

Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
11 Maggio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = k^2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $f(\mathbf{e}_3) = k^2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, con $k \in \mathbb{R}$.

- a) Scrivere la matrice A_k associata a f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 in dominio e codominio e stabilire per quali valori di k è invertibile.
- b) Stabilire per quali valori di k il vettore $(1, k, -k)$ appartiene a $\text{Im } f$.
- c) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k ha 0 come autovalore.
- d) Stabilire per quali valori di k il vettore $\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3$ è un autovettore di f .
- e) Stabilire per quali valori di k l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
- f) Scrivere una matrice diagonale D simile ad A_k .
- g) Sia $k = 1/2$. Esiste una matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ con lo stesso polinomio caratteristico di $A_{1/2}$ che non sia simile ad $A_{1/2}$?

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f_k(x, y, z) = (x + y + kz, kx + y + z, x + y + kz).$$

- a) Scrivere la matrice A_k associata a f_k rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
- b) Determinare la dimensione di $\text{Ker } f_k$ e $\text{Im } f_k$ al variare di k .
- c) Stabilire per quali valori di k , se esistono, l'applicazione f_k è invertibile.
- d) Stabilire per quali valori di k l'applicazione f_k è diagonalizzabile.
- e) Scelto uno dei valori di k trovati in d), determinare tutte le matrici diagonali simili a A_k e una base di \mathbb{R}^3 formata da autovettori.
- f) Sia $k = 0$. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{(2, 0, 2), (0, 3, 0), (1, 2, 3)\}$ e $\mathcal{D} = \{(2, -2, 1), (2, 0, 2), (0, 0, 1)\}$ sono basi di \mathbb{R}^3 , scrivere la matrice associata a f_0 rispetto alle basi \mathcal{B} in dominio e \mathcal{D} in codominio.

Esercizio 3. Determinare le soluzioni intere delle congruenze:

$$42x \equiv_{91} 4; \quad 13x \equiv_{42} 4.$$