Es 1 a)

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 - x_2 + x_4)(3x_1 + x_2) = 0\}$$

Poiché un prodotto è $= 0$ se e solo se lo è uno dei fattori, W è l'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^4$ che verificano l'equazione $x_1 - x_2 + x_4 = 0$

OPPURE verificano " $3x_1 + x_2 = 0$

cioè W è l'unione di due sottospazi

Consideriamo un vettore che ~~[illegible]~~ verifica la prima equazione ma non la seconda e un vettore che verifica la seconda equazione ma non la prima, ad esempio

$v_1 = (1, 1, 3, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1)$

abbiamo che $v_1, v_2 \in W$ ma

$v_1 + v_2 = (1, 1, 4, 1) \notin W$ perché

$$(1 - 1 + 1)(3 + 1) \neq 0$$

quindi W non è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$

invece $U = \langle v_1 \rangle = \{(\lambda, \lambda, 3\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

è contenuto in W, poiché

$$(\lambda - \lambda)(3\lambda + \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Es. 1b)

Risolvo il sistema di eq. cartes. di Z per trovarne una base

$$Z: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = x_3 - x_1 \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$Z \quad \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$Z = \mathrm{Span}(2, -1, 1)$$

Sia $v_1 = (2, -1, 1)$.

Lo posso completare a una base di $B = (v_1, v_2, v_3)$, con

$v_2 = (0, 1, 0)$ $\quad v_3 = (0, 0, 1)$.

Esiste un'unica applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$$\begin{aligned} L(v_1) &= (0,0,0) \\ L(v_2) &= (1,-2,0) \\ L(v_3) &= (0,-1,1) \end{aligned} \longrightarrow \quad \begin{aligned} \mathrm{Im}(L) &= V \\ \ker L &= Z \end{aligned}$$

Per trovare una matrice A di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, osserviamo che

Nota: Questo non era richiesto nel testo

$$v_1 = (2, -1, 1) = 2(1,0,0) - v_2 + v_3$$

$$(1,0,0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3)$$

$$\longrightarrow L(1,0,0) = \frac{1}{2}\big(L(v_1) + L(v_2) - L(v_3)\big) = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

La matrice A è dunque:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es. 2

a) Matrice di F_s rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$:

$$A_s = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ s & 1 & 0 \\ 10 & s & s \\ -2s & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema di generatori di $\mathrm{Im}(F_s)$ è dato dalle righe di ${}^tA_s$:

$${}^tA_s = \begin{pmatrix} 3 & s & 10 & -2s \\ 0 & 1 & s & -2 \\ -1 & 0 & s & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{riga}]{\text{operaz. di}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 3 & s & 10 & -2s \\ 0 & 1 & s & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & s & 10+3s \\ 0 & 1 & s & - \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-sR_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 0 & 10+3s-s^2 & 0 \\ 0 & 1 & s & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & s & -2 \\ 0 & 0 & \underset{\boxed{-(s-5)(s+2)}}{-(s^2-3s-10)} & 0 \end{pmatrix}$$

Se $s \neq -2 \wedge s \neq 5$, la matrice si può ridurre a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{base}\big((1,0,0,0);(0,1,0,-2),(0,0,1,0)\big)$$

(Non dipende da s)

Se $s = -2 \rightarrow$ base $((1,0,2,0),(0,1,-2,-2))$

Se $s = 5 \rightarrow$ base $((1,0,-5,0),(0,1,5,-2))$

b) <u>Se $s \neq -2 \wedge s \neq 5$</u> il vettore $v = (3,1,-10,-2)$ appartiene a $\mathrm{Im}(F_s)$ se e solo se la matrice B', ottenuta da B con l'aggiunta di v come quarta riga, ha rango 3.

Per vedere se ciò avviene, riduciamola per righe:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 - R_2 + 10R_3 - 3R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v \rightarrow$ (quarta riga)

Concludiamo che, per $s \neq -2$ e $s \neq 5$, $v \in \mathrm{Im}(F_s)$.

Vediamo ora i due casi rimasti:

$s = -2$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{pmatrix} \quad v \notin \mathrm{Im}(F_{-2})$

$s = 5$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v \in \mathrm{Im}(F_5)$

Es. 2

c) F_s è iniettiva $\longleftrightarrow$ $\dim \ker F_s = 0$

$\longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Im} F_s = 3$

Dalla risoluzione del punto a)

$\longleftrightarrow$ $s \neq -2 \wedge s \neq 5$.

d) La matrice di F_0 rispetto alle basi can. di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ è

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

un vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ appartiene a $\operatorname{Im}(F_0$ se e solo se è una combinazione lineare delle colonne di A ovvero se la matrice seguente B :

$$B \quad \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 10 & x_3 \\ 0 & -2 & 0 & x_4 \\ & \uparrow & & \| \\ & A' & & b \end{array}$$

è tale che $rg(A') = rg(A'.b)$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss

$$\begin{array}{ccc|l} -1 & 0 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 10 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + 2x_2 \end{array} \qquad (R_4 \to R_4 - 2R_2)$$

L'equazione è $2x_2 + x_4 = 0$

(Osserviamo che è sufficiente una sola equazione, infatti $\operatorname{Im}(F_0)$ ha dimensione 3.

Es. 3

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & k & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolo il polin. caratt. di T_k:

$$p_k(t) = \det(tI - A_k) = \det\begin{pmatrix} t-3 & -k & 5 \\ -1 & t-3 & 1 \\ 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} =$$

$$= (t+2)((t-3)^2 - k)$$

p_k ammette 3 radici reali $\leftrightarrow k \geq 0$

In tal caso le radici sono $t_1 = -2$; $t_{2,3} = 3 \pm \sqrt{k}$.

Le tre radici sono distinte, tranne nei casi:

$k = 0 \longrightarrow t_1 = -2 \quad t_2 = t_3 = 3$

$k = 25 \longrightarrow t_1 = t_2 = -2 \ ; \ t_3 = 8$

Possiamo quindi già concludere che, per $k > 0$ e $k \neq 25$ T_k è diagonalizzabile, mentre per $k < 0$ non lo è.

Trattiamo ora i due casi rimasti, calcolando le moltepl. geom. degli autovalori con m.a = 2.

Per $k = 0$, $A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$t_2 = t_3 = 3$; $A_0 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ha rango 2 $\rightarrow mg(3) = 1$

$\rightarrow T_0$ NON diagonalizz.

Per $k = 25$, $A_{25} = \begin{pmatrix} 3 & 25 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$t_1 = t_2 = -2 \rightarrow A_{25} + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 25 & -5 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ha rango 1 $\longrightarrow mg(-2) = 2$

$\longrightarrow T_{25}$ è diagonalizzabile.

Conclusione: T_k è diagonalizzabile per $k > 0$

b) Sia $v = e_1 - e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A_k v = \begin{pmatrix} 3 & k & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-k \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 3-k = \lambda \\ \lambda = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{k=1}$$

Es. 3c)

Se $k=1$, gli autovalori sono $-2,\ 3-1,\ 3+1$, cioè

$$\lambda_1=-2 \qquad \lambda_2=2 \qquad \lambda_3=4$$

Dal punto b) sappiamo che un autovett. rel. a λ_2 è $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Troviamo degli autovett. relativi a λ_1 e λ_3.

Autovett. rel. a $\lambda_1=-2$

$$A_1=\begin{pmatrix}3&1&-5\\1&3&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$A_1+2I=\begin{pmatrix}5&1&-5\\1&5&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{righe}]{\text{oper.}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Autovett. rel. a $\lambda_3=4$

$$A_1-4I=\begin{pmatrix}-1&1&-5\\1&-1&-1\\0&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{righe}]{\text{oper.}}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Una base di autovettori per T_1 è quindi:

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

P_1 e P_2 sono una coppia di matrici distinte, le cui colonne sono dei multipli scalari (non nulli) degli elem. di $\mathcal{B}$

Per es: $P_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ $\qquad P_2=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&-2&2\\2&0&0\end{pmatrix}$

Con questa scelta, risulta

$$P_1^{-1}A_1P_1=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}=P_2^{-1}A_1P_2\,.$$

Es 4

$$\left.\begin{array}{l}68=17\cdot 4\\187=17\cdot 11\end{array}\right. \to MCD(68,187)=17\neq 1$$

$\longrightarrow [68]_{187}$ <u>NON</u> è invertibile in $\mathbb{Z}_{187}$.