图论

常见概念

> oriented graph：有向图
>
> bidirectional edges：双向边

平面图：若能将无向图 $G=(V,E)$ 画在平面上使得任意两条无重合顶点的边不相交，则称 G 是平面图。

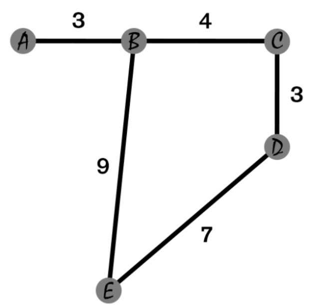
无向正权图上某一点的偏心距：记为 $ecc(u)=\max\left\{dist(u,v)\right\}$ ，即以这个点为源，到其他点的**所有最短路的最大值**。如下图 A 点，$ecc(A)$ 即为 12 。

图的直径：定义为 $d=\max\left\{ecc(u)\right\}$ ，即**最大的偏心距**，亦可以简化为图中最远的一对点的距离。

图的中心：定义为 $arg=\min\left\{ecc(u)\right\}$ ，即**偏心距最小的点**。如下图，图的中心即为 B 点。

图的绝对中心：可以定义在边上的图的中心。

图的半径：图的半径不同于圆的半径，其不等于直径的一半（但对于绝对中心定义上的直径而言是一半）。定义为 $r=\min\left\{ecc(u)\right\}$ ，即**中心的偏心距**。计算方式：使用全源最短路，计算出所有点的偏心距，再加以计算。



平面图性质

一、定义
$G=(V,E)$ 是一个无向图。

1. **图G可嵌入平面：** 如果可以把图G的所有结点和边都画在平面上，同时除断点外连线之间没有交点，就称图G可嵌入平面。画出的无边相交的G′称G的平面嵌入。
2. **可平面化：** 如果图G可以嵌入平面，就称图G可平面化。
3. **面：** G中边所包含的区域称作一个面。有界区域称为内部面，无界区域称为外部面，常记作R_0，包围面的长度最短的闭链称为该面的边界，面R的边界的长度称为该面的度数，记作 $\deg(R)$。
4. **面的度数计算：** 含有割边和桥的度数为2，其余为1。

二、性质

1. 性质 1. K_1,K_2,K_3,K_4,K_5-e 均为极大可平面图.
2. 性质 2. 极大平面图必是连通图.
3. 性质 3. 当图阶数 $n\geq 3$ 时, 有割点或者桥的平面图不是极大平面图.

三、定理

1. **定理 1：** 图G可嵌入球面当且仅当图G可嵌入平面。
2. **定理 2：** G中各面的度数之和等于图G边数的两倍。
   证明： 设e为图G的两个面的公共边，再计算两个面的度数时候边数各提供1，当e不是公共边时候，也就是e为桥或者割边时候提供度数为2。因此，面的度数之和为边的两倍。
3. **定理 3：** 设R是图G的某个平面嵌入的一个内部面，则存在图G的一个平面嵌入使R为外部面。
4. **定理 4：** 设图G是简单的可平面图，如果G中任意两个不相邻的结点加边后所得到的为非可平面图。则称G是极大可平面图，极大可平面图的任何平面嵌入都称为极大平面图。极大平面图必是连通图。
5. **定理 5：** 图G为n阶简单的连通的平面图，G为极大平面图当且仅当G的每一个面的度数为3。
   定理说明： 结点数大于等于3的极大平面图的任何面都是由三角形组成。
6. **定理 6：欧拉公式：** 设图G是有n个结点、m条边和r个面的连通平面图，则它们满足：
   $n - m + r = 2$

四、结论

1. **结论 1：** $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 - e$ (K_5任意删去一条边)均为极大可平面图，它们的任何平面嵌入都是极大平面图；当阶数等于3时候，有割边或桥的平面图不可能是极大平面图。
2. **结论 2：** 无向完全图K_5和无向完全二部图$K_{3,3}$都是极小非可平面图（去掉一条边就成为可平面图)。
3. **结论 3：** 一个图是可平面图，那么它的子图也是可平面图；一个图的子图是非可平面图，那么图本身也是非可平面图。
4. **结论 4：** 同一个图的平面嵌入中，外部面和内部面的度数可以不同。

五、推论

1. **推论 1：** 设图G是有n个结点、m条边的连通平面简单图，其中$n \geq 3$，则有：
   $m \leq 3n - 6$
   证明： 由图G的面度数之和为边数的二倍，即$2m$。又因为G是平面简单图每一个面的度数至少为3，则$2m \geq 3r$，由欧拉公式有：$m \leq 3n - 6$
2. **推论 2：** 设图G是有n个结点、m条边的连通平面简单图，其中$n \geq 3$且没有长度为3的圈，则有：
   $m \leq 2n - 4$
   证明： G没有长度为3的圈也就没有度为3的面，G的每一个面的度数至少为4。所以$2m \geq 4r$，由欧拉公式有：$m \leq 2n - 4$
   提示： 对于推论1和推论2我们可以用定理进行判定它不是平面图。
   例 1： 证明K_5和$K_{3,3}$是非平面图。
   证明：
   - 在K_5中，m应该小于等于$3n - 6$，即$m \leq 9$。而完全图K_5具有10条边。所以是非平面图。
   - 在$K_{3,3}$中，没有长度大于3的圈，根据推论2可知，$m \leq 2n - 4$，也就是$m \leq 8$，而$K_{3,3}$含有9条边，所以是非平面图。
3. **推论 3：** 设 G 是连通的平面图, 且每个面的度数至少为 $l(l \geq 3)$, 则
   $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$.
   证明： 同理，有$2m \geq r \times l$，根据欧拉公式化简得：
   $2m \geq l(m - n + 2)$
4. **推论 4：** 设 G 是平面图, 有 ω 个连通分支, n 个结点, m 条边, r 个面, 则公式
   $n - m + r = \omega + 1$
   成立.

5. **推论 5：** 设 G 是有 n 个结点、m 条边和 r 个面、ω 个连通分支的平面图, 且 G 的各个面的度数至少为 l, ($l \geq 4$), 则
   $m \leq \frac{(n-\omega-1)l}{l-2}$.
   证明： 证明过程与推论3类似，用到推论4的结论。
6. **推论 6：** 设 G 是任意平面简单图, 则 $\delta(G) \leq 5$.
   证明： 设 G 有 n 个顶点 m 条边. 若 $m \leq 6$, 结论显然成立; 若 $m > 6$, 假设 G 的每个顶点的度数 > 6, 则由推论 1, 有
   $6n \leq \sum d(v) = 2m \leq 2(3n-6) = 6n-12$
   与定理矛盾, 故 $\delta(G) \leq 5$.

六、判别定理

1. **极大平面图的判别定理：** $n(n \geq 3)$ 阶连通的简单平面图 G. 则以下四个条件等价:
   1. G 是极大平面图;
   2. G 中每个面的度数都是3;
   3. G 中有 m 条边 r 个面, 则
      $3r = 2m$;
   4. 设 G 带有 n 个顶点, m 条边, r 个面则
      $m = 3n-6$;

单源最短路径（SSSP问题）

（正权稀疏图）动态数组存图+Djikstra算法

使用优先队列优化，以 $\mathcal{O}(M \log N)$ 的复杂度计算。

```
vector<int> dis(n + 1, 1E18);
auto djikstra = [&](int s = 1) -> void {
    using PII = pair<int, int>;
    priority_queue<PII, vector<PII>, greater<PII>> q;
    q.emplace(0, s);
    dis[s] = 0;
    vector<int> vis(n + 1);
    while (!q.empty()) {
        int x = q.top().second;
        q.pop();
        if (vis[x]) continue;
        vis[x] = 1;
        for (auto [y, w] : ver[x]) {
            if (dis[y] > dis[x] + w) {
                dis[y] = dis[x] + w;
                q.emplace(dis[y], y);
            }
        }
    }
};
```

（负权图）Bellman ford 算法

使用结构体存边（该算法无需存图），以 $\mathcal{O}(NM)$ 的复杂度计算，注意，当所求点的路径上存在负环时，所求点的答案无法得到，但是会比 INF 小（因为负环之后到所求点之间的边权会将 `d[end]` 的值更新），该性质可以用于判断路径上是否存在负环：在 $N-1$ 轮后仍无法得到答案（一般与 $\texttt{INF}/2$ 进行比较）的点，到达其的路径上存在负环。

下方代码例题：求解从 1 到 n 号节点的、最多经过 k 条边的最短距离。

```
const int N = 550, M = 1e5 + 7;
int n, m, k;
struct node { int x, y, w; } ver[M];
int d[N], backup[N];

void bf() {
    memset(d, 0x3f, sizeof d); d[1] = 0;
    for (int i = 1; i <= k; ++ i) {
        memcpy(backup, d, sizeof d);
        for (int j = 1; j <= m; ++ j) {
            int x = ver[j].x, y = ver[j].y, w = ver[j].w;
            d[y] = min(d[y], backup[x] + w);
        }
    }
}
int main() {
    cin >> n >> m >> k;
    for (int i = 1; i <= m; ++ i) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        ver[i] = {x, y, w};
    }
    bf();
    for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
        if (d[i] > INF / 2) cout << "N" << endl;
        else cout << d[n] << endl;
    }
}
```

（负权图）SPFA 算法

以 $\mathcal{O}(KM)$ 的复杂度计算，其中 K 虽然为常数，但是可以通过特殊的构造退化成接近 N ，需要注意被卡。

```
const int N = 1e5 + 7, M = 1e6 + 7;
int n, m;
int ver[M], ne[M], h[N], edge[M], tot;
int d[N], v[N];

void add(int x, int y, int w) {
    ver[++ tot] = y, ne[tot] = h[x], h[x] = tot;
    edge[tot] = w;
}
void spfa() {
    ms(d, 0x3f); d[1] = 0;
    queue<int> q; q.push(1);
```

```
    v[1] = 1;
    while(!q.empty()) {
        int x = q.front(); q.pop(); v[x] = 0;
        for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
            int y = ver[i];
            if(d[y] > d[x] + edge[i]) {
                d[y] = d[x] + edge[i];
                if(v[y] == 0) q.push(y), v[y] = 1;
            }
        }
    }
}
int main() {
    cin >> n >> m;
    for (int i = 1; i <= m; ++ i) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        add(x, y, w);
    }
    spfa();
    for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
        if (d[i] == INF) cout << "N" << endl;
        else cout << d[n] << endl;
    }
}
```

（正权稠密图）邻接矩阵存图+Djikstra算法

很少使用，以 $\mathcal{O}(N^2)$ 的复杂度计算。

```
const int N = 3010;
int n, m, a[N][N];
int d[N], v[N];

void dji() {
    ms(d, 0x3f); d[1] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
        int x = 0;
        for (int j = 1; j <= n; ++ j) {
            if(v[j]) continue;
            if(x == 0 || d[x] > d[j]) x = j;
        }
        v[x] = 1;
        for (int j = 1; j <= n; ++ j) d[j] = min(d[j], d[x] + a[x][j]);
    }
}
int main() {
    cin >> n >> m;
    ms(a, 0x3f);
    for (int i = 1; i <= m; ++ i) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        a[x][y] = min(a[x][y], w); //注意需要考虑重边问题
        a[y][x] = min(a[y][x], w); //无向图建双向边
    }
```

```
    dji();
    for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
        if (d[i] == INF) cout << "N" << endl;
        else cout << d[n] << endl;
    }
}
```

多源汇最短路（APSP问题）

使用邻接矩阵存图，可以处理负权边，以 $\mathcal{O}(N^3)$ 的复杂度计算。**注意，这里建立的是单向边，计算双向边需要额外加边**。

```
const int N = 210;
int n, m, d[N][N];

void floyd() {
    for (int k = 1; k <= n; k ++)
        for (int i = 1; i <= n; i ++)
            for (int j = 1; j <= n; j ++)
                d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);
}
int main() {
    cin >> n >> m;
    for (int i = 1; i <= n; i ++)
        for (int j = 1; j <= n; j ++)
            if (i == j) d[i][j] = 0;
            else d[i][j] = INF;
    while (m --) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        d[x][y] = min(d[x][y], w);
    }
    floyd();
    for (int i = 1; i <= n; ++ i) {
        for (int j = 1; j <= n; ++ j) {
            if (d[i][j] > INF / 2) cout << "N" << endl;
            else cout << d[i][j] << endl;
        }
    }
}
```

平面图最短路（对偶图）

对于矩阵图，建立对偶图的过程如下（注释部分为建立原图），其中数据的给出顺序依次为：各 $n(n+1)$ 个数字分别代表从左向右、从上向下、从右向左、从下向上的边。

```
for (int i = 1; i <= n + 1; i++) {
    for (int j = 1, w; j <= n; j++) {
        cin >> w;
        int pre = Hash(i - 1, j), now = Hash(i, j);
        if (i == 1) {
            add(s, now, w);
```

```
        } else if (i == n + 1) {
            add(pre, t, w);
        } else {
            add(pre, now, w);
        }
        // flow.add(Hash(i, j), Hash(i, j + 1), w);
    }
}
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1, w; j <= n + 1; j++) {
        cin >> w;
        int now = Hash(i, j), net = Hash(i, j - 1);
        if (j == 1) {
            add(now, t, w);
        } else if (j == n + 1) {
            add(s, net, w);
        } else {
            add(now, net, w);
        }
        // flow.add(Hash(i, j), Hash(i + 1, j), w);
    }
}
for (int i = 1; i <= n + 1; i++) {
    for (int j = 1, w; j <= n; j++) {
        cin >> w;
        int now = Hash(i, j), net = Hash(i - 1, j);
        if (i == 1) {
            add(now, s, w);
        } else if (i == n + 1) {
            add(t, net, w);
        } else {
            add(now, net, w);
        }
        // flow.add(Hash(i, j), Hash(i, j - 1), w);
    }
}
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1, w; j <= n + 1; j++) {
        cin >> w;
        int pre = Hash(i, j - 1), now = Hash(i, j);
        if (j == 1) {
            add(t, now, w);
        } else if (j == n + 1) {
            add(pre, s, w);
        } else {
            add(pre, now, w);
        }
        // flow.add(Hash(i, j), Hash(i - 1, j), w);
    }
}
```

最小生成树（MST问题）

（稀疏图）Prim算法

使用邻接矩阵存图，以 $\mathcal{O}(N^2+M)$ 的复杂度计算，思想与 `djikstra` 基本一致。

```
const int N = 550, INF = 0x3f3f3f3f;
int n, m, g[N][N];
int d[N], v[N];
int prim() {
    ms(d, 0x3f); //这里的d表示到“最小生成树集合”的距离
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < n; ++ i) { //遍历 n 轮
        int t = -1;
        for (int j = 1; j <= n; ++ j)
            if (v[j] == 0 && (t == -1 || d[j] < d[t])) //如果这个点不在集合内且当前距离集合最近
                t = j;
        v[t] = 1; //将t加入“最小生成树集合”
        if (i && d[t] == INF) return INF; //如果发现不连通，直接返回
        if (i) ans += d[t];
        for (int j = 1; j <= n; ++ j) d[j] = min(d[j], g[t][j]); //用t更新其他点到集合的距离
    }
    return ans;
}
int main() {
    ms(g, 0x3f); cin >> n >> m;
    while (m -- ) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        g[x][y] = g[y][x] = min(g[x][y], w);
    }
    int t = prim();
    if (t == INF) cout << "impossible" << endl;
    else cout << t << endl;
} //22.03.19已测试
```

（稠密图）Kruskal算法

平均时间复杂度为 $\mathcal{O}(M\log M)$ ，简化了并查集。

```
struct DSU {
    vector<int> fa;
    DSU(int n) : fa(n + 1) {
        iota(fa.begin(), fa.end(), 0);
    }
    int get(int x) {
        while (x != fa[x]) {
            x = fa[x] = fa[fa[x]];
        }
        return x;
    }
```

```
    bool merge(int x, int y) { // 设x是y的祖先
        x = get(x), y = get(y);
        if (x == y) return false;
        fa[y] = x;
        return true;
    }
    bool same(int x, int y) {
        return get(x) == get(y);
    }
};
struct Tree {
    using TII = tuple<int, int, int>;
    int n;
    priority_queue<TII, vector<TII>, greater<TII>> ver;

    Tree(int n) {
        this->n = n;
    }
    void add(int x, int y, int w) {
        ver.emplace(w, x, y); // 注意顺序
    }
    int kruskal() {
        DSU dsu(n);
        int ans = 0, cnt = 0;
        while (ver.size()) {
            auto [w, x, y] = ver.top();
            ver.pop();
            if (dsu.same(x, y)) continue;
            dsu.merge(x, y);
            ans += w;
            cnt++;
        }
        assert(cnt < n - 1); // 输入有误，建树失败
        return ans;
    }
};
```

缩点（Tarjan 算法）

（有向图）强连通分量缩点

强连通分量缩点后的图称为 SCC。以 $\mathcal{O}(N+M)$ 的复杂度完成上述全部操作。

> 性质：缩点后的图拥有拓扑序 $color_{cnt}, color_{cnt-1}, \ldots, 1$ ，可以不需再另跑一遍 `topsort` ；缩点后的图是一张有向无环图（`DAG` 、拓扑图）。

```
struct SCC {
    int n, now, cnt;
    vector<vector<int>> ver;
    vector<int> dfn, low, col, S;

    SCC(int n) : n(n), ver(n + 1), low(n + 1) {
        dfn.resize(n + 1, -1);
```

```
        col.resize(n + 1, -1);
        now = cnt = 0;
    }
    void add(int x, int y) {
        ver[x].push_back(y);
    }
    void tarjan(int x) {
        dfn[x] = low[x] = now++;
        S.push_back(x);
        for (auto y : ver[x]) {
            if (dfn[y] == -1) {
                tarjan(y);
                low[x] = min(low[x], low[y]);
            } else if (col[y] == -1) {
                low[x] = min(low[x], dfn[y]);
            }
        }
        if (dfn[x] == low[x]) {
            int pre;
            cnt++;
            do {
                pre = S.back();
                col[pre] = cnt;
                S.pop_back();
            } while (pre != x);
        }
    }
    auto work() { // [cnt 新图的顶点数量]
        for (int i = 1; i <= n; i++) { // 避免图不连通
            if (dfn[i] == -1) {
                tarjan(i);
            }
        }

        vector<int> siz(cnt + 1); // siz 每个 scc 中点的数量
        vector<vector<int>> adj(cnt + 1);
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            siz[col[i]]++;
            for (auto j : ver[i]) {
                int x = col[i], y = col[j];
                if (x != y) {
                    adj[x].push_back(y);
                }
            }
        }
        return {cnt, adj, col, siz};
    }
};
```

（无向图）割边缩点

割边缩点后的图称为边双连通图 (E-DCC)，该模板可以在 $\mathcal{O}(N+M)$ 复杂度内求解图中全部割边、划分边双（颜色相同的点位于同一个边双连通分量中）。

> 割边（桥）：将某边 e 删去后，原图分成两个以上不相连的子图，称 e 为图的割边。
>
> 边双连通：在一张连通的无向图中，对于两个点 u 和 v，删去任何一条边（只能删去一条）它们依旧连通，则称 u 和 v 边双连通。一个图如果不存在割边，则它是一个边双连通图。
>
> 性质补充：对于一个边双，删去任意边后依旧联通；对于边双中的任意两点，一定存在两条不相交的路径连接这两个点（路径上可以有公共点，但是没有公共边）。

```cpp
struct EDCC {
    int n, m, now, cnt;
    vector<vector<array<int, 2>>> ver;
    vector<int> dfn, low, col, S;
    set<array<int, 2>> bridge, direct; // 如果不需要，删除这一部分可以得到一些时间上的优化

    EDCC(int n) : n(n), low(n + 1), ver(n + 1), dfn(n + 1), col(n + 1) {
        m = now = cnt = 0;
    }
    void add(int x, int y) { // 和 scc 相比多了一条连边
        ver[x].push_back({y, m});
        ver[y].push_back({x, m++});
    }
    void tarjan(int x, int fa) {
        dfn[x] = low[x] = ++now;
        S.push_back(x);
        for (auto &[y, id] : ver[x]) {
            if (!dfn[y]) {
                direct.insert({x, y});
                tarjan(y, id);
                low[x] = min(low[x], low[y]);
                if (dfn[x] < low[y]) {
                    bridge.insert({x, y});
                }
            } else if (id != fa && dfn[y] < dfn[x]) {
                direct.insert({x, y});
                low[x] = min(low[x], dfn[y]);
            }
        }
        if (dfn[x] == low[x]) {
            int pre;
            cnt++;
            do {
                pre = S.back();
                col[pre] = cnt;
                S.pop_back();
            } while (pre != x);
        }
    }
    auto work() {
        for (int i = 1; i <= n; i++) { // 避免图不连通
```

```
            if (!dfn[i]) {
                tarjan(i, 0);
            }
        }
        /**
         * @param cnt 新图的顶点数量, adj 新图, col 旧图节点对应的新图节点
         * @param siz 旧图每一个边双中点的数量
         * @param bridge 全部割边, direct 非割边定向
         */
        vector<int> siz(cnt + 1);
        vector<vector<int>> adj(cnt + 1);
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            siz[col[i]]++;
            for (auto &[j, id] : ver[i]) {
                int x = col[i], y = col[j];
                if (x != y) {
                    adj[x].push_back(y);
                }
            }
        }
        return tuple{cnt, adj, col, siz};
    }
};
```

（无向图）割点缩点

割点缩点后的图称为点双连通图 (V-DCC)，该模板可以在 $\mathcal{O}(N+M)$ 复杂度内求解图中全部割点、划分点双（颜色相同的点位于同一个点双连通分量中）。

> 割点（割顶）：将与某点 i 连接的所有边删去后，原图分成两个以上不相连的子图，称 i 为图的割点。
>
> 点双连通：在一张连通的无向图中，对于两个点 u 和 v，删去任何一个点（只能删去一个，且不能删 u 和 v自己）它们依旧连通，则称 u 和 v 边双连通。如果一个图不存在割点，那么它是一个点双连通图。
>
> 性质补充：每一个割点至少属于两个点双。

```
struct V_DCC {
    int n;
    vector<vector<int>> ver, col;
    vector<int> dfn, low, S;
    int now, cnt;
    vector<bool> point; // 记录是否为割点

    V_DCC(int n) : n(n) {
        ver.resize(n + 1);
        dfn.resize(n + 1);
        low.resize(n + 1);
        col.resize(2 * n + 1);
        point.resize(n + 1);
        S.clear();
        cnt = now = 0;
    }
    void add(int x, int y) {
```

```
        if (x == y) return; // 手动去除重边
        ver[x].push_back(y);
        ver[y].push_back(x);
    }
    void tarjan(int x, int root) {
        low[x] = dfn[x] = ++now;
        S.push_back(x);
        if (x == root && !ver[x].size()) { // 特判孤立点
            ++cnt;
            col[cnt].push_back(x);
            return;
        }

        int flag = 0;
        for (auto y : ver[x]) {
            if (!dfn[y]) {
                tarjan(y, root);
                low[x] = min(low[x], low[y]);
                if (dfn[x] <= low[y]) {
                    flag++;
                    if (x != root || flag > 1) {
                        point[x] = true; // 标记为割点
                    }
                    int pre = 0;
                    cnt++;
                    do {
                        pre = S.back();
                        col[cnt].push_back(pre);
                        S.pop_back();
                    } while (pre != y);
                    col[cnt].push_back(x);
                }
            } else {
                low[x] = min(low[x], dfn[y]);
            }
        }
    }
    pair<int, vector<vector<int>>> rebuild() { // [新图的顶点数量, 新图]
        work();
        vector<vector<int>> adj(cnt + 1);
        for (int i = 1; i <= cnt; i++) {
            if (!col[i].size()) { // 注意，孤立点也是 V-DCC
                continue;
            }
            for (auto j : col[i]) {
                if (point[j]) { // 如果 j 是割点
                    adj[i].push_back(point[j]);
                    adj[point[j]].push_back(i);
                }
            }
        }
        return {cnt, adj};
    }
```

```cpp
    void work() {
        for (int i = 1; i <= n; ++i) { // 避免图不连通
            if (!dfn[i]) {
                tarjan(i, i);
            }
        }
    }
};
```

染色法判定二分图 (dfs算法)

判断一张图能否被二分染色。

```cpp
vector<int> vis(n + 1);
auto dfs = [&](auto self, int x, int type) -> void {
    vis[x] = type;
    for (auto y : ver[x]) {
        if (vis[y] == type) {
            cout << "NO\n";
            exit(0);
        }
        if (vis[y]) continue;
        self(self, y, 3 - type);
    }
};
for (int i = 1; i <= n; ++i) {
    if (vis[i]) {
        dfs(dfs, i, 1);
    }
}
cout << "Yes\n";
```

链式前向星建图与搜索

很少使用这种建图法。`dfs`：标准复杂度为 $\mathcal{O}(N+M)$。节点子节点的数量包含它自己（至少为 1），深度从 0 开始（根节点深度为 0）。`bfs`：深度从 1 开始（根节点深度为 1）。`topsort`：有向无环图（包括非联通）才拥有完整的拓扑序列（故该算法也可用于判断图中是否存在环）。每次找到入度为 0 的点并将其放入待查找队列。

```cpp
namespace Graph {
    const int N = 1e5 + 7;
    const int M = 1e6 + 7;
    int tot, h[N], ver[M], ne[M];
    int deg[N], vis[M];

    void clear(int n) {
        tot = 0; //多组样例清空
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            h[i] = 0;
            deg[i] = vis[i] = 0;
        }
    }
```

```
    void add(int x, int y) {
        ver[++tot] = y, ne[tot] = h[x], h[x] = tot;
        ++deg[y];
    }
    void dfs(int x) {
        a.push_back(x); // DFS序
        siz[x] = vis[x] = 1;
        for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
            int y = ver[i];
            if (vis[y]) continue;
            dis[y] = dis[x] + 1;
            dfs(y);
            siz[x] += siz[y];
        }
        a.push_back(x);
    }
    void bfs(int s) {
        queue<int> q;
        q.push(s);
        dis[s] = 1;
        while (!q.empty()) {
            int x = q.front();
            q.pop();
            for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
                int y = ver[i];
                if (dis[y]) continue;
                d[y] = d[x] + 1;
                q.push(y);
            }
        }
    }
    bool topsort() {
        queue<int> q;
        vector<int> ans;
        for (int i = 1; i <= n; ++i)
            if (deg[i] == 0) q.push(i);
        while (!q.empty()) {
            int x = q.front();
            q.pop();
            ans.push_back(x);
            for (int i = h[x]; i; i = ne[i]) {
                int y = ver[i];
                --deg[y];
                if (deg[y] == 0) q.push(y);
            }
        }
        return ans.size() == n; //判断是否存在拓扑排序
    }
} // namespace Graph
```

一般图最大匹配（带花树算法）

与二分图匹配的差别在于图中可能存在奇环，时间复杂度与边的数量无关，为 $\mathcal{O}(N^3)$ 。下方模板编号从 0 开始，例题为 UOJ #79. 一般图最大匹配 。

```
struct Graph {
    int n;
    vector<vector<int>> e;
    Graph(int n) : n(n), e(n) {}
    void add(int u, int v) {
        e[u].push_back(v);
        e[v].push_back(u);
    }
    pair<int, vector<int>> work() {
        vector<int> match(n, -1), vis(n), link(n), f(n), dep(n);
        auto find = [&](int u) {
            while (f[u] != u) u = f[u] = f[f[u]];
            return u;
        };
        auto lca = [&](int u, int v) {
            u = find(u), v = find(v);
            while (u != v) {
                if (dep[u] < dep[v]) swap(u, v);
                u = find(link[match[u]]);
            }
            return u;
        };
        queue<int> q;
        auto blossom = [&](int u, int v, int p) {
            while (find(u) != p) {
                link[u] = v;
                v = match[u];
                if (vis[v] == 0) {
                    vis[v] = 1;
                    q.push(v);
                }
                f[u] = f[v] = p;
                u = link[v];
            }
        };
        auto augment = [&](int u) {
            while (!q.empty()) q.pop();
            iota(f.begin(), f.end(), 0);
            fill(vis.begin(), vis.end(), -1);
            q.push(u);
            vis[u] = 1;
            dep[u] = 0;
            while (!q.empty()) {
                int u = q.front();
                q.pop();
                for (auto v : e[u]) {
                    if (vis[v] == -1) {
```

```
                        vis[v] = 0;
                        link[v] = u;
                        dep[v] = dep[u] + 1;
                        if (match[v] == -1) {
                            for (int x = v, y = u, temp; y != -1;
                                 x = temp, y = x == -1 ? -1 : link[x]) {
                                temp = match[y];
                                match[x] = y;
                                match[y] = x;
                            }
                            return;
                        }
                        vis[match[v]] = 1;
                        dep[match[v]] = dep[u] + 2;
                        q.push(match[v]);
                    } else if (vis[v] == 1 && find(v) != find(u)) {
                        int p = lca(u, v);
                        blossom(u, v, p);
                        blossom(v, u, p);
                    }
                }
            }
        };
        auto greedy = [&]() {
            for (int u = 0; u < n; ++u) {
                if (match[u] != -1) continue;
                for (auto v : e[u]) {
                    if (match[v] == -1) {
                        match[u] = v;
                        match[v] = u;
                        break;
                    }
                }
            }
        };
        greedy();
        for (int u = 0; u < n; u++) {
            if (match[u] == -1) {
                augment(u);
            }
        }
        int ans = 0;
        for (int u = 0; u < n; u++) {
            if (match[u] != -1) {
                ans++;
            }
        }
        return {ans / 2, match};
    }
};

signed main() {
    int n, m;
```

```
    cin >> n >> m;

    Graph graph(n);
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        graph.add(x - 1, y - 1);
    }
    auto [ans, match] = graph.work();
    cout << ans << endl;
    for (auto it : match) {
        cout << it + 1 << " ";
    }
}
```

一般图最大权匹配（带权带花树算法）

下方模板编号从 1 开始，复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$ 。

```
namespace Graph {
    const int N = 403 * 2; //两倍点数
    typedef int T; //权值大小
    const T inf = numeric_limits<int>::max() >> 1;
    struct Q { int u, v; T w; } e[N][N];
    T lab[N];
    int n, m = 0, id, h, t, lk[N], sl[N], st[N], f[N], b[N][N], s[N], ed[N], q[N];
    vector<int> p[N];
#define dvd(x) (lab[x.u] + lab[x.v] - e[x.u][x.v].w * 2)
#define FOR(i, b) for (int i = 1; i <= (int)(b); i++)
#define ALL(x) (x).begin(), (x).end()
#define ms(x, i) memset(x + 1, i, m * sizeof x[0])
    void upd(int u, int v) {
        if (!sl[v] || dvd(e[u][v]) < dvd(e[sl[v]][v])) {
            sl[v] = u;
        }
    }
    void ss(int v) {
        sl[v] = 0;
        FOR(u, n) {
            if (e[u][v].w > 0 && st[u] != v && !s[st[u]]) {
                upd(u, v);
            }
        }
    }
    void ins(int u) {
        if (u <= n) { q[++t] = u; }
        else {
            for (int v : p[u]) ins(v);
        }
    }
    void mdf(int u, int w) {
        st[u] = w;
```

```
        if (u > n) {
            for (int v : p[u]) mdf(v, w);
        }
    }
    int gr(int u, int v) {
        v = find(ALL(p[u]), v) - p[u].begin();
        if (v & 1) {
            reverse(1 + ALL(p[u]));
            return (int)p[u].size() - v;
        }
        return v;
    }
    void stm(int u, int v) {
        lk[u] = e[u][v].v;
        if (u <= n) return;
        Q w = e[u][v];
        int x = b[u][w.u], y = gr(u, x);
        for (int i = 0; i < y; i++) {
            stm(p[u][i], p[u][i ^ 1]);
        }
        stm(x, v);
        rotate(p[u].begin(), y + ALL(p[u]));
    }
    void aug(int u, int v) {
        int w = st[lk[u]];
        stm(u, v);
        if (!w) return;
        stm(w, st[f[w]]), aug(st[f[w]], w);
    }
    int lca(int u, int v) {
        for (++id; u | v; swap(u, v)) {
            if (!u) continue;
            if (ed[u] == id) return u;
            ed[u] = id;
            if (u = st[lk[u]]) u = st[f[u]];
        }
        return 0;
    }
    void add(int u, int a, int v) {
        int x = n + 1, i, j;
        while (x <= m && st[x]) ++x;
        if (x > m) ++m;
        lab[x] = s[x] = st[x] = 0;
        lk[x] = lk[a];
        p[x].clear();
        p[x].push_back(a);
        for (i = u; i != a; i = st[f[j]]) {
            p[x].push_back(i);
            p[x].push_back(j = st[lk[i]]);
            ins(j);
        }
        reverse(1 + ALL(p[x]));
        for (i = v; i != a; i = st[f[j]]) { // 复制，只需改循环
```

```
            p[x].push_back(i);
            p[x].push_back(j = st[lk[i]]);
            ins(j);
        }
        mdf(x, x);
        FOR(i, m) {
            e[x][i].w = e[i][x].w = 0;
        }
        memset(b[x] + 1, 0, n * sizeof b[0][0]);
        for (int u : p[x]) {
            FOR(v, m) {
                if (!e[x][v].w || dvd(e[u][v]) < dvd(e[x][v])) {
                    e[x][v] = e[u][v], e[v][x] = e[v][u];
                }
            }
            FOR(v, n) {
                if (b[u][v]) { b[x][v] = u; }
            }
        }
        ss(x);
    }
    void ex(int u) {
        for (int x : p[u]) mdf(x, x);
        int a = b[u][e[u][f[u]].u], r = gr(u, a);
        for (int i = 0; i < r; i += 2) {
            int x = p[u][i], y = p[u][i + 1];
            f[x] = e[y][x].u;
            s[x] = 1;
            s[y] = sl[x] = 0;
            ss(y), ins(y);
        }
        s[a] = 1, f[a] = f[u];
        for (int i = r + 1; i < p[u].size(); i++) {
            s[p[u][i]] = -1;
            ss(p[u][i]);
        }
        st[u] = 0;
    }
    bool on(const Q &e) {
        int u = st[e.u], v = st[e.v];
        if (s[v] == -1) {
            f[v] = e.u, s[v] = 1;
            int a = st[lk[v]];
            sl[v] = sl[a] = s[a] = 0;
            ins(a);
        } else if (!s[v]) {
            int a = lca(u, v);
            if (!a) {
                return aug(u, v), aug(v, u), 1;
            } else {
                add(u, a, v);
            }
        }
```

```
        return 0;
    }
    bool bfs() {
        ms(s, -1), ms(sl, 0);
        h = 1, t = 0;
        FOR(i, m) {
            if (st[i] == i && !lk[i]) {
                f[i] = s[i] = 0;
                ins(i);
            }
        }
        if (h > t) return 0;
        while (1) {
            while (h <= t) {
                int u = q[h++];
                if (s[st[u]] == 1) continue;
                FOR(v, n) {
                    if (e[u][v].w > 0 && st[u] != st[v]) {
                        if (dvd(e[u][v])) upd(u, st[v]);
                        else if (on(e[u][v])) return 1;
                    }
                }
            }
            T x = inf;
            for (int i = n + 1; i <= m; i++) {
                if (st[i] == i && s[i] == 1) {
                    x = min(x, lab[i] >> 1);
                }
            }
            FOR(i, m) {
                if (st[i] == i && sl[i] && s[i] != 1) {
                    x = min(x, dvd(e[sl[i]][i]) >> s[i] + 1);
                }
            }
            FOR(i, n) {
                if (~s[st[i]]) {
                    if ((lab[i] += (s[st[i]] * 2 - 1) * x) <= 0) return 0;
                }
            }
            for (int i = n + 1; i <= m; i++) {
                if (st[i] == i && ~s[st[i]]) {
                    lab[i] += (2 - s[st[i]] * 4) * x;
                }
            }
            h = 1, t = 0;
            FOR(i, m) {
                if (st[i] == i && sl[i] && st[sl[i]] != i && !dvd(e[sl[i]][i]) && on(e[sl[i]][i])) {
                    return 1;
                }
            }
            for (int i = n + 1; i <= m; i++) {
                if (st[i] == i && s[i] == 1 && !lab[i]) ex(i);
```

```
                }
            }
            return 0;
        }
        template<typename TT> i64 work(int N, const vector<tuple<int, int, TT>> &edges) {
            ms(ed, 0), ms(lk, 0);
            n = m = N; id = 0;
            iota(st + 1, st + n + 1, 1);
            T wm = 0; i64 r = 0;
            FOR(i, n) FOR(j, n) {
                e[i][j] = {i, j, 0};
            }
            for (auto [u, v, w] : edges) {
                wm = max(wm, e[v][u].w = e[u][v].w = max(e[u][v].w, (T)w));
            }
            FOR(i, n) { p[i].clear(); }
            FOR(i, n) FOR(j, n) {
                b[i][j] = i * (i == j);
            }
            fill_n(lab + 1, n, wm);
            while (bfs()) {};
            FOR(i, n) if (lk[i]) {
                r += e[i][lk[i]].w;
            }
            return r / 2;
        }
        auto match() {
            vector<array<int, 2>> ans;
            FOR(i, n) if (lk[i]) {
                ans.push_back({i, lk[i]});
            }
            return ans;
        }
} // namespace Graph
using Graph::work, Graph::match;

signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<tuple<int, int, i64>> ver(m);
    for (auto &[u, v, w] : ver) {
        cin >> u >> v >> w;
    }
    cout << work(n, ver) << "\n";
    auto ans = match();
}
```

二分图最大匹配

> 二分图：一个图能被分为左右两部分，任何一条边的两个端点都不在同一部分中。
>
> 匹配（独立边集）：一个边的集合，这些边没有公共顶点。
>
> 二分图最大匹配即找到边的数量最多的那个匹配。
>
> 一般我们规定，左半部包含 n_1 个点（编号 $1-n_1$），右半部包含 n_2 个点（编号 $1-n_2$ ），保证任意一条边的两个端点都不可能在同一部分中。

匈牙利算法（KM算法）解

$\mathcal{O}(NM)$ 。

```
signed main() {
    int n1, n2, m;
    cin >> n1 >> n2 >> m;

    vector<vector<int>> ver(n1 + 1);
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        ver[x].push_back(y); //只需要建立单向边
    }

    int ans = 0;
    vector<int> match(n2 + 1);
    for (int i = 1; i <= n1; ++i) {
        vector<int> vis(n2 + 1);
        auto dfs = [&](auto self, int x) -> bool {
            for (auto y : ver[x]) {
                if (vis[y]) continue;
                vis[y] = 1;
                if (!match[y] || self(self, match[y])) {
                    match[y] = x;
                    return true;
                }
            }
            return false;
        };
        if (dfs(dfs, i)) {
            ans++;
        }
    }
    cout << ans << endl;
}
```

HopcroftKarp算法（基于最大流）解

该算法基于最大流，常数极小，且引入随机化，几乎卡不掉。最坏时间复杂度为 $\mathcal{O}(\sqrt{N}M)$ ，经测试，在 N, M 均为 2×10^5 的情况下能在 60ms 内跑完。

```
struct HopcroftKarp {
    int n, m;
    vector<array<int, 2>> ver;
    vector<int> l, r;

    HopcroftKarp(int n, int m) : n(n), m(m) { // 左右半部
        l.assign(n, -1);
        r.assign(m, -1);
    }
    void add(int x, int y) {
        x--, y--; // 这个板子是 0-idx 的
        ver.push_back({x, y});
    }
    int work() {
        vector<int> adj(ver.size());

        mt19937 rgen(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
        shuffle(ver.begin(), ver.end(), rgen); // 随机化防卡

        vector<int> deg(n + 1);
        for (auto &[u, v] : ver) {
            deg[u]++;
        }
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            deg[i] += deg[i - 1];
        }
        for (auto &[u, v] : ver) {
            adj[--deg[u]] = v;
        }

        int ans = 0;
        vector<int> a, p, q(n);
        while (true) {
            a.assign(n, -1), p.assign(n, -1);

            int t = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                if (l[i] == -1) {
                    q[t++] = a[i] = p[i] = i;
                }
            }

            bool match = false;
            for (int i = 0; i < t; i++) {
                int x = q[i];
                if (~l[a[x]]) continue;

                for (int j = deg[x]; j < deg[x + 1]; j++) {
```

```
                    int y = adj[j];
                    if (r[y] == -1) {
                        while (~y) {
                            r[y] = x;
                            swap(l[x], y);
                            x = p[x];
                        }
                        match = true;
                        ++ans;
                        break;
                    }
                    if (p[r[y]] == -1) {
                        q[t++] = y = r[y];
                        p[y] = x;
                        a[y] = a[x];
                    }
                }
            }
            if (!match) break;
        }
        return ans;
    }
    vector<array<int, 2>> answer() {
        vector<array<int, 2>> ans;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (~l[i]) {
                ans.push_back({i, l[i]});
            }
        }
        return ans;
    }
};

signed main() {
    int n1, n2, m;
    cin >> n1 >> n2 >> m;
    HopcroftKarp flow(n1, n2);
    while (m--) {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        flow.add(x, y);
    }

    cout << flow.work() << "\n";

    auto match = flow.answer();
    for (auto [u, v] : match) {
        cout << u << " " << v << "\n";
    }
}
```

二分图最大权匹配（二分图完美匹配）

> 定义：找到边权和最大的那个匹配。
>
> 一般我们规定，左半部包含 n_1 个点（编号 $1 - n_1$），右半部包含 n_2 个点（编号 $1 - n_2$）。

使用匈牙利算法（KM算法）解，时间复杂度为 $\mathcal{O}(N^3)$ 。下方模板用于求解最大权值、且可以输出其中一种可行方案，例题为 [UOJ #80. 二分图最大权匹配]。

```
struct MaxCostMatch {
    vector<int> ansl, ansr, pre;
    vector<int> lx, ly;
    vector<vector<int>> ver;
    int n;

    MaxCostMatch(int n) : n(n) {
        ver.resize(n + 1, vector<int>(n + 1));
        ansl.resize(n + 1, -1);
        ansr.resize(n + 1, -1);
        lx.resize(n + 1);
        ly.resize(n + 1, -1E18);
        pre.resize(n + 1);
    }
    void add(int x, int y, int w) {
        ver[x][y] = w;
    }
    void bfs(int x) {
        vector<bool> visl(n + 1), visr(n + 1);
        vector<int> slack(n + 1, 1E18);
        queue<int> q;
        function<bool(int)> check = [&](int x) {
            visr[x] = 1;
            if (~ansr[x]) {
                q.push(ansr[x]);
                visl[ansr[x]] = 1;
                return false;
            }
            while (~x) {
                ansr[x] = pre[x];
                swap(x, ansl[pre[x]]);
            }
            return true;
        };
        q.push(x);
        visl[x] = 1;
        while (1) {
            while (!q.empty()) {
                int x = q.front();
                q.pop();
                for (int y = 1; y <= n; ++y) {
                    if (visr[y]) continue;
                    int del = lx[x] + ly[y] - ver[x][y];
                    if (del < slack[y]) {
```

```
                        pre[y] = x;
                        slack[y] = del;
                        if (!slack[y] && check(y)) return;
                    }
                }
            }
            int val = 1E18;
            for (int i = 1; i <= n; ++i) {
                if (!visr[i]) {
                    val = min(val, slack[i]);
                }
            }
            for (int i = 1; i <= n; ++i) {
                if (visl[i]) lx[i] -= val;
                if (visr[i]) {
                    ly[i] += val;
                } else {
                    slack[i] -= val;
                }
            }
            for (int i = 1; i <= n; ++i) {
                if (!visr[i] && !slack[i] && check(i)) {
                    return;
                }
            }
        }
    }
    int work() {
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            for (int j = 1; j <= n; ++j) {
                ly[i] = max(ly[i], ver[j][i]);
            }
        }
        for (int i = 1; i <= n; ++i) bfs(i);
        int res = 0;
        for (int i = 1; i <= n; ++i) {
            res += ver[i][ansl[i]];
        }
        return res;
    }
    void getMatch(int x, int y) { // 获取方案 (0代表无匹配)
        for (int i = 1; i <= x; ++i) {
            cout << (ver[i][ansl[i]] ? ansl[i] : 0) << " ";
        }
        cout << endl;
        for (int i = 1; i <= y; ++i) {
            cout << (ver[i][ansr[i]] ? ansr[i] : 0) << " ";
        }
        cout << endl;
    }
};

signed main() {
```

```
    int n1, n2, m;
    cin >> n1 >> n2 >> m;

    MaxCostMatch match(max(n1, n2));
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y, w;
        cin >> x >> y >> w;
        match.add(x, y, w);
    }
    cout << match.work() << '\n';
    match.getMatch(n1, n2);
}
```

二分图最大独立点集（Konig 定理）

给出一张二分图，要求选择一些点使得它们两两没有边直接连接。最小点覆盖等价于最大匹配数，转换为最小割模板，答案即为总点数减去最大流得到的值。

```
cout << n - flow.work(s, t) << endl;
```

最长路（topsort+DP算法）

计算一张 `DAG` 中的最长路径，在执行前可能需要使用 `tarjan` 重构一张正确的 `DAG` ，复杂度 $\mathcal{O}(N+M)$ 。

```
struct DAG {
    int n;
    vector<vector<pair<int, int>>> ver;
    vector<int> deg, dis;
    DAG(int n) : n(n) {
        ver.resize(n + 1);
        deg.resize(n + 1);
        dis.assign(n + 1, -1E18);
    }
    void add(int x, int y, int w) {
        ver[x].push_back({y, w});
        ++deg[y];
    }
    int topsort(int s, int t) {
        queue<int> q;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            if (deg[i] == 0) {
                q.push(i);
            }
        }
        dis[s] = 0;
        while (!q.empty()) {
            int x = q.front();
            q.pop();
            for (auto [y, w] : ver[x]) {
                dis[y] = max(dis[y], dis[x] + w);
                --deg[y];
                if (deg[y] == 0) {
```

```
                    q.push(y);
                }
            }
        }
        return dis[t];
    }
};

signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    DAG dag(n);
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y, w;
        cin >> x >> y >> w;
        dag.add(x, y, w);
    }

    int s, t;
    cin >> s >> t;
    cout << dag.topsort(s, t) << "\n";
}
```

最短路径树（SPT问题）

> 定义：在一张无向带权联通图中，有这样一棵**生成树**：满足从根节点到任意点的路径都为原图中根到任意点的最短路径。
>
> 性质：记根节点 $Root$ 到某一结点 x 的最短距离 $dis_{Root,x}$ ，在 SPT 上这两点之间的距离为 $len_{Root,x}$ ——则两者长度相等。

该算法与最小生成树无关，基于最短路 `Djikstra` 算法完成（但多了个等于号）。下方代码实现的功能为：读入图后，输出以 1 为根的 SPT 所使用的各条边的编号、边权和。

```
map<pair<int, int>, int> id;
namespace G {
    vector<pair<int, int> > ver[N];
    map<pair<int, int>, int> edge;
    int v[N], d[N], pre[N], vis[N];
    int ans = 0;

    void add(int x, int y, int w) {
        ver[x].push_back({y, w});
        edge[{x, y}] = edge[{y, x}] = w;
    }
    void djikstra(int s) { // ！注意，该 djikstra 并非原版，多加了一个等于号
        priority_queue<PII, vector<PII>, greater<PII> > q; q.push({0, s});
        memset(d, 0x3f, sizeof d); d[s] = 0;
        while (!q.empty()) {
            int x = q.top().second; q.pop();
            if (v[x]) continue; v[x] = 1;
            for (auto [y, w] : ver[x]) {
                if (d[y] >= d[x] + w) { // ！注意，SPT 这里修改为>=号
```

```
                    d[y] = d[x] + w;
                    pre[y] = x; // 记录前驱结点
                    q.push({d[y], y});
                }
            }
        }
    }
    void dfs(int x) {
        vis[x] = 1;
        for (auto [y, w] : ver[x]) {
            if (vis[y]) continue;
            if (pre[y] == x) {
                cout << id[{x, y}] << " "; // 输出SPT所使用的边编号
                ans += edge[{x, y}];
                dfs(y);
            }
        }
    }
    void solve(int n) {
        djikstra(1); // 以 1 为根
        dfs(1); // 以 1 为根
        cout << endl << ans; // 输出SPT的边权和
    }
}
bool Solve() {
    int n, m; cin >> n >> m;
    for (int i = 1; i <= m; ++ i) {
        int x, y, w; cin >> x >> y >> w;
        G::add(x, y, w), G::add(y, x, w);
        id[{x, y}] = id[{y, x}] = i;
    }
    G::solve(n);
    return 0;
}
```

无源汇点的最小割问题 Stoer–Wagner

> 也称为全局最小割。定义补充（与《网络流》中的定义不同）：
>
> **割**：是一个边集，去掉其中所有边能使一张网络流图不再连通（即分成两个子图）。

通过**递归**的方式来解决**无向正权图**上的全局最小割问题，算法复杂度 $\mathcal{O}(VE + V^2 \log V)$ ，一般可近似看作 $\mathcal{O}(V^3)$ 。

```
signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;

    DSU dsu(n); // 这里引入DSU判断图是否联通，如题目有保证，则不需要此步骤
    vector<vector<int>> edge(n + 1, vector<int>(n + 1));
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y, w;
        cin >> x >> y >> w;
```

```cpp
            dsu.merge(x, y);
            edge[x][y] += w;
            edge[y][x] += w;
        }

    if (dsu.Poi(1) != n || m < n - 1) { // 图不联通
        cout << 0 << endl;
        return 0;
    }

    int MinCut = INF, S = 1, T = 1; // 虚拟源汇点
    vector<int> bin(n + 1);
    auto contract = [&]() -> int { // 求解S到T的最小割，定义为 cut of phase
        vector<int> dis(n + 1), vis(n + 1);
        int Min = 0;
        for (int i = 1; i <= n; i++) {
            int k = -1, maxc = -1;
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                if (!bin[j] && !vis[j] && dis[j] > maxc) {
                    k = j;
                    maxc = dis[j];
                }
            }
            if (k == -1) return Min;
            S = T, T = k, Min = maxc;
            vis[k] = 1;
            for (int j = 1; j <= n; j++) {
                if (!bin[j] && !vis[j]) {
                    dis[j] += edge[k][j];
                }
            }
        }
        return Min;
    };
    for (int i = 1; i < n; i++) { // 这里取不到等号
        int val = contract();
        bin[T] = 1;
        MinCut = min(MinCut, val);
        if (!MinCut) {
            cout << 0 << endl;
            return 0;
        }
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            if (!bin[j]) {
                edge[S][j] += edge[j][T];
                edge[j][S] += edge[j][T];
            }
        }
    }
    cout << MinCut << endl;
}
```

欧拉路径/欧拉回路 Hierholzers

> 欧拉路径：一笔画完图中全部边，画的顺序就是一个可行解；当起点终点相同时称欧拉回路。

有向图欧拉路径存在判定

有向图欧拉路径存在：[1] 恰有一个点出度比入度多 1 （为起点）；[2] 恰有一个点入度比出度多 1 （为终点）；[3] 恰有 $N-2$ 个点入度均等于出度。如果是欧拉回路，则上方起点与终点的条件不存在，全部点均要满足最后一个条件。

```
signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;

    DSU dsu(n + 1); // 如果保证连通，则不需要 DSU
    vector<unordered_multiset<int>> ver(n + 1); // 如果对于字典序有要求，则不能使用 unordered
    vector<int> degI(n + 1), degO(n + 1);
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        ver[x].insert(y);
        degI[y]++;
        degO[x]++;
        dsu.merge(x, y); // 直接当无向图
    }
    int s = 1, t = 1, cnt = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        if (degI[i] == degO[i]) {
            cnt++;
        } else if (degI[i] + 1 == degO[i]) {
            s = i;
        } else if (degI[i] == degO[i] + 1) {
            t = i;
        }
    }
    if (dsu.size(1) != n || (cnt != n - 2 && cnt != n)) {
        cout << "No\n";
    } else {
        cout << "Yes\n";
    }
}
```

无向图欧拉路径存在判定

无向图欧拉路径存在：[1] 恰有两个点度数为奇数（为起点与终点）；[2] 恰有 $N-2$ 个点度数为偶数。

```
signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;

    DSU dsu(n + 1); // 如果保证连通，则不需要 DSU
```

```cpp
    vector<unordered_multiset<int>> ver(n + 1); // 如果对于字典序有要求，则不能使用unordered
    vector<int> deg(n + 1);
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        ver[x].insert(y);
        ver[y].insert(x);
        deg[y]++;
        deg[x]++;
        dsu.merge(x, y); // 直接当无向图
    }
    int s = -1, t = -1, cnt = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        if (deg[i] % 2 == 0) {
            cnt++;
        } else if (s == -1) {
            s = i;
        } else {
            t = i;
        }
    }
    if (dsu.size(1) != n || (cnt != n - 2 && cnt != n)) {
        cout << "No\n";
    } else {
        cout << "Yes\n";
    }
}
```

有向图欧拉路径求解（字典序最小）

```cpp
vector<int> ans;
auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
    while (ver[x].size()) {
        int net = *ver[x].begin();
        ver[x].erase(ver[x].begin());
        self(self, net);
    }
    ans.push_back(x);
};
dfs(dfs, s);
reverse(ans.begin(), ans.end());
for (auto it : ans) {
    cout << it << " ";
}
```

无向图欧拉路径求解

```
auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
    while (ver[x].size()) {
        int net = *ver[x].begin();
        ver[x].erase(ver[x].find(net));
        ver[net].erase(ver[net].find(x));
        cout << x << " " << net << endl;
        self(self, net);
    }
};
dfs(dfs, s);
```

差分约束

给出一组包含 m 个不等式，有 n 个未知数的形如：$\begin{cases} x_{u_1} - x_{v_1} \leq w_1 \\ x_{u_2} - x_{v_2} \leq w_2 \\ \cdots \\ x_{u_m} - x_{v_m} \leq w_m \end{cases}$ 的不等式组，求任意一组满足这个不等式组的解。SPFA 解，$\mathcal{O}(nm)$。参考

```
signed main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;

    vector<array<int, 3>> e(m + 1);
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        int u, v, w;
        cin >> u >> v >> w;
        e[i] = {v, u, w};
    }

    vector<int> d(n + 1, 1E9);
    d[1] = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        for (int j = 1; j <= m; j++) {
            auto [u, v, w] = e[j];
            d[v] = min(d[v], d[u] + w);
        }
    }
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        auto [u, v, w] = e[i];
        if (d[v] > d[u] + w) {
            cout << "NO\n";
            return 0;
        }
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        cout << d[i] << " \n"[i == n];
    }
    return 0;
}
```

2-Sat

基础封装

基于 tarjan 缩点，时间复杂度为 $\mathcal{O}(N+M)$ 。注意下标从 0 开始，答案输出为字典序最小的一个可行解。

```
struct TwoSat {
    int n;
    vector<vector<int>> e;
    vector<bool> ans;
    TwoSat(int n) : n(n), e(2 * n), ans(n) {}
    void add(int u, bool f, int v, bool g) {
        e[2 * u + !f].push_back(2 * v + g);
        e[2 * v + !g].push_back(2 * u + f);
    }
    bool work() {
        vector<int> id(2 * n, -1), dfn(2 * n, -1), low(2 * n, -1);
        vector<int> stk;
        int now = 0, cnt = 0;
        auto tarjan = [&](auto self, int u) -> void {
            stk.push_back(u);
            dfn[u] = low[u] = now++;
            for (auto v : e[u]) {
                if (dfn[v] == -1) {
                    self(self, v);
                    low[u] = min(low[u], low[v]);
                } else if (id[v] == -1) {
                    low[u] = min(low[u], dfn[v]);
                }
            }
            if (dfn[u] == low[u]) {
                int v;
                do {
                    v = stk.back();
                    stk.pop_back();
                    id[v] = cnt;
                } while (v != u);
                ++cnt;
            }
        };
        for (int i = 0; i < 2 * n; ++i) {
            if (dfn[i] == -1) {
                tarjan(tarjan, i);
            }
        }
        for (int i = 0; i < n; ++i) {
            if (id[2 * i] == id[2 * i + 1]) return false;
            ans[i] = id[2 * i] > id[2 * i + 1];
        }
        return true;
    }
    vector<bool> answer() {
        return ans;
```

```
    }
};
```

答案不唯一时不输出

在运行后针对每一个点进行一次 dfs，时间复杂度为 $\mathcal{O}(N^2)$ ，当且仅当答案唯一时才输出，否则输出 `?` 替代。

2-Sat方案计数为 NPC 问题。

```cpp
// 结构体中增加
int check(int x, int y) {
    vector<int> vis(2 * n);
    auto dfs = [&](auto self, int x) -> void {
        vis[x] = 1;
        for (auto y : e[x]) {
            if (vis[y]) continue;
            self(self, y);
        }
    };
    dfs(dfs, x);
    return vis[y];
}
// 主函数中增加
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (sat.check(2 * i, 2 * i + 1)) {
        cout << 1 << " ";
    } else if (sat.check(2 * i + 1, 2 * i)) {
        cout << 0 << " ";
    } else {
        cout << "?" << " ";
    }
}
```