Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
Simulazione di prova parziale
3 aprile 2024

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (10 punti)
Siano

$$p_1 = x^2+x+2, \quad p_2 = x+1, \quad p_3 = x^2+2x+3, \quad p_4 = -x^2+kx, \quad p_5 = x^2-k.$$

a) Si determini per quali valori di k i vettori p_1, p_2, p_3, p_4 generano $\mathbb{R}_2[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado al più 2.

b) Si determini per quali valori di k i vettori p_1, p_2, p_5 sono una base di $\mathbb{R}_2[x]$.

Esercizio 2. (20 punti)
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \\ F_k(\mathbf{e}_2) &= 3\mathbf{e}_1 + 2k\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 + k\mathbf{e}_4, \\ F_k(\mathbf{e}_3) &= \mathbf{e}_1 + 3k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \end{aligned}$$

e sia $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + (k-2)\mathbf{e}_4 \in \mathbb{R}^4$.

a) Determinare la dimensione di Ker F_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b) Posto $k = 0$, trovare una base di Ker F_0 e completarla ad una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

c) Stabilire per quali valori di k si ha che $\mathbf{v} \in$ Im F e per tali valori determinare $F^{-1}(\mathbf{v})$.

d) Determinare le coordinate del vettore $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ del punto b) (l'ordine degli elementi della base $\mathcal{B}$ può essere scelto a piacere).