Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
31 Marzo 2016

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino in $\mathbb{R}_2[x]$ i polinomi:

$$p_1(x) = 1 + x + kx^2, \quad p_2(x) = k + 1 + 2x + 2x^2, \quad p_3(x) = 2 - k^2 + x + kx^2.$$

Sia inoltre $W_k = \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$.

a) Stabilire al variare di k la dimensione del sottospazio W_k e scrivere una base $\mathcal{B}_k$ di W_k.

b) Stabilire per quali valori di k i polinomi p_1, p_2, p_3 generano $\mathbb{R}_2[x]$.

c) Stabilire per quali valori di k, se esistono, i polinomi p_1, p_2, p_3 generano il sottospazio $S = \{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid 2a = b - c\}$.

d) Stabilire per quali valori di k il polinomio $q_k(x) = k + x + kx^2$ appartiene a W_k. In tali casi scrivere le coordinate di q_k rispetto alla base $\mathcal{B}_k$.

e) Stabilire per quali valori di k esiste un polinomio p tale che $p \notin W_k$ e p_1, p_2, p_3, p non generino $\mathbb{R}_2[x]$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare una base $\mathcal{A}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $(1, 2, 3)_{\mathcal{A}} = (-1, -1, -1)$.

b) Determinare una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

- $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2z = y\}$;
- $\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 2y\}$;
- $(1, -2, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0, -1)$.

c) Sia ora $\mathcal{D} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ una base di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se anche $\mathcal{D}' = \{\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}, \mathbf{u_1} + 2\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}, \mathbf{u_1} + 2\mathbf{u_2} + 3\mathbf{u_3}\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si considerino in $M_2(\mathbb{R})$ le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2-k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

a) Per quali valori di k le matrici A, B, C generano $M_2(\mathbb{R})$?

b) Stabilire al variare di k la dimensione del sottospazio $\langle A, B, C\rangle$ e determinarne una base.

c) Stabilire per quali valori di k la matrice $D = \begin{pmatrix} k & k \\ k & 6 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\langle A, B, C\rangle$.

d) Per quali valori di k le matrici A, B, C, D generano $M_2(\mathbb{R})$?

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$M = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Mostrare che M è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Esibire un insieme di generatori di M che non sia una base di M e in cui i vettori non sono l'uno multiplo dell'altro.

c) Determinare una base $\mathcal{B}$ di M.

d) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $M_2(\mathbb{R})$.

e) La matrice B tale che $(B)_{\mathcal{D}} = (2, 1, 0, 0)$ appartiene a M?