

Bölüm 24 GAUSS YASASI

- Elektrik Akısı
- Gauss Yasası
- Gauss Yasasının Yüklü Yalıtkanlara Uygulanması
- Elektrostatik Denge'deki İletkenler
- Sorular - Problemler

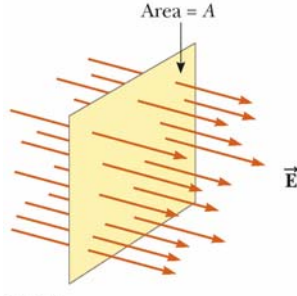
Coulomb - Gauss

- Gauss Yasası ve elektrik alanının başka hesap yolları!
- Gauss yasası Coulomb yasasının bir sonucu, ancak yüksek simetrlili yük dağılımlarının elektrik alan hesabında çok daha kullanışlıdır.

Elektrik Akısı

- Alan çizgileri alana dik bir A bölgesine giriyor
- EA çarpımı **akıyı** verir:

- $\Phi_E = E A$
- SI sisteminde birimi Nm^2/C dir.



Şekil 24.1, s.744

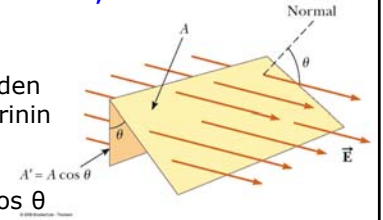
Elektrik Akısı, devam

A ve A' bölgelerinden geçen alan çizgilerinin sayısı eşittir.

$$\Phi_E = E A' = E A \cos \theta$$

- Genel olarak:

- $\Phi_E = E A \cos \theta$
- θ , A bölgesinin normali ile alan arasındaki açıdır



Elektrik Akısı, devam

- Yüzey düzgün değilse elektrik alan yüzey üzerinde değişebilir.
- Bu nedenle $\Phi_E = E A \cos \theta$ eşitliği küçük bir yüzey parçası için geçerli olur.
- Yüzey parçaları yeterince küçükse elektrik alanın parçalar üzerindeki değişimi önemsizdir.

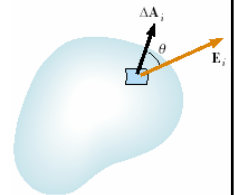
Elektrik Akısı, devam

Şekildeki gibi i ninci yüzey parçasından geçen $\Delta\Phi_E$ elektrik akısı:

$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos \theta = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i$$

Yüzeyden geçen toplam akı:

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{A}_i = \int_{\text{yüzey}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

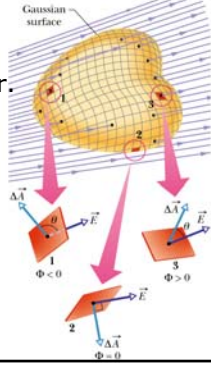


Elektrik Akısı, devam

- 1 de alan çizgileri dışarıdan içeri doğru; akı negatif.
- 2 de çizgi teğettir; akı sıfırdır.
- 3 de açı 90° den küçük; akı pozitif.

- Kapalı bir yüzeyden geçen net akı;

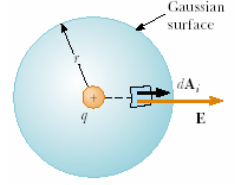
$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E_n dA$$



Gauss Yasası

r yarıçaplı küre merkezinde +q yükü nedeniyle küre (Gauss) yüzeyindeki elektrik alan:

$$E = k_e \frac{q}{r^2}$$



E ve ΔA_i her yerde paraleldir: $\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{A}_i = E \Delta A_i$

Simetri nedeniyle Gauss yüzeyinden geçen net akı;

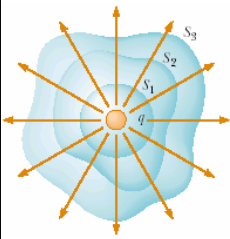
$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint E dA = E \oint dA \quad \oint dA = A = 4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{k_e q}{r^2} (4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Gauss Yasası

- Küresel yüzeyden geçen net akı: $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$
- ϵ_0 serbest uzayın geçirgenliği ve değeri $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$

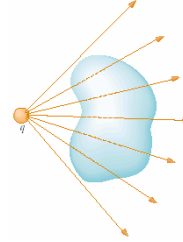


Şekildeki gibi bir q yükünü saran çeşitli kapalı yüzeylere bakalım. Tüm kapalı yüzeyden geçen elektrik alan çizgilerinin sayıları eşit.

Bir nokta yükünü saran herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

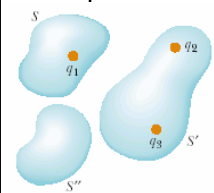
Gauss Yasası



Bir nokta q yükü kapalı yüzey dışında olsun. Yüzeye giren ve çıkan elektrik alan çizgilerinin sayıları eşit.

Yükü sarmayan herhangi bir kapalı yüzeyden geçen net akı sıfırdır.

Gauss Yasası



Bir çok nokta yük veya sürekli yük dağılımı için herhangi kapalı bir yüzeyden geçen akı;

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) \cdot d\mathbf{A}$$

S yüzeyi sadece q_1 yükünü sarıyor: net akı q_1/ϵ_0
 S' yüzeyinden geçen net akı $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$
 S'' yüzeyinden geçen net akı sıfır.

Gauss Yasası: herhangi bir Kapalı yüzeyden geçen net akı:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{ic}}{\epsilon_0}$$

Gauss Yasasının Yüklü Yalıtkanlara Uygulanması

Gauss yüzeyinin seçim yolları

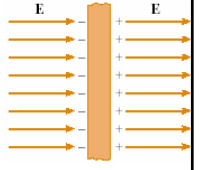
- Elektrik alanın büyüklüğü simetri uyarınca yüzey üzerinde sabit olabilir.
- Gauss yasasındaki skaler çarpım E ve dA paralel olduklarından cebirsel basit bir $E dA$ çarpımı olarak belirtilebilir.
- Gauss yasasındaki skaler çarpım E ve dA dik olduklarından sıfırdır.
- Yüzey üzerinde alan sıfırdır.
- Olabilir.

Elektrostatik Denge'deki İletkenler

Yalıtılmış bir iletkenin özellikleri:

1. Malzeme içinde her yerde elektrik alanı sıfırdır.
2. Herhangi bir yük tamamen yüzey üzerindedir.
3. Hemen dışındaki bir elektrik alan, iletkenin yüzeyine diktir.
4. Düzensiz şekilli bir iletken'deki yük, yüzey eğimlerinin yarıçapı en küçük olduğu yerlerde birikir.

Özellik 1



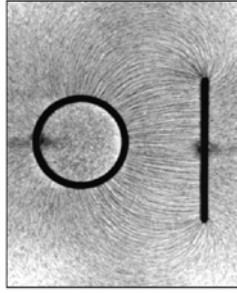
Malzeme içinde her yerde elektrik alanı sıfırdır.

- Bunun doğru olmadığını düşünürsek
 - İletken içinde bir elektrik alan olsaydı, oradaki serbest yük hareket ederdi ve bir yük akışı olurdu
 - Eğer bir yük hareketi olsaydı, iletken dengede olamazdı

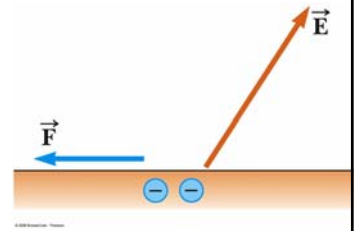
Özellik 2

Yalıtılmış bir iletken'de herhangi bir yük varsa, bu yük iletkenin yüzeyindedir.

- Coulomb yasasında benzer yükler arasındaki $1/r^2$ lik itmenin doğrudan bir sonucudur
- Yük fazlası iletken içine konabilseydi, itici kuvvetler onları mümkün olduğu kadar uzağa iter böylece yüzeye gitmelerine neden olur.



Özellik 3



Yüklü bir iletkenin hemen dışındaki bir elektrik alan, iletkenin yüzeyine diktir.

- Bu doğru olmasaydı;
- Yüzey boyunca olan bileşen yükün hareket etmesine neden olurdu
- Denge'de olmazdı

Yüklü bir iletkenin hemen dışındaki elektrik alanı

Gauss yasası bir yüzeye uygulandığında, yüzeyin iç kısmındaki toplam yük: (σ yüzeyel yük yoğunluğu)

$$q_{ic} = \sigma A$$

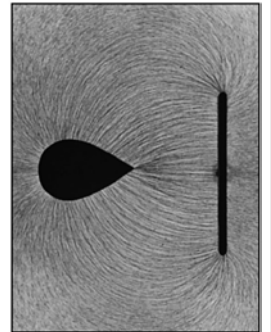
olduğundan; Gauss yasası uygulandığında

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA = \frac{q_{ic}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

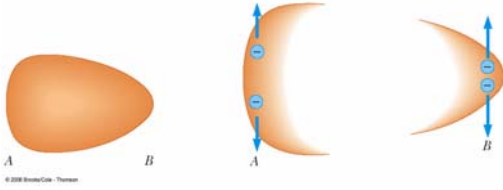
elde edilir.

Özellik 4

Düzensiz şekilli bir iletken'deki yük, yüzey eğimlerinin yarıçapı en küçük olduğu yerlerde birikir (yani keskin noktalar)



Özellik 4, devam



- Herhangi fazla yük yüzeye hareket eder
- Denge sağlanan kadar yükler uzaklaşır

PROBLEM 3 (sayfa 761)

40 cm çaplı bir ilmek, düzgün bir elektrik alanında, en büyük akının elde edildiği konuma kadar döndürülüyor. Bu konumda akı $5.2 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$ olarak ölçülüyor. Elektrik alanın büyüklüğü ne kadardır?

40 cm çaplı bir ilmek, düzgün bir elektrik alanında, en büyük akının elde edildiği konuma kadar döndürülüyor. Bu konumda akı $5.2 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$ olarak ölçülüyor. Elektrik alanın büyüklüğü ne kadardır?

ÇÖZÜM:

$$\Phi_E = E A \cos\theta$$

$$\Phi_E = 5.2 \times 10^5 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

$$r = 0.2 \text{ m}$$

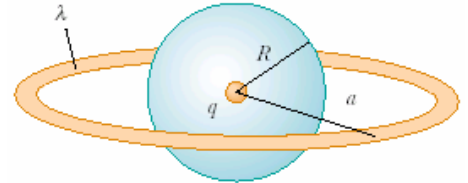
$$\theta = 0$$

$$A = \pi r^2 = 0.126 \text{ m}^2$$

$$E = 4.14 \times 10^6 \text{ N/C}$$

PROBLEM 7 (sayfa 761)

Şekildeki gibi bir q nokta yükü a yarıçaplı λ doğrusal yük yoğunluklu düzgün bir halkanın merkezinde bulunuyor. Merkezi bu nokta yükte olan R yarıçaplı ($R < a$) bir küreden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.



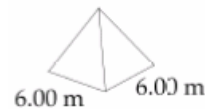
Şekildeki gibi bir q nokta yükü a yarıçaplı λ doğrusal yük yoğunluklu düzgün bir halkanın merkezinde bulunuyor. Merkezi bu nokta yükte olan R yarıçaplı ($R < a$) bir küreden geçen toplam elektrik akısını bulunuz.

Sadece R yarıçapının içinde kalan yük toplam akıya katkıda bulunacağından

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

PROBLEM 8 (sayfa 762)

6 m kenarlı kare tabanlı, 4 m yükseklikli bir pramid 52 N/C luk düşey bir elektrik alanına konuluyor. Piramidin eğik dört yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını hesaplayınız.



6 m kenarlı kare tabanlı, 4 m yükseklikli bir pramid 52 N/C luk düşey bir elektrik alanına konuluyor. Prismidin eğik dört yüzeyinden geçen toplam elektrik akısını hesaplayınız.

$$\text{Tabandan geçen akı } \Phi_E = EA \cos \theta$$

$$\Phi_E = (52)(36) \cos 180 = -1.87 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

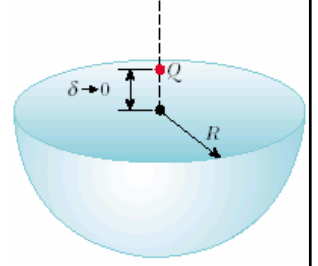
Pramidin yüzeyinden geçen elektrik alan çizgi sayısı ile tabandan geçenlerin sayısı aynıdır.

Eğimli yüzeyler için

$$\Phi_E = +1.87 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

PROBLEM 15 (sayfa 762)

Şekilde gösterildiği gibi, bir Q nokta yükü, R yarıçaplı yarım kürenin düzlem kısmının merkezinden hemen yukarısında bulunmaktadır. (a) eğri yüzeyden geçen elektrik akısı ne kadardır? (b) düz yüzeyden geçen elektrik akısı ne kadardır?



Şekilde gösterildiği gibi, bir Q nokta yükü, R yarıçaplı yarım kürenin düzlem kısmının merkezinden hemen yukarısında bulunmaktadır. (a) eğri yüzeyden geçen elektrik akısı ne kadardır? (b) düz yüzeyden geçen elektrik akısı ne kadardır?

a) Eğri yüzeyin her yerinde elektrik alanı $k_e Q/R^2$ değerinde, yüzeye dik ve dışarı doğrudur. Yarıküreden geçen akı (alan gücü x yarıkürenin alanı):

$$\Phi_{\text{egri}} = \int E dA = E_{\text{yerel}} A_{\text{yarıküre}} = \left(k_e \frac{Q}{R^2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) (4\pi R^2)$$

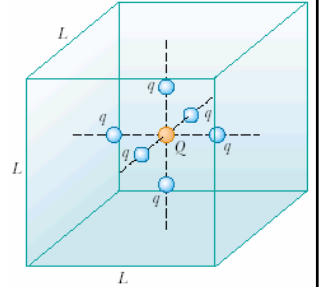
$$\Phi_{\text{egri}} = \frac{Q2\pi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0}$$

b) Gauss yasası $\Phi_{\text{egri}} + \Phi_{\text{düz}} = 0$

$$\Phi_{\text{düz}} = -\Phi_{\text{egri}} = -\frac{Q}{2\epsilon_0}$$

PROBLEM 19 (sayfa 763)

$Q=5 \mu\text{C}$ luk bir nokta yük $L=0.1 \text{ m}$ kenarlı bir küpün merkezinde bulunuyor. Şekildeki gibi Q 'nun çevresinde simetrik olarak başka altı özdeş nokta $q=-1 \mu\text{C}$ yükü bulunuyor. Küpün bir yüzünden geçen elektrik akısını bulunuz.



$Q=5 \mu\text{C}$ luk bir nokta yük $L=0.1 \text{ m}$ kenarlı bir küpün merkezinde bulunuyor. Şekildeki gibi Q 'nun çevresinde simetrik olarak başka altı özdeş nokta $q=-1 \mu\text{C}$ yükü bulunuyor. Küpün bir yüzünden geçen elektrik akısını bulunuz.

$$\text{Toplam yük: } Q - 6|q|$$

Küpten dışarı doğru olan toplam akı:

$$\frac{Q - 6|q|}{\epsilon_0}$$

Her bir yüzden geçen akı bunun altıda biridir:

$$(\Phi_E)_{\text{bir yüz}} = \frac{Q - 6|q|}{6\epsilon_0} = \frac{(5 - 6) \times 10^{-6}}{6 \times 8.85 \times 10^{-12}} = -18.8 \times 10^3 \text{ Nm}^2/\text{C}$$

PROBLEM 27 (sayfa 763)

40 cm yarıçaplı dolu bir kürede, hacmine düzgün olarak dağılmış $26 \mu\text{C}$ luk artı yük bulunmaktadır. Küre merkezinden, (a) 0 cm, (b) 10 cm, (c) 40 cm, (d) 60 cm uzaklıklarda elektrik alan büyüklüğünü hesaplayınız.

40 cm yarıçaplı dolu bir kürede, hacmine düzgün olarak dağılmış $26 \mu\text{C}$ luk artı yük bulunmaktadır. Küre merkezinden, (a) 0 cm, (b) 10 cm, (c) 40 cm, (d) 60 cm uzaklıklarda elektrik alan büyüklüğünü hesaplayınız.

$$a = 40 \text{ cm}, \quad Q = 26 \mu\text{C}, \quad E = ?$$

$$a) E(0 \text{ cm}) = k_e \frac{Qr}{a^3} = 9 \times 10^9 \frac{(26 \times 10^{-6})(0)}{(0.4)^3} = 0$$

$$b) E(r = 10 \text{ cm}) = k_e \frac{Qr}{a^3} = 9 \times 10^9 \frac{(26 \times 10^{-6})(0.1)}{(0.4)^3} = 3.65 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$c) E(r = 40 \text{ cm}) = k_e \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(26 \times 10^{-6})}{(0.4)^2} = 1.46 \times 10^6 \text{ N/C}$$

$$d) E(r = 60 \text{ cm}) = k_e \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{(26 \times 10^{-6})}{(0.6)^2} = 6.49 \times 10^5 \text{ N/C}$$

PROBLEM 31 (sayfa 764)

$32 \mu\text{C}$ luk bir yükün yüzeyine düzgün olarak dağıldığı 14 cm yarıçaplı ince bir küresel tabaka alınız. Yük dağılım merkezinden (a) $r = 10 \text{ cm}$ ve (b) $r = 20 \text{ cm}$ uzaklıklarda elektrik alanı bulunuz.

$32 \mu\text{C}$ luk bir yükün yüzeyine düzgün olarak dağıldığı 14 cm yarıçaplı ince bir küresel tabaka alınız. Yük dağılım merkezinden (a) $r = 10 \text{ cm}$ ve (b) $r = 20 \text{ cm}$ uzaklıklarda elektrik alanı bulunuz.

$$Q = 32 \mu\text{C}$$

$$a = 14 \text{ cm}$$

$$a) r = 10 \text{ cm} \quad E = 0 \text{ (küre içinde)}$$

$$b) r = 20 \text{ cm} \quad E = k_e \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{32 \times 10^{-6}}{(0.2)^2} = 7.19 \times 10^6 \text{ N/C}$$

PROBLEM 41 (sayfa 764)

Net yükü olmayan 50 cm kenar uzunluklu kare bakır bir tabaka, 80 kN/C luk düzgün bir elektrik alanına dik olarak konuluyor.

(a) Tabakanın her bir yüzündeki yük yoğunluğunu ve (b) her bir yüzdeki toplam yükü bulunuz.

Net yükü olmayan 50 cm kenar uzunluklu kare bakır bir tabaka, 80 kN/C luk düzgün bir elektrik alanına dik olarak konuluyor.
(a) Tabakanın her bir yüzündeki yük yoğunluğunu ve (b) her bir yüzdeki toplam yükü bulunuz.

$$E = 80000 \text{ N/C} \quad L = 50 \text{ cm}$$

$$a) \sigma = ? \quad b) Q = ?$$

$$a) E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = E \epsilon_0 = 80 \times 10^3 (8.85 \times 10^{-12}) = 7.08 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$b) \sigma = \frac{Q}{A}$$

$$Q = \sigma A = (7.08 \times 10^{-7})(0.5)^2 = 1.77 \times 10^{-7} \text{ C}$$

PROBLEM 48 (sayfa 764)

İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan küresel iletken bir tabakanın net yükü Q dur. Bir q nokta yükü bu tabakanın merkezine konulursa, (a) tabakanın iç yüzeyindeki ve (b) tabakanın dış yüzeyindeki yüzey yük yoğunluğunu bulunuz.

İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan küresel iletken bir tabakanın net yükü Q dur. Bir q nokta yükü bu tabakanın merkezine konulursa, (a) tabakanın iç yüzeyindeki ve (b) tabakanın dış yüzeyindeki yüzey yük yoğunluğunu bulunuz.

a) Yüzey yük yoğunluğu

$$\sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

a) Dış yüzeyin taşıdığı yükün ($Q+q$) yoğunluğu

$$\sigma_b = \frac{Q+q}{4\pi b^2}$$

2. SORU (sayfa 760):

Uzayın bir bölgesinde elektrik alanı sıfırsa, bu bölgede yük bulunmadığı sonucu çıkarabilir misiniz? Açıklayınız.

CEVAP:

Eğer bölge sadece bir nokta, çizgi veya düzlemse, hayır.

Aksi halde boş uzayda iki proton düşünün. Elektrik alan, protonları birleştiren çizginin orta noktasında sıfırdır. Alandan bağımsız bölge 3 boyutluysa, yük bulundurmaz ancak elektrik yükü ile sarılımış olabilir. Statik yük taşıyan metal bir kürenin içini düşünün.

6. SORU (sayfa 761):

Belli bir yükü saran kapalı bir yüzeyden geçen elektrik akısının, yüzeyin biçim ve büyüklüğünden neden bağımsız olduğunu açıklayınız.

CEVAP:

Bir nokta yük etrafındaki bir küreden geçen elektrik akısı küre büyüklüğünden bağımsızdır. Daha büyük yarıçaplı kürenin daha büyük alanı vardır. Ancak yüzeyinde daha küçük bir alan vardır. Böylece alan gücü ile bölgenin çarpımı yarıçaptan bağımsızdır. Yüzey küre değilse, bazı kısımlar yüke diğerlerinden daha yakındır. Bu durumda da daha küçük izdüşümsel bölgeler güçlü alanlarla beraberdir, böylece net akı etkilenmez.

8. SORU (sayfa 761):

Gauss yasasını kullanarak, elektrik alan çizgilerini, elektrik yüklerinden çıkıp başka elektrik yüklerinde son bulmalarının nedenini açıklayınız. (İpucu: Gauss yüzeyinin büyüklüğünü değiştiriniz.)

CEVAP:

Elektrik alan çizgilerinin başladığı herhangi bir nokta, bölge veya cisim düşünün. Dar bir Gauss yüzeyle çevrelensin. Çizgiler yüzeyden geçerek pozitif net akı oluşturacak şekilde dışarı çıkacaklardır. Gauss yasasına göre: pozitif net yük çizgilerin başladığı, yüzey içinde olmalıdır. Benzer olarak, elektrik alan çizgilerinin bittiği herhangi bir yer, net negatif akının geçtiği bir Gauss yüzeyinin hemen içinde olmalı ve negatif bir yük olmalıdır.

9. SORU (sayfa 761):

Aynı yükler arasındaki kuvvetin itici özelliğini ve iletkendeki yük hareket özgürlüğünü kullanarak, yalıtılmış bir iletkendeki yük fazlalığının neden iletken yüzeyinde bulunmak zorunda olduğunu açıklayınız.

CEVAP:

İletken bir cismin içinde keyfi yerlere biraz yük yerleştirelim. Her yük parçası her diğer parçayı iter, böylece her parça olabildiğince uzağa gider ve sadece iletkenin dış yüzeyine ulaştığında durur.

10. SORU (sayfa 761):

Bir insan topraktan yalıtılmış içi boş büyük bir metal küre içine yerleşiyor. Küreye fazlaca bir yük verilirse, kürenin iç tarafına dokunmakla insana bir zarar gelir mi? Başlangıçta insanda küredekiyle zıt işaretli bir yük bulunması durumunda ne olacağını açıklayınız.

CEVAP:

Kişi yüklü değilse, küre içindeki elektrik alan sıfırdır. Kürenin iç duvarı yük taşımaz. Kişi bu duvara dokunmayla zarar görmez. Kişi (küçük) bir q yükü taşıyorsa, küre içindeki elektrik alan artık sıfır değildir. Kürenin iç duvarında $-q$ yükü oluşur. Kişi küreye dokunduğunda (küçük) bir şok alır, vücudundaki tüm yük metale geçer.

Lightning Strikes a Car



The crash-test dummy is safe,
but the right front tire didn't
make it ...

High Voltage Laboratory,
Technical University Berlin, Germany

14. SORU (sayfa 761):

Yıldırımlı fırtınada güvenli yerlerden birinin araba içi olduğunu duymuşsunuzdur. Bu neden böyledir.

CEVAP:

Derste tanımlandığı gibi, Gauss yasasına göre; bir iletken üzerindeki fazla yük iletkenin yüzeyinde bulunacaktır. Bir araba yıldırım düşmesiyle yüklenirse, bu yük araba dışında kalacaktır, içindekiler zarar görmeyecektir. Yıldırım düşmesi sırasında akım da iletkenin dışında kalır. Ancak camelyafli veya üstü açılabilen bir arabanın içinde olmak bir fırtına sırasında güvende olmayı gerektiriyor.