件。事件“A，B，C至少有两个发生”用A，B，C表示为_____

   A. $A\cup B\cup C$; B. $AB\cup BC\cup CA$; C. $A\cap B\cap C$; D. $AB\cap BC\cap CA$.

   解 选B

5. 设A，B，C是三个随机事件。事件“A，B，C都不发生”用A，B，C表示为__________

   A. $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$; B. $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$; C. $\bar{A}B\cup\bar{B}C\cup\bar{C}A$; D. $AB\cap BC\cap CA$.

   解 选B

6. 已知随机变量X在$[0,1]$上服从均匀分布, 则$E(2X)=$_______

   A. 1/2; B.1; C.2; D. 3.

   解 因为X在$[0,1]$上服从均匀分布，所以$E(X)=1/2$，则$E(2X)=2E(X)=2\times\dfrac{1}{2}=1$，即答案为B.

7. 设随机变量$X\sim B(n,p)$,且$E(X)=1.6, E(X^2)=3.84$,则$p=$____

   A. 0.6; B.0.5; C.0.3; D.0.2.

   解 由已知 $E(X)=np=1.6$。根据方差的性质$D(X)=np(1-p)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$，

   将$E(X)=1.6, E(X^2)=3.84$代入上式，$D(X)=np(1-p)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=3.84-1.6^2=1.28$，再将

np=1.6代入本式，得到1.6（1- p)=1.28，解出 $p=0.2$，因此选 D

8.如果随机变量 X 与 Y 不相关，则________成立。

A. X 与 Y 相互独立； B. $P(XY=0)=0$； C. $EXY=EX\cdot EY$； D. $EXY=0$.

解 由 X 与 Y 不相关的定义，即 $\rho_{XY}=0$，而相关系数 ρ_{XY} 的定义为

$\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{\mathrm{E}XY-\mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，结合 $\rho_{XY}=0$，所以 $EXY=EX\cdot EY$，即选 C。

9. 对任意两个随机变量X 和 Y，如果$\mathrm{E(XY)=E(X)E(Y)}$，则有（ ）

A. X与Y相互独立； B. X和Y不相关； C. $\mathrm{D(XY)=D(X)D(Y)}$； D. $\mathrm{D(XY)=0}$

解 参见上一题，如果$\mathrm{E(XY)=E(X)E(Y)}$，则 $\rho_{XY}=0$，因此随机变量 X 与 Y 不相关，即选 B。

10. 已知随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，且 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$_______.

A. 1; B.2; C.3; D.4.

解 根据数学期望的性质 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2$，结合条件 $E[(X-1)(X-2)]=1$，得到 $E(X^2)-3E(X)+2=1$，即 $E(X^2)-3E(X)+1=0$。由 $X\sim\pi(\lambda)$，得到 $E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$，而 $D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$，将 $E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$ 代入，得到 $E(X^2)=\lambda+\lambda^2$。将 $E(X^2)=\lambda+\lambda^2$ 和 $E(X)=\lambda$ 代入到 $E(X^2)-3E(X)+1=0$ 中，得到 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，解出 $\lambda=1$。因此选 A。

11. 已知随机变量 $X\sim N(3,16)$，$Y=2X-3$，则 Y 服从________.

A. N(3,16) ; B. N(3,64); C. N(3,55); D. N(6,64).

解 Y 也服从正态分布，且

$EY=E(2X-3)=2EX-3=2\times3-3=3$, $DY=D(2X-3)=2^2DX=4\times16=64$,

所以 Y~ N(3,64),即选 B。

二. 甲、乙、丙三台机床加工同样零件，其废品率分别为 0.03，0.02，0.01。现有一批零件共 180 个，甲、乙、丙机床分别加工 90 件、60 件和 30 件，在这批零件中任取一件，求它是合格品的概率.

解 任取一件是废品的概率 p=0.03×90/180+0.02×60/180+0.01×30/180=0.023,所以是合格品的概率为 1-0.023=0.997. 本题应用了全概率公式。

三. 一个保险公司把其产品购买者分为高、中、低收入三类，调查结果是这三类分别占总户数

的 10%、60%、30%，而家庭资产在一百万元以上的户数占三类中的比例为 100%、60%、5%，求：

(1) 任取一个产品购买者，其家庭资产在一百万元以上的概率.

(2) 一个家庭资产在一百万元以上的居民户属于高收入的概率.

解 设 A_1, A_2, A_3 依次表示任选一个购买者属于高、中、低收入，则

$$P(A_1)=10\%, P(A_2)=60\%, P(A_3)=30\%$$

设 B 表示任选一个购买者，其家庭资产在一百万以上，则

$$P(B|A_1)=100\%, P(B|A_2)=60\%, P(B|A_3)=5\%$$

任取一个产品购买者，其家庭资产在一百万元以上的概率为

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)\\&=10\%\times100\%+60\%\times60\%+30\%\times5\%\\&=0.475\end{aligned}$$

一个家庭资产在一百万元以上的居民户属于高收入的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{10\%\times100\%}{0.475}=0.21$$

四．已知随机变量 X与Y 的联合分布律为

X \ Y	-1	1	2
-1	a	0.5	0
1	0.1	b	0.2

已知 $E(X)=-0.2$，求(1) a，b 的值； (2) $P\{X+Y\le 2\}$； （3）$Z=XY$ 的分布律；

(4) 判断 X与Y 是否相互独立.

解 （1）由联合分布律中概率之和为 1 这个性质，$a+0.5+0+0.1+b+0.2=1$，则 $a+b=0.2$。

再由 $E(X)=-0.2$ 和 $E(X)=-1\times(a+0.5)+1\times(0.1+b+0.2)=b-a-0.3$，则 $b-a-0.2=-0.2$，

即 $b-a=0$。结合 $a+b=0.2$，解出 $a=0.1$，$b=0.1$

(2) $P\{X+Y\le 2\}=1-P\{X+Y>2\}=1-P\{X=1, Y=2\}=1-0.2=0.8$

（3）分布律为

Z	-2	-1	1	2
P	0	0.6	0.2	0.2

(4) 判断 X与Y 是否相互独立.

$P\{X=-1\}=0.6$，$P\{Y=-1\}=0.2$，$P\{X=-1, Y=-1\}=0.1\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\}$，所以不独立。

五．已知随机变量 X与Y 的联合分布律为

Y / X	-1	0	1
0	0.15	0.1	0.15
1	0.05	0.35	0.20

求：(1) X ,Y 各自的边缘分布律; (2) X与Y 的协方差和相关系数; (3) 用合适的理由判断 X与Y 是否相互独立.

解 （1）

X	0	1
p	0.4	0.6

Y	-1	0	1
p	0.2	0.45	0.35

（2）

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0\times(-1)\times 0.15+0\times 0\times 0.1+0\times 1\times 0.15 \\ &\quad +1\times(-1)\times 0.05+1\times 0\times 0.35+1\times 1\times 0.2 \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

$$E(X)=0\times 0.4+1\times 0.6=0.6,\qquad E(Y)=(-1)\times 0.2+0\times 0.45+1\times 0.35=0.15$$

协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y)=0.15\ -0.6\times 0.15=-0.075$

$$E(X^2)=0^2\times 0.4+1^2\times 0.6=0.6,\qquad E(Y^2)=(-1)^2\times 0.2+0^2\times 0.45+1^2\times 0.35=0.55$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.24,\qquad D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=0.5275$$

相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\ \sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.075}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.5275}}=\ -0.2108$$

(3)判断 X与Y 是否相互独立.

$P\{X=1\}=0.6$，$P\{Y=1\}=0.35$，$P\{X=1,\ Y=1\}=0.2\neq P\{X=1\}P\{Y=1\}=0.6\times 0.35=0.21$，

所以不独立。

六. 随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-x-2y} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求：（1） A 的值；（2） $P\{X+Y\le 1\}$；（3）边缘密度函数

解 （1）

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} Ae^{-x-2y}dxdy = A\int_0^{+\infty} e^{-x}dx\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = A\times\frac{1}{2} = 1$$，所以 A=2

（2）

$$P\{X+Y\le 1\}=2\int_0^1 e^{-x}dx\int_0^{1-x} e^{-2y}dy = 1-e^{-1}-e^{-2}$$

（3）边缘密度函数

$$f_X(x)=2\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-2y}dy = e^{-x},\quad x>0$$

$$f_X(x)=0,\quad x\le 0$$

$$f_Y(y)=2\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-2y}dx = 2e^{-2y},\quad y>0$$

$$f_Y(\mathrm{y})=0,\quad \mathrm{y}\le 0$$

七． 一批电子元件的合格率为 80%，任取 100 件，其中合格品数超过 90 件的概率为多少？试用中心极限定理求解。

解 设

$$X_{\mathrm{i}}=\begin{cases}1,\ \mathrm{i}\text{元件合格}\\0,\ \mathrm{i}\text{元件不合格}\end{cases}$$

$$P(X_{\mathrm{i}}=1)=0.8, P(X_{\mathrm{i}}=0)=0.2, E(X_{\mathrm{i}})=0.8, D(X_{\mathrm{i}})=0.2\times0.8=0.16$$

$$E\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{100}X_{\mathrm{i}}\right)=100\times0.8=80, D\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{100}X_{\mathrm{i}}\right)=100\times0.16=16$$

$$P\left\{\sum_{\mathrm{i}=1}^{100}X_{\mathrm{i}}>90\right\}=P\left\{\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{100}X_{\mathrm{i}}-80}{\sqrt{16}}>\frac{90-80}{\sqrt{16}}\right\}=P\left\{\frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{100}X_{\mathrm{i}}-80}{\sqrt{16}}>2.5\right\}=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062$$

八．设总体 X 的分布律为

X	0	1	2
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $0<\theta<1$,已知取得的样本观测值为 0,1,1,2,试求(1)参数 θ 的矩估计值;(2)极大似然估计值；（3）判断矩估计量是否为参数θ 的无偏估计量。

解：（1）$\mathrm{EX}=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times(1-\theta)^2=2-2\theta$

令 $2-2\theta=\bar{X}$, 则$\hat{\theta}=\frac{2-\bar{X}}{2}$, 计算$\bar{x}=1$,则 θ 的矩估计值$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$.

（2）$L(\theta)=\theta^2\times 2\theta(1-\theta)\times 2\theta(1-\theta)\times(1-\theta)^2=4\theta^4(1-\theta)^4$

$$\ln L(\theta)=\ln 4+4\ln\theta+4\ln(1-\theta)$$

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=4\frac{1}{\theta}-4\frac{1}{1-\theta}=0$$

解出$\hat{\theta}=\frac{1}{2}$

（3）θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{2-\bar{X}}{2}$, $E\hat{\theta}=E\left(\frac{2-\bar{X}}{2}\right)=1-\frac{1}{2}E(\bar{X})$

因为 $EX=2-2\theta$，所以$E(\bar{X})=2-2\theta$，$\hat{\theta}=1-\frac{1}{2}E(\bar{X})=1-\frac{1}{2}(2-2\theta)=\theta$

所以$\hat{\theta}=\frac{2-\bar{X}}{2}$是$\theta$的无偏估计量。

九．总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求参数 λ 的矩估计量和极大似然估计量。

解：$EX=\lambda=\bar{X}$，即 $\hat{\lambda}=\bar{X}$ 为矩估计量

$$L(\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}$$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum x_i$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=n\frac{1}{\lambda}-\sum x_i=0$$

所以最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum x_i}$

十．某车间生产的滚珠直径可以认为是服从正态分布，且方差是 0.06。从某天的产品中随机抽取 6 个，测得直径为（单位：毫米）

14.93　15.10　14.98　14.85　15.15　15.01

正常情况下，滚珠直径为 15 毫米，现通过假设检验方法来检验当天滚珠直径是否正常，（1）写出原假设和相应的拒绝域；（2）利用上述样本数据推断滚珠直径是否正常（$\alpha=0.05$）。（已知 $\Phi(1.96)=0.975$）

解：（1）原假设$H_0:\mu=15$, 拒绝域为$\left|\frac{\bar{X}-15}{\sqrt{\frac{0.06}{6}}}\right|\geq z_{0.025}$

（2）$\bar{x}=15.003$,则$\left|\frac{\bar{X}-15}{\sqrt{\frac{0.06}{6}}}\right|=0.03<z_{0.025}=1.96$，所以接受原假设，即推断滚珠直径正常。

十一．已知某种尼纶的纤度正常条件下服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，某次取 5 根测试，测得纤度为 1.32，1.55，1.36，1.40，1.44，需要检验这批尼纶纤度是否高于 1.50，（1）写出原假设和相应的拒绝域；（2）利用上述样本数据在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下推断原假设是否成立。$t_{0.05}(4)=2.1318$, $t_{0.05}(5)=2.015$

解：（1）原假设 $H_0:\mu \le 1.5$,　　拒绝域为$\frac{\overline{X}-1.5}{\frac{s}{\sqrt{5}}} \ge t_{0.05}(4)$

(2) $\bar{x}=1.414,\ s=0.0882$,则$\frac{\overline{X}-1.5}{\frac{s}{\sqrt{5}}}=-2.18<t_{0.05}(4)$，所以接受原假设，即认为尼纶纤度不高于 1.50.

十二．某商品价格 x 与销售量 y 的对应数据如下

y	13.1	12.2	12	11.5	11.2
x	2	2.5	3	3.5	4

假定 y 与 x 之间的经验公式为 $y=a+b\frac{1}{x}$, 试估计 a，b 的值，并估计当价格 $x=5$ 时的销售量值。

解：令$x^*=\frac{1}{x}$, 则

$$\hat{b}=\frac{\sum x_i^* y_i - n\overline{x^*}\bar{y}}{\sum (x_i^*)^2 - n\overline{x^*}^2}=8.79$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\overline{x^*}=8.89$$

$x=5$ 时, $\hat{y}=8.89+8.79\frac{1}{5}=10.65$