Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
20 giugno 2022

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio. Il parametro b è uguale a: (il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+2 .

Esercizio 1. (7 punti)

a) Siano
$$W_1 = \langle(1,0,-1,2),(3,1,2,3)\rangle,\ W_2 = \langle(1,2,3,4)\rangle$$
e sia $W = W_1 \cup W_2$. Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e se è chiuso rispetto al prodotto per scalari. Si determinino inoltre, se possibile, 4 vettori linearmente indipendenti appartenenti a W. [Chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non rispetto alla somma. Non esistono.]

b) Si stabilisca se esiste una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}\, F = \langle \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\rangle$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ è autovettore di F di autovalore -1 e $\mathbf{e}_2$ è autovettore di F di autovalore 3. In caso affermativo, si stabilisca se una tale F è diagonalizzabile. [Esiste ed è diagonalizzabile]

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:
$$F_k(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + kx_2, -4x_1 - 6x_2 + kx_3, 2x_1 + 8x_2 + 4x_3, 3x_1 + 3kx_2).$$

a) Si stabilisca la dimensione dell'immagine di F_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$. [dim Im $F_k = 2$ per $k = -6$ e $k = 2$, dim Im $F_k = 3$ altrimenti]

b) Si determini per quali valori di k si ha $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4$ appartiene all'immagine di F_k e per quali valori di k si ha $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ appartiene al nucleo di F_k. [$k \neq 2$; $k = 2$]

c) Posto $k = 0$, si determinino le equazioni cartesiane di Im F_0.[$x_4 - 3x_1 = 0$]

d) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata ad F_0 rispetto alla base alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^4$ nel codominio.

Esercizio 3. (8 punti)
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$$L(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3,\ L(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3,\ L(e_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$$

a) Si stabilisca se L è diagonalizzabile. [si]

b) Si stabilisca se L è suriettiva. [no]

c) Si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di L e si trovi la matrice $A_{\mathcal{B}}$ associata ad L rispetto alla base $\mathcal{B}$. [$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - e_3\}$, $A_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(6,6,0)$]

Esercizio 4 (4 punti)
Si trovino le soluzioni intere della congruenza $43x \equiv_{99} -b$. [$x = 23b + 99k$, con $k \in \mathbb{Z}$]