ESERCIZIO 1

$U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \leq 3x_1 + x_3\}$

a) U non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ poichè U non è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Infatti: il vettore $(1,0,0) \in U$ poichè $0 \leq 3 \cdot 1 + 0 = 3$, ma il vettore $-2 \cdot (1,0,0) = (-2,0,0) \notin U$ poichè $0 \geq 3 \cdot (-2) + 0 = -6$.

b) $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$, $(0,0,1)$ sono vettori di U linearmente indipendenti. Infatti:

$$rr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

c) $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ sono vettori di U. Inoltre:

$$rr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

quindi v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente dipendenti e $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ha dimensione 2.

ESERCIZIO 2

Scriviamo la matrice che ha come righe i vettori delle coordinate di v_1, v_2, v_3 rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 3 & 3k & k & k \\ 1 & 2k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\mathcal{B}_k$ contiene i vettori che hanno come coordinate rispetto a $\mathcal{E}$ le righe non nulle della matrice ridotta a scala.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 3 & 3k & k & k \\ 1 & 2k & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 & k-3 \\ 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & k-3 \end{pmatrix}$$

- Se $k \neq 0,3$ allora

$$\mathcal{B}_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k-3 & k-3 \end{pmatrix} \right\}$$

- Se $k=0$ allora

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

- Se $k=3$ allora

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) $\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = 2$ se $k=0$.

Una base di $M_2(\mathbb{R})$ si ottiene aggiungendo a $\mathcal{B}_0$ due matrici linearmente indipendenti. Ad esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $M_2(\mathbb{R})$. Infatti:

$$rr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$$

dove la matrice considerata si ottiene mettendo in riga i vettori delle coordinate rispetto a $\mathcal{E}$.

c) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti se $\dim \langle v_1, v_2, v_3 \rangle < 3$. Questo accade per $k=0$ e $k=3$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 & 3k \\ k & k \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix}$$

Considerando i vettori delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$, questo equivale a chiedersi per quali valori di k il seguente sistema lineare parametrico nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ammette soluzione:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ k\lambda_1 + 3k\lambda_2 + 2k\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + k\lambda_2 + \lambda_3 = k-2 \end{cases}$$

Scriviamo la matrice associata al sistema e la riduciamo a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ k & 3k & 2k & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k-2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2-kR_1 \\ R_3-R_1 \\ R_4-R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & k-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & k-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right) = A' | \underline{b}'$$

- Se $k \neq 0,3$ $\operatorname{rr}(A') = 3 \neq 4 = \operatorname{rr}(A'|\underline{b}')$ allora il sistema non ammette soluzione, quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

- Se $k=0$ $\quad rr(A') = 2 \neq 3 = rr(A' | \underline{b}')$ allora il sistema non ammette soluzione, quindi
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix} \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

- Se $k=3$ $\quad rr(A') = 2 = rr(A' | \underline{b}') < 3$ allora il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da 1 variabile libera, quindi
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Allora $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k-2 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

solo per $k=3$.

Le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}_3$ sono gli scalari $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che:
$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Basta prendere $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Allora:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3} = (1, -1).$$