DETERMINANTE

Sia A una matrice quadrata, cioè una matrice $n \times n$. Ad essa vogliamo associare un numero reale, detto il *determinante* di A, che si calcola a partire dagli elementi della matrice A.

Definizione 7.1.1 La *matrice identità* o *matrice identica* di ordine n, è la matrice $n \times n$ avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali al numero 1, mentre i restanti elementi sono uguali a 0. Solitamente viene indicata con I_n, o con I se non ci sono ambiguità.

Per esempio, la matrice identità di ordine 3 è

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$

$\det(A)$ è un numero reale

La matrice $I \in M_n(\mathbb{R})$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è

tale che $AI = IA = A \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$

Definizione 7.1.2 Il *determinante* è una funzione che a ogni matrice quadrata A di ordine n associa un numero reale, indicato con $\det(A)$, in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. Se la riga j-esima di A è somma di due elementi $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$, allora il determinante di A è la somma dei determinanti delle due matrici ottenute sostituendo alla riga j-esima di A rispettivamente $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
2. Se la riga j-esima di A è il prodotto $\lambda\mathbf{u}$, ove $\mathbf{u}$ è un elemento di $\mathbb{R}^n$ e λ è uno scalare, allora il determinante di A è il prodotto di λ e del determinante della matrice ottenuta sostituendo la riga j-esima di A con $\mathbf{u}$. $(\lambda \neq 0)$
3. Se due righe di A sono uguali, allora il determinante di A è nullo.
4. Se I è la matrice identità, allora $\det(I) = 1$.

$\det \quad M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \longrightarrow \det(A)$

Proprietà 1 $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$R_2 = (7,-1,-3) = \underset{u}{(3,5,-1)} + \underset{v}{(4,-6,-2)}$

$\det A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

e.g.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

allora

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \det(I) = 6$$

7.1.3

Si dimostra che c'è una e una sola funzione $\det \; M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ con le proprietà 1-2-3-4 e che le proprietà valgono anche sulle colonne (e.g. se una matrice ha due colonne uguali => det 0)

Proposizione 7.1.4 *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n.*

(a) *Se B è ottenuta da A scambiando due righe, allora:*

$$\det(A) = -\det(B)$$

(b) *Se B è ottenuta da A sommando a una riga di A una qualunque combinazione lineare delle altre righe, allora:*

$$\det(B) = \det(A)$$

(c) *Se A è una matrice triangolare superiore (o inferiore), cioè i coefficienti al di sotto (rispettivamente al di sopra) della diagonale principale sono tutti uguali a zero, allora il determinante di A è il prodotto degli elementi che si trovano sulla sua diagonale principale.*

Determinante di una matrice 2×2

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ supponiamo $a \neq 0$

Regola di Sarrus

$\boxed{\det M_3 \Rightarrow \text{somma prodotti diagonali} - \text{“ sec}}$

$\boxed{\begin{matrix} \det A = -cb = \underset{0}{\overset{\parallel}{a}}d - bc \\ \text{in ogni caso } \det A = ad - bc \end{matrix}}$

$R_2 - \frac{c}{a}R_1 \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix}$

$\det A = a\left(d - \frac{cb}{a}\right) = ad - bc$

se $a = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix} A' \quad \det A' = cb = -\det A$

Prop. (c) $\quad$ Se $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Una matrice è ancora triangolare se nella diagonale principale compaiono degli zeri?

Matteo Manuelli - matteo.manuelli@studio.unibo.it
11:00
si rebecca

triangolare superiore

$\det A = 5 \cdot \sqrt{2}\,(-9)\,2$

Se $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -9 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ triang inferiore

$\det(A) = -4 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 8$

CALCOLO DEL DET: METODO REC

Definizione 7.3.1 Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata di ordine n (cioè con n righe e n colonne). Indichiamo con A_{ij} la sottomatrice quadrata di A ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di A. Allora A_{ij} si dice un *minore* di A di ordine $n-1$.

Teorema di Laplace 7.3.3 *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se A ha ordine 1, cioè $A = (a_{11})$ ha una riga e una colonna, poniamo*

$$\det(A) = a_{11}$$

2. *Supponiamo ora di saper calcolare il determinante delle matrici di ordine $n-1$. Sia*

gamma

$$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

allora

(prima riga)

$$\det(A) = a_{11}\Gamma_{11} + a_{12}\Gamma_{12} + \ldots + a_{1n}\Gamma_{1n} = \sum^{n} a_{1k}\Gamma_{1k}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ det $\qquad \Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$\det A = a\Gamma_{11} + b\Gamma_{12} = a(-1)^{1+1} d + b(-1)^{1+2} c$

$= ad - bc$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$a_{11}\Gamma_{11} + a_{12}\Gamma_{12} + a_{13}\Gamma_{13}$

$\Gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$1 \cdot (-1)^{1+1} \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$+ 0 \cdot (-1)^{1+3} \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-7) - 2(2) =$

$= -11$

E possibile sviluppare il determinante secondo una qualsiasi riga o colonna.
Lo sviluppo di $\det(A)$ secondo la r-esima riga è dato da:

$$\det(A) = a_{r1}\Gamma_{r1} + a_{r2}\Gamma_{r2} + \ldots + a_{rn}\Gamma_{rn} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\Gamma_{rk}$$

Lo sviluppo di $\det(A)$ secondo la s-esima colonna è dato da:

$$\det(A) = a_{1s}\Gamma_{1s} + a_{1s}\Gamma_{2s} + \ldots + a_{ns}\Gamma_{ns} = \sum_{k=1}^{n} a_{ks}\Gamma_{ks}$$

Si può dimostrare (si veda l'appendice a questo capitolo) che in generale, se si sviluppa il determinante di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ secondo una qualsiasi riga o colonna, si ottiene sempre lo stesso numero, quindi conviene sviluppare secondo la riga o la colonna con il maggior numero di zeri.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -9 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

sviluppiamo secondo la prima colonna

$\det A = 0\Gamma_{11} + 7\Gamma_{21} + 0\Gamma_{31} + 0\Gamma_{41} =$

Laplace 3ª colonna

$= 7(-1)^{1+2} \det\begin{pmatrix} 1 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -7\left[0\Gamma_{13} + 2\Gamma_{23} + 0\Gamma_{33}\right]$

$= -7 \cdot 2(-1)^{2+3} \det\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 33$

TEOREMA DI BINET 7.3.5

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

nota $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

$\det(A+B) = 66 \neq 2 + 45 = \det A + \det B$

INVERSA DI UNA MATRICE

se $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$ esiste b tale che $ab = 1$

$b = 1/a$

Nota $I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ è l'elemento neutro

rispetto al prodotto tra matrici $n\times n$

$$\begin{pmatrix}3&5\\-7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&5\\-7&2\end{pmatrix}$$

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e' l'inversa di A,

se esiste, è una matrice $B \subset M_{n,n}(\mathbb{R})$

tale che $AB = BA = I$

una tale B, se esiste, si indica con A^{-1}

e si dice che A è invertibile e A^{-1} è

l'inversa di A

Def Una matrice A $n\times n$ si dice

invertibile se esiste $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

tale che $AB = BA = I$ **A e B sono una l'inversa dell'altra**

TEOREMA $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ **7.4.2**

Dim: $\Rightarrow$ Sia A invertibile e sia B

tale che $AB = BA = I$ (per def di invertibile)

per il teorema di Binet

$1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

inoltre abbiamo che $\det(A^{-1}) = \det(B) = \frac{1}{\det(A)}$

$\Leftarrow$ Supponiamo $\det A \neq 0$

e consideriamo la matrice B tale che

$$b_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{1}{\det A}\det A_{ji}$$

allora B è l'inversa di A

Calcoliamo dell' e' inversa di

$$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&1\\0&1&-2\end{pmatrix} \qquad \det A = -11$$

calcoliamo B $\qquad b_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{1}{\det A}\det A_{ji}$

$b_{11} = \frac{1}{-11}\det\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix} = \frac{7}{11}$

$b_{12} = +\frac{1}{11}\det\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix} = -\frac{4}{11}$

"quando facciamo l'algo di Gauss, le tre op fondamentali non annullano il det $\Rightarrow$ $\det A$ sempre $\neq 0$ $\Rightarrow$ se $\det A$ era $\neq 0$ rimane $\neq 0$"

Algoritmo di Gauss per il calcolo dell'inversa. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det A \neq 0$

scriviamo $M = A \mid I$ applichiamo Gauss

a M fino ad ottenere $I \mid B$

B è l'inversa di A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\-1&3&1&0&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right) \quad R_2+R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&5&1&1&1&0\\0&1&-2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$R_2 \leftarrow R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&5&1&1&1&0\end{array}\right) \quad R_3-5R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&0&11&1&1&-5\end{array}\right)$$

tutti i elem $\neq 0$

ora dobbiamo fare in modo di avere tutti 1 sulla diagonale

se qui ci fosse stato 5 $\Rightarrow$ avremmo fatto anche $R_1 - 5R_3$

$$\frac{1}{11}R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&-2&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{11}&\frac{1}{11}&-\frac{5}{11}\end{array}\right)$$

Si fa Gauss, utilizzando l'ultimo pivot per "annullare" tutti gli elementi dell'ultima colonna sopra di esso)

$$R_2+2R_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{2}{11}&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\\0&0&1&\frac{1}{11}&\frac{1}{11}&-\frac{5}{11}\end{array}\right)$$

$$R_1-2R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&+\frac{7}{11}&-\frac{4}{11}&-\frac{2}{11}\\0&1&0&\frac{2}{11}&\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\\0&0&1&\frac{1}{11}&\frac{1}{11}&-\frac{5}{12}\end{array}\right)$$

Nota: Supponiamo di avere due matrici A e B tali che $AB = I$ allora A e B sono l'una l'inversa dell'altra. In particolare $BA = I$

$AB = I \Rightarrow \det(AB) = \det(I)$

(Binet) $\Rightarrow \det(A)\det(B) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$

$\Rightarrow A$ è invertibile esiste A^{-1}

$AB = I \Rightarrow \underbrace{A^{-1}}AB = \underbrace{A^{-1}}I \Rightarrow$

$\Rightarrow IB = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$

$\Rightarrow B$ è l'inversa di A e quindi $BA = I$

Analogamente se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$BA = I$ allora B è l'inversa di A e $AB = I$

A matrice quadrata invertibile $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$ tale che $AA^{-1} = Id_n = A^{-1}A$

Teorema 7.6.1 *Sia $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare, e sia A la matrice associata a F rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *F è un isomorfismo;*
2. *F è iniettiva;*
3. *F è suriettiva;*
4. $\dim(\text{Im}\ (F)) = n$;
5. $\text{rk}(A) = n$;
6. *le colonne di A sono linearmente indipendenti;*
7. *le righe di A sono linearmente indipendenti;*
8. *il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha un'unica soluzione;*
9. *per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha un'unica soluzione;*
10. *A è invertibile;*
11. *il determinante di A è diverso da zero.*

l'Inversa di una funzione f $A \to B$ (insiemi), se esiste è una funzione $g: B \to A$ che si indica con f^{-1} tale che

$f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$

$A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ $a \to f(a)$, $g(f(a)) = a$, $g(b) \leftarrow b$, $f(g(b)) = b$

Ricordiamo che F è iniettiva $\Leftrightarrow \ker F = \{0\}$ $\Leftrightarrow \dim \ker F = 0$

F è suriettiva $\Leftrightarrow \text{Im} F = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim \text{Im} = n$ questo dice 3 $\Leftrightarrow$ 4

F è isomorfismo vuol dire che è in e su quindi 1 $\Rightarrow$ 2 e 1 $\Rightarrow$ 3

Per il teorema della dimensione (8)

$\overset{\text{dim dominio}}{n} = \dim \ker F + \dim \text{Im} F$

Mostriamo 2 $\Rightarrow$ 3 F iniettiva $\Rightarrow \dim \ker F = 0$

per (8) $\dim \text{Im} F = n - 0 = n \Rightarrow F$ è suriettiva

Mostriamo 3 $\Rightarrow$ 1 F suriettiva $\Rightarrow \dim \text{Im} F = n$

(8) $\Rightarrow \dim \ker F = n - \dim \text{Im} F = n - n = 0$

$\Rightarrow F$ è iniettiva. Ora F è iniettiva e suriettiva

$\Rightarrow F$ è isom.

mostriamo 4 $\Leftrightarrow$ 6 $\text{Im} F = \langle$colonne di $A\rangle$

(n colonne che lo generano) $\dim(\text{Im} F) = n \Leftrightarrow \langle$colonne di $A\rangle$ ha dim n $\overset{4.2.6}{\Leftrightarrow}$ le colonne di A sono lin. indip.

in uno spazio vettoriale di dim n, se ho n vettori che generano $\Rightarrow$ sono lin. indip.

4 $\Leftrightarrow$ 5 $\dim \text{Im} F = n \Leftrightarrow \langle$colonne di $A\rangle$ ha dim n $\overset{6.2.2}{\Leftrightarrow} rg(A) = n = rc(A)$

5 $\Leftrightarrow$ 9 Il sist $A\underline{x} = \underline{b}$ ha una sola soluz

$\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|b) = n = rk(A) = n$

Rouché capelli

10 $\Leftrightarrow$ 11 Già visto 7.4.2

Dimostriamo ovvero 10 $\Leftrightarrow$ 1 (F è isomorfismo $\Leftrightarrow$ la matrice associata è invertibile)

Sia $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ applic lineare e sia A la matrice associata.

F è un isomorfismo $\Leftrightarrow A$ è invertibile

e l'inversa di F, F^{-1} è proprio l'applic lineare associata ad A^{-1}

2 $\Leftrightarrow$ 8 F iniettiva $\Leftrightarrow \ker F = \{0\}$

$\Leftrightarrow$ l'insieme delle soluzioni di $Ax = \underline{0}$ è $\{\underline{0}\}$ $\Leftrightarrow Ax = \underline{0}$ ha solo la soluzione $\underline{0}$ $\Leftrightarrow Ax = \underline{0}$ ha una sola soluzione

Mostriamo 7 $\Leftrightarrow$ 8 Il sistema $Ax = \underline{0}$ ha una sola soluzione $\Leftrightarrow \underline{rg}(A) = rg(A|\underline{0}) = n$

Teorema di Rouché Capelli

$rr(A) = r(A) = rc(A)$

$\Leftrightarrow \dim \langle$righe di $A\rangle = n \Leftrightarrow$ le righe di A sono lin. indip.

Torniamo a dimostrare 10 $\Leftrightarrow$ 1 f iso $\Leftrightarrow f$ inv

$\Rightarrow$ Supponiamo F invertibile. Esiste $F^{-1}\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tale che

$F^{-1} \circ F = id_{\mathbb{R}^n} = F \circ F^{-1}$

Sia $\mathcal{B}$ la matrice associata ad F^{-1}. La matrice associata a $F \circ F^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$

è $AB = I$ matrice associata all'identità

la matrice associata a $F^{-1} \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$

è $BA = I$

$\Rightarrow B$ è l'inversa di $A \Rightarrow$

$B = A^{-1} \Rightarrow A$ è invertibile

$\Leftarrow$ Viceversa sia A invertibile e sia $G\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e' applicazione lineare associata ad A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow F \circ G = id_{\mathbb{R}^n}$

$A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow G \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow G$ è proprio l'inversa di F, quindi F è invertibile

Esercizio Sia $T_k\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'appl. lin definita da $T_k(x_1, x_2, x_3) =$

$(-3x_1 + kx_2, kx_1 + 5x_2 + x_3, 4x_1 + 4x_2 + x_3)$

stabilire per quali valori di k si ha che T_k non è iniettiva

o trovo le sols di $Ax = \underline{0}$... guardo i pivot oppure cerco che $\det A \neq 0$

Scelto un tale valore $\bar{k}$ si determini una base di $\operatorname{Ker} T_{\bar{k}}$. Si determinino inoltre, se possibile, due vettori di $\mathbb{R}^3$ lin indip che non appartengono a $\operatorname{Im} T_{\bar{k}}$

$$A_k = \begin{pmatrix} -3 & k & 0 \\ k & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & k \\ k & 5 \\ 4 & 4 \end{matrix}$$

Per il teorema T_k non è iniettiva

$\Leftrightarrow \det A_k = 0$

Consiglio: Ricordare che la matrice A associata ad F (rispetto alle basi canoniche) è $\left(F(e_1)_e \ F(e_2)_e \ \cdots \ F(e_n)_e \right)$

$T_k(e_1) = T_k(1,0,0) = (-3, k, 4)$

$\det(A_k) = -15 + 4k + 0 - [0 - 12 + k^2] =$

$-k^2 + 4k - 3 = -(k^2 - 4k + 3)$

$= -(k-3)(k-1)$ $\qquad k_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-3}}{2}$

$k = 3$ e $k = 1$

T_k non è in per $k = 3$ e $k = 1$

Scegliamo $k = 1$. Una base di $\operatorname{Ker} T_1$ si trova risolvendo $A_1 \underline{x} = \underline{0}$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{matrix} \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} \\ \\ R_3 + R_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 16 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2 pivot, 3 incognite, infinite sol che dipendono da 1 parametro

$\operatorname{Ker} T_1$ ha dim 1

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 16x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -5x_2 - x_3 = \frac{15}{16}x_3 - x_3 = -\frac{1}{16}x_3 \\ x_2 = -\frac{3}{16}x_3 \end{cases}$$

$\operatorname{Ker} T_1 = \{ (-\frac{1}{16}x_3, -\frac{3}{16}x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ x_3 (-\frac{1}{16}, -\frac{3}{16}, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \}$

$= \langle (-\frac{1}{16}, -\frac{3}{16}, 1) \rangle = \langle (-1, -3, 16) \rangle$

In generale se abbiamo una matrice A SCALA $A' \mid \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}$

e le soluzioni dipendono da k parametri l'insieme delle soluzioni del sistema $A'x = \underline{0}$ è un sottospazio di dim k

$\mathrm{Im}\, T_1 = \langle T_1(e_1), T_1(e_2), T_1(e_3) \rangle$

$= \langle$ colonne di $A_1 \rangle$. Usiamo Gauss in modo diretto per calcolare una base dim $\mathrm{Im}\, T_1$

$$\begin{matrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{matrix} \quad \xrightarrow{R_3 + 3R_1} \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 16 & 16 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\mathrm{Im}\, T_1 = \langle (1,5,2), (0,1,1) \rangle$

$(0,0,1) \notin \mathrm{Im}\, T_1 \qquad (0,1,0) \notin \mathrm{Im}\, T_1$

$$\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow{R_3 - R_2} \quad \begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow (1,5,2), (0,1,1), (0,1,0)$ sono indip

perché generano un sottospazio di dim 3

$\Rightarrow (0,1,0) \notin \mathrm{Im}\, T_1$

I vettori richiesti sono

$(0,1,0)$ e $(0,0,1)$

due vettori ind identificano un piano $\Rightarrow$ vado trovare un vettore lin dip