SYS LIN

Definizione 6.1.1 Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\mathbf{w} \in W$. Si chiama *controimmagine* o *preimmagine* di $\mathbf{w}$ mediante F l'insieme

$$F^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

se f è invertibile $\Rightarrow f^{-1}$ è l'inversa di f applicata a b. Questa è definita sempre

Si osservi che la notazione $F^{-1}(\mathbf{w})$ introdotta nella precedente definizione *non* ha nulla a che fare con l'invertibilità della funzione. Parlando di controimmagine di un vettore mediante una funzione F *non* stiamo affermando che F è una funzione invertibile: la notazione $F^{-1}(\mathbf{w})$ indica semplicemente un sottoinsieme del dominio della funzione.

$F^{-1}(\omega) = \{v \in V \mid F(v) = \omega\} \subseteq V$

Se $\omega \neq \underline{0}$ $F^{-1}(\omega)$ non è un sottosp.

perché $\underline{0}_V \notin F^{-1}(\underline{\omega})$ l'immagine del vettore nullo è sempre il vettore nullo (il viceversa è la def di Ker)

Se $\omega = \underline{0}$ $F^{-1}(\underline{0}) \overset{\text{per def}}{=} \operatorname{Ker} F$ è un sottosp

Inoltre $F^{-1}(\omega) \neq \emptyset \iff \omega \in \operatorname{Im} F$

Proposizione 6.1.4 *Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia $\mathbf{w} \in W$. Allora $F^{-1}(\mathbf{w})$ è non vuoto se e solo se $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} F$. In tal caso si ha:*

$$\overset{A}{\text{se } w \in \operatorname{Im} F} \Rightarrow \overset{B}{F^{-1}(\mathbf{w}) = \{\mathbf{v} + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \operatorname{Ker} F\}} \text{ ove } v \text{ è t.c. } F(v) = w \tag{6.1}$$

ove $\mathbf{v}$ è un qualsiasi elemento di V tale che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Dimostrazione – Se $\mathbf{w} \notin \operatorname{Im} F$ ($\neg B$), allora, per definizione, $\Rightarrow$ $F^{-1}(\mathbf{w}) = \emptyset$ ($\neg A$). Vediamo ora il caso $\mathbf{w} \in \operatorname{Im} F$. Per definizione di immagine, esiste un elemento $\mathbf{v} \in V$ tale che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Non è detto, tuttavia, che $\mathbf{v}$ sia l'unico elemento in $F^{-1}(\mathbf{w})$. Supponiamo che $\mathbf{v}'$ sia un altro elemento in $F^{-1}(\mathbf{w})$. Allora

$$F(\mathbf{v}') \underset{-w = F(v)}{=} F(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \quad -w$$

quindi per linearità

$$F(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = 0_W$$

cioè:

$$\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} F$$

Quindi un qualsiasi elemento $\mathbf{v}'$ di $F^{-1}(\mathbf{w})$ si può scrivere come $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} F$. Abbiamo così dimostrato un'inclusione.

Consideriamo ora $\mathbf{v} + \mathbf{z}$, con $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} F$. Allora

$$F(\mathbf{v} + \mathbf{z}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{z}) = \mathbf{w} + 0_W = \mathbf{w}$$

Quindi vale anche l'altra inclusione e abbiamo dimostrato il risultato. □

Definizione 6.2.1 Si chiama *rango colonne* di una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A, cioè la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.

Nel caso di matrici a scala

$rr(A) = \dim(\langle \text{righe di } A \rangle) = n^0$ di righe non nulle

Se A non è a scala, usiamo l'algoritmo di Gauss per ottenere una matrice A' a scala

$rr(A) = rr(A')$ = n^0 di righe non nulle di A'

4.3.1

Osservazione 6.2.2 Se leggiamo A come la matrice associata all'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ rispetto alle basi canoniche, allora il rango colonne di A è la dimensione dell'immagine di L_A. Infatti tale immagine è generata dalle colonne della matrice A.

$rc(A) = n - \dim \operatorname{Ker} L_A = n - (n - r) = r = rr(A)$

$\underline{0}_V \in \operatorname{Ker} L_A$ sempre

$\operatorname{Ker} L_A = \{$insieme delle sol. del sist $Ax = \underline{0}\}$

~~Si~~ Applichiamo Gauss e troviamo A' a scala con r righe non nulle

$\Rightarrow$ le soluz. dipendono da $n - r$ parametri

dim 0 => solo solo nulla in Ker

separando i parametri troviamo una base di $\operatorname{Ker} L_A$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker} L_A$ ha dim $n - r$

con $r = rr(A') = rr(A)$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L_A = n - rr(A)$

tanti vettori ind che generano quanti sono i params liberi

Teorema della dimensione

$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Ker} L_A + \dim \operatorname{Im} L_A$

$n = n - rr(A) + rc(A)$

$\Longrightarrow rr(A) = rc(A)$ Prop 6.2.3

separando i params otteniamo un sys di generatori, ma se questi generatori vengono da un sys ridotto a scala per righe => sono sempre una base

$F \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$F = L_A \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$F^{-1}(-1, 3, -2) = ?$

cerchiamo (x_1, x_2, x_3) t.c. $F(x_1, x_2, x_3) = (-1, 3, -2)$, cioè

$F^{-1}(-1, 3, -2) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

Dobbiamo risolvere il sist. lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_2/5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rr(A') = rr(A'|b') = 2$ infinite sol che dipendono da 1 parametro $(-1, 3, -2) \in \operatorname{Im} F$

Troviamo esplicitamente $F^{-1}(-1, 3, -2)$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_2 - 2x_3 + 3 = 1 - t \\ x_2 &= -2 + t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

$F^{-1}(-1, 3, -2) = \{(1 - t, -2 + t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \{\underset{= v}{(1, -2, 0)} + \underbrace{t(-1, 1, 1)}_{z \text{ generico vettore di } \operatorname{Ker} F} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$F(v) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

controllare che $\operatorname{Ker} F = \{t(-1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (-1, 1, 1) \rangle$

$\Rightarrow$ deve valere per $\forall \lambda$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

calcoliamo $rr(A) = \dim(\langle \text{righe di } A \rangle)$
applichiamo Gauss in modo diretto

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ R_2 - 3R_1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ R_3 - 2R_1 & 0 & -5 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & 1 & 2 & 0 & -1 \\ & 0 & -5 & 1 & 2 \\ R_3 - R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$rr(A) = 2$

calcoliamo $rc(A) = \dim(\langle \text{colonne di } A \rangle)$
usiamo Gauss in modo diretto

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & 1 & 3 & 2 \\ R_2 - 2R_1 & 0 & -5 & -5 \\ & 0 & 1 & 1 \\ R_4 + R_1 & 0 & 2 & 2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$rc(A) = 2 = rr(A)$

D'ora in poi parleremo di rango di A e scriveremo $r(A)$ $(= rr(A) = rc(A))$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI 6.2.9

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite
$(A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n\ \ b \in \mathbb{R}^m)$

Il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$ — 1^a parte

2^a parte: Inoltre se $r(A) = r(A|b) = r$ il sistema ha 1 soluz se $n = r$ e infinite soluz che dipendono da $n - r$ parametri se $r < n$

2. Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzioni, allora per il Teorema 6.2.8 abbiamo che l'insieme delle sue soluzioni è della forma

$$S = \{\mathbf{v} + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \operatorname{Ker} L_A\}$$

essendo $\mathbf{v}$ una soluzione particolare del sistema. Allora si verifica solo uno dei due seguenti casi:

1. $\dim(\operatorname{Ker} A) = 0$, cioè $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$, perciò $S = \{\mathbf{v}\}$, cioè il sistema ammette una sola soluzione;
2. $\dim(\operatorname{Ker} A) > 0$ quindi $\operatorname{Ker} A$ contiene infiniti elementi, essendo un sottospazio vettoriale reale.

Per il Teorema della dimensione, abbiamo $\dim(\operatorname{Ker} A) = n - \dim \operatorname{Im} L_A = n - \operatorname{rk}(A)$ e dunque le soluzioni dipendono da $n - \operatorname{rk}(A)$ parametri. □

Nota, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ allora $r(A) \leq \min(m, n)$
$rr(A) \leq m,\ rc(A) \leq n$

Dim della 1^a parte

Sia $L_A\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ l'applicaz. lin. ad associata ad A

Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluz.
$\Leftrightarrow b \in \operatorname{Im} L_A \Leftrightarrow b \in \langle \text{colonne di } A \rangle$

Risolvere il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ significa trovare $L_A^{-1}(b)$
$L_A^{-1}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow$ il sist ha soluz e $L_A^{-1}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in \operatorname{Im} L_A$

poiche b comb lin delle cols di A!

$\Leftrightarrow \langle \text{colonne di } A \rangle = \langle \text{colonne di } A|b \rangle$

$\Leftrightarrow \dim \langle \text{colonne di } A \rangle = \dim \langle \text{colonne di } A|b \rangle$

(Nota la freccia $\Leftarrow$ vale perche
$\langle \text{colonne di } A \rangle \subseteq \langle \text{colonne di } A|b \rangle$
e si usa 4.2.4 (b) $\quad U \subseteq V,\ \dim U = \dim V \Rightarrow U = V$)

$\Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$

Esercizio Sia $L_A\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definita da
$L_A(e_1) = e_1 + a e_2 + 6e_3 + 4e_4$
$L_A(e_2) = a e_2 + e_3 + e_4$
$L_A(e_3) = e_1 + 14 e_2 + a e_3 + (a-2)e_4$

Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ $\underline{w} = (2, 14, 12, 8) = 2e_1 + 14e_2 + 12e_3 + 8e_4$ appartiene a $\operatorname{Im} L_A$

Scelto un tale a, determinare $L_A^{-1}(w)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & 14 \\ 6 & 1 & a \\ 4 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo (x_1, x_2, x_3, x_4) tali che $L_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = w$
Dobbiamo risolvere il sistema lineare associato a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ a & a & 14 & 14 \\ 6 & 1 & a & 12 \\ 4 & 1 & a-2 & 8 \end{array}\right)$$

$L_A(\underline{x}) = \underline{w} \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{w}$

Notiamo che $L_A^{-1}(\underline{w})$ è proprio l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x} = \underline{w}$

$w \in \operatorname{Im} L_A \Leftrightarrow$ il sistema ha soluzioni

La domanda è diventata: per quali $a \in \mathbb{R}$ il sistema $A\underline{x} = \underline{w}$ ha soluzioni

$$\left(\begin{array}{rccc|c} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ R_2 - aR_1 & 0 & a & 14-a & 14-2a \\ R_3 - 6R_1 & 0 & 1 & a-6 & 0 \\ R_4 - 4R_1 & 0 & 1 & a-6 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{rccc|c} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 & a-6 & 0 \\ R_3 - aR_2 & 0 & 0 & 14-a-a(a-6) & * \\ R_4 - R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad * = 14-2a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a-6 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+5a+14 & 14-2a \end{array}\right)$$

$$-a^2+5a+14 = -(a^2 - 5a - 14) = -(a-7)(a+2)$$

Se $a \neq +7$ e $a \neq -2$ $\quad rr(A) = rr(A|b) = 3$
$\Rightarrow$ il sistema ha soluz $\rightarrow w \in \operatorname{Im} L_A$

Continuare per casa: se $a = 7$ $\quad w \in \operatorname{Im} L_A$
se $a = -2$ $\quad w \notin \operatorname{Im} L_A$

Esercizio: Studiare la dimensione di $Im\ L_A$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ e stabilire per quali valori di a $w \in Im\ L_A$

$Im\ L_A = <$ colonne di $A>$

usiamo Gauss in modo diretto

$$\begin{matrix} 1 & a & 6 & 4 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 1 & 14 & a & a-2 \end{matrix} \quad R_3 - R_1 \quad \begin{matrix} 1 & a & 6 & 4 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 14-a & a-6 & a-6 \end{matrix}$$

Idee: poniamo $a \neq 0$ e distinguiamo 2 casi $a\neq 0$, $a = 0$

$$\begin{matrix} & 1 & a & 6 & 4 \\ R_2 \cdot \frac{1}{a} & 0 & 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ & 0 & 14-a & a-6 & a-6 \end{matrix} \quad R_3-(14-a)R_2 \quad \begin{matrix} 1 & a & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & a-6-\frac{14-a}{a} & * \end{matrix}$$

$$a-6-\frac{14-a}{a} = \frac{a^2-6a-14+a}{a} = \frac{a^2-5a-14}{a} = \frac{(a-7)(a+2)}{a}$$

se $a \neq 0$ $a\neq 7$ $a \neq -2$ $Im\ L_A$ ha dim 3

Una base è $\{(1,a,6,4),(0,1,\frac{1}{a},\frac{1}{a}),(0,0,1,1)\}$

Se $a=7$ o $a=-2$ otteniamo

$$\begin{matrix} 1 & a & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad Im\ L_A \text{ ha dim } 2$$

Se $a = 0$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & -6 \end{matrix}$$

$$R_2 - R_3 \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & -6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad Im\ L_A \text{ ha dim } 3$$

Altra idea (anziché analizzare $a \neq 0$...) $R_3 \to R_2 + R_3$

otteniamo

$$\begin{matrix} 1 & a & 6 & 4 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 14 & a-5 & a-5 \end{matrix}$$

ora 14 è un pivot

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 14 & a-5 & a-5 \\ 0 & a & 1 & 1 \end{matrix} \quad R_3 - \frac{a}{14}R_2$$

e si continua

Scegliamo $a=7$ (possiamo scegliere anche $a=0$ o altro, basta che sia $a \neq -2$)

scegliamo un'a t.c. $w \in Im F$ $\Downarrow$ per avere la matrice bella...

$$L_A^{-1}(w) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A(x) = w\} = \{\text{soluzioni di } Ax = w\}$$

Abbiamo già il sistema ridotto a scala

(RIGUARDO EX PG ↑)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_1 &= -x_3 + 2 \\ x_2 &= -x_3 \end{aligned}$$

$$L_A^{-1}(w) = \{(-x_3+2, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{\underbrace{(-x_3,-x_3,x_3)}_{z} + \underbrace{(2,0,0)}_{v} \mid x_3 \in \mathbb{R}\} \qquad z \in Ker\ L_A$$

$$= \{(2,0,0) + \underbrace{x_3(-1,-1,1)}\mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

vettore t.c. $L_A(v) = w$ — generico vettore di $Ker\ L_A$

$$= \{v + z \mid z \in Ker\ L_A\} \text{ e } L_A(v) = w$$

Parentesi: supponiamo che

$$Im\ F = <(1,-5,7),(0,2,8),(0,0,\sqrt{528})>$$

$(0,0,1,1) = \frac{1}{\star}(0,0,\star,\star)$

$$= <(1,-5,7),(0,2,8),(0,0,1)>$$

$$Im\ F = <(1,a,6,4),(0,1,\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a}),(0,0,\star,\star)> \quad \text{con } \star \text{ numero} \neq 0$$

$$= <(1,a,6,4),(0,1,\tfrac{1}{a},\tfrac{1}{a}),(0,0,1,1)>$$

Posto $a = 0$ stabilire se $w \in Im\ L_A$

quando $a = 0$ $Im\ L_A = <\underbrace{(1,0,6,4)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,1)}_{v_2}, \underbrace{(0,14,-6,-6)}_{v_3}>$

cerchiamo d_1, d_2, d_3 tali che

$w = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3$ viene un sistema lineare che ha per colonne $v_1\ v_2\ v_3 \mid w$

Questo mi permette di stabilire se $w \in Im\ L_A$ con conti "semplici" ma non mi permette di calcolare $L_A^{-1}(w)$, per questa serve risolvere $A\underline{x} = \underline{w}$