Esempi di Spazi vettoriali

L'insieme dei numeri reali

La somma di due numeri reali è un'operazione che associa ad ogni coppia di numeri reali a e b un altro numero reale, indicato con $a+b$. Quindi la somma è una funzione che ha come dominio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e come codominio $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b. \end{array}$$

La somma di numeri reali è:

- commutativa: $a+b=b+a$ per ogni $a,b\in\mathbb{R}$;
- associativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$ per ogni $a,b,c\in\mathbb{R}$;
- ammette *elemento neutro*, cioè esiste un numero, lo 0, tale che $0+a=a+0=a$ per ogni $a\in\mathbb{R}$;
- ogni numero reale a ammette *opposto*, cioè esiste un altro numero, che indichiamo con $-a$, tale che $a+(-a)=0$.

Il prodotto di due numeri reali è un'operazione che associa ad ogni coppia di numeri reali a e b un altro numero reale, indicato con ab. Quindi anche il prodotto è una funzione che ha come dominio $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e come codominio $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & ab. \end{array}$$

Il prodotto di numeri reali è:

- commutativo: $ab=ba$ per ogni $a,b\in\mathbb{R}$;
- associativo: $(ab)c=a(bc)$ per ogni $a,b,c\in\mathbb{R}$;
- ammette elemento neutro, cioè esiste un numero, 1, tale che $1a=a1=a$ per ogni $a\in\mathbb{R}$;
- distributivo rispetto alla somma: $a(b+c)=ab+ac$ per ogni $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Spazi Vettoriali

Definizione 2.3.1 Si dice *spazio vettoriale* reale un insieme V munito di due operazioni dette rispettivamente *somma e prodotto per scalari*:

$$\begin{array}{rcl} + : V \times V & \longrightarrow & V \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) & \mapsto & \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, \mathbf{u}) & \mapsto & \lambda \mathbf{u} \end{array}$$

che soddisfino le seguenti proprietà:
la somma $+$ è:

1. *commutativa*, cioè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. *associativa*, cioè $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;
3. ammette un *elemento neutro*, cioè esiste $\mathbf{0} \in V$ tale che $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u}$ in V;
4. ogni elemento di V ha un *opposto*, cioè per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste un vettore $\mathbf{a}$ tale che $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

5. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$; per ogni $u \in V$
6. $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
8. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono *vettori* mentre i numeri reali si dicono *scalari*. L'elemento neutro rispetto alla somma in V si chiama *vettore nullo*. $\underline{0}$

Uno spazio vettoriale gode anche delle seguenti proprietà, che sono CONSEGUENZE della definizione e devono essere dimostrate (la dimpstrazione è sul libro)

Proposizione 2.3.5 Sia V uno spazio vettoriale. Allora valgono le seguenti proprietà:

i) Il vettore nullo è unico e verrà indicato con $\mathbf{0}_V$.

ii) Se $\mathbf{u}$ è un vettore di V il suo opposto è unico e lo indicheremo con $-\mathbf{u}$.

iii) $\lambda \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ (si noti il diverso senso dello zero al primo e al secondo membro!).

v) Se $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$ allora è o $\lambda = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$.

vi) $(-\lambda)\mathbf{u} = \lambda(-\mathbf{u}) = -\lambda \mathbf{u}$. opposto di λu

vettore u moltiplicato per $-\lambda$

opposto di u moltiplicato per λ