CAMBIO DI BASE

Sia $F \; V \longrightarrow W$ lineare

perché quando prendo le coordinate è importante l'ordine

$\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordinata di V

$\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base ordinata di W

Vogliamo associare ad F una matrice. $A_{\beta\beta'}$ $\left(M^{\beta'}_{\beta}(F) \text{ in altri libri} \right)$ -

Mostriamo che esiste una matrice $A_{\beta\beta'}$ con la proprietà che

$$\underbrace{F(v)}_{\beta'} = \underbrace{A}_{\beta\beta'} \cdot (v)_\beta \qquad F \; \underset{\beta}{V} \longrightarrow \underset{\beta'}{W}$$

coord di $F(v)$ rispetto alla base β'

matrice

coord di v rispetto a β

prodotto righe per colonne

se $F \; \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \underset{\mathcal{E}'}{\mathbb{R}^m}$ $\quad (F(x_1, \dots x_n))_{\mathcal{E}'} = A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$

⇓ coords coincidono con vettore (rimettere coord)

$F(x_1, \dots x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

dim $n = 2 \quad m = 3$ $\qquad$ dim generica de facto

$F \; V \longrightarrow W$

$\beta = \{v_1, v_2\}$ basi ordinate $\beta' = \{w_1, w_2, w_3\}$

$F(v_1) \in W \qquad F(v_1)$ è comb lin di $w_1 w_2 w_3$

$F(v_1) = \overbrace{a_{11}}^{\lambda_1} w_1 + a_{21} w_2 + \overbrace{a_{31}}^{\lambda_3} w_3$ (ci servirà in seguito questa notazione) analog

$F(v_2) = a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3$

prendo $v \in V \qquad v = x_1 v_1 + x_2 v_2$

$(v)_\beta = (x_1, x_2)$

Calcoliamo $F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2) =$

$= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) = x_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + a_{31} w_3)$
$+ x_2 (a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + a_{32} w_3)$ -

$= (a_{11} x_1 + a_{12} x_2) w_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2) w_2$
$+ (a_{31} x_1 + a_{32} x_2) w_3$

$F(v)_{\beta'} = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \; a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \; a_{31} x_1 + a_{32} x_2)$

Abbiamo dimostrato che

$$F(v)_{\beta'} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{A_{\beta\beta'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{(v)_\beta}$$

Nota $\quad A_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} F(v_1)_{\beta'} & \cdots & F(v_n)_{\beta'} \end{pmatrix}$

Siamo dunque in grado di associare a F una matrice A $m \times n$ una volta fissate *basi ordinate arbitrarie* $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ nel dominio e nel codominio.

Definizione 8.1.1 Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, dove V e W sono spazi vettoriali e siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ rispettivamente una base ordinata del dominio e una base ordinata del codominio.

Siano

$$(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (F(\mathbf{v}))_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

le coordinate di un vettore $\mathbf{v}$ di V e le coordinate della sua immagine tramite F, rispettivamente.

La matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata a F rispetto alle basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è per definizione la matrice $m \times n$ tale che:

$$(F(\mathbf{v}))_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dalle osservazioni precedenti abbiamo che la i-esima colonna di $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è costituita dalle coordinate di $F(\mathbf{v}_i)$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$.

Nel caso in cui l'applicazione lineare sia del tipo $F : V \longrightarrow V$ e si scelga la stessa base ordinata $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio, la matrice associata a F rispetto alla base $\mathcal{B}$ verrà indicata semplicemente con $A_{\mathcal{B}}$.

Inoltre se abbiamo **8.2.3**

$F \; V \longrightarrow W \qquad G \; W \longrightarrow Z$ lin

β base ordinata di V

β' " ordinata di W

$\tilde{\beta}$ " " di Z

$$\begin{tikzcd} \underset{\beta}{V} \arrow[r, "F", "A_{\beta\beta'}"'] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & \underset{\beta'}{W} \arrow[r, "G", "M_{\beta'\tilde{\beta}}"'] & \underset{\tilde{\beta}}{Z} \end{tikzcd}$$

prodotto righe per colonne

La matrice associata a $G \circ F$ rispetto a $\beta, \tilde{\beta}$ è $M_{\beta'\tilde{\beta}} A_{\beta\beta'}$

Esercizio

$$F \quad M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow 2a x^2 + (c-b)x - 5d$$

F è lineare

Sia $\beta = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=v_3}, \right.$

$\left. v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ base di $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$\{ \underbrace{2x^2 - x}_{w_1}, \underbrace{-1}_{w_2}, \underbrace{3x}_{w_3} \} = \beta'$ base di $\mathbb{R}_2[x]$

Vogliamo calcolare $A_{\beta\beta'}$

$$A_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} F(v_1)_{\beta'} & \cdots & F(v_4)_{\beta'} \end{pmatrix}$$

$F(v_1) = 2x^2 - x = d_1(2x^2 - x) + d_2(-1) + d_3(3x)$

dovremmo impostare il sys lin e risolverlo, per trovare le coords

$= 1(2x^2 - x) + 0(-1) + 0(3x)$

$$A_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Calcoliamo $A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ $\quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$

$\mathcal{E}' = \{x^2, x, 1\}$

$F(e_{11}) = 2x^2 = 2x^2 + 0x + 0$

$F(e_{12}) = -x = 0x^2 - 1(x) + 0 \cdot 1$

$F(e_{21}) = x = 0x^2 + 1x + 0 \cdot 1$

$F(e_{22}) = -5 = 0x^2 + 0x + (-5) \cdot 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$$

l'app. lin. è sempre F (stessa mappatura associazione) ma se cambiamo base la matrice cambia

$5x^2 - 2x + 7 \qquad \{-1, x^2, 4x\}$

ORDINE IMP!

$\cancel{5x^2 = d_1(}$

$5x^2 - 2x + 7 = d_1(-1) + d_2(x^2) + d_3(4x)$

$\qquad\qquad \parallel$

$(-7, \; 5, \; -2)$

Caso particolare $F = id \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Come cambia la matrice associata a id? $\quad id(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$

Sappiamo che $I_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I$ elem neutro rispetto al prodotto tra matrici

I è elem neutro rispetto alla composizione di funzioni $f \circ id = f = id \circ f$

Cambiamo la base ordinata nel dominio

Teorema 8.2.1

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{id} \mathbb{R}^n$$

$\beta = \{v_1, v_2, v_3\} \qquad \mathcal{E}$

$$I_{\beta\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} id(v_1)_{\mathcal{E}} & \cdots & id(v_n)_{\mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1\mathcal{E}} & \cdots & v_{n\mathcal{E}} \end{pmatrix}$$

$id(v_1) = v_1$

Esempio in $\mathbb{R}^3$ sia $\beta = \{e_1 - e_2, e_1 + 3e_2, e_1 + 5e_2 - 4e_3\}$

$$I_{\beta\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^2 \quad \beta = \{(1,2), (-7,3)\}$

$$I_{\beta\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'applicazione identità si comporta sempre allo stesso modo anche se cambiamo il modo di rappresentarla: id manderà comunque un vettore in se stesso. anche se cambiamo base

In $\mathbb{R}^n \quad \beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$

$$I_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} id(v_1)_{\beta} & \cdots & id(v_n)_{\beta} \end{pmatrix}$$

$id(v_1) = v_1 = 1v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_n$

$id(v_i) = v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots 1v_i + \ldots + 0v_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = I$$

Abbiamo dimostrato che la matrice $I_{\beta\beta}$ associata a id $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ rispetto ad una qual siasi base ordinata fissata β in dominio e codominio è I

Es x casa SFIDA side note

date β e $\tilde{\beta}$ scrivere $I_{\beta\tilde{\beta}}$ e $I_{\tilde{\beta}\beta}$ in termini $I_{\beta\mathcal{E}}$ e $I_{\tilde{\beta}\mathcal{E}}$

$$\underset{\beta}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[I_{\beta\mathcal{E}}]{id} \underset{\mathcal{E}}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow[I_{\tilde{\beta}\mathcal{E}}^{-1}]{I_{\mathcal{E}\tilde{\beta}}} \underset{\tilde{\beta}}{\mathbb{R}^n}$$

Cerchiamo $I_{\mathcal{E}\beta}$ = matrice associata a id rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ nel dominio e β nel codominio

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "id", "I_{\mathcal{E}\beta}"'] \arrow[rr, bend right, "I_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = I"', "id"] & \mathbb{R}^n_{\beta} \arrow[r, "id", "I_{\beta\mathcal{E}}"'] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \end{tikzcd}$$

8.2.4.2

2 Per dimostrare il secondo punto, dimostriamo che $I_{C,B}$ è la matrice inversa di $I_{B,C}$, cioè che $I_{B,C}I_{C,B} = I_{C,B}I_{B,C} = I$, dove I è la matrice identità.

$$I = I_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = I_{\beta\mathcal{E}} I_{\mathcal{E}\beta}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\beta} \arrow[r, "id", "I_{\beta\mathcal{E}}"'] \arrow[rr, bend right, "id", "I_{\beta\beta}"'] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "id", "I_{\mathcal{E}\beta}"'] & \mathbb{R}^n_{\beta} \end{tikzcd}$$

$$I_{\beta\beta} = I = I_{\mathcal{E}\beta} I_{\beta\mathcal{E}}$$

Abbiamo $I_{\mathcal{E}\beta} I_{\beta\mathcal{E}} = I = I_{\beta\mathcal{E}} I_{\mathcal{E}\beta}$

$\Rightarrow I_{\mathcal{E}\beta} = I_{\beta\mathcal{E}}^{-1}$ (vale anche $I_{\beta\mathcal{E}} = I_{\mathcal{E}\beta}^{-1}$)

Nota: le cose funzionano bene con la composizione di applicazioni lineari

$F \quad V_{\beta} \xrightarrow{A_{\beta\beta'}} W_{\beta'} \qquad G \quad W_{\beta'} \xrightarrow{M_{\beta'\tilde{\beta}}} Z_{\tilde{\beta}}$

$V_{\beta} \xrightarrow{G\circ F} Z_{\tilde{\beta}}$ La matrice associata a $G\circ F$ è $M_{\beta'\tilde{\beta}} A_{\beta\beta'}$ prodotto righe x colonne

---

Corollario 8.2.5 Sia β una base di $\mathbb{R}^n$ e sia $v \in \mathbb{R}^n$ le coordinate di v rispetto alla base β sono date da $(v)_{\beta} = I_{\beta\mathcal{E}}^{-1} \cdot (v)_{\mathcal{E}}$

Dim Ricordiamo che $I_{\beta\mathcal{E}}^{-1} = I_{\mathcal{E}\beta}$ $\quad \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \xrightarrow{id} \mathbb{R}^n_{\beta}$

cosa vuol dire che $I_{\mathcal{E}\beta}$ è la matrice associata a id con la base $\mathcal{E}$ nel dominio e β nel codominio? Per definizione abbiamo $F(v)_{\beta'} = A_{\beta\beta'}(v)_{\beta}$

$$(id(v))_{\beta} = I_{\mathcal{E}\beta}(v)_{\mathcal{E}}$$

$$(v)_{\beta} = I_{\beta\mathcal{E}}^{-1}(v)_{\mathcal{E}}$$

2 calcolare $(v)_{\beta} = I_{\beta\mathcal{E}}^{-1}(v)_{\mathcal{E}}$ per ottenere coordinate...

Conviene usare 2 se abbiamo già $I_{\beta\mathcal{E}}^{-1}$, oppure se dobbiamo calcolare le coordinate di tanti vettori vs risolvere tanti sys lin

FORMULA DEL CAMBIO DI BASE 1

di solito data $A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ matrice associata a F rispetto a $\mathcal{E}$ nel dominio e $\mathcal{E}'$ nel codom. vogliamo cambiare base perché diventa + bella

Data $F \quad \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \xrightarrow{A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}} \mathbb{R}^m_{\mathcal{E}'}$

---

considériamo la base β nel dominio la base β' nel codominio e vogliamo calcolare $A_{\beta\beta'}$ 2

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\beta} \arrow[r, "id", "I_{\beta\mathcal{E}}"'] \arrow[rrr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "F", "A=A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}"'] & \mathbb{R}^m_{\mathcal{E}'} \arrow[r, "id", "I_{\mathcal{E}'\beta'}"'] & \mathbb{R}^m_{\beta'} \end{tikzcd}$$

la matrice $A_{\beta\beta'}$ è $\underbrace{I_{\mathcal{E}'\beta'}}_{\text{matrice associata alla funzione che si esegue per ultima va a sx}} A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} I_{\beta\mathcal{E}} = I_{\beta'\mathcal{E}'}^{-1} A I_{\beta\mathcal{E}}$ ordine alfabetico

Caso particolare: cambio di base nel dominio $A_{\beta\mathcal{E}'}$ 3

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\beta} \arrow[r, "id", "I_{\beta\mathcal{E}}"'] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "F", "A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}"'] & \mathbb{R}^m_{\mathcal{E}'} \end{tikzcd}$$

$$A_{\beta\mathcal{E}'} = A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} I_{\beta\mathcal{E}}$$

Caso particolare: cambio di base nel codominio $A_{\mathcal{E}\beta'}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\mathcal{E}} \arrow[r, "F", "A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}"'] \arrow[rr, bend right, "F", "A_{\mathcal{E}\beta'}"'] & \mathbb{R}^m_{\mathcal{E}'} \arrow[r, "id", "A_{\mathcal{E}'\beta'}"'] & \mathbb{R}^m_{\beta'} \end{tikzcd}$$

$$A_{\mathcal{E}\beta'} = A_{\mathcal{E}'\beta'} A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A_{\beta'\mathcal{E}'}^{-1} A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\beta} \arrow[r, "id", "I_{\beta\tilde{\beta}}"'] \arrow[rrr, bend right, "F"'] & \mathbb{R}^n_{\tilde{\beta}} \arrow[r, "F", "A_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'}"'] & \mathbb{R}^m_{\tilde{\beta}'} \arrow[r, "id", "I_{\tilde{\beta}'\beta'}"'] & \mathbb{R}^m_{\beta'} \end{tikzcd}$$

side note

non è importante che ci sia per forza la base canonica, stesso principio

$$A_{\beta\beta'} = I_{\tilde{\beta}'\beta'} A_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}'} I_{\beta\tilde{\beta}}$$

Notazione se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ side note

$$A_{\beta} := A_{\beta\beta}$$

Nota: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ side note

Dim

$\overbrace{AB}^{\text{qui lo moltiplico a dx}}(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$

$\overbrace{(B^{-1}A^{-1})}^{\text{qui lo moltiplico a sx}}AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = I$

Esempio: $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Dati F, β, β'

$$F(x_1,x_2) = (3x_1 - x_2,\ x_1 + 2x_2,\ -5x_1)$$

la matrice $A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$ associata ad F rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\\-5&0\end{pmatrix}$

$\beta' = \{\underbrace{e_1-e_2+e_3}_{=w_1},\ \underbrace{e_1-e_3}_{w_2},\ \underbrace{-e_1}_{w_3}\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$\beta = \{e_1-e_2,\ \underbrace{3e_1-4e_2}_{v_2}\}$ base di $\mathbb{R}^2$

Vogliamo calcolare $A_{\beta\beta'}$

$$I_{\beta\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&3\\-1&-4\end{pmatrix} \qquad I_{\beta'\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} (v_1)_{\mathcal{E}} & (v_2)_{\mathcal{E}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (w_1)_{\mathcal{E}'} & (w_2)_{\mathcal{E}'} & (w_3)_{\mathcal{E}'} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{id} & \mathbb{R}^3 \\ \beta & I_{\beta\mathcal{E}} & \mathcal{E} & A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} & \mathcal{E}' & I_{\mathcal{E}'\beta'} & \beta' \end{array}$$

F

$A_{\beta\beta'} = \underset{\text{non c'è}}{I_{\mathcal{E}'\beta'}}\ A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}\ I_{\beta\mathcal{E}}$

$$= I_{\beta'\mathcal{E}'}^{-1}\ A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}\ I_{\beta\mathcal{E}}$$

calcoliamo l'inversa di $I_{\beta'\mathcal{E}'}$
poi calcoliamo il prodotto finale

Esercizio **1**

Determinare, se possibile $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che $\ker F = \langle e_1 - e_2\rangle$ e $\mathrm{Im}\, F = \langle e_1 - e_2 + 2e_3\rangle$

Scrivere la matrice associata ad F rispetto alle basi canoniche quindi vogliamo determinare $A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}$

Controlliamo che le richieste siano compatibili con il teorema della dim

$$\underset{2}{\dim \mathbb{R}^2} = \underset{1}{\dim \ker F} + \underset{1}{\dim \mathrm{Im}\, F} \quad \text{OK}$$

Per "costruire F" basta assegnare $F(v_1)$ e $F(v_2)$ ove $\{v_1, v_2\}$ è una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$. Conviene scegliere $v_1 = e_1 - e_2$ $\quad \ker F = \langle v_1\rangle$

$v_1 \in \ker F \Rightarrow F(v_1) = \underline{0}$

Completiamo v_1 ad una base di $\mathbb{R}^2$
Scegliamo ad esempio $v_2 = e_2$

$$F(v_1) = \underline{0}$$

$$F(v_2) = F(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$$

(va bene anche $F(e_2) = -e_1 + e_2 - 2e_3$
oppure $F(e_2) = 2e_1 - 2e_2 + 4e_3$

c'è una matrice facile da scrivere

$$A_{\beta\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} F(v_1)_{\mathcal{E}'} & F(v_2)_{\mathcal{E}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&-1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{E} & I_{\mathcal{E}\beta} & \beta & A_{\beta\mathcal{E}'} & \mathcal{E}' \end{array}$$

v_1
$\beta = \{e_1 - e_2, e_2\}$

$$I_{\beta\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$I_{\mathcal{E}\beta} = I_{\beta\mathcal{E}}^{-1} \qquad 8.2.4\ (2)$$

$$A_{\mathcal{E}\mathcal{E}'} = A_{\beta\mathcal{E}'}\, I_{\mathcal{E}\beta} = A_{\beta\mathcal{E}'}\, I_{\beta\mathcal{E}}^{-1}$$