Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
13 giugno 2019

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (6 punti)

a) Sia $W = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) | A + A^T = \mathbf{0}\}$, ove A^T indica la trasposta della matrice A e $\mathbf{0}$ indica la matrice nulla.

   Si stabilisca se W è un sottospazio di $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ e in caso affermativo se ne determini una base.

b) Sia $U = \langle (1,0,1,-1), (2,1,0,1), (0,1,-2,3) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Si scrivano le equazioni cartesiane di U.

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $F_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_s(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, -3x_1 + 6x_2 - 6x_3, 2x_1 + 5x_2 - 2sx_3).$$

a) Si stabilisca per quali valori di s si ha che F_s è un isomorfismo.

b) Posto $s = -2$, si determinino una base di $\mathrm{Ker}\, F_{-2}$ e una base di $\mathrm{Im}\, F_{-2}$ e si determini, se possibile, un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}\, F_{-2} \cap \mathrm{Im}\, F_{-2}$.

c) Si determini la controimmagine tramite F_{-2} del vettore $(-1, 9, 3)$.

d) Si stabilisca se esistono due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{R}^3$ tali che la matrice associata a F_{-2} rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio sia:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   In caso affermativo, si determinino $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

Esercizio 3. (10 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \qquad T(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$$

e sia A_k la matrice associata a T_k rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Si determinino, se possibile, i valori di k tali che A_k sia simile alla matrice $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Posto $k = -4$, si verifichi che $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sono autovettori di T_{-4} e, se possibile, si completi l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T_{-4}.

d) Si determini, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_{-4}P$ sia diagonale.

Esercizio 4 (3 punti)
Si determini, se possibile, l'inverso di $[22]_{95}$ in $\mathbb{Z}_{95}$.