Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
14 Aprile 2016

Esercizio 1. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri la funzione $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x, y, z) = (x + y + z,\ x - y + k,\ kx + ky + (k - 1)z).$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione f_k è lineare. Per i valori di k trovati:

a) determinare una base di $\mathrm{Ker} f_k$ e una di $\mathrm{Im} f_k$;

b) stabilire se f_k è iniettiva e/o suriettiva;

c) stabilire se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene a $\mathrm{Im} f_k$ e, in caso affermativo, determinare le sue coordinate rispetto alla base trovata nel punto a);

d) stabilire se il vettore $(1, 2, 3)$ appartiene a $\mathrm{Ker} f_k$ e trovare la sua immagine $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ tramite f_k. Esiste un altro vettore di $\mathbb{R}^3$ che ha immagine $\mathbf{w}$ tramite f_k?

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$f_k(x, y, z) = (kx + y - z,\ ky + (k + 1)z,\ ky + 2z).$$

a) Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio.

b) Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.

c) Determinare per quali valori di k l'applicazione f_k non è suriettiva. Scelto uno dei valori di k trovati, determinare un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ che non appartiene a $\mathrm{Im} f_k$.

Esercizio 3. Stabilire se è possibile costruire una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ tale che:

a) f è iniettiva;

b) $\mathrm{Im} f = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rangle$.

Esercizio 4.

a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$, $f(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + k\mathbf{e_2}$ è lineare.

b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}$, $f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + k\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ è unica.

c) Stabilire se le applicazioni lineari $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_2}$ e $g(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}$, $g(2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$ coincidono.

Esercizio 5. Sia $k \in \mathbb{R}$. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_k(\mathbf{e_1}) = k\mathbf{e_1} + \mathbf{e_3}$, $f_k(\mathbf{e_2}) = 2\mathbf{e_2}$, $f_k(\mathbf{e_3}) = k\mathbf{e_3}$, $f_k(\mathbf{e_4}) = -\mathbf{e_2}$. Sia inoltre $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

a) Scrivere la matrice associata a f_k rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire per quali valori di k l'applicazione f_k è iniettiva.

c) Stabilire per quali valori di k la dimensione di $\mathrm{Ker} f_k$ è 2.

d) Stabilire se g è iniettiva o suriettiva.

e) Stabilire se esistono $g \circ f_k$ e $f_k \circ g$ e, in caso affermativo, determinarle.