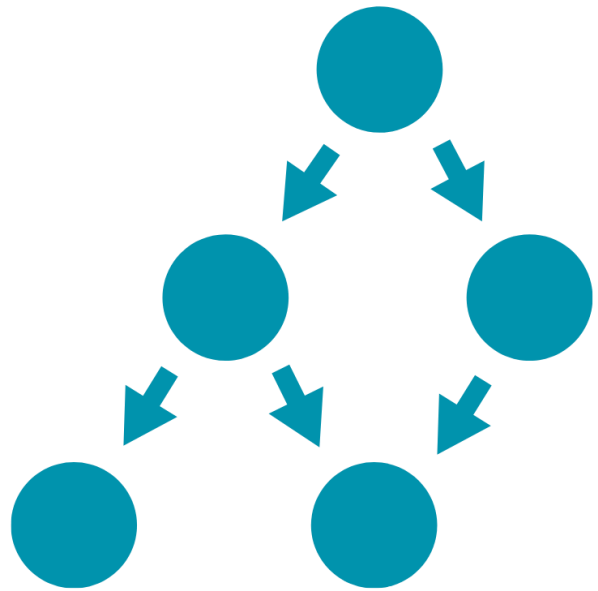


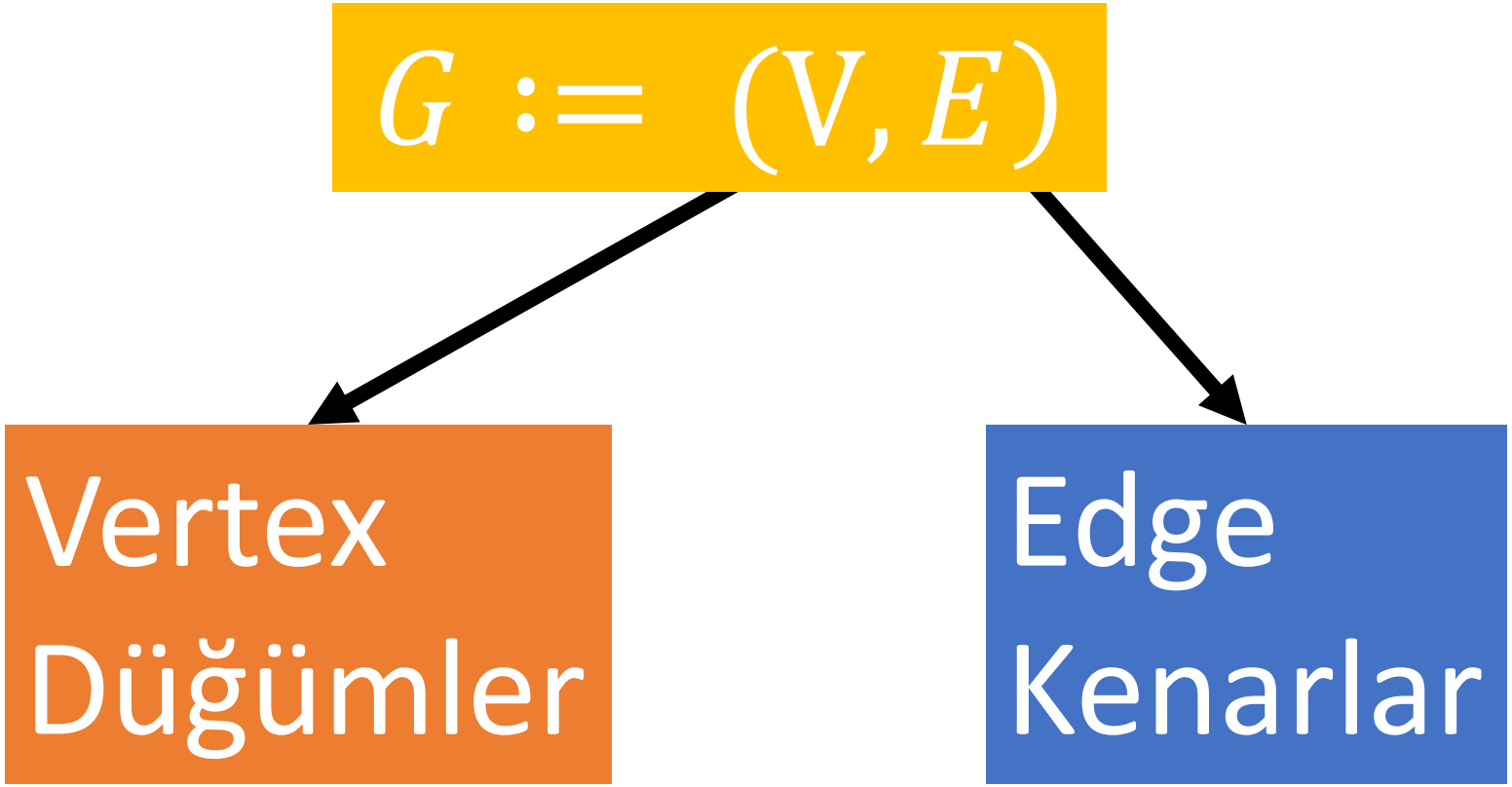
VERİ YAPILARILARI VE ALGORİTMALAR

Graph

Giriş

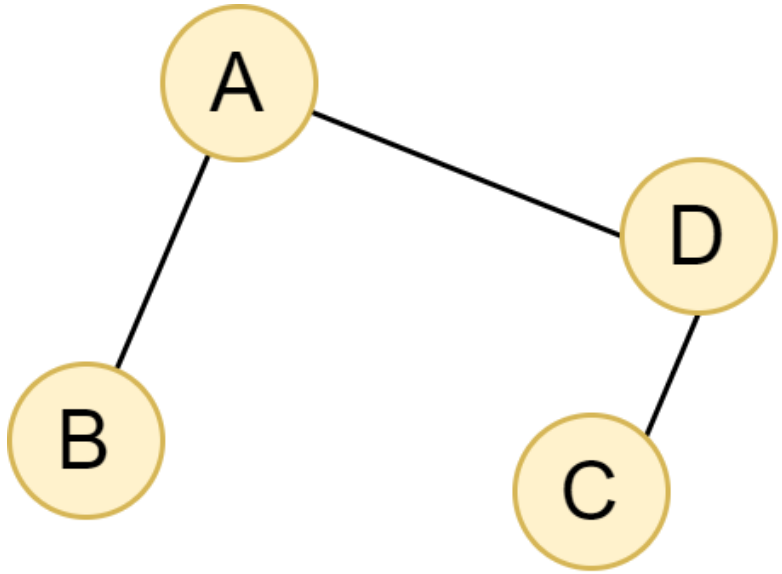
1. Çizge veri yapısı
2. Yönlü ve yönsüz çizgeler
3. Ağırlıklı çizgeler
4. Çizgeler veri yapısı örnekleri
5. Çizgelere ilişkin kavramlar

Çizge
(Graph)

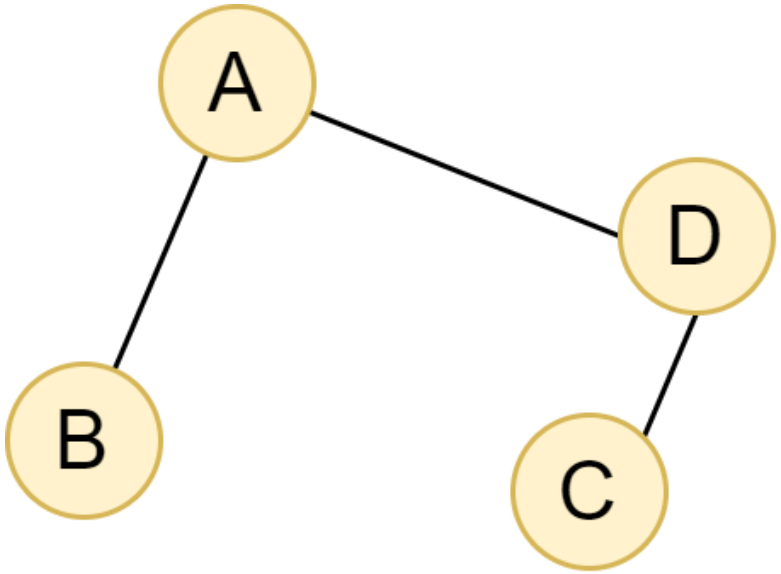


Çizge
(Graph)

- $V = \{A, B, C, D\}$
- $E = \{(A, B), (A, D), (C, D)\}$



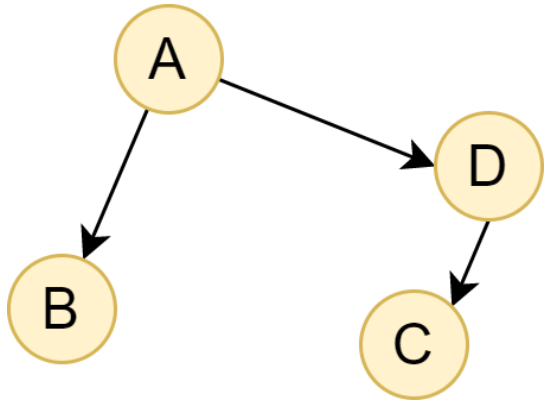
Çizge
(Graph)



$$G := (\{A, B, C, D\}, \{(A, B), (A, D), (C, D)\})$$

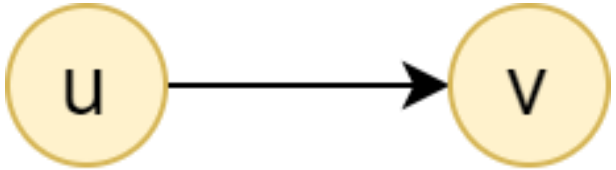
Çizge
(Graph)

- Düğümler (vertex) ve kenarları kullanarak bağlantıları temsil etmenin soyut bir yoludur.
- Düğümler 1 den n'e kadar etiketlenir.
- m adet kenar bazı düğümlere bağlanır.
  - Kenarlar tek yönlü (one-directional, directed) ya da çift yönlü (bidirectional) olabilir.
- Düğümler ve kenarlar bazı yardımcı bilgiler içerebilir.



Yönlü Kenar

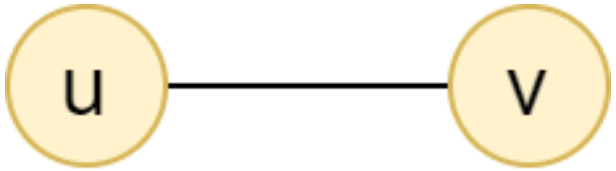
(Directed Edge)



- Bir çift sıralı düğüm (u,v)
- İlk düğüm u, orijini temsil eder.
- İkinci düğüm v, varış noktasını temsil eder.
- Örnek: tek-yön trafik

Yönsüz Kenar

(Undirected Edge)

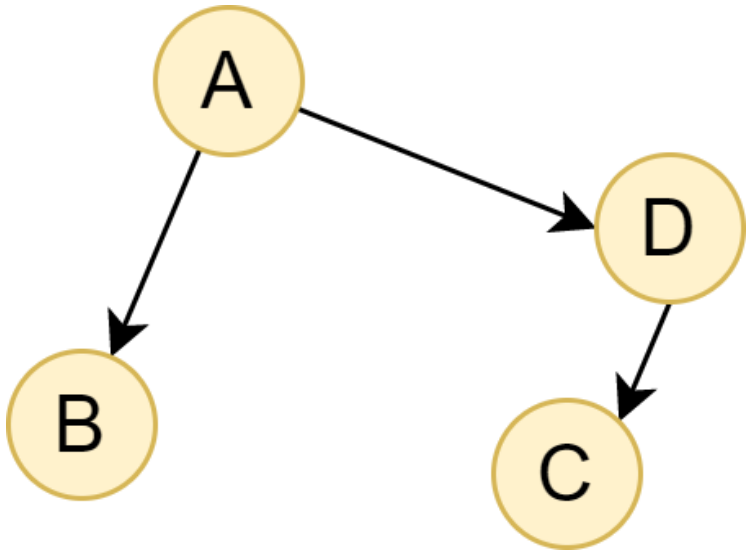


- Bir çift sırasız düğüm (u,v)
- Örnek: Demir yolu

Yönlü Graf

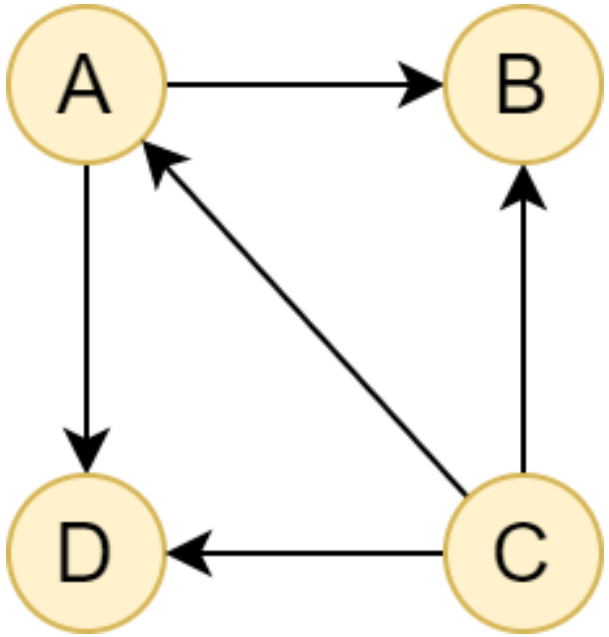
(Directed graph)

- Tüm kenarlar yönlüdür.
- Örnek: Yönlendirme ağı (Root network)



Yönlü çevrimsiz graf

(Directed Acyclic Graph (DAG))

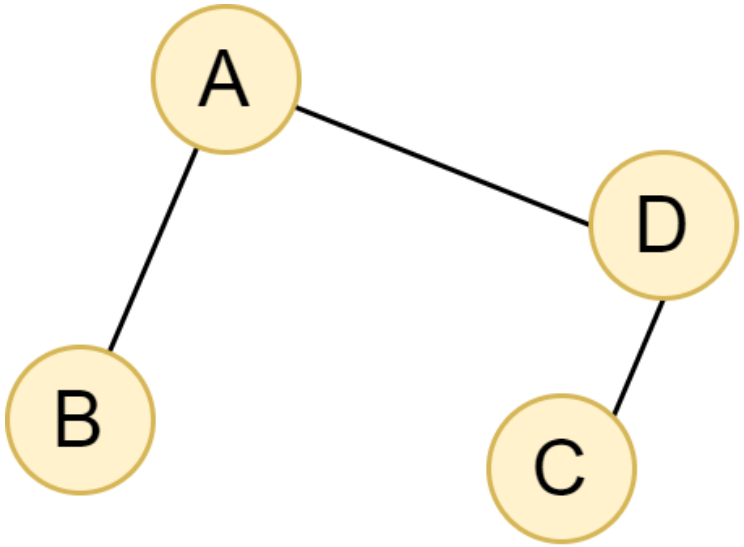


- Bir yönlü çevrimsiz graf (**DAG, directed acyclic graph**) çevrim içermeyen yönlü bir graftır.

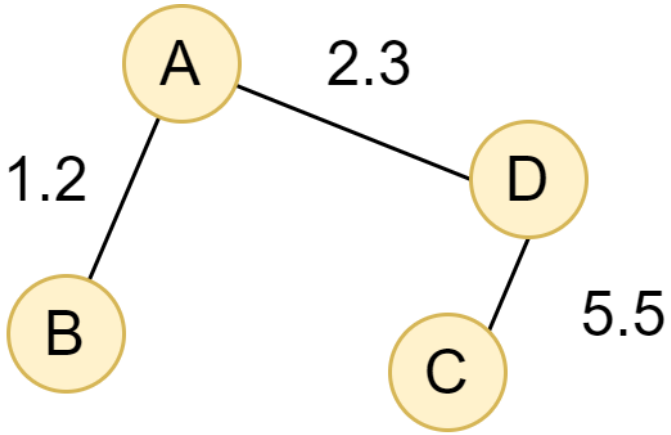
Yönsüz Graf

(Directed graph)

- Tüm kenarlar yönsüzdür.
- Örnek: Uçuş ağı (flight network)



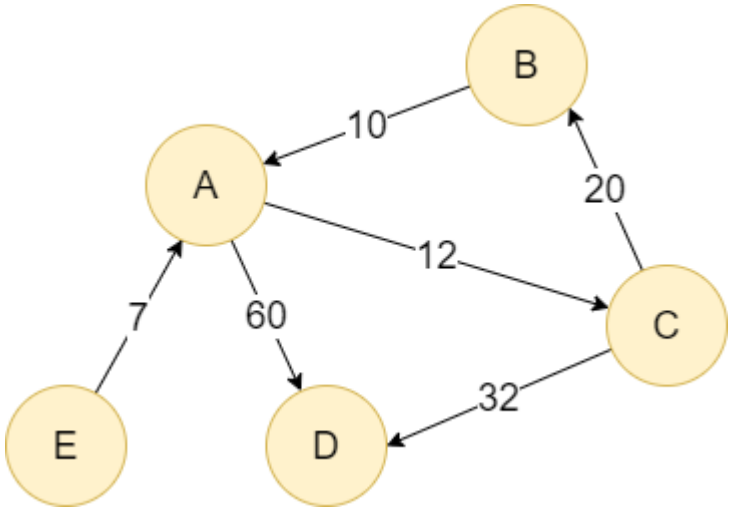
Ağırlıklı Graf
(Weighted Graph)



- Ağırlıklı graflarda iki düğümü birleştiren kenarların belirli bir ağırlığı vardır. Bu ağırlık noktalar arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bazen bu ağırlıklar maliyet olarak da ifade edilebilir.

Ağırlıklı ve Yönlü Graf

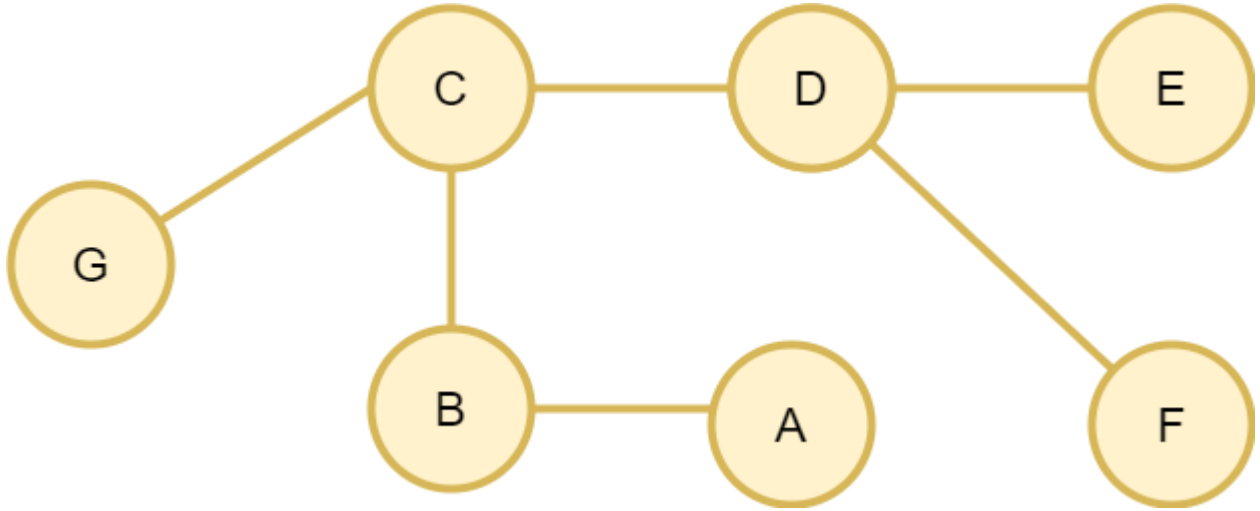
(Weighted DiGraph)



- Ağırlıklı graflarda iki düğümü birleştiren kenarların belirli bir ağırlığı vardır. Bu ağırlık noktalar arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bazen bu ağırlıklar maliyet olarak da ifade edilebilir. Kenar aynı zamanda yön bilgisine de sahipse bu çizge ağırlıklı ve yönlü olarak ifade edilir.

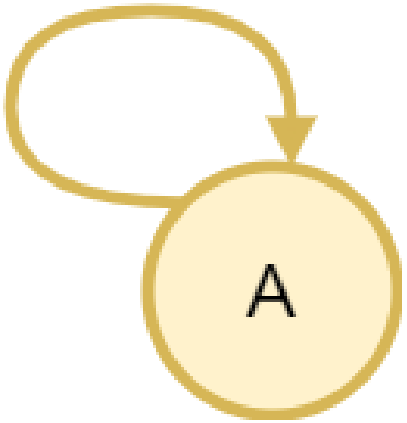
Çizge

- Bir çizgede çevrim yok ise **ağaç (tree)** olarak ifade edilir. Bir ağaç çevrimsel olmayan bağlı bir graftır (**acyclic connected graph**).



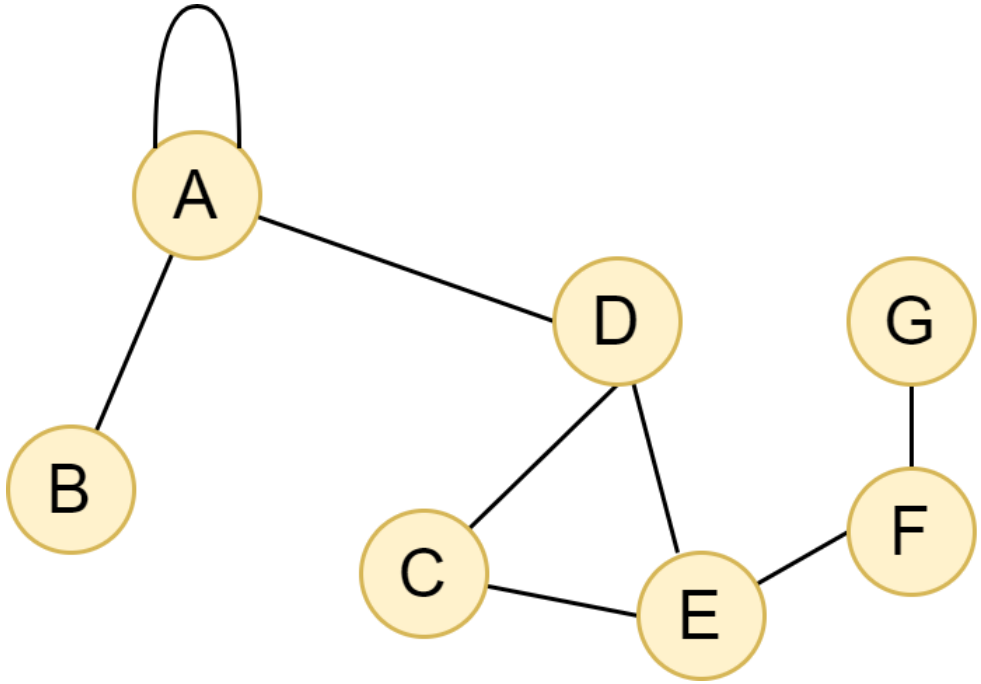
Çizge

- Bir düğümü kendine bağlayan kenara **öz-çevrim (self-loop)** denir.



Döngü

(self-loop)

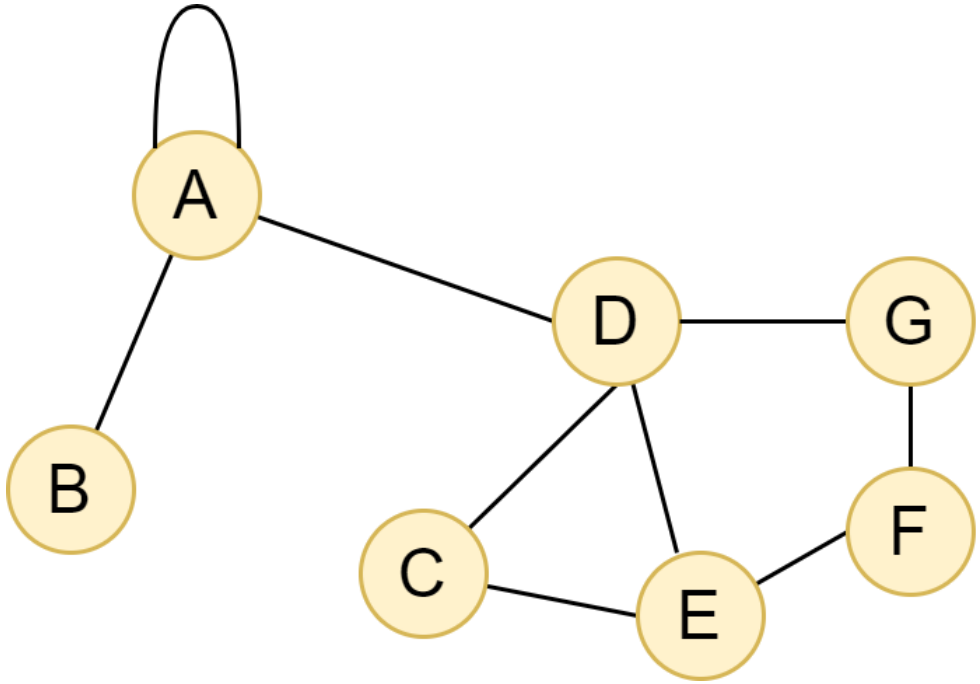


- Bir yol başladığı düğümden yine başladığı düğüme gidecek şekilde de tanımlanabilir. Bu çoğu zaman bir döngü (self-loop) olarak adlandırılır ve maliyeti genellikle 0 (sıfır) olarak tanımlanır.

Çizge

- İki kenar aynı düğümleri bağlıyor ise paraleldir.

Çevrim
(cycle)



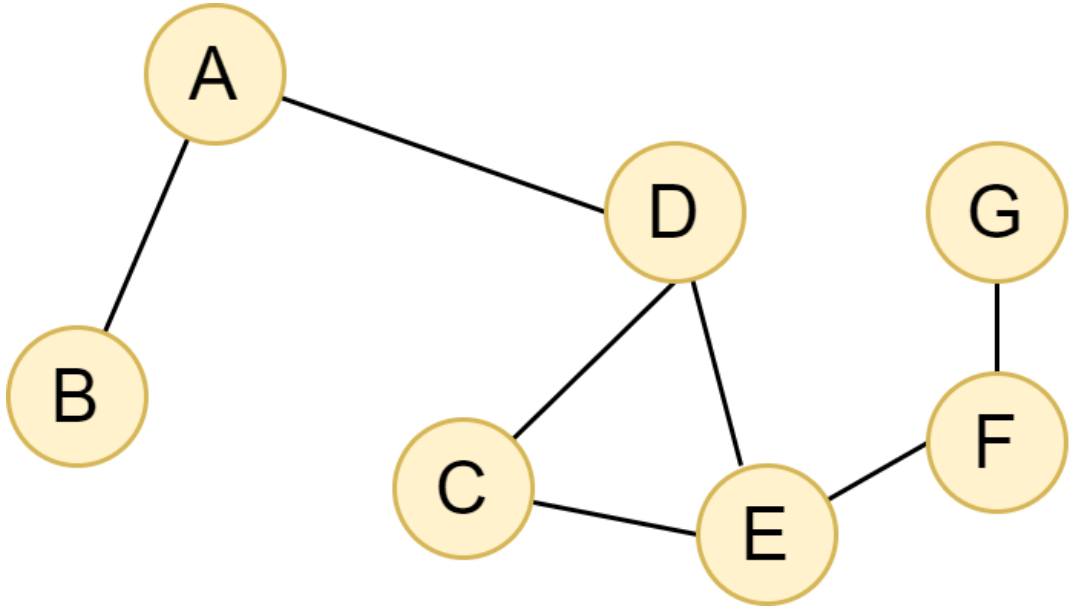
Çevrim

- D > C > E > D
- G > F > E > D > G
- C > D > E > C

- Çevirim yolun başladığı düğümde bitmesidir.
- Çevrim sırasında tekrar eden bir düğüm ya da kenar yok ise ilgili ifade basit çevrim (simple cycle) olarak ifade edilir.

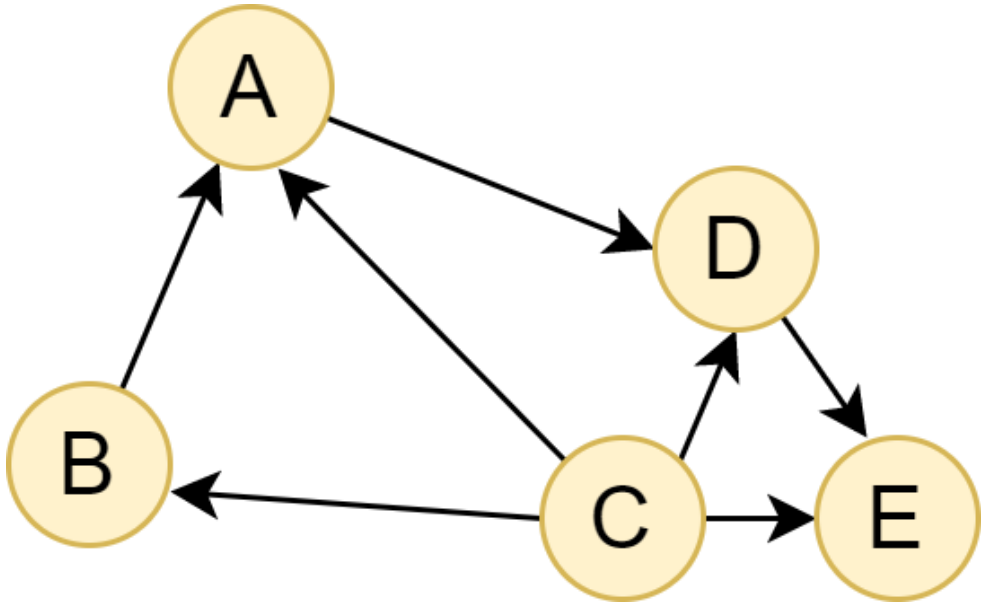
Yol

(Path)



- Graf üzerinde bir yol tanımı, ilk düğümden başlamak üzere; yol üzerindeki son düğüme ulaşıncaya kadar olan maliyet şeklide tanımlanabilir.
- Yol üzerinde tekrar eden düğüm yok ise bu basit yol (**simple path**) şeklide ifade edilir.

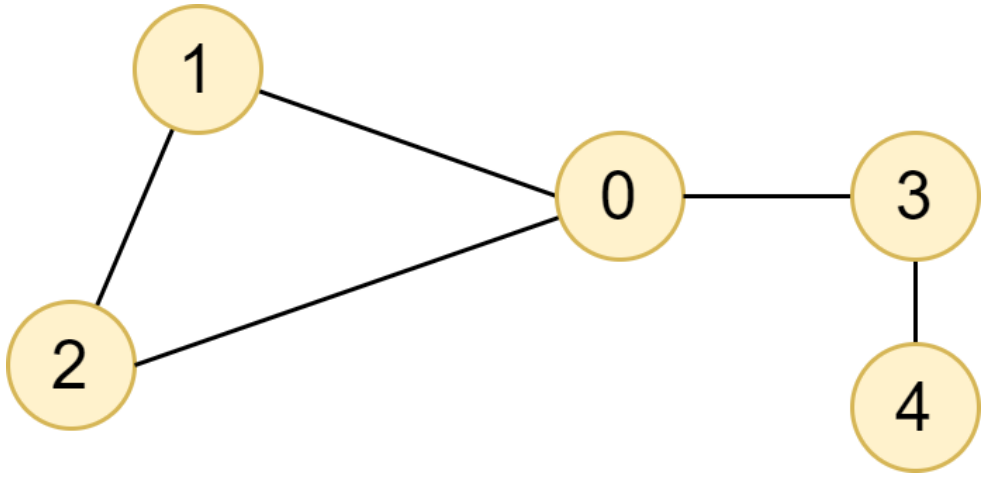
Düğüm derecesi
(Degree)



- Düğüm derecesi, düğümün sahip olduğu kenar sayısını ifade etmek üzere kullanılır. Yönlü graflar için bu derece indeg (giren kenar sayısı) ve outdeg (çıkan kenar sayısı) şeklinde ifade edilebilir.

Güçlü Bağlı Çizge

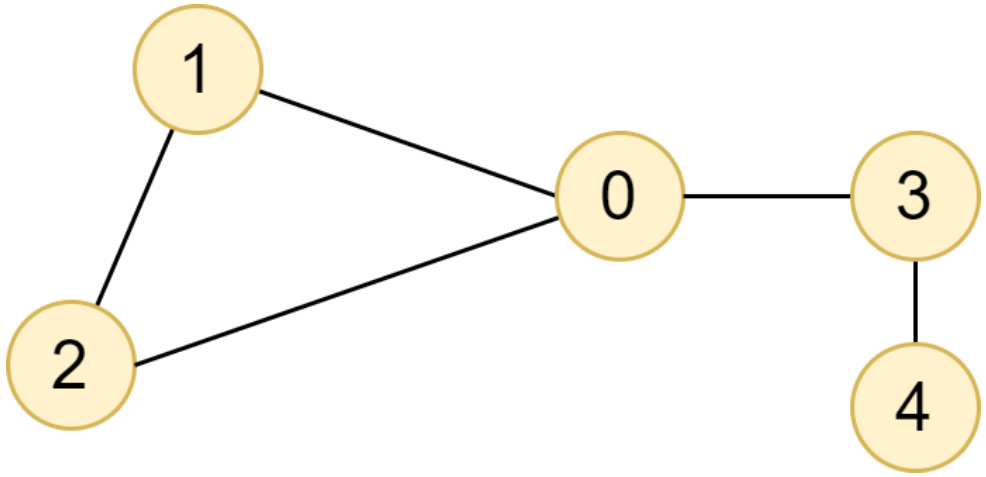
(Strongly Connected Graph)



- Yönsüz bir graf, eğer bir düğümden tüm düğümlere ulaşacak şekilde bir yola sahipse güçlü bağlı/bağlantılı graf (strongly connected graph) olarak ifade edilir.

Güçlü Bağlı Çizge

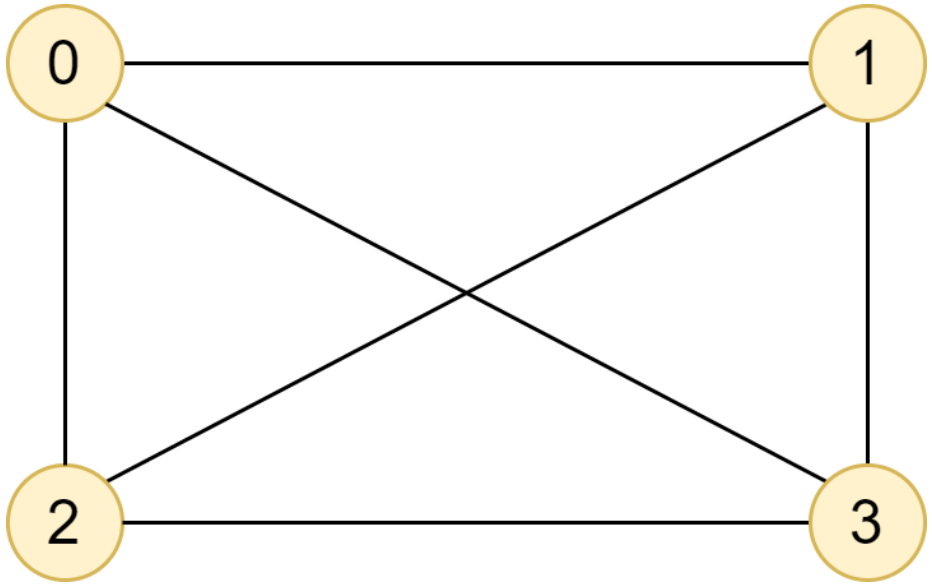
(Strongly Connected Graph)



- Bir graf güçlü bağlantılı değilse bu zayıf bağlı (weakly connected graph) olarak ifade edilir.

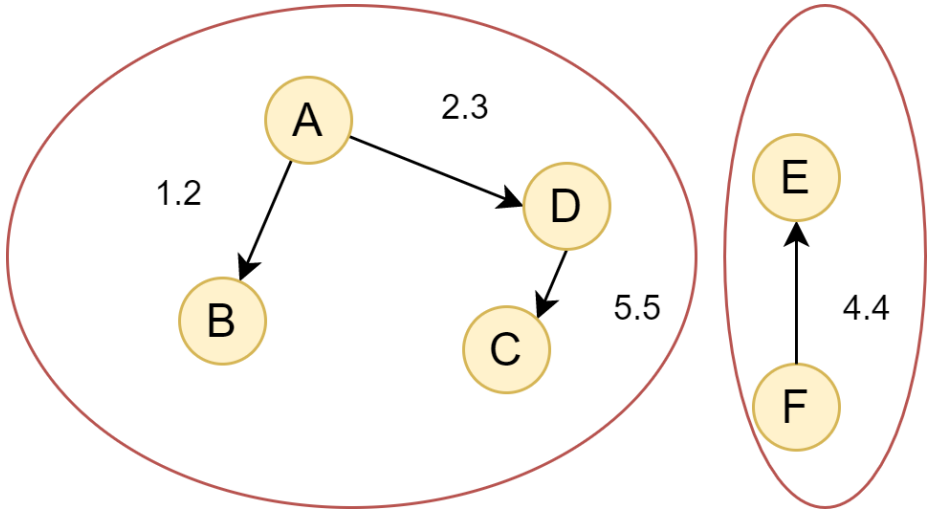
Tam Çizge

(Complete Graph)



- Her bir düğüm bir diğerine komşu olmalıdır. Tek bir adımda bir düğümden bir başka düğüme gidilebilmelidir.
- n düğüm için $n(n-1)/2$ kenar bulunur.

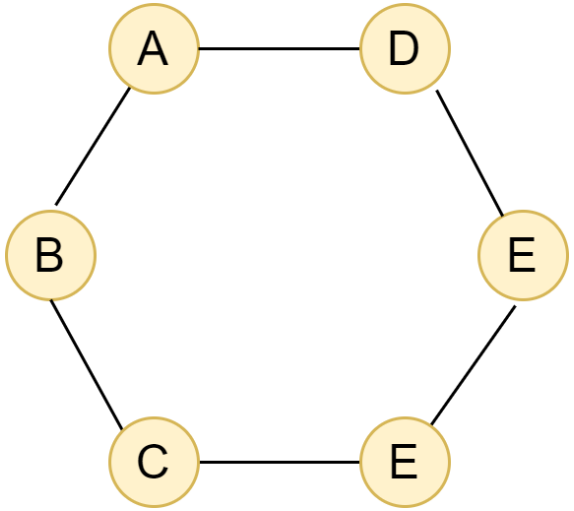
Bileşen
(Component)



- Bağlı olmayan graflardaki her bir ada, ya da ayrık küme, bir bileşen (component) olarak ifade edilir.

Düzenli Çizge

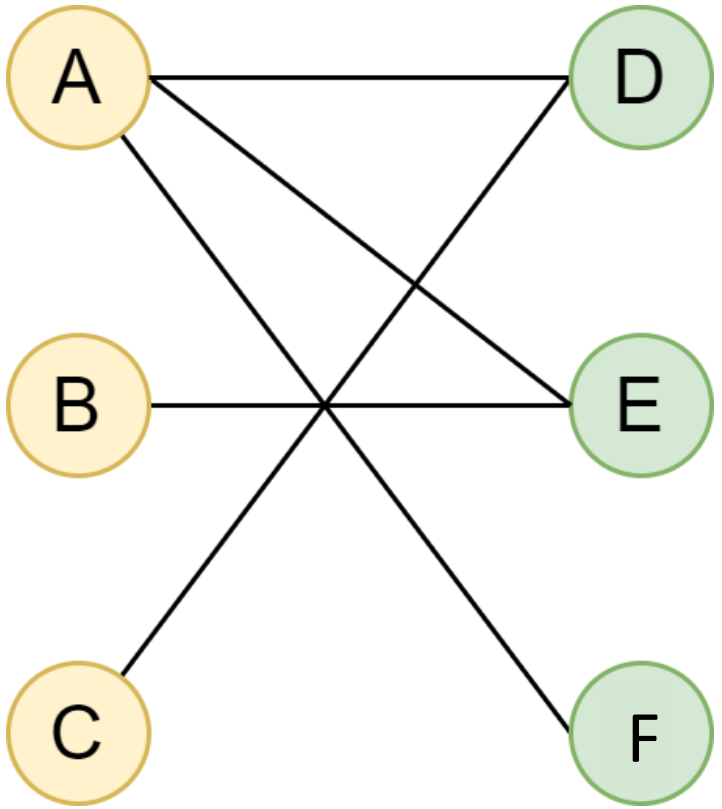
(Regular Graph)



- Bağlı graf yapısındadır.
- Bütün düğümlerin derecesi aynıdır.

İki parçalı çizge
(Bipartite graph)

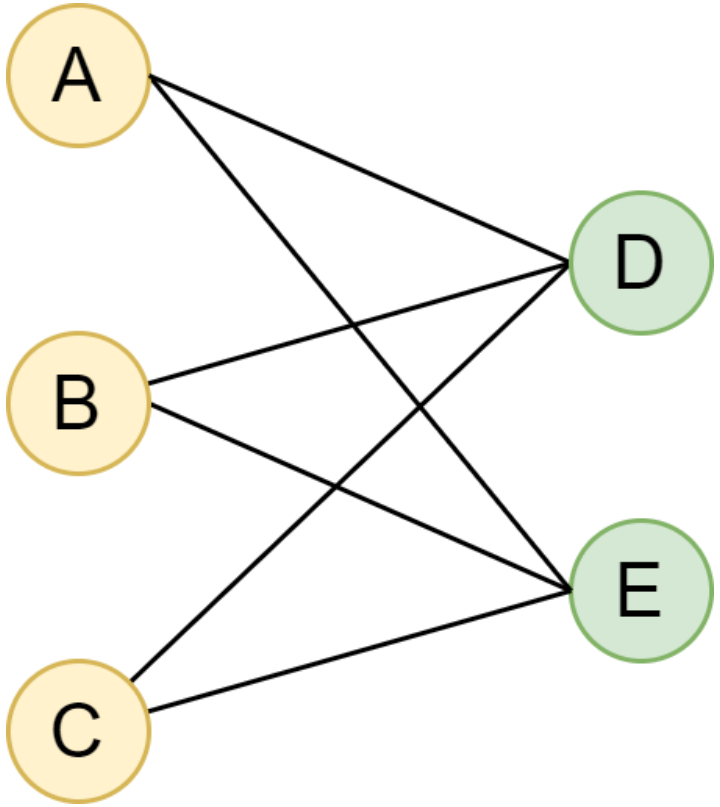
- Ayrık iki küme vardır ve bağlantılar, kenar bu iki küme arasında kurulur.



Tam iki parçalı çizge

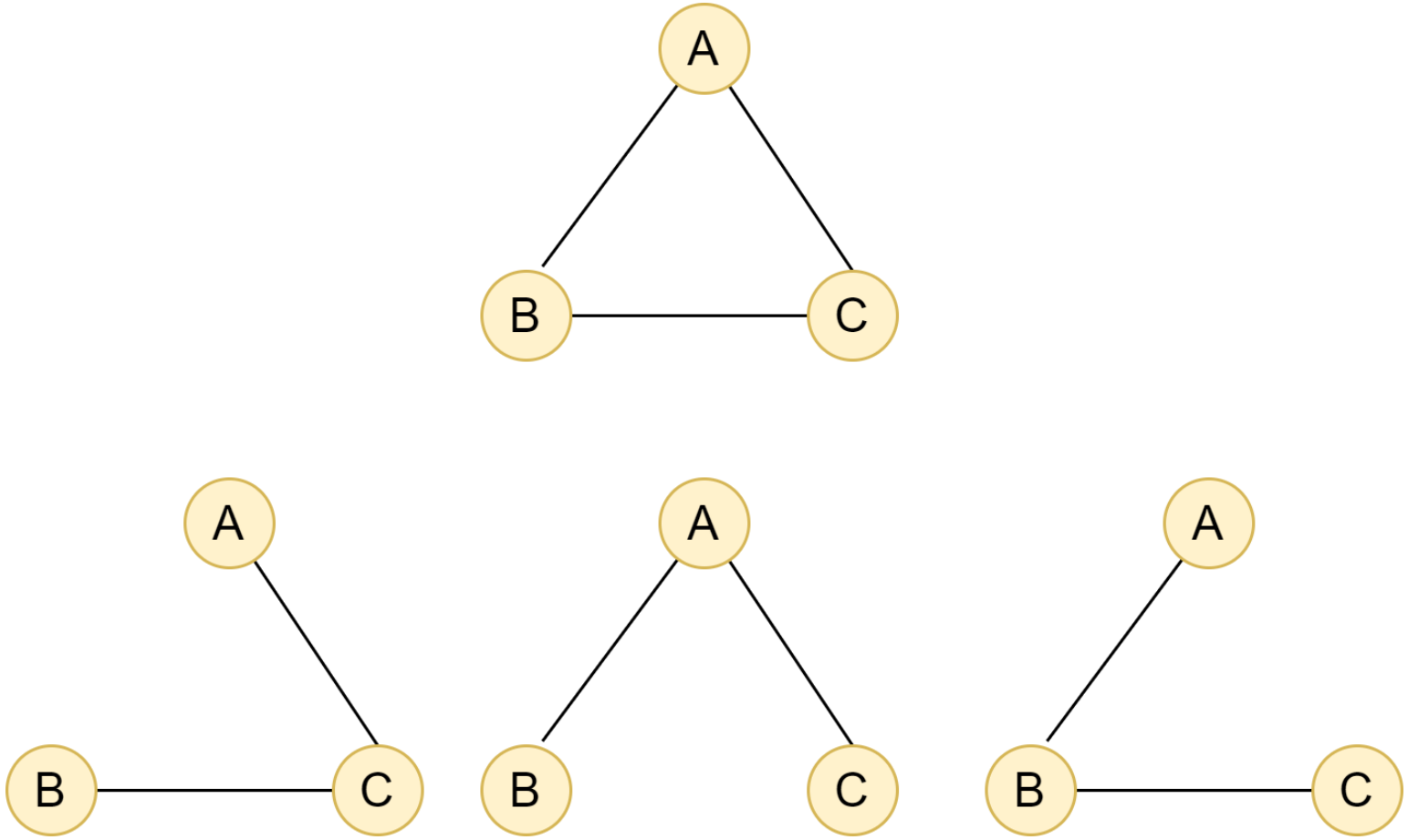
(Complete bipartite graph)

- İki parçalı graf içinde bir düğüm; diğer gruptaki her bir düğüme doğrudan bağlı olmalıdır.



Kapsama Ağacı

(Spanning tree)



- Bütün düğümleri içeren alt graftır. Her bir düğümün en fazla iki bağlantısı vardır.

Çizge Temsili

Graph Representation

- Bitişiklik matrisi (Adjacency matrix)
- Bitişiklik listesi (Adjacency list)
- Bitişiklik kümesi (Adjacency set)

Çizgelerin Depolanması

- V adet düğüm ve E adet kenarın depolanması ihtiyacı:
  - Düğümler dizi de depolanabilir.
  - Kenarlar başka bir şekilde (örneğin komşuluk matrisi ya da komşuluk listesi gibi) saklanmalıdır.

- Gerçekleştirilmek istenen işlevler
  - Belirli bir düğüm ile ilgili tüm kenarları alma
  - İki düğümün doğrudan bağlı olup olmadığını test etme

- Komşuluk/Bitişiklik matrisi ya da listesi kenarları depolamak için kullanılabilir.

Komşuluk Matrisi

(Adjancency Matrix)

- Bağlantı bilgilerini depolanın kolay bir yoludur.
  - İki düğümün bir birine doğrudan bağlı olup/olmama durumu test etmenin maliyeti: $O(1)$
- n x n matrisi
  - $a_{ij} = 1$ eğer i düğümünden j düğümüne bağlantı varsa
  - $a_{ij} = 0$ diğer durumda
- $\Theta(n^2)$ hafıza kullanır.
  - Yalnızca n birkaç binden az olduğunda kullanın.
  - Ve graf yoğun olduğunda

Komşuluk Matrisi

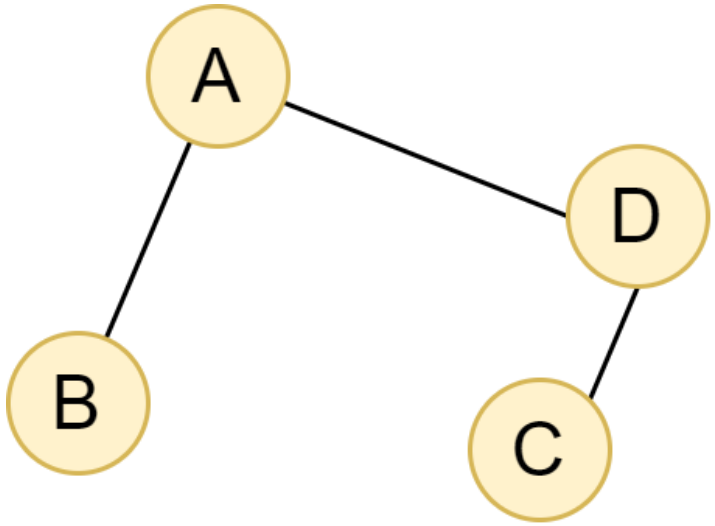
(Adjacency Matrix)

- Grafların komşu liste gösterimi ve komşu matris gösterimi olmak üzere temelde iki farklı gösterim şekli bulunmaktadır.

- Komşuluk matrisinde G grafi $|N|\ x\ |N|$ tane elemandan oluşan bir komşuluk matrisi ile ifade edilir. Matrisi n_{ij} eğer i düğümünden j düğümüne bir kenar var ise 1 değerini alır; aksi durumda 0 değeri ile ifade edilir.

Komşuluk Matrisi

(Adjacency Matrix)



	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	0	0	0
2	0	0	0	1
3	1	0	1	0

Komşuluk Matrisi

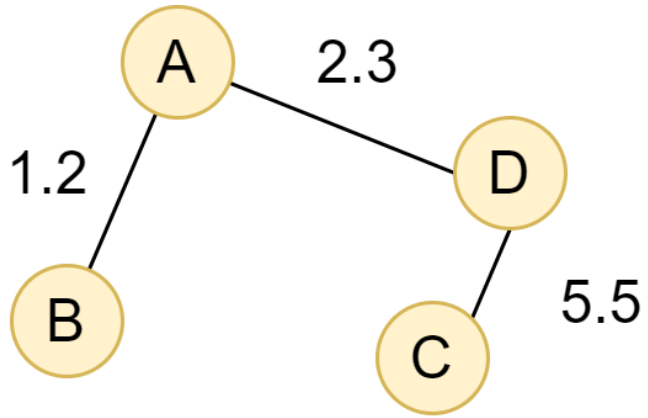
(Adjacency Matrix)

- VxV boyunda bir matris ile temsil edilir.
- Matris genellikle boolean veri tipindedir.
- Yönsüz graflarda simetriktir.
- Yönlü graflarda sadece bağlı olan düğümler dikkate alınarak oluşturulur.

	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	0	0	0
2	0	0	0	1
3	1	0	1	0

Ağırlık Matrisi

(Weighted Matrix)



	0	1	2	3
0	0	1.2	0	2.3
1	1.2	0	0	0
2	0	0	0	5.5
3	2.3	0	5.5	0

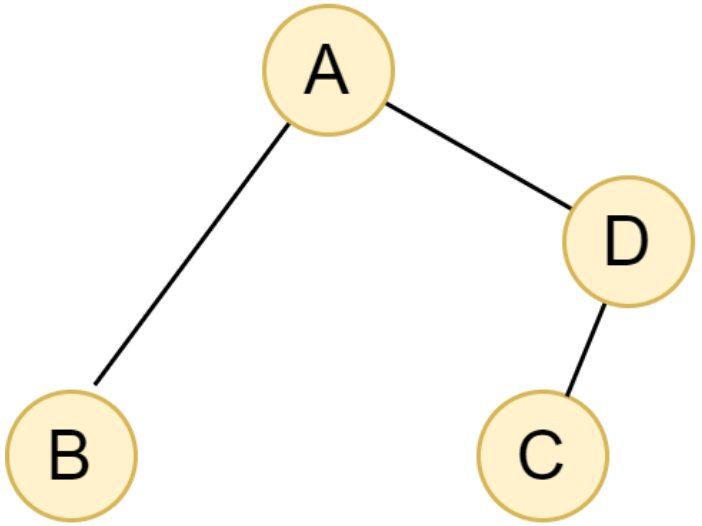
Komşu Liste

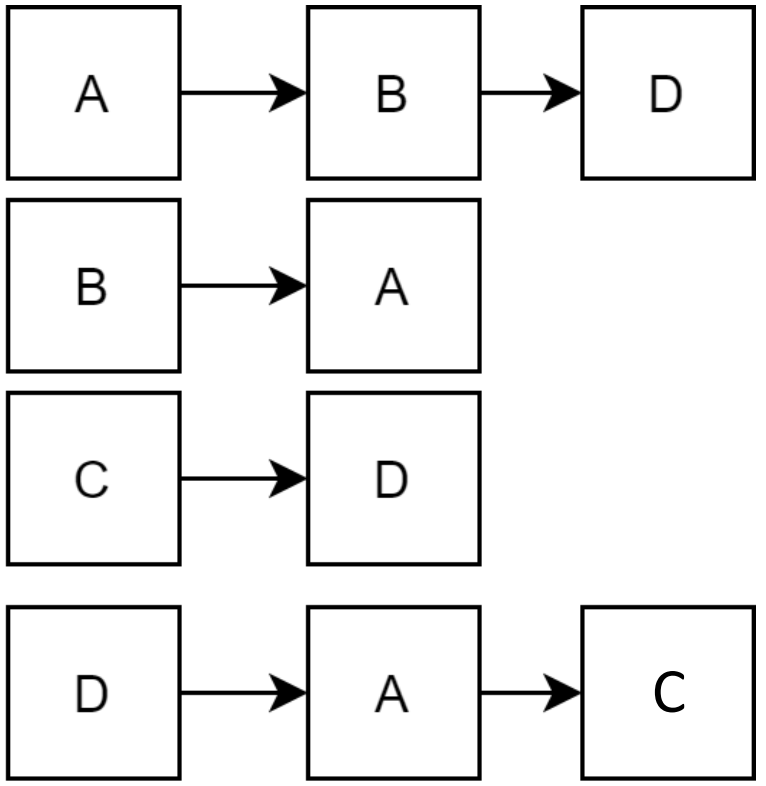
(Adjancency List)

- Her düğüm kendisinden çıkan kenarların bir listesine sahiptir.
  - Belirli bir düğüme ilişkin olayda kenarlar üzerinde iteratif işlevleri yürütmek kolaydır.
  - Listenin uzunluğu değişken olabilir.
  - Bellek kullanımı ($\Theta(n+m)$)

Komşu Liste

(Adjancency List)

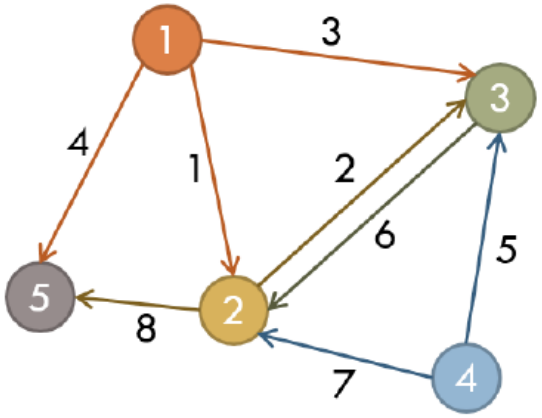




Komşuluk Listesinin Uygulanması

- **Çözüm 1: Bağlı listeler**
  - Çok fazla bellek kullanımı/bellek zaman ek yükü
  - Dinamik ayrılmış bellek veya işaretçiler kullanmak kötü
- **Çözüm 2: Vektrölerin Dizileri**
  - Kodlama daha kolay, kötü hafıza sorunu yok
  - Ancak çok yavaş.
- **Çözüm 3: Diziler**
  - Toplam kenar sayısının bilinmesi varsayımı
  - Çok hızlı ve bellek-verimli

Dizilerin bir uygulaması



ID	To	Next Edge ID
1	2	-
2	3	-
3	3	1
4	5	3
5	3	-
6	2	-
7	2	5
8	5	2

From	1	2	3	4	5
Last Edge ID	4	8	6	7	-

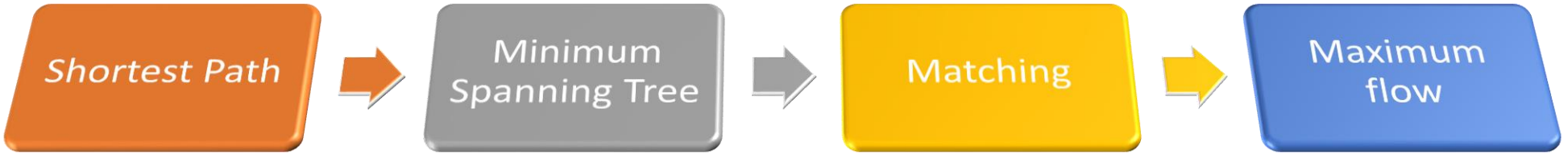
Çizge Uygulamaları

Applications of Graphs

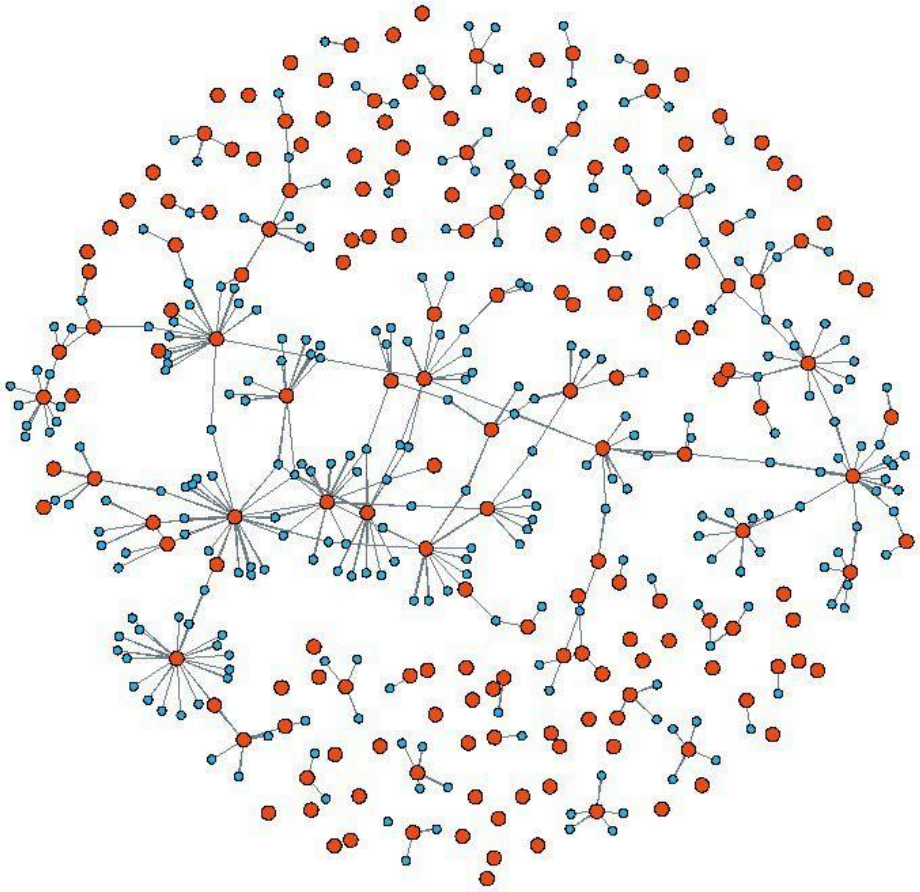
Çizge Uygulamaları (Applications)

- En kısa yol problemleri
- Taşıma ağlarının modellenmesi (Karayolu ağı, Uçuş ağı)
- Bilgisayar ağlarının modellenmesi (LAN, Internet, Web)
- Eşleşme problemleri
- Gezgin satıcı problemleri
- Çizge renklendirme problemleri
- Veri tabanları: Entity Relationship diyagramları
- Elektronik devre elemanları arasındaki ilişkinin temsil edilmesi
- Rota planlama
- Tedarik zincirleri

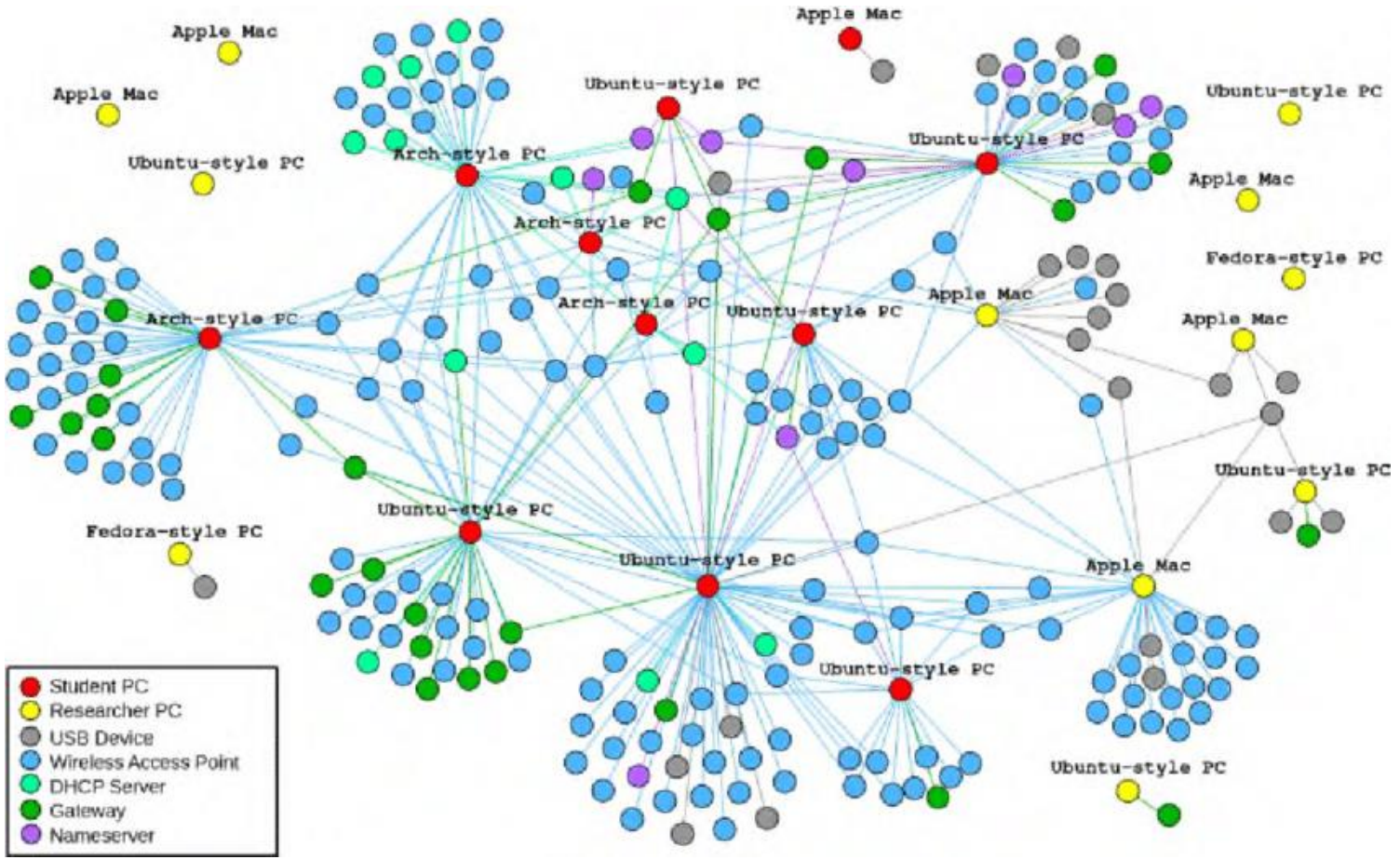
Çizge problemlerinin dört sınıfı



Çizge
(Graph)

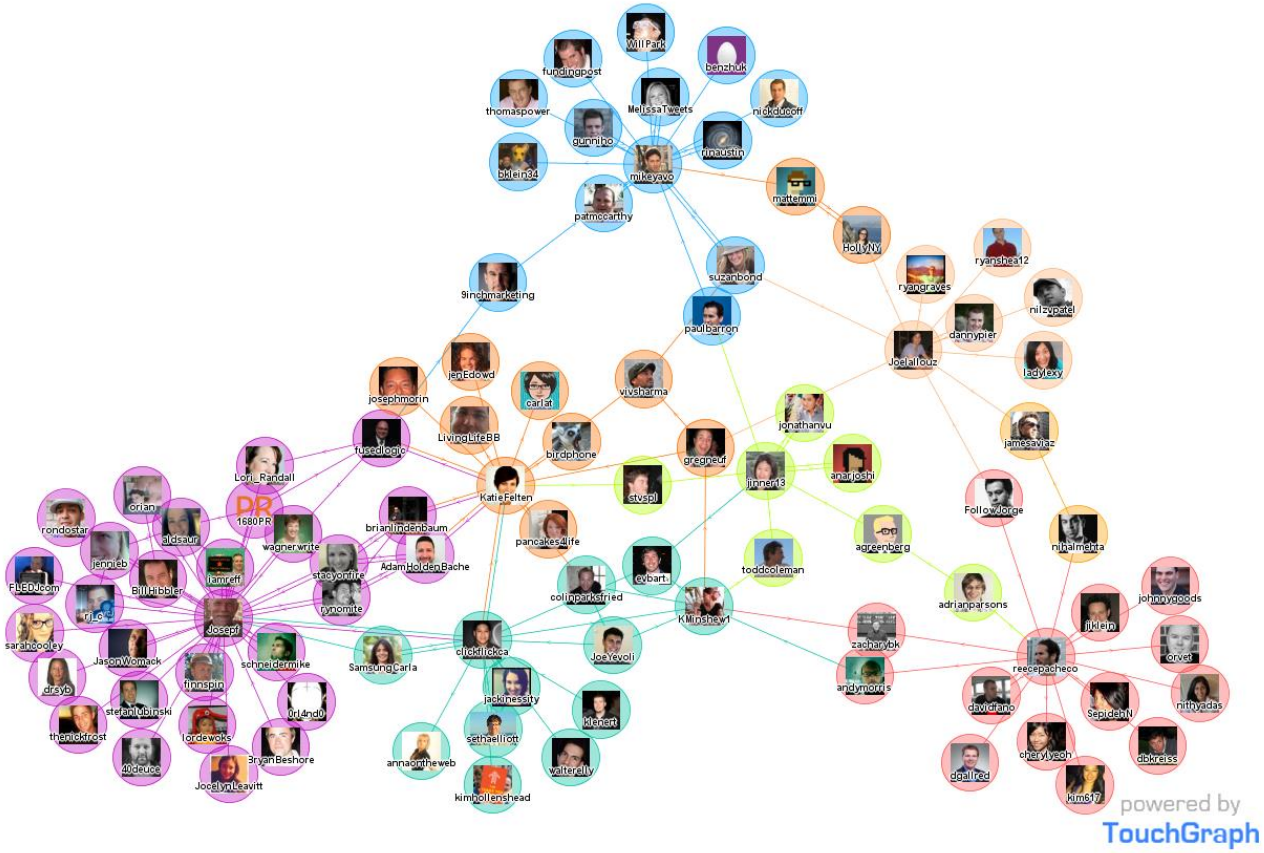


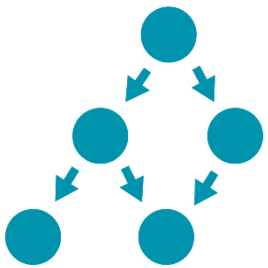
Ağ Çizgesi
(Network Graph)



Sosyal Ağ Çizgesi

(Social Network Graph)





Veri Yapıları ve Algoritmalar

ZAFER CÖMERT
Öğretim Üyesi