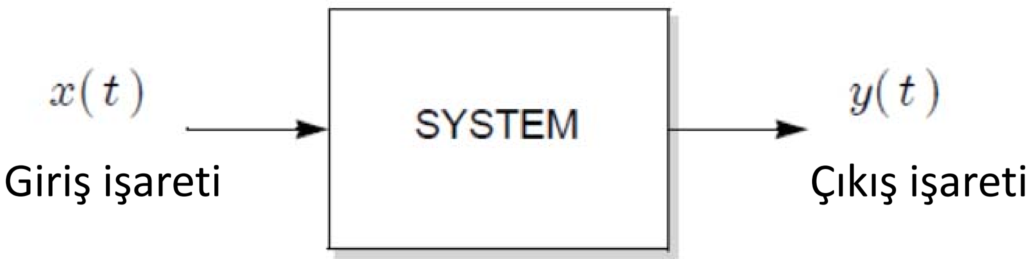
Hafta 2
SİSTEMLER VE ÖZELLİKLERİ

2019-2020

GÜZ

SİSTEM nedir?

- Bir ‘’giriş’’ işaretinin bir ‘’çıkış’’ işaretine dönüşmesi
- **Örnekler: FM radyo alıcısı, mikrofon, hız sabitleyici**



Örnekler:

‘’0,5 sn gecikmeli’’ sistem: $y(t) = x(t - 0.5)$

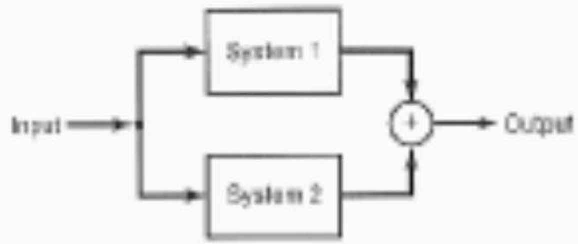
‘’kare alan’’ sistem: $y(t) = x^2(t)$

- <u>Interconnections of Systems</u>
  - Series or cascade interconnection of 2 systems

(a)

> e.x. rac

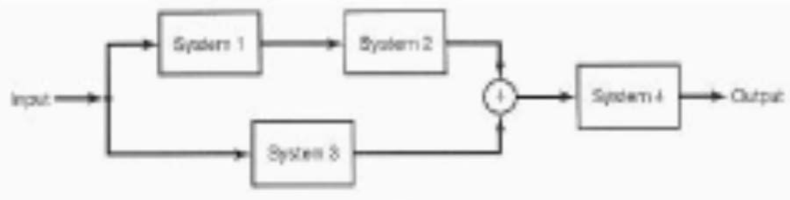
  - Parallel interconnection of 2 systems



(b)

> e.x. audio akers

- Interconnections of Systems
  - Series-parallel interconnection



(c)

  - Feedback interconnection

> e.x. cruise control, electrical circuit

Sistem Kategorileri

- *Belleksiz*— t_0 anındaki çıkış o andaki girişe bağlıdır
  - Geçmişe ve geleceğe bağımlılık yok
- *Nedensel* — t_0 anındaki çıkış sadece o andaki veya daha önceki bir girişe bağlı
  - Geleceğe bağımlılık yok
- *Tersi alınabilir*— giriş çıkıştan üretilebilir
- *(BIBO) Kararlı*— sınırlı bir giriş daima sınırlı bir çıkış verir
- *Doğrusallık* — Ekleme and Ölçekleme:
  - a.x1(t) + b.x2(t) girişine cevap daima a.y1(t) + b. y2(t),
- Zamanla Değişmezlik –
  - x1(t – t0) girişine cevap daima y1(t – t0) olacaktır.
  - Burada y1(t) x1(t) ye cevap

- Systems with & without memory
  - Memoryless systems
    - Output depends only on the input at that same time

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$

$$y(t) = Rx(t) \qquad \text{(resistor)}$$

  - Systems with memory

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \qquad \text{(accumulator)} \qquad y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n-1] \qquad \text{(delay)}$$

Kararlılık

Sınırlı değerli bir giriş dizisinin, sınırlı değerli bir çıkış dizisi ürettiği sistemlere kararlı sistemler denir.

Bu tanım sınırlı giriş sınırlı çıkış(SGSÇ) anlamında kararlılığı ifade eder.

Yani M_1 ve M_2 sonlu sayılar olmak üzere,

Tüm n ler için,

$$\left|x(n)\right| \le M_1$$

olan herhangi bir giriş dizisine kararlı sistemin cevabı, tüm n ler için

$$\left|y(n)\right| \le M_2$$

olan bir çıkış dizisi olacaktır.

Bazı sistemler doğal olarak bu özelliğe sahiptir. Örneğin pasif analog sistemler daima kararlıdır.

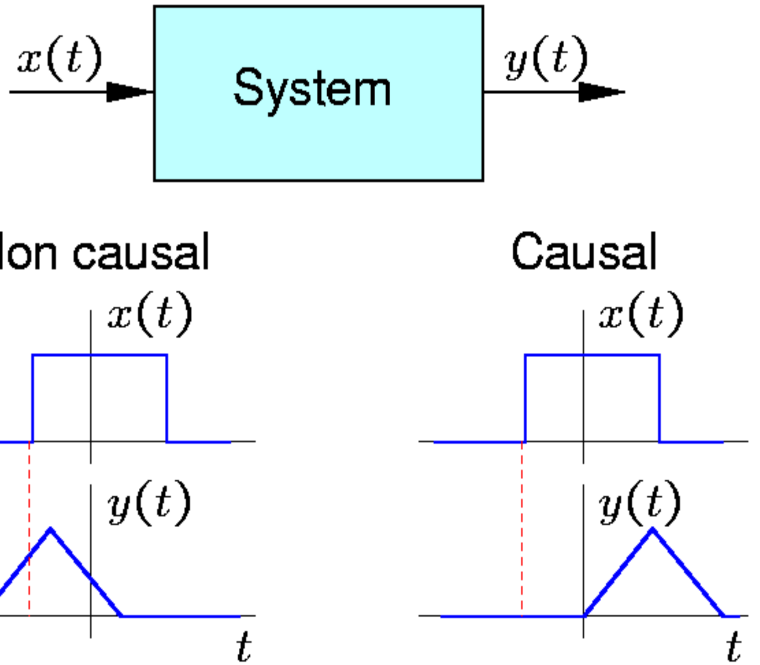
Nedensellik

Herhangi bir anda sistemin çıkışı sadece o andaki ve geçmişteki girişlerine bağlıysa, o sisteme *nedensel sistem* denir.

Daha açık bir anlatımla, nedensel sistemlerde sistemin çıkışının bulunmasında, gelecekteki giriş değerlerine ihtiyaç duyulmaz.

Nedensellik

For a causal system the output at time t_o depends only on the input for $t \leq t_o$, i.e., the system cannot anticipate the input.



Nedensel Sistemler

- Bir sistem çıkışın girişin gelecek değerlerine bağlı olmadığında nedenseldir. Herhangi bir andaki çıkış, o ana kadarki girişlere bağlıdır.

- Tüm gerçek zamanlı fiziksel sistemler nedenseldir, çünkü zaman sadece ileri yönlü hareket eder. Etki bir neden neticesinde meydana gelir.

- Nedensellik uzaysal olarak değişen işaretlere uygulanamaz. Bu işaretlerde yukarı-aşağı ve sağa- sola hareket edilebilir.

- Kayıtlı işaretleri işleyen sistemlere de uygulanamaz. Mesela, kaydedilmiş görüntü ve ses kayıtları vs.

Doğrusallık

Bir sistemin doğrusallığı, çarpımsallık ve toplamsallık ilkelerini sağlamasıyla tanımlanır. Buna göre, herhangi iki giriş dizisi $x_1(n)$ve $x_2(n)$ sırasıyla $y_1(n)$ ve $y_2(n)$ çıkış dizilerini üretsin. Bu durumda aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$y_1(n) = T[x_1(n)]$$

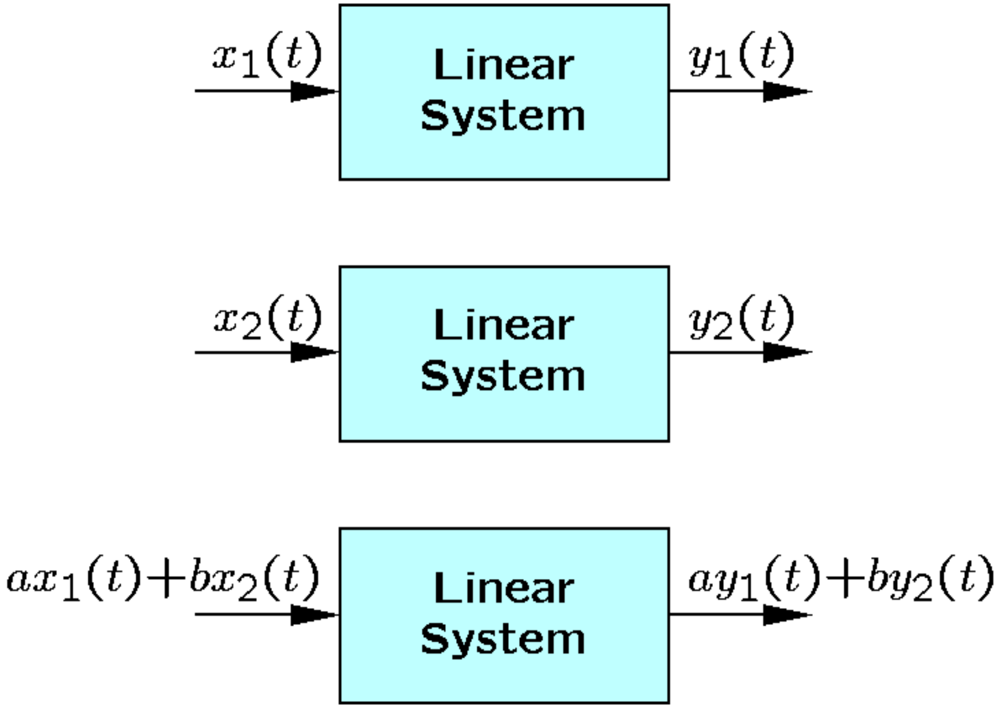
$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

a ve b herhangi iki sabit sayı olduğuna göre, $T[.]$ sisteminin doğrusal olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
&T\left[ax_1(n)+bx_2(n)\right]=T\left[ax_1(n)\right]+T\left[bx_2(n)\right] \\
&=aT\left[x_1(n)\right]+bT\left[x_2(n)\right]=ay_1(n)+by_2(n)
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki koşulu sağlamayan sistemler doğrusal olmayan (non-linear) sistemler olarak adlandırılırlar.

Doğrusallık



for all $x_1(t)$, $x_2(t)$, a, and b.

Doğrusal Sistemlerin En Önemli Özelliği

- **Superposition**

Eğer $x_k[n] \longrightarrow y_k[n]$

O zaman $\sum_k a_k x_k[n] \longrightarrow \sum_k a_k y_k[n]$

- Linearity
  - Example 1.17: $S: \ y(t) = tx(t)$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$\rightarrow \quad y_3(t) = tx_3(t)$$

$$= t(ax_1(t) + bx_2(t)) = atx_1(t) + btx_2(t)$$

$$= ay_1(t) + by_2(t)$$

Örnek 1.3

Sayısal süzgecin $x(n)$ girişine cevabı aşağıdaki gibi ise, bu sistemin doğrusallığını araştırınız.

$$y(n) = 6x^2(n-3)$$

Çözüm 1.3

Dönüşüm kuralından hareketle aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$T\left[ax(n)\right] = 6a^2x^2(n-3)$$

a sabit bir katsayı olup birden farklıdır $(a \neq 1)$. Öte yandan aşağıdaki ifadeyi de yazabiliriz.

$$aT[x(n)] = a6x^2(n-3)$$

Yukarıda verilmiş olan iki bağıntıdan da aşağıdaki eşitsizliği verebiliriz.

$$T[ax(n)] \neq aT[x(n)]$$

Bu eşitsizlikten dolayı da bu süzgecin(sistemin) doğrusal olmadığını söyleyebiliriz.

Örnek 1.4

Sayısal süzgecin $x(n)$ girişine cevabı aşağıdaki gibi verilirse, sistemin(süzgecin) doğrusal olup olmadığını araştırınız.

$$y(n) = T\big[x(n)\big] = n^2 x(n+2)$$

Çözüm 1.4

Dönüşüm kuralından hareketle aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$T\big[ax_1(n) + bx_2(n)\big] = n^2 (ax_1(n+2) + bx_2(n+2)) =$$
$$an^2 x_1(n+2) + bn^2 x_2(n+2) = aT\big[x_1(n)\big] + bT\big[x_2(n)\big] = ay_1(n) + by_2(n)$$

Veya tek giriş için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$T\left[ax(n)\right] = n^2 ax(n+2)$$

Yukarıdaki iki bağıntıya baktığımızda,

$$aT\left[x(n)\right] = an^2 x(n+2)$$

olduğunu açıkça görürüz. O halde sistemin doğrusal olduğunu söyleyebiliriz.

$$T\left[ax(n)\right] = aT\left[x(n)\right]$$

- Linearity
  - Linear systems
    - In general,

a, b: any complex constants

$$a x_1[n] + b x_2[n] \rightarrow a y_1[n] + b y_2[n] \qquad \text{for DT}$$

$$a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t) \qquad \text{for CT}$$

    - Or,

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + \ldots$$

$$\longrightarrow \; y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + \ldots$$

This is known as the superposition property

- Linearity
  - Example 1.18: $S: \ y(t) = (x(t))^2$

$$x_1(t) \quad \rightarrow \quad y_1(t) = (x_1(t))^2$$

$$x_2(t) \quad \rightarrow \quad y_2(t) = (x_2(t))^2$$

$$x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$$

$$\rightarrow \quad y_3(t) = (x_3(t))^2 \qquad = (a x_1(t) + b x_2(t))^2$$

$$= a^2 (x_1(t))^2 + b^2 (x_2(t))^2 + 2ab x_1(t) x_2(t)$$

$$= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2ab x_1(t) x_2(t)$$

- Linearity
  - Example 1.20: $S: \; y[n] = 2x[n] + 3$

$$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

$$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad y_3[n] &= 2x_3[n] + 3 \\ &= 2(ax_1[n] + bx_2[n]) + 3 \\ &= a(2x_1[n] + 3) + b(2x_2[n] + 3) + 3 - 3a - 3b \\ &= ay_1[n] + by_2[n] + 3(1 - a - b) \end{aligned}$$

- Linearity
  - Example 1.20: $S: \ y[n] = 2x[n] + 3$

$$x_1[n] \quad \rightarrow \quad y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

$$x_2[n] \quad \rightarrow \quad y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

  - However,

$$y_1[n] - y_2[n] = 2\left(x_1[n] + 3\right) - 2\left(x_2[n] + 3\right)$$

$$= 2\left[x_1[n] - x_2[n]\right]$$

It is a incrementally linear system

Zamanla değişmezlik

Sayısal bir sistemin giriş çıkış ilişkisi zamanla değişmiyorsa, sistem zamanla değişmeyen olarak adlandırılır.

Bu sistem, uygulanan bir x giriş dizisine, uygulama anından bağımsız olarak aynı y çıkış dizisini üretiyor demektir.

Bir sistemin zamanla değişmez olması için gerek ve yeter şart, sistemin tüm ilk koşulları sıfır olmak üzere tüm girişler için aşağıdaki şartın sağlanmasıdır.

$$T\left[x(n-k)\right] = y(n-k)$$

Zamanla Değişmezlik

- Matematiksel olarak (Ayrık zamanda-DT): Bir sistem $x[n] \rightarrow y[n]$ eğer $x[n]$ girişi n_0 kadar ötelenirse çıkış aynı kalıyorsa zamanla değişmez

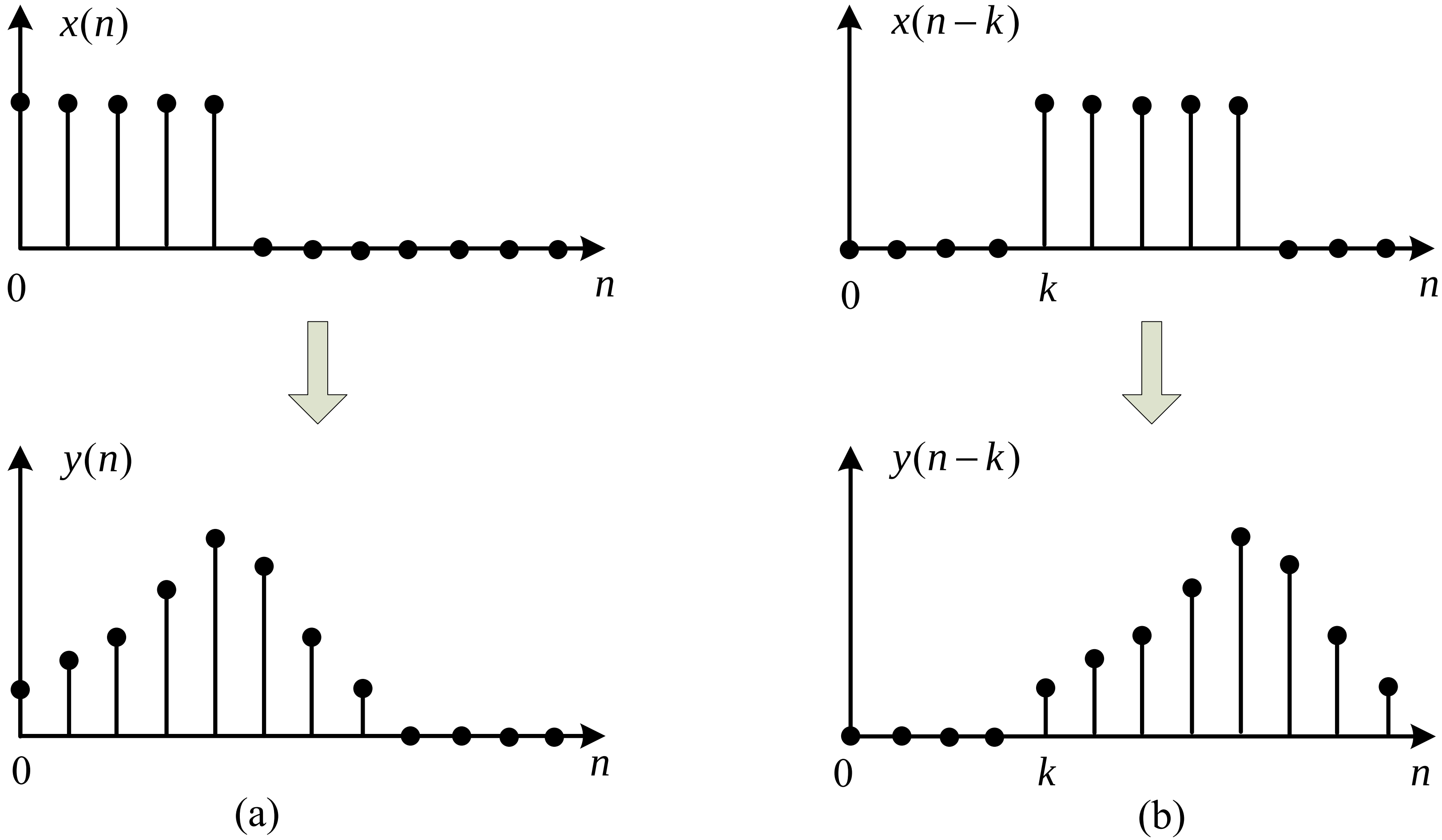
Eğer $\quad x[n] \rightarrow y[n]$

o zaman $\quad x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$.

- Benzer bir şekilde sürekli sistemler için

eğer $\quad x(t) \rightarrow y(t)$

o zaman $\quad x(t - t_o) \rightarrow y(t - t_o)$.



Şekil 1.10 Zamanla değişmeme, (a) Sistemin $x(n)$ girişine cevabı, (b) Sistemin geciktirilmiş $x(n-k)$ girişine cevabı

Örnek 1.5

Sayısal bir sistem aşağıdaki denklem ile karakterize edilmiş olsun. Bu sistemin zamanla değişmezlik özelliğini inceleyiniz.

$$y(n) = 8nx(n)$$

Çözüm 1.5

Yukarıdaki denklem ile verilen sistemin ötelenmiş $x(n-k)$ giriş dizisi cevabı aşağıdaki gibi verilir.

$$T\left[x(n-k)\right] = 8nx(n-k)$$

Oysa tanım bağıntısı uyarınca çıkış dizisi de ötelenmelidir. Yani aşağıdaki bağıntı yazılmalıdır.

$$y(n-k) = 8(n-k)x(n-k)$$

Verilen son iki eşitlikten aşağıda verilen eşitsizlik elde edilir.

$$y(n-k) \neq T\left[x(n-k)\right]$$

Bu durumda sistemin zamanla değişir olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 1.6

Aşağıdaki fark denklemiyle ifade edilen sayısal sistemin zamanla değişip değişmediğini gösteriniz.

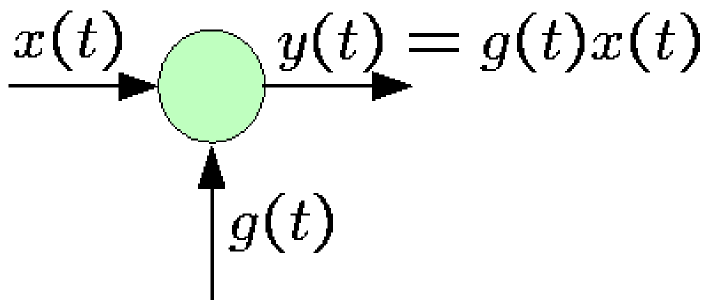
$$y(n) = T\left[x(n)\right] = x(n) + 4x(n-3)$$

Çözüm 1.6

Bu sistem için aşağıdaki eşitliği yazabildiğimizden dolayı sistem zamanla değişmezdir.

$$T\left[x(n-k)\right] = x(n-k) + 4x(n-k-3) = y(n-k)$$

Örnek- çarpma işlemi



- Is this system linear?

- Is this system time-invariant?

Çarpma-Doğrusallık

Let

$$y_1(t) = g(t)x_1(t) \text{ and } y_2(t) = g(t)x_2(t).$$

By definition the response to

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t),$$

is

$$y(t) = g(t)(ax_1(t) + bx_2(t)).$$

This can be rewritten as

$$\begin{aligned} y(t) &= ag(t)x_1(t) + bg(t)x_2(t) \\ y(t) &= ay_1(t) + by_2(t). \end{aligned}$$

Therefore, the system is linear.

Çarpma – zamanla değişmezlik

Now suppose that $x_1(t) = x(t)$ and $x_2(t) = x(t - \tau)$, and the response to these two inputs are $y_1(t)$ and $y_2(t)$, respectively. Note that

$$y_1(t) = y(t) = g(t)x(t),$$

and

$$y_2(t) = g(t)x(t - \tau) \neq y(t - \tau).$$

Therefore, the system is time-varying.

Örnek– Toplama

Suppose the relation between the output $y(t)$ and input $x(t)$ is given $y(t) = x(t) + K$, where K is some constant. Is this system linear?

Solution — Addition of a constant

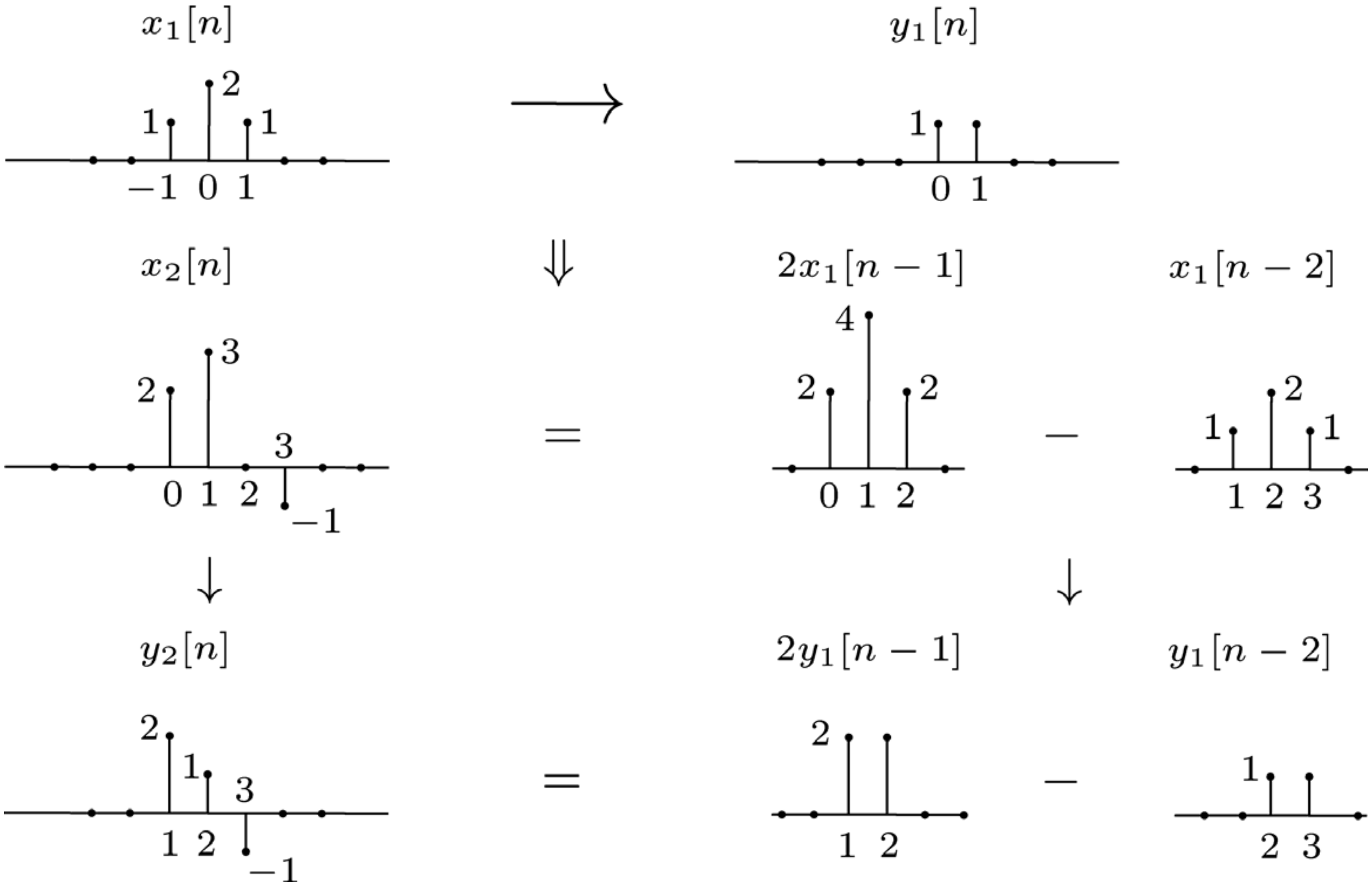
Note, that if the input is $x_1(t) + x_2(t)$ then the output will be

$$y(t) = x_1(t)+x_2(t)+K \neq y_1(t)+y_2(t) = (x_1(t)+K)+(x_2(t)+K).$$

Therefore, this system is not linear.

In general, it can be shown that for a linear system if $x(t) = 0$ then $y(t) = 0$. Using the definition of linearity, choose $a = b = 1$ and $x_2 = -x_1(t)$ then $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0$ and $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 0$.

Örnek– Ayrık Zamanla değişmeyen sistem



Sonuçlar

- Sistemler genellikle herbiri bir fonksiyon ile birbirine bağlı alt sistemlerden oluşur.
- Birçok değişik fiziksel sistem aynı matematiksel model ile tanımlanır. Bir sistemi anlamak diğer sistemleri anlamayı sağlar.
- Sistemler, bellek, nedensellik, kararlılık, doğrusallık ve zamanla değişmeme gibi özelliklerle sınıflandırılır.
- Doğrusal zamanla değişmeyen(DZD) sistemler içinde bolca zengin ve güçlü tanımlamaların olduğu özel sistemlerdir.
- Bu dersin geri kalanında bu sistemlere odaklanacağız