Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
1 giugno 2022

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (8 punti)

a) Sia
$$W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid 2p(-1) = p(3)\} \subseteq \mathbb{R}_3[x].$$
Si stabilisca se W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$ e in caso affermativo se ne determini una base. [W è un sottospazio di dimensione 3]

b) Si stabilisca se esiste una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Im}\, F = \langle \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rangle$ e $\mathbf{e}_2$ è autovettore di F di autovalore -1. In caso affermativo, si stabilisca se una tale F è unica. [F non esiste]

Esercizio 2. (12 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, kx_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4, kx_2 - 14x_3 - 14x_4).$$

a) Si determini per quali valori di k si ha che il nucleo di F_k ha dimensione 2. Scelto un tale valore a di k si calcolino una base di $\mathrm{Ker}\, F_a$ una base di $\mathrm{Im}\, F_a$. [$k = -2, 7$]

b) Per lo stesso a del punto precedente, si calcoli $F_a^{-1}(1, 5, -14)$, e si determinino se possibile, 3 vettori linearmente indipendenti appartenenti a $F_a^{-1}(1, 5, -14)$.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata ad F_0 rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

d) Si determinino le coordinate del vettore $(1, 2, 3)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ del punto precedente.

Esercizio 3. (6 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, (k - 3)x_1 + 3x_2, -6x_1 + 3x_2 + 5x_3)$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [$k > 2, k \neq 11$]

b) Si stabilisca se esistono valori di k tali k il vettore $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ sia autovettore di T_k. In caso affermativo, determinare tali valori di k. [$k = 3$]

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che la matrice $A_{\mathcal{B}}$ associata a T_k rispetto ad una opportuna base sia: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. In caso affermativo, determinare tali valori di k.

$[k = 6]$

Esercizio 4 (4 punti)

a) Si calcoli l'inverso di $[38]_{55}$ in $\mathbb{Z}_{55}$.

b) Si stabilisca se la congruenza $26x \equiv_{91} -39$ ammette soluzioni.