Spazi vettoriali
struttura algebrica

Definizione 2.3.1 Si dice *spazio vettoriale* reale un insieme V munito di due operazioni dette rispettivamente *somma e prodotto per scalari*:

$$+ : V \times V \longrightarrow V \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad (\lambda, \mathbf{u}) \mapsto \lambda\mathbf{u}$$

che soddisfino le seguenti proprietà:
la somma + è:

1. *commutativa*, cioè $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
2. *associativa*, cioè $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;
3. ammette un *elemento neutro*, cioè esiste $\mathbf{0} \in V$ tale che $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u}$ in V;
4. ogni elemento di V ha un *opposto*, cioè per ogni $\mathbf{u} \in V$ esiste un vettore $\mathbf{a}$ tale che $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Inoltre valgono le seguenti proprietà:

5. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;
6. $(\lambda\mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu\mathbf{u})$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$;
8. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$, per ogni $\mathbf{u} \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono *vettori* mentre i numeri reali si dicono *scalari*. L'elemento neutro rispetto alla somma in V si chiama *vettore nullo*. Per distinguere i vettori dai numeri indichiamo, come abbiamo fatto nella precedente definizione, i vettori in grassetto.

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che $\mathbb{R}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{R})$ sono spazi vettoriali reali. Vediamo ora altri esempi.

Sia $F(\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con le due operazioni:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

$U = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0 \quad b \geq 0\}$ NON è una vect space
e.g. no opposto né -2v

$V = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}^2\}$

(a,b) "+" $(c,d) = (ab, b+d)$

$\lambda(a,b) = (a, \lambda b)$

Risposta a una domanda: esempio di un insieme con somma e prodotto per scalare dove non valgono alcune proprietà e quindi non è uno spazio vettoriale

vale la commutatività di "+"

elemento neutro è $(1,0)$

vale $1(a,b) = (a,b)$

non vale l'esistenza dell'opposto
Ad esempio se consideriamo $v(0,-5)$ non esiste nessun (c,d) tale che $(0,-5)$ "+" $(c,d) = (1,0)$
$(0 \cdot c, -5+d) = (0, -5+d)$

non possono mai essere uguali

Uno spazio vettoriale gode anche delle seguenti proprietà, che sono CONSEGUENZE della definizione e devono essere dimostrate

i) *Il vettore nullo è unico e verrà indicato con* $\mathbf{0}_V$.

ii) *Se* $\mathbf{u}$ *è un vettore di* V *il suo opposto è unico e lo indicheremo con* $-\mathbf{u}$.

iii) $\lambda\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, *per ogni scalare* $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$, *per ogni* $\mathbf{u} \in V$ *(si noti il diverso significato dello zero al primo e al secondo membro!).*

v) *Se* $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$ *allora è o* $\lambda = 0$ *o* $\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$.

vi) $(-\lambda)\mathbf{u} = \lambda(\underset{\text{opposto di } u}{-\mathbf{u}}) = -(\lambda\mathbf{u})$ opposto di λu

1) devo dimostrare che se ci due vettori nulli allora sono uguali.
Assumo che ci siano due vettori nulli, ovvero $u = \underline{0} + u \ \forall u \in V$ (H1) e $u = \underset{\sim}{0} + u$ (H2)
elimino da H1 per ottenere
$\underset{\sim}{0} = \underline{0} + \underset{\sim}{0}$ (H3)
elimino da H2 per ottenere
$\underline{0} = \underset{\sim}{0} + \underline{0}$ (H4)
Per H3, H4, Prop commutativa degli spazi vettoriali e transitività uguaglianza, QED

Esempi

Polinomi in x a coefficienti in $\mathbb{R}$
insieme di tutti i polinomi di grado n sono
$V = \mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$

somma: $(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 \dots + b_m x^m)$
$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$

prodotto per scalare $\lambda(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_n x^n$

2.4 SOTTOSPAZI VETTORIALI

~~sottoinsiemi di uno spazio vettoriale che ereditano struct~~ spazio vect

Come possiamo riconoscere e descrivere uno spazio vettoriale dentro un altro? Come distinguiamo un sottoinsieme qualsiasi di uno spazio vettoriale da uno che ne possiede le stesse caratteristiche? Per rispondere a queste domande è necessario introdurre la definizione di sottospazio vettoriale.

Definizione 2.4.1 Sia W un sottoinsieme dello spazio vettoriale V. Diremo che W è un *sottospazio vettoriale* di V se soddisfa le seguenti proprietà:

1) W è diverso dall'insieme vuoto;

$\forall u, v \in W, \ u + v \in W$

2) W è chiuso rispetto alla somma, cioè per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ si ha che $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$;

$\forall u \in W \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda u \in W$

3) W è chiuso rispetto al prodotto per scalari, cioè per ogni $\mathbf{u} \in W$ e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda\,\mathbf{u} \in W$.

Osserviamo che poiché W non è vuoto (per 1), e $\lambda\mathbf{u} \in W$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, allora prendendo un vettore qualsiasi di W e moltiplicandolo per $\lambda = 0$ si ottiene che $\mathbf{0}_V \in W$. In effetti la proprietà (1) può essere efficacemente sostituita dalla proprietà: 1') $0_V \in W$ (negli es conviene controllare subito che il vect nullo appartenga ad U)

Esempi

in $V=\mathbb{R}^2$ $\quad U=\{(x,3x)\mid x\in\mathbb{R}\}$

(U è la retta di equazione $y=3x$)

$(0,0)\in U \Rightarrow U\neq\emptyset$

verifichiamo che U sia sottospazio

Siano $\underline{u}_1=(x_1,3x_1)\in U$

$\underline{u}_2=(x_2,3x_2)\in U$

$\underline{u}_1+\underline{u}_2=(x_1,3x_1)+(x_2,3x_2)$

$=(x_1+x_2,\ 3x_1+3x_2)=$

$=(\underbrace{x_1+x_2}_{x},\ \underbrace{3(x_1+x_2)}_{3x})\in U$ ② è verificata

③ Siano $u_1=(x_1,3x_1)\in U$

$\lambda\in\mathbb{R}$

$\lambda\underline{u}_1=(\lambda x_1,\ \lambda 3x_1)=$

$=(\lambda x_1,\ 3\lambda x_1)\in U$

$\Rightarrow$ U è sottospazio

Nota $U=\{\underline{0}\}$ è sempre un sottosp di V

① $\underline{0}\in U$

② $\underline{0}+\underline{0}\in\underline{0}$

③ $\lambda\underline{0}\in U \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\{0\}$ si dice sottospazio banale o nullo

Nota $\{\underline{0}\}\neq\underline{0}\neq\emptyset$

th: (sotto)spazio vettoriale contiene o solo vettore nullo o infiniti

Nota Sia U un sottospazio di V

Allora se $U\neq\{\underline{0}\}$ si ha che U contiene infiniti vettori

Dim

Se $U\neq\{\underline{0}\}$ allora esiste un vettore $u\in U$ con $u\neq\underline{0}$

Consideriamo $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ e mostriamo che se $\lambda\neq\mu$ allora $\lambda\underline{u}\neq\mu\underline{u}$

per assurdo supponiamo $\lambda\underline{u}=\mu\underline{u}$

allora $\lambda\underline{u}-\mu\underline{u}=\underline{0}\Rightarrow(\lambda-\mu)\underline{u}=\underline{0}$

(v) di 2 3 5 legge cancellamento prodotto

$\Rightarrow$ o $(\lambda-\mu)=0$ assurdo perché $\lambda\neq\mu$

oppure $\underline{u}=\underline{0}$ contraddice il fatto che $u\neq\underline{0}$

quindi i vettori del tipo $\lambda\underline{u}$, con $\lambda\in\mathbb{R}$

sono tutti distinti e sono infiniti

per ③ appartengono tutti ad U

e.g.

$U=\{(a,2a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},\ ab\geq 0\}\subseteq\mathbb{R}^3$

U è sottospazio?

è chiuso rispetto alla somma?

" " al prodotto per scalari?

$(0,0,0)\in U \quad (0,0,0)=(0,2\cdot 0,0)$

e $0\cdot 0\geq 0$

Siano $u_1=(a_1,2a_1,b_1)$, $u_2=(a_2,2a_2,b_2)\in U$ $\quad a_1b_1\geq 0$, $a_2b_2\geq 0$

$u_1+u_2=(a_1+a_2,\ 2(a_1+a_2),\ b_1+b_2)$

e.g. 3 6 -6 -3

$\Rightarrow$ no chiuso rispetto somma

siano $u_1\in U$ $\quad u_1=(a_1,2a_1,b_1)$

$a_1b_1\geq 0$

$\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad \lambda u_1=(\lambda a_1,\ 2(\lambda a_1),\ \lambda b_1)$

controlliamo $(\lambda a_1)(\lambda b_1)\geq 0$

$\underbrace{\lambda^2}_{\geq 0}\underbrace{a_1b_1}_{\geq 0}\geq 0$ ok

U è chiuso rispetto al prodotto per scalari

Esempio 2.4.3

Consideriamo l'insieme $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x+1\}$. Possiamo immediatamente affermare che S *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ poiché non contiene $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$. Dunque non tutte le rette del piano individuano dei sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$, ma solo quelle passanti per $(0,0)$.

e.g. verificare che $U = \{(x,y,z) \mid 3x+2y-z=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ sia sottospazio

$(0,0,0) \in U$,

$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) \in U \Leftrightarrow \underbrace{3x_1+2y_1-z_1}_{0} + \underbrace{3x_2+2y_2-z_2}_{0} = 0 \Rightarrow \checkmark$

$\lambda(x_1,y_1,z_1) \in U \Leftrightarrow \lambda(\underbrace{3x_1+2y_1-z_1}_{0}) = 0 \Rightarrow \checkmark$

$U = \{ax^2+bx-(a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}$
$a \geq 0\}$

$0 = 0x^2+0x-(0+0)$ $a=0$ $b=0$

$0 \in U$

Siano $v_1 = a_1x^2+b_1x-(a_1+b_1)$ $a_1 \geq 0$
$v_2 = a_2x^2+b_2x-(a_2+b_2)$ $a_2 \geq 0$

$v_1+v_2 = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x-((a_1+a_2)+(b_1+b_2))$

$a_1+a_2 \geq 0$ perche $a_1, a_2 \geq 0$

$\Rightarrow v_1+v_2 \in U$

U non è chiuso rispetto al prodotto per scalari $\alpha v_1 = \alpha a_1x^2+\alpha b_1x-(\alpha a_1+\alpha b_1)$

non è garantito che $\alpha a_1 \geq 0$

Siano $a,b,c \in \mathbb{R}$ $(a,b) \neq (0,0)$

$W = \{(x,y) \mid ax+by+c=0\}$ con a,b,c fissati

W è una generica retta

W è sottospazio? la retta $y=3x-7$ no
" " $5x+4y-2=0$ no

$(0,0) \in W$?

$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0$ $c=0$

Se $c=0$ W contiene $\underline{0} = (0,0)$

se $c \neq 0$ W non " $\underline{0}$

e quindi non è sottospazio

Morale: una retta di $\mathbb{R}^2$ è un sottospazio $\Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow$ passa per $(0,0)$

Esempio la retta $y=5x$ è sottosp la retta $3x-4z=0$ sì