Esercizi

Algebra e Geometria

Corso di Laurea in Informatica

10 Marzo 2016

Esercizio 1. Per quali valori del parametro reale a il polinomio $1 + ax + x^2$ appartiene al sottospazio $\langle 1 + ax + ax^2,\ a + x + ax^2 \rangle$?

Esercizio 2. Si consideri, al variare del parametro reale b, il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t:

$$\Sigma_b : \begin{cases} x + by + z + bt = b \\ 2x + y + bz = 2b \end{cases}$$

Sia S_b l'insieme delle soluzioni di Σ_b.

a) Stabilire per quali valori del parametro reale b l'insieme S_b è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Per valori trovati nel punto a):

b) stabilire se il sistema Σ_b è sempre risolubile e determinare esplicitamente, quando possibile, l'insieme S_b delle soluzioni;

c) determinare un insieme di generatori per S_b;

d) determinare un insieme di generatori per S_b che non sia linearmente indipendente.

Esercizio 3. Stabilire per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $M_2(\mathbb{R})$ sono linearmente dipendenti:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k+1 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Scelto uno dei valori di k trovati, scrivere un vettore come combinazione lineare degli altri.

Esercizio 4.

a) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$ e $(1, 0, 0)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?

c) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo, scrivere il vettore $(2, 1, 1)$ come loro combinazione lineare. È possibile farlo in due modi diversi?

d) Stabilire se i vettori $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 3, 2)$ e $(-1, 3, 1)$ generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(1) = 0\}$.

a) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Determinare un insieme di generatori di W.

c) Determinare, se possibile, un insieme di generatori di W costituito da polinomi con termine noto nullo.

d) Determinare, se possibile, un insieme di generatori di W costituito da polinomi di grado 1.

e) Determinare, se possibile, un insieme di generatori di W costituito da polinomi di grado 2.