SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

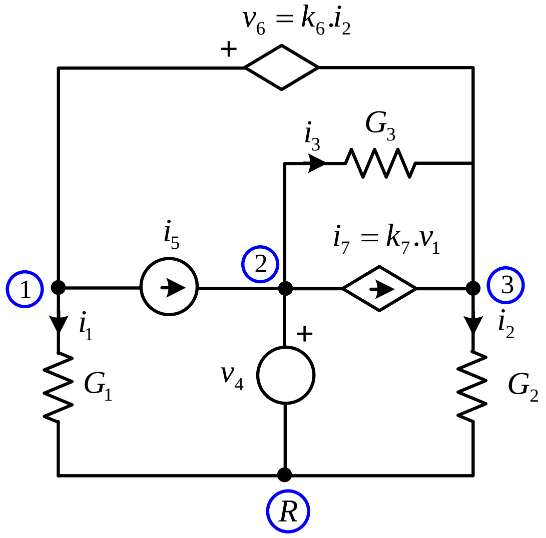
Elektrik Devre Temelleri

Hafta 10

Yrd. Doç. Dr. Kürşat AYAN

6.2. DÜĞÜM DENKLEMLERİ

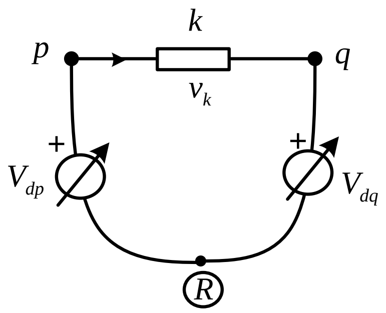
Örnek: Aşağıdaki devrenin düğüm denklemlerini bağımsız düğümler için adım adım yazınız.



1. Bağımsız düğümlere ilişkin düğüm denklemleri ve ardından direnç elemanlarının akımları yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$
\begin{aligned}
&i_1 + i_5 + i_6 = 0 && \Rightarrow && \mathrm{G}_1.v_1 = -i_5 - i_6 \\
&-i_5 + i_4 + i_3 + i_7 = 0 && \Rightarrow && \mathrm{G}_3.v_3 = i_5 - i_4 - i_7 \\
&i_2 - i_3 - i_6 - i_7 = 0 && \Rightarrow && \mathrm{G}_2.v_2 - \mathrm{G}_3.v_3 = i_6 + i_7
\end{aligned}
$$

Açıklama: Herhangi bir devre elemanının (direnç, endüktans, kapasite, bağımlı ve bağımsız gerilim ve akım kaynağı v.b) gerilimi, düğüm gerilimleri cinsinden, eleman akımlarının yönleri esas alınmak suretiyle, aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi ifade edilir.



$v_k = V_{dp} - V_{dq}$

q referans düğümü ise $v_k = V_{dp}$

p referans düğümü ise $v_k = -V_{dq}$

2. Daha sonra, direnç elemanının gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden ifade edilir ve hemen ardından düğüm gerilimleri parantezine alındıklarında denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{G}_1.V_{d1} = -i_5 - i_6 && \Rightarrow && \mathrm{G}_1.V_{d1} + 0.V_{d2} + 0.V_{d3} = -i_5 - i_6 \\
&\mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7 && \Rightarrow && 0.V_{d1} + \mathrm{G}_3.V_{d2} - \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_5 - i_4 - i_7 \\
&\mathrm{G}_2.V_{d3} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + \mathrm{G}_3.V_{d3} = i_6 + i_7 && \Rightarrow && 0.V_{d1} - \mathrm{G}_3.V_{d2} + (G_2 + \mathrm{G}_3).V_{d3} = i_6 + i_7
\end{aligned}
$$

Sonuçta elde edilen denklemleri matrisel forma sokacak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_2+G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{d1} \\ V_{d2} \\ V_{d3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_5 - i_6 \\ i_5 - i_4 - i_7 \\ i_6 + i_7 \end{bmatrix}$$

3. Ek denklemler

1. $i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$ bilinir hale gelir.
2. $V_{d2} = v_4$ bilinir hale gelir.
3. $v_6 = k_6.i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3}$

4. Bilinmeyenler

1. i_6
2. V_{d3}
3. i_4

5. Bilinenler

$V_{d2} = v_4$

$i_7 = k_7.v_1 = k_7.V_{d1}$

$v_6 = k_6.i_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.v_2 \Rightarrow V_{d1} - V_{d3} = k_6.G_2.V_{d3} \Rightarrow V_{d1} = (1 + k_6.G_2).V_{d3}$

Örnek 1. Aşağıdaki devrenin;

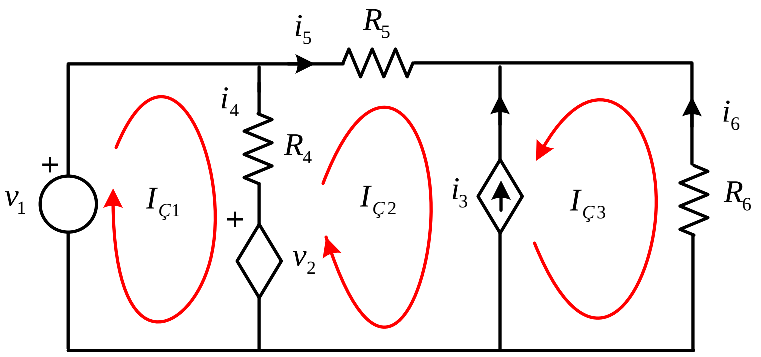
a.) Çevre denklemlerini adım adım çıkarınız.

b.) Çevre denklemlerini devreye bakarak çıkarınız.

c.) Bu denklemleri çözerek çevre akımlarını bulunuz.

d.) Çevre akımlarından yararlanarak eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

e.) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=6} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$v_1 = 2\ \text{Volt}$

$v_2 = \mu . v_6$

$i_3 = \beta . i_4$

$\mu = 2$

$\beta = 10$

$R_4 = 5\,\Omega$

$R_5 = 4\,\Omega$

$R_6 = 1\,\Omega$

a.) Her üç çevreye ait çevre denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-v_1 + v_4 + v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_1 + R_4 . i_4 + v_2 = 0$$
$$-v_2 - v_4 + v_5 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -v_2 - R_4 . i_4 + R_5 . i_5 - v_3 = 0$$
$$v_6 - v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_6 . i_6 - v_3 = 0$$

Eleman akımları çevre akımları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2}$$
$$i_5 = I_{Ç2}$$
$$i_6 = I_{Ç3}$$

Çevre akımları cinsinden yazılan bu eleman akımları, yukarıdaki çevre denklemlerinde yerine konacak ve matrisel bir biçime sokulacak olursa aşağıdaki sonuca gelinir.

$$-v_1 + R_4 .(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + v_2 = 0$$
$$-v_2 - R_4 .(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + R_5 . I_{Ç2} - v_3 = 0$$
$$R_6 . I_{Ç3} - v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

b.) Çevre denklemlerini devreye bakmak suretiyle doğrudan matrisel bir biçimde aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ I_{Ç3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_2 + v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Açıklama:

R_{11} : Birinci çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

R_{22} : İkinci çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

R_{33} : Üçüncü çevreye giren dirençlerin toplamı (işaret daima pozitif)

$R_{12} = R_{21}$: Birinci ile ikinci çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

$R_{13} = R_{31}$: Birinci ile üçüncü çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

$R_{23} = R_{32}$: İkinci ile üçüncü çevre arasındaki dirençlerin toplamı (işaret akım yönlerine bağlı)

Not: Matris içerisinde yazılan kaynak gerilimlerinin işareti, kaynağın referans yönü, ilgili çevre akımının yönü ile aynı ise negatif (-), bu yöne zıt ise pozitif (+) alınır.

c.) Ek denklemleri yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$i_3 = \beta . i_4 \quad \Rightarrow \quad -(I_{Ç2} + I_{Ç3}) = \beta .(I_{Ç1} - I_{Ç2}) \quad \Rightarrow \quad I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2}$$

ve

$$v_2 = \mu . v_6 = \mu . R_6 . i_6 = \mu . R_6 . I_{Ç3} = 2.I_{Ç3} = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2}$$

Bu ifadeleri ve eleman değerlerini çevre denklemlerinde yerine yazmak ve matrisel bir biçime sokmak suretiyle aşağıdaki sonuçlara gelinir.

$$\begin{aligned} &-2 + 5.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) - 20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2} = 0 \\ &20.I_{Ç1} - 18.I_{Ç2} - 5.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) + 4.I_{Ç2} - v_3 = 0 \\ &-10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2} - v_3 = 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -15 & 13 & 0 \\ 15 & -9 & -1 \\ -10 & 9 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{Ç1} \\ I_{Ç2} \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklem takımından görüleceği üzere artık elimizde üç bilinmeyen ve üç denklem vardır. Bu denklem takımı çözülmek suretiyle $I_{Ç1}$ ve $I_{Ç2}$ çevre akımları ile v_3 akıma bağımlı akım kaynağının gerilimi aşağıdaki gibi bulunur.

$$I_{Ç1} = 0.655 \text{ Amper}$$

$$I_{Ç2} = 0.909 \text{ Amper}$$

$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

Bu değerlerden faydalanmak suretiyle, $I_{Ç3} = -10.I_{Ç1} + 9.I_{Ç2} = -10 \times 0.655 + 9 \times 0.909$

$I_{Ç3} = 1.636 \text{ Amper}$ olarak bulunur.

d.) Eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$i_1 = -I_{Ç1} = -0.655 \text{ Amper}$$
$$v_1 = 2 \text{ Volt}$$

$$i_2 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$
$$v_2 = -20.I_{Ç1} + 18.I_{Ç2} = -20 \times 0.655 + 18 \times 0.909 = -3.272 \text{ Volt}$$

$$i_3 = 10.(I_{Ç1} - I_{Ç2}) = 10.(0.655 - 0.909) = -2.545 \text{ Amper}$$
$$v_3 = 1.636 \text{ Volt}$$

$$i_4 = I_{Ç1} - I_{Ç2} = 0.655 - 0.909 = -0.254 \text{ Amper}$$
$$v_4 = R_4.i_4 = 5 \times (-0.254) = -1.27 \text{ Volt}$$

$$i_5 = I_{Ç2} = 0.909 \text{ Amper}$$
$$v_5 = R_5.i_5 = 4 \times (0.909) = 3.636 \text{ Volt}$$

$$i_6 = I_{Ç3} = 1.636 \text{ Amper}$$
$$v_6 = R_6.i_6 = 1 \times (1.636) = 1.636 \text{ Volt}$$

e.) Aşağıdaki tabloya bakarak Tellegen teoremini sağlandığını gösterebiliriz.

Eleman	i **(Amper)**	v **(Volt)**	p **(Watt)**
1	-0.655	2	-1.31
2	-0.254	3.272	-0.83
3	-2.545	1.636	-4.163
4	-0.254	-1.27	0.323
5	0.909	3.636	3.305
6	1.636	1.636	2.676
Toplam			**0.0014**

Örnek 2. Aşağıdaki devrenin;

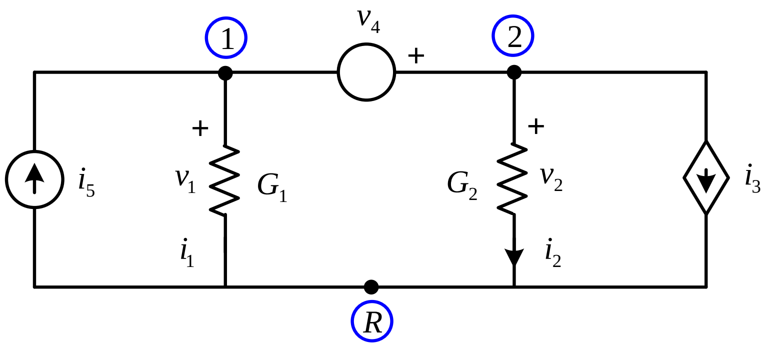
a.) Düğüm denklemlerini adım adım yazınız.

b.) Düğüm denklemlerini devreye bakarak yazınız.

c.) Bu denklemleri çözerek düğüm gerilimlerini bulunuz.

d.) Eleman akım ve gerilimlerini bulunuz.

e.) Tellegen teoreminin yani $\sum_{i=1}^{n_e=5} p_i(t) = 0$ ifadesinin sağlandığını gösteriniz.



$v_4 = 6$ Volt
$i_5 = 5$ Amper
$i_3 = \frac{1}{2} \cdot v_1$
$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 4\,\Omega$

a.) $(n_d - 1)$ adet düğüm denklemi ve ardından devredeki dirençlerin yerine tanım bağıntıları aşağıdaki gibi yazılır.

$$-i_5 + i_1 - i_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_5 + G_1 . v_1 - i_4 = 0$$
$$i_4 + i_2 + i_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 + G_2 . v_2 + 0.5 \times v_1 = 0$$

Daha sonra eleman gerilimleri düğüm gerilimleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$-5+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}-i_4=0$$
$$i_4+\frac{1}{4}\cdot V_{d2}+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}=0$$

Daha sonra ek denklemler aşağıdaki gibi yazılır.

$$V_{d2}-V_{d1}=v_4=6\text{ Volt}$$
$$V_{d2}=V_{d1}+6$$

Bu ek denklemleri yukarıda yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$\frac{1}{2}\cdot V_{d1}-i_4=5$$
$$i_4+\frac{1}{4}\cdot(V_{d1}+6)+\frac{1}{2}\cdot V_{d1}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{3}{4} & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ i_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

b.) Düğüm denklemleri devreye bakarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix}G_1 & 0\\ 0 & G_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ V_{d2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_4+i_5\\ -i_4-i_3\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}V_{d1}\\ V_{d1}+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_4+5\\ -i_4-\frac{1}{2}\cdot V_{d1}\end{bmatrix}$$

c.) Yukarıdaki denklemler çözülmek suretiyle düğüm gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_{d1}=\frac{14}{5}\text{ Volt}$$
$$V_{d2}=V_{d1}+6=\frac{14}{5}+6=\frac{44}{5}\text{ Volt}$$

d.) Bu ifadelerden faydalanmak suretiyle eleman akım ve gerilimleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$v_1=V_{d1}=\frac{14}{5}\text{ Volt}$$
$$i_1=G_1.V_{d1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5}=\frac{14}{10}\text{ Amper}$$

$$v_2=V_{d2}=\frac{44}{5}\text{ Volt}$$
$$i_2=G_2.V_{d2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{44}{5}=\frac{44}{20}=\frac{11}{5}\text{ Amper}$$

$$v_3 = V_{d2} = \frac{44}{5}\,\text{Volt}$$

$$i_3 = \frac{1}{2}\cdot v_1 = \frac{1}{2}\cdot V_{d1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}\,\text{Amper}$$

$$v_4 = 6\,\text{Volt}$$

$$i_4 = \frac{1}{2}\cdot V_{d1} - 5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{5} - 5 = -\frac{36}{10} = -\frac{18}{5}\,\text{Amper}$$

$$v_5 = -V_{d1} = -\frac{14}{5}\,\text{Volt}$$

$$i_5 = 5\,\text{Amper}$$

e.)

Eleman	v **(Volt)**	i **(Amper)**	p **(Watt)**
1	14/5	7/5	98/25
2	44/5	11/5	484/25
3	44/5	7/5	308/25
4	6	-18/5	-108/5
5	-14/5	5	-14
Toplam			**0**

Açıklama:

G_{11}: Birinci düğüme bağlı dirençlerin terslerinin toplamı (işaret daima pozitif)

G_{22} : İkinci düğüme bağlı dirençlerin terslerinin toplamı (işaret daima pozitif)

$G_{12} = G_{21}$: Birinci ile ikinci düğüm arasındaki dirençlerin tersleri toplamı (işaret daima negatif)

Not: Matris içerisinde yazılan kaynak akımlarının işareti, kaynağın referans yönü ilgili düğüme doğru ise pozitif (+), düğümden dışarı doğru ise negatif (-) alınır.