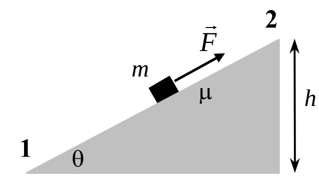
Zadaci iz fizike.

Rad u mehanici. Relacije koje povezuju rad i promenu energije.
Zakon održanja količine kretanja

1. Na horizontalnom delu puta, dužine s=*3km*, brzina automobila se poveća sa $v_1 = 36km/h$ na $v_2 = 72km/h$. Ako je masa automobila $m = 1.5t$, a koeficijent trenja između automobilskih guma i puta iznosi $\mu = 0.02$, odrediti rad koji izvrši motor automobila na tom delu puta. Napomena: aproksimativno smatrati da se radi o slučaju trenja pri klizanju (a ne pri kotrljanju).

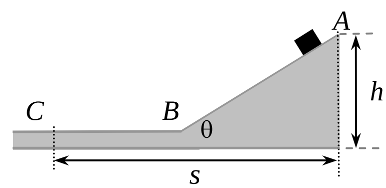
2. Pod dejstvom sile F=50N podiže se telo mase m=2kg uz strmu ravan, na visinu h=1m. Ako je nagibni ugao strme ravni $\theta=30^0$, a koeficijent trenja μ=0.2, odrediti:

a) rad sile F pri ovom kretanju (A_F),
b) rad sile trenja,
c) promenu potencijalne energije tela (ΔE_P=?) i
d) promenu kinetičke energije tela (ΔE_K=?).



3. Telo sklizne sa vrha strme ravni bez početne brzine i zaustavi se na horizontalnom delu puta (videti sliku). Horizontalno rastojanje od A do tačke C je *s*=25m*,* a visina strme ravni *h*=6m. Odrediti:

a) vrednost koeficijenta trenja između tela i podloge;
b) rad sile gravitacije na putu od A do C, ako masa tela iznosi m=2kg .

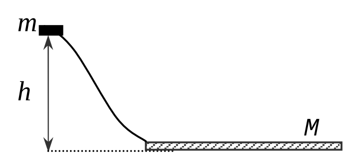


4. Telo mase m=2kg poslato je početnom brzinom v_0 =20m/s uz strmu ravan ugla nagiba $\alpha=30^o$. Koeficijent trenja klizanja je μ=0,2. Odrediti:

a) put koji telo pređe do trenutka zaustavljanja (*s=?*);
b) rad koji izvrši sila trenja do trenutka zaustavljanja;
c) promenu potencijalne i promenu kinetičke energije tela.

5. Mala pločica mase m sklizne bez početne brzine sa glatke površine visine h i pređe na dasku mase M koja leži u podnožju, na glatkoj horizontalnoj podlozi (slika). Između daske i pločice postoji trenje, tako da u jednom trenutku pločica i daska počinju da se kreću kao jedno telo. Odrediti:

a) brzinu kojom pločica udara u dasku;
b) brzinu kretanja sistema koji čine pločica i daska;
c) rad sile trenja.



6. Sa sanki mase m_1=40kg, koje miruju na ledu, iskoči dečak mase m_2=50kg brzinom od 5m/s.

a) Odrediti kolikom brzinom će krenuti sanke, ako se dečak odrazi pod uglom od $\alpha=45^o$ prema horizontu.

b) Ako sanke nakon iskakanja dečaka naleću na podlogu sa koeficijentom trenja μ=0.1, odrediti koliki će put one preći po toj podlozi do zaustavljanja?

7. Iz topa mase M=1.8t se ispali granata mase m=1kg, pod uglom $\alpha=45^o$ prema horizontu, početnom brzinom od $360\,m/s$. Odrediti:

a) brzinu trzaja topa (brzinu koju bi top imao nakon ispaljenja, kada bi se nalazio na glatkoj ravnoj podlozi);
b) maksimalnu visinu koju granata dostiže.

8. Granata, koja je lansirana početnom brzinom $v_0 = 800\,m/s$, pod uglom $\alpha=60^o$ prema horizontu, se u najvišoj tački putanje raspadne na dva jednaka dela, tako da se oni razleću u horizontalnoj ravni, pri čemu brzina svakog od delova neposredno posle raspada zaklapa ugao od $\beta=30^o$ sa pravcem rakete neposredno pre raspada. Odrediti početne brzine delova granate.

9.* **- <u>neobavezni primer</u>:** Dva ista čamca, masa $M_1 = M_2$, miruju jedan blizu drugog na jezeru, tako da su im pramci okrenuti jedan prema drugom. U prvom čamcu stoji čovek mase m_1 i drži paket mase m_p u rukama, a u drugom čamcu se nalazi dečak mase m_2. U jednom trenutku, čovek izbaci paket sa visine h u odnosu na dno čamca, pod uglom α_1 prema horizontu, u smeru ka pramcu drugog čamca. Odrediti:

a) koliko će iznositi brzina prvog čamca neposredno nakon izbacivanja paketa iz njega ($v_1^{/} = ?$);

b) koliko će iznositi brzina paketa neposredno pre upada u drugi čamac;

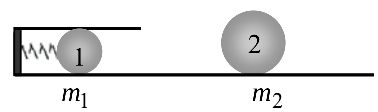
c) koliko će iznositi brzina drugog čamca neposredno nakon ubacivanja paketa u njega, ($v_2^{/} = ?$), ako paket padne na dno drugog čamca pod uglom α_2.

<u>Sudari kao primer primene zakona održanja</u>

Elastični sudari

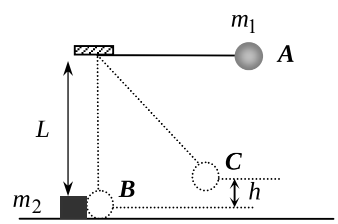
10. - elastični čeoni sudar: Loptica 1, mase m_1=5g, prislonjena je uz oprugu krutosti k=200N/m, koja je sabijena silom F=20N. Posle otpuštanja opruge, loptica 1 udara u lopticu 2 tri puta veće mase, koja je pre sudara bila u stanju mirovanja. Sudar je čeoni i elastičan. Ako se sva trenja mogu zanemariti, odrediti:

a) brzinu loptice 1 pre sudara;
b) brzinu loptice 2 posle sudara;
c) odnos kinetičkih energija loptica 2 i 1 posle sudara.



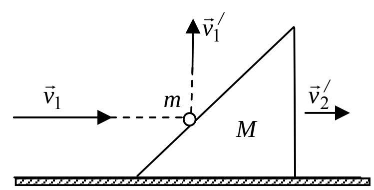
11. - elastični čeoni sudar: Lak i neistegljiv konac dužine L=46cm, pričvršćen je jednim svojim krajem u tački A. Za drugi kraj konca je zakačena loptica mase m_1=0,4kg. Konac sa lopticom se postavi horizontalno (položaj A) i pusti. U trenutku kada je konac vertikalan (položaj B), loptica se čeono elastično sudara sa blokom mase m_2=0,8kg. Odrediti:

a) brzinu loptice v_1 i silu zatezanja u koncu F_Z neposredno pre udara u blok;
b) brzinu $v_1^{/}$ koju loptica dobije pri sudaru i brzinu $v_2^{/}$ koju blok dobije u sudaru;
c) maksimalnu visinu h koju loptica dostigne posle sudara (položaj C).
Zanemariti sva trenja.



12. Pravougli ravnostrani klin mase M=9 kg leži na horizontalnoj glatkoj podlozi. Elastična kuglica mase m=100g se kreće u horizontalnom pravcu kroz vazduh, udara o kosu stranu klina i odskače vertikalno naviše. Ako je sudar kuglice sa klinom idealno elastičan, i ako brzina klina posle sudara iznosi 5cm/s, odrediti:

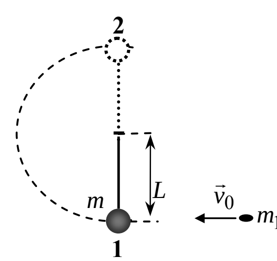
a) brzinu kuglice neposredno nakon sudara;
b) visinu do koje će se kuglica popeti nakon sudara.



Neelastični sudari

13. Na neistegljivom koncu zanemarljive mase, dužine L=0,5m, visi kugla mase m=0.2kg, tako da može da rotira u vertikalnoj ravni. Dok miruje u svom ravnotežnom položaju (položaj 1 na slici) kuglu pogađa metak mase m_1=10g, koji se kreće horizontalno brzinom v_0=126m/s i zadržava se u njoj. Odrediti:

a) brzinu kugle zajedno sa metkom u najnižoj i najvišoj tački kružnice
(u položajima 1 i 2);
b) silu zatezanja konca F_z u položaju 2;

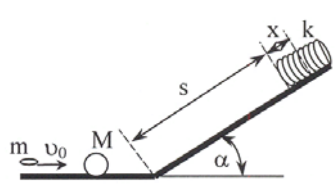


14. Metak mase m=30g, brzinom v_0=70m/s, uleće u telo mase M=180g, koje stoji na glatkom delu horizontalne podloge (slika) i zadržava se u njemu. Telo sa metkom se zatim penje uz strmu ravan, nagibnog ugla α=30^0, čija je dužina od podnožja do početka opruge položene na njenom vrhu s=57cm. Pri udaru tela o oprugu njeno maksimaslno sabijanje iznosi Δl_{max}=3cm. Odrediti:

a) brzinu ($v^{/}$=?) tela i metka u podnožju strme ravni;

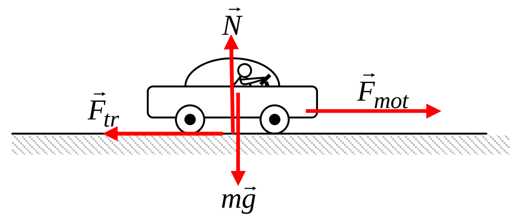
b) energiju deformacije (E_{defmax}=?) opruge u trenutku njene maksimalne sabijenosti;

c) koeficijent krutosti opruge (k=?).



REŠENJA:

1. zadatak



Na osnovu podataka datih u tekstu zadatka, rad koji izvrši motor automobila na razmatranom delu puta ne možemo da izračunamo po definiciji. Međutim, **možemo da primenimo teoremu o promeni kinetičke energije tela, koja ovu veličinu povezuje sa radom svih spoljašnjih sila:** $\Delta E_k = A$ **(1)**

Ovde je: $\Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ **(2)**

Ukupan rad svih spoljašnjih sila je: $A = A_{mot} + A_{Ftr} + A_g + A_N$ **(3)**

Rad sile reakcije podloge je po definiciji: $A_N = \int_1^2 \vec{N} \cdot d\vec{s}$. Pošto važi $\vec{N} = const$, onda može da se piše:

$A_N = \vec{N} \cdot \vec{s} = Ns\cos(\vec{N}, \vec{s}) = Ns\cos\frac{\pi}{2} = 0$. **(4)**

Rad gravitacione sile je po definiciji: $A_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s}$. Pošto važi $\vec{F}_g = const$ onda može da se piše i:

$A_g = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = F_g s\cos(\vec{F}_g, \vec{s})$, što se u slučaju kretanja po horizontalnom putu svodi na: $A_g = F_g s\cos\frac{\pi}{2} = 0$. **(5)**

Rad sile trenja je po definiciji: $A_{Ftr} = \int_1^2 \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s}$. Pošto važi $\vec{F}_{tr} = const$, onda može da se piše i:

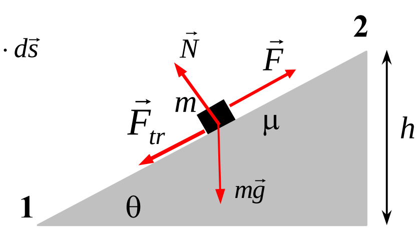
$A_{Ftr} = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{s} = F_{tr} s\cos(\vec{F}_g, \vec{s}) = F_{tr} s\cos\pi = -F_{tr} s = -\mu Ns = -\mu mgs$. **(6)**

Zamenom (4), (5) i (6) u (3) sledi: $A = A_{mot} + A_{Ftr} + A_g + A_N = A_{mot} + (-\mu mgs) + 0 + 0 = A_{mot} - \mu mgs$ **(7)**

Iz (1), (2) i (7) sledi: $\boxed{A_{mot} = \mu mgs + \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \approx 1.11MJ}$

2. zadatak

a) Sa slike sledi: $\sin\theta = \frac{h}{s}$, gde je s put koji telo pređe krećući se od položaja 1 do položaja 2. U uslovu zadatka je dato dovoljno podataka da rad sile $\vec{F}$ možemo naći polazeći od definicije rada: $A_F = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$



Pošto važi: $\vec{F} = const$, onda može da se piše:

$$\boxed{A_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos(\vec{F}, \vec{s}) = Fs\cos 0 = Fs = \frac{Fh}{\sin\theta} = 100J}$$

b) Pošto pri posmatranom kretanju važi: $\vec{F}_{tr} = const$, onda može da se piše:

$$\boxed{A_{Ftr} = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{s} = F_{tr} s\cos\pi = -F_{tr} s = -\mu Ns = -\mu mgs\cos\theta = -\mu mg\frac{h}{\sin\theta}\cos\theta = -\mu mgh\,ctg\,\theta = -6{,}8J}$$

Napomena: konstatacija da je $N = mg\cos\theta$ sledi iz projekcije izraza za II Njutnov zakon na pravac i smer vektora $\vec{N}$:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N} \quad \Rightarrow \quad 0 = -mg\cos\theta + N$$

c) Promenu potencijalne energije tela nalazimo iz relacije koja ovu veličinu povezuje sa radom konzervativnih sila.

$\Delta E_P = -A_g = -\int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{s}$. Pošto važi $\vec{F}_g = m\vec{g} = const$, onda može da se piše:

$$\boxed{\Delta E_P = -A_g = -m\vec{g} \cdot \vec{s} = -mgs\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = mgs \cdot \sin\theta = mgh = 19{,}6J}.$$

d) Promenu kinetičke energije tela možemo naći primenom relacije koja ovu veličinu povezuje sa radom svih spoljašnjih sila. Ovde treba imati u vidu da se telo u položaju 2 (na visini h) ne zaustavlja. Naime, usled delovanja konstantne sile $\vec{F}$ (pored gravitacione sile i sile trenja) kretanje tela je ravnomerno ubrzano, pa u položaju 2 brzina tela ne može biti jednaka nuli.

$$\boxed{\Delta E_K = A_F + A_{Ftr} + A_g + A_N = \frac{Fh}{\sin\theta} - \mu mghctg\,\theta - mgh + 0 = \frac{Fh}{\sin\theta} - mgh(1+\mu ctg\,\theta) = 73{,}6\,J}$$

3. zadatak

a) Vrednost koeficijenta trenja možemo odrediti na osnovu razmatranja izraza za rad sile trenja. Intenzitet sile trenja na delu puta od A do B se razlikuje od intenziteta na delu puta od B do C, pa se razlikuje i rad sile trenja na ovim delovima puta. Sledi: $A_{Ftr} = A_{Ftr1} + A_{Ftr2} = \int_A^B \vec{F}_{tr1}\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{F}_{tr2}\cdot d\vec{s}$

Na svakom od ovih puteva sila trenja je konstantna kao vektor, pa važi:

$$A_{Ftr1} = \vec{F}_{tr1}\cdot\vec{s}_1 = F_{tr1}s_1\cos\pi = -F_{tr1}s_1 = -\mu N_1 s_1 = -\mu s_1 mg\cos\theta = -\mu mg\cos\theta\frac{h}{\sin\theta} = -\mu mg\frac{h}{tg\theta}$$

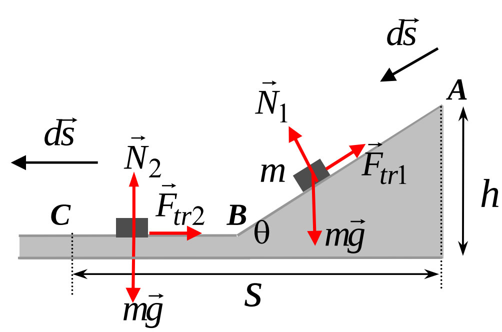
$$A_{Ftr2} = \vec{F}_{tr2}\cdot\vec{s}_2 = F_{tr2}s_2\cos\pi = -F_{tr2}\cdot s_2 = -\mu N_2 s_2 = -\mu mgs_2 = -\mu mg[s - \frac{h}{tg\theta}]$$

Sledi: $\underline{A_{Ftr} = -\mu mgs}$ **(1)**

Pošto je sila trenja jedina nekonzervativna sila koja deluje na telo u ovom zadatku, onda se usled rada sile trenja menja ukupna mehanička energija sistema. Možemo primeniti relaciju: $A_{AC}^{nekonz} = \Delta E_{AC}^{meh}$.

Sledi: $A_{Ftr} = E_C^{meh} - E_A^{meh} = 0 - mgh = -mgh$ **(2)**

Iz (1) i (2) sledi: $\underline{-\mu mgs = -mgh}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mu = \frac{h}{s} = 0.24}$



b) $A_g = \int_A^C m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{s} + \int_B^C m\vec{g}\cdot d\vec{s}$

Može se pisati: $A_g = m\vec{g}\cdot\vec{s}_1 + m\vec{g}\cdot\vec{s}_2 = mgs_1\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) + mgs_2\cos(\frac{\pi}{2}) = mgs_1\sin\theta + 0 = mg\frac{h}{\sin\theta}\sin\theta$

$$\boxed{A_g = mgh = 117.7\,J}$$

4. zadatak

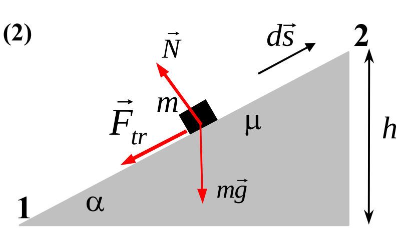
a) Sila trenja je jedina nekonzervativna sila koja deluje na telo u ovom zadatku. Usled rada sile trenja, menja se ukupna mehanička energija sistema. Možemo primeniti relaciju: $A^{nekonz} = \Delta E^{meh}$ **(1)**

Pošto je pri posmatranom kretanju ispunjeno: $\vec{F}_{tr} = const$, onda se izraz $A_{Ftr} = \int_1^2 \vec{F}_{tr}\cdot d\vec{s}$ svodi na $A_{Ftr} = \vec{F}_{tr}\cdot\vec{s}$, pa važi:

$$A^{nekonz} = A_{Ftr} = \int_1^2 \vec{F}_{tr}\cdot d\vec{s} = \vec{F}_{tr}\cdot\vec{s} = F_{tr}s\cos\pi = -F_{tr}s = -\mu Ns = -\mu mgs\cos\alpha \quad \textbf{(2)}$$

Takođe je: $\Delta E^{meh} = E_2^{meh} - E_1^{meh} = mgh - \frac{mv_0^2}{2} = mgs\sin\alpha - \frac{mv_0^2}{2}$ **(3)**

Iz (1) i (2) i (3) sledi: $\boxed{s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 30.3\,m}$ **(4)**



b) Iz (2) i (4) sledi: $\boxed{A_{Ftr} = -\mu mg\cos\alpha = -\dfrac{\mu m v_0^2}{2(\mu + tg\alpha)} = -103J}$,

c) $\Delta E_P = -A_g = -\int_1^2 m\vec{g}\cdot d\vec{s} = -m\vec{g}\cdot\vec{s} = -mgs\cos(\dfrac{\pi}{2}+\alpha) = mgs\sin\alpha = mg\dfrac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\sin\alpha$

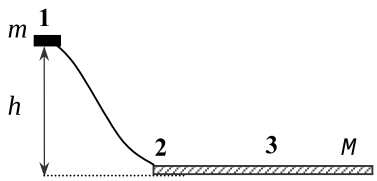
Sledi: $\boxed{\Delta E_P = \dfrac{mv_0^2}{2(1+\mu ctg\alpha)} \approx 297J}$

$\boxed{\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = -\dfrac{mv_0^2}{2} = -400J}$ ili

$$\boxed{\Delta E_K = A_g + A_{Ftr} + A_N = -mgs(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + 0 = \frac{-mgv_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = -\frac{mv_0^2}{2} = -400J}$$

---

5. zadatak



a) Na putu do daske (od položaja 1 do 2) nema trenja. Sledi da na pločicu ne deluju nekonzervativne sile, pa ukupna mehanička energija pločice ostaje konstantna. **Primenom ZOME za pločicu u položajima 1 i 2 dobijamo:**

$$mgh = \frac{mv_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \sqrt{2gh}}$$

b) **Posmatramo sistem "pločica + daska"** od trenutka kada pločica počne da se kreće po dasci. Između daske i podloge nema trenja. Jedine spoljašnje sile koje deluju na sistem (pločica + daska) kao celinu su gravitaciona sila: $\vec{F}_g = (m+M)\vec{g}$ i sila reakcije podloge: $\vec{N} = -(m+M)\vec{g}$. **Zaključujemo da je rezultanta spoljašnjih sila na sistem jednaka nuli** ($\vec{F}_{rez} = 0$)**. Odatle sledi:** $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0$**, odnosno:** $\vec{p} = const$ **za sistem kao celinu (količina kretanja sistema kao celine u proizvoljnom položaju desno od 2 će biti jednaka količini kretanja sistema u položaju 2).** Čim pločica počne da klizi po dasci, njena brzina se smanjuje, zbog postojanja sile trenja između pločice i daske. Zbog važenja zakona održanja količine kretanja sistema (ZOKK), daska će početi da se kreće u istom smeru kao i pločica i njena brzina će rasti. U nekom trenutku (položaj 3) brzina pločice u odnosu na podlogu će postati jednaka brzini daske u odnosu na podlogu. Od tog trenutka na dalje pločica će mirovati u odnosu na dasku, tj. pločica i daska će se kretati kao jedno kruto telo. Obeležimo tu brzinu pločice i daske u položaju 3 sa $\vec{v}_3$.

Iz ZOKK sistema za položaj 2 i za položaj 3 sledi:

$m\vec{v}_2 + 0 = (m+M)\vec{v}_3 \quad \Rightarrow$ projekcija na x-osu: $mv_2 = (m+M)v_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_3 = \dfrac{mv_2}{m+M} = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{m+M}}$

c) Trenje (između daske i pločice) postoji u svim položajima desno od položaja 2. Ali samo na putu od položaja 2 do položaja 3 postoji relativno kretanje pločice u odnosu na dasku, pa samo na tom delu puta sila trenja vrši rad. **U ovom zadatku je sila trenja jedina nekonzervativna sila i usled rada sile trenja se menja ukupna mehanička energija sistema. Možemo primeniti relaciju:** $A_{23}^{nekonz} = \Delta E_{23}^{meh}$.

Sledi: $A_{Ftr} = E_3^{meh} - E_2^{meh}$.

Referentni (nulti) nivo za gravitacionu potencijalnu energiju je zgodno izabrati na nivou na kom je daska.

Onda je: $A_{Ftr} = E_{k3} - E_{k2} = \dfrac{(m+M)v_3^2}{2} - \dfrac{mv_2^2}{2} = \dfrac{1}{2}(m+M)\cdot\dfrac{m^2 2gh}{(m+M)^2} - \dfrac{m}{2}2gh$, odnosno: $\boxed{A_{Ftr} = -\dfrac{mMgh}{(m+M)} < 0}$

<u>**Napomena:**</u>

U delu zadatka pod c) mogli smo da pođemo i od relacije koja povezuje promenu kinetičke energije sistema na putu od položaja 2 do 3 sa radom svih spoljašnjih sila: $\Delta E_{k23} = A_{23}$.

Pri tome treba primetiti da je rad sile reakcije podloge uvek jednak nuli, a da je u ovom konkretnom slučaju i rad gravitacione sile na putu od 2 do 3 jednak nuli zbog $\vec{F}_g \perp d\vec{s}$. Usled toga se prethodna relacija svodi na $E_{k3} - E_{k2} = A_{Ftr}$, odnosno na poslednju relaciju u gore prikazanom rešenju zadatka.

---

6. zadatak

a) Posmatramo sistem koji čine dečak i sanke. Na sistem kao celinu deluju sila gravitacije i sila reakcije podloge od strane tla (sila reakcije podloge se menja kada dečak skoči). Sile trenja između dečakovih cipela i sanki (sila trenja koja deluje na dečaka i sila trenja koja deluje na sanke) su unutrašnje sile za sistem. **Rezultujuća spoljašnja sila koja deluje na sistem kao celinu duž x pravca je =0. Onda važi zakon održanja količine kretanja (ZOKK) za sistem duž x pravca.** Količina kretanja sanki pre skoka je $m_1\vec{v}_1 = 0$, a posle skoka: $m_1\vec{v}_1^{\,\prime}$ (vektor $\vec{v}_1^{\,\prime}$ ima pravac x-ose, ali suprotan smer). Količina kretanja dečaka pre skoka je $m_2\vec{v}_2 = 0$, a posle skoka: $m_2\vec{v}_2^{\,\prime}$, pri čemu vektor $\vec{v}_2^{\,\prime}$ zaklapa ugao α sa pozitivnim smerom x-ose.

Primenom ZOKK duž x-pravca, na sistem koji čine dečak i sanke, dobijamo:

$$0+0 = -m_1 v_{1x}^{\prime} + m_2 v_2^{\prime}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_{1x}^{\prime} = \frac{m_2 v_2^{\prime}\cos\alpha}{m_1} = 4.4\frac{m}{s}} \qquad \textbf{(1)}$$

b) Posmatramo kretanje sanki posle iskakanja dečaka. Primenom relacije: $\Delta E_k = A$, dobijamo:

$$0-\frac{m_1 v_{1x}^{\prime 2}}{2} = A_{Ftr} + A_{m_1 g} + A_{N_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Važi: $A_{N_1} = \vec{N}_1\cdot\vec{s} = N_1 s\cos(\vec{N}_1,\vec{s}) = N_1 s\cos\frac{\pi}{2} = 0$, **(3)**

$$A_g = \vec{F}_g\cdot\vec{s} = F_g s\cos(\vec{F}_g,\vec{s}) = F_g s\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{i} \qquad \textbf{(4)}$$

$$A_{Ftr} = \int_0^s \vec{F}_{tr}\cdot d\vec{s} = \vec{F}_{tr}\cdot\vec{s} = F_{tr}s\cos(\vec{F}_g,\vec{s}) = F_{tr}s\cos\pi = -F_{tr}s = -\mu N_1 s = -\mu m_1 g s \qquad \textbf{(5)}$$

Iz (2), (3), (4) i (5) sledi: $-\frac{m_1 v_{1x}^{\prime 2}}{2} = -\mu m_1 g s$, odnosno: $\boxed{s = \frac{v_{1x}^{\prime 2}}{2\mu g} = 9.87\,m}$

---

7. zadatak

a) **Rezultujuća spoljašnja sila koja deluje duž x pravca na sistem: top — granata je jednaka nuli. Onda važi zakon održanja količine kretanja (ZOKK) za sistem duž x pravca:** $\underline{\Delta p_x = 0}$. Ukupna količina kretanja sistema pre ispaljivanja granate je jednaka nuli ($\vec{p} = 0$), a neposredno posle je: $\vec{p}^{\,\prime} = M\vec{v}_T^{\,\prime} + m\vec{v}_G^{\,\prime}$, gde je $\vec{v}_T^{\,\prime}$ vektor brzine trzaja topa, a $\vec{v}_G^{\,\prime}$ vektor brzine granate neposredno posle ispaljenja ($\vec{v}_G^{\,\prime} = 360\frac{m}{s}$).

Primenom ZOKK duž x-ose dobijamo: $0 = -Mv_T^{\prime} + mv_G^{\prime}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_T^{\prime} = \frac{m\cos\alpha}{M}v_G^{\prime} \approx 0.17\frac{m}{s}}$ **(1)**

b) Kretanje granate posle ispaljivanja je zapravo kosi hitac naviše, pa se maksimalna visina može odrediti primenom kinematičkih relacija koje se odnose na taj slučaj. Međutim, maksimalnu visinu koju granata dostiže, h_M, možemo odrediti i na drugi način — primenom ZOME za položaj granate neposredno posle ispaljenja i za položaj maksimalne visine (tačku M). ZOME možemo primeniti jer se u zadatku zanemaruje sila otpora vazduha. Referentni nivo za gravitacionu potencijalnu energiju možemo izabrati na nivou početnog položaja granate.

Onda je ZOME: $\frac{mv_G^{\prime 2}}{2} = \frac{m(v_{GM}^{\prime})^2}{2} + mgh_M$ **(2)**

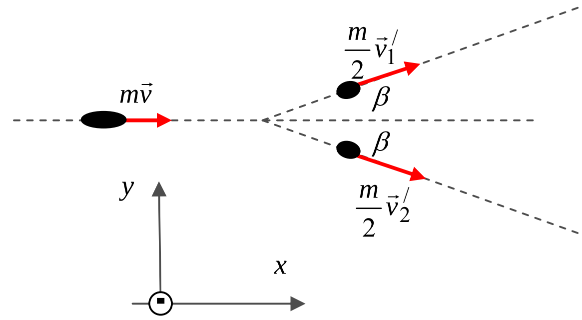
Intenzitet vektora brzine granate posle ispaljenja se menja sa vremenom usled delovanja gravitacione sile. Važi: $v_G^{\prime} = \sqrt{(v_{Gx}^{\prime})^2 + (v_{Gy}^{\prime})^2} = \sqrt{(v_G^{\prime}\cos\alpha)^2 + (v_G^{\prime}\sin\alpha - gt)^2}$.

U položaju maksimalne visine, vektor brzine granate je usmeren duž x-ose, pa je: $v_{GM}^{\prime} = v_G^{\prime}\cos\alpha$ **(3)**

Zamenom (3) u (2) se dobija: $\frac{mv_G^{\prime 2}}{2} = \frac{m(v_G^{\prime}\cos\alpha)^2}{2} + mgh_M \quad\Rightarrow\quad \boxed{h_M = \frac{v_G^{\prime 2}\sin^2\alpha}{2g} \approx 3303\,m}$

---

8. zadatak



Putanja granate posle ispaljivanja je putanja kosog hica naviše. Ukupna brzina granate u najvišoj tački putanje je jednaka x-komponenti početne brzine: $v = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$.

Rasprskavanje granate se, prema uslovu zadatka, odigrava u horizontalnoj ravni. To znači da će se vektor količine kretanja granate neposredno pre rasprskavanja i vektori količine kretanja delova granate neposredno posle rasprskavanja nalaziti u horizontalnoj ravni. Rezultujuća spoljašnja sila koja deluje na sistem u horizontalnoj ravni je jednaka nuli, pa važi ZOKK u toj ravni. Dekartov koordinatni sistem možemo da postavimo tako da z-osa ima isti pravac (ali suprotan smer) kao sila Zemljine teže, pri čemu x i y-osa leže u horizontalnoj ravni i x-osa ima pravac i smer kretanja granate neposredno pre rasprskavanja.

ZOKK za rasprskavanje (vektor količine kretanja granate neposredno pre rasprskavanja je jednak zbiru vektora količine kretanja delova granate neposredno posle rasprskavanja): $m\vec{v} = \frac{m}{2}\vec{v}_1' + \frac{m}{2}\vec{v}_2'$

projekcija na x-osu: $mv = \frac{m}{2}v_1' \cos\beta + \frac{m}{2}v_2' \cos\beta \quad \Rightarrow \quad mv_0 \cos\alpha = \frac{m}{2}\cos\beta(v_1' + v_2')$ **(1)**

projekcija na y-osu: $0 = \frac{m}{2}v_1' \sin\beta - \frac{m}{2}v_2' \sin\beta \quad \Rightarrow \quad v_1' = v_2'$ **(2)**

Iz (1) i (2) sledi: $v_0 \cos\alpha = \cos\beta v_1' \quad \Rightarrow \quad v_1' = \frac{v_0 \cos\alpha}{\cos\beta}$ i $\boxed{v_2' = v_1' = \frac{v_0 \cos\alpha}{\cos\beta} = 461.89\,\frac{m}{s} \approx 462\frac{m}{s}}$

---

9. zadatak* - <u>neobavezni primer:</u>

a) Rezultujuća spoljašnja sila koja deluje duž x pravca na sistem: "čamac 1 + paket" je jednaka nuli. Onda važi zakon održanja količine kretanja (ZOKK) za sistem duž x pravca: $\Delta p_x = 0$. Količina kretanja tog sistema pre izbacivanja paketa je $\vec{p}_1 = 0$, a neposredno posle je: $\vec{p}_1' = (M + m_1)\vec{v}_1' + m_p \vec{v}_{p1}'$. Projekcijom na x-osu dobijamo jednačinu:

$$0 = -(M + m_1)v_1' + m_p v_p' \cos\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1' = \frac{m_p \cos\alpha_1}{(M + m_1)} v_p'}$$

b) Za kretanje paketa važi ZOME (pošto zanemarujemo silu otpora vazduha). Ako referentni nivo za gravitacionu potencijalnu energiju stavimo na dno svakog od čamaca, onda možemo pisati:

$$\frac{m_p v_p'^2}{2} + m_p gh = \frac{m_p v_p''^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_p'' = \sqrt{v_p'^2 + 2gh}}$$

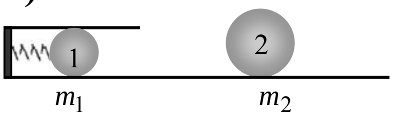
c) Prilikom upada paketa na čamac 2, rezultujuća spoljašnja sila koja deluje duž x pravca na sistem: "čamac 2 + paket" je jednaka nuli. Onda važi zakon održanja količine kretanja (ZOKK) za sistem duž x pravca: $\Delta p_x = 0$. Količina kretanja tog sistema neposredno pre pada paketa na dno čamca 2 je: $\vec{p}_2 = m_p v_p'' \cos\alpha_2$, a neposredno posle je: $\vec{p}_2' = (M + m_2 + m_p)\vec{v}_2'$. Projekcijom na x-osu dobijamo jednačinu: $m_p v_p'' \cos\alpha_2 = (M + m_2 + m_p)v_2'$

$$\Rightarrow \boxed{v_2' = \frac{m_p v_p'' \cos\alpha_2}{(M + m_2 + m_p)}}$$

---

10. zadatak

a)



Pre sudara: ZOME za telo 1 u početnom trenutku i u trenutku neposredno pre sudara: $\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$ **(1)**

Imajući u vidu da je $\Delta l = \frac{F_{el}}{k}$, iz (1) sledi: $k(\frac{F_{el}}{k})^2 = m_1 v_1^2$, odnosno: $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{F_{el}^2}{km_1}} = 20\frac{m}{s}}$

b) Elastičan sudar: Sudar je trenutan, a i rezultujuća sila koja duž linije sudara (x-osa) deluje na sistem kao celinu neposredno pre i neposredno posle sudara je jednaka 0, pa možemo smatrati da impuls sistema koji čine dve loptice ostaje konstantan tokom sudara, tj. da v**<u>aži ZOKK za sistem neposredno pre i neposredno posle sudara</u>.**

ZOKK za sistem, u vektorskom obliku: $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1^{\,\prime} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime}$

Važi: $m_1 < m_2$, pa sledi da se kugla 1 posle sudara kreće na levu stranu. Projekcija vektorskog izraza za ZOKK na pozitivan smer x-ose je: $m_1 v_1 = -m_1 v_1^{\prime} + m_2 v_2^{\prime}$**,** odakle sledi: $\underline{m_1(v_1 + v_1^{\prime}) = m_2 v_2^{\prime}}$ **(2)**

<u>Takođe, pošto je sudar elastičan, važi ZOME za sistem tokom sudara (mehanička energija sistema neposredno pre i neposredno posle sudara je ista)</u>. Sledi:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\prime 2} \quad \Rightarrow \quad m_1(v_1^2 - v_1^{\prime 2}) = m_2 v_2^{\prime 2} \qquad \textbf{(3)}$$

Deljenjem jednačine (3) sa (2) se dobija: $\frac{m_1(v_1^2 - v_1^{\prime 2})}{m_1(v_1 + v_1^{\prime})} = \frac{m_2 v_2^{\prime 2}}{m_2 v_2^{\prime}} \quad \Rightarrow \quad \underline{(v_1 - v_1^{\prime}) = v_2^{\prime}}$ **(4)**

Jednačine (2) i (4) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate: $v_1^{\prime}$ i $v_2^{\prime}$. Eliminacijom $v_1^{\prime}$ iz (2) i (4), dobijamo traženu brzinu loptice 2 posle sudara: $\boxed{v_2^{\prime} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1}$. Za $m_2 = 3m_1$ sledi: $\boxed{v_2^{\prime} = \frac{v_1}{2} = 10\frac{m}{s}}$ **(5)**

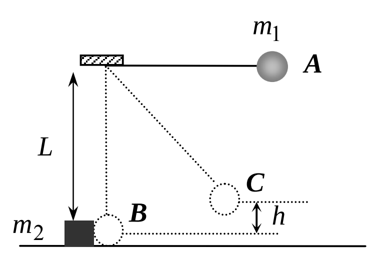
c) Zamenom (5) u (4) dobijamo i brzinu loptice 1 posle sudara: $v_1^{\prime} = \frac{v_1}{2} = 10\frac{m}{s}$ **(6)**

Iz (5) i (6) sledi: $\boxed{\frac{E_{K2}^{\prime}}{E_{K1}^{\prime}} = \frac{\frac{m_2 v_2^{\prime 2}}{2}}{\frac{m_1 v_1^{\prime 2}}{2}} = \frac{m_2}{m_1} = 3}$

---

11. zadatak

a) Pre sudara: <u>važi ZOME za lopticu m_1 u položajima (A) i (B)</u>:



$$m_1 gL = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \sqrt{2gL} = 3\frac{m}{s}} \qquad \textbf{(1)}$$

Prema II Njutnovom zakonu za kretanje loptice, u položaju B važi:

$$\frac{m_1 v_1^2}{L} = F_Z - m_1 g\text{, pa sledi: } \boxed{F_Z = \frac{m_1 v_1^2}{L} + m_1 g = 3m_1 g = 11{,}8N} \qquad \textbf{(2)}$$

b) Elastičan sudar:

Sudar je trenutan, a i rezultujuća sila koja duž linije sudara (x-osa) deluje na sistem kao celinu neposredno pre i neposredno posle sudara je jednaka 0, pa možemo smatrati da impuls sistema koji čine loptica i kocka ostaje konstantan tokom sudara, tj. da v**<u>aži ZOKK za sistem neposredno pre i neposredno posle sudara</u>.**

ZOKK za sistem, u vektorskom obliku: $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1^{\,\prime} + m_2\vec{v}_2^{\,\prime}$

Projekcija ovog vektorskog izraza na pozitivan smer x-ose je: $-m_1 v_1 = +m_1 v_1^{\prime} - m_2 v_2^{\prime}$**,** pa sledi: $m_1(v_1 + v_1^{\prime}) = m_2 v_2^{\prime}$ **(3)**

Takođe, pošto je sudar elastičan, važi ZOME za sistem tokom sudara (mehanička energija sistema neposredno pre i neposredno posle sudara je ista). Potencijalna energija svakog od tela koja se sudaraju ostaje ista **neposredno posle** sudara kao što je bila **neposredno pre**, tj. menja se samo kinetička enrergija svakog od tela tokom sudara. Pri tome ukupna kinetička energija sistema kao celine ostaje konstantna, tj. važi: $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1^{/2}}{2} + \frac{m_2 v_2^{/2}}{2} \Rightarrow m_1(v_1^2 - v_1^{/2}) = m_2 v_2^{/2}$ **(4)**

Deljenjem jednačine (4) sa (3) se dobija: $\frac{m_1(v_1^2 - v_1^{/2})}{m_1(v_1 + v_1^/)} = \frac{m_2 v_2^{/2}}{m_2 v_2^/} \Rightarrow (v_1 - v_1^/) = v_2^/$ **(5)**

Zamenom (5) u (3) se dobija: $m_1(v_1 + v_1^/) = m_2(v_1 - v_1^/) \Rightarrow \boxed{v_1^/ = \frac{(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} v_1}$ **(6)**

Zamenom (6) u (5) se dobija: $\boxed{v_2^/ = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_1}$

Za $m_2 = 2m_1$ sledi: $\boxed{v_1^/ = \frac{v_1}{3} = 1\frac{m}{s}}$ i $\boxed{v_2^/ = \frac{2v_1}{3} = 2\frac{m}{s}}$.

c) **Posle sudara:** <u>važi ZOME za kuglicu, u položajima (B) i (C)</u>: $\frac{m_1 v_1^{/2}}{2} = m_1 g h$

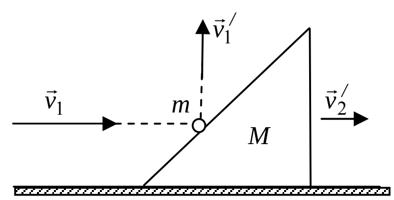
Sledi: $\boxed{h = \frac{v_1^{/2}}{2g} = \frac{(m_2 - m_1)^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2 2g} = 5{,}1cm}$

12. zadatak

a) **Elastičan sudar:**

Tokom sudara se održava konstantnom ukupna mehanička energija sistema. tj. **važi ZOME za sistem kao celinu.** Potencijalna energija svakog od tela koja se sudaraju ostaje ista **neposredno posle** sudara kao što je bila **neposredno pre**, tj. menja se samo kinetička energija svakog od tela tokom sudara. Pri tome ukupna kinetička energija sistema kao celine ostaje konstantna, tj. važi:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^{/2}}{2} + \frac{Mv_2^{/2}}{2} \qquad \textbf{(1)}$$



Pošto je x-komponenta rezultujuće spoljašnje sile koja deluje na sistem jednaka nuli, onda važi: $\frac{dp_x}{dt} = 0 \Rightarrow$ $p_x = const$ **(tokom sudara se održava količina kretanja sistema duž x-pravca).** Neposredno pre sudara, količina kretanja kuglice je $m\vec{v}_1$, a količina kretanja klina je 0 (klin miruje). Neposredno posle sudara, količina kretanja kuglice je $m\vec{v}_1^/$, a količina kretanja klina je $M\vec{v}_2^/$.

Jednačina koja predstavlja ZOKK <u>duž x-ose</u> za sistem (neposredno pre i neposredno posle sudara) je: $mv_1 + M \cdot 0 = m \cdot 0 + Mv_2^/$.

Sledi: $v_1 = \frac{Mv_2^/}{m}$ **(2)**

Zamenom (2) u (1) se dobija: $\boxed{v_1^/ = \sqrt{v_1^2 - \frac{M}{m} v_2^{/2}} = \sqrt{\frac{Mv_2^{/2}}{m}(\frac{M}{m} - 1)} \approx 4{,}5\frac{m}{s}}$

b) Kretanje kuglice posle sudara je vertikalni hitac naviše, pa je visina do koje se kuglica popne jednaka: $\boxed{h = \frac{v_1^{/2}}{2g} = 1{,}03m}$

13. zadatak

a) Neelastičan sudar (ne važi ZOME za sistem tokom sudara):

Sudar je trenutan, a i rezultujuća sila koja duž linije sudara (x-osa) deluje na sistem kao celinu **neposredno pre i neposredno posle sudara** je jednaka 0, pa možemo smatrati da impuls sistema koji čine kugla i metak ostaje konstantan tokom sudara, tj. da **važi ZOKK za sistem neposredno pre i neposredno posle sudara.**

ZOKK za sistem: $m_1\vec{v}_0 = (m+m_1)\vec{v}_{S1} \quad \Rightarrow$ projekcija na x-osu: $-m_1 v_0 = -(m+m_1)v_{S1}$

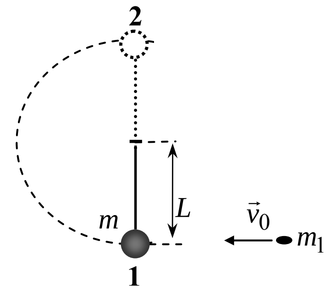
Sledi da je brzina kugle sa metkom neposredno posle sudara (u položaju 1): $\boxed{v_{S1} = \dfrac{m_1}{(m+m_1)} v_0 = 6\dfrac{m}{s}}$

Posle sudara važi ZOME za kuglu sa metkom u položajima (1) i (2):

$$\frac{(m+m_1)v_{S1}^2}{2} = (m+m_1)g2L + \frac{(m+m_1)v_{S2}^2}{2}$$

Sledi da je brzina kugle sa metkom u položaju 2:

$$\boxed{v_{S2} = \sqrt{v_{S1}^2 - 4gL} = \sqrt{\frac{m_1^2 v_0^2}{(m+m_1)^2} - 4gL} = 4\frac{m}{s}}$$



b) II Njutnov zakon za položaj 2: $(m+m_1)\vec{a}_2 = (m+m_1)\vec{g} + \vec{F}_{Z2}$

Projekcija na pravac i smer radijalnog (normalnog) ubrzanja je: $\dfrac{(m+m_1)v_{S2}^2}{L} = (m+m_1)g + F_{Z2}$

Sledi: $\boxed{F_{Z2} = \dfrac{(m+m_1)v_{S2}^2}{L} - (m+m_1)g = \dfrac{m_1^2 v_0^2}{L(m+m_1)} - 5(m+m_1)g = 4{,}82N}$

---

14. zadatak

a) Neelastičan sudar (ne važi ZOME za sistem tokom sudara):

Sudar je trenutan, a i rezultujuća sila koja duž linije sudara (x-osa) deluje na sistem kao celinu **neposredno pre i neposredno posle sudara** je jednaka 0, pa možemo smatrati da impuls sistema koji čine kugla i metak ostaje konstantan tokom sudara, tj. da **važi ZOKK za sistem neposredno pre i neposredno posle sudara.**

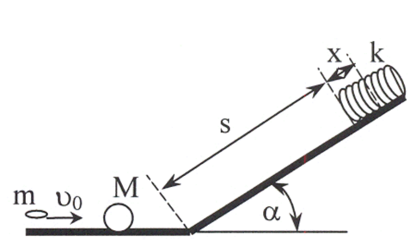
ZOKK za sistem: $m\vec{v}_0 = (M+m)\vec{v}^{\,/} \quad \Rightarrow \quad mv_0 = (M+m)v^{/} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v^{/} = \dfrac{mv_0}{M+m} = 10\dfrac{m}{s}}$

b) Kretanje kugle posle sudara (održava se mehanička energija kugle pri kretanju po strmoj ravni jer nema trenja):

ZOME za podnožje ravni i najviši položaj kugle:

$$\frac{(M+m)v^{/2}}{2} = (M+m)gh + E_{def\,\max}, \text{ gde je } h = (s+\Delta l_{\max})\sin\alpha .$$

Sledi: $\boxed{E_{def\,\max} = (M+m)\left[\dfrac{v^{/2}}{2} - g(s+\Delta l_{\max})\sin\alpha\right] = 9.88J}$



c) Iz $E_{def\,\max} = \dfrac{k\Delta l_{\max}^2}{2}$ sledi:

$$\boxed{k = \frac{2E_{def\,\max}}{\Delta l_{\max}^2} = \frac{2(M+m)\left[\dfrac{v^{/2}}{2} - g(s+\Delta l_{\max})\sin\alpha\right]}{\Delta l_{\max}^2} = 2.2\cdot 10^4\,\frac{N}{m}}$$
