Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
17 Marzo 2016

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}_2[x]$ i polinomi:

$$p_1(x) = 3 + ax + x^2, \quad p_2(x) = -a - 3x + x^2, \quad p_3(x) = 2 + 2x + ax^2.$$

a) Stabilire per quali valori del parametro reale a i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Stabilire per quali valori del parametro reale a i polinomi $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ generano $\mathbb{R}_2[x]$.

Sia ora $S = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$.

c) Stabilire per quali valori del parametro reale a il polinomio $p(x) = 3 + 3x + ax^2$ appartiene a S.

d) Scelto un valore di a per cui $S \neq \mathbb{R}_2[x]$, stabilire se esistono due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}_2[x]$ che non appartengono a S.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$S = \langle (1,1,1) \rangle, \quad T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z - 2x = 0\}.$$

a) Trovare un insieme di generatori per T.

b) Trovare una base $\mathcal{A}$ di S. Tale base è unica?

c) Verificare che $S \subset T$ e completare la base $\mathcal{A}$ in una base $\mathcal{B}$ di T.

d) Scrivere le coordinate del vettore $(1,1,1)$ rispetto alla base $\mathcal{A}$ e rispetto alla base $\mathcal{B}$.

e) Completare la base $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}^3$.

f) Scrivere le coordinate del vettore $(1,1,0)$ rispetto alla base $\mathcal{D}$.

Esercizio 3. Si consideri il seguente sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & c-a \\ b+c & -b-c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Verificare che M è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

b) Trovare un insieme di generatori di M.

c) Trovare due diverse basi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di M e calcolare la dimensione di M.

d) Trovare, se possibile, due matrici A e B di $M_2(\mathbb{R})$ non appartenenti a M e linearmente indipendenti, tali che $A - B$ appartenga a M.

e) Trovare, se possibile, due matrici A e B tali che $A \notin M$, $B \in M$ e $A - B \in M$.

Esercizio 4. Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3[x]$:

$$S_k = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid (k-1)a - b + kc - d = k - 2\}.$$

Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che S_k è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Per i valori di k trovati,

a) determinare una base $\mathcal{B}$ di S_k e la dimensione di S_k;

b) esibire un insieme di generatori di S_k che non sia una base di S_k e in cui i vettori non sono l'uno multiplo dell'altro;

c) completare $\mathcal{B}$ in una base $\mathcal{D}$ di $\mathbb{R}_3[x]$;

d) stabilire se i polinomi p e q, tali che $(p)_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1)$ e $(q)_{\mathcal{D}} = (1, 1, 1, 0)$, sono uguali;

e) determinare, se possibile, 5 vettori non nulli che generano S_k tali che l'ultimo vettore non appartiene al sottospazio generato dai primi 4;

f) determinare, se possibile, 3 vettori di S_k a due a due linearmente indipendenti che non costituiscano una base di S_k.