Determinante

Definizione 7.1.1 La *matrice identità* o *matrice identica* di ordine n, è la matrice $n \times n$ avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali al numero 1, mentre i restanti elementi sono uguali a 0.
Verrà indicata con I_n, o semplicemente con I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 7.1.2 Il *determinante* è una funzione che ad ogni matrice quadrata A di ordine n associa un numero reale, indicato con $\det(A)$, in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. Se la riga j-esima di A è somma di due elementi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$, allora il determinante di A è la somma dei determinanti delle due matrici ottenute sostituendo alla riga j-esima di A rispettivamente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2. Se la riga j-esima di A è il prodotto $\lambda\mathbf{u}$, ove $\mathbf{u}$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$ e λ è uno scalare, allora il determinante di A è il prodotto di λ e del determinante della matrice ottenuta sostituendo la riga j-esima di A con $\mathbf{u}$.

3. Se due righe di A sono uguali, allora il determinante di A è nullo.

4. Se I è la matrice identità, allora $\det(I) = 1$.

Proposizione 7.1.3 *Esiste una funzione che soddisfa le proprietà della Definizione 7.1.1 e tale funzione è unica.*

Proposizione 7.1.3 *E Siano A e B due matrici quadrate di ordine n.*

(a) Se B è ottenuta da A scambiando due righe, allora:

$$\det(A) = -\det(B)$$

(b) Se B è ottenuta da A sommando ad una riga di A una qualunque combinazione lineare delle altre righe, allora:

$$\det(B) = \det(A)$$

(c) *Se A è una matrice triangolare superiore (o inferiore), cioè i coefficienti al di sotto (rispettivamente al di sopra) della diagonale principale sono tutti uguali a zero, allora il determinante di A è il prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.*

Calcolo del determinante: casi 2×2 e 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Regola di Sarrus: si considera la seguente matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

si sommano i coefficienti sulle diagonali principali $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ poi si sottrae la somma dei prodotti di coefficienti sulle diagonali "opposte": $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$.

Calcolo del determinante: metodo ricorsivo

Definizione 7.1.1 Sia $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata di ordine n (cioè con n righe e n colonne). Indichiamo con A_{ij} la sottomatrice quadrata di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Allora A_{ij} si dice un *minore* di A di ordine $n-1$.

Vediamo degli esempi.
Se

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A_{1\,1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_{2\,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{4\,2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI LAPLACE 7.3.3 *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se A ha ordine 1, cioè $A = (a_{1\,1})$ ha una riga e una colonna, poniamo*
$$\det(A) = a_{1\,1}$$

2. *Supponiamo ora di saper calcolare il determinante delle matrici di ordine $n-1$. Sia*
$$\Gamma_{i\,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i\,j})$$
allora
$$\det(A) = a_{1\,1}\Gamma_{1\,1} + a_{1\,2}\Gamma_{1\,2} + \ldots + a_{1\,n}\Gamma_{1\,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1\,k}\Gamma_{1\,k}$$

È possibile sviluppare il determinante secondo una qualsiasi riga o colonna. Lo sviluppo di $\det(A)$ secondo la r-esima riga è dato da:

$$\det(A) = a_{r\,1}\Gamma_{r\,1} + a_{r\,2}\Gamma_{r\,2} + \ldots + a_{r\,n}\Gamma_{r\,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{r\,k}\Gamma_{r\,k}$$

Lo sviluppo di $\det(A)$ secondo la s-esima colonna è dato da:

$$\det(A) = a_{1\,s}\Gamma_{1\,s} + a_{1\,s}\Gamma_{2\,s} + \ldots + a_{n\,s}\Gamma_{n\,s} = \sum_{k=1}^{n} a_{k\,s}\Gamma_{k\,s}$$

TEOREMA DI BINET 7.3.5 *Siano A e B due matrici quadrate $n \times n$, allora*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$