Univerzitet u Tuzli
Fakultet elektrotehnike
Elektrotehnika i računarstvo
Matematika 1

ODGOVORI NA PITANJA ZA ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 1

TUZLA, 2020.

SADRŽAJ

ALGEBRA ISKAZA

1. ***Definirati pojam iskaza i istinitosne vrijednosti iskaza.***

Iskaz je ona rečenica koja može da ima jednu i samo jednu istinitosnu vrijednost: TAČAN, NETAČAN (odnosno istinit, neistinit). Tačan iskaz zovemo TVRĐENJE (STAV).

Znak za istinitosnu vrijednost iskaza *p* je *τ(p)*, i istinitosnu vrijednost TAČAN označavamo brojem 1, a istinitosnu vrijednost NETAČAN brojem 0. Često se istinitosna vrijednost tačan označava i znakom T, a istinitosna vrijednost netačan sa ⊥ što se čita "te" odnosno "nete".

2. ***Definirati konjukciju dva iskaza. Konjukcija iskaza p i q je netačan iskaz***

(a) ako su oba iskaza iste istinitosne vrijednosti

<u>(b) ako su iskazi suprotnih istinitosnih vrijednosti</u>

<u>(c) ako je bar jedan iskaz netačan</u>

(d) ako i samo ako su oba iskaza netačna.

Konjukcija iskaza p i q je iskaz "p i q", što se označava sa p^q, i ona je tačna ako su p i q tačni, a netačna ako p i q imaju druge vrijednosti.

3. ***Definirati disjunkciju dva iskaza. Disjunkcija iskaza p i q je tačan iskaz***

<u>(a) ako je bar jedan od iskaza tačan</u>

(b) samo ako su oba iskaza tačna

<u>(c) ako su iskazi suprotnih istinitosnih vrijednosti.</u>

Disjunkcija dva iskaza p i q je iskaz „p ili q", što se simbolički zapisuje p∨q. Disjunkcija iskaza p i q je tačna ako je:

1. p tačan i q tačan,
2. p tačan, a q netačan,
3. p netačan, a q tačan,

a netačan ako je p netačan i q netačan iskaz.

4. ***Definirati implikaciju dva iskaza. Implikacija iskaza q i p je tačan iskaz***

(a) ako su oba iskaza tačna

(b) ako su iskazi suprotnih istinitosnih vrijednosti

(c) ako su iskazi istih istinitosnih vrijednosti

(d) ako iz q slijedi p.

Implikacija iskaza p i q je iskaz „Ako je p ona je q“, što se označava sa „p=>q“. Ona je netačan iskaz samo u slučaju da je p tačan a q netačan iskaz. U svim ostalim slučajevima ona je tačan iskaz.

5. ***Definirati ekvivalenciju dva iskaza. Ekvivalencija iskaza p i q je netačan iskaz***

(a) ako iz p ne slijedi q

(b) ako su iskazi suprotni

(c) ako su iskazi isti

(d) ako je iskaz p tačan i iskaz q tačan.

Ekvivalencija iskaza p i q je iskaz „p je ako i samo ako je q“. Ona je istinita ako p i q imaju jednake istinitosne vrijednosti, a netačna ako p i q imaju različite istinitosne vrijednosti. Ekvivalenciju iskaza p i q označavamo sa ⇔q.

SKUPOVI, RELACIJE I PRESLIKAVANJA

6. ***Za skupove A i B kažemo da su jednaki***

<u>(a) ako su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B</u>

<u>(b) ako vrijedi A ⊂ B ∧ B ⊂ A</u>

(c) ako imaju iste elemente na odgovarajućim mjestima

(d) ako vrijedi (∀x) (a ∈ A ⇔ x ∈ B).

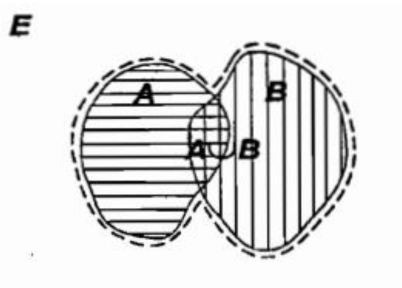
Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B i svaki element skupa B ujedno i element skupa A, onda su A i B identični (jednaki) skupovi, što se kratko zapisuje sa A=B i čita „skup A jednak skupu B“. Dakle, dva skupa A i B su jednaka ako i samo ako se sastoje od istih elemenata.

7. ***Definirati uniju, presjek i razliku skupova A i B***

Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa E. Tada se pod unijom skupova A i B podrazumijeva skup svih elemenata x∈E koji pripadaju bar jednom od skupova A ili B. Ako se sa C označi unija skupova A i B, tada se kratko zapisuje

$$C= A \cup B= \{x \in E: x \in A \vee x \in B\}$$

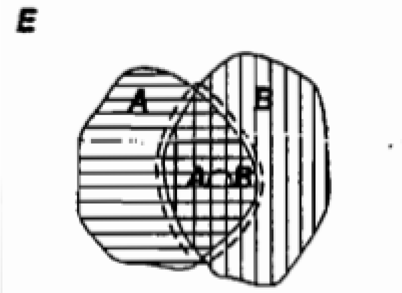
gdje je U početno slovo riječi „unija“.



Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa E, tada se skup C, koga čine svi elementi koji pripadaju istovremeno i skupu A i skupu B, tj. skup

$$C= \{x \in E: x \in A \wedge x \in B\}$$

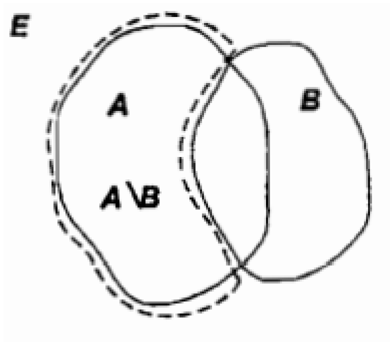
naziva presjek skupova A i B. Presjek skupova A i B simbolično se označava sa A ∩ B.



Može se desiti da presjek skupova A i B univezralnog skupa E nema nijednog elementa, odnosno da podskupovi A i B nemaju zajedničkih elemenata. Za takve skupove se kaže da su dijunktni. Skup bez ijednog elementa naziva se prazan skup i obično se označava sa Ø.

Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa E. Pod razlikom skupova A i B podrazumijeva se skup svih elemenata skupa A koji nisu istovremeno elementi skupa B. Razlika skupova A i B se simbolično zapisuje sa A\B što se čita: „A isključeno B“ ili „A bez B“. Definicija razlike skupova A i B se kratko zapisuje sa:

$$A \setminus B = \{x \in E: x \in A \wedge x \notin B\}$$



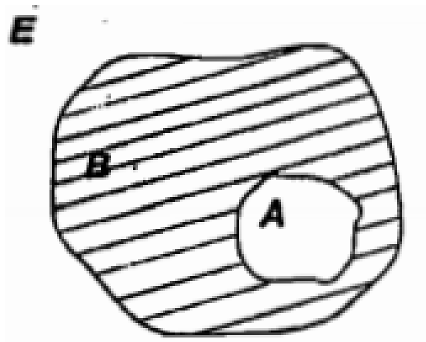
*8. **Definirati razliku dva skupa i komplement skupa***

Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa E. Pod razlikom skupova A i B podrazumijeva se skup svih elemenata skupa A koji nisu istovremeno elementi skupa B. Razlika skupova A i B se simbolično zapisuje sa A\B što se čita: „A isključeno B“ ili „A bez B“. Definicija razlike skupova A i B se kratko zapisuje sa:

$$A \setminus B = \{x \in E: x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa E i neka je A⊆B. Tada je skup svih elemenata skupa B koji nisu elementi skupa A naziva komplement skupa A u odnosu na skup B. To se simbolično zapisuje sa: A' ili C_B (A). Ova definicija se kratko zapisuje sa

$$C_B(A) = \{x \in E: x \in B \wedge x \notin A\}$$



9. ***Definirati pojam funkcije ili preslikavanja***

Neka su X i Y neprazni skupovi. Pod preslikavanjem (ili funkcijom) f, skupa X u skup Y podrazumijeva se svaki postupak (zakon) kojim se svakom element x iz skupa X pridružuje jedan i samo jedan element y iz skupa Y. Činjenicu da je f preslikavanje skupa X u skupu Y, označavamo na jedan od načina:

$$f: X \to Y;\ X \to Y \text{ ili } x \to f(x),\ x \in X \wedge f(x) \in Y$$

Elementi skupa X nazivaju se originali, a elementi skupa Y slike preslikavanja f. Skup X zovemo domen preslikavanja f i označavamo $D(f)$, a skup slika $f(X)$ kodomen preslikavanja f i označavamo sa $R(f)$.

10. ***Definirati kompoziciju dva preslikavanja. Neka su zadata preslikavanja f : R → R i g : R → R, definirana sa f(x)=3x+2 i g(x)=x(x−1), formirati ako je moguće preslikavanja f ∘ g i g ∘ f.***

Funkcijom f se svakom elementu $x \in E$ prvo pridružuje element $f(x) \in F$, a zatim funkcijom g se svakom elementu $y=f(x) \in F$ pridružuje element $g[f(x)] \in G$, dakle zadana je funkcija sa E u G. Tu funkciju nazivamo kompozicijom funkcija (posrednom funckijom) f i g i označavamo je sa $h= g\circ f$.

$f : R \to R$, $g : R \to R$

$f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x (x - 1)$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=(3x+2)(3x+2-1)=(3x+2)(3x+1)=9x^2+3x+6x+2=9x^2+9x+2$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f[g(x)]=3x(x-1)+2=3x^2-3x+2$

11. ***Za preslikavanje f : X → Y kazemo da je surjektivno ako***

<u>(a) svaki element iz skupa Y ima svoj original u skupu X</u>

(b) se svaki element skupa X preslikava u taˇcno jedan element skupa Y

(c) vrijedi $f(X) = Y$

(d) vrijedi $f^{-1}(Y) \subset Y$.

12. ***Za preslikavanje f : X → Y kazemo da je injektivno ako***

(a) $(\forall x, y \in X)\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

(b) jednaki originali imaju jednake slike

(c) jednakim slikama odgovaraju jednaki originali

<u>(d) $(\forall x, y \in X)\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$</u>

13. ***Definirati bijektivno preslikavanje uz objašnjenje svih pojmova koji se javljaju u toj definiciji. Da li je preslikavanje f(x) = |x| bijekcija?***

Za preslikavanje ƒ: X→Y kažemo da je bijekcija skupa X i skupa Y ili obostrano-jednoznačno preslikavanje skupova ako je ƒ istovremeno injekcija i surjekcija.

Funkcija f je bijektivna ako i samo ako je istovremeno i injekcija i surjekcija. Kažemo da je funkcija injekcija ako vrijedi $(\forall x, y \in X)$ $(x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$. Funkcija je surjekcija ako svaki element iz skupa Y ima svoj original u skupu X.

f(x) = |x| jeste bijekcija zbog toga sto je u prvom smislu injektivna f(x) = |x| , x=x, i zbog toga sto je u drugom smislu surjektivna odnosno f(x) = |x| → f(A) = B , A→B , x →|x| f(x) = |x|.

*14. **Koja je najvažnija osobina bijektivnih preslikavanja?***

Najvažnija osobina bijektivnog preslikavanja jeste postojanje funkcije $ƒ^{-1}$:K →D definisanu formulom $ƒ^{-1}(y)=x$, gdje je x϶D jedinstveni element takav da je ƒ(x)=y funkcija $ƒ^{-1}$ sistema inverznom funkcijom.

*15. **Ako $f : A \to B$ bijekcija čemu su jednake kompozicije $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$?***

Da bi postojala inverzna funkcija od funkcije ƒ: X→Y nužne su dvije pretpostavke:

1. Funkcija ƒ preslikava različite elemente skupa X u različite elemente skupa Y
2. Svaki element skupa X je slika nekog elementa skupa Y.

U tom slučaju možemo definisati funkciju g: Y→X tako da vrijedi

$$ƒ[g(y)]= y \ \forall \ y \text{ € } Y g[ƒ(x)]= x \ \forall \ x \text{ € } X$$

Ako za funkciju ƒ postoji takva funkcija g, tada je njihova kompozicija identitet tj. funkcija koja preslikava svaki element u samog sebe $ƒ\circ g=1_y$ i $g\circ ƒ=1_x$.

Zato funkciju g zovemo inverzna funkcija i označavamo sa $ƒ^{-1}$.

$ƒ\circ ƒ^{-1} = 1_Y$ i $ƒ^{-1}\circ ƒ= 1_X$

$ƒ^{-1}(ƒ(x))=x$, x϶A

$ƒ^{-1}\circ ƒ=i_A$

$ƒ(ƒ^{-1}(y))=y$, y϶B

$ƒ\circ ƒ^{-1}=i_B$

*16. **Definirati graf funkcije y = f (x).***

Grafom funkcije f zovemo skup tačaka u ravnini za koje vrijedi G= {(x, y): y= f(x)}. Grafik funkcije y = f(x) je skup tačaka (x,y) ravnine za koju vrijedi da je y = f(x) te čine krivulju. Formalnije to je skup : $G(f) \in R^2$, $G(f) = \{(x,y) \in R^2 : x \in D_f \ , y = f(x)\}$ Da bi neki skup tačaka u ravnini bio graf funkcije, svakoj vrijednosti x mora pripadati najviše jedna vrijednost y.

*17. **Definirati pojam binarne relacije na nepraznom skupu S. Kada za relaciju kažemo da je relacija ekvivalencije?***

Bilo koji neprazan podskup ρ Dekartovog proizvoda X1 x X2 x...x Xn ($X_k \neq \emptyset$, k= 1, 2,...n)n-arna relacija u tom proizvodu. Za elemente $x_1 € X_1$, $x_2 € X_2$,...$x_n € X_n$, kažemo da su u relaciji ρ, ako i samo ako $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \rho$.

Ako je n=2 tada dobijamo relaciju $\rho \subseteq X_1 \times X_2$ koja se zove binarna relacija u X_1 x X_2 . Specijalno, neprazan podskup ρ skupa X_2 zove se binarna relacija u X. ako je (x, y)ϵ ρ, tada se kaže da je x u relaciji ρ sa y i piše se ρ(x, y) ili xρy.

Skup uređenih parova{(x, y)}⊂ X x Y koji se u relaciji ρ piše s: ρ= { (x, y)€ X x Y: xρy}.

Za binarnu relaciju ρ u nepraznom skupu X kažemo da je relacija ekvivalencije ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ako vrijedi:

$$(\forall\, x € \ D(\rho))\ x\rho x$$

$$(\forall\, x, y \in D(\rho))\ x\rho y \Rightarrow y\rho x$$

$$(\forall\, x, y, z \in D(\rho))\ (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z,$$

i označava se sa "~". Ako je ρ relacija ekvivalencije i ako je xρy, onda kažemo da su x i y ekvivalentni i označavamo sa x~y.

*18. **Neka je na S definirana relacija ekvivalencije "∼".***
(a) Definirati klasu ekvivalencije relacije "∼".

(b) Sta je unija, a šta presjek svih klasa ekvivalencije relacije "∼"?

(a) Neka je u skupu X definisana relacija ekvivalencije ~ i neka je z proizvoljan element iz X. Neka je C_z skup svih elemenata iz X ekvivalentnih sa z. Za skup C_z se kaže da čini klasu ekvivalencije koja odgovara elementu z. Neka su C_z i C_y dvije klase koje odgovaraju elementima x i y, tada su skupovi C_z i C_y jednaki ili disjunktni. Znači skup X je podijeljen na disjunktne klase koje se zovu klase ekvivalencije. Klasu ekvivalencije skupa X koje odgovaraju elementu x kratko zapisujemo

$$C_x = [X] = \{y : y \in X \wedge x \sim y\}.$$

(b) Unijom skupova x i y sadržanih u univerzalnom skupu z zovemo skup C_z svih elemenata x takvih da je z∈x ili z∈y (moguće je da je z i u oba skupa). Pišemo C_z=x ∪ y . Presjek skupova x i y je skup D svih elemenata z takvih da je z∈x i z∈y . Označavamo ga sa D = x ∩ y (skup zajedničkih elemenata u x i y). Ovdje smo namjerno istaknuli da je skupovna operacija ∪ povezana sa veznikom ili, a operacija ∩ sa veznikom i.

SKUPOVI REALNIH I KOMPLEKSNIH BROJEVA

19. ***Kada za algebarsku stukturu (S, ◦) kažemo da je grupa? Da li su (N, +), (Z, +),(R, +) (N, ·), (Z, ·), (R, ·) grupe? Obrazložiti!***

Grupoid (S, ◦) se zove grupa ako su ispunjene sljedeće osobine:

- Asocijativnost: (za svako ∀ x, y, z€ S) x◦ (y◦z)= (x◦y) ◦z
- Neutralni element: (∀ x϶ S) x◦ e= e◦x= x
- Svaki element ima svoj inverzni element: (∀ x϶S postoji F x' ϶S) takav da je x◦x'= x'◦x= e; e neutralni element
- Ako grupa zadovoljava i zakon komutacije (x◦y= y◦x) onda se zove komutativna ili Abelova grupa.
- (N, +) Skup prirodnih brojeva N u odnosu na operaciju sabiranja ne čini grupu jer nema jediničnog (neutralnog) elementa e, tj. takvog elementa da je n+ e= n za svako n϶N.
- (N, ◦) Skup N ne čini grupu ni u odnosu na operaciju množenja jer nema inverznog elementa za svako n϶N.
- (Z, +) Skup cijelih brojeva Z čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju sabiranja. Zadovoljava sve tri osobina: zakon asocijativnosti, ima neutralni element 0, posjeduje svoj inverzni element od m to je –m.
- (Z, ◦) Nula je jedinični element a suprotan broj je inverzni element. Skup Z nije grupa u odnosu na operaciju množenja jer nema inverznog elementa.
- (R, +) Jeste grupa, jer zadovoljava sva tri svojstva: zakon asocijativnosti, ima neutralni element 0 i inverzni element npr . 1/m to je – 1/m.
- (R, ◦) Nije grupa zato što nema inverznog elementa za 0.

20. ***Kada za algebarsku stukturu (S, +, ·) kažemo da je polje? Da li su (N, +, ·), (Z, +, ·), (Q, +, ·), (R, +, ·) polja? Obrazložiti!***

Za algebarsku strukturu (S, +, ◦), S≠Ø kažemo da je polje ako zadovoljava sljedeće:

- (S, +) Abelova grupa

- (S \{o}, ◦) Abelova grupa i množenje je kumutativno na cijelom skupu S.
- (∀ x, y, z∈ S) x◦ (y+ z)= xy+ xz Množenje distributivno u odnosu na zbrajanje.
- (N, +, ◦) Nije polje, zbog toga što nije niti grupa, a uslov da bi algebarska struktura bila polje jeste da prvo mora da bude grupa.
- (Z, +, ◦) Nije polje, iako zadovoljava uslov da je (Z, +) komutativna grupa, množenje distributivno u odnosu na zbrajanje, ali ne zadovoljava uslov da je (Z\{o}, ◦) Abelova grupa I da je komutativno na cijelom skupu Z.
- (Q, +, ◦) Jeste polje, zbog toga što je (Q, +) komutativna grupa (Q\{o}, ◦) je Abelova grupa i množenje je distributivno u odnosu na zbrajanje.
- (R, +, ◦) Jeste polje, zbog toga što je (R, +) komutativna grupa.

21. *Dokazati da √ 2 nije racionalan broj.*

Pretpostavićemo suprotno, tj. da je √2 racionalan broj. Tada bi postojali relativno prosti brojevi m∈Z i n∈N takvi da je:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \qquad /*n$$

$$m = \sqrt{2}n \qquad /^2$$

Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo:

$$m^2=2n^2 \quad (1)$$

Iz (1) slijedi da je m^2 paran broj, odnosno da je m paran broj. Tada se može pisati da je

$$m = 2k, k\in Z \quad (2)$$

Zamjenom m iz (2) dobijamo jednakost $4k^2 = 2n^2$ ili $n^2 = 2k^2$. To znači da je n paran broj. Dakle brojevi m i n su djeljivi sa 2, što znači da oni nisu relativno prosti. To je u suprotnosti sa pretpostavkom. Ta kontradikcija obara pretpostavku da je √2 racionalan broj.

22. *Kako definiramo uredjenje na R i koje osobine zadovoljava?*

Uređenje na R bilo koja dva realna broja možemo usporediti. Realan broj x je manji od realnog broja y (pišemo x<y ili y>x) onda i samo onda ako se na brojnoj osi x nalazi lijevo od y. Ako je ili x<y ili x = y, pišemo x ≤ y. Relacija uređenja "≤" ima sljedeće osobine:

- Za svaki x ∈ R je x ≤ x (refleksivnost),
- Ako je x ≤ y i y ≤ z, onda je x ≤ z (tranzitivnost),
- Ako je x ≤ y i y ≤ x, onda je x = y,
- Za bilo koja dva realna broja x, y ∈ R je x ≤ y ili y ≤ x.

23. ***Šta je otvorena okolina realnog broja a, a šta ε-okolina realnog broja? Kako još možemo zapisati činjenicu da x ∈ (a − ε, a + ε)? Obrazložiti!***

Okolina realnog broja ɑ je svaki (proizvoljno mali otvoreni interval koji sadrži broj ɑ. Za broj x se kaže da se nalazi u blizini broja ɑ ako pripada interval (a – ε, ɑ + ε) za proizvoljno malo ε>0. Interval (a – ε, ɑ + ε) se naziva i ε okolina broja ɑ.

Činjenicu da x ∈ (a − ε, a + ε) možemo zapisati uz pomoć apsolutne vrijednosti. Dužina ε-okoline je 2ε. Zamijetite da realan broj x pripada ε-okolini broja a onda i samo onda ako je | x − a |< ε. Ako imamo neki broj x koji se nalazi između (a - ε) i (a + ε) okoline, to možemo zapisati kao: a – ε<x> a +ε, te prebacujući a kod x dobijemo:

-ε<x-a< ε iz toga slijedi: | x − a |< ε

24. ***Definirati gornje ograničenje skupa i supremum skupa A⊂R.***

Neka je R uređen skup i S⊂R (S podskup od R), S≠Ø. Ako za neko m∈R vrijedi (∀ x∈ S) m≤x tada se za m kaže da je donje ograničenje ili minoranta skupa S. Ako za neko n∈R vrijedi (∀ x∈S) x≤n tada se za n kaže da je gornje ograničenje ili majoranta skupa S. Za skup S se kaže da je ograničen ako ima minorantu i majorantu.

25. ***Definirati donje ograničenje skupa i infimum skupa A ⊂R.***

Skup S⊂R ima donja ograničenja ako postoji realan broj m takav da x ≥ m za svako x ϵ S Minoranta. Najveća minoranta skupa S je infinum(infS). Ako skup svih minoranata skupa S ima maksimum m, tada se za m kaže da je infimum skupa S i piše se m= infS. Infimum (donja granica) skupa S⊂R je najveće donje ograničenje skupa S i označava se sa infS. Ako supS∈S nazivamo ga maksimalnim elementom skupa S i označavamo sa max S. Ako infS∈S nazivamo ga minimalnim elementom skupa S i označavamo sa min S.

26. ***Odrediti supremum, infimum, minimum, maksimum (ako postoje) skupova 1 n : n ∈N , {x ∈R : x 2 ≤ 2}.***

$$Max\left\{\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}\right\}=1\,jer\,najmanji\,broj\,n\in N\,je\,1, a\,\frac{1}{n}=1$$

$$Min\left\{\left\{\frac{1}{n}:n\ \in\ N\right\}\right\}\ Ne\,posjeduje, jer\,skup\,N\,je\,neograničen\,odozgo.$$

$$Sup\left\{\left\{\frac{1}{n}:n\in N\right\}\right\}=1\,jer\,najmanji\,broj\,n\in N\,je\,1, a\,\frac{1}{1}=1$$

$$Inf\left\{\left\{\frac{1}{n}: n \in N\right\}\right\} = 0. Jer\ povećavajući\ n, približavamo\ se\ vrijednosti\ izraza\ 0, tj. \frac{1}{besk} = 0$$

$$Min = inf\{x \in R: x^2 \leq 2\} = -\sqrt{2}\ jer\ najmanja\ vrijednost\ ovog\ izraza\ je\ zadovoljena\ kada\ je\ x = -\sqrt{2}, a\ pošto\ pripada\ skupu\ R, to\ je\ ujedno\ i\ min.$$

$$Max = Sup\{x \in R: x^2 \leq 2\} = \sqrt{2}\ jer\ najveća\ vrijednost\ je\ x = \sqrt{2}$$

27. ***Koji od sljedećih iskaza nisu tačni?***

(a) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(b) $\sqrt{x^2} = x$

(c) $(\forall x, a \in R, a > 0)\ (|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a)$

(d) $(\forall a, b \in R)\ |a| + |b| \leq |a + b|$

28. ***Navesti i dokazat tzv. nejednakost trougla.***

Apsolutna vrijednost zbira realnih brojeva manja je ili jednaka zbiru apsolutnih vrijednosti sabiraka. Dokaz. Iz $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$ $(x_1, x_2 \in R)$

$$-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|$$

$$-|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$$

Sabiranjem dobijamo $-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|$

Odakle prema 3. osobini $((|x| \leq a\ (a > 0)) \Leftrightarrow (-a \leq x \leq a)$,

slijedi: $|x_1 + x_2| \leq ||x_1| + |x_2|| = |x_1| + |x_2|$.

$$|x + y| = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \leq \sqrt{x^2 + 2|x||y| + y^2} = \sqrt{(|x| + |y|)^2}$$

29. ***Navesti princip matematičke indukcije i objasniti kako ga primjenjujemo***

Peti Peanov aksiom, koji je poznat i kao princip matematičke indukcije, upotrebljava se pri dokazivanju iskaza čija formulacija implicira prirodne brojeve.

Princip matematičke indukcije može se iskazati i na sljedeći način:

Zadan iskaz P je istinit za svaki prirodan broj:

- Ako je istinit za prirodan broj 1 (vrijedi za P(1))

- Ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj $n = k \geq 1$ slijedi da je istinit za broj $k+1$.

Može se desiti da jedan iskaz važi počev od prirodnog broja $n_0>1$. Tada se princip matematičke indukcije iskazuje na sljedeći način. Ako je neki iskaz istinit za prirodan broj n_0 i ako iz pretpostavke da je istinit za prirodan broj $k \geq n_0$ slijedi da je istinit za $n= k + 1$, tada je ovaj iskaz istinit za svaki prirodan broj $n \geq n_0$.

30. Navesti i dokazati tzv. Bernulijevu nejednakost.

Teorem: Neka je n prirodan broj i x realan broj veći od −1. Tada vrijedi

$$(1 +x)^n \geq 1+nx.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$ ili $x=0$.

Dokaz: Ako je $n= 1$ ili $x=0$, tada je $(1 +x)^n=1+nx$. Za n veći od 1 i $x\neq 0$ nejednakost (i to strogu) dokazujemo matematičkom indukcijom. Za $n=2$ nejednakost vrijedi jer je $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj n veći i od 1 vrijedi $(1 +x)^n>1+nx$ i dokažimo da ta nejednakost vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1 +x)(1 +nx)\\ &=1+(n+1)x+nx^2\\ &>1+(n+1)x\end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, stroga nejednakost vrijedi za svaki prirodni broj n veći od 1 i svaki realan broj $x\neq 0$

31. Navesti opću definiciju skupa kompleksnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja. Da li je (C, +, .) polje?

Neka je R polje realnih brojea. Za bilo koja dva elementa $(a,b), (c,d) \in R^2$ neka je

$$\begin{cases} (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \\ (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd, \quad ad+bc) \end{cases}$$

Skup R^2 koji ima navedene osobine nazivamo skup kompleksnih brojeva i označava se sa C.

Da li je $(C,+,\cdot)$ polje?

Skup R^2 uz definisane operacije sabiranja i množenja, ima algebarsku strukturu polja, što se može dokazati koristeći se činjenicom da je skup R polje u odnosu na operacije “+” i “·” definisane u R.

1. Sabiranje u C je asocijativno. Neka su (a,b),(c,d),(e,f) proizvoljni elementi iz C, tada je [(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a+c, b+d)+(e,f)=((a+c)+e, (b+d)+f)=(a+(c+e), b+(d+f))=(a,b)+(c+e, d+f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)].
2. (∀(a,b)∈C)(∃(0,0)∈C) tako da je (a,b)+(0,0)=(a+0, b+0)=(a,b).
3. (∀(a,b)∈C)(∃(-a,-b)∈C) tako da je (a,b)+(-a,-b)=(a+(-a), b+(-b))=(a-a, b-b)=(0,0).
4. (∀(a,b),(c,d)∈C)=>(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)

Na osnovu 1, 2, 3 i 4 slijedi da je (C,+) Abelova grupa.

5. (∀(a,b),(c,d),(e,f)∈C)=> [(a,b)·(c,d)]·(e,f)=(a,b)· [(c,d)·(e,f)].
6. (∀(a,b),(c,d),(e,f)∈C)=> [(a,b)+(c,d)]·(e,f)=(a,b)· (e,f)+(c,d)·(e,f).
7. (∀(a,b)∈C)(∃(1,0)∈C) tako da je (a,b)+(1,0)=(a,b). broj (1,0) je jedinica u C.
8. (∀(a,b)∈C∧(a,b)≠(0,0))(∃(x,y)∈C) tako da je (a,b)(x,y)=(1,0), odakle je

   ax-by=1

   ay+bx=0

   rješavanjem ovog sistema jednačina po x I y dobije se:

   $$x = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

   Dakle, inverzni element za (a,b) je kompleksan broj

   $$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$
9. (∀(a,b),(c,d)∈C)=>(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ca-bd,da+cb)=(c,d)(a,b)

Na osnovu osobina 1 do 9 i na osnovu definicije polja slijedi da je (C,+,·) polje.

*32. **Kako se iz općeg prelazi u algebarski oblik kompleksnog broja?***

Kompleksan broj (0,1) zovemo imaginarna jedinica i označavamo ga sa i, dakle i=(0,1). Svaki kompleksan broj z možemo napisati u obliku

Z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy

što predstavlja poznati algebarski ili Gausov oblik kompleksnog broja z=x+iy. Broj x naziva se realni, a y imaginarni dio broja z.

$\bar{z} = x - iy$ je konjugovano kompleksan broj broja z=x+iy.

Za komplekse brojeve z_1, z_2∈C vrijedi:

1. $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm y_1 i) \pm (x_2 \pm y_2 i) = (x_1 \pm x_2) \pm (y_1 \pm y_2)$
2. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \pm y_1 i) \cdot (x_2 \pm y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)i$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$
4. $z^n = r^n \cdot [cosn\theta + i \cdot sinn\theta]; r = \sqrt{x^2 + y^2}$

33. ***Uvodeći pojam modula i argumenta kompleksnog broja izvesti trigonometrijski oblik kompleksnog broja.***

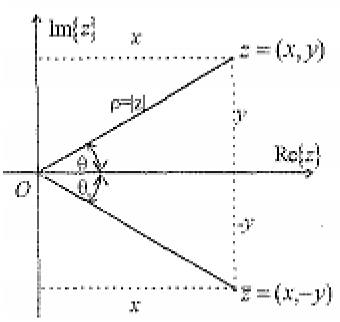
Modul kompleksnog broja z u oznaci |z|, je nenegativan broj

$$|z| = \sqrt{(Re\{z\})^2 + (Im\{z\})^2} \qquad (1)$$

Ako jednakost (1) napišemo u obliku $|z| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$, zaključujemo da modul nije ništa drufo do rastojanje kompleksnog broja z=(x,y) od kompleksnog broja 0=(0,0), koji jedini ima osobinu da je |0|=0.

Za modul kompleksnog broja, očito važe relacije:

$$|\bar{z}| = |z|; \;\; |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$



Iz trougla 0 x z nalazimo x=|z|cosΘ, y=|z|sinΘ, gdje je <(0 x, 0z)= Θ. Ovaj ugao naziva se argument kompleksnog broja z=(x,y) i označava sa argz. Ugao Θ možemo izraziti pomoću tgΘ= $\frac{y}{x}$,odakle je Θ=arctg$\frac{y}{x}$. Ako se ugao Θ posmatra u granicama -Д≤Θ≤Д, tada znajući da se arctg$\frac{y}{x}$ može u tim granicama predstaviti grafikom kao na slici. argz=arg(x,y), možemo izraziti formulom

$$argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x} - \pi, ako\ je\ x < 0 \wedge y < 0, \\ arctg\frac{y}{x}, ako\ je\ x > 0 \wedge y < 0 (y > 0), \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, ako\ je\ x < 0 \wedge y \geq 0. \end{cases}$$

Zapazimo da kompleksni broj z=0 nema definisan argument. Novi oblik kompleksnog broja:

$$z=|z|(\cos\Theta+i\sin\Theta),$$

tzv. trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi zadati u obliku:

$z_1=|z_1|(\cos\Theta_1+i\sin\Theta_1)$; $z_2=|z_2|(\cos\Theta_2+i\sin\Theta_2)$

Tada važi sljedeća tvrdnja:

$z_1=z_2 \Leftrightarrow (|z_1|=|z_2| \wedge \Theta_1=\Theta_2+2k\pi)$ $(k \in Z)$

Prema tome, $z_1=z_2$ ako I samo ako su njihovi moduli jednaki, a argumenti su jednaki po modulu 2π(tj.,$\Theta_1-\Theta_2=k\cdot(2\pi)$, $k \in Z$).

*34. **Navesti Moavrovu formulu. Ako je z = 1 + i izračunati z^{20}***

Moavrova formula: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\Theta_1+\Theta_2) + i\cdot\sin(\Theta_1+\Theta_2)]$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\Theta 1 - \Theta 2) + i\cdot\sin(\Theta 1 + \Theta 2)]$$

$z^n = r^n \cdot[\cos\Theta + i\cdot\sin\Theta]^n = r^n \cdot[\cos\cdot n\Theta + i\cdot\sin\cdot n\Theta]$ Za r = 1 na osnovu prethodne relacije dobijamo relaciju $[\cos\Theta + i\cdot\sin\Theta]^n = [\cos\cdot n\Theta + i\cdot\sin\cdot n\Theta]$, $n \in N$ koja je poznata pod nazivom Moavrova formula.

Ako je $z_1=1+i$; $z_2=1-I$, izračunati $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ i z_1^{20}.

$z_1\cdot z_2 = (1+i)(1-i)=1-i^2=2$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)\cdot\left(\frac{1+i}{1+i}\right) = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} = i$$

*35. **Izvesti formulu za korjenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku. Izračunati $\sqrt[3]{-1+i}$.***

Kompleksan broj $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ nazivamo n-ti korijen kompleksnog broja $z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$, I pišemo $w=\sqrt[n]{z}$, ako je $w^n = z$. Ovdje, na osnovu formule za stepenovanje kompleksnih brojeva, dobijamo

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin\varphi)=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)$$

odakle je $\rho^n=r$ ili $\rho=\sqrt[n]{r}$, gdje se pod $\sqrt[n]{r}$ podrazumijeva aritmetički korijen, a $n\varphi=\Theta+2k\pi$, ili $\varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$. Iz $\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{k}{n}\cdot 2\pi$ slijedi da će sinusi, odnosno kosinusi ugla, φ, biti različiti za k=0,12,…,n-1, pa će

$$w = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

Imati n različitih vrijednosti I označavamo ih sa $w_0, w_1, \ldots, w_n$, dakle

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi\pi}{n} + isin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2, \ldots, n-1$$

Ova formula se zove formula za korjenovanje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku.

36. ***Koja je zajednička osobina kompleksnih brojeva koje dobijamo u izračunavanju n-tog korijena nekog kompleksnog broja. Koji položaj zauzimaju u kompleksnoj ravni?***

Rješenja koja dobijemo prilikom izračunavanja n-tog korijena nekog kompleksnog broja čine vrhove pravilnog n-terokuta (pravilnog mnogougla koji ima n stranica) upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu i radijusa ... (n-ti korijen iz r).

37. ***Definirati prirodni logaritam kompleksnog broja. Izračunati Ln(√3-i)***

Neka je z=r(cosΘ+isinΘ) proizvoljan kompleksan broj. Eulerrov oblik kompleksnog broja je dat sa

$$z=r(\cos\Theta+i\sin\Theta)=re^{i\Theta}$$

Na osnovu jednakosti dva kompleksna broja, dobijamo da je

$$z=re^{i(\Theta+2kД)},\ k\epsilon Z$$

Prirodni logaritam kompleksnog broja z u oznaci Lnz, definiše se kao I u skupu R, tj.

$$\omega=Lnz \Leftrightarrow z=e^{\omega},\quad (\omega\epsilon C)$$

Iz gornjih relacija, dobivamo

$$Lnz=lnr+i(\Theta+2kД),\quad k\epsilon Z$$

Dakle, Ln je višeznačna funkcija, a izrazom Lnz=lnr+iД, -Д<Θ<Д

je definisana tzv. principalna ili glavna vrijednost prirodnog logaritma kompleksnog broja.

ALGEBRA MATRICA

*38. **Definirati pojam matrice i njene osnovne elemente.***

Neka su m i n prirodni brojevi. Skup A realnih ili kompleksnih brojeva

$$a_{ij}\ (i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$$

koje zapisujemo u obliku pravougaone šeme

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2\cdots} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Zvaćemo matrica. Za matricu (1) kažemo da ima m vrsta i n kolona, odnosno da je tipa (formata) mxn. Umjesto (1) kraće pišemo A=$[a_{ij}]_{mxn}$. Brojeve a_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n) zovemo elementimamatrice (1). Ako je broj i vrsta matrice A jednak broju kolona, tj. m=n, tada za matricu A kažemo da je kvadratna matrica reda n. Matrica A je realna ako su svi elementi a_{ij} realni brojevi. Prvi index označava redni broj vrste a drugi broj kolone. Dakle, brojevi a_{ik} (k=1,2,…,n) čine i-tu vrstu matrice (1), a brojevi a_{kj} (k=1,2,…,m) čine j-tu vrstu matrice (1).

Matrica može biti i višedimenzionalna, tj. sa elementima npr. oblika a_{ij};

i=1,2,…,m; j=1,2,…,n; k=1,2,…, p.

Za elemente a_{ij} matrice (1) kažemo da se nalazi u presjeku i-te vrste i j-te kolone matrice (1). Za elemente $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ kvadratne matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2\cdots} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

kažemo da čine dijagonalu matrice A. zbir elemenata kvadratne matrice (2) koji čine glavnu dijagonali zove se trag matrice A i obilježava se sa trA. Dakle,

$$trA=\sum_{i=!}^{n} a_{ii} = a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$$

Transponovana matrica matrice A=$[a_{ij}]$ tipa $m_X n$ je matrica B= $[b_{ij}]$ tipa $n_X m$ za koju je $a_{ij}=b_{ji}$, (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n). transponovanu matricu matrice A označavamo sa A^T.

39. ***Ako je matrica formata m×n, kako glase elementi njene pretposljednje vrste i treće kolone?***

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \ \vdots \\ a_{m-11} & a_{m-12} & a_{m-13} & \cdots & a_{m-1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementi pretposljednje vrste matrice A_{mxn} su: [$a_{m-11}a_{m-12}\ldots a_{m-13}a_{m-1n}$].

Elementi treće kolone su: [$a_{13}a_{23}\ldots a_{m-13}a_{m3}$].

40. ***Kod kojih matrica možemo govoriti o tragu matrice? Definirati trag matrice.***

O tragu matrice možemo govoriti kod kvadratnih matrica. Sada ćemo uvesti još neke specijalne matrice. Neka je kvadratna matrica n-tog reda.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Za njene matrične elemente a_{11}, a_{22}, a_{33},…, a_{nn} kažemo da leže na glavnoj dijagonali, a njihov zbroj označavamo s trA i zovemo trag matrice A. Dakle,

$$trA= a_{11}, a_{22}, a_{33},\ldots, a_{nn}.$$

41. ***Definirati pojmove dijagonalne, skalarne, jedinične i nula matrice.***

Za kvadratnu matricu $A=(a_{ij})$ n-tog reda kažemo da je dijagonala, ako su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako je $a_{ij}=0$ za $i\neq j$. dijagonalnu matricu kojoj su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki nazivamo skalarnom matricom. Općenito, svaku matricu formata mxn čiji su svi elementi jednaki nuli zovemo nul-matricom I označavamo s O.

42. ***Definirati determinantu matrice formata 2×2. Iskazati Stav Laplaceov razvoj determinante.***

Definicija determinante drugog reda: Determinantom matrice $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ zovemo broj $detA=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Neka je A = (a_{ij}) kvadratna matrica n-tog reda. Kao i do sada, s A_{ki} označimo kvadratnu matricu (n−1)-vog reda koja se iz dobiva iz matrice A tako da se ispuste k-ti redak i i-ti stupac.

Neka je

$$B=(b_{ij}) = [a_i, a_1,\ldots, a_{i-1}, a_{i+1},\ldots, a_n]$$

Matrica koja se dobiva iz matrice A pomoću (i-1) zamjena susjednih stupaca matrice A. uočimo da je

$$b_{k1}=a_{ki},\ B_{ki}=A_{ki}\ \ (k=1,\ldots,n)$$

$$\det B=(-1)^{i-1}\det A$$

$$detB = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_{k1}detB_{k1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{k1}detA_{k1}$$

$$(-1)^{i-1}detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{ki}detA_{ki}$$

Množenjem posljednje jednakosti s $(-1)^{i-1}$ dobivamo:

- po i-tom stupcu:

$$detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ki}detA_{ki}$$

- po i-tom retku:

$$detA = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i}a_{ik}detA_{ik}$$

43. *Za koje determinante navodimo Sarrusovo pravilo i kako to pravilo glasi?*

Sarrusovo pravilo navodimo za determinante trećeg reda. Uz tablicu determinante prepišemo prve dvije kolone date determinante. Pomnožimo elemente na glavnim dijagonalama, a zatim na sporednim. Proizvodi glavnih dijagonala se uzima predznak "+", a za elemente sporednih znak "-".

*44. **Navesti osobine determinanti.***

Neka je A= $[a_{ij}]$ kvadratna matrica reda n tada detA ima sljedeće osobine:

- detA= $\det A^T$ za ma koju kvadratnu matricu A
- Determinantu množimo skalarom tako što tim skalarom pomnožimo samo jednu vrstu (kolonu)
- Vrijednost determinante se ne mijenja ako jednoj vrsti dodamo drugu vrstu prethodno pomnoženu nekim brojem različitim od nule. Isto vrijedi i za kolone
- Determinanta je jednaka nuli ako ima jednu nul-vrstu ili nul-kolonu
- Ako ima dvije kolone ili vrste potpuno iste determinant je nula.

*45. **Koji od sljedećih iskaza su osobine determinanti?***

(a) Ako u matrici izvršimo zamjenu mjesta ma koje vrste i kolone, determinant ne mijenja vrijednost.

(b) <u>Ako matrica ima dvije jednake vrste, vrijednost determinante je 0.</u>

(c) <u>Ako matrica ima dvije jednake kolone, vrijednost determinante je 0.</u>

(d) <u>Determinantu množimo brojem tako da joj bilo koju vrstu ili kolonu pomnožimo tim brojem.</u>

(e) $\det(A) = \det(A^{-1})$.

*46. **Definisati minor matrice formata m × n.***

Posmatrajmo matricu A=$[a_{ij}]$ tipa $m \times n$. Ako iz matrice A izdvojimo $r(r \leq m)$ vrsta koje su numerisane redom $i_1, i_2, \ldots, i_r$ i pri čemu je $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r \leq m$ i $s(s \leq n)$ kolona koje su numerisane sa $k_1, k_2, \ldots, k_r$ i pri čemu je $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_s \leq n$ tada elementi koji se nalaze u presjecima izdvojenih vrsta i kolona obrazuju matricu tipa $r \times s$, tj. matricu

$$[A_{ik}]_{rxs} = \begin{bmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_1k_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_rk_1} & a_{i_rk_2} & a_{i_rk_s} \end{bmatrix}$$

Koju zovemo submatrica matrice A. Ako je r=s tada je submatrica kvadratna reda s, tj. oblika

$$[A_{ik}]_s = \begin{bmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_1k_s} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} \cdots & a_{i_1k_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_sk_1} & a_{i_sk_2} & a_{i_sk_s} \end{bmatrix}$$

Minor proizvoljnog elementa a_{ij} determinante matrice $[A_{ij}]_{mxn}$ je determinant $[A_{ik}]_{rxs}$ matrice, koja je dobijena iz matrice $[A_{ij}]_{mxn}$ brisanjem i-te vrste i k-te kolone.

47. ***Definisati rang matrice formata m × n. Koje su moguće vrijednosti ranga ovakve matrice?***

Maksimalan broj linearno nezavisniih vrsta se zove rang vrsta, a maksimalan broj nezavisnih kolona rang kolona. Elementarnim transformacijama nad vrstama (kolonama) ne mijenja se rang vrsta (kolona). Rang vrsta matrice A jednak je rangu kolona matrice A. Taj broj se zove rang matrice A i označava sa r(A) ili rang(A). Ako su svi elementi matrice A nule, tada po definiji smatramo da je rangA=0.

MOGUĆE VRIJEDNOSTI: 0 ≤ rangA ≤ mn(m,n)

48. ***Pri nalaženju ranga matrice služimo se elementarnim transformacijama. Navesti ih.***

Pod elementarnim transformacijama matrice podrazumijevamo sljedeće operacije:

- Množenje kolona (vrsta) jednim brojem različitim od nule,
- Dodavanje jednoj koloni (vrsti) neke druge kolone (vrste) prethodno pomnožene nekim brojem različitim od nule i
- Zamjena mjesta dviju kolona (vrsta).

49. ***Elementarne trasformacije nad matricama su (zaokruži):***

(a) <u>Zamjena mjesta dvjema kolonama (vrstama).</u>

(b) Brisanje jednakih vrsta (kolona).

(c) <u>Množenje kolone (vrste) proizvoljnim brojem.</u>

<u>(d) Dodavanje jednoj koloni (vrsti) neke druge vrste (kolone).</u>

50. ***Ako na matricu A primjenimo neku elementarnu transformaciju, dobijamo matricu B. Kako nazivamo takve matrice i koja je veza izmedju njih?***

Za dvije matrice A i B istog reda koje se mogu transformisati jedna u drugu konačnim brojem elementarnih transformacija kažemo da su ekvivalentne i pišemo A ≅ B . Ekvivalentne matrice imaju isti rang. Obrnuto ne važi. Zovemo je ekvivalentna matrica. Rang matrice ne mijenja se promjenom elemenata Transformacijom. Zato ako od matrice A primjenom konačnog broja elemenata transformacija dobijemo matricu B, tada vrijedi da je rangA=rangB. Tada kažemo da je matrica A ekvivalentna matrici B i sto označavamo A~B.

51. ***Matrica A, formata n × n je regularna ako i samo ako je rang(A) = 1.***

(a) Da.

(b) Ne.

(c) Samo ako je A kvadratna matrica.

(d) Samo ako je n = 1.

52. ***Definirati operaciju sabiranja nad matricama. Navesti osnovne osobine sabiranja matrica.***

Def: Zbroj C=A+B matrica $A=(a_{ij})$ i $B=(b_{ij})$ formata m×n definiše se kao matrica $C=(C_{ij})$ formata m×n s elementima

$$c_{ij}= a_{ij} + b_{ij} \ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots n).$$

Osobine sabiranja matrica:

- (A + B) + C = A+ (B + C),
- A + O = O + A = A, gdje je O nul-matrica formata m×n,
- A + (-A) = (-A) + A = O,
- A + B = B + A.

53. ***Definirati množenje matrice skalarom. Navesti osnovne osobine ovog množenja.***

Def: Matrica A množi se skalarom α tako da se svaki njen element pomnoži s α.

Osobine množenja matrica:

- λ(A + B) = λ A + λB,
- (λ + μ)A = λ A + μA,
- (λμ)A = λ(μA),
- 1·A = A.

54. ***U definiciji proizvoda koje tipove matrica množimo i kako definiramo to množenje? Šta je bitno u navedenom množenju i sta je njegov rezultat?***

Def: Produkt AB matricu A i B definiše se samo onda ako su te matrice ulančane, tj. ako prva matrica A ima onoliko stupaca koliko druga matric B ima redaka. Ako je matrica A formata mxp i B formata pxn, product C=AB je matrica formata mxn, čiji se elementi računaju po formuli:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \qquad j = 1, \dots, n$$

55. ***Definisati operaciju množenja nad matricama i navesti osnovne osobine množenja matrica.***

Proizvod matrica A i B se definiše samo u slučaju kad su matrice ulančane, tj. ako se broj kolona prve matrice podudara sa brojem vrsta druge matrice i tada matrica AB ima broj vrsta matrice A a broj kolona matrice B. Ako je matrica A formata mxp i B formata pxn, onda je proizvod C=AB matrica formata mxn čiji su elementi cmn. Element c_{ij} tj. element koji se nalazi u presjeku i- te vrste i j- te kolone matrice C= AB jednak je kanonskom proizvodu i- te vrste matrice A i j- te kolone matrice B, gdje pod kanonskim proizvodom vrste a_{i1} , ... , a_{in} širine n i kolone b_{1j} , ... b_{nj} visine n po definiciji podrazumijevamo broj ∑ nk=1 a_{ik} b_{kj} , tj. uočimo da se matrični element c_{ij} dobiva kao "skalarni product" i-tog retka a^i matrice A sa j-tim stupcem b_j matrice B, tj. ako stupac b_j identificiramo s uređenom p-torkom, onda je c_{ij} $=(a^i|b_j)$. Takav product naziva se kanonski product i-tog retka s j-tim stupcem.

Osobine množenja matrica:

- (AB)C = A(BC) – asocijativnost
- A(B + C) = AB + AC – distributivnost slijeva
- (A + B)C = AC + BC – distributivnost zdesna
- (λA)B = A(λB) = λ(AB)

56. ***Šta znače pojmovi regularna i singularna matrica.***

Za kvadratnu matricu A kažemo da je regularna ili invertibilna ako postoji kvadratna matrica B takva da je A·B=B·A=I. U suprotnom kažemo da je singularna.

57. ***Koje matrice imaju inverznu matricu i kako računamo inverznu matricu (objasniti formulu).***

Za kvadratnu matricu A reda n kažemo da je regularna ako postoji matrica B reda n takva da je A·B= B·A=I. U ovom slučaju matricu B nazivamo inverznom matricom matrice A i označavamo je sa A^{-1}. Inverzna matrica je jedinstvena. Ako je A regularna matrica reda n tada je $A^{-1}=\frac{1}{detA}\cdot adjA$. Prema definiciji inverzne matrice treba dokazati da je $A\cdot A^{-1}= A\cdot\frac{1}{detA}\cdot adjA = I$.

Neka je $A=(a_{ik})$ matrica reda n. tada je:

$$\begin{cases} detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, i = 1,2,\dots n \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0, i \neq j \end{cases}$$

Iz relacije

$$A\cdot A^{-1} = \frac{1}{detA}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pa je na osnovu prethodne formule

$$A\cdot A^{-1} = \frac{1}{detA}\cdot\begin{bmatrix} detA & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & detA & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & detA & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & detA \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Čime je teorema dokazana.

58. ***Dokazati da proizvoljna kvadratna regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.***

Pretpostavimo da matricu A ima inverznu matricu A^{-1}. Tada je $\det(A\cdot A^{-1})=\det I=1$ pa zbog toga $\det(A\cdot A^{-1})=\det A^{-1}=1$ slijedi da je $\det A\neq 0$ kako je:

Kako po pretpostavci $A\neq 0$ zaključujemo da je $A\cdot(\det A)^{-1}\cdot A_{adj}=I$.To znači da je matrica $\cdot(\det A)^{-1}\cdot A_{adj}$ desni inverz matrice A. Na sličan način bismo zaključili da je $A_{adj}\cdot A=\det A\cdot I$ odakle slijedi da je $\det A^{-1}\cdot A_{adj}$ također i lijevi inverz matrice A. Dakle ako je kvadratna matrica A regulirana, tada postoji I njena jedinstvena inverzna matrica koja je jednaka $A^{-1}=(\det A)^{-1}\cdot A_{adj.}$

59. ***Svaka dijagonalna matrica ima inverznu matricu.***

<u>DA</u> NE (zaokružiti)

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

60. ***Zapisati opšti sistem linearnih algebarskih jednačina. U zavisnosti od slobodnih članova sistema, kako dijelimo ove sisteme? (objasniti)***

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = b_m$$

U zavisnosti od slobodnih članova sistema, ove sisteme dijelimo na homogene i nehomogene. Ukoliko je barem jedan od slobodnih koeficijenata različit od 0 onda je riječ o nehomogenom sistemu, ukoliko su svi jednaki 0 onda je to homogeny sistem.

61. ***Zapisati opšti sistem linearnih algebarskih jednačina. Šta podrazumijevamo pod rješenjem ovog sistema. U zavisnosti od rješenja, kako dijelimo sisteme? (objasniti)***

Opšti sistem linearnih jednačina algebarskih jednačina: mi ćemo proučavati sisteme od m linearnih algebarskih jednačina s n nepoznatih. Nepoznate ćemo označavati sa x_1, x_2,…, x_n. Opći oblik takvog sistema glasi:

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = b_m$$

Ima jedno rješenje, beskonačno mnogo ili nema rješenja. Rješenje sistema je određena n-torka koja zadovoljava sve jednačine sistema. Svedemo sistem na gornji trougaoni; ako je broj nepoznatih jednak broju jednačina sistema, sistem ima 1 rješenje (rješiv,saglasan). Ako je broj nepoznatih manji od broja jednačina sistema tada nema rješenja (nesaglasan). Ako je broj nepoznatih veći od broja jednačina sistem ima beskonačno mnogo rješenja (neodređeni sistem).

62. ***Za koje sisteme kažemo da su ekvivalentni? Navesti elementarne transformacije sistema. Ako na neki sistem primjenimo neke elementarne transformacije, kakva je veza između polaznog i novog sistema jednačina?***

Za dva sistema oblika

$$a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_m x_n = b_m$$

koji ne moraju imati isti broj jednačina kažemo da su ekvivalentni ako je svako rješenje jednog ujedno i rješenje drugog sistema.

Elementarne transformacije:

- zamjena mjesta dviju jednačina
- množenje ma koje jednačine brojem različitim od nule
- dodavanje jedne jednačine koja je prethodno pomnožena brojem različitim od nule nekoj drugoj jednačini.

Veza između polaznog i novog sistema je da su ekvivalentni,tj. imaju isto rješenje.

63. ***Primjeniti Gaussov algoritam na sistem***

by + cz = d

ex + fy + gz = h /·(-i)

<u>ix + kz = l /·e</u>

(1) by + cz = d

(2) -eix – fiy – giz = -ih   /(2)+(3)

(3) <u>eix + 0 + kez = le</u>

by+cz=d

-fiy + (ke - gi)z = le – ih

*64. **Za sistem sa nepoznatima x, y i z, čija je proširena matrica jednaka***

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

vrijedi

(a) x = 1

(b) x =−3/4

(c) x =4/3

(d) x = −1.

Odgovor pod b) je tačan.

z = 2

3y + 3z = 3 => y= -1

$\underline{4x + 5y + 6z = 4}$

4x + 5 · (-1) + 6 · 2 = 4

x = -3/4

*65. **Iskazati i dokazati Kronecker-Capellijev stav.***

Sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Možemo zapisati u vektorskom obliku:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ili kraće

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b \qquad (2)$$

Gdje su $a_1, \ldots, a_n$ stupci matrice sistema **A**, a **b** vektor slobodnih koeficijenata.

Iz (2) vidimo da riješiti system (1) znači pronaći sve moguće prikaze vektora **b** kao linearne kombinacije vektora $a_1, a_2 \ldots, a_n$.

System (1) je riješiv onda i samo onda ako se vector **b** može prikazati kao linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_n$. Budući da je vector **b** linearna kombinacija vektora $a_1, \ldots, a_n$, onda i samo onda ako je rang matrica A tig sistema jednak rangu proširene matrice [A,b], dokazali smo sljedeći teorem: Sistem linearnih jednačina ima rješenje onda i samoo onda ako matrica tog sistema A i proširena matrica sistema Ap imaju isti rang tj. rangA=rangAp.

66. *Šta nam govori Kronecker-Capellijev stav ako ga primjenimo na homogeni system jednačina?*

Iz Kronecker-Capellijevog stava slijedi da je svaki homogeni sistem:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m}x_n = b_m \end{array}$$

uvijek saglasan. Pri tome n-torka čiji su svi elementi nule tj. (0,…,0) je rješenje sistema.

Teorem: da bi homogeny sistem jednačina imao netrivijalno rješenje potrebno je I dovoljno da rang matrice bude manji od broja nepoznatih.

67. *Iskazati Cramerovo pravilo.*

Cramerovo pravilo se korisiti za rješavanje tzv. kvadratnih sistema tj. sistema kod kojih je broj jednačina jednak broju nepoznatih.

Neka je zadan sistem od n nepoznatih sa n jedačina.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad (1) \end{array}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_m x_n = b_m$$

Determinanta matrice sistema (1):

$$D = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{12} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_1, & i-1 & b_1 & a_1, & i+1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_2, & i-1 & b_2 & a_2, & i+1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdots a_n, & i-1 & b_n & a_n, & i+1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta koja se dobiva zamjenom i-tog stupca stupcem slobodnih koeficijenata i= 1…n

Primjenom osobina determinante dobijamo:

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1 \dots n)$$

Odakle dobivamo:

- Ako je D=0 i da bi sistem bio rješiv mora:
$$D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$$
- Sistem ima rješenje jedinstveno samo ako je D≠0.
  Rješenje je:

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1 \dots n)$$

68. ***Izvesti Cramerove formule.***

Kako je za j=1,2,…, n

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_1, & j-1 & b_1 & a_1, & j+1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_2, & j-1 & b_2 & a_2, & j+1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} \cdots a_n, & j-1 & b_n & a_n, & j+1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

To je Laplasov razvoj determinante D_j po j-toj koloni jednak:

$$D_j = b_1A_{ij} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} \qquad (1)$$

Ako prvu jednačinu sistema pomnožimo sa A_{1j}, drugu sa A_{2j} itd., posljednju sa A_{nj}, a zatim tako dobijene jednačine saberemo, tada dobijemo jednačinu:

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots. + a_nA_{nj})\ x_1 + (a_{21}A_{2j} + \ldots. + A_{n2}A_{nj})x_2 + \ldots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}$$

Iz relacije (1), vidimo da je desna strana posljednje jednakosti jednaka D_j. Kako je na Osnovu Laplasovog razvoja determinant po j-toj koloni koeficijent uz nepoznati x_i jednak determinant D a kako su svi ostali koeficijenti uz ostale nepoznate jedanki nuli, dobijamo da vrijedi:

$(\forall\ j\epsilon\{1,2,\ldots n\})\quad D\cdot x_j = D_j$, iz pretpostavke da je $D\neq 0$ $x_j = \frac{D_j}{D}$ $(j\epsilon\{1,2,\ldots n\})$.

69. ***Koliko rješenja ima homogeni sistem jednačina ako je rang matrice homogenog sistema sa n nepoznatih i n jednačina jednak n?***

Sistem sa n nepoznatih i n jednačina, čiji je rang = n ima samo trivijalno rješenje i to:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

70. ***Sistem čija je proširena matrica***

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \propto & 0 \end{bmatrix}$$

ima netrivijalno rješenje ako je:

(a) α= 1
(b) α= -1
(c) α= 2
(d) α= 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \propto & 0 \end{bmatrix} \underset{=}{II-2I} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & \propto & 0 \end{bmatrix} \underset{=}{3IV-2II} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3\propto-6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3\alpha - 6 = 0$$

$$3\alpha = 6$$

$$\alpha = 2$$

Ima neodređeno rješenje ako je $\alpha = 2$.

71. ***Sistem čija je proširena matrica***

$$A|B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \propto & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

ima jedinstveno rješenje ako je a≠0. **DA** NE

Sistem ima jedinstveno rješenje jer za a≠0 ima rangA|B=3 što je jednako broju nepoznatih sistema.

72. ***Za kvadratni homogeni sistem jednačina vrijedi (zaokružiti tačno):***

<u>(a) On uvijek ima bar jedno rješenje.</u>

(b) On neće imati rješenje ako je detereminanta matrice sistema različita od 0.

<u>(c) Sistem je saglasan ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice.</u>

(d) On neće imati rješenje ako je detereminanta matrice sistema jednaka 0.

73. ***Sistem***

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) <u>Ima samo trivijalno rješenje</u>
(b) Nema rješenje
(c) Ima beskonačno mnogo rješenja.

$$\begin{bmatrix} 1+1+1 \\ 1+1+1 \\ -1-1+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x = 0$$
$$3y = 0$$
$$-z = 0$$

X=Y=Z=0

A·X=B

$X=A^{-1}B$

74. ***Definirati pojmove karakteristične jednačine i sopstvenih vrijednosti matrice. Odrediti spektar matrice***

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako se nenulti vektor x, linearnom transformacijom sa matricom A transformise u sebi kolinearan vekotr Ax=λx on predstavlja svojstveni ili karakteristični vector matrice A. Skalar λ se naziva svojstvena vrijednost matrice A i odgovara svojstvenom vektoru x.

75. ***Ako matrica proizvoljnog kvadratnog sistema ima neku sopstvenu vrijednost jednaku 0, šta to znači za taj sistem? (Objasniti!)***

Ukoliko kod neke matrice, čija je determinanta det(A-λII)=0, te svojstvena vrijednost jednaka 0 λ=0 onda je det(A-0·I)=0, detA=0, što znači da taj sistem ima beskonačno mnogo rješenja.

76. ***Spektar matrice A***

(a) je veličina koja nam pokazuje koliko je matrica široka.

(b) je broj svih rješenja karakteristične jednačine date matrice.

<u>(c) je skup svih sopstvenih vrijednosti date matrice.</u>

(d) su brojevi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ za koje vrijedi $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n = \det A$.

VEKTORI

77. ***Navesti definiciju vektorskog prostora.***

Linearni vektorski proctor nad poljem K je Abelova grupa V={x,y,…} u kojoj je definisano množenje elementima iz polja K, tj. za svako x∊V i λ∊kK definisano je λ·x∊V.

Pri tome vrijedi:

- α(x+y)= αx+ αy
- (α+β)x= αx+βx – elemente u polju nazivamo vektorima
- α (βx) = β(αx) polje K nad kojim je definisan u polju V
- I·x = x nazivamo poljem skalara, a njegove elemente skalarima.

78. ***Skup svih matrica formata m × n sa operacijama sabiranja matrica i množenja skalarom čini vektorski prostor:***

a) samo ako je m = n

b) samo ako je m = 1,

<u>c) za sve prirodne brojeve m i n.</u>

79. ***Kada za vektore a_1, a_2, . . . , an kažemo da su linearno nezavisani?***

Vektori a_1, a_2,…a_n su linearno nezavisni, onda i samo onda ako su svi skalari λ_1, λ_2,… λ_m jednaki 0. Odnosno da je $\lambda_1 a_1+ \lambda_2 a_2+\ldots+ \lambda_m a_m=0$, pri čemu je $\lambda_1= \lambda_2= \lambda_3=\ldots= \lambda_m=0$.

80. ***Kada za vektore a_1, a_2, . . . , an kažemo da su linearno zavisani?***

Ako jednačina $\lambda_1 a_1+ \lambda_2 a_2+\ldots+ \lambda_m a_m=0$ ima netrivijalno rješenje λ_1, λ_2,… λ_m tj. rješenje kod kga je barem jedan od skalara $\lambda_i(i\in\{1,2,\ldots,n\})$ različit od nule, kažemo da su linearno zavisni.

81. ***Kada za vektore a_1, a_2, . . . , a_n iz vektorskog prostora V kažemo da čine bazu vektorskog prostora V ?***

Linearni vektorski proctor nazivamo konačno dimenzionalnim, ako je u njemu moguće naći konačan maksimalan linearno nezavistan skup vektora. Svaki takav skup vektora nazivamo baza vektorskog prostora V. Jedan vektorski proctor može imati vise baza. Ma koja n linearno nezavisna vektora čine bazu prosotra V.

*82. **Linearan vektorski prostor je konačno dimenzionalan ako***

(a) u njemu postoji baza.

<u>(b) u njemu postoji konačan linearno nezavisan sistem vektora.</u>

<u>(c) u njemu postoji konačan sistem linearno nezavisnih vektora koji ima osobinu da ako mu dodamo bilo koji novi vektor on postaje linearno zavisan.</u>

(d) u njemu sve baze uvijek imaju isti broj vektora.

83. **a)** ***Navesti kriterij za ispitivanje linearne zavisnosti/nezavisnosti vektora.***

b) Ispitati linearnu zavisnost vektora: $a_1 = (1, 2, -1)$, $a_2 = (-2, 4, 2)$, $a_3 = (3, 1, 2)$.

a) Uslov komplanarnosti je da je mješoviti proizvod jednak 0. Vektori su linearno zavisni ako su komplanarni.
b) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\underline{-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0}$$
$$(1)+(2) \qquad 5\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$$
$$2\alpha_1 = -4\alpha_2$$
$$\alpha_1 = -2\alpha_2$$

$$-2\alpha_2 - 2\alpha_2 = 0$$
$$4\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$
$$\alpha_1 = 0$$

Vektori su linearno nezavisni!

*84. **Šta je to usmjerena duž u prostoru, a šta vektor?***

Neka su P i Q dvije tačke prostora. Dužina $\overline{PQ}$ kojoj je jedna tačka proglašena kao početna, a druga kao krajnja. Rastojanje između tačaka P i Q zovemo usmjerena duž.

Za svaku usmjerenu dužinu $\overline{PQ}$, skup svih smjernih dužina koje su ekvivalentne sa $\overline{PQ}$ zovemo vector ili orjentaciona duž.

85. ***Kada su vektori kolinearni, a kada komplanarni?***

Dva vektora su kolinearna ako i samo ako sui m odgovarajuće coordinate proporcionalne u datom bazisu, kada sui m nosači paralele.

Uslov kolinearnosti:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$$

Gdje su (x_1,x_2,x_3) i (y_1,y_2,y_3) coordinate vektora x i y.

Dva vektora su linerano zavisna ako i samo ako su kolinearni. Tri vektora su linearno zavisna ako i samo ako su komplanarni. Vektori koji su paralelni jednoj te istoj ravni Д zovu se komplanarni. Oni se mogu traslatovati tako da leže u istoj ravni.

86. ***Vektori su kolinearni ako***

(a) su im nosači paralelne prave.

(b) imaju iste intenzitete i smjerove.

(c) su linearno zavisni.

(d) su linearno nezavisni

87. ***Vektori su komplanarni ako***

(a) su kolinearni i nezavisni.

(b) im nosači leže u istoj ravni.

(c) su svi ortogonalni na istu ravan.

(d) svi imaju istu početnu tačku.

88. ***Dva vektora su jednaka samo ako***

(a) imaju iste pravce smjerove i intenzitete.

(b) imaju iste intenzitete i komplanarni su.

(c) se poklapaju.

(d) su kolinearni i imaju jednake intenzitete i smjerove.

89. ***Definisati skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.***

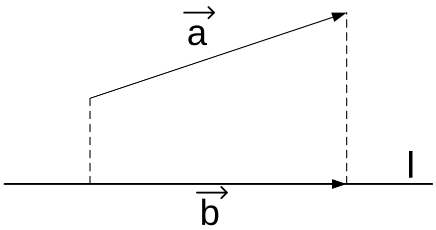
Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je scalar (broj) koji obilježavamo sa $(\vec{a}$ i $\vec{b})$ i definišemo ovako:

$$(\vec{a} \text{ i } \vec{b}) = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

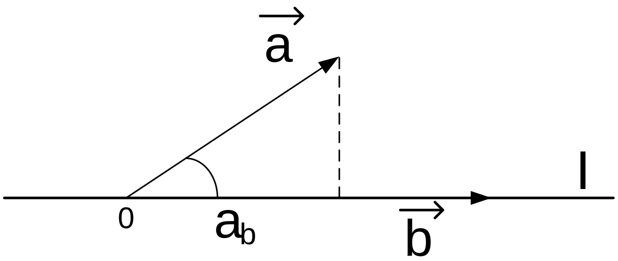
Dakle skalarni product vektora je skalar, koji je jednak proizvodu intenziteta tih vekotra i kosinusa ugla koji oni zaklapaju.

*90. **Objasniti vezu izmedju $P_{r_{\vec{b}}}\vec{a}$ i skalarnog proizvoda vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.***

Projekcija vektora $\vec{a}$ na pravu l je vektor $\vec{b}$ čiji je početak i kraj normale spušten iz početka i kraja vektora $\vec{a}$.



Znamo da je skalarni proizvod jednak proizvodu intenziteta dva vektora I kosinusa ugla koji oni zaklapaju. Skalarni proizvod se može izraziti pomoću projekcije jednog vekotra na osu drugog.



$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{P_{r_{\vec{b}}}\vec{a}}{|\vec{b}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

$$cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a},\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\frac{P_{r\,\overrightarrow{b}}\,\vec{a}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$P_{r\,\overrightarrow{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

91. ***Kako glasi uslov okomitosti dva vektora?***

Da bi neka dva vektora $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bila okomita $\vec{a}\perp\vec{b}$, moraju da zadovoljavaju uslov da je $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ tj. da je skalarni proizvod ta dva skalara jednak nuli, tj. $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$

92. ***Ako su dati vektori $\vec{x} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} - \vec{k}$ i $\vec{y} = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} + a\,\vec{k}$ koliko mora biti a da bi vektori bili ortogonalni?***

$$\vec{x} = 2\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} - \vec{k}$$

$$\vec{y} = 2\,\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} + a\,\vec{k}$$

$$4\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} - a\vec{k} = 0$$

$$4\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} = a\vec{k}$$

$$a = \frac{4\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}}{\vec{k}}$$

93. ***Navesti formulu za intenzitet vektora $\vec{x} = x_1\,\vec{\imath} + x_2\,\vec{\jmath} - x_3\vec{k}$. Izračunati udaljenost izmedju tačaka A (1, 3, −5) i B (0, −1, 3).***

Skalarni proizvod dva vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ čije su koordinate x_1, x_2, x_3 i y_1, y_2, y_3 u ortonovmivanoj bazi, jednak je zbiru proizvoda njihobih odgovarajućih koordinata.

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Neka je $\vec{x} = \vec{y}$, tada imamo

$\vec{x}\cdot\vec{x} = \vec{x}^2 = |\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, tj.

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

A(1,3,-5)

B(0,-1,3)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 + (3 + 5)^2}$$

$$d = \sqrt{81}$$

$$d = 9$$

94. ***Navesti formulu za izračunavanje ugla izmedju dva vektora. Koliki je ugao između vektora*** $\vec{x} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} - c\vec{k}$ *i* $\vec{y} = -2a\,\vec{\imath} - 2b\,\vec{\jmath} - 2c\vec{k}$ ***?***

$$cos\theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

$$cos\theta = \frac{-2a^2 - 2b^2 - 2c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{4a^2 + 4b^2 + 4c^2}} = \frac{-2(a^2 + b^2 + c^2)}{2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = -1$$

$$\theta = \arccos(-1)$$

$$\theta = \pi$$

95. ***Koji od sljedećih iskaza je tačan:***

a) $\underline{(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2}$
b) $(\vec{a})^3 = |\vec{a}|^3$
c) $(\vec{a})^n = |\vec{a}|^n$, za sve n϶N

96. ***Navesti osnovne osobine funkcije sa V³ × V³→ R definisane sa*** $(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} \cdot \vec{b}$ ***.***

Funkcija $(\vec{a}, \vec{b}) \to \vec{a} \cdot \vec{b}$ sa $V^3 \times V^3 \to R$ zove se skalarni product I ima sljedeća svojstva:

- $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 <=> \vec{a} = \vec{0}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (simetričnost)

- $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{\mathrm{b}} = \lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{\mathrm{b}})$ (homogenost u I argumentu)
- $\left(\vec{\mathrm{a}}+\vec{\mathrm{b}}\right)\cdot\vec{\mathrm{c}} = \vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{c}}+\vec{\mathrm{b}}\cdot\vec{\mathrm{c}}$ (aditivnost u I argumentu)

97. ***Izvesti formulu za izračunavanje skalarnog proizvoda za vektore date u standardnoj kanonskoj bazi.***

Neka su data dva vektora $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$(\vec{x},\vec{y}) = (x_1\vec{\imath}, x_2\vec{\jmath}, x_3\vec{k})\cdot(y\vec{\imath}, y_2\vec{\jmath}, y_3\vec{k}$$

$$= x_1y_1(\vec{\imath},\vec{\imath}) + x_1y_2(\vec{\imath},\vec{\jmath}) + x_1y_3\left(\vec{\imath},\vec{k}\right) + x_2y_1(\vec{\jmath},\vec{\imath}) + x_2y_2(\vec{\jmath},\vec{\jmath}) + x_2y_3\left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) + x_3y_1\left(\vec{k},\vec{\imath}\right) + x_3y_2\left(\vec{k},\vec{\jmath}\right) + x_3y_3\left(\vec{k},\vec{k}\right)$$

Ako je baza ortonormirana: $(\vec{\imath},\vec{\imath}) = (\vec{\jmath},\vec{\jmath}) = \left(\vec{k},\vec{k}\right) = 1$

$$(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \left(\vec{\imath},\vec{k}\right) = \left(\vec{\jmath},\vec{k}\right) = 0$$

$$(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

98. ***Definisati vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.***

Neka je $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ ortomormirana baza u V_3, a $\vec{x}\ i\ \vec{y}$ proizvoljni vektori iz V_3. Vektorski proizvod dva vektora $\vec{x}\ i\ \vec{y}$ u oznaci $\vec{x}\ \times\ \vec{y}$ je vektor:

- Čiji je intenzitet jednak $|\vec{x}||\vec{y}|sin\theta, \theta\sphericalangle(\vec{x}\ ,\vec{y})$;
- Koji je ortogonalan na svaki od vektora $\vec{x}\ i\ \vec{y}$;
- Ima takav smjer da vektori $\vec{x}\ ,\vec{y},\ \vec{x}\ \times\ \vec{y}$ čine trojku vektora iste orjentacije kao baza $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$.

99. ***Navesti uslov kolinearnosti dva vektora.***

Dva vektora su kolinearna ako I samo ako sui m odgovarajuće coordinate proporcionalne u datoj bazi.

Uslov kolinearnosti $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$

100. ***Navesti osnovne osobine funkcije sa $V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$ definisane sa*** $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$ **.**

Osnovne osobine funkcije su:

- Intenzitet vektorskog proizvoda brojno je jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$;
- Vektorski product dva vektora je nula vektor ako su ti vektori kolinearni ili je bar jedan od njih nula vektor.
- $\vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x})$
- $(\lambda\vec{x}) \times (\mu\vec{y}) = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$
- $\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$

  $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$ $\quad$ $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

  $\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$ $\quad$ $\vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$ $\quad$ $\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$

- $(\vec{x} + \vec{y}\,) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$

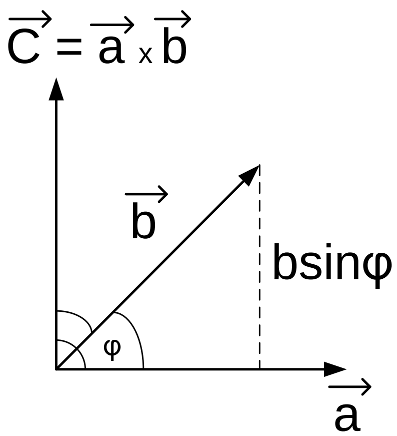
101. ***Napisati uslov kolinearnosti vektora*** $\vec{a}$ ***= (a_x, a_y, a_z) i*** $\vec{b}$***= (b_x, b_y, b_z)***

Uslov kolinearnosti vektora:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

102. ***Objasniti kako dolazimo do formule za izračunavanje vektorskog proizvoda za vektore date u standardnoj kanonskoj bazi.***

Formula $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ dobiva se: φ



Ako je $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \varphi = \frac{\pi}{2}$, tada je $sin\varphi = 1$. U tom slučaju $|\vec{\imath} \times \vec{\jmath}| = |\vec{\imath}| \cdot |\vec{\jmath}| = 1$

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, jer vektori $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ čine desni tetraedar i $|\vec{k}| = 1$

Na ovaj način zaključujemo:

$$\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \quad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

103. ***Objasniti vezu komplanarnosti tri vektora i njihovog mješovitog produkta.***

Tri vektora $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ su komplanarna ako i samo ako je njihov mješoviti proizvod jednak nuli, tj:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{c} = 0$$

104. ***Kako glasi uslov komplanarnosti vektora $\vec{a}$ = (a_x, a_y, a_z), $\vec{b}$ = (b_x, b_y, b_z) i $\vec{c}$=(c_x, c_y, c_z)?***

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

$$[(a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}] \cdot (c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k})$$

105. ***Mješoviti produkt*** $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ ***jednak je***

<u>(a) $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$</u>

(b) $-\vec{z} \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$

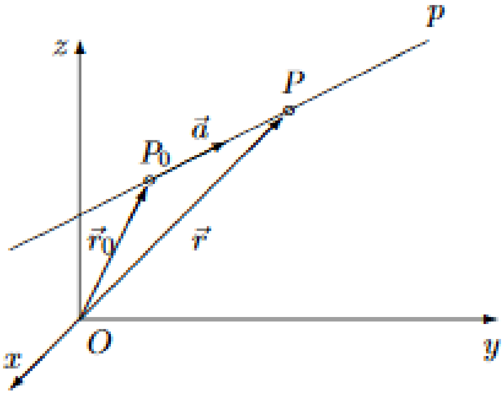
<u>(c) $(\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}$</u>

(d) $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$

PRAVA I RAVAN

106. ***Nacrtati sliku i objasniti kako dolazimo do kanonskog oblika jednačine prave.***

Neka je p pravac u prostoru, P_0 (x_0, y_0, z_0), tačka na pravcu p i $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \neq 0$ vektor koji leži na pravcu p i ima početak u tački P_0.



Za svaku tačku P (x, y, z)ϵp vektori $\vec{a}$ i $\overrightarrow{P_0P}$ su kolinearni dakle postoji scalar η takav da je

$$\overrightarrow{P_0P} = \eta\vec{a}, \text{ pa je}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r_0} + \eta\vec{a}$$

U parametarskom obliku to znači: $x = x_0 + \eta a_x$, $y = y_0 + \eta a_y$, $z = z_0 + \eta a_z$. Izjednačavanjem η prolazimo u kanonski oblik:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

107. ***Kako glasi parametarski oblik jednačine prave. Napraviti prelaz iz parametarskog u kanonski oblik.***

U parametarskom obliku to znači: $x = x_0 + \eta a_x$, $y = y_0 + \eta a_y$, $z = z_0 + \eta a_z$.

Izjednačavanjem η prolazimo u kanonski oblik:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

108. ***Napisati jednačinu ravni kroz tačke A (x_1, y_1, z_1) i B (x_2, y_2, z_2).***

Jednačina prave kroz dvije poznate tačke:

A (x_1, y_1, z_1) i B (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

109. ***Kako glasi opći oblik jednačine prave? Napraviti prelaz iz općeg u kanonski oblik jednačine ravni (u općem slučaju).***

Opšti oblik jednačine ravni je:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ako je $A\neq0$, $B\neq0$, $C\neq0$, $D\neq0$ onda uz iznake da je $m=\frac{D}{A}, n=\frac{D}{B}, p=\frac{D}{C}$ dobijamo kanonski oblik $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1 <=> \frac{x}{\frac{D}{A}}+\frac{y}{\frac{D}{B}}+\frac{z}{\frac{D}{C}}=1$ odnosno:

$Ax + By + Cz + D = 0$

$Ax + By + Cz = D$

$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1$

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$

110. ***Kako glasi jednačina prave u kanonskom obliku, ako su njene dvije tačke A(1, −1, 2) i B(0, −1, −4)?***

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

$$\frac{X-1}{0-1}=\frac{Y+1}{-1+1}=\frac{Z-2}{-4-2}$$

$$\frac{X-1}{-1}=\frac{Y+1}{0}=\frac{Z-2}{-6}$$

111. ***Kako glasi jednačina prave u parametarskom obliku, ako su njene dvije tačke A(1,−1,2) i B(0, −1, −4)?***

$$x = x_1 + \lambda \cdot (x_2 - x_1) => \ x = 1 + \lambda \cdot (-1) => x = 1 - \lambda$$

$$y = y_1 + \lambda \cdot (y_2 - y_1) => \ y = -1 + \lambda \cdot (0) => x = -1 + 0 \cdot \lambda$$

$$z = z_1 + \lambda \cdot (z_2 - z_1) => \ z = 2 + \lambda \cdot (-6) => x = 2 - 6\lambda$$

112. ***Može li prava imati vektor pravca $\vec{p}$ = (α, 0, 0) i koja je to prava?***

Može, to je prava koja pripada x-osi.

113. ***Kako glasi uslov presjeka dvije prave?***

Neka su date dvije prave l_1 i l_2 koje se sijeku, tada su vektori $\overrightarrow{\alpha_1} = \left(m_1, n_{1,} p_1\right)$, $\overrightarrow{\alpha_1} = \left(m_2, n_{2,} p_2\right)$ i $\overrightarrow{m_1 m_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ komplanarni pa je $(\overrightarrow{m_1 m_2}, \overrightarrow{\alpha_1}) \times \overrightarrow{\alpha_2} = \vec{0}$, odnosno:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Što predstavlja dovoljan uslov presjeka pravih l_1 i l_2.

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; l_1$$

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{n_2} = \frac{z - z_1}{p_2}; l_2$$

114. ***Napisati uslove paralelnosti i okomitosti pravih:***

$$(p_1) : \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$(p_2) : \begin{cases} x = x_2 + \lambda l_2 \\ y = y_2 + \lambda m_2 \\ z = z_2 + \lambda n_2 \end{cases} \quad (\lambda \epsilon R)$$

$$p_1 = \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

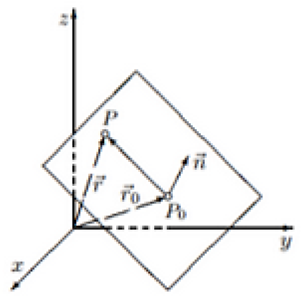
$$p_2 = \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

Uslov paralelnosti: $k = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Uslov okomitosti: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

115. ***Nacrtati sliku i objasniti kako dolazimo do općeg oblika jednačine ravni.***

Neka je M ravnina u prostoru, P_0 (x_0, y_0, z_0) čvrsta tačka ravnine M i $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} \neq \vec{0}$ vektor okomit na ravninu M s hvatištem u tački P_0



Za svaku tačku P (x, y, z) ϵ M vector $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$ okomit je na vector $\vec{n}$. Stoga je njihov skalarni umnožak jednak nuli, tj.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Uz oznaku $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ prethodna jednakost glasi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

i nazivamo je općim oblikom jednačine ravnine M.

116. ***Šta predstavlja jednačina A(x−x₀)+B(y −y₀)+C(z −z₀)=0 i šta predstavljaju uvedene oznake. Objasniti!***

Jednačina $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ predstavlja jednačinu ravni koja prolazi kroz neku tačku n_0, čije su coordinate $n_0(x_0, y_0, z_0)$.

A, B, C su coordinate vekotra $\vec{m}$ ($\vec{m} = (A, B, C)$) u bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, a vector $\overrightarrow{n_0 n}$ predstavljen je kao $\overrightarrow{n_0 n} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$. Taj vector $\overrightarrow{n_0 n}$ leži u ravni a vector $\vec{n}$ je normalan na nju.

117. ***Ravan (α) : Ax + By + Cz + D = 0 prevesti u segmentni oblik.***

$$A_X + B_Y + C_Z + D = 0 \quad /: D$$

$$\frac{A_X}{D} + \frac{B_X}{D} + \frac{C_Z}{D} + 1 = 0$$

$$\frac{X}{\frac{D}{A}} + \frac{Y}{\frac{D}{B}} + \frac{Z}{\frac{D}{C}} = -1 \quad /\cdot(-1)$$

$$\frac{X}{\frac{-D}{A}} + \frac{Y}{\frac{-D}{B}} + \frac{Z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

$$a = \frac{-D}{A} \qquad b = \frac{-D}{B} \qquad c = \frac{-D}{C}$$

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1$$

118. ***Kako glasi jednačina ravni koja prolazi kroz tačku M (2, −1, 3) i čiji je vektor normale $\vec{n}$ = (3, −1, 2)?***

M (2,-1,3)

$\vec{n}$= (3,-1,2)

α: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

3(x-2)-1(y+1)+2(z-3)=0

3x-6-y-1+2z-6=0

α: 3x-y+2z-13=0

119. ***Date su ravni (α) : Ax + By + Cz + D = 0 i (β) : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Napisati uslove paralelnosti i okomitosti.***

$$\alpha: \quad A_X + B_Y + C_Z + D = 0 \quad <=> \quad A_{1X} + B_{1Y} + C_{1Z} + D_1 = 0$$

$$\beta: \quad \frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1 \quad ; \quad a = \frac{-D}{A} \qquad b = \frac{-D}{B} \qquad c = \frac{-D}{C}$$

$$\frac{-A_{1X}}{D_2} - \frac{B_{1X}}{D_2} - \frac{C_{1Z}}{D_2} - 1 = 0 \quad /\cdot(-D_2)$$

$$A_{2X} + B_{2Y} + C_{2Z} + D_2 = 0$$

$$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$$

Uslov paralelnosti: potreban i dovoljan uslov za ovo jeste da karakteristični vektori $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$ budu kolineatni, tj.:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Uslov okomitosti:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

120. ***Date su prava (p) i ravan (α) jednačinama: (p) :*** $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ ***i (α) : Ax + By + Cz + D = 0. Napisati uvjet paralelnosti i okomitosti prave i ravni.***

(p) : $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$; $\vec{\propto} = (l, m, n)$

α) : Ax + By + Cz + D = 0 ; $\vec{n} = (A, B, C)$

Uslov paralelnosti: prava p je paralelna ravni α ako i samo ako:

$$(\vec{n}, \vec{\propto}) = 0$$

$$Al+Bm+Cn=0$$

Uslov normalnosti (okomitosti): prava p je normalna (okomita) na ravan α ako I samo ako je:

$$\vec{n} \times \vec{\propto} = 0$$

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

121. ***Napisati formulu za ugao između date prave (p) :*** $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ ***i (α) : Ax + By + Cz + D = 0. Kako dolazimo do te formule?***

Ugao između prave (p) i ravni (α) čiji su jednačine date u zadatku definiše se kao ugao θ, između prave (p) i njene normalne projekcije p' na ravan (α). Kako je $\sphericalangle (p, p') = \theta$ to je $\sphericalangle (n, \alpha) = 90^\circ - \theta$ pa je:

$$\cos(90^\circ - \theta) = sin\theta = \frac{(n, \alpha)}{|n||\alpha|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$$\theta = arcsin\frac{(n, \alpha)}{|n||\alpha|}$$

Gdje je $\vec{n} = (A, B, C)$ i $\vec{\propto} = (l, m, n)$ iz zadataka dato.

122. ***Neka je data ravan (α) : Ax + By + Cz + D = 0. Ako je C = 0 i D = 0 to znači daje ravan:***

a) paralelna x-osi,
b) sadrži x-osu,
c) <u>sadrži z-osu,</u>
d) paralelna ravni xOz.

123. ***Zaokružiti tačna tvrđenja:***

(a) Ravan čija je jednačina x = 0 paralelna je x-osi.

(b) Ravan čija je jednačina Ax + By + 1 = 0 ne sadrAži niti jednu tačku z-ose.

<u>(c) Ravan čija je jednačina Ax+By+Cz = 0 sadrži tačku koordinatnog početka.</u>

<u>(d) Ravan čija je jednačina By + Cz + D = 0 paralelna je x-osi.</u>

124. ***Napisati formulu za udaljenost tačke A (x_0, y_0, z_0) od ravni (α) : Ax+By+Cz+D = 0.***

$$d = d(A, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

125. ***Dvije ravni su normalne jedna na drugu***

<u>(a) ako su im karakteristični vektori ortogonalni.</u>

(b) ako se sijeku u jednoj tački.

(c) ako im je vektorski produkt karakterističnih vektora jednak 0.

(d) ako su im karakteristični vektori kolinearni.

126. ***Kako glase uslovi ortogonalnosti i paralelnosti dvije ravni. Kako te uslove dobijemo iz formule za ugao između dvije ravni?***

Ugao između dvije ravni α i β definišemo kao da je jednak uglu između njihovih normal $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$.

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

Uslov paralelnosti:

$$\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right| = 0$$

Uslov normalnosti:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right| \cdot \left|\vec{n}_\beta\right|}$$

127. ***Ravan Ax + By + Cz + D = 0 i prava :*** $\boldsymbol{\frac{x-x_0}{2A} = \frac{y-y_0}{2B} = \frac{z-z_0}{2C}}$

<u>(a) su ortogonalne.</u>

(b) su paralelne.

(c) su mimoilazne.

(d) imaju tačno jednu presječnu tačku.

128. ***Za koje*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***∈R će prava*** $\boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{\alpha}}$ ***biti paralelna ravni x + y + 2z = 1?***

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{\alpha}$ => $\vec{\alpha} = (2,2,\alpha)$

$x + y + 2z = 1$ => $\vec{n} = (1,1,2)$

Am+Bn+Cp=0

1·2+1·2+2α=0

4+2α=0 /:2

2+α=0

α = -2

129. ***Za koje*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***∈R će prava*** $\boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}}$ ***biti paralnelna ravni x + y + 2z = 1?***

Alfe (α) nema nigdje u zadatku!!!

OSNOVNE OSOBINE REALNE FUNKCIJE REALNE PROMJENJIVE

130. *Nabrojati načine zadavanja funkcija i za svaki način dati odgovarajući primjer.*

Načini zadavanja funkcija su:

a) Eksplicitni način: y = f(x)

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2+2}{7}}$$

b) Implicitni način: F(x,y)=0

$$\phi_{(x,y)} = 0$$
$$7xy^2 - 3x^2 - 2 = 0$$
$$y^2 = \frac{3x+2}{7x}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{3x+2}{7x}}$$

c) Parametarski način: x=φ(t) , y=φ(t)   tϵ[a,b]

$$x = cost \ ; \ y = sint \ ; \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$x^2 + y^2 = cos^2t + sin^2t = 1$$
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

d) Tabelarni način:

x	1	2	3	4
y=x^2	1	4	9	16

e) Grafički način:

$$G = \left\{(x,y) | x \in D_f \ \wedge \ y = f_{(x)} \in R_f\right\}$$
$$G = \left\{(x,y) \in R^2 | x \in \ D_f \ \wedge \ y = f_{(x)}\right\}$$

131. *Definisati graf funkcije. Šta je graf funkcije $y = \sqrt{x^2-1}$.*

Graf funkcije je skup tačaka (x,y) ravni R^2 za koje vrijedi y=$f_{(x)}$ te čini krivulju. Formalnije to je skup: $G(f) \subseteq R^2, G = \left\{(x,y) \in R^2 : x \in \ D_f \ , \ y = f_{(x)}\right\}$

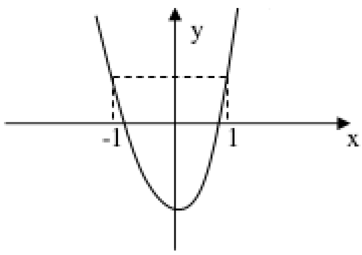
$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$Dp: x^2 - 1 > 0$$

$$x^2 > 1$$

$$x > \pm 1$$

x	1	-1
y	0	0

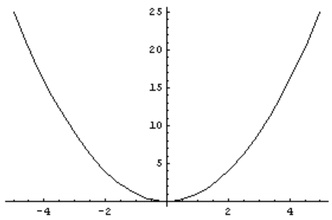


Graf funkcije $y = \sqrt{x^2 - 1}$ je parabola.

132. ***Definisati parnost funkcije i slikom objasniti geometrijski smisao parnosti. Navesti primjer parne funkcije.***

Za funkciju $f: D_f \to R, D_f \subset R$ kaže se da je parna ako:

a) je domen D_f funkcije f simetričan u odnosu na tačku 0 (tj. ako je $x \in D_f$ tada i $-x \in D_f$)
b) za svako $x \in D_f$ važi $f(-x) = f(x)$

c) 

Primjer:

$$y = x^2$$

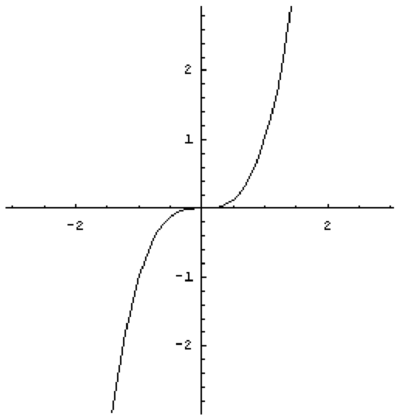
$$f(-x) = f(-x)^2 = f(x)^2$$

Funkcija je parna.

133. Definisati neparnost funkcije i slikom objasniti geometrijski smisao neparnosti. Navesti primjer neparne funkcije.

Za funkciju $f\colon D_f \rightarrow R, D_f \subset R$ kažemo da je neparna ako:

a) je domen D_f funkcije f simetričan u odnosu na tačku 0 (tj. ako je xϵD_f) tada i $-x \in D_f$
b) za svako $x \in D_f$ važi $f(-x) = -f(x)$



Primjer:

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = f(-x)^3 = -x^3$$

$$-f(x) = -x^3$$

134. Definisati osobinu periodičnosti funkcije. Kakva je razlika između perioda i osnovnog perioda funkcije?

Za funkciju f: Df→R kažemo da je periodična ako postoji ω (period) takav da

$$(\forall x \in D_f)(x + \omega \in D_f) f(x + \omega) = f_{(x)}$$

Najmanji pozitivan broj ω za koji je funkcija periodična je osnovni period funkcije T.

Osnovni period (T) predstavlja vrijednost perioda za koju će funkcija ponovo imati istu vrijednost. Dok period (ω) zavisi od osnovnog perioda ω=kT (kϵZ) i on govori koliko se tih perioda izvršilo.

$$\omega = k \cdot T$$

135. ***Definisati nul-tačke (nule) funkcija. Koje je njihovo geometrijsko značenje?***

Nul-tačke funkcije realne varijable f:R → R je realni broj x∈R za koji funkcija f postiže vrijednost jednaku 0 tj za koju je f(x)=0. Ako je x_0 nul-tačka funkcije f, onda graf funkcije Γf ima zajedničku tačku s apscisom (Γf siječe ili dodiruje apscisu u tački x_0).

136. ***Navesti definiciju ograničenosti funkcije sa gornje (donje) strane.***

Za funkciju f: D_f→R, $D_f \subset R$ kažemo da je ograničena sa gornje strane ako je skup njenih vrijednosti ograničen odozgo, tj. ako postoji takav realan broj M da za svako $x \in D_f$ važi:

$$f(x) \leq M, tj.$$

$$\daleth M \in R)(\left(\forall x \in \chi \subseteq D_f\right) f(x) \leq M$$

137. ***Da li funkcija može biti neograničena na ograničenom skupu?***

<u>DA</u> NE

138. ***Definisati pojmove rastuće i strogo rastuće funkcije. Kakva je razlika između ovih pojmova?***

Kažemo da je funkcija f: D→R monotomno rastuća na interval $(a, b) \subseteq D$ ako je

$$x_1 x_2 \in (a, b) \wedge (x_1 < x_2) => f(x_1) \leq f(x_2)$$

Ako umjesto znaka "≤" stoji "<" kažemo da je funkcija strogo rastuća.

Kod strogo rastuće funkcije vrijednost funkcija ne mogu biti jednake, dok kod rastuće mogu.

139. ***Definirati pojam tačke nagomilavanja skupa.***

Neka je $a \in R$ i neka je $A \subseteq R$. Za a kažemo da je tačka nagomilavanja skupa A ako u svakoj okolini tačke a postoji bar jedan element skupa A različit od elementa a.

140. ***Neka su a, b ∈ R i a tačka nagomilavanja domena funkcije f. Definirati*** $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = b}$

Neka je $D \subseteq R$ i a tačka nagomilavanja domena D. Funkcija f ima graničnu vrijednost u tački $a \in R$ jednaku $b \in R$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj d>0 takav da iz nejednakosti $|x - a| < d$ slijedi nejednakost $\left|f_{(x)} - b\right| < \varepsilon$, za $\forall x \in D \setminus \{a\}$; lim f(x)=b.

$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = b \ \leq> \ (\forall\varepsilon > 0)(\exists d > 0)\left(\forall x \in D_f\right) \ \ |x - a| < d => \left|f_{(x)} - b\right| < \varepsilon$$

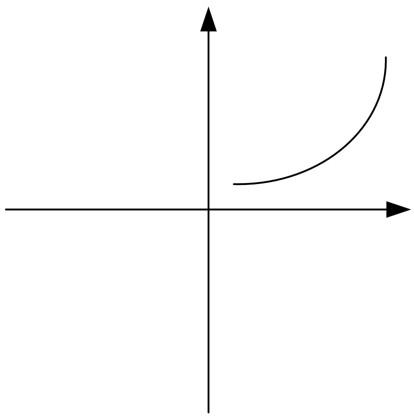
141. ***Izraz (∀M > 0)(∃δ > 0)(∀x ∈*** $\boldsymbol{D_f}$ ***)(0 < |x − a| < δ ⇒ f(x) > M) predstavlja***

a) $\lim_{x\to\infty} f_{(x)} = a$
b) $\underline{\lim_{x\to a} f_{(x)} = +\infty}$
c) $\lim_{x\to-\infty} f_{(x)} = -a$
d) $\lim_{x\to a} f_{(x)} = -\infty$

142. ***Dati definiciju granične vrijednosti*** $\boldsymbol{lim_{x\to a} f_{(x)} = +\infty}$***. Dati geometrijsko tumačenje ovog limesa!***

Vrijednost funkcije f se sve više i više povećava kako se argument x neograničeno smanjuje.

$$\lim_{x\to+\infty} f_{(x)} = +\infty <=> \ (\forall M \ > \ 0)(\exists N \ > \ 0)(\forall x \ \in \ D_f\ )(x > N) \Rightarrow \ f(x) \ > \ M$$



143. ***Definisati lijevu i desnu graničnu vrijednost funkcije u tački. Navesti njihovu vezu sa postojanjem granične vrijednosti funkcije u toj tački.***

Ako u definiciji

$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = b \leq> \quad (\forall\varepsilon > 0)(\exists d > 0)(\forall x \in D_f) \quad |x-a| < d => \left|f_{(x)} - b\right| < \varepsilon$$

$x \in (a, a+d)$ kažemo da x sa desne strane teži $a \in R$, a funkciju $f_{(x)}$ ima desnu graničnu vrijednost jednaku $b \in R$, a zapisuje se kao:

$$\lim_{x\to a^+} f_{(x)} = b$$

Slično, ako je $x \in (a-d, a)$ kažemo da x sa lijeve strane teži $a \in R$, a da funkcija $f_{(x)}$ ima lijevu graničnu vrijednost

$$\lim_{x\to a^-} f_{(x)} = b$$

Kažemo da funkcija $f_{(x)}$ ima graničnu vrijednost u tački x=a ako i samo ako u toj tački ima i lijeva i desna granična vrijednost.

144. ***Navesti teorem koji govori o operacijama nad limesima funkcija.***

Neka je $\lim_{x\to a} f_{(x)} = b$ i $\lim_{x\to a} g_{(x)} = c$; b,c ϵ R, tada je:

a)

$$\lim_{x\to a}\left(f_{(x)} \pm g_{(x)}\right) = \lim_{x\to a} f_{(x)} \pm \lim_{x\to a} g_{(x)} = b \pm c$$

b)

$$\lim_{x\to a}\left(f_{(x)} \cdot g_{(x)}\right) = \lim_{x\to a} f_{(x)} \cdot \lim_{x\to a} g_{(x)} = b \cdot c$$

c)

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f_{(x)}}{\lim_{x\to a} g_{(x)}} = \frac{b}{c}$$

d)

$$\lim_{x\to a}\left|f_{(x)}\right| = \left|\lim_{x\to a} f_{(x)}\right| = |b|$$

e)

$$\lim_{x\to a} \eta \cdot f_{(x)} = \eta \cdot \lim_{x\to a} f_{(x)} = \eta \cdot b \; ; \; \eta = const.$$

145. ***Kako glase teoremi o dvije i tri funkcije.***

TEOREM O DVIJE FUNKCIJE: Ako postoji okolina $U_{(a)}$ tačke A takva da $\forall x \in U_{(a)}$ vrijedi da je $f_{(x)} \leq g_{(x)}$ i ako postoje granične vrijednosti f i g u tački a, tada je:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} \leq \lim_{x \to a} g_{(x)}$$

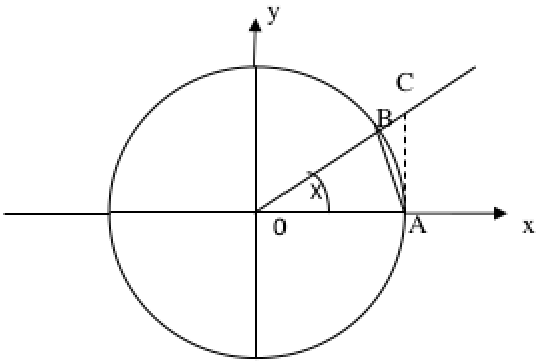
TEOREM O TRI FUNKCIJE: neka su f,g,h: D→R date funkcije i neka je a tačka nagomilovanja skupa D. Ako postoji okolina tačke a $U_{(a)}$, takva da za $\forall x \in U_{(a)}$ vrijedi da je $f_{(x)} \leq g_{(x)} \leq h_{(x)}$ i ako posotje granične vrijednosti funkcija f i h u tački A i ako je

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = \lim_{x \to a} h_{(x)}$$

onda postoji i granična vrijednost funkcije g i vrijedi:

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = \lim_{x \to a} g_{(x)} = \lim_{x \to a} h_{(x)} = b$$

146. ***Dokazati da je*** $\mathbf{\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1}$.



$0 < x < \pi/2$

P_1 – površina $\triangle 0AB$

P_2 – površina kružnog isječka $\widetilde{0AB}$

P_3- površina trougla 0AC

sinx=h

$$P_1 = \frac{sinx}{2} \qquad P_2 = \frac{x}{2} \qquad P_3 = \frac{tgx}{2}$$

$$P_1 < P_2 < P_3$$

$$\frac{sinx}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2} \quad /* 2$$

$$sinx < x < tgx$$

$$sinx < x < \frac{sinx}{cosx} \quad /: sinx$$

$$1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$$

$$1 > \frac{sinx}{x} > cosx$$

$$\lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} cosx = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

147. ***Definisati neprekidnost funkcije u tački na skupu.***

NEPEKIDNOST U TAČKI: Kažemo da je funkcija $f: (a, b) \to R$ neprekidna u tački $x_0 \in (a, b)$ ako ona ima limes u tački x_0 koji je jednak $f_{(x_0)}$, tj. ako je:

$$\lim_{x \to x_0} f_{(x)} = f_{(x_0)}$$

NEPREKIDNOST NA SKUPU: Za funkciju $f: (a, b) \to R$ kažemo da je neprekidna na interval (a,b) ako je ona neprekidna u svakoj tački interval.

148. ***Prekid prve vrste u tački nastaje zato A¡to:***

(a) funkcija nema graničnu vrijednost u toj tački.

(b) funkcija nije definisana u toj tački.

<u>(c) postoje ali različiti su lijeva i desna granična vrijednost u toj tački.</u>

(d) limes funkcije u toj tački nije jednak vrijednosti funkcije u toj tački

149. ***Koje vrste su otklonjivi prekidi? Objasniti!***

Otklonjivi prekidi spadaju u prekide prve vrste.

Na primjer funkcija $f_{(x)} = sinx$ ima u $a = 0$ prekid prve vrste koji nije otklonjiv. Funkcija $|sinx|$ u istoj tački ima otklonjiv prekid. Naziva se ovako jer ima i desni i lijevi limes jednak ali taj limes nije jednak vrijednosti funkcije, tj.:

$$\lim_{x \to a^{+0}} f_{(x)} = \lim_{x \to a^{-x}} f_{(x)} = L$$

$$L \neq f_{(x_0)}$$

150. ***Zaokružiti tačna tvrđenja:***

<u>(a) Ako neprekidna funkcija na krajevima intervala prima vrijednosti različitog znaka onda u unutrašnjosti tog intervala ima bar jednu nul-tačku.</u>

<u>(b) Neprekidna funkcija na (a, b) na tom intervalu dostiže svoj maksimum i minimu.</u>

(c) Kompozicija dvije neprekidne funkcije je neprekidna funkcija.

151. ***Kako se definišu asimptote funkcije?***

Asimptote funkcije sup rave linije koje nam govore vise o ponašanju funkcije u krajevima oblasti definisanosti. Razlikujemo horinzontalnu, vertikalnu i kosu asimptotu.

Za pravu $x = a$ kažemo da je vertikalna asimptota funkcije $f_{(x)}$ ako je

$$\lim_{x \to a_+} f_{(x)} = \pm\infty$$

odnosno ako je

$$\lim_{x \to a_-} f_{(x)} = \pm\infty$$

Za pravu $y = a$ kažemo da je horizontalna asimptota funkcije $f_{(x)}$ ako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_{(x)} = A, \;\; A \neq \infty$$

Ako je

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f_{(x)}}{x}, \qquad k \neq 0 \;\wedge\; \infty \;\; i \;\; n = \lim_{x \to \infty} \left[f_{(x)} - k_x\right]$$

onda je prava $y = kx + n$ kosa asimptota funkcije f.

152. ***Kada postoji horizontalna a kada kosa asimptota funkcije? Da li funkcija definirana na skupu (0, 1) ∪(1, +∞) može imati horizontalnu asimptotu?***

$$f_{(x)} = 0_{(1)}\,, \qquad x \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f_{(x)} - mx - n\right) = 0$$

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f_{(x)}}{x}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f_{(x)} - mx)$$

Ako je m=0 asimptota je horizontalna.

Kosa asimptota postoji kada nema horizontalne.

153. ***Kada postoji vertikalna asimptota funkcije? Da li funkcija definirana na skupu (1, +∞) može imati vertikalnu asimptotu?***

Ravna $x = a$ je vertikalna asimptoa funkcije $y = f_{(x)}$ ako je bar jedan od limesa

$$\lim_{x\to a^+} f_{(x)}\ ili\ \lim_{x\to a^-} f_{(x)}$$

jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

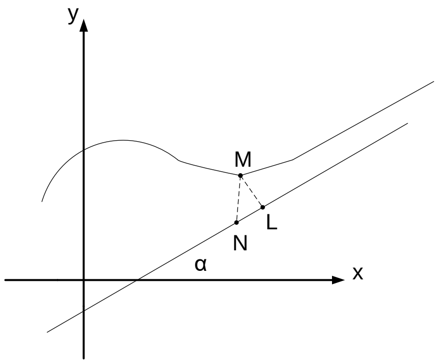
Za ovu asimptotu važno je odrediti oblast definisanosti funkcije, jer ukoliko postoji prekid funkcije, onda ispitujemo ponašanje funkcije kada se približavamo tom prekidu sa lijeve i desne strane.

154. ***Ako je y = kx + n kosa asimptota funkcije izvesti formule za k i n.***

Ako je

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f_{(x)}}{x} = k \quad i \quad \lim_{x\to-\infty}\left(f_{(x)} - kx\right) = n$$

pri čemu je $k \neq 0, -\infty, +\infty$ i $n \neq 0, -\infty, +\infty$ tada je pravac $y = kx + n$ kosa asimptota.



Udaljenost od tačke na krivulji do asimptote je $\alpha(M, L)$. Prema definiciji asimptote $\alpha(M, L) \to 0$ kada je $x \to +\infty$. Kada je $cos\alpha \neq 0$ konstanta zaključujemo da je

$$\alpha(M, L) \to 0 <=> \alpha(M, N) \to 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left| f_{(x)} - (kx + n) \right| = 0$$

Zadnji uvijet je ekvivalentan sa

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f_{(x)} - kx - n \right) = 0$$

to je ekvivalentno sa

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f_{(x)} - kx \right) = n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{(x)} - kx - n}{x} = 0 \quad pa\ je\ dalje$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_{(x)}}{x} = k$$

DIFERENCIJALNI RAČUN

155. ***Definisati izvod funkcije u tački, navesti oznake koje koristimo za izvod funkcije.***

Izvod funkcije f u tački $x \in (a,b)$ naziva se granična vrijednost

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_{(x+h)}-f_{(x)}}{h}$$

ukoliko ona postoji, konačna ili beskonačna.

Oznake koje koristimo na primjer za neku funkciju $y = f_{(x)}$ su $f_{(x)}, y^{\iota}, y_x^{\iota}\ i\ \frac{d_f}{d_x}$.

Za funkciju $y = f_{(x)}$ kažemo da je diferencijabilna u tački $x \in (a,b)$ ako ima konačnu derivaciju u toj tački.

156. ***Definisati lijevi i desni izvod funkcije u tački.***

Za funkciju $f\colon [a,b] \to R$ kažemo da ima lijevi izvod u tački $x \in (a,b]$ ako postoji

$$\lim_{h\to 0_-}\frac{f_{(x+h)}-f_{(x)}}{h}$$

i u tom slučaju pišemo da je $f_l^{\iota}(x)$.

Za funkciju $f\colon [a,b] \to R$ kažemo da ima desni izvod u tački $x \in (a,b]$ ako postoji

$$\lim_{h\to 0_+}\frac{f_{(x+h)}-f_{(x)}}{h}$$

i u tom slučaju pišemo da je $f_d^{\iota}(x)$.

Izvod funkcije $f(x)$ postoji ako postoji f_l^{ι} i f_d^{ι} i jednaki su

$$\exists f^{\iota}(x) <=> \exists f_l^{\iota}(x)\exists f_d^{\iota}(x)$$

$$f_l^{\iota} = f_d^{\iota}$$

157. ***Kada za funkciju kažemo da je diferencijabilna u nekoj tački?***

Za funkciju $f_{(x)}$ kažemo da je diferencijabilna u tački $x \in (a, b)$ ako ona u toj tački ima konačnu devijaciju. Funkcija je diferencijabilna na skupu ako je diferencijabilna na svakoj tački skupa.

$\exists f_{(x)} < \infty$ => f je diferencijabilna u x.

158. ***Iskazati i dokazati stav o vezi neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije u tački. Primjerom pokazati da je diferencijabilnost jača osobina od neprekidnosti.***

Ako je f diferencijabilna funkcija u tački $x \in (a, b)$ tada je ona i neprekidna u istoj tački.

DOKAZ:

$$\Delta f = \Delta h + 0_{(h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(f_{(x+h)} - f_{(x)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(h \cdot f^{\iota}_{(x)} + 0_{(h)}\right) = 0$$

Kada je $x = x + h \to x_0 = x$ onda je

$$\lim_{x\to x_0} f_{(x)} = f_{(x_0)}$$

tj. funkcija je funkcija f neprekidna u tački $x_0 = x$.

PRIMJER:

Ako je funkcija diferencijabilna u tački x_0, tj. postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k$$

Potrebno je pokazati da je:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \;\; => \;\; \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \;\; => \;\; \lim_{\Delta x\to 0} f[(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f[(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \quad => \quad k \cdot 0 = 0$$

159. ***Navesti osnovna pravila diferenciranja.***

Neka su $f, g: I \to R$ funkcije derivabilne u tački $x \in I$.

Tada vrijedi:

a) f + g derivabilna u x i vrijedi
$$(f+g)^{\iota}(x) = f^{\iota}(x) + g^{\iota}(x)$$
b) f – g je derivabilna u x i vrijedi
$$(f-g)^{\iota}(x) = f^{\iota}(x) - g^{\iota}(x)$$
c) f · g je derivabilna u x i vrijedi
$$(f \cdot g)^{\iota}(x) = f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)$$
d) ako je $g(x) \neq 0$, onda je f/g derivabilna u x i vrijedi
$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\iota}(x) = \frac{f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)}{g^{2}(x)}$$

160. ***Navesti i dokazati pravilo o diferenciranju proizvoda dvije funkcije.***

$$(f \cdot g)^{\iota}(x) = f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)$$

DOKAZ:

$$[f(x) \cdot g(x)]^{\iota} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x) \cdot [g(x-\Delta x) - g(x)] + g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)$$

161. ***Navesti i dokazati pravilo o diferenciranju količnika dvije funkcije.***

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\iota}(x) = \frac{f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)}{g^{2}(x)}$$

DOKAZ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\iota}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x) - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$= \frac{f^{\iota}(x)g(x) + f(x)g^{\iota}(x)}{g^2(x)}$$

162. ***Kako glasi pravilo za nalaženje izvoda parametarski zadate funkcije?***

Neka je funkcija $y = y(x)$ zadana parametrski

$$x = \varphi(t); \;\; y = \psi(t)\,, \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

Pretpostavljamo, dakle da funkcija $\varphi(t)$ ima inverznu funkciju $f = \varphi^{-1}(x)$. Budući da je tada

$$y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = (\psi \circ \varphi^{-1}) \qquad (1)$$

i za diferencijabilne funkcije φ i ψ, pri čemu je

$$\psi(t) \neq 0, \qquad (t \in (\alpha, \beta))$$

U relaciji (1) se mogu primijeniti pravila

$$(g \circ f)^{\iota}(x) = g(f(x))^{\iota} = g^{\iota}_{f}(f) f^{\iota}_{x}(x)) \;\; i \quad (y^{\iota}_{x} \cdot x^{\iota}_{y} = 1)$$

Prema tome koristeći izvod složene odnosno inverzne funkcije imamo:

$$y^{\iota}_{x} = (\psi \circ \varphi^{-1})^{\iota}(x) = \psi^{\iota}_{t}(\varphi^{-1})^{\iota}_{x} = \psi^{\iota}_{t} \cdot t^{\iota}_{x} = \frac{\varphi^{\iota}_{t}}{\varphi^{\iota}_{t}}$$

Dobijena formula za izvod parametarski zadane funkcije zapisuje se

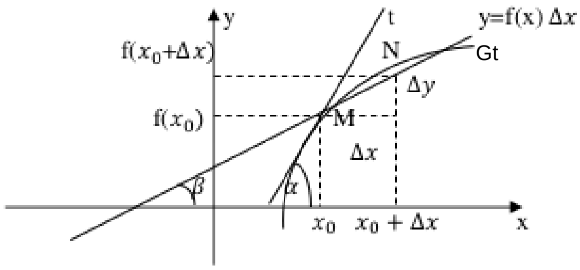
$$y_x^{\iota} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

gdje je:

$$\dot{y} = y_t^{\iota} = \psi^{\iota}(t) \quad i \quad \dot{x} = x_t^{\iota} = \varphi^{\iota}(t)$$

163. ***Slikom objasniti geometrijsko tumačenje izvoda. Kako glase jednačine normnale i tangente na krivu u tački?***

Geometrijska prava derivacija (konačna ili beskonačna) funkcija f u tački x predstavlja koeficijent pravca tangent (t) na krivu Gt u tački x.



$$y^{\iota} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta$$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Izvod funkcije $f(x_0)$ jednak je tangensu uglu koji obrazuje tangent na grafiku f(x) u tački M sa pozitivnim smjerom x-ose.

$$k = f^{\iota}(x)$$

$$kn = -\frac{1}{f^{\iota}(x)}$$

164. ***Objasniti pojam linearizacije funkcije?***

Funkcija: $L(x,y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ naziva se linearizacija funkcije $f(x,y)$ u tački (x_0, y_0).

Aproksimirati (linearizirati) funkciju $y = sinx$ u okolini tačke $x = \frac{\pi}{4}$.

Ako je $\Delta x \to 0$ $\Delta x \approx \Delta y$ to je moguće zapisati kao

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) - \Delta y \approx f(x_0) + \Delta y = f(x_0) + f^{\iota}(x_0)\Delta x$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f^{\iota}(x_0)\Delta x$$

I naziva se diferencijalna aprokimativna formula za funkciju $f(x)$ u tački $(x_0 + \Delta x)$.

PRIMJER:

$y = sinx \quad x = \frac{\pi}{4}$

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f^{\iota}(x_0)\Delta x$

$$f(x_0) = y = sinx_0 = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f^{\iota}(x_0) = y^{\iota} = cosx_0 = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \quad x \in 0(x_0)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x \quad x \in 0(x_0)$$

165. ***Definisati diferencijal funkcije u tački i dati njegovu geometrijsku iterpretaciju.***

Neka je funkcija $y = f(x)$ diferencijalna u tački x_0, diferencijal funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 je $dy = df(x_0) = f(x_0)\Delta x$ gdje je Δx mali priraštaj nezavisne promjenjive x.

$$y = f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$y = f(x_0) = \frac{x_0}{x_0 + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$y^{\iota} = f^{\iota}(x_0) = \frac{x_0^{\iota}(x_0+1) - (x_0+1)^{\iota}x_0}{(x_0+1)^2}$$

$$y^{\iota} = f^{\iota}(x_0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$f(x_0) \approx 0 + 0 \cdot x$$

$$f^{\iota}(x_0) \approx 0 + 0 \cdot x$$

166. ***Izvršiti komparaciju diferencijala i priraštaja funkcije u tački. Šta se dobija kao posljedica toga?***

Diferencijal je razlika između vrijednosti ordinate y i tačke na tangenti (sa apscisom koja je veoma blizu x_0. I ordinate y_0 tačka dodira tangent sa grafikom funkcije.

Priraštaj funkcije bi bio $\Delta y = f(x) - y_0$ gdje je $f(x)$ ordinate tačke na grafiku funkcije a ne tangent sa apscisom x.

167. ***Koji od sljedećih izraza predstavljaju pravila za diferencijal funkcije:***

a) $\underline{d(f+g) = df + dg}$

b) $\underline{d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f^{\iota}g - fg^{\iota}}{g^2}}$

c) $df(x) = f^{\iota}(x)dx$

d) $\underline{d(f \cdot g) = gdf + fdg}$

168. ***Kako definišemo n-ti izvod i n-ti diferencijal funkcije jedne varijable?***

Ako funkcija $y = f(x)$ ima izvod $y^{\iota} = f^{\iota}(x)$ na intervalu (a,b) i ako je funkcija $f^{\iota}(x)$ diferencijabilna na (a,b), tada se izvod ove funkcije $(f^{\iota}(x))^{\iota}$ označava sa $y^{u} = f^{u}(x)$ i naziva se drugim izvodom funkcije $f(x)$. U skladu sa tim, izvod $y^{\iota} = f^{\iota}(x)$ se naziva prvim izvodom funkcije $y = f(x)$. Sama funkcija se može označiti i sa $y = f^{(0)}(x)$ (“nulti” izvod). Ako je, dalje, $f^{u}(x)$ diferencijablina funkcija u intervalu (a,b) onda je $(f^{u}(x))^{\iota} = f^{u\iota}(x)$ treći izvod funkcije $y = f(x)$, i tako redom.

Ako sa $f^{(n)}x$ označimo n-ti izvod funkcije $f(x)$ onda važi ddda aaako je $(n-1)$-vi izvod funkcije diferencijabilan, tada je:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))^{\iota}$$

Ako je dx konstantan priraštaj, onda je

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

Preko diferencijala se može izraziti n-ti izvod kao:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{(dx)^n}$$

Ako je funkcija $y(x)$ diferencijabilna n puta na intervalu (a, b) onda je diferencijal n-tog reda funkcije

$$d^n y = d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

169. ***Izvesti pravilo logaritamskog izvoda i primjeniti ga na izvod funkcije y = x ln x.***

Neke funkcije mogu biti zadane analitičkim izrazom koji nije pogodan za određivanje izvoda po definiciji, budući da se komplikuje izračunavanje odgovarajućih limesa. Takav je primjer funkcija:

$$F(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

gdje su f i g diferencijabilne funkcije na $E = (a, b)$, na kome je i $f(x) > 0$.

Sa druge strane ako se logaritmira onda dobijamo funkciju

$$\wedge (x) = lnF(x) = g(x)ln[f(x)]$$

$$lnF(x) - g(x)ln[f(x)] = 0$$

$$\wedge^{\iota} (x) = \frac{1}{F(x)} F^{\iota}(x)$$

Izraz na desnoj strani $\frac{F^{\iota}}{F}$ se naziva logaritamska derivacija funkcije F.

Ako znamo logaritamsku derivaciju funkcije F, možemo odrediti I derivaciju te funkcije F.

$$\frac{F^{\iota}(x)}{F(x)} = g^{\iota}(x)ln[f(x)] + g(x)\frac{f^{\iota}(x)}{f(x)}$$

odakle je

$$F^{\iota}(x) = [f(x)]^{g(x)}\left[g^{\iota}(x)ln[f(x)] + g(x)\frac{f^{\iota}(x)}{f(x)}\right]$$

PRIMJER:

$$y = lnx \quad / \ln$$

$$lny = \ln(lnx) \qquad /^{\iota}$$

$$\frac{y^{\iota}}{y} = \frac{1}{lnx} \cdot (lnx)^{\iota}$$

$$\frac{y^{\iota}}{y} = \frac{1}{lnx} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y^{\iota} = y\frac{1}{xlnx} = \frac{y}{xlnx}$$

$$y^{\iota} = \frac{y}{xlnx} = \frac{lnx}{xlnx} = \frac{1}{x}$$

170. ***Iskazati i dokazati Fermatov teorem.***

Neka je funkcija f definisana na $D_f = (a, b)$ i ima lokalni ekstremum $f(c)$ u tački $c \in (a, b)$. Tada, ako funkcija f ima izvod u tački c, onda je $f^{\iota}(c) = 0$.

DOKAZ:

Pretpostavimo da je $f(c) = maxf(x)$, tj. da funkcija f ima lokalni maksimum u tački c.

Tada je za h>0

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

pa slijedi da je

$$f_d^{\iota}(c) = \lim_{R^+ \to h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Sa druge strane, za h<0: isti izraz je pozitivan, tj. vrijedi:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

odakle je

$$f_l^{\iota}(c) = \lim_{R^- \to h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Budući da po pretpostavci teorema postoji $f^{\iota}(c)$, to je

$$0 \geq f_d^\iota(c) = f^\iota(c) = f_l^\iota(c) \geq 0$$

odakle, jasno, slijedi da je $f^\iota(c) = 0$.

Teorem je dokazan, jer slučaj lokalnog minimum se dokazuje analogno izloženom dokazu.

171. ***Pod stacionarnom tačkom funkcije podrazumijevamo***

(a) tačku u kojoj je prvi izvod jednak nuli.

(b) tačku u kojoj je prvi diferencijal funkcije jednak 0.

(c) tačku u kojoj funkcija ima ekstrem.

172. ***Iskazati i dokazati Rolleov teorem.***

Neka je funkcija f definisana na $D_f = [a, b]$ i neka ispunjava sljedeće uslove:

- $f \in C_{[a,b]}$
- postoji izvod $f^\iota(x)$ u svakoj tački $x \in (a, b)$
- $f(a) = f(b)$

Tada funkcija f ima stacionarnu tačku koja pripada (a,b).

DOKAZ:

Naprije, ako je $f(x) = const.$ na $[a, b]$, onda je $f(x) = f(a)$, pa je $f^\iota(x) = 0$ za svaku $x \in (a, b)$.

Dakle, sve tačke (a,b) su stacionarne, pa ćemo pretpostaviti da funkcija nije konstantna, tj. postoji $x \in (a, b)$ tako da je (na primjer) $f(x) > f(a) = f(b)$. Prema Weierstrassivom teoremu neprekidna funkcija na segment $c \in (a, b)$ tako da je $f(c) = max f(x)$, a prema Fermatovom teoremu ta je tačka stacionarna.

Slično se dokazuje egzistencija stacionarne tačke ako postoji $x \in (a, b)$ sa svojstvom da je $f(x) < f(a) = f(b)$, pa je tvrdnja potvrđena.

173. ***Iskazati i dokazati Lagrangeov teorem.***

Neka je funkcija f definisana na $D_f = [a, b]$ i neka ispunjava sljedeće uslove:

- $f \in C_{[a,b]}$

- postoji izvod $f^{\iota}(x)$ u svakoj tački $x \in (a,b)$, tada postoji $c \in (a,b)$, tako da vrijedi
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{\iota}(c)$$

DOKAZ:

Funkcija $g(x)=f(x)+\lambda x$, za svaku vrijednost realnog parametra λ, je neprekidna na $[a,b]$ i ima derivaciju u svakoj tački interval (a,b).

Osim toga, možemo odrediti parameter λ tako da vrijedi $g(a)=g(b)$.

Odavde lako slijedi da je

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Obratno, ako je

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

onda je $g(a)=g(b)$, pa funkcija $g(x)=f(x)+\lambda x$ zadovoljava sve uslove Rolleovog teorema. Prema tome, postoji i stacionarna tačka $c \in (a,b)$ funkcije $g(x)$. Budući da je $g^{\iota}(c)=f^{\iota}(c)+\lambda=0$, to je $f^{\iota}(c)=-\lambda$, što predstavlja

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{\iota}(c)$$

Teorem je dokazan!

174. ***Za šta se koriste L'Hospitaleove teoreme? Kada ih možemo primijeniti i kako? Objasniti!***

L'Hospitaleovo pravilo omogućava nalaženje izvjesnih limesa sa neodređenim oblicima pomoću izvoda. Postoje dva L'Hospitaleova pravila:

Prvo L'Hospitaleovo pravilo:

Neka funkcije f i g zadovoljavaju uslove Cauchyevog teorema na $D_f=D_g=[a,b)$ i neka je $x_0 \in (a,b)$. Ako je $f(x_0)=g(x_0)=0$ i postoji

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{\iota}(x)}{g^{\iota}(x)}$$

konačan ili beskonačan. Tada postoji i

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Još više, tada vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{\iota}(x)}{g^{\iota}(x)}$$

Primjer:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 2}{2x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Drugo L'Hospitaleovo pravilo:

Neka su funkcije f i g diferencijabilne u interval (a,b), na kome je $g^{\iota} \neq 0$ i neka je

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty$$

Tada, ako postoji

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f^{\iota}(x)}{g^{\iota}(x)}$$

onda postoji i

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Još više, vrijedi jednakost

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f^{\iota}(x)}{g^{\iota}(x)}$$

Ako je funkcija vektorskog oblika $(0 \cdot \infty)$ trebamo je vektorski prevesti da bude oblika $\left(\frac{0}{0}\right)$ da bi koristili prvo i drugo L'Hospitaleovo pravilo, i vrijedi:

$$F = f \cdot y = (0 \cdot \infty) \;\; => \;\; F = \frac{f}{\frac{1}{y}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

175. ***Navesti i dokazati teorem o primjeni izvoda u ispitivanju monotonosti funkcije. Kako ga koristimo u određivanju ekstrema funkcije?***

Ako je $y > 0$ na intervalu $(a, b) \subseteq D(f)$ tada na tom interval funkcija $y = f(x)$ raste, a ukoliko je $y^{\iota} < 0$ na nekom interval (c, a), tada na tom interval funkcija opada.

Teorem (prvo pravilo):

Neka je $U(a)$ okolina tačke a i neka je funkcija f neprekidna na $U(a)$. Ako je funkcija f diferencijabulna na $U(a) \setminus \{a\}$ tada je u tački a lokalni ekstrem funkcije f ako je funkcija f^{ι} mijenja svoj znak u tački a, tada je:

- u tački a lokalni minimum ako je prvi izvod $f^{\iota} < 0$ za $x \in (-\infty, a) \cap U(a)$ i $f^{\iota} > 0$ za $x \in (a, +\infty) \cap U(a)$
- u tački a lokalni maksimum ako je prvi izvod $f^{\iota} > 0$ za $x \in (-\infty, a) \cap U(a)$ i $f^{\iota} < 0$ za $x \in (a, +\infty) \cap U(a)$

Primjer:

Ispitati monotonost funkcije $f(x) = xlnx$

$$D_f: x > 0$$

$$f^{\iota} = (xlnx)^{\iota} = lnx + 1$$

$$f^{\iota} = 0$$

$$lnx + 1 = 0 => lnx = -1 => x = \frac{1}{e}$$

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f^{ι}	-	+	
f	↘	↗	

$$\left(0, \frac{1}{e}\right) f \searrow \qquad \left(\frac{1}{e}, +\infty\right) f \nearrow$$

$$T_{min} = \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e} lne\right)$$

Teorem (drugo pravilo)

Neka je $f^{u}(x)$ definisana funkcija u stacionarnoj tački c funkcije $f(x)$. Tada, ako je $f^{u}(c) > 0$ funkcija f u c ima lokalni minimum. Ako je $f^{u}(c) < 0$ onda je funkcija u f u c ima lokalni maksimum.

U slučaju da je $f''(x)$ u $c = 0$ onda teorem ne daje odgovor. Ako je $f''(x)$ u $c = 0$ onda računamo $f''(x)$ u c i provjeravamo vrijednost:

$$f''(c) = f'''(c) = f^{IV}(c) = \cdots f^{(n-1)}(c) = 0$$

$$f(c) \neq 0$$

- Ako je n neparan broj – funkcija nema ekstrem
- Ako je n paran broj – funkcija ima ekstrem

$$f'''(c) > 0 \;\; min$$

$$f'''(c) < 0 \;\; max$$

Primjer:

$$f(x) = xlnx$$

$$f' = lnx + 1$$

$$f'' = \frac{1}{x}$$

$$f''(e) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$$

U tački $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ se dešava lokalni minimum.

176. ***Navesti teorem za određivanje ekstrema funkcija koji koristi izvode vičeg reda i primjeniti ga za funkciju f(x) = x² lnx.***

Neka je $f''(x)$ definisana u stacionarnom tački c funkcije $f(x)$. Tada ako je $f''(c) > 0 (f''(c) < 0)$ funkcija $f(x)$ u stacionarnoj tački c ima lokalni minimum (maksimum).

$$f(x) = x^2 lnx$$

$$f''(x) = 0$$

$$(x^2 lnx)'' = \left(2xlnx + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right)' = (2xlnx + x)' = 2lnx + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 0$$

$$(x^2 lnx)'' = 2lnx + 3 = 0$$

$$2lnx = -3$$

$$lnx = -\frac{6}{2} \quad /e$$

$$x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{1}{e^{-\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \quad Lokalni\ minimum$$

177. ***Funkcija f(x) ima lokalni ekstrem u tački c ∈ Df***

a) <u>ako je c stacionarna tačka i $f^{u}(c) > 0$</u>
b) ako je $f^{\iota}(c) = 0$ i $f^{u}(c) \neq 0$ i $f^{(IV)}(c) \neq 0$
c) <u>ako je $f^{\iota}(c) = 0$ i $f^{u}(c) \neq 0$</u>
d) ako je $f^{\iota(8)}(c) = 0$ i $f^{(9)}(c) < 0$.

178. ***Kada za funkciju kažemo da je konveksna?***

Ovu osobinu funkcije ispitujemo primjenom drugog izvoda. Ako je na nekom intervalu drugi izvod funkcije pozitivan ($f^{u} > 0$), tada je grafik funkcije na tom intervalu konveksan (udubljen), tj. oblika ∪. Ako je na nekom intervalu drugi izvod negativan ($f^{u} < 0$), tada je grafik funkcije na tom interval konveksan (ispupčen) tj. Oblika ∩.

179. ***Navesti teorem o primjeni diferencijalnog računa u ispitivanju konveksnosti funkcije. Odrediti intervale konveksnosti za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.***

.
Teorem (I o koveksnosti):

Neka je f diferencijabilna na (a, b). Da bi f bila konveksna potrebno je i dovoljno da funkcija f^{ι} raste na (a, b).

Teorem (II o koveksnosti):

Neka je funkcija $f: D_f \rightarrow R$ ima drugu derivaciju f^{u} u svakoj tački $(a, b) \subseteq D_f$. Da bi f bila konveksna potrebno je I dovoljno da bude $f^{u}(x) \geq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{-1}$$

$$f^{\iota}(x) = -1(x^2 + 1)^{-2} \cdot (x^2 + 1)^{\iota} = (x^2 + 1)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x)' \cdot (x^2+1)^2 - (-2x) \cdot [(x^2+1)^2]'}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^4+2x^2+1) + 2x[2(x^2+1) \cdot 2x]}{[x^2+1]^4}$$

$$= \frac{-2x^4+4x^2-2+4x^2(2x^2+2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x^4+4x^2-2+8x^4+8x^2}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{6x^4+4x^2-2}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^4+2x^2-1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^4(x^2+1)-(x^2+1))}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\; => \;\; 3x^2-1=0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$-\infty$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad +\infty$

$3x^2-1$	+	-	+
$(x^2+1)^3$	+	+	+
$f''(x)$	+	-	+
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcija je konveksna na $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Funkcija je konkavna $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

180. ***Definirati prevojnu tačku (tačku infleksije) funkcije. Ispitati prevojne tačke funkcije*** $(x) = \frac{lnx}{x}$**.**

Teorem (I o prevojnim tačakama):

Neka je $f \in D_{U(X_0)}$ i ima konačnu drugu derivaciju u svim tačakama okoline $U(x_0)$ tačke x_0, osim možda same tačke x_0. Ako funkcija $f''(x)$ mijenja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0, tada je $(x_{0,}\, f(x_0))$ prevojna tačka krive $y = f(x)$.

Teorem (II o prevojnim tačakama):

Neka je $f''(x_0) = 0$, a $f'''(x_0) \neq 0$. Tada je $(x_{0,}\, f(x_0))$ prevojna tačka krive $y = f(x)$.

$$f(x) = \frac{lnx}{x} \qquad /' \qquad D.P.\, x \neq 0$$

$$f'(x) = \frac{(lnx)' \cdot x - lnx \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - lnx \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - lnx}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1 - lnx)' \cdot x^2 - (1 - lnx)(2x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - lnx)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2xlnx}{x^4}$$

$$= \frac{x(-3 + 2lnx)}{x^4} = \frac{2lnx - 3}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \qquad 2lnx - 3 = 0 \;\; => \;\; lnx = \frac{3}{2} \;\; => \;\; x = e^{\frac{3}{2}}$$

Prevojna tačka je:

$$\frac{lne^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2} lne}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}}$$

INTEGRACIJA

181. ***Za neprekidnu funkciju Φ(x) kažemo da je primitivna funkcija funkcije φ(x) na nekom segmentu ako i samo ako na tom segmentu vrijedi***

a) $\int \Phi(x)dx = \Phi(x)$
b) $\Phi^{\iota}(x) = \Phi(x)$
c) $\frac{d\phi(x)}{dx} = \phi(x)$
d) $d\phi(x) = \phi(x)dx$

182. ***Koja od sljedećih tvrdjenja nisu tačna:***

(a) Svaka funkcija ima bar jednu primitivnu funkciju.

b) Ako funkcija ima jednu primitivnu funkciju, onda ih ima beskonačno mnogo.

(c) Svaka funkcija ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija.

(d) Svaka ograničena funkcija ima primitivnu funkciju.

183. ***Objasniti zašto ako za neku funkciju znamo jednu primitivnu funkciju, onda znamo sve njene primitivne funkcije!***

Ako na nekom intervalu $E \subseteq R$ funkcija $F(x)$ predstavlja primitivnu funkciju funkcije $f(x)$ onda je i funkcija $F(x) + c$ gdje je $c \in R$, također primitivna funkcija funkcije $f(x)$.

Za funkciju $f(x)$ dovoljno je pronaći jednu primitivnu funkciju $F(x)$. Dodavanjem proizvoljne const. $F(x)$ dobijamo skup primitivnih funkcija funkcije $f(x)$.

$$\{F(x) + \mathrm{c} : F^{\iota}(x) = f(x), \ c \in R\}$$

Navedeni skup nazivamo neodređenim integralom funkcije $f(x)$.

$$\int f(x)\mathrm{dx} = \mathrm{F(x) + c}$$

184. ***Neka su F(x) i G(x) primitivne funkcije funkcija f(x) i g(x) respektivno. Tada su F(x)+G(x) i F(x)·G(x) redom primitivne funkcije funkcija f(x)+g(x) i f(x)·g(x).***

DA NE

185. ***Neka su F(x) i G(x) primitivne funkcije funkcija f(x) i g(x) respektivno. Tada vrijedi***

a) $\underline{\int(f(x) \pm g(x))dx = F(x) \pm G(x) + c}$

b) $\underline{(\int f(x)dx)^{\prime} = F(x)dx}$

c) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{F(x)}{G(x)} + c$, ako je $G(x) \neq 0$

d) $\int d(F(x)G(x))dx = F(x)G(x) + c$

e) $\underline{\int d(f(x)) + g(x)dx = F(x) + G(x) + c}$

186. ***Dokazati pravilo za neodređeni integral:*** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)}$**.**

Budući da je

$$F^{\prime}(x) = f(x)$$

to je:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = F^{\prime}(x)dx = f(x)dx$$

187. ***Dokazati pravilo za neodređeni integral:*** $\boldsymbol{\int dF(x) = F(x) + c}$

Budući da je

$$F^{\prime}(x) = f(x)$$

to je:

$$\int dF(x) = \int F^{\prime}(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$$

188. ***Navesti teorem o smjeni promjenljive kod neodređenog integrala.***

Neka je $\phi(t)$, $t \in E$, primitivna funkcija funkcije $f(t)$ i neka je $t = \varphi(x)$ diferencijabilna u svim tačkama $x \in F$, gdje su E i F razmaci u R. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $f(\varphi(x))\varphi^{\prime}(x)$ i pri tome vrijedi:

$$\int f(\varphi(x))\varphi^{\prime}(x)dx = \phi(\varphi(x)) + c$$

189. ***Navesti i dokazati formulu parcijalne integracije za neodređeni integral.***

Neka su u i v diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u \cdot v^\iota$. Tada vrijedi:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Dokaz:

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)^\iota = u^\iota(x)v(x) + u(x)v^\iota(x) \qquad /\int$$

$$\int \left(u(x) \cdot v(x)\right)^\iota = \int u^\iota(x)v(x)dx + \int u(x)v^\iota(x)dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int v(x)du(x) + \int u(x)dv(x)$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

190. ***Kanoniziranjem kvadratnog trinoma i odgovarajućim smjenama integra*** $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{ax^2+bx+c}}\boldsymbol{dx}$***,*** $\boldsymbol{b^2 < 4ac}$ ***svesti na jednostavniji oblik, a zatim ga riješiti.***

Trinom $ax^2 + bx + c$ ne možemo faktorisati. Tada provodimo postupak "kanonizacije".

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \left| \begin{array}{l} \frac{b}{a} = p \\ \frac{c}{a} = q \end{array} \right. = a(x^2 + px + q)$$

$$= a\left[x^2 + 2x\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q\right] = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right] \left| \, q - \frac{p^2}{4} = m \right.$$

$$= a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + m\right]$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \int \frac{1}{a\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+m\right]}dx \quad \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+m}dt = \frac{1}{a}\int \frac{1}{m\left(1+\frac{t^2}{m}\right)}dt \quad \left| \begin{array}{l} \frac{t^2}{m}=\frac{t}{\sqrt{m}}=u \\ \frac{1}{\sqrt{m}}dt=du \\ dt=\sqrt{m}du \end{array} \right. = \frac{\sqrt{m}}{am}\int \frac{1}{1+u^2}du$$

$$= \frac{\sqrt{m}}{am}arctg\frac{t}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{m}}{am}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{am}}+c$$

191. ***Izvesti rekurentnu formulu za rješavanje integral*** $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x^2+1})^{\boldsymbol{n}}}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$**.**

$$d(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}\ , n \in N$$

$$In = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}\ , n \in N$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} - \ tablični\ integral$$

Za $n > 1$:

$$In = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^n} = I_{n-1} - I_n$$

Ako u integral

$$In = \frac{1}{2}\int \frac{xa(1+x^2)}{(1+x^2)^n}$$

Stavimo

$$u = x \quad i \quad dv = \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^n}$$

$$du = dx \quad i \quad v = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

Primjenom parcijalne integracije dobija se:

$$In = \frac{x}{2(1-n)(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2(1-n)}\right) I_{n-1} \;, \qquad n \in N$$

što predstavlja rekurentnu formula za računanje integral.

192. ***Riješiti integral*** $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx,\ p^2 - 4a < 0$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = t \\ (2x+p)dx = dt \end{array} \right.$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2x+P}{x^2+px+q} dx$$

$$+ \int \frac{N - \left(p \cdot \frac{M}{2}\right)}{x^2+px+q} dx$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{M}{2} p\right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{1}{t} dt + \Big(N$$

$$- \frac{M}{2} p\Big) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx$$

$$= \frac{M}{2} ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{M}{2} p\right) \int \frac{1}{x^2+px+q} dx$$

193. ***Riješiti integral*** $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx.$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x-1}{x+1} = t \\ dx = dt \end{array} \right. = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}$$

194. ***Objasniti smjenu koju primjenjujemo na rješavanje integrala oblik*** $\int \boldsymbol{R(sinx, cosx)dx}$.

Smjena koja se koristi za rješavanje ovog integral je

$$tg\frac{x}{2} = t \quad \Big| -\frac{\pi}{2} < x > \frac{\pi}{2}$$

$$sinx = \frac{sin2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}}{\frac{sin\frac{2x}{2}}{cos\frac{2x}{2}} + 1} = \frac{2t}{t^2 + 1}$$

$$cosx = \frac{cos2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\frac{cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}}}{\frac{cos^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$tg\frac{x}{2} = t$$

$$\frac{x}{2} = arctgt \ \ /2$$

$$x = 2arctgt \ \ /d$$

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} \cdot dt$$

195. ***Pod dijametrom podjele segmenta podrazumijevamo najveće rastojanje između proizvoljne dvije susjedne tačke podjele.***

DA NE

196. ***Definisati integralnu sumu sa objašnjenjem pojmova koje koristimo u ovoj definiciji.***

Neka je $f: [a, b] \to R$ i (P, Ξ) podjela sa odabranim tačaka segmenta $[a, b]$. Sumu

$$\sigma(f; P; \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_i$$

Gdje je $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$; $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n\}$ nazivamo integralnom sumom funkcije f za datu podjelu (P, Ξ).

197. Definisati Riemann-integrabilnost funkcije na segment.

Predpostavimo da je $f: [a, b] \rightarrow R$. Riemann-integrabilna funkcija. Za svako $n \in N$ neka je $(x_1)_0 \leq i \leq n$ pripada ekvidistantna subdivizija segmenata $[a, b]$ neka je:

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + ih \qquad za\ 0 \leq i \leq n$$

najdalje za $n \in N$ i $i \leq L \leq n$ neka su $\in_n$, I brojevi uz segment $[x_{L-i}, x_i]$. Pripadna integralna suma Sn funkcije f je oblika:

$$Sn = h \sum_{i=1}^{n} f(\in_{n,i}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\in_{n,i})$$

Tada je niz integralnih suma $(Sn)_{n \in N}$ od f konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{x \to \infty} Sn(f) = \int_a^b f(x)dx$$

198. Definisati donju Darbouxovu sumu i objasniti njenu vezu sa integralnom sumom.

Neka je $f: I \rightarrow R$ omeđena na segmentu $I = [a, b]$ tj. takva da postoje brojevi m i M sa osobinom $m \leq f(x) \leq M$ za svaki $x \in [a, b]$.

Neka je $P = (x_0, x_1, \ldots x_n)$ bilo koja subdivizija segmenta I.

Neka postoje brojevi $m_k = inf\{f(x): x \in (x_{k-1}, x_k\}$

$$m_k = sup\{f(x): x \in (x_{k-1}, x_k\}$$

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

Na svakom segment $(x_{k-1}, x_k), k = 1 \ldots n$ odaberemo bilo koju tačku $\in_k$. Prema definiciji supremuma M_k i infimuma m_k vrijedi

$$m_k \leq f(\in_k) \leq M_k$$

$$m \leq m_k \leq f(\in_k) \leq M_k \leq M$$

Pri čemu je donja Darbauxova suma:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(m_k - x_{k-1})$$

Dok integralna suma predstavlja:

$$\sigma(f, P, \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m\}) = \sum_{k=1}^{m} f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$

odnosno:

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m\}) \leq s(f, P) \leq m(b-a)$$

Donja Darbauxova suma nije veća od integralni sume.

199. ***Definisati gornju Darbouxovu sumu i objasniti njenu vezu sa integralnom sumom.***

Neka je $f: I \to R$ omeđena na segmentu $I = [a, b]$ tj. takva da postoje brojevi m i M sa osobinom $m \leq f(x) \leq M$ za svaki $x \in [a, b]$.

Neka je $P = (x_0, x_1, \dots x_n)$ bilo koja subdivizija segmenta I.

Neka postoje brojevi $m_k = inf\{f(x): x \in (x_{k-1}, x_k\}$

$$m_k = sup\{f(x): x \in (x_{k-1}, x_k\}$$
$$m \leq m_k \leq M_k \leq M$$

Na svakom segment $(x_{k-1}, x_k), k = 1 \dots n$ odaberemo bilo koju tačku $\in_k$. Prema definiciji supremuma M_k i infimuma m_k vrijedi

$$m_k \leq f(\in_k) \leq M_k$$

$$m \leq m_k \leq f(\in_k) \leq M_k \leq M$$

Pri čemu je gornja Darbauxova suma:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(m_k - x_{k-1})$$

Dok integralna suma predstavlja:

$$\sigma(f, P, \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m\}) = \sum_{k=1}^{m} f(\varepsilon_k)(x_k - x_{k-1})$$

odnosno:

$$M(b-a) \leq S(f, P) \leq \sigma(f, P, \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_m\}) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

Gornja Darbauxova suma nije manja od integralne sume koja odgovara istoj podjeli P.

200. ***Navesti teorem koji daje porebne i dovoljne uvjete da funkcija y = f (x) bude Rintegrabilna na intervalu [a, b] .***

Funkcija $y = f(x)$ je R-integrabilna ako ima konačan Riemanov integral.

Teorem 1:
Svaka neprekidna funkcija $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je na tom interval R-integrabilna.

Teorem 2:

Svaka ograničena funkcija $y = f(x)$ na interval $[a, b]$, koja na tom interval ima konačno mnogo tačaka prekida je na interval $[a, b]$ R-integrabilna.

201. ***Navesti važnije osobine R-integrala.***

Osobine R-integrala su:

- $f(x)$ – integrabilna na intervalu $[a, b]$, tada za svaku realnu konstantu
$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$$
- Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a, b]$ tada slijedi
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$
- $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i $f(x) \geq 0$
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$
- Funkcija $f(x)$ i $g(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i $f(x) \geq g(x)$
$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
- $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i $|f(x)|$ integrabilna
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad (a < b)$$
- $f(x)$ integrabilna na $[a, b]$ i $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na $[a,b]$ i ograničene $m \leq f(x) \leq M$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = n\int_a^b g(x)dx$$

202. ***Iskazati vezu integrabilnosti i neprekidnosti.***

Teorem:

Neka je f integrabilna na $[a,b]$. Tada je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

neprekidna na $[a,b]$.

Teorem;

Svaka monotomna funkcija na $[a,b]$ je integrabilna na $[a,b]$.

203. ***Neka je za integrabilnu funkciju f definisana funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Kojim stavovima obrazlažmo činjenicu da funkcija F ima bolje osobine od funkcije f?***

Teorem:

Neka je f integrabilna na $[a,b]$. Tada je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

neprekidna na $[a,b]$.

Teorem:

Ako je f neprekidna na $[a,b]$, tada je

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Diferencijabilna funkcija i za svako $x \in (a,b)$ vrijedi $F^{\iota}(x) = f(x)$.

204. ***Izvesti Newton-Leibnitzovu formulu!***

Neka je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ primitivna funkcija od $f(x)$. Neka je $\phi_{(x)}$ bilo koja primitivna funkcija $f(x)$ onda je:

$$\phi_{(x)} - F(x) = C$$

Njen neodređeni integral biće oblika:

$$\phi_{(x)} = \int f(x)dx$$

pa slijedi da je:

$$\int f(x)dx = \int_a^k f(t)dt + c, \qquad odnosno$$

$$\phi_{(x)} - \int_a^x f(t)dt = C$$

Ako u zadnjoj relaciji stavimo da je $x = a$, a zatim $x = b$:

$$\phi_{(a)} = C \qquad i \qquad \phi_{(b)} - \int_a^b f(t)dt = C$$

Prema tome slijedi da je:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi_{(b)} - \phi_{(a)}$$

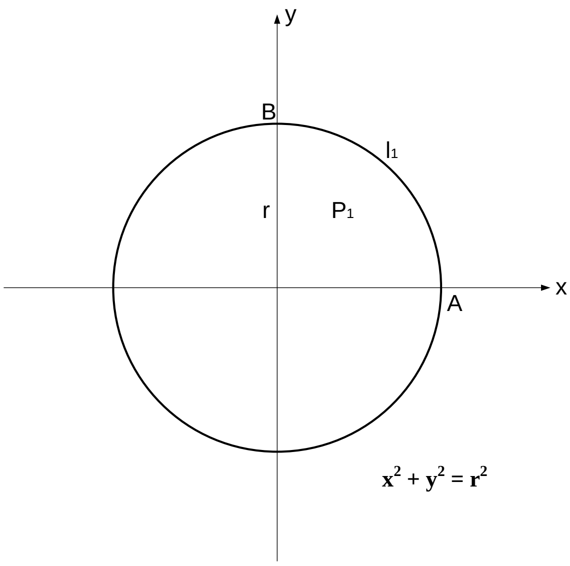
Ova formula se koristi i zapisuje u obliku:

$$\int_a^b f(t)dt = \phi_{(x)}\Big|_a^b$$

205. ***Navesti formulu za izračunavanje površine ravnih likova. Koristeći određeni integral dokazati da je površina kruga poluprečnika r jednaka $r^2\pi$.***

Formula za izračunavanje površine ravnih likova je:

$$P(f;[a,b]) = \int_a^b |f(x)|dx$$



P_1 – površina jedne četvrtine kruga $P = 4P_1$

$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ – I kvadrant funkcije pa je ona nenegativna $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Uzmimo granične vrijednosti integrala $a = 0\ i\ b = r$.

$$P_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{c} smjena: \\ x = rsint => dx = rcostdt \\ r = \frac{\pi}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2cos^2t} \cdot costdt$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos2t}{2}dt$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin\pi\right) - \frac{r^2}{2}\left(0 + \frac{1}{2}sin0\right) = \frac{1}{4}r^2\pi$$

$$P_1 = \frac{1}{4}r^2\pi$$

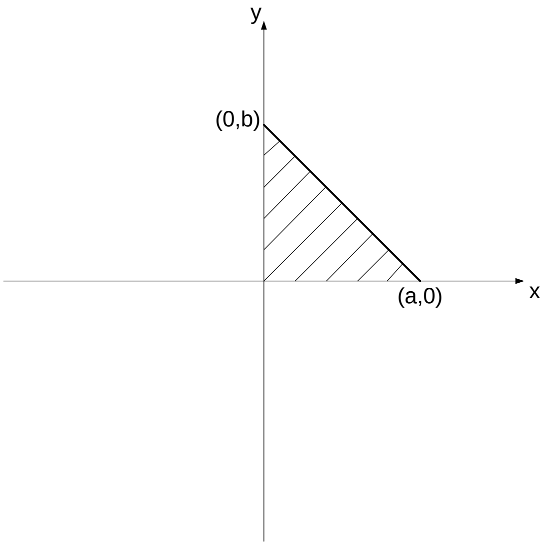
$$P = 4 \cdot \frac{1}{4}r^2\pi$$

$$P = r^2\pi$$

206. ***Navesti formulu za izračunavanje površine ravnih likova. Koristeći određeni integral dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka polovini proizvoda kateta.***

Formula za izračunavanje površine ravnih likova je:

$$P(f;[a,b]) = \int_a^b |f(x)|dx$$



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{-bx}{a}(x - a)$$

$$y = \frac{-bx}{a} + b$$

$$P = \int_0^a \left(\frac{-bx}{a} + b\right)dx$$

$$= -\int_0^a \frac{b}{a}xdx$$

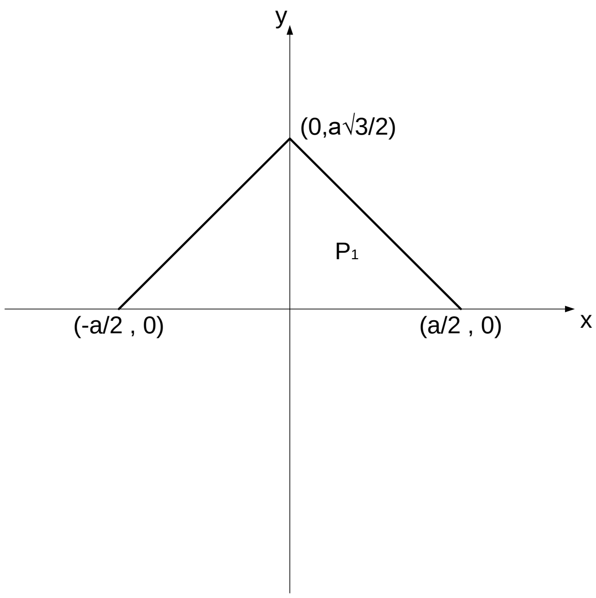
$$+ \int_0^a bdx = -\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^a + bx\Bigg|_0^a = -\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a^2}{2} - 0\right) + b(a - 0) = -\frac{ba}{2} + ba$$

$$= \frac{ba}{2}$$

207. ***Navesti formulu za izračunavanje površine ravnih likova. Koristeći određeni integral dokazati da je površina jednakostraničnog trougla stranice a jednaka*** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$**.**

Formula za izračunavanje površine ravnih likova je:

$$P(f;[a,b]) = \int_a^b |f(x)|dx$$



$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \int_a^b |f(x)|dx$$

$$P = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx$$

Prava kroz dvije tačke:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{0 - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2} - 0}(x - 0)$$

$$y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}(x - 0)$$

$$y - \frac{a\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x$$

$$y = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x$$

$$P = 2 \cdot \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) dx = 2 \cdot \left(\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{a\sqrt{3}}{2} dx - \sqrt{3}\int_0^{\frac{a}{2}} x dx\right) = 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot x \,\Big|_0^{\frac{a}{2}} - \sqrt{3}\frac{x^2}{2}\,\Big|_0^{\frac{a}{2}}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} - 0\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{0}{2}\right)\right) = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{a^2}{4}}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

208. ***Navesti formulu za računanje zapremine rotacionog tijela (rotacija oko x-ose). Koristeći određeni integral dokazati da je zapremina lopte poluprečnika R jednaka $\frac{4}{3}R^3\pi$.***

Formula za izračunavanje zapremine rotacionog tijela je:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

.