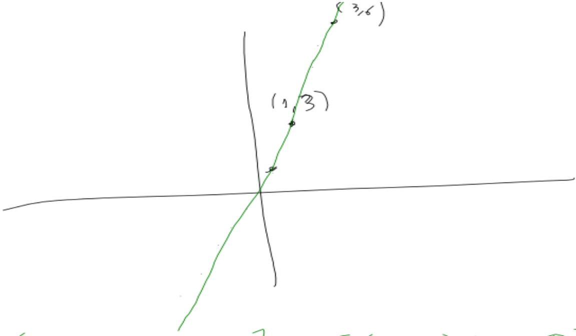
SOTTOSPAZIO GENERATO DA ALCUNI VETTORI

In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $v = (5,1)$ e ci chiediamo qual'è (se esiste) il più piccolo sottosp di $\mathbb{R}^2$ contenente $(5,1)$?

È la retta di equaz $y = \frac{1}{5}x$

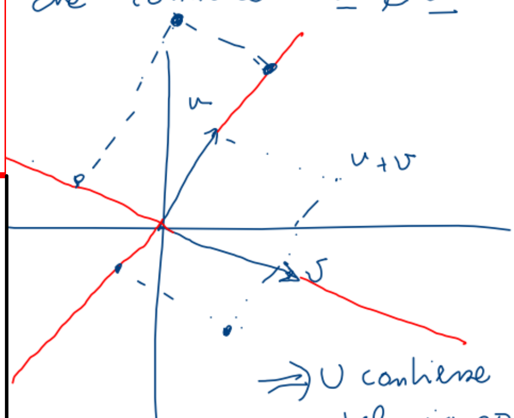


$\{\lambda(1,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} =$ retta di eq $y = 3x$

Se U è un sottospazio che contiene $(1,3)$ deve contenere anche tutti i vettori del tipo $\lambda(1,3)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Vale in generale: il più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che contiene ~~punto~~ vettore e punto dato (a,b) è la retta per $(0,0)$ e $v(a,b)$ di equazione $bx - ay = 0$

Qual'è il più piccolo sottosp U di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{u}$ e $\underline{v}$



U deve contenere tutti i multipli di $\underline{u}$ e di $\underline{v}$ e le loro somme

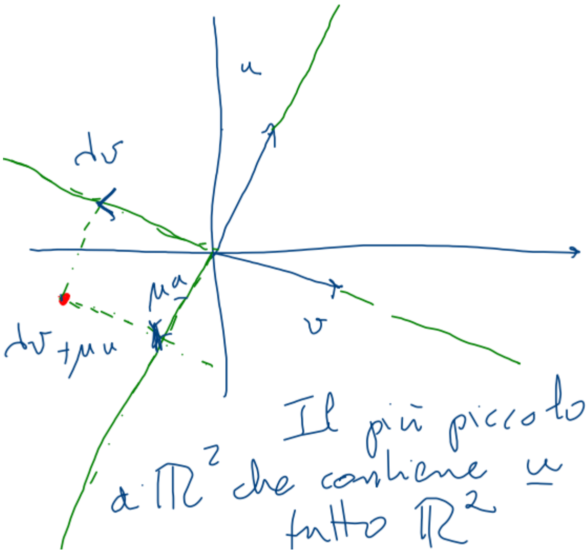
$\Longrightarrow U$ contiene tutti i punti del piano, cioè $U = \mathbb{R}^2$

Nota: Come conseguenza, abbiamo che gli unici sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono

1. $U = \{(0,0)\}$ sottosp. banale
2. le rette per $(0,0)$
3. tutto $\mathbb{R}^2$

Definizione 3.1.1 Siano V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vettori di V e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Il vettore $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ si dice *combinazione lineare* di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ con scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Per esempio $(1,1)$ è combinazione lineare di $(1,0)$ e $(0,1)$ con scalari $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$, ma anche combinazione lineare di $(2,1)$ e $(1,0)$ con scalari $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.



Il più piccolo sottosp. di $\mathbb{R}^2$ che contiene $\underline{u}$ e $\underline{v}$ è tutto $\mathbb{R}^2$

Dim algebrica: riesco sempre a scrivere ogni vettore del piano come $\lambda u + \mu u$

Sia (c,d) un punto qualsiasi del piano

voglio scrivere (c,d) come

$$(c,d) = \lambda(1,2) + \mu(3,-1)$$

deve succedere che

$$(c,d) = (\lambda, 2\lambda) + (3\mu, -\mu)$$

$$(c,d) = (\lambda + 3\mu, 2\lambda - \mu)$$

cioè $\begin{cases} c = \lambda + 3\mu \\ d = 2\lambda - \mu \end{cases}$ abbiamo c, d cerchiamo λ e μ

dobbiamo risolvere il sistema associato

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & c \\ 2 & -1 & d \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & c \\ 0 & -7 & d - 2c \end{array}\right)$$

2 pivot, 2 inc $\Rightarrow$ 1 sola soluz

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = \cancel{0}\ c \\ -7\mu = d - 2c \end{cases}$$ errore

$$\begin{cases} \mu = \frac{2}{7}c - \frac{1}{7}d \\ \lambda = -\frac{6}{7}c + \frac{3}{7}d \end{cases}$$

Definizione 3.1.2 Siano V uno spazio vettoriale e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. Il *sottospazio generato*[1] dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ è l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari, in simboli span$\{v_1, \dots v_n\}$

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

Abbiamo visto che, per esempio, il sottospazio generato da un vettore non nullo in $\mathbb{R}^2$ corrisponde a una retta, mentre il sottospazio generato dai due vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ di $\mathbb{R}^2$ è tutto $\mathbb{R}^2$.

♦ **Osservazione 3.1.3** Se V è uno spazio vettoriale e $\mathbf{v} \in V$, allora il sottospazio generato da $\mathbf{v}$ è l'insieme dei multipli di $\mathbf{v}$, cioè $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Inoltre, il sottospazio generato dal vettore nullo è il sottospazio banale, cioè contiene solo il vettore nullo: $\langle \mathbf{0} \rangle = \{\mathbf{0}\}$.

Definizione 3.1.4 Siano V uno spazio vettoriale e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. Si dice che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *generano* V, o che $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un *insieme di generatori* di V se $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$.

Nell'esempio visto inizialmente abbiamo che i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ generano lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ in quanto ogni vettore (a, b) di $\mathbb{R}^2$ si può scrivere come combinazione lineare di $(1, 0)$ e $(0, 1)$:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Proposizione 3.1.8 *Siano V uno spazio vettoriale, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vettori di V e $\mathbf{w}$ una loro combinazione lineare, cioè: $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$. Allora*

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle$$

Viceversa se

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle$$

allora $\mathbf{w}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Dimostrazione – Per mostrare la prima affermazione è sufficiente osservare che per ipotesi $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, $\Rightarrow Z$ contiene $v_1, \dots, w \Rightarrow$ quindi dalla Proposizione 3.1.5 segue che $Z = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio che contiene $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$, allora $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle \subseteq \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ sempre per la Proposizione 3.1.5. L'inclusione opposta è ovvia.

Per mostrare la seconda affermazione, basta notare che, siccome si ha che $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle$, segue in particolare che $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, cioè $\mathbf{w}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. □

Proposizione 3.1.5 *Siano V uno spazio vettoriale e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di vettori di V. Allora abbiamo che $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V. Inoltre se Z è un sottospazio vettoriale di V contenente $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$, allora $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \subseteq Z$, quindi $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.*

Dimostrazione – Per prima cosa notiamo che $\mathbf{0} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, infatti $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 0\mathbf{v}_n$. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Allora per definizione esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e $\beta_1, \dots, \beta_n$ tali che:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{w} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$$

e pertanto

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Inoltre se $k \in \mathbb{R}$

$$k\mathbf{v} = (k\alpha_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (k\alpha_n)\mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Questo dimostra che $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V.

(def subset Zcoen)

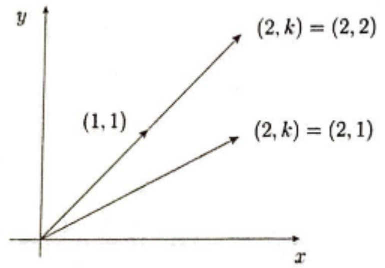
Vediamo ora che $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n \rangle$, sia inoltre Z un sottospazio vettoriale di V contenente $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$. Allora Z contiene anche $\lambda_1 \mathbf{v}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{v}_n$, perché essendo uno spazio vettoriale se contiene un vettore, contiene anche tutti i suoi multipli. Inoltre, poiché è chiuso rispetto alla somma, contiene anche $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$. Quindi $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \subseteq Z$. □

Esempi 3.1.6

Vogliamo determinare il sottospazio generato dai vettori $(1, 1)$, $(2, k)$ al variare del parametro k.

$$\langle (1,1), (2,k) \rangle = \{\lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,k) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + k\lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Dato che stiamo considerando vettori di $\mathbb{R}^2$ possiamo rappresentare i vettori tramite punti del piano cartesiano. Il disegno seguente illustra i vettori $(1, 1)$ e $(2, k)$ per i valori $k = 1$ e $k = 2$.



Vediamo subito che, se $k = 2$, allora i due punti giacciono sulla stessa retta per l'origine, perciò il più piccolo sottospazio che li contiene entrambi sarà appunto tale retta e cioè la retta di equazione $y = x$.

Se invece $k \neq 2$, i due punti giacciono su due rette distinte passanti per l'origine, quindi il più piccolo sottospazio che li contiene entrambi deve contenere tali rette, e anche la somma di due punti qualsiasi su tali rette, per cui, con un ragionamento analogo a quello fatto all'inizio di questo capitolo, si ha che il più piccolo sottospazio che contiene entrambi i punti di coordinate $(1, 1)$, $(2, k)$ è tutto il piano, cioè i vettori $(1, 1)$, $(2, k)$ generano $\mathbb{R}^2$.

Vediamo ora una dimostrazione algebrica di questo fatto. Sia (a, b) un generico vettore di $\mathbb{R}^2$, ci chiediamo quando (a, b) appartiene a $\langle (1,1), (2,k) \rangle$, cioè quando esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + k\lambda_2) = (a, b)$$

riuscire a scrivere (a,b) come comb lin di v_1 e v_2 $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (a,b)$

In altre parole dobbiamo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = a \\ \lambda_1 + k\lambda_2 = b \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & k & b \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & k-2 & b-a \end{array}\right)$ se $k \neq 2 \Rightarrow rr(A) = rr(A|b) =$ num inc $\Rightarrow$ identifica una sola sol

Lasciamo per esercizio la verifica che questo sistema nelle incognite λ_1, λ_2 ammette sempre soluzione se $k \neq 2$. Se invece $k = 2$ la matrice completa associata al sistema è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right)$$

che ridotta a scala diventa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-a \end{array}\right)$$

non riesco a scrivere il punto come comb lineare di v_1 e v_2

Dunque, se $a \neq b$ il sistema non ammette soluzioni, cioè si ha che $(a, b) \notin \langle (1,1), (2,2) \rangle$, se invece $a = b$ il sistema ammette soluzioni, cioè $(a, a) \in \langle (1,1), (2,2) \rangle$. Quindi $\langle (1,1), (2,2) \rangle$ è l'insieme dei vettori che hanno prima coordinata uguale alla seconda, cioè $\langle (1,1), (2,2) \rangle = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3.4.6 Per quali K si ha

$K^2x^2 + x + 1 \in \langle 2x^2 - x, -x^2 + 3x + 1 \rangle$

due polinomi sono uguali quando hanno gli stessi coeffs

$\subseteq \mathbb{R}_2[x] = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$

$v = K^2x^2 + x + 1$

$v_1 = 2x^2 - x$

$v_2 = -x^2 + 3x + 1$

$v \in \langle v_1, v_2 \rangle \iff$ esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$

$K^2x^2 + x + 1 = \lambda_1(2x^2 - x) + \lambda_2(-x^2 + 3x + 1)$

$K^2x^2 + x + 1 = (2\lambda_1 - \lambda_2)x^2 + (-\lambda_1 + 3\lambda_2)x + \lambda_2$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = K^2 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

viene un sist lin nelle incognite λ_1, λ_2 e ci chiediamo per quali K ammette soluzione

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & K^2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & K^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & K^2+2 \\ 0 & \cancel{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & K^2+2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-5R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & K^2-3 \end{array}\right)$$

$rz(A) = 2$

se $K^2 - 3 \neq 0$ cioè se $K \neq \pm\sqrt{3}$

$rz(A) = 2 \neq 3 = rz(A|b)$ $\Rightarrow$ non ci sono sol $\Rightarrow v \notin \langle v_1, v_2 \rangle$

se $K = \pm\sqrt{3}$ $rz(A) = rz(A|b) = 2 \Rightarrow \exists!$ sol

ha sol $\Rightarrow v \in \langle v_1, v_2 \rangle$

Definizione 3.2.1 Sia V uno spazio vettoriale. I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ si dicono *linearmente indipendenti* se per ogni combinazione lineare

arrivare ad un certo punto ove se cancello
un qualsiasi vettore,
il sottospazio generato cambia

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

abbiamo $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. In altre parole, l'unica combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ uguale al vettore nullo è quella con scalari tutti nulli. Diremo anche che l'insieme dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è linearmente indipendente[2].

I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se non sono indipendenti. In altre parole, i vettori dell'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sono linearmente dipendenti se esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tutti nulli tale che $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

$(1,1)$ $(1,3)$ sono lin indipendenti

Supponiamo $\lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,3) = (0,0)$

è vero che deve succedere che $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 3\lambda_2) = (0,0)$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$
$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$

dobbiamo risolvere il sist OMOGENEO

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

ci chiediamo se c'è solo la sol nulla

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad R_2 - R_1$$

$\lambda_1 = -\lambda_2 = 0$

$\lambda_2 = 0$

sì i vettori sono lin indip

Esercizio 3.3.2

Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che se un sys lin
non è omogeneo=>il set delle
sue sols non è mai un sottospazio
perchè non contiene il vect nullo

nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4. Si determini, se possibile, un insieme finito di generatori di W. per dim che è un sottospazio =>
• usare la def oppure
• insieme comb lin è un sottospazio

Svolgimento

La matrice completa associata al sistema è

l'insieme delle sol qualunque sistema omogeneo è sempre sottospazio

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

che, ridotta a scala con l'algoritmo di Gauss, diventa:

$$R_2 - 2R_1 \quad (A'|b') = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$rr(A) = 2 = rr(A|b)$ => ∞ sol che dipendono

Le soluzioni del sistema sono: $(x_3 - 4x_4, -x_3 + 5x_4, x_3, x_4)$, con $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

Per determinare i generatori di W separiamo le variabili libere. Quindi

$$\begin{aligned} W &= \{(x_3 - 4x_4, -x_3 + 5x_4, x_3, x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_3, -x_3, x_3, 0) + (-4x_4, 5x_4, 0, x_4) | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3 \underbrace{(1,-1,1,0)}_{v_1} + x_4 \underbrace{(-4,5,0,1)}_{v_2} | x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$<(1,-1,1,0), (-4,5,0,1)>$

$x_4 = s$
$x_2 = t - x_3$
$x_1 = x_3 - 4$

Ricordiamo che $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ possono assumere qualsiasi valore reale. A questo punto è chiaro che $W = \langle (1,-1,1,0), (-4,5,0,1) \rangle$, cioè i vettori $(1,-1,1,0)$, $(-4,5,0,1)$ generano W. insieme delle comb lineari generato da v_1 e v_2 => sottospazio

Trovare un insieme di generatori di W costituito da 4 vettori non nulli

$W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$

Basta prendere v_3 e v_4 comb lin di v_1, v_2

esempio $v_3 = 5v_2$ $\quad v_4 = 2v_1 - 7v_2$

(usiamo 3.1.8)

Proposizione 3.2.4 *In uno spazio vettoriale V i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri.*

Dimostrazione – Supponiamo che $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ siano linearmente dipendenti. Allora esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Dato che almeno uno degli scalari è non nullo, supponiamo $\alpha_k \neq 0$. Allora:

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\mathbf{v}_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\mathbf{v}_n$$

e dunque $\mathbf{v}_k$ è combinazione lineare degli altri vettori.

Viceversa supponiamo che esistano degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ tali che

$$\mathbf{v}_k = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

allora si ottiene che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

e almeno uno dei coefficienti è non nullo, quello di $\mathbf{v}_k$. Quindi i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti. □

le sol sono $\{(2\lambda_3, -3\lambda_3, \lambda_3, 0) | \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

a noi basta 1 soluzione non nulla ($\neq 0$ così $\exists \alpha_k \neq 0$)

ad esempio $(2, -3, 1, 0)$

quindi $2v_1 - 3v_2 + v_3 + 0v_4 = 0$

abbiamo e.g. $\lambda_3 \neq 0$ (ma non λ_4!) ricaviamo v_3

$v_3 = 3v_2 - 2v_1$

potevamo anche ricavare $v_2 = v_1 = \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3$

Esercizio Utilizzando la definizione stabilire se i vettori

$v_1 = (x^3 + 2x^2 + x)$ $\quad \lambda_1$
$v_2 = x^3 + 0x^2 - x + 1$ $\quad \lambda_2$
$v_3 = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ $\quad \lambda_3$
$v_4 = 2x^3 + 2x^2 + 2$ $\quad \lambda_4$

$\in \mathbb{R}_3[x]$

sono lin dip e in caso affermativo scriverne uno come comb. lin degli altri

Scriviamo $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_4 v_4 = 0$ e vediamo se i λ_i devono essere tutti $= 0$

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)x^3 + (2\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4)x^2 + (\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3)x + \lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$ => sys => matrice a scala => inf sols vs solo sol nulla => lin dip => uno di essi è comb lineare degli altri ⟸

(4.3.3) Le righe non nulle di una matrice a scala sono lin indip.

Verificarlo x casa su di un esempio

$$\begin{matrix} 1 & 7 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, 7\lambda_1, 3\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3, 7\lambda_1 + 9\lambda_2 + 4\lambda_3) = (0,0,0,0,0)$

$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0)$

Per inventare dei vettori lin indip è sufficiente inventarsi una matrice a scala

Prop. 3.2.5 $\underline{2}$ ~~vettori~~ vettori sono (lin dipendenti $\Leftrightarrow$ uno di essi è multiplo dell'altro)

assumo lin dip $\Rightarrow$

Per 3.2.4 uno di essi deve essere "combinazione lineare dell'altro", cioè suo multiplo

$\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ $\quad \{v, \lambda v\}$

3.2.8 ~~Se~~ da un insieme di vettori lin indip ne cancelliamo (i.e. prendere subset $\neq \emptyset$) qualcuno, otteniamo ancora un insieme di vettori lin indip (segue da 3.2.4)

idea: se abbiamo dei vett indip allora nessuno di essi è comb. lin degli altri e questo resta vero cancellandone un po'.