

# 〇、 绪论

## 什么是信号？

物理上，信号是信息寄寓变化的形式；

数学上，信号是一个函数（一种映射）

自变量：时间、位移、频率、相位……

本门课程主要是在数学上研究信号。

## 信号的分类（依据时间函数特性）：

0. 连续时间信号：时间变量  $t$  连续

1.1 模拟信号——时间连续，幅值连续

1.2 量化信号——时间连续，幅值离散

1. 离散时间信号

1.1 采样信号——时间离散，幅值连续

1.2 数字信号——时间离散，幅值离散

## 信号的分类（依据周期性）：

1. 周期信号

频域离散

2. 非周期信号

频域连续

## 信号的分类（依据能量特点）：

1. 能量信号（总能量有限）

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty$$

2. 功率信号（功率有限）

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$$

且

$$P \neq 0, E = \infty$$

3. 非能量非功率信号

# 一、连续信号的分析

## 正交函数集

常见的正交函数集

$$\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$$

$$\{e^{jn\omega_0 t}\} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

信号的正交分解

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) + x_e(t)$$

则均方误差

$$\overline{x_e^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ x(t) - \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \right]^2 dt$$

近似系数的最佳选择：

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) f_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_i(t) f_i^*(t) dt} \quad (\text{其中 } f_i^*(t) \text{ 为 } f_i(t) \text{ 的共轭函数})$$

$x(t)$  为被拟合的函数， $f_i(t)$  表示用于拟合的第  $i$  个函数。

推导就不给了，感兴趣可以看书/课件

## 傅里叶级数

先对周期信号进行讨论

### 三角形式的傅里叶级数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$$

这意味着一个周期信号可以分解为直流分量  $a_0$  和一系列余弦或正弦形式的交流分量

还可以化成 $c_n$ 形式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n &= -\arctan \frac{b_n}{a_n} \end{aligned}$$

### 周期信号的三角频谱（单边谱）

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

基波和谐波：

基波： $n = 1$ 的分量

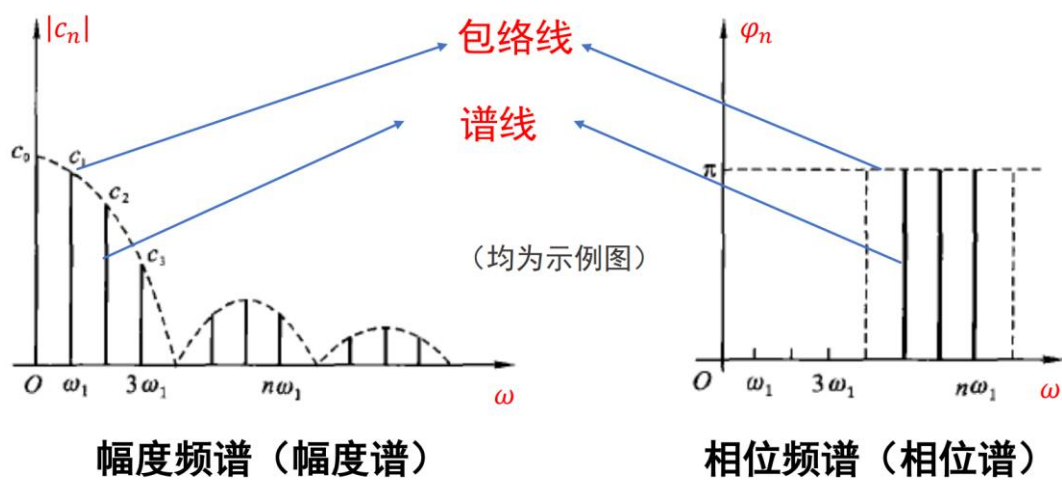
谐波： $n = 2, 3, 4, \dots$ 的分量

周期信号的傅里叶级数展开式全面描述了组成信号的各正弦分量的特征：各谐波分量的**频率**（ $n\omega_1$ ）、**幅度**（ $c_n$ ）和**相位**（ $\varphi_n$ ）

得到傅里叶级数展开后，我们可以根据**频率**（ $n\omega_1$ ）、**幅度**（ $c_n$ ）和**相位**（ $\varphi_n$ ）做幅度谱和相位谱

幅度谱（幅度 $|c_n|$ -（角）频率图）

相位谱（相位 $\varphi_n$ -（角）频率图）



可见，连续信号的频谱只出现在整数倍的频率（ $n\omega_1$ ）上，称作离散谱

### 从三角傅里叶级数到复指数傅里叶级数（重）

题外话：从百草园到三味书屋（bushi）

基本知识：

$$\begin{cases} \cos n\omega_1 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}) \\ \sin n\omega_1 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}) \end{cases}$$

带入三角傅里叶展开

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_1 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_1 t} \right) \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} + F(-n\omega_1) e^{-jn\omega_1 t}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} F_0 &= a_0 \\ F_n &= F(n\omega_1) = \frac{a_n - jb_n}{2}, \quad n > 0 \\ F_{-n} &= F(-n\omega_1) = \frac{a_n + jb_n}{2}, \quad n < 0 \end{aligned}$$

(跳过一万步，直接给结论)

$$\begin{aligned} F_n &= F(n\omega_1) \\ &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{aligned}$$

碎碎念：其实到这一步就能看到傅里叶变换的影子了

则

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \\ F_n &= F(n\omega_1) = \frac{1}{2} c_n e^{j\varphi_n}, |F_n| = \frac{1}{2} |c_n|, n \neq 0 \end{aligned}$$

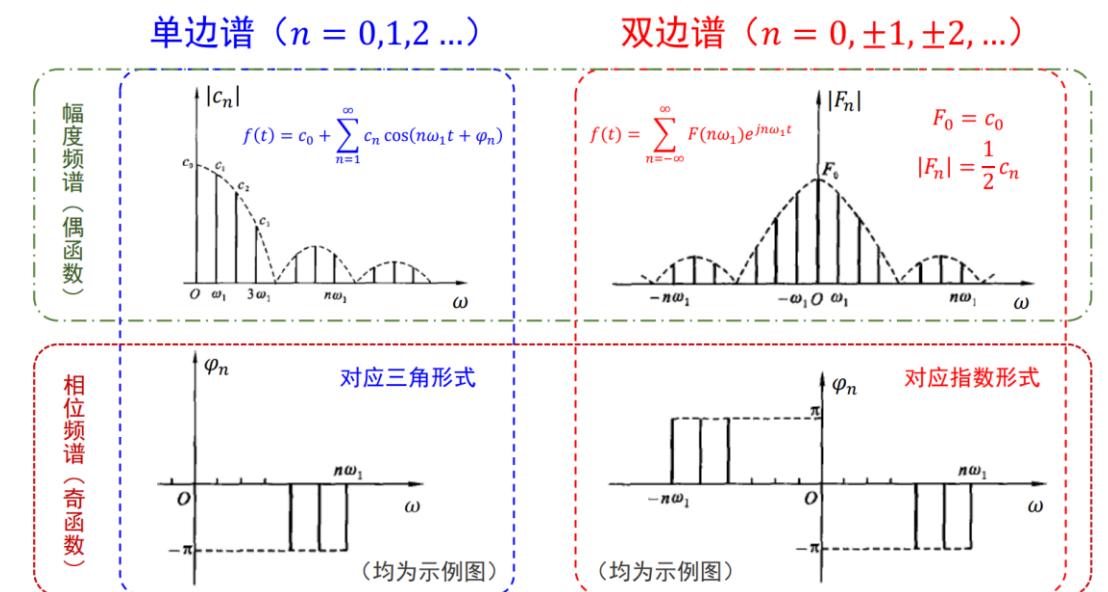
幅值为三角形形式的一半，但是为双边谱（有 $-n\omega_1$ ，也有 $+n\omega_1$ ）。

## 周期信号的复指数频谱（双边谱）

模 $|F_n|$ 反映了各谐波分量的幅度，随频率分布称作幅度频谱（幅频），为 $n$ 的偶函数（正负对称）

相角 $\varphi_n$ 反映了各谐波分量的相位，随频率分布称为相位频谱（相频），为 $n$ 的奇函数

三角形式得单边谱，复指数形式得双边谱



## 周期信号的功率分配

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = (c_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

这意味着周期信号在时域的平均功率等于信号所包含的直流、基波、各次谐波平均功率之和  
(时域能量=频域能量，能量守恒)

## 函数的对称性与傅里叶系数的关系

碎碎念：其实我也不知道为什么要把这个内容放在这个位置，我个人认为放到讲完周期信号的频谱之后就可以开始了

偶函数

$$f(t) = f(-t)$$

则

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ \varphi_n &= 0, \pi \\ c_n &= a_n = 2F_n \\ F_n &= \frac{a_n}{2} \end{aligned}$$

奇函数

$$f(t) = -f(-t)$$

则

$$a_n = 0$$

$$c_n = b_n$$

$$F_n = -\frac{jb_n}{2}$$

$$\varphi_n = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

奇谐函数（半波对称函数）

$$f(t) = -f(t \pm \frac{T_1}{2})$$

$$a_0 = 0$$

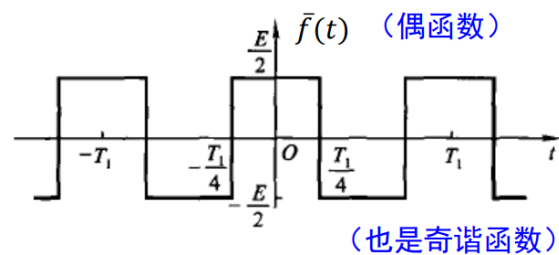
$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 2k, k \in Z^+)$$

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t \, dt \quad (n = 2k-1, k \in Z^+)$$

$$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t \, dt \quad (n = 2k-1, k \in Z^+)$$

只需要计算奇数项，只需要积分半个周期。

经典例子：对称方波信号



## 周期信号的傅里叶近似

就是取有限的前 N 项去近似

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

取前 N 项逼近

$$f_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)$$

误差

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - f_N(t)$$

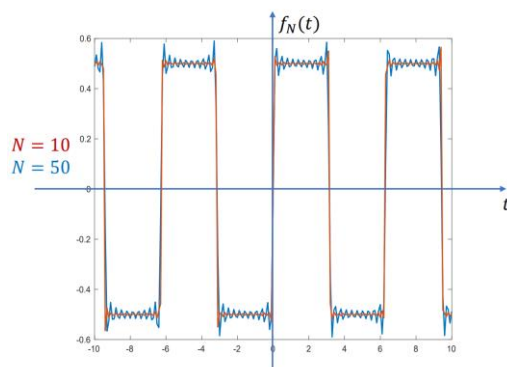
$$E_N = \overline{\varepsilon_N^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varepsilon_N^2(t) dt$$

项数越多，误差越小

吉布斯现象：

傅里叶有限级数的项数越多, 所合成波形中出现的峰起越靠近 $f(t)$ 的不连续点(间断点)

当所取项数 $N$ 很大时, 该峰起值趋于一个常数, 大约等于总跳变值的 9%, 并从不连续点开始以起伏振荡形式逐渐衰减下去, 这种现象称为吉布斯现象。



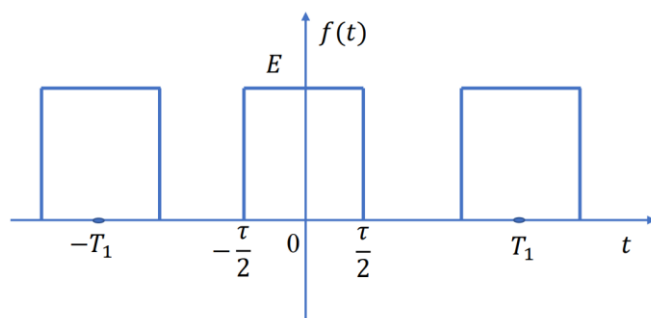
吉布斯现象

从力学中研究力脉冲的角度, 又将其称为“振铃现象”

## 经典周期信号的傅里叶级数

*碎碎念: 通过分析经典信号的变化, 再到引出傅里叶级数的部分*

### 周期矩形脉冲信号



周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲宽度 $\tau$ , 脉冲幅度 $E$ , 重复周期 $T_1$

$$f(t) = E \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right], t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right], \tau \in (0, T_1)$$

上述表达式是  $t \in \left[-\frac{T_1}{2}, \frac{T_1}{2}\right]$  的部分。

由于 $f(t)$ 为偶函数, 则

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{E\tau}{T_1} \left( \frac{\text{一个周期的面积}}{T_1} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2E}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{2E\tau}{T_1} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T_1}} \\
 &= \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = \frac{E\tau\omega_1}{\pi} Sa\left(\frac{\tau n\omega_1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

其中定义

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

称为取样函数、采样函数、抽样函数(Sampling function)

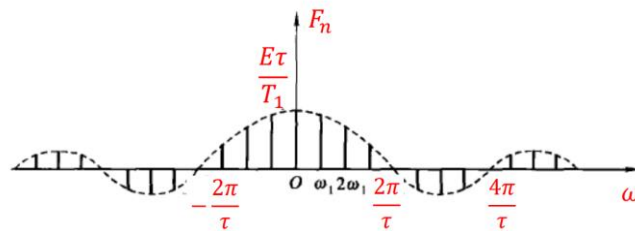
$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{\tau n\omega_1}{2}\right) \cos n\omega_1 t$$

指数形式的傅里叶级数:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$$

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{\tau n\omega_1}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{\tau n\omega_1}{2}\right)$$



频谱特点:

离散 (周期性所对应的),  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

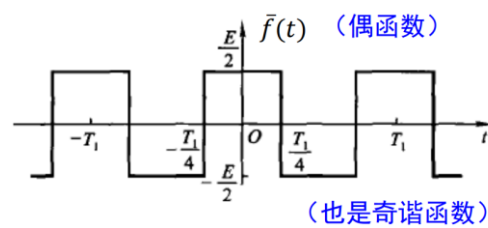
直流分量峰值  $\frac{E\tau}{T_1}$

包络线  $\frac{E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ , 零点  $\omega = \frac{2m\pi}{\tau} (m \in Z)$ , 第一个零点  $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

信号主要能量集中在第一个过零点内



## 对称方波信号



$$f(t) = E \left[ u\left(t + \frac{T_1}{4}\right) - u\left(t - \frac{T_1}{4}\right) \right] - \frac{E}{2}$$

$$\tau = \frac{T_1}{2}$$

$$a_0 = 0, b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) = E \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$f(t) = E \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

复指数形式：

$$F_n = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{\tau n\omega_1}{2}\right) = \frac{E}{2} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

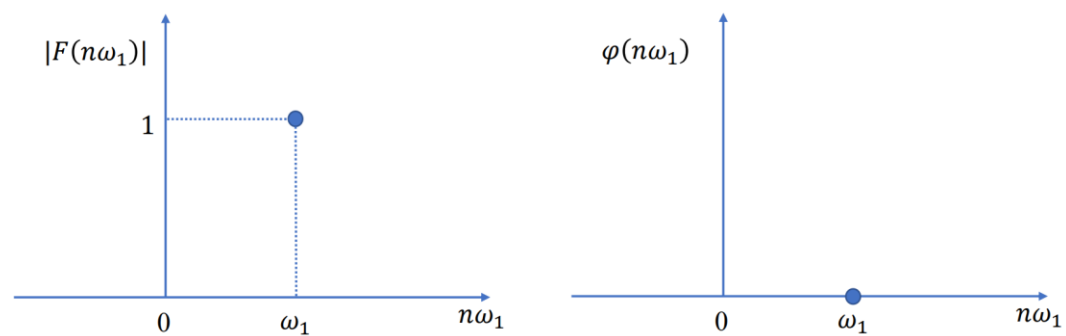
## 复指数信号

$$f(t) = e^{j\omega_1 t}$$

也是周期函数，周期  $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$F_n = \frac{\sin(1-n)\pi}{(1-n)\pi} = \text{Sa}((1-n)\pi)$$

$$= \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$



## 傅里叶变换

对于非周期函数，我们如何去分析它的频谱？

一个等效：非周期函数：周期无穷大的周期信号

$$T_1 \rightarrow \infty, \omega_1 \rightarrow 0$$

因此频谱连续（无限密集）

我们定义

$$\begin{aligned} F(\omega) &= T_1 F(n\omega_1) \\ &= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1}^{T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

称为**频谱密度函数**，简称**频谱函数**

频谱密度： $\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$

## 傅里叶变换对

正变换：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

逆变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## 频谱密度函数

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

对频谱密度函数而言的频谱：

幅度频谱 $|F(\omega)|$ ——偶函数（如果 $f(t)$ 为实函数）

相位频谱 $\varphi(\omega)$ ——奇函数（如果 $f(t)$ 为实函数）

## 狄里赫利（Dirichlet）条件

首先它是充分不必要条件

- $f(t)$ 在无限区间内绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- 在任意的有限区间内只有有限个间断点，取有限值
- 在任意有限区间内， $f(t)$ 只有有限个极大值和极小值

### 经典非周期信号的傅里叶变换表（频谱函数）

典型非周期信号	频谱密度函数	时域表达式
矩形脉冲信号	$F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	$f(t) = E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]$
单边指数信号	$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	$f(t) = e^{-at}u(t), a > 0$
双边指数信号	$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t), a > 0$
双边奇指数信号	$F(\omega) = -\frac{j2\omega}{a^2 + \omega^2}$	$f(t) = e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t), a > 0$
单位直流信号	$F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$	$f(t) = 1$
符号函数信号	$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}$	$f(t) = \text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$
单位冲激信号	$F(\omega) = 1$	$f(t) = \delta(t)$
单位阶跃信号	$F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	$f(t) = u(t)$

补充：

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = -j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

红色的为重点必记

### 傅里叶变换的性质

性质	$f(t)$	$F(\omega)$
1.线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
2.对称性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
3.尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
	$f(-t)(a = -1)$	$F(-\omega)$
4.时移	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
5.频移	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
6.时域微分	$\frac{df(t)}{dt}$	$j\omega F(\omega)$
7.频域微分	$-jtf(t)$	$\frac{dF(\omega)}{d\omega}$

8.时域积分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$
9.频域积分	$\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0) \delta(t)$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\varphi) d\varphi$
10.时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) F_2(\omega)$
11.频域卷积	$2\pi f_1(t) f_2(t)$	$F_1(\omega) * F_2(\omega)$

## 周期信号的傅里叶变换

前面讨论的是非周期信号的傅里叶变换，现在将周期信号的傅里叶变换补齐

- 周期信号的频谱是离散谱，非周期信号的频谱是连续谱
- 通过引入冲激函数，可以得出周期信号的傅里叶变换
- 把周期信号与非周期信号的频域分析**统一**起来，给分析带来便利

使用频移性质可得到：

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = -j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

$$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

一般的周期信号：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

傅里叶变换

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

周期信号的傅里叶变换（频谱密度函数）由无穷多个冲激函数组成

周期信号傅里叶级数与单脉冲傅里叶变换（取周期信号的一个周期做傅里叶变换）的关系

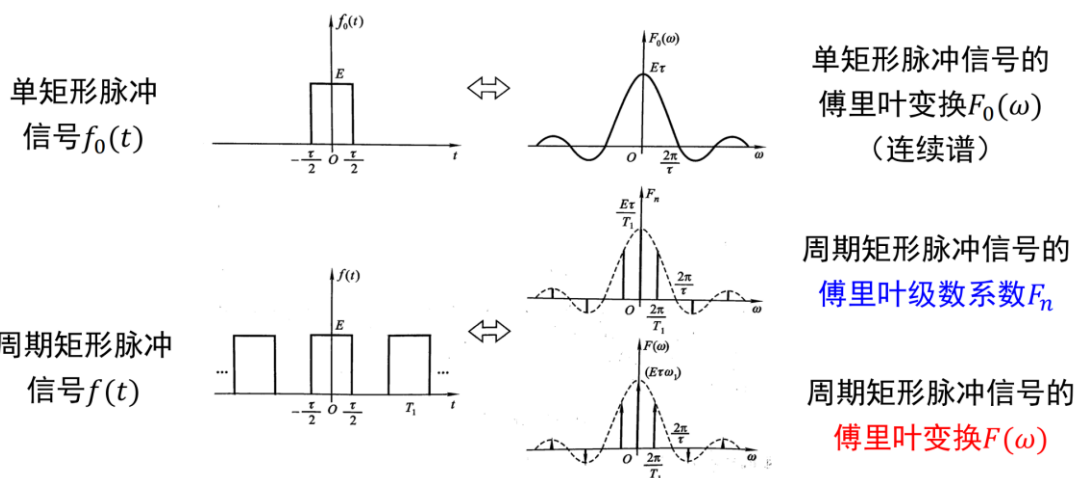
$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

则

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

## 周期矩形脉冲信号的傅里叶级数系数 vs 傅里叶变换



求周期信号的傅里叶变换的一般步骤：

- 求单脉冲信号的傅里叶变换  $F_0(\omega)$

$$F_0(\omega)$$

- 求  $F_n$  (或者直接求傅里叶级数得  $F_n$ )

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

- 得  $F(\omega)$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \delta(\omega - n\omega_1)$$

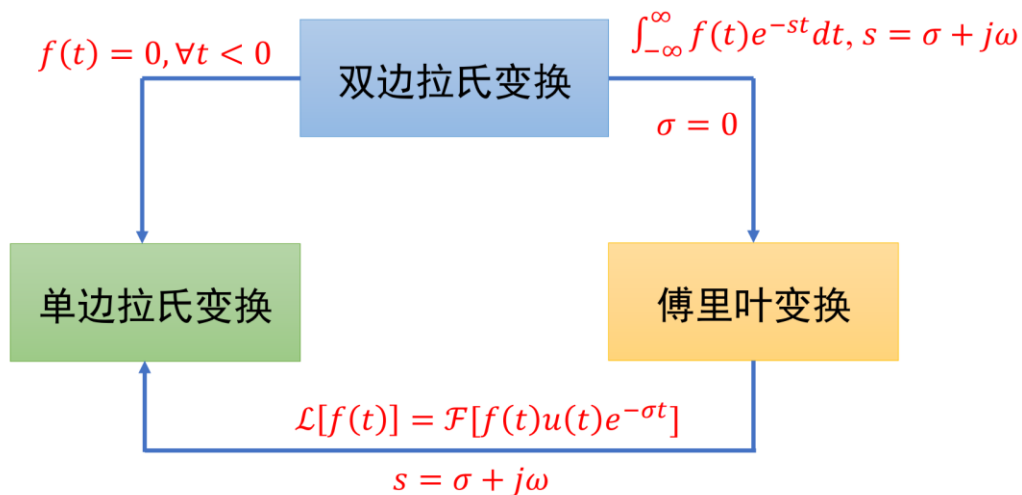
## 拉普拉斯变换(本课程不做重点)

几乎只是提一嘴，后面的课程几乎不涉及

双边拉普拉斯变换对：

$$F_b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s) e^{st} ds$$



## 从已知的拉普拉斯变换求傅里叶变换

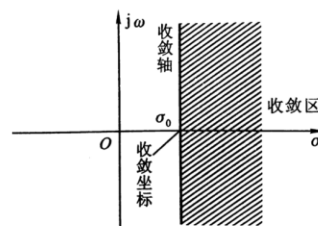
- 首要条件：函数 $f(t)$ 为有始信号，即 $f(t) = 0, \forall t < 0$
- 根据收敛边界的不同：
  - $\sigma_0 > 0$ ，不存在傅里叶变换
  - $\sigma_0 < 0$ ，令 $s = j\omega$ 即可
  - $\sigma_0 = 0$ （收敛边界位于虚轴）

若虚轴上有 $N$ 个极点：  $F_b(s) = F_{b1}(s) + \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{s - j\omega_n}$

第一部分：直接通过 $s = j\omega$ 求解

$$\mathcal{F}[f(t)] = F_b(s) \Big|_{s=j\omega} + \sum_{n=1}^N K_n \pi \delta(\omega - \omega_n)$$

第二部分：由在虚轴上每个极点 $j\omega_n$ 对应的冲激项组成



## 二、离散信号的分析

### 信号的采样和恢复

#### 采样信号与离散信号

##### 采样信号

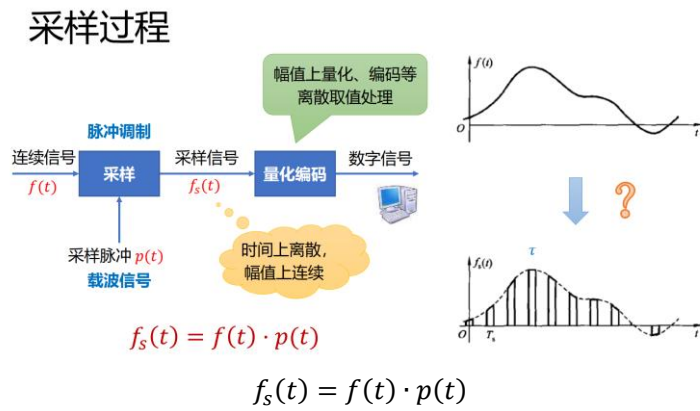
- 利用采样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“采样/抽样”一系列的离散样值
- 通常用 $f_s(t)$ 表示 ( $s$  means sampling)

##### 离散信号

- 在时间上是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出信号的瞬时值
- 产生方式：连续时间信号采样而来或本身就是离散的信号

## 时域采样

过程：



时域采样

采样周期 $T_s$ ，对应采样角频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}[p(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

(这一步是由 $p(t)$ 为周期函数得到的)

$$F_s(\omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$$

频域卷积性质得

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

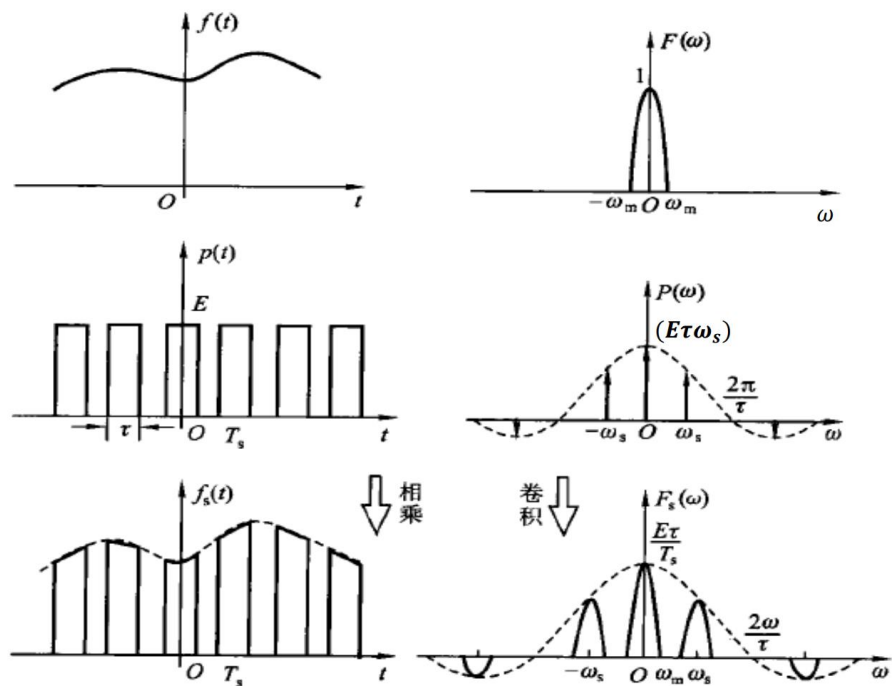
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F(\omega - n\omega_s)$$

用矩形脉冲采样

$$P_n = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$$

$$F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$



$F(\omega)$ 在以 $\omega_s$ 为周期的延拓中, 幅度以 $Sa\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right)$ 作为包络函数得规律变化

用冲激函数采样 (理想采样)

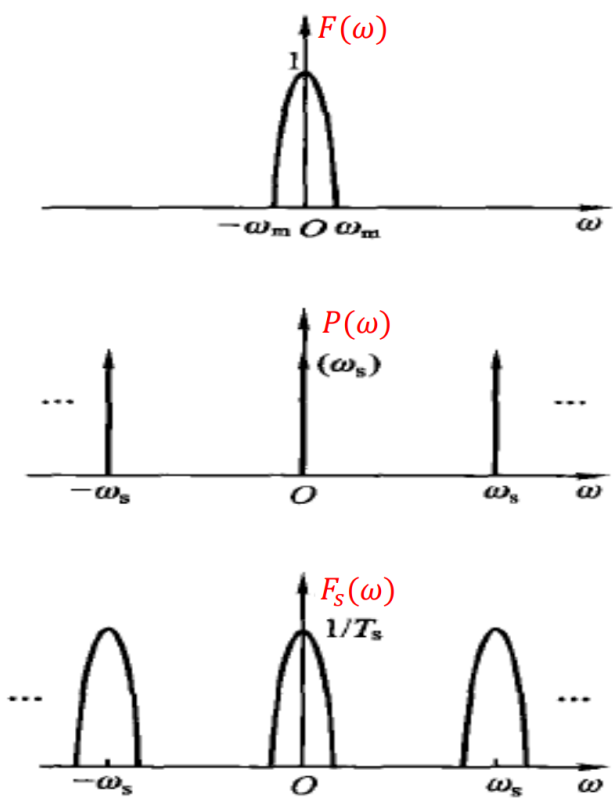
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$P_n = \frac{1}{T_s}$$

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$





频谱受限（或称频带受限/带限），频谱函数旨在有限区间 $([-\omega_m, \omega_m])$ 具有有限值

## 时域采样定理

一个频带首先的信号波形不可能在短时间内产生独立的、实质的变化，其最高变化速度受最高频率分量 $\omega_m$ 的限制

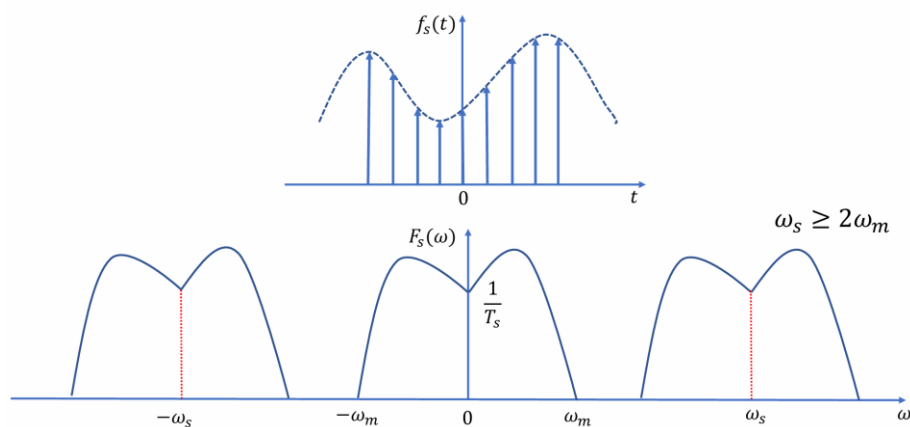
### 时域采样定理（香农定理）

对于频谱受限、频率为 $f_m$ 的信号 $f(t)$ ，如果其频谱只占据有限范围 $[-\omega_m, \omega_m]$ ，则信号 $f(t)$

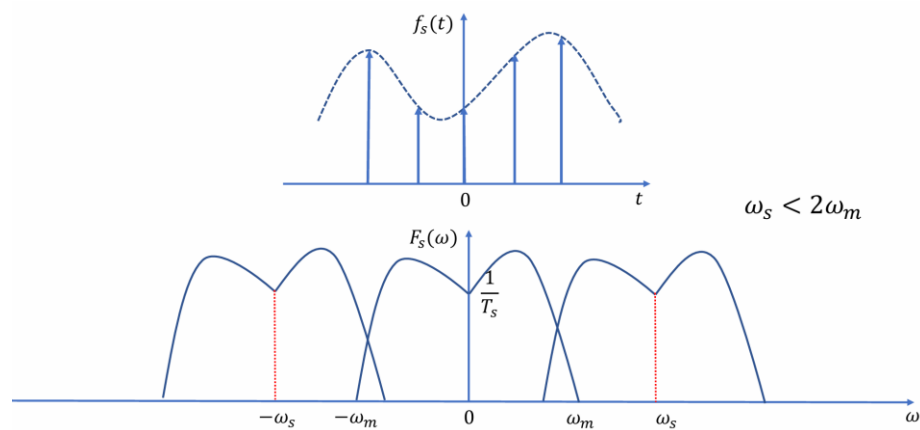
可以用等间隔的采样值唯一地表示，而采样间隔 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ ，采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_m$

最低允许的采样率 $\omega_s = 2\omega_m$ 称为奈奎斯特(Nyquist)频率， $T_s$ 称为奈奎斯特间隔

不混叠：



混叠：



混叠了就无法还原了。

## 频域采样

### 理想采样

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0), \delta_\omega(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \delta_\omega(\omega)$$

$$F_p(\omega) = F(\omega) \cdot \delta_\omega(\omega)$$

$$f_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[F_p(\omega)] = f(t) * \mathcal{F}^{-1}[\delta_\omega(\omega)]$$

$$= f(t) * \frac{\delta_T(t)}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t - kT_0)$$

### 频域采样定理

当信号频谱  $F(\omega)$  以  $\omega_0$  为采样间隔进行采样，对应的时域信号是以  $T_0$  为周期对原信号  $f(t)$  进行周期延拓，信号的幅度  $\times \frac{1}{\omega_0}$

若信号  $f(t)$  是时间受限信号，它集中在  $(-t_m, t_m)$  的时间范围内，若在频域中以不大于  $\frac{1}{2t_m}$  频率间隔对频谱  $F(\omega)$  进行采样，则频域采样后的频谱  $F_p(\omega)$  可以唯一地表示原信号。

$$\omega_0 \leq \frac{1}{2t_m}$$

## 采样信号恢复到原信号

### 时域采样信号的恢复

取主频带（对 $F_s(\omega)$ 加窗）

$$F(\omega) = F_s(\omega) \cdot H(\omega)$$

理想窗（矩形窗，理想低通滤波器）

$$H(\omega) = T_s[u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]$$

$$\omega_c = \frac{1}{2}\omega_s$$

已知

$$\mathcal{F}\left[E\left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right]\right] = E\tau Sa\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$$

$$\mathcal{F}[H(t)] = \frac{2\pi}{\omega_s} 2\omega_c Sa(\omega_c\omega) = 2\pi Sa\left(\frac{\omega_s\omega}{2}\right) = 2\pi h(-\omega)$$

有

$$h(\omega) = Sa\left(\frac{\omega_s\omega}{2}\right)$$

则

$$h(t) = Sa\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

$$f(t) = f_s(t) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) * Sa\left(\frac{\omega_s}{2}t\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa\left[\frac{\omega_s}{2}(t - nT_s)\right]$$

这是信号恢复的插值公式。

### 频域采样信号的恢复

也是同样的道理，给 $f_p(t)$ 上窗 $g(t)$

$$f(t) = f_p(t) \cdot g(t)$$

$$g(t) = \omega_0 \left[ u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_0}{2}\right) \right]$$

$$G(\omega) = \omega_0 T_0 Sa\left(\frac{T_0}{2}\omega\right) = 2\pi Sa\left(\frac{T_0}{2}\omega\right)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} F_p(\omega) * G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) \text{Sa} \left[ \frac{T_0}{2} (\omega - k\omega_0) \right]$$

## 离散信号的时域描述和运算

### 描述——序列

用序列表示

$$x(n)$$

能量定义

$$W = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

### 典型的离散信号

#### 单位脉冲序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

#### 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)$$

#### 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

### 斜变序列\*

$$R(n) = nu(n)$$
$$r(n) = n^2u(n)$$

### 实指数序列（单边指数）\*

$$x(n) = a^n u(n)$$

### 正弦型序列

$$x(n) = A \sin(n\Omega_0 + \phi)$$

$\Omega_0$ 表示数字角频率

$\phi$ 为争先序列的初始相角

如果 $x(n)$ 是通过采样 $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$ 得到，则

$$\Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{\omega_0}{f_s} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega_s}$$

离散序列的时候，每次相移只能是 $k\Omega_0$

周期性：

$$x(n+N) = x(n)$$
$$x(n) = A \sin(n\Omega_0 + \phi + N\Omega_0)$$

则

$$N\Omega_0 = 2k\pi$$

则周期

$$N = \frac{2k\pi}{\Omega_0} = \frac{2k\pi}{\omega_0 T_s} = k \frac{T_0}{T_s}$$

### 复指数序列\*

$$x(n) = e^{(\sigma + j\Omega_0)n} = e^{\sigma n} (\cos \Omega_0 n + j \sin \Omega_0 n)$$

周期性：

$$x(n) = x(n+N)$$
$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 n + \Omega_0 N)}$$

则

$$\Omega_0 N = 2k\pi$$

### 离散信号的时域运算

不全，只提及比较关键和不同的

差分运算

前向差分

$$\Delta x(n) = x(n + 1) - x(n)$$

后向差分

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n - 1)$$

卷积和

$$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n - m)$$

卷积的计算方法：

$$h(n) = \{-1, 2, 4, 0, 5\}, x(n) = \{1, 3, 6, 1, -1, 4\}$$

-1	2	4	0	5					
1	3	6	1	-1	4				
-1	2	4	0	5					
	-3	6	12	0	15				
		-6	12	24	0	30			
			-1	2	4	0	5		
				1	-2	-4	0	-5	
					-4	8	16	0	20
-1	-1	4	23	32	13	34	21	-5	20

$$x(n) * h(n) = \{-1, -1, 4, 23, 32, 13, 34, 21, -5, 20\}$$

离散信号的频域分析

离散傅里叶级数（DFS）

复指数信号

$$e^{j\omega t}, \omega \in (-\infty, \infty)$$

复指数序列

$$e^{j(\Omega \pm 2k\pi)n} = e^{j\Omega n}, \Omega \in [0, 2\pi)$$

连续周期信号( $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ )的傅里叶级数表示

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

对周期 $T_0$ 做 $N'$ 点采样得 $x(n)$ ，即

$$T_0 = N'T_s, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{N'T_s}$$

有

$$x(n) = x(n + N)$$

定义

$$\Omega_0 = \omega_0 T_s = \frac{2\pi}{N'}$$

$\Omega_0$  为信号在离散域得基本数字频率

$k\Omega_0$  为信号的  $k$  次谐波数字频率,  $k = 1, 2, \dots, N$  (有限个谐波分量)

$$t = nT_s, dt = T_s$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\frac{2\pi}{N'}nT_s} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\frac{2\pi}{N'}n} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

$$X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

离散傅里叶级数变换对

$$X(k\Omega_0) = DFS[x(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x(n) = IDFS[X(k\Omega_0)] = \sum_{n=0}^{N-1} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

CFS 和 DFS 的对比

CFS

$$CFS[x(t)] = X(k\omega_0)$$

$$\text{周期 } T_0, \text{ 角频率 } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

DFS

$$DFS[x(n)] = X(k\Omega_0)$$

$$\text{周期 } N = \frac{T_0}{T_s}, \text{ 角频率 } \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

DFS 的主要性质

周期卷积定理

$$x(n) \circledast h(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)$$

$$x(n) \circledast h(n) \xleftrightarrow{DFS} NX(k\Omega_0)H(k\Omega_0)$$

$$x(n)h(n) \xleftrightarrow{DFS} X(k\Omega_0) \circledast H(k\Omega_0)$$

位移性质

$$x(n-m) \xleftrightarrow{DFS} e^{-jk\Omega_0 m} X(k\Omega_0)$$

## 离散时间傅里叶变换（DTFT）

离散时间傅里叶变换，又称“序列的傅里叶变换”（DTFT）

对于长度有限的非周期信号 $x(n)$ ，以 $N$ 为周期，进行延拓为 $x_N(n)$

$$x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-mN)$$

则

$$X_N(k\Omega_0) = DFS[x_N(n)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

对于长度无限的非周期信号 $N \rightarrow \infty$ ，为避免无穷小量，定义频谱密度函数

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = NX_N(k\Omega_0)$$

$$N \rightarrow \infty, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \rightarrow d\Omega, \quad k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N} \rightarrow \Omega$$

离散时间傅里叶变换对

$$X(\Omega) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n) = IDTFT[X(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

DTFT 存在条件

能量有限/绝对可和



## 两个常用 DTFT

$$\begin{aligned}x_1(n) &= a^n u(n), \quad |a| < 1 \\X_1(\Omega) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \\x_2(n) &= -a^n u(-n-1), \quad |a| > 1 \\X_2(\Omega) &= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}\end{aligned}$$

## 离散傅里叶变换 (DFT)

DFT 推导:

有限长序列  $x(n)$  延拓

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$$

计算其 DFT

$$\begin{aligned}X_p(k\Omega_0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-jk\Omega_0 n} \\&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}\end{aligned}$$

定义

$$X(k) = NX_p(k\Omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

## 离散傅里叶变换对

$$\begin{aligned}X(k) &= DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\x(n) &= IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\end{aligned}$$

## DFT 的矩阵形式

令

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_n^{nk}$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_n^{-nk}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{0 \times 0} & W_N^{0 \times 1} & W_N^{0 \times 2} & \dots & W_N^{0 \times (N-1)} \\ W_N^{1 \times 0} & W_N^{1 \times 1} & W_N^{1 \times 2} & \dots & W_N^{1 \times (N-1)} \\ W_N^{2 \times 0} & W_N^{2 \times 1} & W_N^{2 \times 2} & \dots & W_N^{2 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1) \times 0} & W_N^{(N-1) \times 1} & W_N^{(N-1) \times 2} & \dots & W_N^{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X(k) = W_N^{nk} x(n)$$

$$W_N^{nk} = (W_N^{nk})^T$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_N^{-0 \times 0} & W_N^{-0 \times 1} & W_N^{-0 \times 2} & \dots & W_N^{-0 \times (N-1)} \\ W_N^{-1 \times 0} & W_N^{-1 \times 1} & W_N^{-1 \times 2} & \dots & W_N^{-1 \times (N-1)} \\ W_N^{-2 \times 0} & W_N^{-2 \times 1} & W_N^{-2 \times 2} & \dots & W_N^{-2 \times (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{-(N-1) \times 0} & W_N^{-(N-1) \times 1} & W_N^{-(N-1) \times 2} & \dots & W_N^{-(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} W_N^{-nk} X(k)$$

$$W_N^{-nk} = (W_N^{-nk})^T$$

*DFT*的本质：有限非周期序列 $x(n)$ 原连续、周期性的频谱密度函数 $X(\Omega)$ 在其数字频域主值区间（长度为 $2\pi$ ）的取样。

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Omega n}, \quad \Omega \in [0, 2\pi)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

用*DFT*计算信号频谱需要注意：

- 如果对连续时间信号采样， $\omega_s \geq 2\omega_m$
- 周期信号要截取整周期

## DFT 的性质

### 圆周移位性质

圆周移位：

$$x((n-m))_N R_N(n)$$

若 $n = n_1 + mN, 0 \leq n_1 \leq N-1, m \in \mathbb{Z}$ ，则

$$((n))_N = (n_1)$$

矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$x((n))_N$  等价于  $x_p(n)$ , 周期延拓

$x((n-m))_N$  线性位移

$x((n-m))_N R_N(n)$  加窗

时移

$$x((n-m))_N R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} W_N^{mk} X(k)$$

频移

$$W_N^{-nl} x(n) \xleftrightarrow{DFT} ((k-l))_N R_N(l)$$

圆周卷积性质

圆卷积:

$$x(n) \circledast h(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h((n-m))_N \right] R_N(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x((n-m))_N \right] R_N(n)$$

课件里说, 以后出现这个符号无特殊说明就是圆卷积。

性质:

$$x(n) \circledast h(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k) H(k)$$

$$x(n) h(n) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{N} X(k) \circledast H(k)$$

快速傅里叶变换 (FFT)

本质上是对 DFT 的计算进行优化。

$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  的特性:

正交

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{nk} (W_N^{mk})^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-m)k} = \begin{cases} 1, & n-m = lN \\ 0, & n-m \neq lN \end{cases}$$

周期性

$$W_N^{r+mN} = W_N^r$$

对称性

$$W_N^{r+\frac{N}{2}} = -W_N^r$$

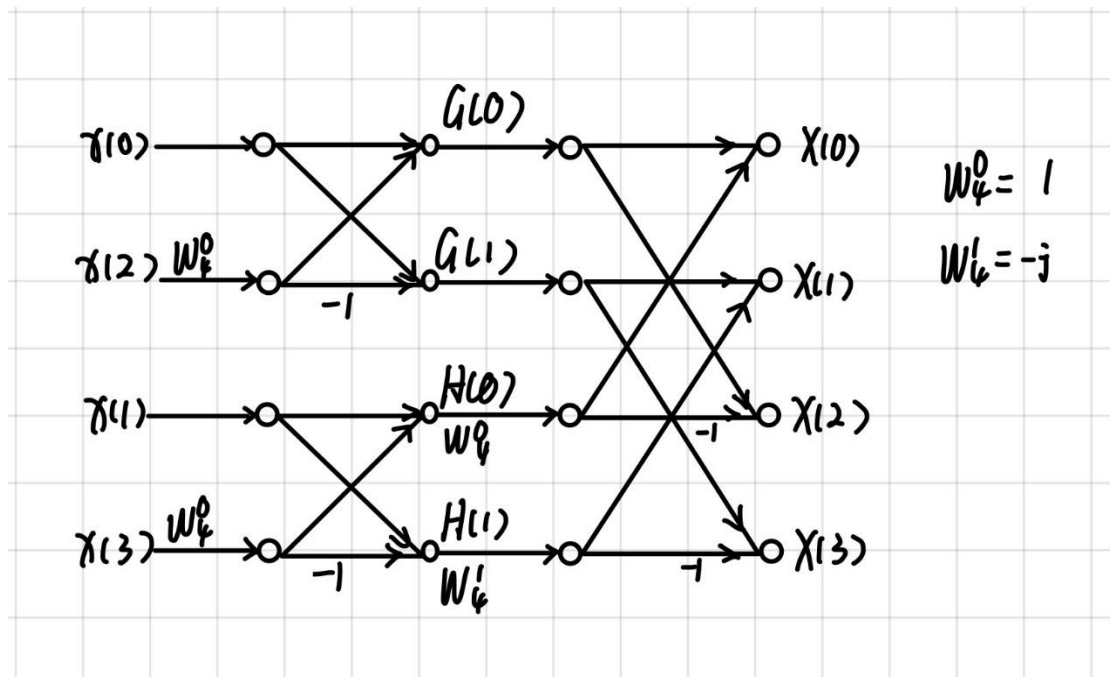
可约性

$$W_{rN}^{rn} = W_N^n$$

假设序列长度为 $2^M$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{(2l+1)k} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{2lk} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_{\frac{N}{2}}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_{\frac{N}{2}}^{lk} \\ &= G(k) + W_N^k H(k) \\ X\left(k + \frac{N}{2}\right) &= G(k) - W_N^k H(k) \end{aligned}$$

下图是 4 点 FFT 的蝶形运算



只掌握四点的方法。

## Z 变换

定义

$x(n)r^{-n}$  的离散时间傅里叶变换 (DTFT)

$$DTFT[x(n)r^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(re^{j\Omega})^{-n}$$

令  $z = re^{j\Omega}$ , 得:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

## Z 变换与拉普拉斯变换的关系

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$X_s(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

令  $z = e^{sT}$ , 得:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n} = X_s(s)|_{s=\frac{1}{T}\ln z}$$

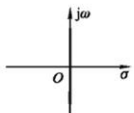
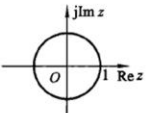
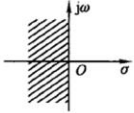
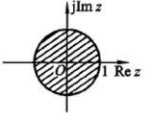
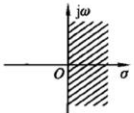
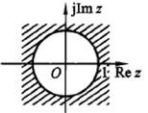
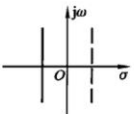
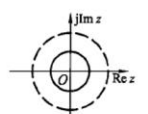
注意到

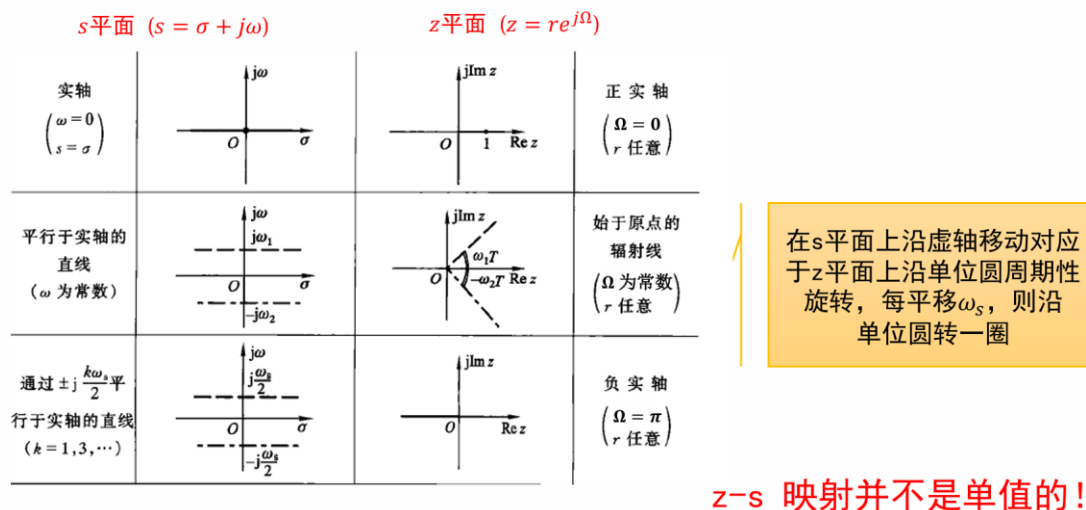
$$z = re^{j\Omega} = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$$

对应有

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\Omega = \omega T$$

s 平面 ( $s = \sigma + j\omega$ )		z 平面 ( $z = re^{j\Omega}$ )		
虚轴 ( $\sigma = 0$ ) ( $s = j\omega$ )			单位圆 ( $r = 1$ ) ( $\Omega$ 任意)	s 平面虚轴 $\rightarrow$ z 平面单位圆上
左半平面 ( $\sigma < 0$ )			单位圆内 ( $r < 1$ ) ( $\Omega$ 任意)	s 左半平面 $\rightarrow$ z 平面单位圆内部
右半平面 ( $\sigma > 0$ )			单位圆外 ( $r > 1$ ) ( $\Omega$ 任意)	s 右半平面 $\rightarrow$ z 平面单位圆外部
平行于虚轴的 直线 ( $\sigma$ 为常数)			圆 ( $\sigma > 0, r > 1$ ) ( $\sigma < 0, r < 1$ )	<b>z-s 映射并不是单值的!</b>



## Z 变换与 DTFT 之间的关系

单位圆上的 Z 变换就是序列的 DTFT(单位圆在 Z 变换的收敛域内)

$$X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} = X(\Omega)$$

## Z 变换与 DFT 之间的关系

$$X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = X(k)$$

# 三、 系统与信号的线性系统处理

## 系统

## 什么是系统

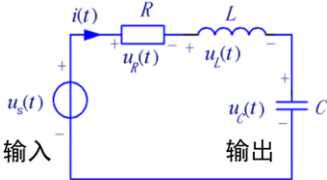
将输入信号 $x(t)$ 施加于系统，由此产生输出信号 $y(t)$



数学模型分类

输入输出模型

只反映系统输入输出的关系，只反映**外特性**，例如

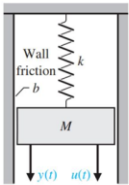


$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) = u_s(t)$$
$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$$
$$\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = \frac{1}{LC} u_s(t)$$

动态电路的  
输入输出方程

状态空间模型

不仅反映系统的外特性，更反映系统的**内部状态**，一般由**状态方程**和**输出方程**描述。



$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u(t) \end{cases}$$

弹簧-质量-阻尼系统的  
状态空间模型

$x_1$ : 质量块的位移  
 $x_2$ : 质量块的速度

系统的分类

连续时间系统和离散时间系统

连续时间系统

用**微分方程**或连续时间状态方程描述

离散时间系统

用**差分方程**或离散时间状态方程描述

单输入单输出系统和多输入多输出系统

多输入多输出系统一般用矩阵表示。

## 系统的性质

### 记忆性

系统输出信号值只取决于当前时刻的输入信号值，而与它过去的工作状态无关，称系统无记忆性，反之称为有记忆性。

**无记忆**——通常由**代数方程**描述

**有记忆**——通常由**微分方程或差分方程**描述

### 因果性

系统任何时候的输出信号，只取决于当前时刻和之前时刻的输入值，而与将来时刻的输入值无关，称该系统具有因果性，否则称为无因果性。

**实际物理系统都是因果系统**

*有因才有果~*

因果系统的表示

$$\begin{aligned}y(t) &= f\{x(t - \tau), \tau \geq 0\} \\y(n) &= f\{x(n - k), k \geq 0\}\end{aligned}$$

### 可逆性

如果一个系统不同输入信号唯一对应产生不同的输出信号，输入输出呈一一对应的关系，称该系统是可逆的，否则不可逆

### 稳定性

一个系统对其有界的输入信号的零状态响应也是有界的，称该系统具有稳定性，也可称为有界输入有界输出（*BIBO*）稳定系统

### 时不变性

如果系统参数不随时间而变化，称此系统为**时不变系统**（或**定常系统**、**非时变系统**等）；反之称为**时变系统**（**参变系统**）

检验方法：信号在时间上做平移  
对于

$$x_1(t) \xrightarrow{sys} y_1(t)$$



令

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

求 $y_2(t)$

检验 $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ 是否成立

## 线性

同时满足叠加性和齐次性的系统称为**线性系统**，否则为非线性系统。

叠加性：加法

齐次性：数乘

系统输出的增量与输入增量之间呈线性关系，称为**增量线性系统**

## 信号的线性系统处理



### 时域法分析

线性时不变因果系统

线性时不变系统的单位冲激响应

线性时不变系统的时域分析



### 频域法分析

频率响应

无失真传输

理想低通滤波器



### 复频域分析

微分方程的复频域求解

传递函数

## 时域法分析

### 线性时不变系统的表示方法

连续系统——线性常系数微分方程描述

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots$$

离散系统——线性常系数差分方程描述

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots$$

## 零输入响应和零状态响应

零输入响应：没有外加激励，只有起始状态所产生的相应；输入为 0，系统由非 0 初始状态延续下来的输出。

零状态响应：系统在零初始状态下，对本次输入信号的响应。

## 线性时不变（LTI）系统的单位冲激/脉冲/样值响应

定义：

系统在零初始条件（零状态）下，对单位冲激/样值信号 $\delta(t)/\delta(n)$ 的响应，记作 $h(t)/h(n)$

## 连续时间 LTI 系统的单位冲激响应的特点

具有齐次微分方程解的基本形式：

当 $t > 0$ ，有

$$\sum_{k=0}^n a_k h^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k \delta^{(k)}(t) = 0, \quad t > 0$$

由于系统的因果性，

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

若系统有  $n$  个特征根 $\lambda_i$

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t)$$

其形式与  $n$ 、 $m$  值得相对大小有关：

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t), \quad n > m$$

物理上可实现的系统一般具有的形式( $n > m$ )

$$h(t) = c\delta(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t), \quad n = m$$

$$h(t) = \sum_{j=0}^{m-n} c_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} u(t), \quad n < m$$

## 离散时间 LTI 系统的单位样值响应的特点

$$\sum_{k=0}^N a_k h(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

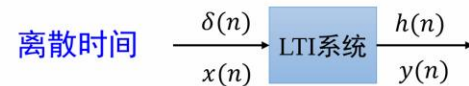
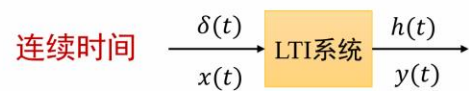
$$h(n) = \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^n u(n), \quad N > M$$

$$h(n) = \sum_{j=0}^{M-N} C_j \delta(n-j) + \sum_{i=1}^n A_i \lambda_i^n u(n)$$

LTI 系统单位冲激响应的求解步骤

## 总结：LTI 系统单位冲激/脉冲响应的求解步骤

- 列系统微分/差分方程
- 求微分/差分方程的特征根
- 得到齐次解的形式
- 求各阶导数/平移所得序列
- 代入系统微分/差分方程
- 两边奇异函数/序列的系数平衡，即可求出相应的系数



一眼丁真，鉴定为狗都不用

## 线性时不变系统的时域分析

卷积积分——连续时间 LTI 系统

卷积和——离散时间 LTI 系统

$h(t)$ ——单位冲激响应

连续 LTI 系统对输入信号  $x(t)$  的响应  $y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

离散 LTI 系统对输入信号  $x(n)$  的响应  $y(n)$

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

## 单位阶跃响应与单位冲激/脉冲响应的关系

连续时间单位阶跃响应  $c(t)$

$$h(t) = \frac{dc(t)}{dt}$$

离散时间单位阶跃响应  $c(n)$

$$h(n) = c(n) - c(n-1)$$

## 频域法分析（重）

### 连续线性系统的频率响应

系统对 $x(t) = e^{j\omega t}$ 的响应

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \cdot e^{j\omega t} \\&= H(\omega) \cdot e^{j\omega t} \\H(\omega) &= \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \mathcal{F}[h(t)]\end{aligned}$$

### 离散线性系统的频率响应

系统对 $x(n) = e^{j\Omega n}$ 的响应

$$\begin{aligned}y(n) &= x(n) * h(n) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\&= \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\Omega k} \right) \cdot e^{j\Omega n} \\&= H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \\H(\Omega) &= \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = DTFT[h(n)]\end{aligned}$$

### 无失真传输系统

无失真传输：信号波形不变，而只能是幅度上对原信号按比例地放大或缩小，或者在时间上有一固定的延迟。

原信号 $x(t)$ ，输出信号 $y(t)$

$$\begin{aligned}y(t) &= Kx(t-t_0) \\Y(\omega) &= Ke^{-j\omega t_0}X(\omega)\end{aligned}$$

即

$$H(\omega) = Ke^{j\omega t_0}$$

无失真传输的频域条件：

幅频特性

$$|H(\omega)| = K$$

相频特性

$$\varphi_h(\omega) = -\omega t_0$$

在实际中，任何带有信息的物理信号都是带限的，只需在信号占据频率范围内满足无失真传输条件。（由此引出理想低通滤波器）

理想低通滤波器系统

$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0} [u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)]$$

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

由于

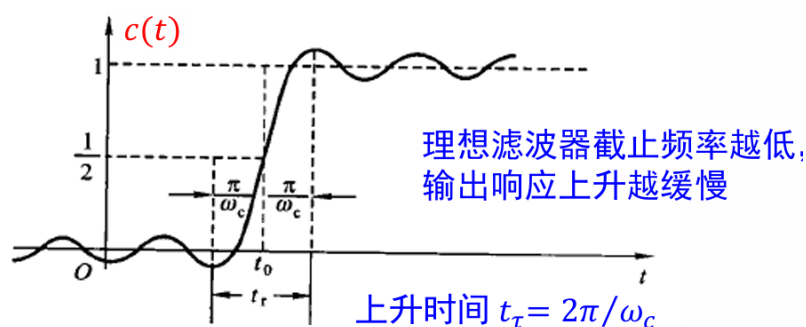
$$h(t) \neq 0, \quad t < 0$$

非因果，在实际上无法实现。

理想低通滤波器的阶跃响应

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \left[ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega t_0} \\ c(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{j \sin[\omega(t-t_0)]}{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t-t_0)] \end{aligned}$$

(a)



理想低通对矩形脉冲的响应

$$e_1(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

$$r_1(t) = \frac{1}{\pi} (\text{Si}[\omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\omega_c(t - t_0 - \tau)])$$

## 复频域分析

连续系统

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

离散系统

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

若 $H(z)$ 的极点都落在单位圆之内（对应极点都在左半平面），频率响应

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

自动控制理论救一救！

## 四、 滤波器

走到这里，恭喜你就要通关信号分析了( •̀ ω •́ )y

### 滤波器概述

滤波：滤除噪声，获取目标信息

滤波器：能实现滤波功能的，可实现的 LTI 系统

### 滤波器分类

#### 经典滤波器

假定输入信号中的有用信号和噪声具有不同的频带

通过设计具有何时频率特性的滤波器，去掉无用的噪声

**当有用信号与无用信号频谱相互重叠时，无能为力（23 年第一题考察）**

#### 现代滤波器

从含有噪声的信号（数据序列）中估计出信号的某些特征或信号本身

当信号被估计出来后，它将比原信号具有**更高的信噪比**

信号和噪声都视为实际信号

### 滤波器的技术指标

- 1) 中心频率 $\omega_0 = \sqrt{\omega_p \cdot \omega_s}$ (通带截止频率 $\omega_p$ ,阻带截止频率 $\omega_s$ )
- 2) 通带波动 $\Delta_\alpha$
- 3) 相移 $\phi$
- 4) 群延迟 $\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

5) 衰减函数 $\alpha$ ,单位分贝( $dB$ )

$$\alpha = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega)|} = -20 \lg |H(\omega)| = -10 \lg |H(\omega)|^2$$

通带衰减函数:

$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_p)|} = -20 \lg |H(\omega_p)|$$

阻带衰减函数:

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(0)|}{|H(\omega_s)|} = -20 \lg |H(\omega_s)|$$

以上函数都假设 $|H(0)|$ 已经归一化, 即 $|H(0)| = 1$

工程上一般取幅值下降 $3dB$ 对应的频率值作为通带截止频率, 即

$$\omega_p = \omega_{3dB}$$

## 模拟滤波器

**模拟滤波器**用模拟系统处理模拟信号或者说连续时间信号的滤波器, 是一种选择频率的装置, 又称**频率选择滤波器**

模拟滤波器系统函数 $H(s)$ 应满足:

**稳定性**——模拟滤波器应当是稳定的时不变系统 (有传递函数)

是一个具有**实系数**的  $s$  **有理函数**, **极点分布在  $s$  左半平面**

**因果性**——分子多项式阶次不大于分母多项式的阶次

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ 是  $t$  的**实函数**

$$H(\omega) = H(j\omega) = H^*(-j\omega)$$

$$|H(j\omega)|^2|_{j\omega=s} = H(s)H(-s)$$

若是**最小相位系统** (在一定幅频特性下, 相移最小的系统)

$H(s)$ 的**所有零点**也应分布在**左半平面或虚轴上**

若有**零点在虚轴上**, 根据 $H(s)$ 的系数为实数,  $|H(j\omega)|^2$ 在虚轴上的零点必须是**偶次重零点**, 平分给 $H(s), H(-s)$

考点:

由 $|H(j\omega)|^2$ , 令 $s = j\omega$ , 得 $H(s)H(-s)$

由系统函数 $H(s)$ 满足

**稳定性**——得到 $H(s)$ 的极点都在左半平面

对于**最小相位系统** $H(s)$

**最小相位系统**——得到得到 $H(s)$ 的零点都在左半平面或虚轴上 (虚轴上的点应当是偶次重根)

## 巴特沃思低通滤波器

幅频特性模平方

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

$n$ ——滤波器的阶数

$\omega_c$ ——滤波器的截止频率，当 $\omega = \omega_c$ 时， $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}$ ，此时 $\alpha = 3dB$

取全部左半平面的极点为 $H(s)$ 的极点，得

$$H(s) = \frac{\omega_c^n}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}$$

为了使滤波器设计具有通用性，将频率做归一化处理

上下同除 $\omega_c^n$ ，令 $\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$ ，称 $\bar{s}$ 为归一化复频率

### 幅频特性

最大平坦性：阶数  $n$ ， $\omega = 0$  前  $(2n-1)$  阶导数都为 0，原点有最大平坦性

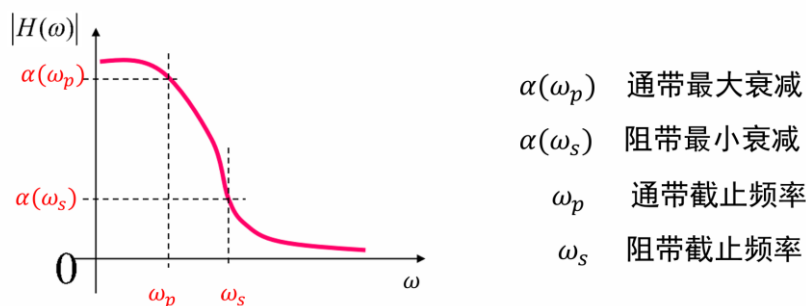
曲线单调下降：幅值函数无论在通带还是阻带都单调下降， $\omega = 0, |H(\omega)| = 1; \omega \rightarrow \infty, |H(\omega)| = 0$

幅频特性与  $n$  的关系： $n$  增加，变平坦

### 阶次的确定

巴特沃斯低通滤波器的衰减函数 $\alpha$

$$\alpha = -20 \lg |H(\omega)| = 10 \lg \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} \right]$$



设计低通滤波器时，通常取 $\alpha = 3dB$ 对应的频率值 $\omega_{3dB}$ 做**通带截止频率**，即

$$\omega_p = \omega_{3dB}$$

而在巴特沃斯低通滤波器中自带一个 $\omega_c$ 叫做截止频率，对应的有

$$\omega_c = \omega_{3dB}$$

三者的大小关系如下：

$$\omega_p \leq \omega_c < \omega_s$$

通带衰减函数

$$\alpha_p = 10 \lg \left[ 1 + \left(\frac{\omega_p}{\omega_c}\right)^{2n} \right]$$



阻带衰减函数

$$\alpha_s = 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\omega_s}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$$

(其实就是令 $\omega = \omega_c, \omega_p$ 对应的有 $\alpha(\omega_c), \alpha(\omega_p)$ )

由此可以求得所需的滤波器阶数

$$n \geq \frac{\lg \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}}{\lg \left( \frac{\omega_s}{\omega_c} \right)}$$

关于考察：

必须指出的是，通常取 $\alpha = 3dB$ 对应的频率值 $\omega_{3dB}$ 做**通带截止频率**，并不是必须的，如果题目有特别要求 $\omega_p$ 的频率及其对应的衰减系数，则依据题目为准，如果没有特别要求，则取 $\omega_p = \omega_c = \omega_{3dB}$ ，例如：

(1) 巴特波斯低通滤波器的频域指标为： $\omega_1 = 1000rad/s$ ，衰减不大于 $3dB$ ；当 $\omega_2 = 5000rad/s$ ，衰减至少为 $20dB$ 。求此滤波器的实际系统传递函数 $H(s)$ 。

对于这道题，可知 $\omega_c = 1000rad/s$ ， $\omega_s = 5000rad/s$ ， $\alpha_s > 20dB$ ，由于没有对 $\omega_p$ 做特别要求，因此取 $\omega_p = \omega_c = 1000rad/s$ ，此时

$$\alpha_p = 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^{2n} \right] = 3dB$$

因此只需要满足

$$\alpha_s = 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\omega_s}{\omega_c} \right)^{2n} \right] > 20dB$$

求得

$$n \geq 1.428$$

取 $n = 2$ ，查表得：

$$H(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^2 + \sqrt{2}\bar{s} + 1}$$

再令 $\bar{s} = \frac{s}{\omega_c}$ ，得：

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \omega_c s + \omega_c^2}$$

但是如果题目改成

巴特波斯低通滤波器的频域指标为：通带内 $\omega_1 = 800rad/s$ 处衰减不大于 $1dB$ ，截止角频率 $\omega_c = 1000rad/s$ ；当 $\omega_2 = 5000rad/s$ ，衰减至少为 $20dB$ 。求此滤波器的实际系统传递函数 $H(s)$ 。

此时就应该按照

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_1 = 800rad/s, \alpha_p \leq 1dB \\ \omega_s &= \omega_2 = 5000rad/s, \alpha_s \geq 20dB \\ \omega_c &= \omega_2 = 1000rad/s\end{aligned}$$

去求解了。

## 数字滤波器

离散时间信号——数字滤波器

将模拟滤波器单位冲激响应记作 $h_a(t)$ ，系统函数 $H(s)$

数字滤波器的冲激响应记作 $h(n)$ ，系统函数 $H(z)$

## 数字滤波器的优点

相比于模拟滤波器，数字滤波器有以下优点：

**精度高：**模拟器件（RLC）精度难以做高，而数字滤波器的精度只由字长决定。若要提高精度，只需增加字长。

**可靠性高：**模拟滤波器各参数可能受外界环境影响（如温度、湿度等），而数字滤波器一般不受外界环境影响，也没有元器件老化的问题。

**灵活性高：**可以通过编程随时修改滤波器特性的设计，灵活性高。

**便于大规模集成：**数字滤波器的设计有一定的规范性，便于大规模集成生产。数字滤波器可以工作于极低频率，可以比较容易地实现模拟滤波器难以实现的**线性相位系统**。

## 原理

假设输入序列 $x(n)$ ，输出序列 $y(n)$ ，则数字滤波器可用 LTI 系统表示为

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

传递函数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

若分母系数 $a_i = 0$ ，系统函数具有以上形式的称为**有限冲激响应（FIR）滤波器**

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k \delta(n-k)$$

单位脉冲响应的**时间长度有限**，最多有 $M+1$ 项

$H(z)$ 仅有单个极点 $z=0$ ，在单位圆 $e^{j\Omega}$ 内，故 FIR（有限冲激响应）滤波器总是稳定的

若分母系数 $a_i$ 至少有一项不为0，且分母至少存在一个根不为分子所抵消，称对应的滤波器为**无限冲激响应（IIR）滤波器**

例如：

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - z^{-1}}$$

$$h(n) = b_0(\delta(n) + \delta(n-1) + \dots) = b_0 u(n)$$

从响应可以看出 $h(n)$ 由无数多项冲激组成，**时间长度无限**

## 无限冲激响应（IIR）滤波器

间接设计法：借用模拟滤波器 $H_a(s)$ 求出相应的数字滤波器 $H(z)$

寻找一种变换关系把 $s$ 平面映射至 $z$ 平面

这个关系应该满足两个基本条件：

为保证模拟和数字滤波器的频率特性的相互对应关系， $s$ 的复频率轴必须映射到 $z$ 的单位圆上；

为了保持模拟和数字滤波器的稳定性， $s$ 的左半平面映射到 $z$ 的单位圆内。

### 冲激响应不变法

原则： $h(n)$ 等于所参照的模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 的采样（有限值）

$$h(n) = h_a(t)|_{t=nT}$$

根据设计指标得到 $H_a(s)$ ，拉普拉斯逆变换得 $h_a(t)$ ，采样得 $h(n)$ ， $z$ 变换得 $H(z)$

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{s - p_i}, h_a(t) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i t} u(t), h(n) = \sum_{i=1}^N K_i e^{p_i nT} u(n), H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}$$

可见从 $s$ 到 $z$ 的映射关系

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\omega T} = e^{\sigma T} e^{j\Omega} = e^{\sigma T} e^{j(\Omega + 2k\pi)} = e^{\sigma T} e^{j(\omega + \frac{2\pi}{T}k)T}$$

$\omega$ ——模拟角频率

$\Omega$ ——数字角频率

冲激响应不变法两频率的关系：

$$\Omega = \omega T$$

冲激响应不变法的特点：

- 模拟滤波器和数字滤波器之间的频率变换是线性关系
- 具有较好的时域逼近特性，可以很好地逼近模拟滤波器冲激响应
- $s$ 平面与 $z$ 平面映射的多值性容易造成频谱混叠现象

例题：

用冲激响应不变法设计巴特沃斯低通滤波器，满足技术指标：

$$\Omega_c = 0.2\pi \text{ rad}, \Omega_s = 0.5\pi, \alpha_s \geq 30\text{ dB}, T = 10\pi \mu\text{s}$$

解：

指标转换：

$$\omega_c = \frac{\Omega_c}{T} = 2 \times 10^3 \text{ rad/s}, \omega_s = \frac{\Omega_s}{T} = 5 \times 10^3 \text{ rad/s}, \alpha_s = 30\text{ dB}$$

求得

$$n \geq 3.8$$

### 双线性变化法

冲激响应不变法的缺点：容易造成频率响应混叠，只适用于低通或限带的高通、带通

原理：利用微分方程表示为差分方程

把  $s$  域  $\omega$  从  $(-\infty, \infty)$  压缩到  $(-\pi, \pi)$ ，这样就不存在周期重复，可构成**单值映射**

映射关系：

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right), z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

双线性变换法两频率的关系：

$$z = e^{j\Omega} = \frac{1 + \frac{T}{2}j\omega}{1 - \frac{T}{2}j\omega}$$
$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

双线性变换法的特点：

- 从  $s$  域到  $z$  域一一对应的映射关系
- $s$  平面虚轴唯一地映射到  $z$  平面的单位圆上，保证了  $H(z)$  的频率响应能**模仿**  $H_a(s)$  的频率响应，**避免了频率响应混叠现象**。
- 映射仍然遵循基本条件，保证了  $H(z)$ ,  $H_a(s)$  相比，稳定性不发生变化

双线性变换法的频率预畸变

冲激响应不变法模拟频率  $\omega$  和数字频率  $\Omega$  是线性关系：

$$\Omega = \omega T$$

双线性变换法是非线性关系：

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

模拟频率与数字频率间的**非线性关系**是双线性变换的**缺点**，会使数字滤波器与模拟滤波器在频率响应与频率的**对应关系上发生畸变**。

解决方法：

按照

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

求预畸变后的  $\omega_p, \omega_s$ ，模拟滤波器按照预畸变后的  $\omega_p, \omega_s$  来设计

例题：

用双线性变换法设计一个巴特沃思数字低通滤波器，采样周期  $T = 1s$ ，巴特沃思数字低通滤波器的技术指标为：

$$\Omega_p = 0.5\pi \text{ rad}, \alpha_p \leq 3\text{dB}$$
$$\Omega_s = 0.75\pi \text{ rad}, \alpha_s \geq 15\text{dB}$$

解：

预畸变：

$$\omega_c = \omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_p}{2} = 2$$

$$\omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_s}{2} = 4.828$$

求  $n$ :

$$\alpha_s = 10 \lg(1 + (\frac{\omega_s}{\omega_c})^{2n}) \geq 15 \text{ dB}$$

## 有限冲激响应（FIR）数字滤波器

这部分似乎不考？

### 优缺点

**IIR 滤波器：**

优点：含有零极点，可以利用模拟滤波器设计，计算量小，设计简单

缺点：零极点可能导致系统稳定性问题；相位的非线性

**FIR 滤波器：**

优点：严格线性相位；滤波器总是稳定的；可以利用 FFT 快速处理

缺点：阶次比 IIR 高，运算量大

### 设计目标

根据要求的  $H_d(\Omega)$ ，找出单位脉冲响应  $h(n)$  为有限长的离散时间系统，使其频率响应  $H(\Omega)$  尽可能逼近  $H_d(\Omega)$

系统函数：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

频率响应：

$$H(\Omega) = H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\Omega n}$$

相位条件：

**第一类线性相位滤波器：**

单位脉冲响应  $h(n)$  满足

$$h(n) = h(N-1-n)$$

则

$$\varphi(\Omega) = -\tau\Omega, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

**第二类线性相位滤波器**

单位脉冲响应  $h(n)$  满足

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

则

$$\varphi(\Omega) = \beta - \tau\Omega, \quad \tau = \frac{N-1}{2}, \beta = \pm \frac{\pi}{2}$$

## 设计方法

### 窗函数法：

由理想滤波器的频率特性

$$H_d(\Omega)$$

得到理想滤波器的脉冲响应序列

$$h_d(n) = IDTFT[H_d(\Omega)]$$

对 $h_d(n)$ 设计窗函数 $w(n)$ 对 $h_d(n)$ 截断得到

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

分析得到的数字滤波器的频率特性

$$H(\Omega) = DTFT[h(n)]$$

检验是否满足性能指标要求

### 优缺点：

优：无稳定性问题；容易做到线性相位；可以设计各种特殊类型滤波器；理论上简单

缺：不易控制边缘频率；幅频性能不理想； $h(n)$ 较长

## FIR 滤波器的网络结构

直接型；级联型，线性相位型；