ESERCIZIO 1

(1)

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid s^2 = 0 \ , 5u + t = 0 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$

osserviamo che $s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0$ quindi

$W = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \mid s = 0 \ \ t = -5u \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ -5u & u \end{pmatrix} \mid r, u \in \mathbb{R} \right\}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$? si, basta prendere $r = u = 0$

Siano $w_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ -5u_1 & u_1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ -5u_2 & u_2 \end{pmatrix} \in W$

abbiamo $w_1 = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & 0 \\ -5u_1 - 5u_2 & u_1 + u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & 0 \\ -5(u_1 + u_2) & u_1 + u_2 \end{pmatrix}$

quindi $w_1 + w_2 \in W$ perché è del tipo $\begin{pmatrix} r & 0 \\ -5u & u \end{pmatrix}$

Sia $d \in \mathbb{R}$ $\quad d w_1 = \begin{pmatrix} dr_1 & 0 \\ -5du_1 & du_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr_1 & 0 \\ -5(du_1) & du_1 \end{pmatrix}$

quindi $d w_1 \in W$

Segue che W è un sottospazio. Per trovare una base separiamo i parametri r e u

$W = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5u & u \end{pmatrix} \mid r, u \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \mid r, u \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Notiamo che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ generano W, inoltre sono lin indip perché non sono l'uno multiplo dell'altro, quindi costituiscono una base di W

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

W ha dimensione 2, quindi se prendiamo anche solo due vettori di W che non siano l'uno multiplo dell'altro generano W, per cui non è possibile trovare i 3 vettori con le proprietà richieste.

c) $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} \right\}$

Un insieme di vettori si può completare ad una base se e solo se i vettori sono linearmente indipendenti. Quindi cerchiamo per quali k i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 2k \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 2 & 2k \end{pmatrix}$

sono lin indip. Passiamo alle coordinate rispetto alla base canonica

$(v_1)_e = (1, 0, 1, k)$

$(v_2)_e = (k, 0, k, 2k)$

$(v_3)_e = (2, k+1, 2, 2k)$

Applichiamo l'algoritmo di Gauss in modo diretto per trovare una base di $<(v_1)_e, (v_2)_e, (v_3)_e>$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & k \\ k & 0 & k & 2k \\ 2 & k+1 & 2 & 2k \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ R_2 - kR_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 2k-k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & k \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-k^2 \end{matrix}$$

se $k \neq -1$ e $k \neq 0$ e $k \neq 2$ ci sono 3 righe non nulle, quindi $<(v_1)_B, (v_2)_B, (v_3)_B>$ ha dimensione 3 e i 3 vettori sono lin indipendenti, se $k = -1$, $k = 0$, $k = 2$ i vettori sono lin dipendenti perché il sottospazio da essi generato ha dimensione 2

ESERCIZIO 2

La matrice associata a F_k è

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -3 & k \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & k & 0 \\ 2 & -6 & 2k \end{pmatrix}$$

F_k è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, F_k = \{0\}$

Per trovare $\mathrm{Ker}\, F_k$ risolvo il sistema lineare omogeneo associato ad A_k

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & k & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & k & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 2k & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ R_2-2R_1 \\ R_3+R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & k & 0 \\ 0 & 3 & -2k & 0 \\ 0 & k-3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ R_2/3 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & k & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & k-3 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ R_3-(k-3)R_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & k & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & 0 & k+\frac{2}{3}k(k-3) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & k & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2k^2-3k}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se $k \neq 0$ e $k \neq \frac{2}{3}$ 3 pivot, 3 incognite

c'è solo la soluz. nulla F_k è iniettiva

Se $k=0$ o $k=\frac{2}{3}$ 2 pivot, 3 incognite

infinite soluzioni F_k non è iniettiva

Scelgo $k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x-3y=0 \\ y=0 \end{cases}$$

infinite soluz. che dipendono da 1 parametro, ricavo x e y mentre z

è arbitrario ~~Ker $\overline{F}_0$ =~~

$y = 0$

$x = 3y = 0$ $\quad$ $\operatorname{Ker} \overline{F}_0 = \{(0,0,t) \mid t \in \mathbb{R}\} =$

$z = t$

$\langle (0,0,1) \rangle$

Una base di $\operatorname{Ker} \overline{F}_0$ è $\tilde{\beta} = \{(0,0,1)\}$

Per $a=0$ abbiamo che la matrice A_0 associata ad $\overline{F}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} \overline{F}_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\operatorname{Ker} \overline{F}_0 = \langle (0,0,1) \rangle$

~~scelgo una base di $\mathbb{R}^3$ nel m~~

Costruisco G nel modo seguente

$G(e_1) = (1,2,-1,2)$

$G(e_2) = (0,0,0,0)$

$G(e_3) = (-3,-3,0,6)$

G ha le proprietà volute

$\beta = \{ e_1, e_2 - e_3, e_3, e_1 + 5e_4 \}$

$$I_{\beta e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{e}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow[A_0]{F_0} \underset{e'}{\mathbb{R}^4} \xrightarrow[I_{e'\beta}]{id} \underset{\beta}{\mathbb{R}^4}$$

la matrice associata a $id \circ F_0$ è

$$I_{e'\beta} A_0 = I_{\beta e'}^{-1} A_0$$

Trovo l'inversa di $I_{\beta e'}$ con il metodo di Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_1 \leftrightarrow R_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_1 - 5R_4$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$A_{e\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3

La matrice associata a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$(-4,-4,0)$ è autovettore di T se e solo se $T(-4,-4,0)$ è un multiplo di $(-4,-4,0)$

$$T(-4,-4,0) = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $(-4,-4,0)$ è autovettore di autovalore -1

Cerchiamo gli autovalori di A

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} -6-x & 5 & -3 \\ 1 & -2-x & -3 \\ 0 & 0 & -7-x \end{pmatrix}$$

sviluppiamo secondo la terza riga (8)

$$P_A(x) = (-1)^{3+3}(-7-x)\det\begin{pmatrix} -6-x & 5 \\ 1 & -2-x \end{pmatrix} =$$

$$= (-7-x)\left[(-6-x)(-2-x)-5\right] = (-7-x)(x^2+8x+12-5) =$$

$$= (-7-x)(x^2+8x+7) = -(7+x)(x+1)(x+7)$$

Gli autovalori sono $\lambda = -7$ con molt. alg. 2

$\lambda = -1$ " " " 1

cerchiamo $V_{-7} = \ker(A+7I)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1 pivot 3 incognite, quindi le soluzioni dipendono da 2 parametri $m_g(-7) = 2 = m_a(-7)$

Sappiamo che $m_g(-1) \geq 1$ e $m_g(-1) \leq m_a(-1) = 1$

quindi $m_g(-1) = m_a(-1) = 1$

segue che T è diagonalizzabile

V_{-1} ha dimensione 1, sappiamo dal punto precedente che $(-4,-4,0) \in V_{-1}$, quindi

$V_{-1} = \langle(-4,-4,0)\rangle$

cerchiamo una base di V_{-7}

dobbiamo risolvere $x + 5y - 3z = 0$

y e z hanno valore arbitrario, ricaviamo x

$$V_{-7} = \{(3z - 5y, y, z) \mid \cancel{x}, z \in \mathbb{R}\}$$

per trovare una base poniamo $y = 1$ e $z = 0$

poi $y = 0$ e $z = 1$ e otteniamo

$$V_{-7} = \langle (-5, 1, 0), (3, 0, 1) \rangle$$

Una matrice diagonale D simile ad A

è $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

$P_1 = I_{\beta_1 \mathcal{E}}$ ove β_1 è una base di

autovettori $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ con

$v_1 \in V_{-1}$ $\quad v_2, v_3 \in V_{-7}$

$$I_{\beta_1 \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_2 = I_{\beta_2 \mathcal{E}}$ ove β_2 è una base di

autovettori $\beta_2 = \{v_1', v_2', v_3'\}$

con $v_1' \in V_{-1}$ $\quad v_2', v_3' \in V_{-7}$ ad esempio

$$I_{\mathcal{B}_2 \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -5 \\ -8 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1' = 2 v_1 \in V_{-1}$

—.—

ESERCIZIO 4

a) $23x \equiv_{102} 12$

la congruenza ha soluzioni $\Leftrightarrow$ mcd $(23, 102) = 1$

cerchiamo mcd $(23, 102)$

$\underline{102} = \underline{23} \cdot 4 + \underline{10}$

$\underline{23} = \underline{10} \cdot 2 + \underline{3}$

$\underline{10} = \underline{3} \cdot 3 + \underline{1}$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

mcd $(23, 102) = \underline{1}$ $\Rightarrow$ la congruenza ha sol.

$1 = \underline{10} - \underline{3} \cdot 3 = \underline{10} - 3(\underline{23} - \underline{10} \cdot 2) =$

$= 7 \cdot \underline{10} - 3 \cdot \underline{23} = 7 \cdot (\underline{102} - \underline{23} \cdot 4) - 3 \cdot \underline{23} =$

$7 \cdot \underline{102} - 31 \cdot \underline{23}$

$1 = 102 \cdot 7 - 31 \cdot 23$

11

passiamo alle classi resto

$[1]_{102} = [102]_{102} [7] - [31]_{102} [23]_{102}$

$\Rightarrow [1]_{102} = [-31]_{102} [23]_{102}$

Dall'equazione

$[23]_{102} [x]_{102} = [12]_{102}$

moltiplichiamo entrambi i membri per $[-31]_{102}$

e otteniamo $[x]_{102} = [-31]_{102} [12]_{102}$

quindi $x = -31 \cdot 12 + k\, 102$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) $[27]_{57}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{57} \Leftrightarrow$

$mcd(27, 57) = 1$

$57 = 27 \cdot 2 + 3$

$27 = 3 \cdot 9 + 0$

$mcd(27, 57) = 3 \neq 1$ quindi

$[27]_{57}$ non è invertibile