Matrici e sistemi lineari

Consideriamo un sistema lineare della forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Possiamo scrivere questo sistema in forma matriciale nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema può essere riscritto utilizzando il prodotto righe per colonne nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o, più sinteticamente, come

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

dove $A = (a_{ij})$ è la matrice $m \times n$ dei coefficienti delle incognite, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la colonna delle n incognite, e $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è la colonna degli m termini noti. La matrice $A = (a_{ij})$ si chiama matrice *incompleta* associata al sistema e la matrice

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

si chiama matrice *completa* associata al sistema.

Definizione 0.0.1. Una matrice si dice *in forma a scala* (per righe) o, semplicemente, *a scala* se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(a) eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrice;

(b) il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) si trova più a destra del primo elemento non nullo della riga precedente.

Definizione 0.0.2. Sia A una matrice in forma a scala (per righe). Si chiama *pivot* di A il primo elemento non nullo di ogni riga (non nulla) di A. Si chiama *rango righe* di A e si indica con $\mathrm{rr}(A)$ il numero di righe non nulle di A o, equivalentemente, il numero dei suoi pivot.

Data una qualsiasi matrice $A = (a_{ij})$ è possibile trasformare A in una matrice a scala attraverso operazioni elementari sulle righe di A. Tale procedimento è noto come *riduzione di Gauss* e l'algoritmo che si utilizza si chiama *Algoritmo di Gauss* e funziona nel modo seguente:

1. Se $a_{11} = 0$ si scambia la prima riga di A con una riga in cui il primo elemento è non nullo. Indichiamo con a tale elemento non nullo. Se il primo elemento di ogni riga di A è nullo, si considera la matrice ottenuta cancellando la prima colonna della matrice in esame e si ricomincia dal punto 1.

2. Si controllano una dopo l'altra tutte le righe tranne la prima. Se il primo elemento di una riga è nullo si lascia quella riga inalterata. Se il primo elemento di una riga, diciamo la i-esima ($i > 1$), è uguale a $b \neq 0$, si sostituisce la riga i-esima con la somma della riga i-esima e della prima riga moltiplicata per $-\frac{b}{a}$.

3. A questo punto tutti gli elementi della prima colonna, tranne eventualmente il primo, sono nulli. Si considera dunque la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta e si ricomincia dal punto 1.

Esempio 0.0.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss per ridurre A a scala.

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$R_3 - 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$R_3 + 5R_2 \quad \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo così ottenuto la matrice a scala:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$