Definizione 4.1.3 Sia V uno spazio vettoriale. L'insieme $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ si dice **base** se:

1. I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti;

2. I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generano V.

Base canonica di $\mathbb{R}_n[x]$

$\beta = \{x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x, 1\}$

in $\mathbb{R}^n$ base canonica $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

posto i

$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ $\quad e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$

$e_n = (0, 0, \dots, 1)$

gli e_i sono indip perché sono una matrice a scala le righe di non nulle

Prop. 4.1.6

Se uno spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ è generato da un numero finito di vettori, allora ha una base

Dim: Sia $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$

se $v_1, \dots, v_n$ sono lin indip fine per def di base

perché $\{v_1, \dots v_n\}$ sono una base

se sono dipendenti uno di essi diciamo v_k è comb. lin degli altri

$V = \langle v_1, \dots, \cancel{v_k}, \dots, v_n \rangle$ possiamo cancellare v_k e si ricomincia

se i vettori restanti sono indip sono una base, altrimenti possiamo cancellarne uno. Dopo un numero finito di passi ci fermiamo ed abbiamo una base

Esempio 4.1.5

Siano dati in $\mathbb{R}_3[x]$ i vettori:

$$x^3, x^2, 2, 5, x+2, 3x, -7x, 2x^3$$

Vogliamo trovare una base per il sottospazio vettoriale da essi generato. La procedura che seguiamo non è quella standard, ma solo una esemplificazione della procedura descritta nella Proposizione 4.1.2. Innanzitutto vediamo subito che 5 è combinazione lineare di 2, in quanto è un suo multiplo: $5 = (5/2)2$. Dunque possiamo eliminare il vettore 5 (in virtù della Proposizione 3.1.8). Allo stesso modo possiamo eliminare $-7x = (-7/3)3x$ e anche $2x^3 = 2(x^3)$. Dunque abbiamo:

$$W = \langle x^3, x^2, 2, 5, x+2, 3x, -7x, 2x^3 \rangle = \langle x^3, x^2, 2, x+2, 3x \rangle$$

Ora notiamo che $x + 2 = 1/3 \cdot 3x + 2$, dunque:

$$W = \langle x^3, x^2, 2, x+2, 3x \rangle = \langle x^3, x^2, 2, 3x \rangle$$

Per verificare che questi vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base per W dobbiamo mostrare che l'equazione:

$$ax^3 + bx^2 + 2c + 3dx = 0$$

è soddisfatta soltanto per $a = b = c = d = 0$, ma cio è chiaro, poiché un polinomio è identicamente nullo se e solo se sono nulli tutti i suoi coefficienti. Perciò $\{x^3, x^2, 2, 3x\}$ è una base di W. Lasciamo dimostrare per esercizio allo studente che $W = \mathbb{R}_3[x]$. Vedremo

Teorema 4.1.4 *Siano $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ vettori in uno spazio vettoriale V.*

1. *$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V se e solo se è un insieme minimale di generatori di V.* (cancello uno => non genera più V)

2. *$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V se e solo se è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti.* aggiungo => non più ind

Dimostrazione – 1. Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, allora per definizione è un insieme di generatori. Vediamo ora che è anche un insieme minimale rispetto a questa proprietà. Infatti se togliamo a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un qualunque vettore, allora lo spazio vettoriale generato cambia. Ciò accade in quanto altrimenti, per la Proposizione 3.1.8, un vettore tra i $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sarebbe combinazione lineare degli altri, mentre sappiamo che tali vettori sono linearmente indipendenti per ipotesi. Viceversa, se consideriamo un insieme minimale di generatori, allora è una base in quanto è costituito da vettori linearmente indipendenti. Infatti per la minimalità, abbiamo che, togliendo uno qualsiasi dei generatori, i rimanenti non generano più lo spazio vettoriale dato e dunque per le Proposizioni 3.1.8 e 3.2.4, ciò significa che nessuno è combinazione lineare degli altri. $\Leftarrow$ => assumo minimale, devo dim ind, assumo dip e procedo a dim assurdo, se dip => non min

2. Se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V, per definizione è un insieme di vettori linearmente indipendenti (ed è anche massimale rispetto a questa proprietà. Infatti) poiché $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generano V, avremo che, se $\mathbf{w} \in V$, allora ($\Rightarrow$) assumo ind e gen devo dim loro max. assumo che non siano max => RAA se non max => $\exists$ $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ ind ☆ ☆ => non riesco a esprimere v_{n+1} come comb => $v_1, \dots v_n$ NON gen => assurdo

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w} \rangle = V$$

e dunque per la Proposizione 3.1.8 $\mathbf{w}$ è necessariamente una combinazione lineare di $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, e dunque i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti per la Proposizione 3.2.4.

Viceversa, se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti, se aggiungiamo un qualunque altro vettore $\mathbf{v}$, ottieniamo un insieme di vettori linearmente dipendenti, cioè esistono scalari non tutti nulli $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che

$\Leftarrow$ assumo max. ind. devo dim che generano => assurdo => assumo che non generino => $\exists v$ che è comb di più vettori ind => assurdo con max

$$\alpha\mathbf{v} + \alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$$

Notiamo che deve essere $\alpha \neq 0$, altrimenti i vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sarebbero linearmente dipendenti. Allora abbiamo che

$$\mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha}\mathbf{v}_n$$

quindi $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Poiché abbiamo scelto $\mathbf{v}$ arbitrariamente, abbiamo che $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ genera V. □

Teorema del completamento 4.2.1 *Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale V finitamente generato. Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ è una base di V (sappiamo che ne esiste sempre almeno una), allora $m \leq n$ e possiamo sempre aggiungere a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ $\underbrace{n - m \text{ vettori di } \mathcal{B}}_{\text{lin ind con gli altri}}$, in modo da ottenere una base di V.* (Poi bisogna controllare che generino $\forall v \in V$

Proposizione 4.2.2 *Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi.*

Dimostrazione – Siano $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ due basi di V. Poiché i vettori di $\mathcal{B}_1$ sono linearmente indipendenti e $\mathcal{B}_2$ è una base, per il Teorema del completamento abbiamo che $n \leq m$. Scambiando i ruoli di $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ abbiamo $m \leq n$, quindi $n = m$. □

Definizione 4.2.3 Il numero degli elementi di una base di uno spazio vettoriale si dice *dimensione* dello spazio vettoriale e si indica con $\dim(V)$. Quando tale numero è finito, cioè V è generato da un numero finito di vettori, V si dice di *dimensione finita*.

$\mathbb{R}^n$ ha dim n $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$

$M_{m,n}(\mathbb{R})$ ha dim mn

con base $\beta = \{e_{ij} \mid i = 1, \dots m, \ j = 1, \dots n\}$

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_n[x]$ ha dimensione $n+1$

$= \{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots a_0 \in \mathbb{R}\}$

Proposizione 4.2.6 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un insieme di n vettori di V. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a => b e a => c per def base

a) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base di V.*

b) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *sono linearmente indipendenti.*

c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ *generano V.*

Dim:
Vediamo b) $\Longrightarrow$ c). Sia $W = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Si ha che $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di W, quindi W ha dimensione n, allora per la Proposizione 4.2.4 b) si ha che $W = V$, dunque i vettori dati generano V. $W \subseteq V$, $\dim(V) = \dim(W) \Rightarrow V = W$

c => a
assumo che generino e dim n,
devo dim che sono ind.
procedo per assurdo e assumo che siano dip => $\exists$ un insieme di vettori < n che generano (se rimuovo comb lin, spazio non cambia) ind. ma questo va contro che basi spazio vect formano stessa dim => assurdo => qed

---

Definizione 4.2.9 Gli scalari $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ definiti nel Teorema 4.2.8 si dicono le *componenti* di $\mathbf{v} \in V$ nella base $\mathcal{B}$ o anche le *coordinate* di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ e verranno indicate con la notazione $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

ordinata

Esempio 4.2.10

A titolo esemplificativo, dimostriamo per esercizio che $\mathcal{B} = \{(1,-1), (2,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e determiniamo le coordinate di $\mathbf{v} = (-3,1)$ rispetto a questa base.

Chiaramente i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti in quanto $(2,0)$ non è multiplo di $(1,-1)$. A questo punto, poiché $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, sappiamo già che $\mathcal{B}$ è una base. Però è istruttivo dimostrare direttamente che è un insieme di generatori. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$(x,y) = a(1,-1) + b(2,0) = (a + 2b, -a)$$

=> messo a sistema $\begin{cases} \_\_ = x \\ \_\_ = y \end{cases}$

dovrà dunque essere $a = -y$ e, pertanto $b = \frac{x+y}{2}$ e ciò è sempre possibile, dunque $\mathcal{B}$ genera $\mathbb{R}^2$. In particolare $(-3,1) = (-1)(1,-1) + (-1)(2,0)$, quindi le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (-1,-1)$ vs $(v)_e = (-3,1)$

$(-3,1) \in \langle (1,-1), (2,0), (1,1) \rangle$

cerchiamo d_1, d_2, d_3 tali che

$(-3,1) = d_1(1,-1) + d_2(2,0) + d_3(1,1)$

$d_1 + 2d_2 + d_3 = -3$

$-d_1 + d_3 = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$d_1 + 2d_2 + d_3 = -3$

$d_2 + d_3 = -1$

infinite sol che dipendono da un parametro

d_1, d_2, d_3 non sono unici (S non è una base)

Proposizione 4.2.4 *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora:*

sempre su dim finita salvo avviso contrario

a) $\dim(W) \le \dim(V)$;

b) $\dim(W) = \dim(V)$ *se e solo se* $V = W$.

Dim 1) Sia $\dim V = n$ $\dim W = m$

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e sia $\hat{\mathcal{B}} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$w_1, \dots, w_m \in W \subseteq V$ sono lin indip.

=> per il teorema del completamento $m \le n$

Dim 2) $\Leftarrow$ ovvia

$\Rightarrow$ assumo $\dim(W) = \dim(V)$ (H1)

$w_1, \dots, w_n$ vettori lin ind $\in V$ (poiché sottospazio + base di W)

da H1 + th completamento so che servono 0 vettori lin ind per diventare base di V della base => Qed

---

Teorema 4.2.8 *Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base ordinata per lo spazio vettoriale V (cioè abbiamo fissato un ordine nell'insieme dei vettori numerandoli) e sia $\mathbf{v} \in V$. Allora esiste ed è unica la n-upla di scalari $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tale che*

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

(altrimenti conti sbagliati nel calcolo base :C)

Dimostrazione – Essendo $\mathcal{B}$ un sistema di generatori, ogni $\mathbf{v} \in V$ si scrive come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}$, cioè esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Dimostriamo l'unicità degli α_i. Supponiamo che sia anche

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n$$

Sottraendo membro a membro queste due equazioni si ottiene

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{v}_n$$

da cui $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ in virtù della lineare indipendenza dei vettori di $\mathcal{B}$, dunque $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$. □

generano => esistenza ; ind => unicità

L'insieme vuoto è un particolare spazio vettoriale

FALSO, appartiene almeno il vettore nullo

I vettori (0,0,0) e (1,0,1) sono linearmente indipendenti

FALSO se ad un insieme di vettori appartiene 0 => sono sempre lin dip

R_3[x] ha dimensione 4

5 vettori di R^4

Generano R^4	39%	15
Potrebbero non generare R^4 ← e.g. multipli	47%	18
Sono linearmente dipendenti ←	71%	27
Potrebbero essere linearmente indipendenti	34%	13

USO DIRETTO ALGO GAUSS

Proposizione 4.3.1 *Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, le operazioni elementari di riga non cambiano il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori riga di A.*

Dimostrazione – Ricordiamo che le operazioni elementari di riga (Definizione 1.4.2) sono:

3.1.5 . . .
V. Inoltre se Z è un sottospazio vettoriale di V contenente $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$, allora $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \subseteq Z$, quindi $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. . . .

(a) scambio di due righe;

(b) moltiplicazione di una riga per un numero reale diverso da 0;

(c) sostituzione della riga i-esima con la somma della riga i-esima e della j-esima moltiplicata per un numero reale α qualsiasi.

È immediato verificare che l'enunciato è vero per le operazioni di tipo (a) e (b). Per le operazioni di tipo (c), è sufficiente mostrare che se R_i e R_j sono due vettori riga di A e $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha che $\langle R_i, R_j + \alpha R_i \rangle = \langle R_i, R_j \rangle$. Si ha ovviamente che $R_i, R_j + \alpha R_i \in \langle R_i, R_j \rangle$, quindi $\langle R_i, R_j \rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente $R_i, R_j + \alpha R_i$. Allora per la Proposizione 3.1.5 si ha che $\langle R_i, R_j + \alpha R_i \rangle \subseteq \langle R_i, R_j \rangle$.

$R_j = -\alpha R_i + 1(R_j + \alpha R_i) = R_j \Rightarrow$ comb lineare

L'inclusione $\langle R_i, R_j \rangle \subseteq \langle R_i, R_j + \alpha R_i \rangle$ si dimostra in modo analogo tenendo conto del fatto che $R_i = (R_i + \alpha R_j) - \alpha R_j$, quindi $R_i \in \langle R_i, R_j + \alpha R_i \rangle$. □

Proposizione 4.3.3 *Se una matrice A è a scala per riga, i suoi vettori riga non nulli sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione – Siano $R_1, \dots, R_k$ le righe non nulle di A e siano $a_{1j_1}, \dots, a_{kj_k}$ i rispettivi pivot. Sia ora $\lambda_1 R_1 + \dots + \lambda_k R_k = \mathbf{0}$, vogliamo dimostrare che $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Nel vettore $\lambda_1 R_1 + \dots + \lambda_k R_k$ l'elemento di posto j_1 è $\lambda_1 a_{1j_1}$, l'elemento di posto j_2 è $\lambda_1 a_{1j_2} + \lambda_2 a_{2j_2}$, e così via, sino all'elemento di posto j_k, che è $\lambda_1 a_{1j_k} + \lambda_2 a_{2j_k} + \dots + \lambda_k a_{kj_k}$. Quindi dal fatto che $\lambda_1 R_1 + \dots + \lambda_k R_k = \mathbf{0}$ segue che:

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{1j_1} = 0 \\ \lambda_1 a_{1j_2} + \lambda_2 a_{2j_2} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1j_k} + \lambda_2 a_{2j_k} + \dots + \lambda_k a_{kj_k} = 0 \end{cases}$$

Poiché $a_{1j_1} \neq 0$, dalla prima equazione otteniamo $\lambda_1 = 0$. Sostituendo $\lambda_1 = 0$ nella seconda equazione e, poiché $a_{2j_2} \neq 0$, si ottiene che $\lambda_2 = 0$, e così via. Dopo k passi abbiamo che anche $\lambda_k = 0$, dunque $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Ciò dimostra che le righe $R_1, \dots, R_k$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti.

Queste proprietà (teoremi di prima) ci permettono di risolvere vari problemi in $\mathbb{R}^n$

1) Trovare una base per il sottospazio generato da $v_1, \dots v_n$ e di conseguenza

2) Stabilire se $v_1 \dots, v_n$ sono indipendenti

Inoltre

3) Completare un insieme di vettori lin indipendenti ad una base di $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^4$

$v_1 = (1, 1, 3, 0)$

$v_2 = (2, 2, 5, 1)$

$v_3 = (1, 1, 4, -1)$

Cerchiamo una base per $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

mettiamo i vettori in riga o meglio costruiamo la matrice che ha per righe v_1, v_2, v_3

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{matrix} \quad \begin{array}{c} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix} \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 + R_2 \end{array} \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{array}{c} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \\ \end{array}$$

Per il teorema 4.3.1

$U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \underline{0} \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle$

"le righe nulle non contano"

ho scoperto che $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ generano U

Inoltre $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ sono le righe non nulle di una matrice a scala per il teo 4.3.3 sono lin indip, quindi sono una base di U

v_1, v_2, v_3 generano U che ha dimensione 2

$\Rightarrow$ sono lin dipendenti

$v_1 = (1,1,3,0)$ ALTRO ESERCIZIO

Sia $W = \langle v_1, v_2 \rangle$

$v_2 = (2,2,0,7)$

trovare una base di W e completarla ad una base di $\mathbb{R}^4$

$W \subseteq \mathbb{R}^4$ ma $\dim W \neq 4$

W è generato da v_1, v_2

v_1, v_2 sono indip (perché non sono uno multiplo dell'altro) $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ è base di W. W ha dim 2

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 7 \end{matrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{\text{Gauss}} \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 & \tilde{v}_1 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & \tilde{v}_2 \end{matrix}$$

anche $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ sono una base di W più facile da completare, perché basta aggiungere i pivot mancanti

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 0 & \tilde{v}_1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & u_1 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & \tilde{v}_2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & u_2 \end{matrix}$$

$\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, u_1, u_2$ sono lin indip per il TEOREMA 4.3.3

$\Rightarrow \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, u_1, u_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ 4.2.6

Se avessimo voluto completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$?

sarebbe bastato prendere anche in questo caso u_1, u_2.

Dim: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle v_1, v_2, u_1, u_2 \rangle = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, u_1, u_2 \rangle = \mathbb{R}^4$ lo sappiamo da prima

$\Rightarrow v_1, v_2, u_1, u_2$ generano $\mathbb{R}^4$

$\xRightarrow{4.2.6} \{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ sono una base

Nota: funziona in generale

prendo $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$

se sono lin dip non posso completarli ad una base

se sono lin indip posso complet. ad una base con Gauss

Osservazione 4.3.6

Supponiamo che V sia sp. vett di dimensione n con base ordinata $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

Per il teorema 4.2.8 ad ogni $v \in V$ possiamo associare le sue coordinate $(v)_\beta$ rispetto alla base β

la mappa $V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$v \longmapsto (v)_\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

con $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

è un isomorfismo di spazi vettoriali cioè è una biiezione che "rispetta" la struttura di spazio vettoriale

$(v+u)_\beta = (v)_\beta + (u)_\beta$ (*)

$(\lambda v)_\beta = \lambda (v)_\beta$

Morale: conviene lavorare in $\mathbb{R}^n$; poi si ritorna a V anziché in V

Esempio in $\mathbb{R}_3[x]$ determinare una base del sottospazio generato da:

$x^3 + x^2 + 3x = u_1$

$2x^2 + 2x^2 + 5x + 1 = u_2$

$x^3 + x^2 + 4x - 1 = u_3$

Conviene passare alle coordinate rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}_3[x]$ e lavorare in $\mathbb{R}^4$

$(u_1)_e = (1, 1, 3, 0)$

$(u_2)_e = (2, 2, 5, 1)$

$(u_3)_e = (1, 1, 4, -1)$

abbiamo già fatto questo esercizio fra ieri e oggi

ogni $v_1, \dots, v_n \in V$ e per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Da questo segue che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le loro coordinate $c(v_1), \dots, c(v_n)$, viste come vettori in $\mathbb{R}^n$. Analogamente, w è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ se e solo se $c(w)$ è combinazione lineare di $c(v_1), \dots, c(v_n)$, e $\{w_1, \dots, w_k\}$ è una base di $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ se e solo se $\{c(w_1), \dots, c(w_k)\}$ è una base di $\langle c(v_1), \dots, c(v_n) \rangle$. Quindi, anziché operare sui vettori, possiamo operare sulle loro coordinate, e poi da esse risalire nuovamente ai vettori. Ciò ci dà modo di utilizzare tutte le tecniche che abbiamo visto per $\mathbb{R}^n$ anche per uno spazio vettoriale qualsiasi, purché ovviamente finitamente generato. Naturalmente, per poter fare questo, è sempre necessario *fissare una base*, altrimenti non è possibile parlare di coordinate come n-uple univocamente associate a ogni vettore. In

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k^2 & 2k+4 \end{pmatrix}$ appartiene a U e scelto uno di tali valori si determinino le coordinate di $\mathbf{v}_k$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

② CON GAUSS IN MODO DIRETTO

Passiamo alle coordinate

$(v_k)_\mathcal{E} = (2, k, k^2, 2k+4) = w_k$

Passiamo in $\mathbb{R}^4$

$\underbrace{v_k \in U}_{\text{matrici}} \iff \underbrace{w_k \in \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \rangle}_{\text{in } \mathbb{R}^4}$

$\iff \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, w_k \rangle = \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \rangle$

$\iff \langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, w_k \rangle$ ha dim 2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & k^2 & 2k+4 \end{matrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & k^2-2 & 2k-2 \end{matrix}$$

$R_3 - kR_2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-k-2 & k-2 \end{matrix}$$

$\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, w_k \rangle$ ha dim 2 ultima riga nulla (cosi è comb lineare)

$\iff (0, 0, k^2-k-2, k-2) = (0,0,0,0)$

deve succedere che $\begin{cases} k-2=0 \\ k^2-k-2=0 \end{cases}$ $\quad k=2$, $\quad k=2$ o $k=-1$

quindi $k=2$

cioè $v_k \in U \iff k=2$

col Primo metodo

$$\begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k^2-k-2 \\ 0 & 0 & k-2 \end{array}\right)$$

$rr(A') = 2$

la matrice non è a scala

Noto che $k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$

$(k+a)(k+b) = k^2 + (a+b)k + ab$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & (k-2)(k+1) \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - (k+1)R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

se $k \neq 2$ $\quad rr(A') = 2 \neq rr(A'|b') = 3$

nessuna sol $\Rightarrow$ non trovo d_i

$\Rightarrow v_k \notin U$

se $k=2$ $\quad rr(A') = rr(A|b') = 2$

1 sola soluzione $v_k \in U$

quando $k=2$ cerchiamo le coord di v_k, che sono esattamente (d_1, d_2)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$d_1 = 2$, $d_2 = 2$ le coord sono $(2,2)$

In mancanza di idee anche se la matrice non è a scala

se non noto che $k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$

posso dire: se $k \neq 2$ sicuramente

$rr(A'|b') = 3 \Rightarrow$ non ci sono sol

$\Rightarrow v_k \notin U$

se $k=2$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4-2-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \overset{0}{\shortparallel}$$

$rr(A) = rr(A'|b') = 2$ una sol $v_k \in U$ poi come prima

$\boxed{\text{Digressione}}$ con un'altra matrice

DISTINGUO 2 CASI

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

① se $k^2 \neq 0$ allora $R_3 \to \frac{1}{k^2} R_3$

OBIETTIVO: RIDURLA A SCALA

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - (k-1)R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rr(A') = 2$

$rr(A'|b') = 3$

non ci sono solut.