SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Elektrik Devre Temelleri

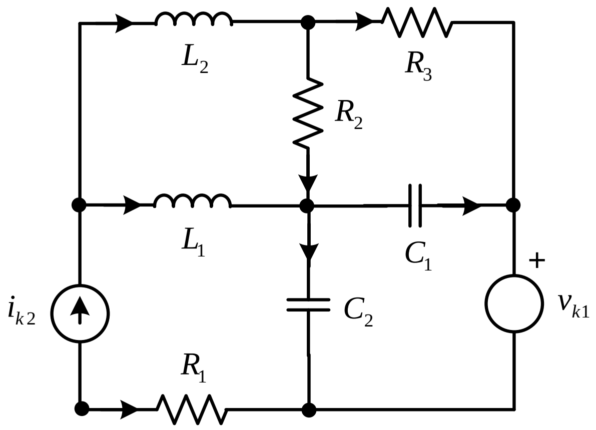
Hafta 12

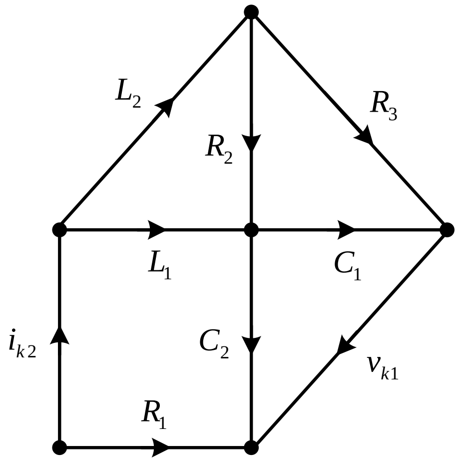
Yrd. Doç. Dr. Kürşat AYAN

BÖLÜM 6. DEVRE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

6.4. DURUM DENKLEMLERİ

Öncelikle aşağıdaki devrenin grafını çizmeye çalışalım.

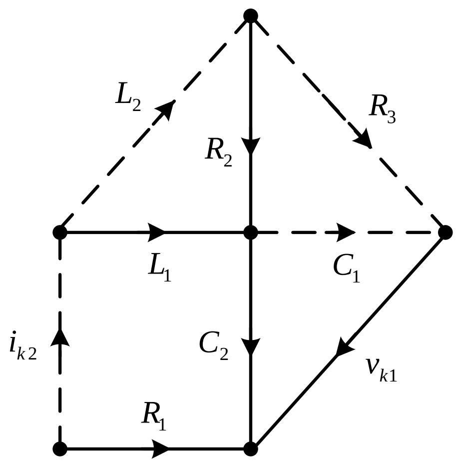




Daha sonra uygun ağacı seçmeye çalışıyoruz. Bunun için uymamız gereken dört (4) adet kural vardır.

1. Devredeki tüm bağımsız gerilim kaynakları dal seçilecek.
2. Devredeki tüm bağımsız akım kaynakları kiriş seçilecek.
3. Maksimum sayıda kapasite elemanı dal seçilecek.
4. Maksimum sayıda endüktans (self) elemanı kiriş seçilecek.

Yukarıda sıralanan bu kurallara göre uygun ağacı seçecek olursak aşağıdaki şekle geliriz.



Kapasite ve endüktans elemanlarına ait tanım bağıntıları daha önceki bölümlerde verildiği üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot i_{C2}$$

ve

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

O halde yukarıdaki devrenin durum uzayını en genel halde aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\frac{d}{dt} \cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t)$$

Bu devrede $x(t)$ durum değişkeni olarak, ağaç içi kapasite gerilimleri (bir adet) ve yine ağaç içindeki endüktans (self) akımları (bir adet) tanımlanır. Yine aynı devrede A ve B matrisleri, sırasıyla (2×2) ve (2×1) boyutlu katsayılar matrisleri olarak tanımlanır.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C2} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} v_{C2} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}}_{B} \cdot e$$

Bu durumda durum değişkenleri en genel halde aşağıdaki gibi verilir. Yani;

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ \vdots \\ v_{Cn} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \\ \vdots \\ i_{Ln} \end{bmatrix}$$

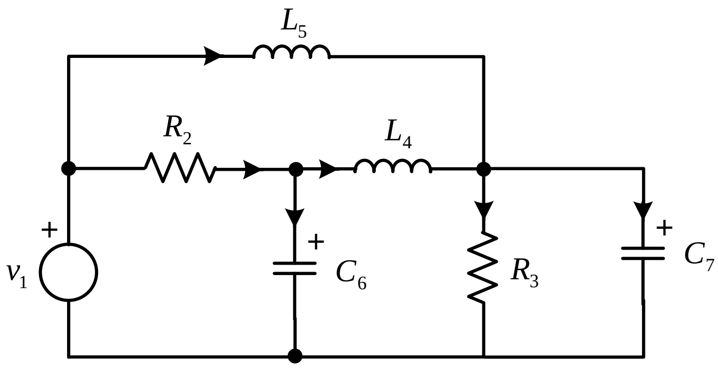
Ve yine kaynak değişkenleri, bağımsız gerilim kaynaklarının gerilimleri ve bağımsız akım kaynaklarının akımları olarak en genel halde aşağıdaki gibi verilir. Yani;

$$e(t) = \begin{bmatrix} v_{k1} \\ v_{k2} \\ \vdots \\ v_{kn} \\ i_{k1} \\ i_{k2} \\ \vdots \\ i_{kn} \end{bmatrix}$$

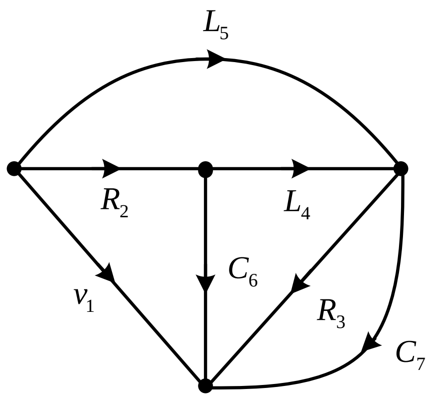
Buna göre en genel halde tüm durum uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır ve buna durum denklemleri adı verilir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = A.x(t) + B.e(t) + B_1 \cdot \frac{de(t)}{dt}$$
$$y(t) = C.x(t) + D.e(t) + D_1 \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

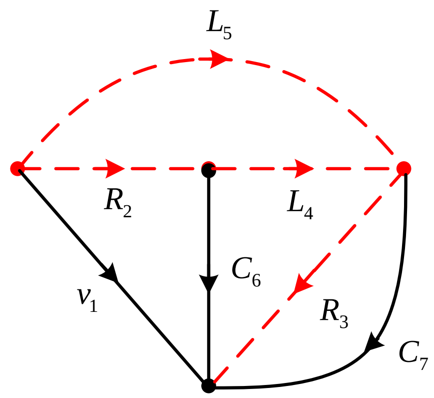
Örnek 1. Aşağıdaki devrenin grafını çizerek uygun ağacını bulmak suretiyle, durum denklemlerini en genel halde yazınız.



Yukarıda verilen örnek devrenin graf ve uygun ağacı, daha önce verilen kurallar göz önüne alınarak aşağıdaki gibi çizilebilir.



Graf



Uygun Ağaç

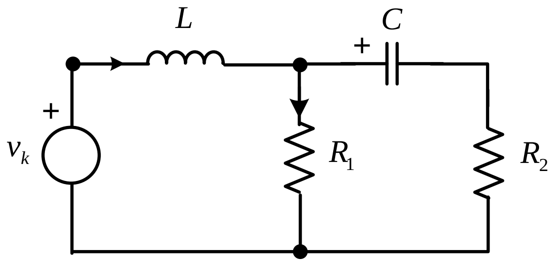
Bu uygun ağaca göre durum ve kaynak değişkenleri aşağıdaki şekilde verilir.

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_{C6}(t) \\ v_{C7}(t) \\ i_{L4}(t) \\ i_{L5}(t) \end{bmatrix}, \qquad e(t) = v_1(t)$$

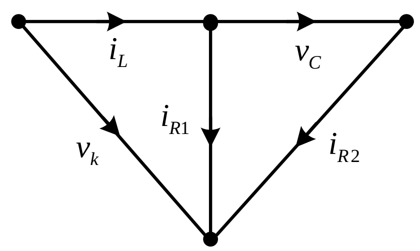
Bu durum ve kaynak değişkenlerine göre durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılır. Bu denklem ise sağ taraflı sabit katsayılı adi diferansiyel denklemdir.

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} v_{C6} \\ v_{C7} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_{C6} \\ v_{C7} \\ i_{L4} \\ i_{L5} \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}}_{B} \cdot v_1(t)$$

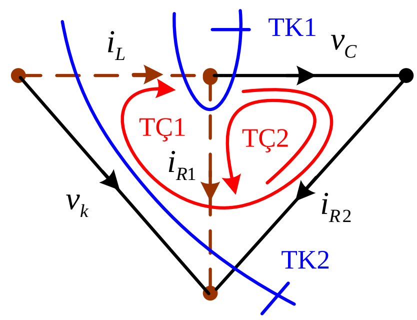
Örnek 2. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Ağaç içindeki kapasite elemanının geriliminin türevi dal gerilimleri, kiriş akımları ve kaynak değişkenleri cinsinden ve yine ağaç içindeki endüktans elemanının akımının türevi dal gerilimleri, kiriş akımları ve kaynak değişkenleri cinsinden yazılabilir. O halde birinci temel kesitleme ve ardından birinci temel çevre denkleminden aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$i_C - i_L + i_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = i_L - i_{R1}$ (Birinci temel kesitleme denklemi)

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot i_{R1}$$

$v_L + v_C + v_{R2} - v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = -v_C - v_{R2} + v_k$ (Birinci temel çevre denklemi)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot v_{R2} + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

Yukarıdaki denklemlerde eşitliklerin sağ tarafındaki i_L akımı ve v_C gerilimi durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni olup, i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimi ise durum değişkenleri değildir. O halde bu i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimini de durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için öncelikle R_1 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_1 direnç elemanına ait ikinci temel çevre denklemini yazmamız gerekmektedir.

$i_{R1} = G_1.v_{R1}$

$v_{R1} - v_{R2} - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = v_{R2} + v_C$ (İkinci temel çevre denklemi)

$i_{R1} = G_1.(v_{R2} + v_C)$

$i_{R1} - G_1.v_{R2} = G_1.v_C$ (Birinci denklem)

İkinci olarak R_2 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_2 direnç elemanına ait ikinci temel kesitleme denklemini yazmamız gerekmektedir.

$v_{R2} = R_2.i_{R2}$

$i_{R2} + i_{R1} - i_L = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R2} = -i_{R1} + i_L$ (İkinci temel kesitleme denklemi)

$v_{R2} = R_2(-i_{R1} + i_L) = -R_2.i_{R1} + R_2.i_L$

$v_{R2} + R_2.i_{R1} = R_2.i_L$ (İkinci denklem)

Elde edilen bu iki denklemi matrisel bir biçimde yazmak ve bunları çözmek suretiyle i_{R1} ve v_{R2} değerlerini diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -G_1 \\ R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L \end{bmatrix}$$

$$i_{R1} = \frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1.R_2}{\Delta} \cdot i_L$$

$$v_{R2} = -\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{R_2}{\Delta} \cdot i_L$$

Yukarıda elde edilen bu i_{R1} ve v_{R2} değerlerini, daha önce yazmış olduğumuz, durum değişkeni olan kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarında yerine koyacak ve daha sonra tekrardan düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot (\frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1.R_2}{\Delta} \cdot i_L)$$

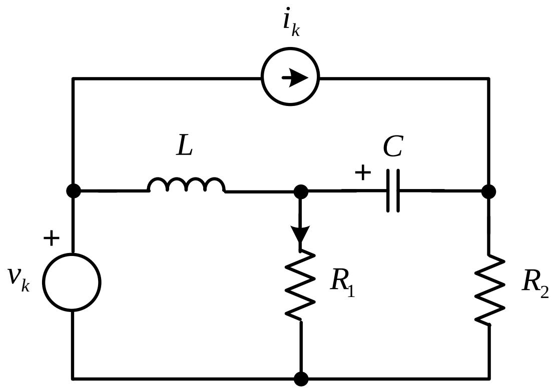
$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{G_1}{C.\Delta} \cdot v_C + (\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}) \cdot i_L$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot \left[-\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{R_2}{\Delta} \cdot i_L \right] + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

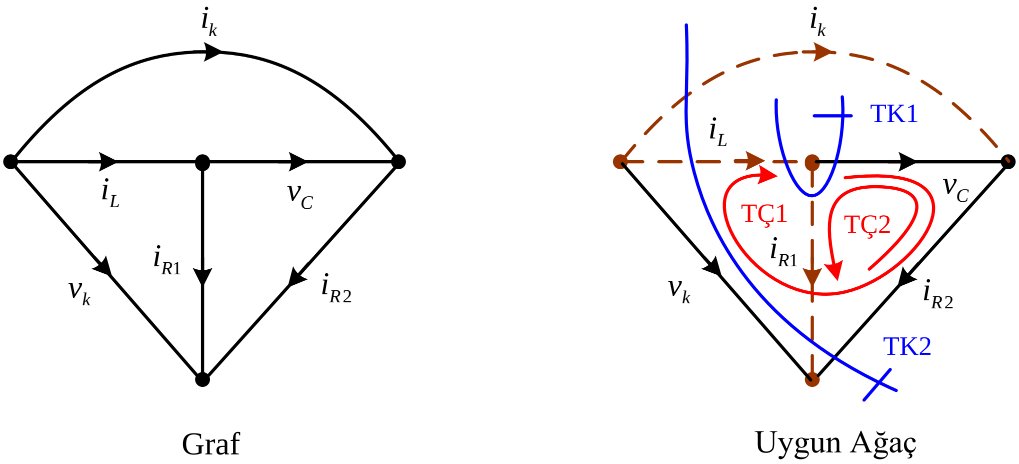
$$\frac{di_L}{dt} = (-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}) \cdot v_C - \frac{R_2}{L.\Delta} \cdot i_L + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C.\Delta} & (\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}) \\ (-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}) & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} \cdot v_k$$

Örnek 3. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve i_k ve v_k kaynak değişkenleri cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme, ardından da endüktansın tanım bağıntısı için birinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki denklemlere geliriz.

$i_C - i_L + i_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = i_L - i_{R1}$ (Birinci temel kesitleme denklemi)

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot i_{R1}$$

$v_L + v_C + v_{R2} - v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = -v_C - v_{R2} + v_k$ (Birinci temel çevre denklemi)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot v_{R2} + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

Yukarıdaki denklemlerde eşitliklerin sağ tarafındaki i_L akımı ve v_C gerilimi durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni olup, i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimi ise durum değişkenleri değildir. O halde bu i_{R1} akımı ve v_{R2} gerilimini de durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için öncelikle R_1 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_1 direnç elemanına ait ikinci temel çevre denklemini yazmamız gerekmektedir.

$i_{R1} = G_1.v_{R1}$

$v_{R1} - v_{R2} - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = v_{R2} + v_C$ (İkinci temel çevre denklemi)

$i_{R1} = G_1.(v_{R2} + v_C)$

$i_{R1} - G_1.v_{R2} = G_1.v_C$ (Birinci denklem)

İkinci olarak R_2 direnç elemanı tanım bağıntısını ve ardından da R_2 direnç elemanına ait ikinci temel kesitleme denklemini yazmamız gerekmektedir.

$v_{R2} = R_2.i_{R2}$

$i_{R2} + i_{R1} - i_L - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R2} = -i_{R1} + i_L + i_k$ (İkinci temel kesitleme denklemi)

$v_{R2} = R_2(-i_{R1} + i_L + i_k) = -R_2.i_{R1} + R_2.i_L + R_2.i_k$

$R_2.i_{R1} + v_{R2} = R_2.i_L + R_2.i_k$ (İkinci denklem)

Elde edilen bu iki denklemi matrisel bir formda yazmak ve bunları çözmek suretiyle i_{R1} ve v_{R2} değerlerini diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -G_1 \\ R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L + R_2.i_k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{R1} \\ v_{R2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} 1 & G_1 \\ -R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1.v_C \\ R_2.i_L + R_2.i_k \end{bmatrix}$$

$$i_{R1} = \frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k)$$

$$v_{R2} = -\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k)$$

Yukarıda elde edilen bu i_{R1} ve v_{R2} değerlerini, daha önce yazmış olduğumuz, durum değişkeni olan kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarında yerine koyacak ve daha sonra tekrardan düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (i_L - i_{R1}) = \frac{1}{C} \cdot i_L - \frac{1}{C} \cdot \left[\frac{G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{G_1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k) \right]$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{G_1}{C.\Delta} \cdot v_C + \left(\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}\right) \cdot i_L - \frac{R_2.G_1}{C.\Delta} \cdot i_k$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot (-v_C - v_{R2} + v_k) = -\frac{1}{L} \cdot v_C - \frac{1}{L} \cdot \left[-\frac{R_2.G_1}{\Delta} \cdot v_C + \frac{1}{\Delta}(R_2.i_L + R_2.i_k) \right] + \frac{1}{L} \cdot v_k$$

$$\frac{di_L}{dt} = \left(-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}\right) \cdot v_C - \frac{R_2}{L.\Delta} \cdot i_L + \frac{1}{L} \cdot v_k - \frac{R_2}{L.\Delta} \cdot i_k$$

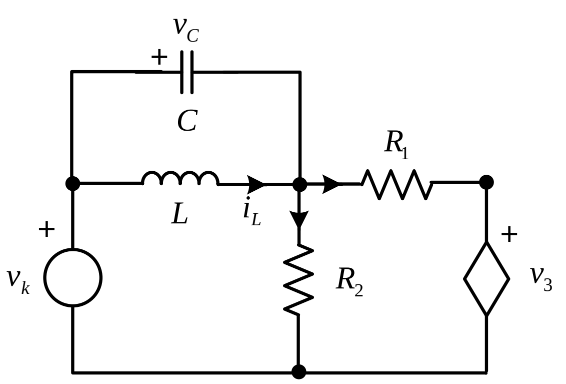
$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{G_1}{C.\Delta} & \left(\frac{1}{C} - \frac{G_1.R_2}{C.\Delta}\right) \\ \left(-\frac{1}{L} + \frac{R_2.G_1}{L.\Delta}\right) & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_2.G_1}{C.\Delta} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L.\Delta} \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ i_k \end{bmatrix}}_{e(t)}$$

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \\ i_C \\ v_L \\ v_{R1} \\ i_{R1} \\ v_{R2} \\ i_{R2} \\ v_k \\ i_{gk} \\ v_{ak} \\ i_k \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\dfrac{G_1}{\Delta} & (1-\dfrac{G_1.R_2}{\Delta}) \\ (-1+\dfrac{G_1.R_2}{\Delta}) & -\dfrac{R_2}{\Delta} \\ \dfrac{1}{\Delta} & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ \dfrac{G_1}{\Delta} & \dfrac{G_1.R_2}{\Delta} \\ -\dfrac{R_2.G_1}{\Delta} & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ -\dfrac{G_1}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ (2-\dfrac{R_2.G_1}{\Delta}) & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{R_2.G_1}{\Delta} \\ 1 & -\dfrac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{G_1.R_2}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ 0 & \dfrac{1}{\Delta} \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & \dfrac{R_2}{\Delta} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v_k \\ i_k \end{bmatrix}}_{e(t)}
$$

$$
\frac{d}{dt} \cdot x(t) = A.x(t) + B.e(t) + B_1.\frac{d}{dt} \cdot e(t)
$$

$$
y(t) = C.x(t) + D.e(t) + D_1.\frac{d}{dt} \cdot e(t)
$$

Uygulama 1. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



$v_k = \cos 2t$

$v_3 = \mu.v_C$

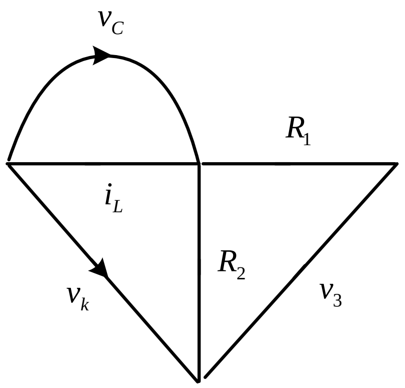
$\mu = 1$

$C = 1\,\mathrm{F}$

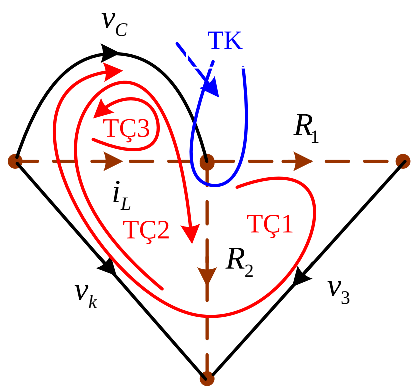
$L = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{H}$

$R_1 = R_2 = 1\,\Omega$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve v_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_C + i_L - i_{R1} - i_{R2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = -i_L + i_{R1} + i_{R2}$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki i_L akımı durum değişkeni olup, i_{R1} ve i_{R2} akımları durum değişkeni değildir. O halde bu akımları da durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için temel çevre denklemlerini yazmamız gerekmektedir. O halde birinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_{R1} + v_3 - v_k + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R1} = -v_3 + v_k - v_C$$

Yukarıdaki denklemin sağ tarafında, bize soruda verilen bilgilere uygun olarak $v_3 = v_C$ yazacak ve denklemi düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{R1} = -2v_C + v_k$$

$$i_{R1} = \frac{v_{R1}}{R_1} = \frac{-2v_C + v_k}{R_1}$$

İkinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_{R2} - v_k + v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{R2} = v_k - v_C$$

$$i_{R2} = \frac{v_{R2}}{R_2} = \frac{v_k - v_C}{R_2}$$

Yukarıda durum ve kaynak değişkenleri cinsinden bulmuş olduğumuz i_{R1} ve i_{R2} akımlarını, temel kesitleme denkleminde yerine yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$i_C = -i_L + (\frac{-2v_C + v_k}{R_1}) + (\frac{v_k - v_C}{R_2}) = -i_L - (\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_k$$

Bu ifadeyi de kapasite elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\begin{aligned} \frac{dv_C}{dt} &= \frac{1}{C}\left[-i_L - (\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \cdot v_k\right] \\ &= -\frac{1}{C} \cdot i_L - (\frac{2}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) \cdot v_C + (\frac{1}{C.R_1} + \frac{1}{C.R_2}) \cdot v_k \end{aligned}$$

İkinci olarak endüktansın (selfin) tanım bağıntısı için üçüncü temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_L - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_C$$

Bu ifadeyi de endüktans (self) elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L = \frac{1}{L} \cdot v_C$$

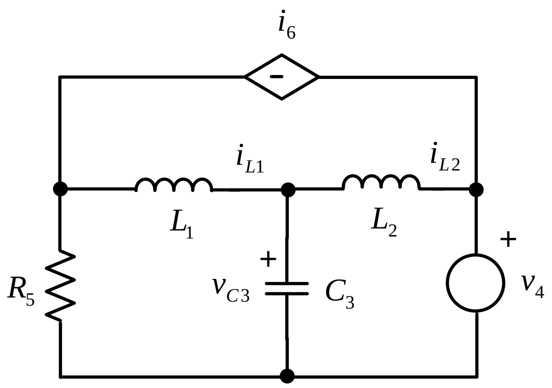
Şimdi her iki eleman tanım bağıntısını matrisel bir biçimde düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{2}{C.R_1}+\frac{1}{C.R_2}) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\frac{1}{C.R_1}+\frac{1}{C.R_2}) \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_k$$

Soruda verilen sayısal değerleri yukarıdaki sonuç ifadesinde yerine koyacak olursak, bu devreye ait durum denklemlerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

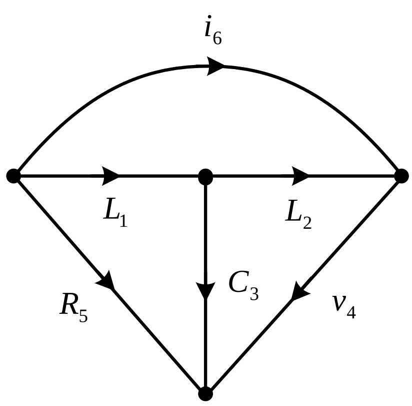
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_k$$

Uygulama 2. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.

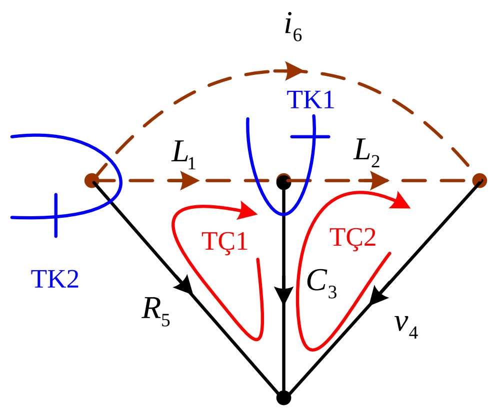


$L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{H}$
$C_3 = 1\,\mathrm{F}$
$R_5 = 1\,\Omega$
$i_6 = \beta . v_{C3}$
$\beta = 1$
$v_4 = u(t)$

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun Ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve iki endüktans (self) da kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_{C3} kapasite gerilimi ile i_{L1} ve i_{L2} endüktans (self) akımları olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_{C3}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} \cdot v_{L1}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

Yukarıda verilen her üç tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_{C3}, i_{L1} ve i_{L2} durum değişkenleri ve v_4 kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, birinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_{C3} + i_{L2} - i_{L1} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{C3} = i_{L1} - i_{L2}$$

Bunu da kapasite elemanının tanım bağıntısında yerine koyarsak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{dv_{C3}}{dt} = \frac{1}{C_3} \cdot i_{C3} = \frac{1}{C_3} \cdot (i_{L1} - i_{L2}) = \frac{1}{C_3} \cdot i_{L1} - \frac{1}{C_3} \cdot i_{L2}$$

L_1 endüktansına ait tanım bağıntısı için birinci temel çevre denklemini,

$$v_{L1} + v_{C3} - v_{R5} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L1} = -v_{C3} + v_{R5}$$

gibi yazabiliriz. Yukarıdaki denklemde v_{R5} yerine bu dirence ait tanım bağıntısını ve ardından da i_{R5} için ikinci temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{L1} = -v_{C3} + R_5 . i_{R5}$$

$$i_{R5} + i_{L1} + i_6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = -i_{L1} - i_6$$

Yukarıdaki denklemde i_6 bağımlı akım kaynağının yerine soruda verilen $i_6 = \beta . v_{C3} = v_{C3}$ eşitliği yazıldığında aşağıdaki sonuca gelinir.

$$i_{R5} = -i_{L1} - v_{C3}$$

Bu ifadeyi yukarıdaki birinci temel çevre denkleminde yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_{L1} = -v_{C3} + R_5.(-i_{L1} - v_{C3}) = -R_5.i_{L1} - (1+R_5).v_{C3}$$

Bu ifadeyi de L_1 endüktans elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1}\cdot v_{L1} = \frac{1}{L_1}\cdot[-R_5.i_{L1} - (1+R_5).v_{C3}] = -\frac{R_5}{L_1}\cdot i_{L1} - \frac{(1+R_5)}{L_1}\cdot v_{C3}$$

L_2 ye ait tanım bağıntısı için ikinci temel çevre denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$v_{L2} + v_4 - v_{C3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = v_{C3} - v_4$$

Bu ifadeyi L_2 elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2}\cdot v_{L2} = \frac{1}{L_2}\cdot(v_{C3} - v_4) = \frac{1}{L_2}\cdot v_{C3} - \frac{1}{L_2}\cdot v_4$$

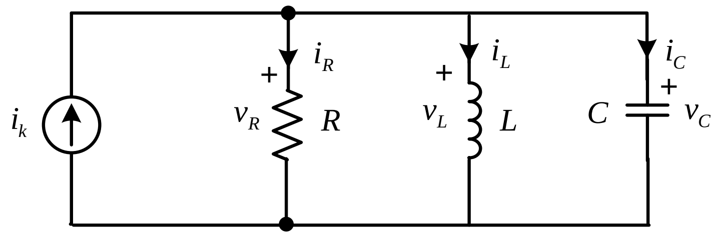
Şimdi bu üç tanım bağıntısını matrisel bir biçimde düzenleyecek olursak;

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3} \\ -(\frac{1+R_5}{L_2}) & -\frac{R_5}{L_2} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot v_4$$

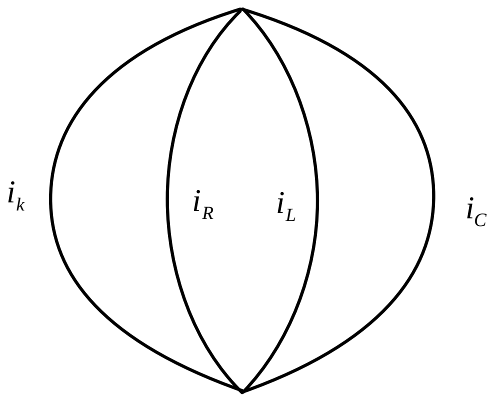
sonucuna ulaşırız. Soruda verilen sayısal değerleri yukarıdaki sonuç ifadesinde yerine koyacak olursak, bu devreye ait durum denklemlerini aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C3} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

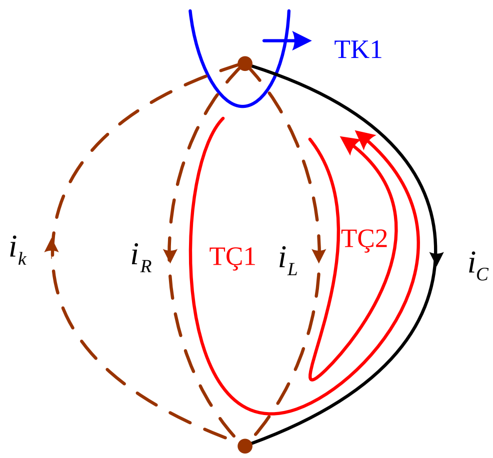
Uygulama 3. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Graf



Uygun ağaç

Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç seçimine paralel olarak, devredeki tek kapasite dal ve tek endüktans (self) de kiriş seçilmiştir. Buna göre durum değişkenleri v_C kapasite gerilimi ile i_L endüktans (self) akımı olacaktır. Bu durumda, öncelikle kapasite ve endüktans eleman tanım bağıntılarını aşağıdaki gibi yazmalıyız.

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L$$

Yukarıda verilen her iki tanım bağıntısında da, eşitliklerin sağ tarafındaki değişkenleri v_C ve i_L durum değişkenleri ve i_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. Öncelikle kapasitenin tanım bağıntısı için, temel kesitleme denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$i_C + i_L - i_k + i_R = 0 \quad \Rightarrow \quad i_C = -i_L - i_R + i_k$$

Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki i_L akımı durum ve i_k akımı kaynak değişkeni olup, i_R akımı ise durum değişkeni değildir. O halde bu i_R akımını da kaynak veya durum değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bunun için temel çevre denklemlerini yazmamız gerekmektedir. O halde birinci temel çevre için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$v_R - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_R = v_C$$

Aynı denklemi akıma göre düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v_C}{R}$$

Bu ifadeyi yukarıdaki temel kesitleme denkleminde yerine koyacak olursak;

$$i_C = -i_L - \frac{v_C}{R} + i_k$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi de kapasite tanım bağıntısında yerine koyarak olursak;

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot (-i_L - \frac{v_C}{R} + i_k) = -\frac{1}{C} i_L - \frac{v_C}{R.C} + \frac{1}{C} i_k$$

sonucunu elde ederiz. İkinci olarak endüktansın (selfin) tanım bağıntısı için ikinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$v_L - v_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L = v_C$$

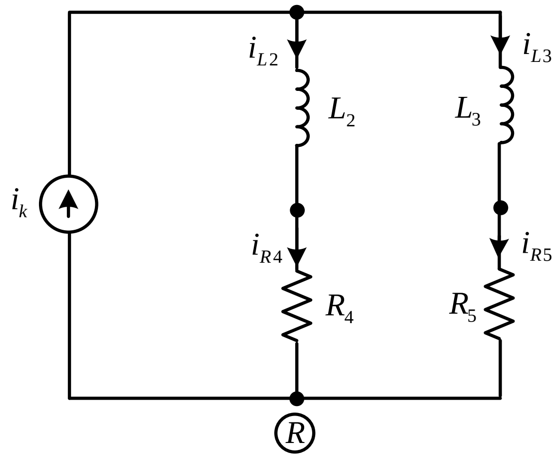
Bu ifadeyi de endüktans (self) elemanının tanım bağıntısında yerine koyacak olursak;

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot v_L = \frac{1}{L} \cdot v_C$$

sonucuna geliriz. Şimdi her iki eleman tanım bağıntısını matrisel bir biçimde düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

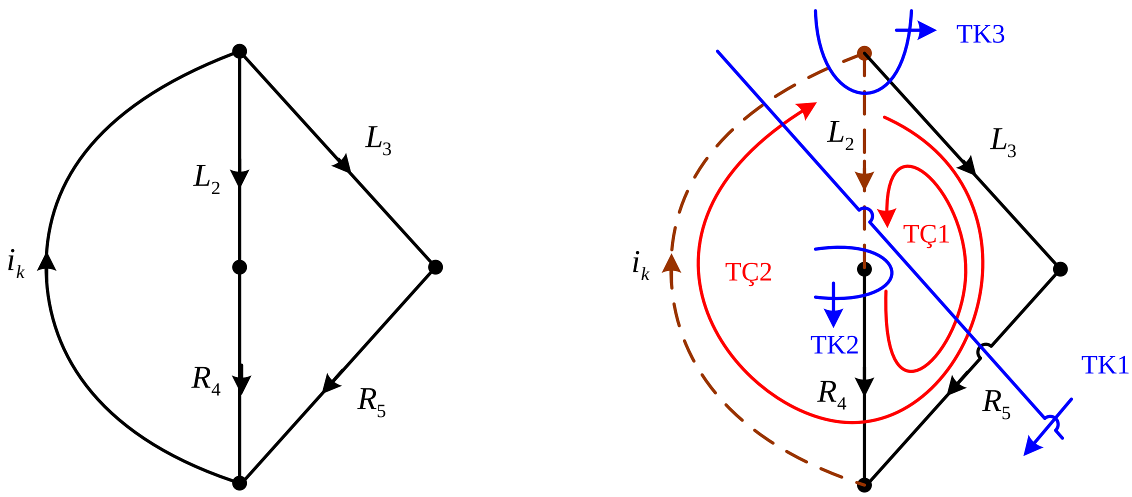
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R.C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot i_k$$

Uygulama 4. Aşağıdaki devrenin uygun ağacını çizerek durum denklemlerini çıkarınız.



$L_2 = L_3 = 2\,\mathrm{H}$
$R_4 = 2\,\Omega$
$R_5 = 4\,\mathrm{H}$
$i_k(t) = \cos t$ Amper

Öncelikle yukarıdaki devrenin grafını ve ardından uygun ağacını bulmaya çalışalım.



Yukarıdaki şekilden görüldüğü üzere, uygun ağaç düşüncesine paralel olarak, devredeki endüktanslardan biri (L_2) kiriş ve diğeri (L_3) mecburen dal seçilmiştir. Buna göre i_{L3} endüktans akımı durum değişkeni olmayıp, sadece i_{L2} endüktans akımı durum değişkeni olacaktır. Bu durumda, (L_2) endüktans elemanının tanım bağıntısı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot v_{L2}$$

Yukarıda verilen tanım bağıntısında, eşitliğin sağ tarafındaki değişkenleri i_{L2} durum değişkeni ve i_k kaynak değişkeni cinsinden ifade edebilmek için temel kesitleme ve temel çevre denklemlerini yazmamız gerekir. i_{L2} endüktans elemanının tanım bağıntısı için, birinci temel çevre denklemini yazacak olursak aşağıdaki denkleme geliriz.

$$v_{L2} + v_{R4} - v_{R5} - v_{L3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{L2} = -v_{R4} + v_{R5} + v_{L3}$$

R_4 ve R_5 direnç elemanlarına ait tanım bağıntılarını yukarıdaki denklemde kullanacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$v_{L2} = -R_4.i_{R4} + R_5.i_{R5} + v_{L3}$$

Bu ifadedeki i_{R4} ve i_{R5} akımlarını, durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade etmemiz gerekecektir. Bu nedenle birinci ve ikinci temel kesitleme denklemlerine gereksinim duyarız. Bu denklemleri ise aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$i_{R5} + i_{L2} - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R5} = -i_{L2} + i_k$$

$$i_{R4} - i_{L2} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{R4} = i_{L2}$$

Bu akım ifadelerini yukarıdaki birinci temel çevre denkleminde yerine koymak ve yeniden düzenlemek suretiyle aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{L2} = -R_4.i_{R4} + R_5.i_{R5} + v_{L3} = -R_4.i_{L2} + R_5.(-i_{L2} + i_k) + v_{L3} = -(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k + v_{L3}$$

Aynı zamanda uygun ağaç kavramından dolayı mecburen dal olarak seçilmek zorunda kalan ve durum değişkeni olmayan L_3 endüktansına ait tanım bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$v_{L3} = L_3 \cdot \frac{di_{L3}}{dt}$$

Bu denklemdeki i_{L3} akımını, diğer durum ve kaynak değişkenleri cinsinden ifade edebilmek için üçüncü temel kesitleme denklemini yazmamız gerekir. Bu denklem aşağıdaki gibi verilir.

$$i_{L3} + i_{L2} - i_k = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{L3} = -i_{L2} + i_k$$

Bu denklemi yukarıdaki tanım bağıntısında yerine koyacak ve yeniden düzenleyecek olursak aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_{L3} = L_3 \cdot \frac{di_{L3}}{dt} = L_3 \cdot \frac{d(-i_{L2} + i_k)}{dt} = -L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}$$

Bu ifadeyi öncelikle birinci temel çevre denkleminde ve buradan elde edilecek ifadeyi de hemen ardından L_2 endüktans elemanına ait tanım bağıntısında yerine koyacak ve bu denklemleri yeniden düzenleyecek olursak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$v_{L2} = -(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k - L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L_2} \cdot [-(R_4 + R_5).i_{L2} + R_5.i_k - L_3 \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_k}{dt}]$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{-(R_4 + R_5)}{L_2} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2} \cdot i_k - \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_{L2}}{dt} + \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$(1 + \frac{L_3}{L_2}) \cdot \frac{di_{L2}}{dt} = \frac{-(R_4 + R_5)}{L_2} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2} \cdot i_k + \frac{L_3}{L_2} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{(R_4 + R_5)}{L_2 + L_3} \cdot i_{L2} + \frac{R_5}{L_2 + L_3} \cdot i_k + \frac{L_3}{L_2 + L_3} \cdot \frac{di_k}{dt}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot i_{L2} + i_k + \frac{1}{2} \cdot \frac{di_k}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot i_{L2} + \cos t - \frac{1}{2} \cdot \sin t$$

Açıklama: Devrede iki endüktans elemanı varsa ve biz uygun ağaç şartını sağlamak için ancak birini kiriş ve diğerini mecburen dal seçebiliyor isek, bu durumda ortaya çıkacak olan durum denklemlerinde mutlaka kaynağın türevi yer alacaktır. Benzer şekilde, devrede iki kapasite elemanı varsa ve biz uygun ağaç şartını sağlamak için ancak birini dal ve diğerini mecburen kiriş seçebiliyor isek, bu durumda ortaya çıkacak olan durum denklemlerinde de yine mutlaka kaynağın türevi yer alacaktır.

Ödev. Aşağıdaki şekilde görülen devrenin durum denklemlerini elde ediniz ve matrisel bir biçime sokunuz.