Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
6 giugno 2016

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+2.

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (8 punti)
Sia
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \big| s^2 = 0, bu + t = 0 \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

a) Si verifichi che W è un sottospazio di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ e se ne determini una base.

b) Si determinino, se possibile, 3 vettori di W che non siano multipli l'uno dell'altro e che non generino W.

c) Si stabilisca per quali valori di k è possibile completare l'insieme
$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 2 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} \right\}$$
ad una base di $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. (11 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:
$$F_k(x, y, z) = (x - 3y + kz, 2x - 3y, -x + ky, 2x - 6y + 2kz).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva.

b) Scelto un valore a per cui F_a non è iniettiva, si determini una base di Ker F_a.

c) Per il valore di a scelto al punto b), si determini, se possibile, una applicazione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbf{e}_2 \in \operatorname{Ker} G$ e $\operatorname{Im} G = \operatorname{Im} F_a$.

d) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_4\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^4$. Si determini la matrice $A_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ associata a F rispetto alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

Esercizio 3. (7 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:
$$T(\mathbf{e}_1) = -6\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \; T(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2,$$
$$T(\mathbf{e}_3) = -3\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3.$$

a) Si stabilisca se $(-4,-4,0)$ è autovettore di T.

b) Si stabilisca se T è diagonalizzabile, e in caso affermativo, detta A la matrice associata a T rispetto alla base canonica si determinino una matrice diagonale D simile ad A e due matrici distinte P_1, P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}AP_2 = D$.

Esercizio 4. (4 punti)

a) Si determinino, se possibile, le soluzioni della congruenza:

$$23x \equiv_{102} 12$$

b) Si stabilisca se $[27]_{57}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_{57}$.