INTRODUZIONE AI SYS LIN

Un'equazione lineare è un'equazione in cui le incognite compaiono con grado 1, cio`e un'equazione della forma:
$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ (1.1)
dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b sono numeri assegnati e $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le incognite. I numeri $a_1, \ldots, a_n$ si dicono coefficienti dell'equazione lineare, b si chiama termine noto. Se $b = 0$ l'equazione si dice omogenea. Una soluzione della equazione (1.1) `e una n-upla di numeri $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ che, sostituiti ordinatamente alle incognite, verificano l'uguaglianza, cio`e tali che
$a_1s_1 + a_2s_2 + \ldots + a_ns_n = b$
e.g. $3x + 5y = 7$ retta nel piano
$5x - 7y + z = 4$ piano nello spazio
$5x_1x_2 = 7$ NON è LINEARE

si chiamano eqs lineari perchè sono eqs di una retta

Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un insieme di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che devono essere soddisfatte contemporaneamente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

I numeri $a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}$ si chiamano coefficienti del sistema, $b_1, \ldots, b_m$ termini noti. Se $b_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ il sistema si dice omogeneo. Una soluzione del sistema lineare (1.2) è una n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri che è soluzione di tutte le equazioni del sistema

Un sistema si dice compatibile se ammette soluzioni

e.g. $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=6 \end{cases}$ NO compatibile

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ 5x_1+5x_2=-15 \end{cases}$ inf sols del tipo $\{(t, -3-t) | t \in \mathbb{R}\}$
(seconda eq non add info)

Per indicare sys in maniera compatta si usano le matrix rxc
aij è il coeff dell'incognita xj nell'iesima eq

Indicheremo con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici m × n a coefficienti reali e con $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali.

$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ A = B \iff a_{ij} = b_{ij}$
$\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})\quad C = A+B \iff c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$
se $A \in M_{m,s}$, $B \in M_{s,n} \Rightarrow C = A \cdot B \in M_{m,n}$ $\quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj}$

prodotto rows x cols NON gode della prop commutativa
(BA potrebbe non essere definito)

$\boxed{\text{vale la prop distributiva del prodotto rispetto alla somma, purchè le ops siano definite: } A(B+C)=AB+AC}$

gode invece della prop associativa se i prodotti sono definiti: $(AB)C = A(BC)$

Definizione di trasposta

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ righe vanno al posto delle colonne, e viceversa

$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$

Matrici e sys lin

$A\underline{x} = \underline{b}$ vettori colonna

matrice incompleta associata al sys

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ & & & b_2 \\ & & & \vdots \end{array}\right)$$ matrice completa associata al sys

due sys si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni
per risolvere un sys ci riduciamo a risolvere un sys equiv

Una matrix si dice a scala se
1) eventuali righe nulle si trovano in fondo alla matrix
2) il primo elemento non nullo di ogni riga non nulla si trova strettamente + a dx del primo elem non nullo della riga precedente

facile da risolvere per sostituzioni successive partendo dal fondo

ricavo le incognite corrispondenti ai pivot

e.g. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ & 1 & \end{pmatrix}$ NO A SCALA

rango righe di A = rr(A) = num righe non nulle di A = num pivot (per ora definito solo per matrix

pivot

$\leq \min(m,n)$

il sistema ammette soluzioni sse rr(A)=rr(A|b)
se rr(A)=rr(A|b)=n => una sola sol
se rr(A)=rr(A|b)<n => inf sol che dipendono da n-rr(a) free vars

caso rr(A) > n NON può ∃

numero delle incognite

e.g. $5x_2+x_3=-35$
$\Downarrow$
$x_2 = -7 - \frac{x_3}{5}$
$\Downarrow$
posso riprendere con le sostituzioni successive e ricavare x_1 come se x_3 fosse un termine noto
$\Rightarrow$
sols $\{(\ldots x_3 \ldots, -7 - \frac{x_3}{5}, x_3, \ldots, \ldots) | x_3 \in \mathbb{R}\}$

ALGO DI GAUSS

Le seguenti ops in matrix associata NON alterano le sols di un sys lin
1) scambio righe
2) moltiplicazione != 0 riga
3) i-esima riga = i-esima riga + a*(j-esima riga) (th, a può = 0)
i!=j poichè se a=-1 => 0=0

ops per ottenere matrix a scala (riduzione di Gauss)

1) Se il primo elemento di ogni riga di A è nullo, si considera la matrice ottenuta cancellando la prima colonna della matrice in esame e si ricomincia dal principio del punto 1). Altrimenti, se $a_{11} = 0$ si scambia la prima riga di A con una riga in cui il primo elemento è non nullo. Indichiamo con a tale elemento non nullo.

2) Si controllano una dopo l'altra tutte le righe tranne la prima. Se il primo elemento di una riga è nullo si lascia quella riga inalterata. Se il primo elemento di una riga, diciamo la i-esima ($i > 1$), è uguale a $b \neq 0$, si sostituisce la riga i-esima con la somma della riga i-esima e della prima riga moltiplicata per $-\frac{b}{a}$. $\left(b \to b - \frac{b}{a}a = 0\right)$

3) A questo punto tutti gli elementi della prima colonna, tranne eventualmente il primo, sono nulli. Si considera dunque la matrice che si ottiene cancellando la prima riga e la prima colonna della matrice ottenuta e si ricomincia dal punto 1.

tips
- togliere denom => moltiplicare
- portare righe belle in alto
- moltiplicare riga per ottenere 1 come pivot (matrix risultante potrebbe avere anche altri coefficienti)

da sys a matrix, a scala => sostituzioni successive su sys, tupla di sols

e.g.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + (2k+1)x_3 + 3x_4 = 2k-1 \\ 3x_1 + 4x_2 + (3k+2)x_3 + (k+5)x_4 = 3k-1 \end{cases}$$

discutere al variare di k, l'esistenza di sols, ed eventualmente trovarle

$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2k+1 & 3 & 2k-1 \\ 3 & 4 & 3k+2 & k+5 & 3k-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2k & 2 & 2k-1 \\ 0 & 1 & 3k-1 & k+2 & 3k-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2k-2 & 0 & 2k-2 \\ 0 & 0 & 3k-3 & k & 3k-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3/2 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & \underbrace{3k-3}_{3(k-1)} & k & 3k-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ R_4 \to R_4 - 3R_3 \end{array} \longrightarrow$$

non sappiamo se è un pivot, ma riusciamo ugualm
a far comparire 0 nella quarta riga, infatti ...

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & 0 & k & 1 \end{array}\right)$$

candidati pivot => se k!=0 e k!=1 => rr(A) = rr(A|b) = n => 1 s
poi si studiano altri due casi: k=1 o k=0

n: num incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ (k-1)x_3 = k-1 \\ k x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = -2 - \frac{2}{k} + 1 = -\frac{k+2}{k} \\ x_3 = \frac{k-1}{k-1} = 1 \\ x_4 = \frac{1}{k} \end{cases}$$

sostituzioni successive

lo possiamo fare perché assumo $k \neq 0$ e $k \neq 1$

$$\left(\frac{1}{k}, -\frac{k+2}{k}, 1, \frac{1}{k}\right)$$

come se k fosse un termine noto...

se $k = 1$ otteniamo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 = -2t - 2 + 1 \\ x_3 = t \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$rr(A) = 3 = rr(A|b)$ (n° pivot)

infinite sol che dipendono da $4 - 3 = 1$ param (n° inc. − n° pivot)

$\Rightarrow$ Sol.: $\{(t, -2t-1, t, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

☆ $\{(x_3, -2x_3 - 1, x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$\downarrow$

avremmo anche potuto esprimere le sol in funzione di x_2

$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -x_2 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}$

$2x_3 = -x_2 - 2x_4 + 1 = -x_2 - 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}$

$x_4 = 1$

Sol $\left\{\left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2},\ x_2,\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2},\ 1\right) \middle|\ x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ ☆

se pongo $x_2 = -1$ ottengo la soluzione $(0,-1,0,1)$ prima con $x_3 = 0$ ottenevamo $(0,-1,0,1)$

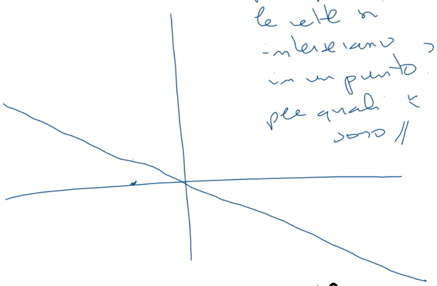
i due ☆ identificano le stesse soluzioni!

$\begin{cases} y \\ y' \end{cases} \Rightarrow$ inf sol => coincidono; una sol => si incrociano in un punto; zero sol => parallele

discutere $\begin{cases} kx - y = 3 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \longrightarrow y = -\frac{2}{5}x$

per quali k le rette si intersecano in un punto? per quali k sono //

X casa



Un sys lin Ax=b si dice omogeneo se $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ed ha sempre almeno sol nulla

Discutere e risolvere il seguente sistema omogeneo

$$\begin{array}{c} a \\ b \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha+1 & 3\alpha-2 & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right)$$

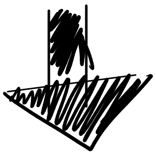
$R_2 - \frac{\alpha+1}{\alpha} R_1 \Rightarrow$ procedere per casi $\alpha \neq 0$, $\alpha = 0$

altrimenti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha+1 & 3\alpha-2 & \alpha & 0 \\ 2\alpha & 4\alpha & \alpha+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 1-2\alpha & 0 \end{array}\right)$$

Abbiamo un pivot!

0 denominatori che rompono + non devo distinguere casi



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ \alpha & 3\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - \alpha R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 1-\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 + \frac{2}{5} R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{3}{5}\alpha & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 + \frac{2}{5} R_2$

tre candidati pivot => ...

se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \frac{5}{3}$ $rk(A|b) = rk(A) = 3 = n^\circ$ inc

1 sola soluz $(0,0,0)$ perchè il sistema è omogeneo

Poi analizziamo casi dove $\alpha = 0$ e $\alpha = 5/3$