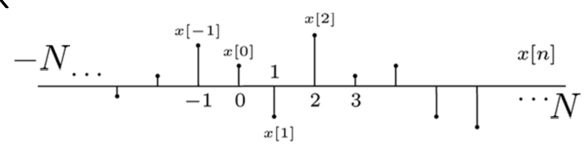
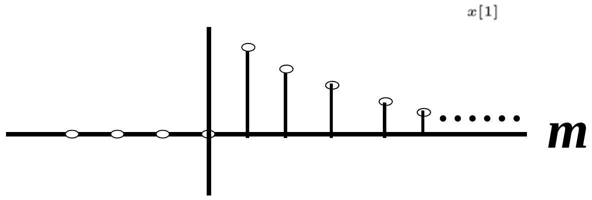
Diferansiyel ve Fark Denklemleriyle Tanımlanan Nedensel Doğrusal Zamanla Değişmeyen Sistemler

Convolüsyon yaklaşımının maliyeti yüksek





$$y[-N] = \sum_{m=-N}^{m=N} x_f[m]h_2[-N-m]$$

One output point

2N terms in summation

Fark denklemleri kullanmak daha uygundur

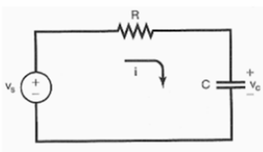
$$y[n] - \frac{1}{0.9}y[n-1] = -\frac{1}{0.9}x_f[n]$$

- y[n] i üretmek daha kolay

3

- Linear Constant-Coefficient Differential Equations
  - e.x., RC circuit

Input signal: $v_s(t)$



Output signal: $v_c(t)$

$$\Rightarrow \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$

$x(t) \rightarrow$ RC Circuit $\rightarrow y(t) \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) + a\,y(t) = b\,x(t)$

- Linear Constant-Coefficient Differential Equations
  - For a general CT LTI system,

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{CT LTI}} \rightarrow y(t)$$

$$a_N \frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$

$$= b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = ?$$

- Linear Constant-Coefficient Difference Equations
  - For a general DT LTI system,

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{DT LTI}} \rightarrow y[n]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N]$$

$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_{M-1} x[n-M+1] + b_M x[n-M]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]$$

$$\Rightarrow h[n] = ?$$

- Recursive Equation:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N]$$

$$= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_{M-1} x[n-M+1] + b_M x[n-M]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$\Rightarrow\ y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] \right\}$$

- Recursive Equation:
  - For example, (Example 2.15)

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow h[n]$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI}} \rightarrow y[n]$$

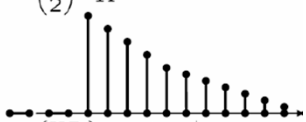
$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n]$$

$y[n] = 0, \quad$ for $n \leq -1$

$x[n] = K\delta[n]$

$$\Rightarrow \begin{cases} y[0] = x[0] + \frac{1}{2} y[-1] & = K \\ y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] & = \frac{1}{2} K \\ y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] & = \left(\frac{1}{2}\right)^2 K \\ \vdots & \\ y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] & = \left(\frac{1}{2}\right)^n K \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$



$\Rightarrow$ an Infinite Impulse Response (IIR) system

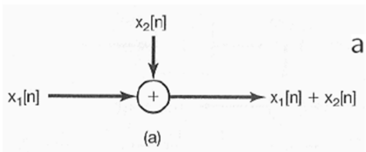
- <u>Nonrecursive Equation:</u>
  - When N = 0,

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n-k]$$

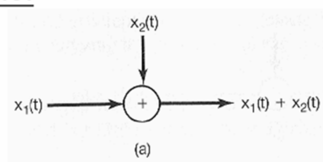
$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

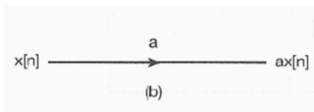
$\Rightarrow$ a Finite Impulse Response (FIR) system

- <u>Block Diagram Representations:</u>

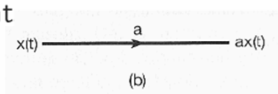


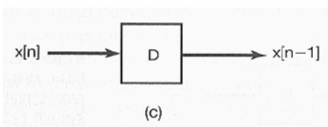
an adder



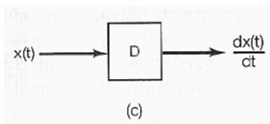


multiplication
by a coefficient





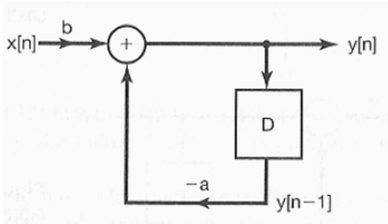
a unit delay/
differentiator



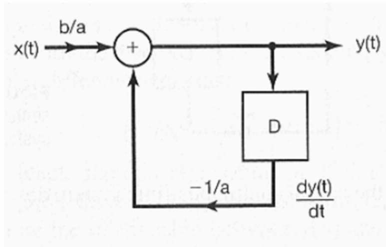
- Block Diagram Representations:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n] \qquad \frac{d}{dt}y(t) + ay(t) = bx(t)$$

$$y[n] = -ay[n-1] + bx[n] \qquad y(t) = -\frac{1}{a}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{b}{a}x(t)$$



$$D \Longleftrightarrow z^{-1}$$



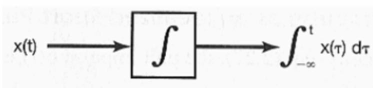
$$D \Longleftrightarrow s$$

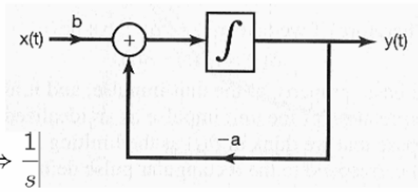
- Block Diagram Representations:

$$\frac{d}{dt}y(t) = bx(t) - ay(t)$$

$$\Rightarrow \ y(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[bx(\tau) - ay(\tau)\right] d\tau$$

$$\Rightarrow \ y(t) = y(t_0) \ + \ \int_{t_0}^{t} \left[bx(\tau) - ay(\tau)\right] d\tau$$



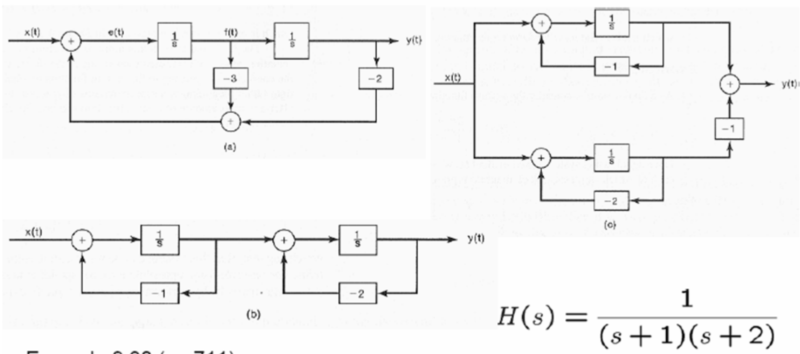


$$\int \Longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

- Block Diagram Representations:

$$\int \Longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

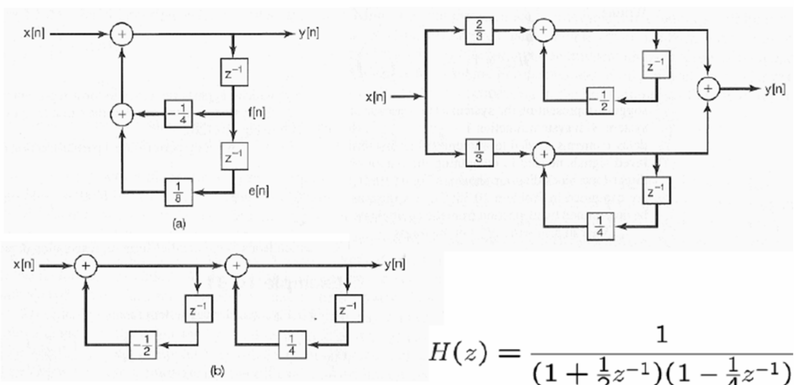


$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

- Example 9.30 (pp.711)

- Block Diagram Representations:

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$



$$H(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

- Example 10.30 (pp.786)

Fark denklemleriyle belirlenen kısımlar:

doğal çözüm:

$y_d(n)$, $x(n)=0$ için fark denklemlerinin çözümüdür.

başlangıç koşulları: $y(-1)$, $y(-2)$

zorlanmış çözüm:

$x(n)$ verilen

$y(-1)=y(-2)=\dots=0$

Toplam Çözüm = Doğal Ç. + Zorlanmış Ç.

$$\sum_{k=0}^{N} b_k\, y(n-k) = 0 \qquad y(n)=\lambda^n$$

$$b_0\, y(n) + b_1\, y(n-1) + \dots + b_N\, y(n-N) = 0$$

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_N\lambda^{n-N} = 0$$

$$y_d(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_N\lambda_N^n$$

Çift katlı kök çıkarsa

$$c_1\lambda_1^n + c_2\, n\, \lambda_1^n$$

Zorlanmış Çözüm:

1. doğal çözümle aynı çözüm
2. özel çözüm

$$\left.\right\} \; y_z(n) + y_d(n) + y_ö(n) = y_T(n)$$

$$= c_3\lambda_1^n + c_4\lambda_2^n + y_ö(n)$$

Giriş X[n]	Özel Çözüm
A.U[n]	K.U[n]
A.m^n.U[n]	A.n.m^n.U[n]
A. cos ω_0.n A. sin ω_0.n	K1. cos ω_0.n + K2. sin ω_0.n
$A^n.n^m$	$A^n(K_0 n^m + K_1 n^{m-1} + \dots K_m)$
Eğer köklerden en az biri giriş formunda ise yani girişte a^n varsa ve a kök ise	K. n. U[n]
Eğer kökler katlı ve giriş formunda ise	K.n^2.U[n]

Örnek 2.6

Başlangıç koşulları $y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 2$ olarak verilen sistemin fark denklemi aşağıdaki gibi verildiğine göre $n \geq 0$ için sisteme ait $y_d(n) = \lambda^n$ doğal çözümü bulunuz.

$$y(n) - 2y(n-1) - 3y(n-2) = x(n) \qquad (2.39)$$

Örnek 2.7

Örnek 2.6 da verilen sistemin $n \geq 0$ için $y_z(n)$ zorlanmış çözümünü, $x(n) = 10u(n)$ girişi için belirleyiniz.

Örnek 2.8

Aşağıdaki fark denklemi ile verilen sistem için toplam çözümü ($y_T(n)$, $n \ge 0$) bulunuz. Giriş $x(n) = u(n)$ birim basamak dizisi ve başlangıç koşulu $y(-1) = 2$ dir.

$$y(n) + 0.5y(n-1) = x(n), \qquad (2.42)$$

1. Fark denklemi $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$ olarak verilen ayrık zaman sistemin $y(-1) = 0$ başlangıç koşulu ile $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ işaretine olan cevabının toplam çözümünü bulunuz.

   $\lambda^n - \frac{1}{2}\lambda^{n-1} = 0$'dan $\lambda = \frac{1}{2}$

   $y_d(n) = C\left(\frac{1}{2}\right)^n$ dir.

   Başlangıç koşulu sıfır $y_d(n) = 0$

   Özel çözüm:

   $y_ö(n) = Kn\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

   $Kn\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{2}K(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

   $Kn\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}K(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   $K = 1$

   Zorlanmış Çözüm:

   $y_z(n) = C\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

   $y(0) - \frac{1}{2}y(-1) = x(0) = 1$'den $y(0) = 1$

   $C = 1$ bulunur.

   $y_z(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1+n)u(n)$ bulunur.

   Toplam çözüm:

   $y_t(n) = y_d(n) + y_z(n)$

   $y_t(n) = y_z(n)$

Ör: $y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$

$x(n) = 4^n u(n) \qquad y(-2) = 0\ ,\ y(-1) = 5$

2. İkinci dereceden fark denklemi, giriş işareti ve başlangıç koşulları aşağıdaki şekilde verilen sistemin tam (doğal+zorlanmış) çözümünü bulunuz.

$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n)\ , \quad x(n) = \cos\frac{n\pi}{2}, \quad y(-1) = y(-2) = 1$

$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = 8(2)^n - 9(3)^n - 1.6(2)^n + 2.7(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$

1. $y(n)$ durum ve $x(n)$ ise giriş değişkenlerinin şimdiki değerlerini gösterdiğine göre, ikinci dereceden fark denklemi, giriş işareti ve başlangıç koşulları

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)\ ,\quad x(n)=\cos\frac{n\pi}{2},\quad y(-1)=y(-2)=1$$

olarak verilen denklemin tam (doğal+zorlanmış) çözümünü bulunuz.

Cevap. Normal sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümünde olduğu gibi fark denklemlerinin de $y_d(n)$ doğal çözüm ve $y_z(n)$ zorlanmış çözüm gibi iki çözümü vardır. $y_d(n)$ sağ tarafı sıfır olan homojen denklem çözümü, $y_z(n)$ ise sağ tarafı sıfır olmayan ve kaynak fonksiyonunun biçimine bağlı olan çözümdür. Tam çözüm bu iki çözümün toplamı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y_t(n)=y_d(n)+y_z(n)$$

1. Homojen denklem (doğal) çözümü

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)\ ,\quad x(n)=\cos\frac{n\pi}{2},\quad y(-1)=y(-2)=1$$

Kaynak fonksiyonunu $x(n)=0$ alarak fark denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=0$$

Bu denkleme homojen fark denklemi denir ve çözümü aşağıdaki gibi kabul edilir.

$$y_d(n)=C\lambda^n$$

Bu çözüm yukarıdaki denklemde yerine konur.

$C\lambda^n-5C\lambda^{n-1}+6C\lambda^{n-2}=0,\quad C\neq 0$ olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\lambda^n-5\lambda^{n-1}+6\lambda^{n-2}=0\quad\Rightarrow\quad \lambda^{n-2}\left[\lambda^2-5\lambda+6\right]=0$$

$\lambda^{n-2}\neq 0$ olduğundan karakteristik denklemin çözümü aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

Buradan $(\lambda-2)(\lambda-3)=0\qquad \lambda=2$ ve $\lambda=3$ elde edilir.

$$y_d(n)=C_1(2)^n+C_2(3)^n$$

C_1 ve C_2 başlangıç koşullarından belirlenir.

$$y(0)-5y(-1)+6y(-2)=0\qquad y(0)=5y(-1)-6y(-2)=5-6=-1$$

$$y(1)-5y(0)+6y(-1)=0\qquad y(1)=5y(0)-6y(-1)=-5-6=-11$$

$$y_d(0)=C_1+C_2=-1\qquad C_2=-1-C_1$$

$$y_d(1)=2C_1+3C_2=-11\quad 2C_1+3(-1-C_1)=-11\quad 2C_1-3-3C_1=-11\quad C_1=8\quad C_2=-9$$

$$y_d(n)=8(2)^n-9(3)^n$$

2. Homojen olmayan denklemin (zorlanmış) çözümü

Önce özel çözümü bulmak için aşağıdaki şekilde tahmin yaparız.

$$y_o(n)=A\cos\frac{n\pi}{2}+B\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$A\cos\frac{n\pi}{2}+B\sin\frac{n\pi}{2}-5\left[A\cos\frac{(n-1)\pi}{2}+B\sin\frac{(n-1)\pi}{2}\right]+6\left[A\cos\frac{(n-2)\pi}{2}+B\sin\frac{(n-2)\pi}{2}\right]=\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$A+5B-6A=1\qquad -5A+5B=1\qquad -10A=1\qquad A=-1/10=-0.1$$

$$B-5A-6B=0\quad -5B-5A=0\quad B=-A\quad B=0.1$$

$$y_o(n)=-0.1\cos\frac{n\pi}{2}+0.1\sin\frac{n\pi}{\beta}$$

$$y_z(n)=y_d(n)+y_o(n)=C_1(2)^n+C_2(3)^n-0.1\cos\frac{n\pi}{2}+0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

C_1 ve C_2 başlangıç koşullarından belirlenir.

$n=0$ ve $n=1$ için $y(-1)=y(-2)=0$ alarak fark denklemini oluşturalım.

$$y(0)=1$$

$$y(1)-5y(0)=0\qquad y(1)=5$$

$$y_z(0)=C_1(2)^0+C_2(3)^0-0.1=C_1+C_2-0.1=1\qquad C_1+C_2=1.1\qquad C_2=1.1-C_1$$

$$y_z(1)=C_1(2)^1+C_2(3)^1+0.1=2C_1+3C_2+0.1=5\qquad 2C_1+3C_2=4.9$$

$2C_1+3(1.1-C_1)=4.9\qquad 2C_1+3.3-3C_1=4.9\qquad C_1=-1.6$ ve $C_2=2.7$

$$y_z(n) = y_d(n) + y_ö(n) = -1.6(2)^n + 2.7(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = 8(2)^n - 9(3)^n - 1.6(2)^n + 2.7(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = 6.4(2)^n - 6.3(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

Tam çözüm=Homogen çözüm+Özel çözüm şeklinde hesaplamak istersek,

$$y_T(n) = y_d(n) + y_ö(n) = C_1(2)^n + C_2(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

C_1 ve C_2 başlangıç koşullarından belirlenir.

$n = 0$ ve $n = 1$ için $y(-1) = y(-2) = 1$ alarak fark denklemini oluşturalım.

$y(0) - 5y(-1) + 6y(-2) = 1 \qquad y(0) = 5y(-1) - 6y(-2) + 1 = 6 - 6 = 0$

$y(1) - 5y(0) + 6y(-1) = 0 \qquad y(1) = -6y(-1) = -6$

$y_t(0) = C_1 + C_2 - 0.1 = 0 \qquad C_2 = 0.1 - C_1$

$y_t(1) = 2C_1 + 3C_2 + 0.1 = -6 \quad 2C_1 + 3(0.1 - C_1) = -6.1 \qquad 2C_1 - 3C_1 = -6.1 - 0.3 \qquad C_1 = 6.4$
$C_2 = -6.3$

$$y_T(n) = y_d(n) + y_ö(n) = 6.4(2)^n - 6.3(3)^n - 0.1\cos\frac{n\pi}{2} + 0.1\sin\frac{n\pi}{2}$$

2. Fark denklemi ve başlangıç koşulları aşağıda verilmiş olan IIR sistemin n≥0 için birim impuls cevabını bulunuz.

$y(n) - 6y(n-1) + 9y(n-2) = x(n)$
$y(-1) = 2$ ve $y(-2) = 4$

Cevap. Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$\lambda^n - 6\lambda^{n-1} + 9\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = \lambda^{n-2}(\lambda - 3)^2 = 0$

Böylece karakteristik polinomun $\lambda = 3$ de iki katlı kökü vardır. Bu durumda doğal çözüm

$h(n) = C_1.(3)^n + nC_2.(3)^n$

şeklinde yazılır. Burada C_1 ve C_2 katsayıları $y(-1) = 0$ ve $y(-2) = 0$ önkoşullarını sağlayacak şekilde seçilir. Yukarıdaki denklemi $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirilerek aşağıdaki değerler elde edilir. ($\delta(0) = 1$, $\delta(1) = 0$)

$h(0) = 6h(-1) - 9h(-2) + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$

$h(1) = 6h(0) - 9h(-1) + 0 = 6 + 0 + 0 = 6$

Öte yandan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$h(0) = C_1 = 1 \qquad C_1 = 1$

$h(1) = 3C_1 + 3C_2 = 6 \qquad 3C_2 = 3 \qquad C_2 = 1$

Buradan çözüm olarak $C_1 = 1$ ve $C_2 = 1$ bulunur. Bulunan katsayıları doğal çözüm denkleminde yerine koyduğumuzda, doğal çözüm $n \geq 0$ için aşağıdaki gibi olur.

$h(n) = (3)^n + n(3)^n$

4. Fark denklemi ve başlangıç koşulları aşağıda verilmiş olan IIR sistemin n≥0 için;

(a) Homojen (genel) çözümünü
(b) Özel çözümünü
(c) Tam çözümünü bulunuz.

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

$$x(n) = 4^n u(n)$$

$$y(-1) = 0 \text{ ve } y(-2) = 0$$

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n$$

3. Fark denklemi ve başlangıç koşulları aşağıda verilmiş olan IIR sistemin n≥0 için;

(a) Homojen (genel) çözümünü
(b) Özel çözümünü
(c) Tam çözümünü bulunuz.

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$
$$x(n) = 4^n u(n)$$
$$y(-1) = 0 \text{ ve } y(-2) = 0$$

(a) Homojen(genel) çözüm

Doğal çözümü bulmak için $y_d(n) = \lambda^n$ olarak alıp, bu çözümü $x(n) = 0$ için fark denklemine yerleştiriyoruz.

$$\lambda^n - 3\lambda^{n-1} - 4\lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = \lambda^{n-2}(\lambda+1).(\lambda-4) = 0$$

Böylece karakteristik polinomun kökleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 4$ olur. Bu durumda doğal çözüm

$$y(n) = C_1.(-1)^n + C_2.(4)^n$$

(b) Özel çözüm

Giriş dizisi $x(n) = 4^n u(n)$ olduğundan $y_ö(n) = K4^n u(n)$ biçiminde bir özel çözüm tahmini varsayılabilir. Ancak görüyoruz ki $y_ö(n)$ türdeş çözüme zaten dahil edilmiştir yani bu özel çözüm işlevsizdir. Bunun yerine özel çözümü türdeş terimdeki çözümlerden doğrusal olarak bağımsız olacak şekilde seçmemiz gerekir. Aslında bu duruma yaklaşımımız karakteristik denklemin katlı kökler içerdiği duruma benzer şekilde olmaktadır. O nedenle özel çözüm tahminini aşağıdaki gibi yapıyoruz.

$$y_ö(n) = Kn4^n u(n)$$

Bu tahmini fark denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1} u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2} u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1} u(n-1)$$

K yı belirlemek için, bu eşitliği herhangi $n \geq 2$ için değerlendirelim. n nin bu şekilde seçimi terimlerden hiç birisinin yok olmamasını sağlar. İşlemleri kolaylaştırmak için $n = 2$ seçersek bu denklemden $K = 6/5$ elde edilir. Bu durumda özel çözüm için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$y_ö(n) = \frac{6}{5} n(4)^n u(n)$

(c) Tam çözüm

Bu durumda fark denkleminin toplam çözümü aşağıdaki gibi elde edilir

$$y(n) = C_1.(-1)^n + C_2.(4)^n + \frac{6}{5} n(4)^n u(n)$$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları $y(-1) = 0$ ve $y(-2) = 0$ önkoşullarını sağlayacak şekilde seçilir. Fark denklemini ve tam çözümü $n = 0$ ve $n = 1$ için değerlendirelim.

$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2) + 1 = 1$

$y(1) = 3y(0) + 4y(-1) + 6 = 9$

$y(0) = C_1 + C_2 = 1$

$y(1) = -C_1 + 4C_2 + \frac{24}{5} = 9$

Buradan $C_1 = -1/25$ ve $C_2 = 26/25$ bulunur. Bulunan katsayıları tam çözüm denkleminde yerine koyduğumuzda aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5} n(4)^n$$

Soru 1. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan doğal, zorlanmış ve toplam çözümünü bulun.

Çözüm.

a.

$\lambda^n - 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^{n-2}(\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = C_1(1)^n + nC_2(1)^n$ şeklinde bulunur. Sıfır giriş için C_1 ve C_2 katsayılarını bulalım. $y_d(n)$ yi $x(n) = 0$ ve $n = 0$ ve $n = 1$ için fark denklemine yerleştirirsek aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$y(0) = 2y(-1) - y(-2) = 2 \times 1 - 1 \times 0 = 2$

$y(1) = 2y(0) - y(-1) = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$

$y(0) = C_1 + 0 = 2 \quad C_1 = 2$

$y(1) = C_1 + C_2 = 3 \quad C_2 = 1$

Böylece doğal çözüm $y_d(n) = 2(1)^n + n(1)^n = (2 + n)u(n)$ olarak bulunmuş olur.

b.

Giriş işareti $x(n) = u(n) = 1$ dir. Özdeğerlerin her ikisi de 1 den farklı olsaydı $y_ö(n) = Ku(n)$ şeklinde özel çözüm tahmininde bulunacaktık. Özdeğerlerin bir tanesi 1 olsaydı $y_ö(n) = Knu(n)$ şeklinde özel çözüm tahmininde bulunacaktık. Özdeğerlerin her ikisi de 1 (katlı) olduğundan dolayı, özel çözüm tahmini $y_ö(n) = Kn^2u(n)$ olarak yapılacaktır. Bu tahmin fark denklemine yerleştirilmek suretiyle K ve ardından da $y_ö(n)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$Kn^2u(n) - 2K(n-1)^2u(n-1) + K(n-2)^2u(n-2) = u(n)$

Bu denklemi herhangi bir $n \geq 2$ için değerlendirirsek K yı bulabiliriz.

$4K - 2K = 1 \quad K = 1/2$

Böylece $y_ö(n) = \frac{1}{2}n^2u(n)$ olarak bulunur.

Bu durumda zorlanmış çözüm aşağıdaki gibi olur.

$y_z(n) = C_1(1)^n + nC_2(1)^n + \frac{1}{2}n^2u(n)$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n = 0$ ve $n = 1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$y(0) = 2y(-1) - y(-2) + u(0) = 2\times 0 - 1\times 0 + 1 = 1$

$y(1) = 2y(0) - y(-1) + u(1) = 2\times 1 - 1\times 0 + 1 = 3$

$y_z(0) = C_1 = 1$

$y_z(1) = C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 3 \quad C_2 = \frac{3}{2}$

Böylece zorlanmış çözümü aşağıdaki şekilde bulabiliriz.

$$y_z(n) = (1)^n u(n) + n\frac{3}{2}(1)^n u(n) + \frac{1}{2}n^2 u(n) = (1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n)$$

Toplam çözüm ise doğal ve zorlanmış çözümün toplamı olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$y_T(n) = y_d(n) + y_z(n) = (2+n)u(n) + (1 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n) = (3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2)u(n)$$

Soru 2. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin $y(-1) = y(-2) = 1$ başlangıç koşulları ile $x(n) = 2u(n)$ işaretine cevabın doğal, zorlanmış ve tam çözümünü bulunuz.

$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$

Çözüm.

a.

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0 \qquad \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \qquad (\lambda - 2)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2$

$y_d(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n$

$n = 0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{1} + 4\underbrace{y(-2)}_{1} = 0 \quad y(0) = 0$

$n = 1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{0} + 4\underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \quad y(1) = -4$

$n = 0$ için $y_d(0) = C_1 = 0$

$n = 1$ için $y_d(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 = -4 \quad C_2 = -2$

$y_d(n) = -2n(2)^n = -2n(2)^n u(n)$

b.

$x(n) = 2u(n)$ olduğundan dolayı $y_z(n) = Ku(n)$ olarak tahmin edilir.

$Ku(n) - 4Ku(n-1) + 4Ku(n-2) = 2u(n)$

$n \geq 2$ için $K - 4K + 4K = 2 \quad K = 2$

$y_z(n) = 2u(n)$

Zorlanmış çözüm ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$y_z(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n + 2u(n)$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n=0$ ve $n=1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$n=0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{0} + 4\underbrace{y(-2)}_{0} = 2u(0) = 2 \qquad y(0) = 2$

$n=1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{2} + 4\underbrace{y(-1)}_{0} = 2u(1) = 2 \qquad y(1) = 2+8 = 10$

$n=0$ için $y_z(0) = C_1 + 2 = 2 \qquad C_1 = 0$

$n=1$ için $y_z(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 + 2 = 10 \qquad C_2 = 4$

$y_z(n) = 4n(2)^n + 2u(n) = 4n(2)^n u(n) + 2u(n) = (4n(2)^n + 2)u(n)$

c.

$$\begin{aligned} y_T(n) &= y_d(n) + y_z(n) = -2n(2)^n u(n) + 4n(2)^n u(n) + 2u(n) \\ &= 2n(2)^n u(n) + 2u(n) = \left[2n(2)^n + 2\right]u(n) \end{aligned}$$

Soru 3. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin $y(-1) = y(-2) = 1$ başlangıç koşulları ile $x(n) = (2)^n$ işaretine cevabın doğal, zorlanmış ve tam çözümünü bulunuz.

$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$

Çözüm.

a.

$\lambda^n - 4\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0 \qquad \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \qquad (\lambda-2)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 2$

$y_d(n) = C_1(2)^n + nC_2(2)^n$

$n=0$ için $y(0) - 4\underbrace{y(-1)}_{1} + 4\underbrace{y(-2)}_{1} = 0 \qquad y(0) = 0$

$n=1$ için $y(1) - 4\underbrace{y(0)}_{0} + 4\underbrace{y(-1)}_{1} = 0 \qquad y(1) = -4$

$n=0$ için $y_d(0) = C_1 = 0$

$n=1$ için $y_d(1) = 2\underbrace{C_1}_{0} + 2C_2 = -4 \qquad C_2 = -2$

$y_d(n) = -2n(2)^n = -2n(2)^n u(n)$

b.

$x(n)=(2)^n u(n)$ dir. Şayet özdeğerlerin her ikisi de 2 den farklı olsaydı o zaman $y_ö(n)=K(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilecek idi. Özdeğerler katlı olmayıp sadece bir tanesi 2 olsaydı o zaman $y_ö(n)=Kn(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilecek idi. Özdeğerlerin her ikisi de 2 (iki katlı) olduğundan dolayı $y_ö(n)=Kn^2(2)^n u(n)$ olarak tahmin edilir. Bu tahmin fark denkleminde yerine konmak suretiyle K ve ardından da $y_ö(n)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Kn^2(2)^n u(n)-4K(n-1)^2(2)^{n-1}u(n-1)+4K(n-2)^2(2)^{n-2}u(n-2)=(2)^n u(n)$$

$n=2$ için $4K(2)^2-4K(2)=K(2)^2 \quad \Rightarrow \quad 16K-8K=4 \quad K=1/2$

$$y_ö(n)=\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$

Zorlanmış çözüm ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_z(n)=C_1(2)^n+nC_2(2)^n+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$

Burada C_1 ve C_2 katsayıları sıfır ilk koşulu sağlayacak şekilde seçilirler. Sıfır ilk koşul ve $n=0$ ve $n=1$ için fark denklemine yerleştirerek aşağıdaki şekilde verilir.

$n=0$ için $y(0)-4\underbrace{y(-1)}_{0}+4\underbrace{y(-2)}_{0}=(2)^0=1 \quad y(0)=1$

$n=1$ için $y(1)-4\underbrace{y(0)}_{1}+4\underbrace{y(-1)}_{0}=(2)^1=2 \quad y(1)=2+4=6$

$n=0$ için $y_z(0)=C_1=1 \quad C_1=1$

$n=1$ için $y_z(1)=2\underbrace{C_1}_{1}+2C_2+1=6 \quad C_2=3$

$$y_z(n)=(2)^n u(n)+3n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)=\left[1+3n+\frac{1}{2}n^2\right](2)^n u(n)$$

c.

$$y_T(n)=y_d(n)+y_z(n)=-2n(2)^n u(n)+(2)^n u(n)+3n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)$$
$$=(2)^n u(n)+n(2)^n u(n)+\frac{1}{2}n^2(2)^n u(n)=\left[1+n+\frac{1}{2}n^2\right](2)^n u(n)$$

Soru 4. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin birim impuls cevabı $h(n)$ 'yi bulunuz.

$$y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n)+x(n-1)$$

Çözüm.

$\lambda^n-2\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}=0 \quad \lambda^{n-2}(\lambda^2-2\lambda+1)=0 \quad \lambda^2-2\lambda+1=0 \quad (\lambda-1)^2=0 \quad \lambda_{1,2}=1$

$h(n)=C_1(1)^n+nC_2(1)^n$

$n=0$ için $h(0)-2h(-1)+h(-2)=\delta(0)+\delta(-1) \quad h(0)=1$

$n=1$ için $h(1)-2h(0)+h(-1)=\delta(1)+\delta(0) \quad h(1)=3$

$h(0)=C_1=1$

$h(1)=C_1+C_2=3 \quad C_2=2$

$h(n)=(1)^n+2n(1)^n=(1+2n)u(n)$

Soru 5. Fark denklemi aşağıdaki biçimde verilen ikinci derece sistemin $y(-1)=y(-2)=0$ başlangıç koşulları ile $x(n)=u(n)$ işaretine cevabın doğal ve zorlanmış çözümünü bulunuz.

$$y(n)-4y(n-1)+4y(n-2)=x(n)$$

Çözüm.

$\lambda^n-4\lambda^{n-1}+4\lambda^{n-2}=0 \quad \lambda^{n-2}(\lambda^2-4\lambda+4)=0 \quad (\lambda-2)^2=0 \quad \lambda_{1,2}=2$

$y_d(n)=C_1(2)^n+nC_2(2)^n$

$n=0$ için $y(0)-4\underbrace{y(-1)}_{0}+4\underbrace{y(-2)}_{0}=0 \quad y(0)=0$

$n=1$ için $y(1)-4\underbrace{y(0)}_{0}+4\underbrace{y(-1)}_{0}=0 \quad y(1)=0$

$n=0$ için $y_d(0)=C_1=0$

$n=1$ için $y_d(1)=C_1(2)^n+C_2(2)^n=0 \quad C_2=0$

$y_d(n)=0$

$x(n)=u(n)$ olduğundan dolayı $y_ö(n)=Ku(n)$ olarak tahmin edilir.

$Ku(n)-4Ku(n-1)+4Ku(n-2)=u(n)$

$n=2$ için $K-4K+4K=1 \quad K=1$

$y_ö(n)=u(n)$

$y_z(n)=C_1(2)^n+nC_2(2)^n+u(n)$

$n=0$ için $y(0)-4\underbrace{y(-1)}_{0}+4\underbrace{y(-2)}_{0}=u(0)=1 \quad y(0)=1$

$n=1$ için $y(1)-4\underbrace{y(0)}_{1}+4\underbrace{y(-1)}_{0}=u(1)=1 \quad y(1)=1+4=5$

$n=0$ için $y_z(0)=C_1+1=1 \quad C_1=0$

$n=1$ için $y_z(1)=2\underbrace{C_1}_{0}+2C_2+1=5 \quad C_2=2$

$y_z(n)=2n(2)^n+u(n)$

$y_T(n)=\underbrace{y_d(n)}_{0}+y_z(n)=y_z(n)=2n(2)^n+u(n)=n(2)^{n+1}u(n)+u(n)=(1+n(2)^{n+1})u(n)$

2. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulun. $y_t(n) = \left(3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)u(n)$

3. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = y(n-1) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ başlangıç koşulu ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulunuz. $y_t(n) = (2+n)u(n)$

8. $y(n) = ay(n-1) + bx(n-1)$ fark denklemine ait sistemin birim darbe cevabının $\sum_n h(n) = 1$ eşitliğini sağlaması için b'nın a cinsinden karşılığını yazınız. $b = 1 - a$

2. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = 2y(n-1) - y(n-2) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ ve $y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulun. $y_t(n) = \left(3 + \frac{5}{2}n + \frac{1}{2}n^2\right)u(n)$

3. $n \geq 0$ için fark denklemi $y(n) = y(n-1) + x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = 1$ başlangıç koşulu ile $x(n) = u(n)$ işaretine olan toplam çözümünü bulunuz. $y_t(n) = (2+n)u(n)$

3. Fark denklemi $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n)$ olarak verilen sistemin $y(-1) = y(-2) = 0$ başlangıç koşulları ile $x(n) = u(n)$ işaretine cevabın
   a. Doğal çözümünü $y_d(n) = 0$
   b. Zorlanmış çözümünü bulunuz. $y_z(n) = (n2^{n+1} + 1)u(n)$