SOLUZIONE DI $\underline{\underline{\text{ALCUNI}}}$ ESERCIZI ESAME 13/06/2019

versione A

Esercizio 1

$$W = \{ A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A + A^T = \underline{0} \}$$

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

la condizione $A + A^T = \underline{0}$ diventa:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} a_{11} + a_{11} = 0 \\ a_{12} + a_{21} = 0 \\ a_{13} + a_{31} = 0 \\ a_{21} + a_{12} = 0 \\ a_{22} + a_{22} = 0 \\ a_{23} + a_{32} = 0 \\ a_{31} + a_{13} = 0 \\ a_{32} + a_{33} = 0 \\ a_{33} + a_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_{11} = 0 \\ a_{21} = -a_{12} \\ a_{13} = -a_{31} \\ 2a_{22} = 0 \\ a_{23} = -a_{32} \\ 2a_{33} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{13} = -a_{31} \\ a_{12} = -a_{21} \\ a_{23} = -a_{32} \end{cases}$$

Quindi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} \\ +a_{21} & 0 & -a_{32} \\ +a_{31} & +a_{32} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{21}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a_{21} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{21}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R} \right.$$

W è l'insieme delle combinazioni lineari delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ quindi è un sottospazio

Inoltre è immediato verificare che le matrici su scritte sono linearmente indipendenti (perché le loro coordinate sono le righe non nulle di una matrice a scala) quindi una base di W è

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

b) U è l'insieme dei vettori (x_1, x_2, x_3, x_4) tali che il ~~seguente~~ sistema lineare associato alla seguente matrice abbia soluzione:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & -2 & x_3 \\ -1 & 1 & 3 & x_4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 - R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -2 & -2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 3 & 3 & x_4 + x_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ R_3 + 2R_2 \\ R_4 - 3R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_1 + 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_1 - 3x_2 \end{array}\right)$$

Le equazioni cartesiane di U sono: $\begin{cases} x_3 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_4 + x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 2

la matrice associata ad F_s rispetto alla base canonica è $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & -6 \\ 2 & 5 & -2s \end{pmatrix}$

a) F_s è isomorfismo $\Leftrightarrow \det A_s \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad (-12s+30)+2(-15-12)=0$

laplace 1^a riga $\Longleftrightarrow -12s-24 \neq 0 \Longleftrightarrow s \neq -2$

(b) $\ker T_{-2}$ è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & -6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ R_2+3R_1 \\ R_3-2R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ R_2/6 \\ R_3/5 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3-R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

le soluz dipendono da un parametro $\quad x_1=-2x_3=-2t$
$x_2=0$
$x_3=t$

$\ker T_{-2} = \langle(-2,0,1)\rangle$

$\operatorname{Im} T_{-2}$ è il sottospazio generato dalle colonne di A_{-2}

Per il teorema della dimensione ~~dim~~ $\dim \operatorname{Im} T_{-2} = 3-\dim \ker T_{-2} = 2$. le prime due colonne di A_s sono lin indipendenti

$\Rightarrow$ sono una base di $\operatorname{Im} T_{-2}$

$\beta = \{(1,-3,2),(0,6,5)\}$

~~Ker~~ T_{-2} è un sottospazio di dimensione 1. se c'è un vettore non nullo di $\ker T_{-2}$ contenuto in $\operatorname{Im} T_{-2}$ allora tutto il nucleo è contenuto in $\operatorname{Im} T_{-2}$

Per verificare se accade ciò verifico se $(-2,0,1) \in \langle(1,-3,2),(0,6,5)\rangle$, ~~cioè controllo~~

Basta controllare che i vettori $(-2,0,1)$ $(1,-3,2)$ $(0,6,5)$ siano linearmente dipendenti (perché?)

Utilizziamo l'algoritmo di Gauss in modo diretto

$$\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3+2R_1 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & -6 & 5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3+R_2 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{matrix}$$

I vettori sono lin indip, quindi $(-2,0,1) \in \operatorname{Im} F_{-2}$ quindi l'unico vettore che appartiene a $\operatorname{Im} F_{-2} \cap \operatorname{Ker} F_{-2}$ è il vettore nullo

Nota: nella versione B il nucleo è contenuto nell'immagine ..

(c) la controimmagine di $(-1,9,3)$ è l'insieme

$\{(x_1,x_2,x_3) \mid F_{-2}(x_1,x_2,x_3) = (-1,9,3)\}$

ed è l'insieme delle sol del sist. lin associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -6 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ R_2+3R_1 \\ R_3-2R_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sist ammette infinite soluz. che dipendono da 1 parametro

$$x_1 = -1-2x_3$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = t$$

$$F^{-1}(-1,9,3) = \{(-1-2t, 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

(d) soluzione volutamente mancante: andare a ricevimento o chiedere in aula.

③ $A_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -K & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

calcoliamo il polinomio caratteristico

$\det(A_K - xI) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ -k & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} =$ laplace 3ª riga

$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2-x & 2 \end{pmatrix} - x \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -k & -2-x \end{pmatrix} =$

$= 2-2-x-x\,(x^2+2x+k) =$

$= -x^3 - 2x^2 - kx - x = -x\,(x^2+2x+k+1)$

un autovalore è $\lambda = 0$

cerchiamo le soluzioni di $x^2+2x+k+1=0$

il discriminante è $\frac{\Delta}{4} = 1-(k+1) = -k$

se $K > 0$ non ci sono soluzioni

se $K \leq 0$ gli autovalori sono

$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-K}$

~~dist~~ se $K=0$ $\lambda_1 = \lambda_2$ → studiare a parte

~~vedi~~ se $K < 0$ λ_1 e λ_2 sono distinti, ma ~~un~~

l'autovalore $-1+\sqrt{-K}$ potrebbe essere $= 0$.

Questo succede esattamente quando $\sqrt{-K} = 1$ cioè $K = -1$

quindi per $K<0$ e $K \neq -1$ ci sono 3 autovalori distinti e la matrice è diagonalizzabile

Per $K=0$ abbiamo $\lambda=0$ con $m_a(0)=1$

$\lambda=-1$ con $m_a(-1)=2$

$$\operatorname{Ker}(A_0+I)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Risolviamo il sist

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l}\\ \\ R_3-R_1\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right) \quad R_3-R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

$V(-1)$ ha dim 1 $\Rightarrow T_0$ non è diagonalizzabile

per $K=-1$ abbiamo $\lambda=0$ con $m_a(0)=2$

$\lambda=-2$ con $m_a(-2)=1$

$$\operatorname{Ker}(A_{-1}-0I)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Risolviamo il sist.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$m_g(0)=1 \neq m_a(0)$ $\Rightarrow T_{-1}$ non è diagonalizzabile

(b) La richiesta equivale a: si trovino, se possibile, i valori di k tali che A_k sia diagonalizzabile, con autovalori -4 0 2

gli autovalori di A_k sono 0 $\quad -1\pm\sqrt{-k}$ e $-1\mp\sqrt{-k}$

dove succedere che $-1+\sqrt{-k}=2 \Rightarrow \sqrt{-k}=3 \Rightarrow k=-9$

e $-1-\sqrt{-k}=-4 \Rightarrow -\sqrt{-k}=-3 \Rightarrow \sqrt{-k}=3 \Rightarrow k=-9$

(c) Poniamo $k=-9$

$$A_{-4}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$T_{-4}(e_2+e_3)=\cancel{A}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=$$

$0(e_2+e_3) \Rightarrow e_2+e_3$ è autovettore di autovalore 0

$$T_{-4}(e_1+2e_2+e_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=1(e_1+2e_2+e_3)$$

$\Rightarrow e_1+2e_2+e_3$ è autovettore di autovalore 0

A_{-4} è diagonalizzabile per il punto (a), con autovalori

$0 \quad -1\pm\sqrt{4}=1$ e $-1-\sqrt{4}=-3$

Per completare $\{v_1, v_2\}$ ad una base di autovettori dobbiamo calcolare $V(-3)=\operatorname{Ker}(A_{-4}+3I)=$

$$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Risolviamo il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 0\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ 4 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l|l} \; 1 \;\; 0 \;\; 3 & 0 \\ R_2-3R_1 \;\; 0 \;\; 1 \; -10 & 0 \\ R_3-4R_1 \;\; 0 \;\; 1 \; -10 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \; 1 \;\; 0 \;\; 3 & 0 \\ \; 0 \;\; 1 \; -10 & 0 \\ R_3-R_2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 & 0 \end{array}$$

$x_1 = -3x_3$ $\qquad V(-3) = \langle (-3, 10, 1) \rangle$

$x_2 = 10\, x_3$

una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T_{-4} è $\{v_1, v_2, (-3,10,1)\}$

Nota: non occorre verificare che i 3 autovettori sono lin indipendenti perché sono relativi ad autovalori distinti, e ce lo garantisce la teoria.

ⓓ la matrice P richiesta è $P = I_{\beta e}$ ove β è una base di autovettori, quindi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$