Esercizi tutorato su equazioni cartesiane e parametriche per sottospazi di $\mathbb{R}^n$

giuseppe.bianco5@studio.unibo.it

-un breve richiamo di teoria sulla descrizione cartesiana e parametrica di sottospazi vettoriali.
-il primo esercizio è quello più teorico e con molte verifiche non necessarie in sede di esame ma utile per una comprensione generale del rapporto fra rappresentazione cartesiana e parametrica.
-il secondo esercizio ha conti molto semplici ed è finalizzato ad una comprensione geometrica di che cosa anche semplici calcoli nascondono.
-il terzo esercizio consiste nella descrizione, tramite equazioni cartesiane, di un sottospazio dipendente da un parametro e serve a ripassare la modalità risolutiva di sistemi lineari parametrici oltre ad esser un buon esercizio di conti.
-il quarto esercizio pone l'attenzione sulla descrizione tramite equazioni cartesiane dei due sottospazi più importanti nella teoria delle applicazioni lineari: il nucleo e l'immagine.

Capitolo 1

Ricavare equazioni cartesiane per un sottospazio di cui siano noti i generatori

1.1 Quadro teorico e generale di svolgimento

In generale da un insieme di equazioni cartesiane che descrivono un sottospazio sappiamo ricavare le variabili libere, la dimensione ed i vettori di una base in modo che ogni combinazione lineare di tali vettori soddisfi ancora il sistema lineare iniziale. Il viceversa è invece un po' più complesso e lo vedremo sotto e consiste nel passare da una descrizione parametrica in cui i coefficienti delle combinazioni lineari rispetto ad un insieme di generatori sono espliciti ad un insieme di equazioni che esprimono i vincoli ossia le caratteristiche che i vettori devono soddisfare per appartenere al sottospazio (tipicamente relazioni lineari ossia di ordine uno che coinvolgono le componenti dei vettori). Poichè, fissata una base, uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n è isomorfo ad $\mathbb{R}^n$ sotto faremo l'ipotesi non restrittiva di lavorare con sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$.

Sia dato un sottospazio vettoriale S di $\mathbb{R}^n$ generato dai vettori $v_1, v_2..., v_m$ ossia $S \leq \mathbb{R}^n$ e $S =< v_1, v_2..., v_i, ...v_{m-1}, v_m >$ e siano i vettori v_i di coordinate, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, $v_i = (v_{i,1}, v_{i,2}, ..., v_{i,j}, ..., v_{i,n-1}, v_{i,n})$ per $i = 1, ...m$ (indice nell'insieme dei vettori di S) e $j = 1, ...n$ (indice sulle componenti dei vettori in $\mathbb{R}^n$) abbiamo quindi a che fare con m vettori di $\mathbb{R}^n$ ossia vettori di n componenti.

Le **equazioni parametriche** del sottospazio S sono per definizione l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori appartenenti al sottospazio ossia dei suoi generatori $S = \{w \in \mathbb{R}^n | w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + +\lambda_i v_i + ... + \lambda_{m-1} v_{m-1} + \lambda_m v_m \quad con \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, ..., m\} = \{w \in \mathbb{R}^n | w =$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ \vdots \\ v_{1,j} \\ \vdots \\ v_{1,n-1} \\ v_{1,n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{2,j} \\ \vdots \\ v_{2,n-1} \\ v_{2,n} \end{pmatrix} + ... + \lambda_i \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,j} \\ \vdots \\ v_{i,n-1} \\ v_{i,n} \end{pmatrix} + ... + \lambda_{m-1} \begin{pmatrix} v_{m-1,1} \\ v_{m-1,2} \\ \vdots \\ v_{m-1,j} \\ \vdots \\ v_{m-1,n-1} \\ v_{m-1,n} \end{pmatrix} + \lambda_m \begin{pmatrix} v_{m,1} \\ v_{m,2} \\ \vdots \\ v_{m,j} \\ \vdots \\ v_{m,n-1} \\ v_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n\} =$

$$\{w \in \mathbb{R}^n | \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{i,1} & \cdots & v_{m-1,1} & v_{m,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{i,2} & \cdots & v_{m-1,2} & v_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{i,j} & \cdots & v_{m-1,j} & v_{m,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{i,n-1} & \cdots & v_{m-1,n-1} & v_{m,n-1} \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{i,n} & \cdots & v_{m-1,n} & v_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \\ \lambda_m \end{pmatrix} \}$$

Le **equazioni parametriche** saranno quelle associate al sistema lineare $b = Ax$ con $b = w$, x=vettore colonna dei coefficienti λ_i ed A matrice $n \times m$ con primo indice colonna ($i = 1, ..., m$) secondo indice riga ($j = 1, ..., n$) e nella i-esima colonna le coordinate del vettore v_i e per righe le j-esime componenti dei vettori v_i:

$$\begin{cases} v_{1,1}\lambda_1 + v_{2,1}\lambda_2 + \cdots + v_{i,1}\lambda_i + \cdots + v_{m-1,1}\lambda_{m-1} + v_{m,1}\lambda_m = w_1 \\ v_{1,2}\lambda_1 + v_{2,2}\lambda_2 + \cdots + v_{i,2}\lambda_i + \cdots + v_{m-1,2}\lambda_{m-1} + v_{m,2}\lambda_m = w_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ v_{1,j}\lambda_1 + v_{2,j}\lambda_2 + \cdots + v_{i,j}\lambda_i + \cdots + v_{m-1,j}\lambda_{m-1} + v_{m,j}\lambda_m = w_j \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ v_{1,n-1}\lambda_1 + v_{2,n-1}\lambda_2 + \cdots + v_{i,n-1}\lambda_i + \cdots + v_{m-1,n-1}\lambda_{m-1} + v_{m,n-1}\lambda_m = w_{n-1} \\ v_{1,n}\lambda_1 + v_{2,n}\lambda_2 + \cdots + v_{i,n}\lambda_i + \cdots + v_{m-1,n}\lambda_{m-1} + v_{m,n}\lambda_m = w_n \end{cases}$$

Cerchiamo ora le **equazioni cartesiane** che descrivono il sottospazio S: prendiamo la matrice A costruita nel passo precedente, che ha per colonne le coordinate dei vettori che generano S, perchè un generico vettore w stia in S deve potersi scrivere come combinazione lineare degli elementi generatori di S ossia deve esistere almeno una soluzione del sistema lineare visto sopra $Ax = b$ con $w = b$ ed x vettore dei coefficienti della combinazione lineare, si impone allora, perchè il sistema ammetta almeno una soluzione, che $rg(A) = rg(A|b)$ ossia il rango della matrice completa sia uguale a quello della matrice incompleta ossia l'"ultima colonna" dei termini noti ($b = w$) sia combinazione lineare secondo i coefficienti ($x_i = \lambda_i$) delle colonne precedenti (v_i) ossia dei vettori di S quindi, in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$, vogliamo che

$$\text{rango} \left(\begin{array}{ccccccc|c} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{i,1} & \cdots & v_{m-1,1} & v_{m,1} & w_1 \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{i,2} & \cdots & v_{m-1,2} & v_{m,2} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{i,j} & \cdots & v_{m-1,j} & v_{m,j} & w_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{i,n-1} & \cdots & v_{m-1,n-1} & v_{m,n-1} & w_{n-1} \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{i,n} & \cdots & v_{m-1,n} & v_{m,n} & w_n \end{array} \right) =$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & \cdots & v_{i,1} & \cdots & v_{m-1,1} & v_{m,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & \cdots & v_{i,2} & \cdots & v_{m-1,2} & v_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,j} & v_{2,j} & \cdots & v_{i,j} & \cdots & v_{m-1,j} & v_{m,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{i,n-1} & \cdots & v_{m-1,n-1} & v_{m,n-1} \\ v_{1,n} & v_{2,n} & \cdots & v_{i,n} & \cdots & v_{m-1,n} & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Usando il sistema di eliminazione di Gauss sulla matrice completa (e quindi anche sulla matrice incompleta) otterremo A' e $(A|b)'$ le due matrici ridotte a scala: il numero dei pivot (primo, come ordine dato dalle colonne, elemento non nullo per ogni riga) darà il numero delle righe non nulle ossia il rango della matrice completa ed incompleta e poichè la matrice completa differisce da quella incompleta eventualemente solo per gli elementi nell' "ultima colonna" aggiunta ($b = w$) se in A' abbiamo delle righe nulle in fondo dovremo avere nulli anche gli elementi delle corrispondenti righe nella colonna w otterremo così delle relazioni lineari fra le incognite (le coordinate w_i di w) che dovremo eguagliare a zero ossia ragionando sulla matrice completa dovremo annullare le combinazioni lineari nelle componenti incognite del generico vettore w corrispondenti alle righe nulle della matrice incompleta: l'insieme di tali condizioni darà un insieme di equazioni o sistema lineare che esprime le relazioni fra le coordinate del generico vettore w che sta in S. La matrice a gradini/scala che si otterrà mediante le tre operazioni elementari/metodo di eliminazione di Gauss sarà del tipo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \diamondsuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \diamondsuit \end{array}\right)$$

Con gli elementi indicati con $\cdots$ qualsiasi, gli elementi $\diamondsuit$ da discutersi e gli elementi $\bullet$ possibilmente non nulli: in tal caso detti pivot ossia "primo" elemento, partendo da sinistra ossia rispetto all'ordine delle colonne, non nullo della riga. Se si otterranno un numero di pivot uguale al numero delle colonne (m) ossia la matrice avrà rango m si potrà sostituire all'indietro ed ottenere una sola soluzione altrimenti si avranno alcuni parametri liberi nel caso $rg(A) = rg(A|b) < m$ oppure un sistema incompatibile nel caso $rg(A) \neq rg(A|b)$ (le uniche tre tipologie di soluzioni nei sistemi lineari). Quindi perchè sia verificata la condizione che il vettore termine noto appartenga al sottospazio generato dai vettori colonna si dovrà avere che esista almeno una soluzione/m-pla $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ che esprime tale vettore w come combinazione lineare degli altri v_i per $i = 1, ..., m$ ossia si dovrà avere $rg(A) = rg(A|b)$ e quindi gli eventuali elementi dell'ultima colonna dei termini noti in $(A|b)'$, funzioni delle generiche componenti del vettore w, i cui indici di riga corrispondono alle ultime righe in cui la matrice incompleta ridotta ha righe nulle, ed indicati nella matrice con $\diamondsuit$ si dovranno porre uguale a zero: avremo quindi un $numero\ di\ equazioni = numero\ righe(A) - rango(A) = n - rg(A)$ nelle n incognite date dalle componenti di w e $dim(soluzione/sottospazio\ S) = n - (n - rg(A)) = rg(A)$ ossia il rango della matrice/numero vettori linearmente indipendenti darà il numero di vettori della base ovvero la dimensione dello spazio vettoriale S.

1.2 Esercizi

ESERCIZIO 1
Sia $S =< (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 3), (1, -1, 1, -1) >$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
a) Cercare con il metodo sopra esposto le equazioni cartesiane di S.
b) Verificare la compatibilità dei risultati del punto precedente con la descrizione parametrica con cui è definito l'insieme.
c) Estrarre una base di S e con il metodo sopra esposto trovarne le equazioni cartesiane.
d) Trovare le equazioni parametriche di S.
e) Trovare almeno 3 equazioni cartesiane che descrivono S.
SVOLGIMENTO

a) Ponendo, come visto sopra, i vettori per colonne e come ultima colonna le coordinate del generico vettore che deve stare in S:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 1 & 2 & 3 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & -1 & t \end{array}\right)$$

riduciamo con il metodo di Gauss la matrice completa ed imponiamo che il rango della matrice completa sia uguale a quello della matrice incompleta:
PASSO 1: scambiamo la prima e la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 1 & 2 & 3 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & -1 & t \end{array}\right) \rightarrow_{R_1 \leftrightarrow R_2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 2 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 3 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & -1 & t \end{array}\right)$$

PASSO 2: sottraiamo alla seconda due volte la prima riga, sottraiamo alla terza la prima riga, sottraiamo alla quarta due volte la prima riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 2 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 3 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & -1 & t \end{array}\right) \rightarrow_{R_2=R_2-2R_1;R_3=R_3-R_1;R_4=R_4-2R1} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & -3 & -3 & 1 & t-2y \end{array}\right)$$

PASSO 3: sottraiamo alla quarta la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & -3 & -3 & 1 & t-2y \end{array}\right) \rightarrow_{R_4=R_4-R_2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right)$$

PASSO 4: sommiamo alla quarta la terza riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right) \rightarrow_{R_4=R_4+R_3} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x+z-y \end{array}\right)$$

PASSO 2 ALTERNATIVO: sottraiamo alla seconda due volte la prima riga, sottraiamo alla terza la prima riga, sottraiamo alla quarta la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 2 & 1 & 3 & 1 & x \\ 1 & 2 & 3 & 1 & z \\ 2 & 1 & 3 & -1 & t \end{array}\right) \rightarrow_{R_2=R_2-2R_1;R_3=R_3-R_1;R_4=R_4-R2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right)$$

con il PASSO 4 si arriva alla matrice a scala trovata sopra ossia:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & y \\ 0 & -3 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-x+z-y \end{array}\right)$$

La matrice incompleta ha rango 3 (si hanno tre pivot $1, -3, 2$ nelle colonne prima, seconda e quarta rispettivamente) impongo che la matrice completa abbia rango 3 annullando gli elementi (l'elemento di riga e colonna quarta) nell'ultima colonna corrispondenti alle righe nulle in fondo alla matrice incompleta ridotta (qui la sola riga quarta) quindi l'equazione cartesiana del sottospazio S è $t - x + z - y = 0$ ossia l'insieme dei vettori in cui la somma della terza e quarta coordinata è uguale alla somma della prima e della seconda ossia $S =< (2, 1, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (3, 3, 3, 3), (1, -1, 1, -1) >= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | t - x + z - y = 0\}$.

b) Verifichiamo che i generatori di S e le loro combinazioni lineari verificano il vincolo dato dall'equazione $t - x + z - y = 0$: denominiamo $v_1 = (2, 1, 1, 2), v_2 = (1, 2, 2, 1), v_3 =$

$(3,3,3,3), v_4=(1,-1,1,-1)$ chiaramente ogni v_i $i=1,..4$ verifica l'equazione $t-x+z-y=0$ infatti $\begin{cases} -2-1+1+2=0 & (v_1) \\ -1-2+2+1=0 & (v_2) \\ -3-3+3+3=0 & (v_3) \\ -1+1+1-1=0 & (v_4) \end{cases}$ inoltre per linearità ciò vale anche per le combinazioni lineari $v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\lambda_3 v_3+\lambda_4 v_4$ ossia $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ come sistema le coordiante del generico vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ di S sono del tipo $\begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4=x \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3-\lambda_4=y \\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4=z \\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3-\lambda_4=t \end{cases}$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $i=1,...,4$; tali coordinate soddisfano l'equazione cartesiana vista sopra e che caratterizza i vettori del sottospazio S infatti

$$-x-y+z+t=-(2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4)-(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3-\lambda_4)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\lambda_4)+(2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3-\lambda_4)=0$$

Da notarsi che se fossero stati quattro vettori linearmente indipendenti (diversamente da quanto sopra avendo $v_3=v_1+v_2$) si sarebbe ottenuto rango della matrice incompleta=4=rango della matrice completa e quindi non si sarebbe trovata alcuna equazione compatibilemente con il fatto che essendo $S=\mathbb{R}^4$ non si può aver alcun vincolo su questi vettori che sono del tutto generici e qualsiasi equazione che non fosse un identità avrebbe prescritto delle condizioni non valide per un generico vettore di $\mathbb{R}^4$.

c) Denominiamo $v_1=(2,1,1,2), v_2=(1,2,2,1), v_3=(3,3,3,3), v_4=(1,-1,1,-1)$ poniamo per righe tali vettori e riduciamo con il metodo di Gauss diretto: i vettori corrispondenti alle righe non nulle della matrice ridotta a scala saranno i vettori linearmente indipendenti di S che ne costituiranno una base

PASSO 1: scambio le prime due righe

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow_{R_1 \leftrightarrow R_2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

PASSO 2: sottraiamo alla seconda due volte la prima riga, sottraiamo alla terza tre volte la prima riga, sottraiamo alla quarta la prima riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow_{R_2=R_2-2R_1; R_3=R_3-3R_1; R_4=R_4-R1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

PASSO 3: sottraiamo alla terza ed alla quarta tre volte la seconda riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow_{\substack{R_3=R_3-3R_2 \\ R_4=R_4-3R2}} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

quindi i vettori corrispondenti alla prima, seconda e quarta riga sono linearmente indipendenti (si noti che abbiamo scambiato prima e seconda riga e nel caso la prima di esse si fosse verificata esser dipendente dalle altre sarebbe stata in realtà la seconda dipendente ed in modo analogo con la seconda) ovvero, nell'ordine, v_2, v_1, v_4 sono linearmente indipendenti.

Ora applichiamo il metodo visto sopra per ricavare le equazioni cartesiane nel caso di questi tre

vettori per scoprire che otterremo la stessa equazione cartesiana vista nel punto a) coerentemente con il fatto che avendo scelto una base non abbiamo perso nè aggiunto alcuna informazione rispetto all'avere un insieme di generatori non indipendenti:
compiendo le stesse operazioni viste nel punto a), non considerando la terza colonna, abbiamo:
PASSO 1: scambiamo la prima e la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \\ 2 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \to_{R_1 \leftrightarrow R_2} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & z \\ 2 & 1 & -1 & t \end{array}\right)$$

PASSO 2: sottraiamo alla seconda due volte la prima riga, sottraiamo alla terza la prima riga, sottraiamo alla quarta due volte la prima riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & z \\ 2 & 1 & -1 & t \end{array}\right) \to_{R_2=R_2-2R_1;R_3=R_3-R_1;R_4=R_4-2R1} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & -3 & 1 & t-2y \end{array}\right)$$

PASSO 3: sottraiamo alla quarta la seconda riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & -3 & 1 & t-2y \end{array}\right) \to_{R_4=R_4-R_2} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right)$$

PASSO 4: sommiamo alla quarta la terza riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & -2 & t-x \end{array}\right) \to_{R_4=R_4+R_3} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & y \\ 0 & -3 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 2 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & t-x+z-y \end{array}\right)$$

l'equazione che descrive S è ancora $t-x+z-y=0$. Tutte le considerazioni fatte nel punto b) sono valide anche in tal caso.

d) Le equazioni parametriche di S sono quelle determinate sopra nel punto b):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ossia } \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = z \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases} \quad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$i = 1, ..., 4$ e con (x, y, z, t) generico vettore di S in coordinate rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Proviamo ora che dall'equazione caratterisitica trovata nel punto a) individuando i parametri liberi si ricava una base (che avrà tre elementi essendo il rango della matrice incompleta tre poichè $v_3 = v_1 + v_2$) e che il sottospazio generato è il medesimo con entrambe le "definizioni" cartesiana e parametrica: come nel punto a) abbiamo ricavato le equazioni cartesiane dalla forma parametrica S ora faremo il viceversa. Sia $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | t - x + z - y = 0\}$ ricaviamone la forma parametrica, la dimensione ed una base (in analogia al punto b): $-x-y+z+t = 0$ dice che $x = -y+z+t$ con $y, z, t \in \mathbb{R}$ liberi ossia $dim(S) = numero\ variabili - numero\ equazioni = numero\ variabili\ libere$ ossia $4 - 1 = 3$. Usando un metodo generale per ricavare una base fissiamo alternativamente il valore di un parametro uguale a 1 e quello di tutti gli altri nullo:

$$\begin{cases} (-1, 1, 0, 0) \quad (y = 1, z = 0 = t) \\ (1, 0, 1, 0) \quad (z = 1, y = 0 = t) \\ (1, 0, 0, 1) \quad (t = 1, y = 0 = z) \end{cases}$$

i tre vettori si verificano esser linearmente indipendenti e quindi sono una base per S. Con la scelta $\begin{cases} (2, 1, 1, 2) \quad (y = 1, z = 1, t = 2) \\ (1, 2, 2, 1) \quad (y = 2, z = 2, t = 1) \\ (1, -1, 1, -1) \quad (y = -1, z = 1, t = -1) \end{cases}$
si sarebbe ottenuta la base da cui eravamo partiti nel punto c) per ricavare le equazioni carte-

siane: in tal senso quindi le procedure descritte nei precedenti punti a)/c) e d)/b) sono l'una il viceversa dell'altra.

e) Usando il teorema di Rouché-Capelli si ha che, dato W sottospazio di $\mathbb{R}^n$ descritto da equazioni cartesiane ossia dalla matrice A come insieme dei punti tali che $Ax = 0$, ragionando sul sistema e sulla matrice associata, vale $dim(W) = numero\ variabili/numero\ colonne - numero\ equazioni\ indipendenti/numero\ righe\ matrice\ ridotta = n - rg(A)$. Nel nostro caso si ha $3 = dim(S) = 4 - numero\ equazioni\ indipendenti/numero\ righe\ matrice\ ridotta = 4 - rg(A)$ quindi per forza $3 = 4 - rg(A)$ ossia $rg(A) = 4 - 3 = 1$ per cui si ha una sola equazione indipendente ad esempio quella determinata sopra nei punti precedenti $t - x + z - y = 0$ ma ciò non impedisce di descrivere in modo ridondante S con più equazioni differenti ma linearmente dipendenti (in tal caso essendo una sola equazioni le altre saranno multiple di una sola equazione "fondamentale") si possono scegliere tre scritture equivalenti dell'equazione trovata sopra così da aver ad esempio il seguente sistema lineare $\begin{cases} t - x + z - y = 0 \\ 3t + 3z = 3y + 3x \\ 2t - 2x + 2z = 2y \end{cases}$

ESERCIZIO 2

Siano e_1, e_2 vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $S =< e_1, e_2 >=< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

a) Cercare con il metodo sopra esposto le equazioni cartesiane di S.

b) Interpretando e_1, e_2 come vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ con $S =< e_1, e_2 >=< (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) >$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ cercare con il metodo sopra esposto le equazioni cartesiane di S.

SVOLGIMENTO

a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

la matrice è già ridotta in forma a scala/gradini quindi affinchè

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{array}\right) = rg(A|b)$$

è necessario che z sia nullo ossia otteniamo l'unica equazione $z = 0$ quindi $S =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$. Vedendo S come insieme delle combinazioni lineari di e_1, e_2, $S =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ovvero S è l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ parametri liberi: geometricamente S descrive il piano (due parametri liberi: le prime due coordinate) dei vettori con terza coordinata nulla. Analogamente partendo dall'equazione $z = 0$ l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ ha tre varibili ed una sola equazione quindi descrive un insieme di dimensione $3 - 1 = 2$: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Interpretando quanto sopra in $\mathbb{R}^4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t \end{array}\right)$$

la matrice è già ridotta in forma a scala/gradini quindi affinchè

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t \end{array}\right) = rg(A|b)$$

è necessario che z e t siano nulli ossia otteniamo le due equazioni $z = 0$ e $t = 0$ quindi $S =< (1,0,0,0),(0,1,0,0) >= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | z = 0, t = 0\}$. Vedendo S come insieme delle combinazioni lineari di e_1, e_2 si ha che:

$$S =< (1,0,0,0),(0,1,0,0) >= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

ovvero S è l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ parametri liberi: geometricamente S descrive il piano (due parametri liberi: le prime due coordinate) in $\mathbb{R}^4$ dei vettori con terza e quarta coordinata nulla. Analogamente partendo dalle equazioni $\begin{cases} z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ l'insieme $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | z = 0, t = 0\}$ ha quattro varibili e due equazioni quindi descrive un insieme di dimensione $4 - 2 = 2$: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x, y \in \mathbb{R} \right\}$. In definitiva "geometricamente" le soluzioni del punto a) e b) sono del tutto similiari cambiando solo lo spazio in cui si considerano i vettori.

ESERCIZIO 3

Sia $S_k =< (k,k,k^2),(1,k,k),(2,1,k^2) >$ con $k \in \mathbb{R}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

a) Cercare con il metodo sopra esposto le equazioni cartesiane di S_k al variare di k in $\mathbb{R}$.

SVOLGIMENTO

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 2 & x \\ k & k & 1 & y \\ k^2 & k & k^2 & z \end{array}\right)$$

riduciamo con il metodo di riduzione di Gauss la matrice completa ed imponiamo, al variare del valore di k, che il rango della matrice completa sia uguale a quello della matrice incompleta:

PASSO 1: sottraiamo la prima alla seconda riga e k volte la prima alla terza riga:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 2 & x \\ k & k & 1 & y \\ k^2 & k & k^2 & z \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{R_2=R_2-R_1 \\ R_3=R_3-kR_1}} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 2 & x \\ 0 & k-1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & k^2-2k & z-kx \end{array}\right)$$

poichè la matrice è ridotta a scala studiamo al variare del parametro il rango della matrice completa ed incompleta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 2 & x \\ 0 & k-1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & k^2-2k & z-kx \end{array}\right)$$

CASO 1:
rg(matrice incompleta)=3=rg(matrice completa)$\Longleftrightarrow$si hanno tre elementi non nulli (pivot) lungo la diagonale $\Longleftrightarrow k \neq 0, k-1 \neq 0, k^2-2k \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq 0, k \neq 1, k(k-2) \neq 0$ $\Longleftrightarrow k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2$ in tale caso non si ha alcuna equazione poichè i tre vettori sono linearmente indipendenti generano tutto $\mathbb{R}^3$ e non è necessario alcun vincolo: $S_k = \mathbb{R}^3$ per $k \neq 0, k \neq 1, k \neq 2$.
CASO 2:
rg(matrice incompleta)< 3, per quanto visto nel CASO 1 se $k = 1, 2$ la matrice ha rango 2 (avendo due pivot) mentre se $k = 0$ la matrice, nella forma sopra, ha un solo pivot e rango da determinarsi, quindi abbiamo diversi sottocasi (sostituendo i parametri nella matrice ridotta ottenuta sopra non avendo fatto alcuna operazione "illecita" del tipo divisione per k o espressioni contententi k che si possono annullare):
SOTTOCASO k=1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right)$$

per completare la riduzione a scala sottraiamo la seconda alla terza riga:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & z-x \end{array}\right) \rightarrow_{R_3=R_3-R_2}\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-y \end{array}\right)$
la matrice ridotta è quindi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-y \end{array}\right)$$

quindi $rg(A) = 2$ affinchè $rg(A|b) = 2$ si ha la condizione $z - y = 0$ infatti per $k = 1$ i tre vettori diventano $(1, 1, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1)$ quindi per $k = 1$:

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

in tal caso il sottospazio S è descritto da tre coordinate (x, y, z) ed una equazione $(z - y = 0)$ quindi ha dimensione $3 - 1 = 2$ (un piano) infatti è generato da due vettori linearmente indipendenti $((1, 1, 1), (2, 1, 1))$ che in equazioni parametriche corrispondono a due parametri liberi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
SOTTOCASO k=2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-2y \end{array}\right)$$

la matrice è già ridotta a scala con $rg(A) = 2$ affinchè $rg(A|b) = 2$ si deve avere $z - 2y = 0$ infatti per $k = 2$ i tre vettori diventano $(2, 2, 4), (1, 2, 2), (2, 1, 4)$ e come base di S_2 si ha ad esempio $(1, 2, 2), (2, 1, 4)$ (avendo $3(2, 2, 4) = 2(2, 1, 4) + 2(1, 2, 2)$ e quindi essendo i tre vettori linearmente dipendenti) per cui $dim(S_2) = 2$ indi per $k = 2$:

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2y\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

in tal caso il sottospazio S è descritto da tre coordinate (x, y, z) ed una equazione $(z - 2y = 0)$ quindi ha dimensione $3 - 1 = 2$ (un piano), infatti è generato da due vettori linearmente indipendenti $((1, 2, 2), (2, 1, 4))$ che in equazioni parametriche corrispondono a due parametri liberi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

SOTTOCASO k=0):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

per completare la riduzione a scala sommiamo alla seconda la prima riga:
$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow_{R_2 = R_2 + R_1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$ la matrice ridotta a scala è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

poichè si hanno due pivot $rg(A) = 2$ affinchè $rg(A|b) = 2$ si deve avere $z = 0$ infatti per $k = 0$ i tre vettori diventano $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (2, 1, 0)$ e come base di S_0 si ha ad esempio $(1, 0, 0), (2, 1, 0)$ per cui $dim(S_2) = 2$ quindi per $k = 0$:

$$S_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

in tal caso il sottospazio S è descritto da tre coordinate (x, y, z) ed una equazione $(z = 0)$ quindi ha dimensione $3 - 1 = 2$ infatti è generato da due vettori linearmente indipendenti $((1, 0, 0), (2, 1, 0))$ che in equazioni parametriche corrispondono a due parametri liberi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Al variare di k avremo allora la seguente descrizione cartesiana di S_k:

$$S_k = \begin{cases} \mathbb{R}^3 \quad (k \neq 0, 1, 2) \\ z - y = 0 \quad (k = 1) \\ z - 2y = 0 \quad (k = 2) \\ z = 0 \quad (k = 0) \end{cases}$$

geometricamente S_k sarà:

$$S_k = \begin{cases} \textit{spazio tridimensionale} \quad (k \neq 0,1,2) \\ \textit{piano bidimensionale dei punti con seconda e terza coordinata uguale} \quad (k=1) \\ \textit{piano bidimensionale dei punti con terza coordinata uguale al doppio della seconda} \quad (k=2) \\ \textit{piano bidimensionale dei punti con terza coordinata nulla} \quad (k=0) \end{cases}$$

ESERCIZIO 4
Trovare un applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(f) =< (1,2,0),(3,3,3) >$.
a) Cercare le equazioni di $Ker(f)$ usando la teoria vista sopra.
b) Sapendo che $Im(f) =< (1,1,1),(3,3,3) >$ cercare le equazioni di $Im(f)$ usando la teoria vista sopra.
SVOLGIMENTO
Per la risoluzione di tale quesito vi sono diverse vie, ne forniamo sotto un paio:
RISOLUZIONE 1 poichè f è lineare:

$$0 = f(1,2,0) = f(1,0,0) + 2f(0,1,0) = f(e_1) + 2f(e_2)$$

$$0 = f(3,3,3) = 3f(1,1,1) = 3(f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1)) = 3(f(e_1) + f(e_2) + f(e_3))$$

quindi $f(e_1) = -2f(e_2)$ e $f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 0$ ovvero $-2f(e_2) + f(e_2) + f(e_3) = 0 \iff f(e_2) = f(e_3)$ quindi una possibile applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ di tal fatta, scegliendo arbitrariamente l'immagine del vettore e_2 e rispettando le condizioni viste sopra per la f, è:

$$e_1 \xrightarrow{f} (-2a,-2b,-2c)$$

$$e_2 \xrightarrow{f} (a,b,c)$$

$$e_3 \xrightarrow{f} (a,b,c)$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$ arbitrari. La matrice rispetto alla base canonica in dominio e codominio sarà, ponendo l'immagine dei vettori della base canonica per colonne, del tipo:

$$A_{C,C} = \begin{pmatrix} -2a & a & a \\ -2b & b & b \\ -2c & c & c \end{pmatrix}$$

con rango uno e che descriverà quindi una applicazione con immagine di dimensione uno infatti per il teorema della dimensione vale:

$$3 = dim(\mathbb{R}^3) = dim(dominio) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(Im(f)) + 2$$

ovvero $dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$ coerentemente con il fatto che

$$Im(f) =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >=< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} >=$$

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

con $a,b,c \in \mathbb{R}$ liberi di scegliersi per definire l'applicazione lineare ma una volta scelta l'applicazione del tutto determinati e $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro che dà il grado di libertà del sottospazio di

dimensione uno e che esprime il generico vettore dell'immagine come multiplo del solo elemento base (a, b, c).
RISOLUZIONE 2 una via meno elegante è notare che $(1, 2, 0), (3, 3, 3)$ sono linearmente indipendenti e quindi posso completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$ (ad esempio con e_3) e definire su essi vettori l'applicazione lineare:
Verifico che i tre vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ infatti mettendoli per righe ed usando Gauss diretto
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow_{R_2=R_2-3R_1}\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
poichè ho tre pivot il rango è tre ed i vettori sono linearmente indipendenti ovvero una base di $\mathbb{R}^3$ che chiameremo B. In tal caso era breve anche una verifica che il determinante è non nullo usando lo sviluppo di Laplace secondo la terza riga e sapendo che $\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=ad - bc$:
$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}+0(-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+1(-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 0+0-3 =$
$-3 \neq 0$ poichè il determinante è non nullo le colonne (e le righe) sono linearmente indipendenti e quindi essendo tre generano uno spazio di dimensione tre ma l'unico sottospazio di dimensione tre di $\mathbb{R}^3$ è $\mathbb{R}^3$ stesso di cui saranno anche una base.
Definisco l'applicazione lineare rispetto alla base B **nel dominio ed alla base canonica nel codominio** denominiamo $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (3, 3, 3)$, $v_3 = (0, 0, 1) = e_3$ poichè per definizione $v_1, v_2 \in Ker(f)$ la loro immagine tramite f deve esser il vettore nullo indi una possibile applicazione è:

$$v_1 \xrightarrow{f} (0, 0, 0)$$
$$v_2 \xrightarrow{f} (0, 0, 0)$$
$$v_3 \xrightarrow{f} (a, b, c)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ arbitrari ma fissati una volta scelta l'applicazione e la matrice rispetto alla base B nel dominio ed alla base canonica nel codominio sarà, ponendo per colonne l'immagine tramite f dei vettori v_1, v_2, v_3 del tipo:

$$A_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con rango uno che descriverà quindi una applicazione con immagine di dimensione uno (data dalla sola immagine del vettore e_3) infatti per il teorema della dimensione:

$$3 = dim(\mathbb{R}^3) = dim(dominio) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(Im(f)) + 2$$

ovvero $dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$.

a) Vedendo $Ker(f)$ come sottospazio vettoriale del dominio $\mathbb{R}^3$ possiamo usare il procedimento visto sopra per determinare le equazioni cartesiane del sottospazio e determinare i generici vettori la cui immagine tramite la mappa f è il vettore nullo del codominio:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right)$$

riduciamo con Gauss la matrice completa ed imponiamo che il rango della matrice completa sia uguale a quello della matrice incompleta:

PASSO 1: sottraiamo due volte la prima alla seconda riga:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y \\ 0 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow_{R_2=R_2-2R_1}\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 3 & z \end{array}\right)$$
PASSO 2: sommiamo la seconda alla terza riga:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow_{R_3=R_3+3R_2}\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & z+y-2x \end{array}\right)$$
otteniamo la matrice completa ridotta:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & z+y-2x \end{array}\right)$$
quindi il vincolo perchè i vettori (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ appartengano al $Kerf(f)$ è che $z + y - 2x = 0$:
$$Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | z + y - 2x = 0 \right\}$$
ed ha come noto dimensione due.

b) Per quanto visto sopra, per il teorema della dimensione, la dimensione dell'immagine in generale deve essere uno ed infatti una base di $Im(f)$, per come definita in particolare qui, è $(1, 1, 1)$ (essendo $(3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$). Vedendo $Im(f)$ come sottospazio vettoriale del codominio $\mathbb{R}^3$ possiamo usare il procedimento visto sopra per determinare le equazioni cartesiane del sottospazio e determinare i generici vettori immagine tramite la mappa f di un qualche elemento del dominio $\mathbb{R}^3$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right)$$
riduciamo con Gauss la matrice completa ed imponiamo che il rango della matrice completa sia uguale a quello della matrice incompleta:
PASSO 1: sottraiamo la prima alla seconda ed alla terza riga:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow^{R_2=R_2-R_1}_{R_3=R_3-R_1}\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right)$$
otteniamo la matrice completa ridotta:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right)$$
quindi
$$Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{pmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | y - x = 0, z - x = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | y = x, z = x \right\}$$

ossia l'insieme dei vettori con prima, seconda e terza coordinata uguali coerentemente con quanto visto sopra e con il teorema della dimensione avendo tre incognite (x, y, z) e due equazioni indipendenti $(y = x, z = x)$ $dim(Im(f)) = 3 - 2 = 1$. Abbiamo così trovato a partire dalla forma parametrica equazioni cartesiane per i due sottospazi, chiaramente in modo del tutto analogo al primo esercizio è possibile ricavare le equazioni parametriche a partire da esse equazioni cartesiane ritrovando quanto dato dalle ipotesi a meno della scelta dei generatori e delle basi.