Simulazione prova parziale

Es. 1

Controlliamo se $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_k$

Deve succedere che $(k+2)\cdot 0 + (k+1)\,0^2 - k0 + 0 = k^2 - 1$

quindi $k^2 - 1 = 0$ quindi $k = \pm 1$

Segue che se $k \neq \pm 1$ S_k non è un sottosp.

~~Es~~ Vediamo se S_1 è sottospazio

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; 3a + 2b^2 - c + d = 0 \right\}$$

Siano $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_2 \end{pmatrix} \in S_1$ e $v_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in S_1$

si ha che
$$3a_1 + 2b_1^2 - c_1 + d_1 = 0$$
$$3a_2 + 2b_2^2 - c_2 + d_2 = 0$$

ci chiediamo se $v_1 + v_2 \in S_1$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

È vero che $3(a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2)^2 - (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2) = 0$?

$$3(a_1+a_2) + 2(b_1+b_2)^2 - c_1 - c_2 + d_1 + d_2 =$$
$$3a_1 + 3a_2 + 2b_1^2 + 2b_2^2 + 4b_1b_2 - c_1 - c_2 + d_1 + d_2 =$$
$$= 3a_1 + 2b_1^2 - c_1 + d_1 + 3a_2 + 2b_2^2 - c_2 + d_2 + 4b_1b_2 =$$
$$= 0 + 0 + 4b_1b_2$$ e può succedere che $b_1 b_2 \neq 0$

ad esempio se $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2)

si ha che $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_1$ $v_1 + v_2 \notin S_1$

Quindi S_1 non è un sottospazio.

Sia $k = -1$

Siano $v_1, v_2 \in S_{-1}$ $\cancel{v_1} = \{$

$$S_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + c + d = 0 \right\}$$

Siano $v_1, v_2 \in S_{-1}$

$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ $a_1 + c_1 + d_1 = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ $a_2 + c_2 + d_2 = 0$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 + c_1) + (a_2 + b_2 + c_2) = 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in S_{-1}$

$\lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 \end{pmatrix}$ $\lambda a_1 + \lambda c_1 + \lambda d_1 =$

$\lambda (a_1 + b_1 + c_1) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \lambda v_1 \in S_{-1}$

Quindi S_{-1} è un sottospazio

a) Se $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_{-1}$ si ha che $a+c+d=0$,

quindi $d = -a-c$

quindi $S_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Controlliamo se i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono lin. indip.

passiamo alle coordinate e utilizziamo l'algoritmo di Gauss per trovare una base di $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$

$(w_1)_{\mathcal{B}} = (1, 0, 0, -1)$

$(w_2)_{\mathcal{B}} = (0\ 1\ 0\ 0)$

$(w_3)_{\mathcal{B}} = (0, 0, 1, -1)$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}$$

La matrice è già ~~a~~ scala $\Rightarrow$ i vettori sono lin. indip.

$$\beta_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(1)

se aggiungo il vettore di coordinate $0 \ 0 \ 0 \ 1$

la matrice ottenuta è a scala

$$\tilde{\beta} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è base

di $M_2(\mathbb{R})$, perché i 4 vettori di $\tilde{\beta}$ sono lin indip.

$M_2(\mathbb{R})$ ha dimensione 4, quindi i 4 vettori sono una

base.

b) Cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deve succedere che

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = 0$$

$$\alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + \alpha_4 = 0$$

le coordinate sono $(1, 0, 0, 1)$

c) Se $v \notin S_{-1}$ si ha che $v \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ quindi il sottospazio $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$

$\left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right), v >$ ha dimensione > 3 e ≤ 4

Segue che $U = M_2(\mathbb{R})$

quindi $\langle \beta_{-1} \cup \{v\} \rangle = M_2(\mathbb{R})$

in $\beta_{-1} \cup \{v\}$ ci sono 4 vettori che generano $M_2(\mathbb{R})$, $M_2(\mathbb{R})$ ha dimensione 4, quindi $\beta_k \cup \{v\}$ ~~quindi~~ è una base di $M_2(\mathbb{R})$.

L'affermazione del testo è pertanto vera.

d) S_{-1} ha dimensione 3 ~~se~~ quindi se prendiamo 3 vettori linearmente indip di S_{-1} sappiamo che sono una base e quindi generano S_{-1}

Perciò non è possibile determinare i 3 vettori richiesti.

Esercizio 2

Cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

Deve succedere che

$x^3 + kx^2 + 3x + 3 = \alpha_1(x^3 + 2x^2 + 3x - 1)$

$+ \alpha_2(kx^3 + 4x^2 + 3kx - 2) + \alpha_3(kx^2 + 3) =$

$$= (\lambda_1 + k\lambda_2)x^3 + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + k\lambda_3)x^2$$

$$+ (3\lambda_1 + 3k\lambda_2)x - \lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3$$

Quindi deve essere

$$\begin{cases} \lambda_1 + k\lambda_2 = 1 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + k\lambda_3 = k \\ 3\lambda_1 + 3k\lambda_2 = 3 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema lineare nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. La matrice associata è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1 \\ 2 & 4 & k & k \\ 3 & 3k & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 4-2k & k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Riordino le righe

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 & 4 \\ 0 & 2(2-k) & k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + 2R_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & k+6 & k+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k \neq 2$ e $k \neq -6$ $\quad rr(A') = 3 = rr(A'|b')$

e il sistema ha soluzione $\Rightarrow v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Se $k = 2$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \; R_3/8 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$R_3 - 3R_2$

$rr(A') = 2 \neq 3 = rr(A', b')$

il sistema non ha soluz.

$\Rightarrow v \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Se $K = -6$ otteniamo

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$rr(A') = 2 = rr(A' | b')$

$\Rightarrow$ il sistema ha soluz.

$\Rightarrow v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Quindi $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ per $K \neq 2$

(b) usiamo la definizione: cerchiamo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ e vediamo quando ~~solo~~ sono tutti nulli

Si fanno gli stessi conti di prima, e deve succedere che

$$\begin{cases} \alpha_1 + K\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + K\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 3K\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

la matrice associata al sistema è

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & K & 0 & 0 \\ 2 & 4 & K & 0 \\ 3 & 3k & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

Utilizzando Gauss, con gli stessi conti di prima si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se $k \neq 2$ e $k \neq -6$ $\quad rr(A') = rr(A'|b') = 3 =$ numero incognite

c'è una sola soluz., quella nulla, i vettori sono indipendenti

se $k = 2$ ~~o $k=-6$~~ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rr(A') = rr(A'|b') = 2 \neq 3$ infinite soluzioni

i vettori sono dip.

se $k = -6$ si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

come prima, i vettori sono dip.

Scegliamo $k = 2$ otteniamo

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\lambda_3 = 0$$

quindi $\lambda_1 = -2\lambda_2$, $\lambda_3 = 0$ ad esempio

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_2 = 1$$
$$\lambda_3 = 0$$

$-2v_1 + v_2 = 0$ $\qquad v_2 = 2v_1$

Sia $k = 0$ si ha che $v \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

quindi $\langle v, v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e i vettori non generano $\mathbb{R}_3[x]$,

perché $\mathbb{R}_3[x]$ ha dimensione 4.