Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
31 gennaio 2022

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+2 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. [5 punti]
Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 0; x_1 - x_2 + bx_3 \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

a) Si tabilisca se W è chiuso rispetto alla somma.

b) Si tabilisca se W è chiuso rispetto al prodotto per scalari.

c) Si tabilisca se W contiene un sottospazio U di dimensione 1. In caso di risposta affermativa, determinarlo.

d) Si tabilisca se W contiene due vettori linearmente indipendenti. In caso di risposta affermativa, determinarli.

Esercizio 2. [5 punti]
Sia $H : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da:

$$H(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_2 - a_1, ba_0 + a_1).$$

Siano $\mathcal{B} = \{x^2 - x + 1, x^2 + x, x + 1\}$ e $\mathcal{B}' = \{2\mathbf{e}_2, -\frac{1}{b}\mathbf{e}_1\}$ due basi di $\mathbb{R}_2[x]$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente. Si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata ad H rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio. Si determini inoltre il rango di $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Esercizio 3. [9 punti]
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $F_k(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3$, $F_k(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si determini per quali valori di k si ha che F_k non è suriettiva.

b) Scelto un valore a di k determinato al punto a), si determini una base $\mathcal{B}$ del nucleo di F_a. Si verifichi che il vettore $(b, 0, 0, -b)$ appartiene al nucleo di F_a e si determinino le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

c) Sia a come nel punto precedente. Si determini, se possibile, una applicazione lineare suriettiva $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\text{Ker } G = \text{Ker } F_a$.

Esercizio 4. [8 punti]
Si consideri l'applicazioni lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla seguente matrice, rispetto alla base canonica in dominio e codominio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca se T è iniettiva e per quali valori di k il vettore $(4, 3, k)$ appartiene all'immagine di T.

b) Si calcolino gli autovalori di T.

c) Si determini, se possibile, una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ associata ad H rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio sia diagonale.

Esercizio 5. [3 punti] Si stabilisca se la congruenza $130x \equiv_{221} 39$ ha una, nessuna o infinite soluzioni.