Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
4 Maggio 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ a+c & a+2b+c \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_2[x]$ in dominio e alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$ in codominio.

b) Determinare nucleo e immagine di f.

c) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

d) Calcolare l'immagine tramite f del vettore $1 + x + x^2$.

e) Calcolare la controimmagine tramite f del vettore $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

f) Determinare, se possibile, tre vettori appartenenti a $\operatorname{Im} f$ a due a due linearmente indipendenti che non costituiscano una base di $\operatorname{Im} f$.

g) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1,\, 1 + x,\, 1 + x + x^2\}$ di $\mathbb{R}_2[x]$ in dominio e alla base

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $M_2(\mathbb{R})$ in codominio.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (0,\, x + 3y - 2z,\, 2x + 6y - 4z).$$

a) Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio.

b) Determinare gli autovalori di f e stabilire se f è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare se possibile due matrici distinte P e Q tali che $P^{-1}AP = D = Q^{-1}AQ$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 3. Sia $k \in \mathbb{R}$ e sia data

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.

b) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

c) Scelto uno dei valori di k trovati in b), determinare tutte le matrici diagonali simili a A_k.

d) Scelto uno dei valori di k trovati in b), stabilire se esiste una matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ con gli stessi autovalori di A_k che non sia simile ad A_k.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = 2k\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + k\mathbf{e_3}$, $f(\mathbf{e_2}) = k\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + k\mathbf{e_3}$, $f(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, con $k \in \mathbb{R}$.

a) Scrivere la matrice A_k associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio.

b) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k ha 0 come autovalore.

c) Stabilire per quali valori di k, se esistono, la matrice A_k ha un autovalore di molteplicità algebrica 3.

d) Stabilire per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

e) Stabilire per quali valori di k il vettore $2\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$ è autovettore di A_k.

f) Scelto uno dei valori di k trovati in d), stabilire se esiste una matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ con lo stesso polinomio caratteristico di A_k che non sia simile ad A_k.