Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
24 maggio 2023

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+1 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (7 punti)
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|p(2) \leq 0 \text{ e } p(-1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e/o al prodotto per scalari (fornendo controesempi in caso di risposta negativa).

b) Si stabilisca se $U = \langle x^3 + x^2 - 4x - 4 \rangle$ è contenuto in W. [Si]

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $x^3 + kx^2 + 1 - k$ appartiene a W. [$k \leq -3$]

Esercizio 2. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 + 14e_2 + k\mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_4$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva. [$k \neq -7, 2$]

b) Sia $\mathbf{w} = 9\mathbf{e}_1 - 11\mathbf{e}_2 + 8\mathbf{e}_3 - 7\mathbf{e}_4$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{w}$ appartiene a Im (F_k). [$k \neq 2$]

c) Per quali valori di k è possibile completare $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$? [$k \neq -7, 2$]

d) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane di Im (F_0). [$x_1 - 2x_3 - x_4 = 0$]

Esercizio 3. (10 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + kx_2 - 2x_3, 2x_2, 4x_1 + kx_2 - 2x_3)$$

e sia A_k la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [Autovalori $0, 2$, diag per $k = 0$]

b) Scelto un valore a per cui T_a è diagonalizzabile, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_a e due matrici P_1, P_2 invertibili tali che $P_1^{-1} A_a P_1 = D = P_2^{-1} A_a P_2$.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che il vettore $-\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T_k. [$k = -1$ e $k = -2$]

d) Posto $k = 5$ si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a T_5 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio sia $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$91x \equiv_{204} b.$$

[$x = -65b + 204k$, con $k \in \mathbb{Z}$]

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
24 maggio 2023

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+1 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (7 punti)
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|p(-2) \leq 0 \text{ e } p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e/o al prodotto per scalari (fornendo controesempi in caso di risposta negativa).

b) Si stabilisca se $U = \langle x^3 - x^2 - 4x + 4\rangle$ è contenuto in W. [Si]

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $x^3 + kx^2 - 1 - k$ appartiene a W. [$k \leq 3$]

Esercizio 2. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 - 15e_2 + k\mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_4$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva. [$k \neq 5, 3$]

b) Sia $\mathbf{w} = -3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{w}$ appartiene a Im (F_k). [$k \neq 3$]

c) Per quali valori di k è possibile completare $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$? [$k \neq 5, 3$]

d) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane di Im (F_0). [$x_1 - 2x_3 - x_4 = 0$]

Esercizio 3. (10 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + kx_2 - 2x_3, x_2, x_1 - kx_2 + 2x_3)$$

e sia A_k la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [Autovalori $0, 1$, diag per $k = 0$]

b) Scelto un valore a per cui T_a è diagonalizzabile, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_a e due matrici P_1, P_2 invertibili tali che $P_1^{-1}A_aP_1 = D = P_2^{-1}A_aP_2$.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che il vettore $-2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T_k. [$k = 1$ e $k = 2$]

d) Posto $k = -5$ si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a T_{-5} rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio sia $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$77x \equiv_{246} b.$$

[$x = -115b + 246k$, con $k \in \mathbb{Z}$.]

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
24 maggio 2023

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+1 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (7 punti)
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|p(1) \leq 0 \text{ e } p(-2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e/o al prodotto per scalari (fornendo controesempi in caso di risposta negativa).

b) Si stabilisca se $U = \langle x^3 - x^2 - 4x + 4\rangle$ è contenuto in W. [Si]

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $x^3 + kx^2 + 8 - 4k$ appartiene a W. $[k \geq 3]$

Esercizio 2. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 + 24e_2 + k\mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_4$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva. $[k \neq 6, -4]$

b) Sia $\mathbf{w} = -4\mathbf{e}_1 - 22\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 + 6\mathbf{e}_4$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{w}$ appartiene a Im (F_k). $[k \neq -4]$

c) Per quali valori di k è possibile completare $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$? $[k \neq 6, -4]$

d) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane di Im (F_0). $[x_1 - 2x_3 - x_4 = 0]$

Esercizio 3. (10 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + kx_2 + x_3, -x_2, -2x_1 + kx_2 + x_3)$$

e sia A_k la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [Autovalori $0, -1$, diag per $k = 0$]

b) Scelto un valore a per cui T_a è diagonalizzabile, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_a e due matrici P_1, P_2 invertibili tali che $P_1^{-1}A_aP_1 = D = P_2^{-1}A_aP_2$.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che il vettore $-\mathbf{e}_1 + 2k\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T_k. [$k = -1/2$ e $k = -1$]

d) Posto $k = 3$ si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a T_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio sia $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$83x \equiv_{206} b.$$

[$x = -67b + 206k$, con $k \in \mathbb{Z}$.]

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
24 maggio 2023

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+1 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (7 punti)
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \, | p(-1) \leq 0 \text{ e } p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e/o al prodotto per scalari (fornendo controesempi in caso di risposta negativa).

b) Si stabilisca se $U = \langle x^3 + x^2 - 4x - 4 \rangle$ è contenuto in W. [Si]

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $x^3 + kx^2 - 8 - 4k$ appartiene a W. $[k \geq -3]$

Esercizio 2. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 + 15e_2 + k\mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_4$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva. $[k \neq -3, 5]$

b) Sia $\mathbf{w} = 5\mathbf{e}_1 - 22\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_4$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{w}$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(F_k)$. $[k \neq 5]$

c) Per quali valori di k è possibile completare $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$? $[k \neq -3, 5]$

d) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\,(F_0)$. $[x_1 - 2x_3 - x_4 = 0]$

Esercizio 3. (10 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + kx_2 + 4x_3, -2x_2, -2x_1 - kx_2 - 4x_3)$$

e sia A_k la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile. [Autovalori $0, -2$, diag per $k = 0$]

b) Scelto un valore a per cui T_a è diagonalizzabile, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_a e due matrici P_1, P_2 invertibili tali che $P_1^{-1}A_aP_1 = D = P_2^{-1}A_aP_2$.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che il vettore $-3\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T_k. [$k = 3$,$k = 3/2$]

d) Posto $k = -3$ si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a T_{-3} rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio sia $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$71x \equiv_{247} b.$$

[$x = -80b + 247k$, con $k \in \mathbb{Z}$.]