Esercizi

Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Informatica

21 Aprile 2016

Esercizio 1. Sia $\mu \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $f_\mu : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

- $f_\mu(\mathbf{e_1}) = (\mu - 2)\mathbf{e_1} + (\mu - 1)(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$,
- $f_\mu(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,
- $f_\mu(\mathbf{e_3}) = (\mu - 2)\mathbf{e_1} + 2(\mu - 1)(\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}) + \mathbf{e_3}$,
- $f_\mu(\mathbf{e_4}) = \mu\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$,
- $f_\mu(\mathbf{e_5}) = -\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$.

Stabilire per quali valori di μ, se esistono, l'applicazione f_μ è iniettiva e/o suriettiva.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z,\ x + y + z,\ y + 2z,\ x - z).$$

a) Verificare che f è un'applicazione lineare.

b) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

c) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

d) Determinare, se possibile, due vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}^3$ che hanno la stessa immagine tramite f, e due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^4$ che non appartengono a $\mathrm{Im}f$.

e) Calcolare l'immagine del vettore $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$ tramite f.

f) Calcolare la controimmagine dei vettori $\mathbf{e_4}$ e $(4, 2, 2, 0)$ tramite f.

g) Esiste (senza costruirla) una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$ e $\mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}f$?

h) Esiste (senza costruirla) una applicazione lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non suriettiva tale che $\mathrm{Ker}h = \mathrm{Ker}f$?

Esercizio 3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ -1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare per quali valori di α l'applicazione f_α non è suriettiva.

b) Determinare al variare di α le dimensioni dei sottospazi $\mathrm{Ker} f_\alpha$ e $\mathrm{Im} f_\alpha$.

c) Stabilire se il vettore $(1, \alpha, 1)$ appartiene a $\mathrm{Ker} f_\alpha$ e calcolare la sua immagine tramite f_α.

d) Determinare per quali valori di α il vettore $(1, \alpha, 1)$ appartiene a $\mathrm{Im} f_\alpha$. Per i valori di α trovati, calcolarne la controimmagine tramite f_α.

Esercizio 4. Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che:

a) $\mathrm{Ker} f = \langle \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} \rangle$;

b) $\mathrm{Im} f = \langle \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}, \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \rangle$.

Tale applicazione è unica? In caso negativo, costruire un'altra applicazione lineare g che soddisfi le condizioni precedenti.