Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
24 giugno 2023

Il parametro b è uguale a:
(il resto della divisione del proprio numero di matricola per 4)+1 .

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (7 punti)
Sia $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \,|p(-2) \leq 0 \text{ e } p(1) = 0\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

a) Si stabilisca se W è chiuso rispetto alla somma e/o al prodotto per scalari (fornendo controesempi in caso di risposta negativa).

b) Si stabilisca se $U = \langle x^3 - x^2 - 4x + 4 \rangle$ è contenuto in W.

c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $x^3 + kx^2 - 1 - k$ appartiene a W.

Esercizio 2. (9 punti)
Si considerino le applicazioni lineari $F_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definite da: $F_k(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 8\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_2) = k\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_4$, $F_k(\mathbf{e}_3) = k\mathbf{e}_1 - 15\mathbf{e}_2 + k\mathbf{e}_3 - k\mathbf{e}_4$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è iniettiva.

b) Sia $\mathbf{w} = -3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3 + 5\mathbf{e}_4$. Si stabilisca per quali valori di k si ha che $\mathbf{w}$ appartiene a $\mathrm{Im}\,(F_k)$.

c) Per quali valori di k è possibile completare $F_k(\mathbf{e}_1), F_k(\mathbf{e}_2), F_k(\mathbf{e}_3)$ ad una base di $\mathbb{R}^4$?

d) Posto $k = 0$, determinare le equazioni cartesiane di $\mathrm{Im}\,(F_0)$.

Esercizio 3. (10 punti) Sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T_k(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + kx_2 - 2x_3, x_2, x_1 - kx_2 + 2x_3)$$

e sia A_k la matrice ad essa associata rispetto alla base canonica in dominio e codominio.

a) Si stabilisca per quali valori a di k si ha che T_k è diagonalizzabile.

b) Scelto un valore a per cui T_a è diagonalizzabile, si determinino una matrice diagonale D simile ad A_a e due matrici P_1, P_2 invertibili tali che $P_1^{-1}A_aP_1 = D = P_2^{-1}A_aP_2$.

c) Si stabilisca se esistono valori di k tali che il vettore $-2\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_3$ sia autovettore di T_k.

d) Posto $k = -5$ si determini, se possibile, una base ordinata $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a T_{-5} rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio sia $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4. (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza:

$$77x \equiv_{246} b.$$