Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
17 giugno 2021

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1(A). (8 punti)

a) Sia $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - y)^2 = 0, 4y^2 - z^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Si stabilisca se U è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari e, nel caso sia un sottospazio, se ne determini un insieme di generatori.

Si trovino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti appartenenti ad U.

b) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ sia un autovettore di F di autovalore 3, $\mathrm{Im}\,(F) = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$, $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \in \mathrm{Ker}\,(F)$.

Svolgimento. a) Siano $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in U$. Poiché abbiamo

$$(\lambda x - \lambda y)^2 = \lambda^2 (x - y)^2 = 0,$$
$$4(\lambda y)^2 - (\lambda z)^2 = 4\lambda^2 y^2 - \lambda^2 z^2 = \lambda^2 (4y^2 - z^2) = 0,$$

risulta $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in U$ e dunque U è chiuso rispetto al prodotto per scalare.
Si considerino i due vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, 2)$ appartenenti all'insieme U. Si verifica facilmente che la somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (0, 0, 4)$ è tale che, sostituendo i valori nell'equazione che definisce l'insieme U,

$$4y^2 - z^2 = -16 \neq 0$$

e dunque U non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è neanche un sottospazio vettoriale.
I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ scritti sopra sono linearmente indipendenti perchè non sono uno multiplo dell'altro e appartengono ad U.
b) L'applicazione $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ da determinare è tale che

$$F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \quad F(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}.$$

Consideriamo ad esempio la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\}$ e poniamo

$$F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \quad F(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3.$$

Dato che F è definita su una base, essa è univocamente determinata. Inoltre risulta $\mathrm{Im}\,(F) = \langle F(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), F(\mathbf{e}_3)\rangle = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3\rangle = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$. Si noti che ci sono altri modi per definire una funzione con le proprietà richieste. □

Esercizio 1(B). (8 punti)

a) Sia $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x+y)^2 = 0, y^2 - 9z^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Si stabilisca se U è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari e, nel caso sia un sottospazio, se ne determini un insieme di generatori.

Si trovino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti appartenenti ad U.

b) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sia un autovettore di F di autovalore -2, Im $(F) = \langle \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \rangle$, $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \in$ Ker (F).

Svolgimento. a) U è chiuso rispetto al prodotto per scalare, con gli stessi conti della versione A.
Si considerino i due vettori $\mathbf{v}_1 = (3, -3, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (-3, 3, 1)$ appartenenti all'insieme U. Si verifica facilmente che la somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (0, 0, 2)$ è tale che, sostituendo i valori nell'equazione che definisce l'insieme U,

$$y^2 - 9z^2 = -36 \neq 0$$

e dunque U non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è neanche un sottospazion vettoriale. Inoltre $\mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti perchè non sono uno miltiplo dell'altro.
b) Una applicazione $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste è ad esempio

$$F(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad F(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2.$$

□

Esercizio 1(C). (8 punti)

a) Sia $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (y-z)^2 = 0, x^2 - 16y^2 = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Si stabilisca se U è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari e, nel caso sia un sottospazio, se ne determini un insieme di generatori.

Si trovino, se possibile, due vettori linearmente indipendenti appartenenti ad U.

b) Si determini, se possibile, una applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ sia un autovettore di F di autovalore 2, Im $(F) = \langle \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \rangle$, $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in$ Ker (F).

Svolgimento. a) U è chiuso rispetto al prodotto per scalare, con gli stessi conti della versione A.
Si considerino i due vettori $\mathbf{v}_1 = (4, 1, -4)$ e $\mathbf{v}_2 = (-4, 1, 4)$ appartenenti all'insieme U. Si verifica facilmente che la somma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (0, 2, 0)$ è tale che, sostituendo i valori nell'equazione che definisce l'insieme U,

$$x^2 - 16y^2 = -64 \neq 0$$

e dunque U non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è neanche un sottospazion vettoriale. Inoltre $\mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti perchè non sono uno miltiplo dell'altro.
b) Una applicazione $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con le proprietà richieste è ad esempio

$$F(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \quad F(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1.$$

□

Esercizio 2(A). (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - k\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \quad F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + (k+1)\mathbf{e}_4$$

$$F_k(\mathbf{e}_3) = 5\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva. [$k \neq -2, 5$]

b) Scelto un valore a di k per cui F_k non è iniettiva, si determinino due vettori distinti appartenenti a $F_a^{-1}(-5\mathbf{e}_2 - k\mathbf{e}_3 - 5\mathbf{e}_4)$.

c) Posto $k = 0$, si completi l'insieme $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. a) Si considera la matrice associata a F_k rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & k & 5 \\ -k & 2 & k \\ -1 & k+1 & 5 \end{pmatrix}$$

e si risolve il sistema linare omogeneo ad essa associato. Si svolge l'algoritmo di Gauss, ottendo così la matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+2 & 5 \\ 0 & 0 & k-5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, se $k = -2$ o $k = 5$ la matrice possiede solo due pivot, altrimente ne ha tre. Dunque F_k è iniettiva se e solo se $k \neq -2, 5$.
b) I valori di k per cui F_k non è iniettiva sono -2 e 5. Nel primo caso si ha $\operatorname{Ker} F_{-2} = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle$ e dunque

$$F_{-2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = F_{-2}(-\mathbf{e}_3) = -5\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 - 5\mathbf{e}_4.$$

Nel secondo caso, si ha invece $\operatorname{Ker} F_5 = \langle 5\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 \rangle$ e dunque

$$F_5(5\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3) = F_5(-\mathbf{e}_3) = -5\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3 - 5\mathbf{e}_4.$$

c) I vettori $F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)$ corrispondono ai vettori colonna della matrice associata a F_0 rispetto alla base canonica. Si considera dunque il vettore $\mathbf{e}_4$. Per provare che $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_4\}$ è effettivamente una base di $\mathbb{R}^4$ basta verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Ciò si ottiene svolgendo l'algoritmo di Gauss o calcolando il valore del determinante che risulta diverso da zero. $\square$

Esercizio 2(B). (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - k\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4, \quad F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 + (k+1)\mathbf{e}_4$$

$$F_k(\mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_2 + 2k\mathbf{e}_3 + 6\mathbf{e}_4.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva.

b) Scelto un valore a di k per cui F_k non è iniettiva, si determinino due vettori distinti appartenenti a $F_a^{-1}(-6\mathbf{e}_2 - 2k\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4)$.

c) Posto $k = 0$, si completi l'insieme $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. a) Si considera la matrice associata a F_k rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & k & 6 \\ -k & 3 & 2k \\ -2 & k+1 & 6 \end{pmatrix}$$

e si ragiona come nella versione A, ottendo così la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k+3 & 6 \\ 0 & 0 & 2(k-3) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, se $k = -3$ o $k = 3$ la matrice possiede solo due pivot, altrimenti ne ha tre. Dunque F_k è iniettiva se e solo se $k \neq -3, 3$. b) I valori di k per cui F_k non è iniettiva sono -3 e 3. Nel primo caso si ha $\text{Ker } F_{-3} = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle$ e dunque

$$F_{-3}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = F_{-3}(-\mathbf{e}_3) = -6\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4.$$

Nel secondo caso, si ha invece $\text{Ker } F_3 = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \rangle$ e dunque

$$F_3(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = F_3(-\mathbf{e}_3) = -6\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_3 - 6\mathbf{e}_4.$$

c) I vettori $F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)$ corrispondono ai vettori colonna della matrice associata a F_0 rispetto alla base canonica. Si considera dunque il vettore $\mathbf{e}_4$. Per provare che $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_4\}$ è effettivamente una base di $\mathbb{R}^4$ si ragiona come nella versione A. $\square$

Esercizio 2(C). (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad F_k(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - k\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 - (k+1)\mathbf{e}_4$$

$$F_k(\mathbf{e}_3) = -7\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 - 7\mathbf{e}_4.$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva.

b) Scelto un valore a di k per cui F_k non è iniettiva, si determinino due vettori distinti appartenenti a $F_a^{-1}(7\mathbf{e}_2 - k\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_4)$.

c) Posto $k = 0$, si completi l'insieme $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Svolgimento. a) Si considera la matrice associata a F_k rispetto alla base canonica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -k & -7 \\ k & -2 & k \\ 1 & -(k+1) & -7 \end{pmatrix}$$

e si ragiona come nella versione A, ottendo così la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(k+2) & -7 \\ 0 & 0 & k+7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, se $k = -2$ o $k = -7$ la matrice possiede solo due pivot, altrimenti ne ha tre. Dunque F_k è iniettiva se e solo se $k \neq -2, -7$. b) I valori di k per cui F_k non è iniettiva sono -2 e -7. Nel primo caso si ha Ker $F_{-2} = \langle \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \rangle$ e dunque

$$F_{-2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = F_{-2}(-\mathbf{e}_3) = -7\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 - 7\mathbf{e}_4.$$

Nel secondo caso, si ha invece Ker $F_{-7} = \langle 7\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \rangle$ e dunque

$$F_{-7}(7\mathbf{e}_1 - 7\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) = F_{-7}(-\mathbf{e}_3) = -7\mathbf{e}_2 - 7\mathbf{e}_3 - 7\mathbf{e}_4.$$

c) I vettori $F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3)$ corrispondono ai vettori colonna della matrice associata a F_0 rispetto alla base canonica. Si considera dunque il vettore $\mathbf{e}_4$. Per provare che $\{F_0(\mathbf{e}_1), F_0(\mathbf{e}_2), F_0(\mathbf{e}_3), \mathbf{e}_4\}$ è effettivamente una base di $\mathbb{R}^4$ si ragiona come nella versione A. $\square$

Esercizio 3(A). (9 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 3x_3, kx_2 + 3x_3, 3x_2 + kx_3)$$

e sia A_k la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore di T_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che 4 è autovalore di T_k.

c) Posto $k = 0$, si trovino, se esistono, tutte le matrici diagonali simili ad A_0.

e) Posto $k = 0$, se una matrice B ha lo stesso polinomio caratteristico di A_0. è vero che B è necessariamente simile ad A_0?

Svolgimento. a) L'immagine di $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ tramite T_k è corrisponde a

$$T_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 6\mathbf{e}_1 + (k+3)\mathbf{e}_2 + (k+3)\mathbf{e}_3$$

e dunque l'unico valore possibile affinché sia un autovettore è $k = 3$.
b) La matrice associata a T_k rispetto alla base canonica è data dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & k & 3 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

Dunque, affinché 4 sia un autovalore di T_k, è necessario che $\det(A_k - 4I) = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} \det(A_k - 4I) = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & k-4 & 3 \\ 0 & 3 & k-4 \end{pmatrix} &= -2\big((k-4)^2 - 9\big) \\ &= -2(k^2 - 8k + 7) \\ &= -2(k-1)(k-7) = 0, \end{aligned}$$

quindi risulta $k = 1$ o $k = 7$.
c) Se $k = 0$ si ha

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

e il polinomio caratteristico risulta dato da

$$\det(A_0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\big(\lambda^2 - 9\big).$$

Gli autovalori della matrice sono dunque distinti e corrispondono a $-3, 2, 3$. Dunque la matrice A_0 è diagonalizzabile e le matrici diagonali simili ad A_0 si ottengono inserendo i gli autovalori nella diagonale principale. Abbiamo quindi sei matrici diagonali, date da

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3(B). (9 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2 + 4x_3, kx_2 + 4x_3, 4x_2 + kx_3)$$

e sia A_k la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore di T_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che 3 è autovalore di T_k.

c) Posto $k = 0$, si trovino, se esistono, tutte le matrici diagonali simili ad A_0.

e) Posto $k = 0$, se una matrice B ha lo stesso polinomio caratteristico di A_0. è vero che B è necessariamente simile ad A_0?

Svolgimento. a) L'immagine di $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ tramite T_k è corrisponde a

$$T_k(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 + (k+4)\mathbf{e}_2 + (k+4)\mathbf{e}_3$$

e dunque l'unico valore possibile affinché sia un autovettore è $k = -5/2$.
b) La matrice associata a T_k rispetto alla base canonica è data dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 4 & k \end{pmatrix}.$$

Dunque, affinché 3 sia un autovalore di T_k, è necessario che $\det(A_k - 3I) = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} \det(A_k - 3I) = \det \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 \\ 0 & k-3 & 4 \\ 0 & 4 & k-3 \end{pmatrix} &= -4\big((k-3)^2 - 16\big) \\ &= -4(k^2 - 6k - 7) \\ &= -4(k+1)(k-7) = 0, \end{aligned}$$

quindi risulta $k = -1$ o $k = 7$.
c) Se $k = 0$ si ha

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

e il polinomio caratteristico risulta dato da

$$\det(A_0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 4 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)\big(\lambda^2 - 16\big).$$

Gli autovalori della matrice sono dunque distinti e corrispondono a $-4, -1, 4$. Dunque la matrice A_0 è diagonalizzabile e le matrici diagonali simili ad A_0 si ottengono inserendo i gli autovalori nella diagonale principale. Abbiamo quindi sei matrici diagonali, date da

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 3(C). (9 punti)
Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (kx_1 + 2x_2, 2x_1 + kx_2, x_1 + x_2 - 3x_3)$$

e sia A_k la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è autovettore di T_k.

b) Si stabilisca per quali valori di k si ha che 3 è autovalore di T_k.

c) Posto $k = 0$, si trovino, se esistono, tutte le matrici diagonali simili ad A_0.

e) Posto $k = 0$, se una matrice B ha lo stesso polinomio caratteristico di A_0. è vero che B è necessariamente simile ad A_0?

Svolgimento. a) L'immagine di $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ tramite T_k è corrisponde a

$$T_k(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = (k + 2)\mathbf{e}_1 + (k + 2)\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$$

e dunque l'unico valore possibile affinché sia un autovettore è $k = -3$.
b) La matrice associata a T_k rispetto alla base canonica è data dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dunque, affinché 3 sia un autovalore di T_k, è necessario che $\det(A_k - 3I) = 0$, ovvero

$$\begin{aligned} \det(A_k - 3I) = \det \begin{pmatrix} k-3 & 2 & 0 \\ 2 & k-3 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} &= -6\big((k-3)^2 - 4\big) \\ &= -6(k^2 - 6k + 5) \\ &= -6(k-1)(k-5) = 0, \end{aligned}$$

quindi risulta $k = 1$ o $k = 5$.
c) Se $k = 0$ si ha

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

e il polinomio caratteristico risulta dato da

$$\det(A_0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -6-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 6)\big(\lambda^2 - 4\big).$$

Gli autovalori della matrice sono dunque distinti e corrispondono a $-6, -2, 2$. Dunque la matrice A_0 è diagonalizzabile e le matrici diagonali simili ad A_0 si ottengono inserendo i gli autovalori nella diagonale principale. Abbiamo quindi sei matrici diagonali, date da

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 4(A). (4 punti)
Si determinino, se possibile, gli inversi degli elementi $[29]_{102}$ e $[45]_{102}$ in $\mathbb{Z}_{102}$.

Svolgimento. Svolgendo l'algoritmo di Euclide, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 102 &= 3 \cdot 29 + 15 \\ 29 &= 1 \cdot 15 + 14 \\ 15 &= 1 \cdot 14 + 1 \end{aligned}$$

e dunque, effettuando le opportune sostituzioni, risulta

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 15 - 1 \cdot 14 \\ &= 2 \cdot 15 - 1 \cdot 29 \\ &= 2 \cdot 102 - 7 \cdot 29, \end{aligned}$$

cioè, $[29]_{102}^{-1} = [-7]_{102}$.
Poiché 3 è divisore comune di 45 e 102, i due valori non sono coprimi e dunque $[45]_{102}$ non è invertibile in $\mathbb{Z}_{102}$. $\square$

Esercizio 4(B). (4 punti)
Si determinino, se possibile, gli inversi degli elementi $[27]_{122}$ e $[48]_{122}$ in $\mathbb{Z}_{122}$.

Svolgimento. Svolgendo l'algoritmo di Euclide, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 122 &= 4 \cdot 27 + 14 \\ 27 &= 1 \cdot 14 + 13 \\ 14 &= 1 \cdot 13 + 1 \end{aligned}$$

e dunque, effettuando le opportune sostituzioni, risulta

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 14 - 1 \cdot 13 \\ &= 2 \cdot 14 - 1 \cdot 27 \\ &= 2 \cdot 122 - 9 \cdot 27, \end{aligned}$$

cioè, $[27]_{102}^{-1} = [-9]_{102}$.
Poiché 2 è divisore comune di 48 e 122, i due valori non sono coprimi e dunque $[45]_{102}$ non è invertibile in $\mathbb{Z}_{102}$. $\square$

Esercizio 4(C). (4 punti)
Si determinino, se possibile, gli inversi degli elementi $[43]_{115}$ e $[35]_{115}$ in $\mathbb{Z}_{115}$.

Svolgimento. Svolgendo l'algoritmo di Euclide, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} 115 &= 2 \cdot 43 + 29 \\ 43 &= 1 \cdot 29 + 14 \\ 29 &= 2 \cdot 14 + 1 \end{aligned}$$

e dunque, effettuando le opportune sostituzioni, risulta

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 29 - 2 \cdot 14 \\ &= 3 \cdot 29 - 2 \cdot 43 \\ &= 3 \cdot 115 - 8 \cdot 43, \end{aligned}$$

cioè, $[43]_{115}^{-1} = [-8]_{115}$.
Poiché 5 è divisore comune di 35 e 115, i due valori non sono coprimi e dunque $[35]_{115}$ non è invertibile in $\mathbb{Z}_{115}$. $\square$