Esercizi
Algebra e Geometria
Corso di Laurea in Informatica
27 Aprile 2016

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(x, y, z) = (-3x - 3y - 3z,\ x + 2y - z,\ x + y + z).$$

a) Calcolare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$. Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

b) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio.

c) Determinare, se esiste, un vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$, diverso dal vettore nullo, che appartiene sia al nucleo sia all'immagine di f. Calcolare la controimmagine di $\mathbf{v}$ tramite f.

d) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e_1},\ \mathbf{v},\ \mathbf{e_2}\}$ nel dominio e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ nel codominio.

e) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ nel dominio e alla base $\mathcal{D} = \{\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3},\ \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2},\ \mathbf{e_1}\}$ nel codominio.

f) Stabilire se esistono due basi di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice associata a f sia

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Costruire, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diversa da f tale che $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che:

- $f(1,1,1) = (k,\, 2k+1,\, k-1)$;
- $f(1,1,2) = (k-1,\, 3k+2,\, 2k-2)$;
- $f(1,2,2) = (k,\, 4k+2,\, 2k-2)$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto ad una base di $\mathbb{R}^3$ opportunamente scelta nel dominio e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ nel codominio.

b) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in dominio e codominio.

c) Stabilire per quali valori di k l'applicazione f è un isomorfismo.

d) Sia ora $k = -1$. Determinare, se possibile, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = id$.