Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
31 gennaio 2022

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+2 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. [7 punti]

a) Si stabilisca se $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(2) = p(-2) \text{ e } p(3) = p(-3)\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_2[x]$ e in caso affermativo se ne determini una base.

b) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F((1,0,1)) = (3,5,1)$, $F((2,1,0)) = (0,3,2)$ e $F((1,1,-1)) = (-3,-2,1)$.

Esercizio 2. [9 punti]
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = k\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 + (k+3)\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si determini per quali valori di k si ha che F_k non è initettiva.

b) Posto $k = b$, si determini una base $\mathcal{B}$ di Im F_b. Si determini inoltre il vettore $\mathbf{v} \in$ Im (F_b) tale che le coordinate $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ siano $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}} = (1, 2, b)$.

c) Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_2, b\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\}$ un'altra base di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = b$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ associata ad F_b rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica $\mathcal{C}$ nel codominio.

Esercizio 3. [10 punti]
Si consideri l'applicazioni lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla seguente matrice, rispetto alla base canonica in dominio e codominio:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 2 & 2k & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca per quali k si ha che T_k è invertibile.

b) Si stabilisca per quali k si ha che T_k è diagonalizzabile.

c) Posto $k = 1$, si determinino tutte le matrici diagonali simili ad A_1.

d) Si verifichi che $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ è autovettore di T_1. Inoltre, scelta una matrice diagonale D simile ad A_1, si determini una matrice invertibile P tale che $P^{-1}A_1P = D$.

Esercizio 4. [4 punti]

a) Si risolva l'equazione $[254]_{617}x = [b]$ in $\mathbb{Z}_{617}$.

b) Si stabilisca se è vero o falso che $[13]_{68}$ è l'inverso di $[21]_{68}$.