BÖLÜM 6. z -DÖNÜŞÜMÜ

6.1 Giriş

Ayrık-zamanlı sistemlerin analizi z -dönüşümünün kullanılmasıyla basitleşir.

Gerçekten de fark denklemleriyle gösterilen sistem modeli z -dönüşümü ile üzerinde kolaylıkla işlem yapılabilecek cebrik denklemlere dönüşür.

Örneğin, ayrık-zamanlı sistemin giriş ve çıkış işaretleri arasındaki konvolüsyon bağıntısı, uygun z -dönüşümlerinin çarpımıyla gerçekleştirilir.

Bu bölümde, bir dizinin z -dönüşümü gösterilimi ve dizi özellikleri ile z -dönüşümünün özellikleri arasındaki ilişki tartışılacaktır.

6.2 z -dönüşümünün tanımı

$x(n)$ dizisinin z -dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n}$$

Burada z karmaşık değerli bir değişkeni göstermektedir. Yukarıda verilmiş olan z -dönüşümü tanımı sadece z nin yakınsak olduğu z değerleri için tanımlanır. $x(n)$ dizisinin z -dönüşümü bazen de basitleştirilmiş bir notasyonla aşağıdaki şekillerde gösterilebilir.

$$X(z) = Z[x(n)] \qquad \text{veya} \qquad x(n) \leftrightarrow X(z)$$

$Z[\bullet]$, z -dönüşümüne ilişkin dönüşüm kuralını gösteren matematiksel bir operatördür.

Yakınsaklık bölgesi

Tüm dizilerin z -dönüşümü yakınsak değildir. Diğer bir deyişle, tüm z değerleri için z -dönüşümü yakınsak olmaz. Verilen herhangi bir dizinin z -dönüşümünün yakınsak olduğu z değerlerinin karmaşık düzlemde oluşturduğu küme, o dönüşümün yakınsaklık bölgesi olarak adlandırılır.

Düzenli yakınsaklık, aşağıda verildiği gibi dizinin mutlak değerlerinin toplamının sonlu olmasını gerektirir.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(n).z^{-n} \right| < \infty$$

Bu eşitsizliği sağlayan tüm z -değerleri yakınsaklık bölgesini oluşturur.

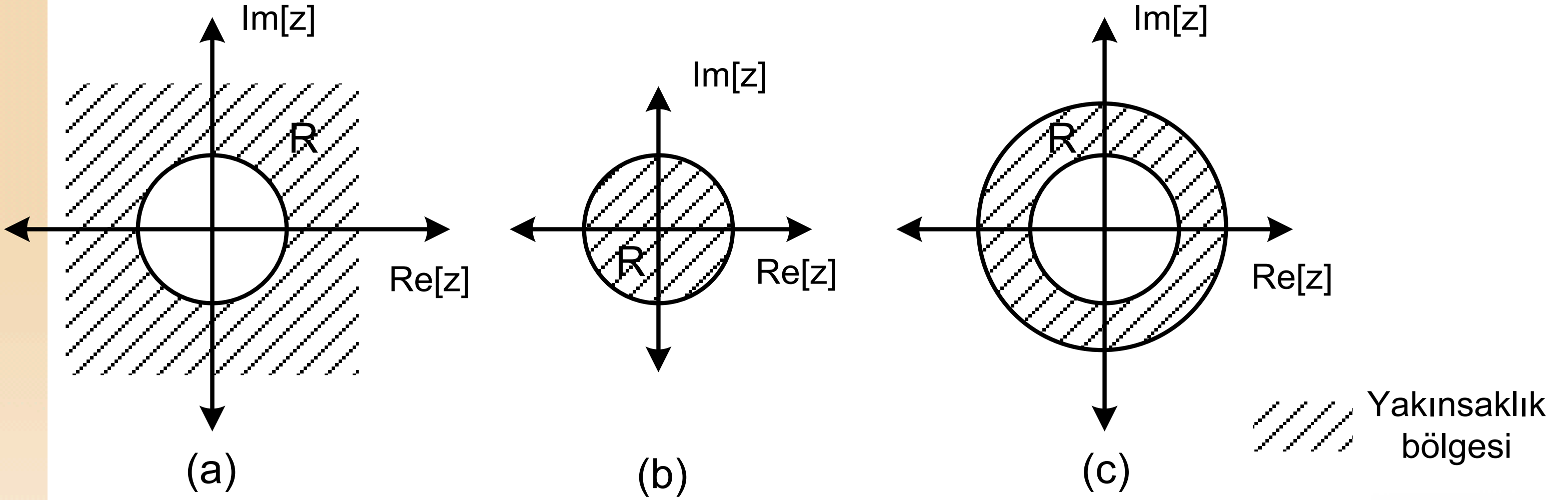
İlk slaytta tanımlanan z -dönüşümü $X(z)$, bir Laurent serisidir.

Kompleks değişkenler teorisinden bilindiği üzere, bir Laurent serisinin yakınsaklık bölgesi R , halka şeklindedir.

Yani, halkanın iç ve dış yarıçapı r_1 ve r_2 olarak verilirse, $r_1 < |z| < r_2$ yakınsaklık bölgesi R halkasını gösterir. $x(n)$ dizisinin $+\infty$ ve $-\infty$ arasındaki davranışına göre r_1 ve r_2 sınır değerleri belirlenir.

Bu halka içerisinde $X(z)$, z nin analitik bir fonksiyonudur. Bu nedenle, $X(z)$ nin kutupları ve tekil noktaları R bölgesi dışındadır.

Bu durum bir sonraki slaytta şekil 6.1 de gösterilmiştir.



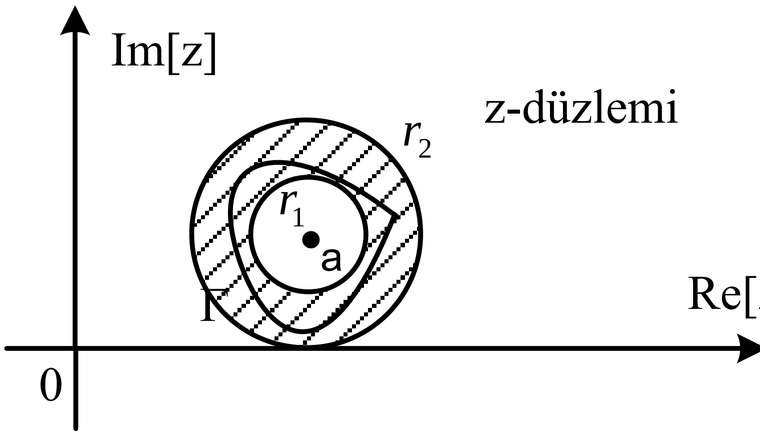
Şekil 6.1 Mümkün olan yakınsaklık bölgesi formları: a) Sağ taraflı dizi; b) Sol taraflı dizi; c) İki taraflı dizi

Eğer $n < 0$ için $x(n) = 0$ ise, z dönüşüm kuralı ifadesinde z nin sadece negatif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_2 = \infty$ olur. Yakınsaklık bölgesi R , r_1 yarıçaplı bir çemberin dışı olur ve $|z| > r_1$ şeklinde gösterilir. $n > 0$ için $x(n) = 0$ ise, z dönüşüm kuralı ifadesinde z nin sadece pozitif üstel kuvvetleri bulunur. Bu durumda, $r_1 = 0$ olup, yakınsaklık bölgesi R , $|z| < r_2$ gibi bir çemberin içinde kalan bölgedir.

6.3 z -dönüşümünün özellikleri

z -dönüşümünün özelliklerini teoremler yardımıyla açıklayacağız.

Teorem 6.1 (Laurent Teoremi).



Şekil 6.2 $X(z)$ nin z -düzlemindeki analitik bölgesi

a.) $X(z)$ şekil 6.2 de gösterildiği gibi, yarıçapları r_1 ve r_2 ve merkezi z_0 da olan bir halka $(r_1 < |z - z_0| < r_2)$ üzerinde analitik ve tek değerli bir fonksiyon olsun.

Bu durumda $X(z)$, z_0 noktası civarında Laurent serisiyle aşağıdaki denklemdeki gibi gösterilebilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).(z - z_0)^{-n}$$

Yukarıda verilen denklemdeki $x(n)$ katsayıları ise kontur entegrali yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z).(z - z_0)^{n-1}$$

Burada Γ , halka içinde saat yönünün tersi yönlü ve içteki çemberi çevreleyen kapalı bir kontoru gösterir.

b) $X(z)$ nin tekil olduğu noktalara varıncaya kadar sürekli olarak r_2 nin çapını artırırken r_1 in çapını küçülterek elde edilen açık halkanın içinde Laurent serisi yakınsaktır ve $X(z)$ yi temsil eder.

c) Yakınsaklık halkası içinde $X(z)$ nin Laurent serisi tektir. Bununla beraber, aynı merkezli farklı halkalarda $X(z)$ nin farklı Laurent serileri olabilir.

$X(z)$ nin iki polinomun oranı biçiminde z nin rasyonel bir fonksiyonu olması en çok karşılaşılan durumdur. Pay polinomun kökleri $X(z)$ yi sıfır yapacağından $X(z)$ nin sıfırları olarak adlandırılır. Payda polinomunun kökleri olan z değerlerinde ise $X(z)$ nin değeri sonsuz olacağından, $X(z)$ nin kutupları olarak adlandırılır. Yakınsaklık tanımından dolayı kutuplar yakınsaklık bölgesi dışında olmalıdır. Bu durum bir sonraki slaytta verilmiştir.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n).z^{-n} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

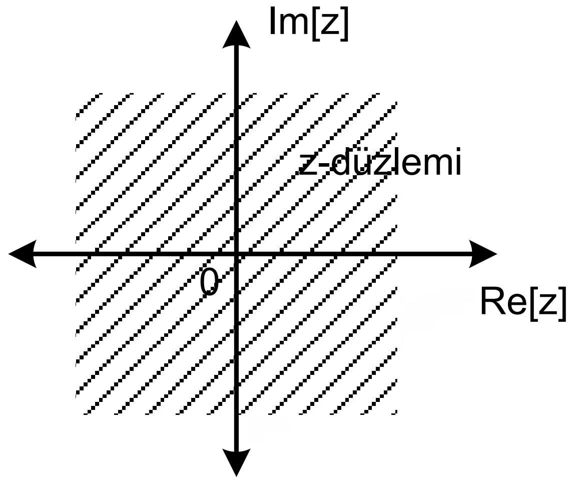
Yukarıda verilen şekildeki gösterimde, $A(z)=0$ denkleminin kökleri sıfırları, $B(z)=0$ ın kökleri ise kutupları oluşturacaktır. Kutuplar payda polinomu $B(z)$ nin kökleri dışında, yani $z=0$ veya $z=\infty$ da da bulunabilir.

Örnek 6.1 $x(n)=\delta(n)$ dizisinin z -dönüşümünü bulunuz.

Cevap 6.1 Dönüşüm aşağıdaki şekilde verilir.

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n).z^{-n}=1$$

Yakınsaklık bölgesi $0 \leq |z| \leq \infty$ olduğundan $X(z)$ tüm z -düzleminde yakınsaktır. Şekil 6.4 te $X(z) = 1$ için yakınsaklık bölgesi gösterilmektedir.



Şekil 6.4 $x(n) = \delta(n)$ birim impuls dizisi için yakınsaklık bölgesi

Örnek 6.2 Sağ taraflı üstel $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için z -dönüşümünü bulunuz.

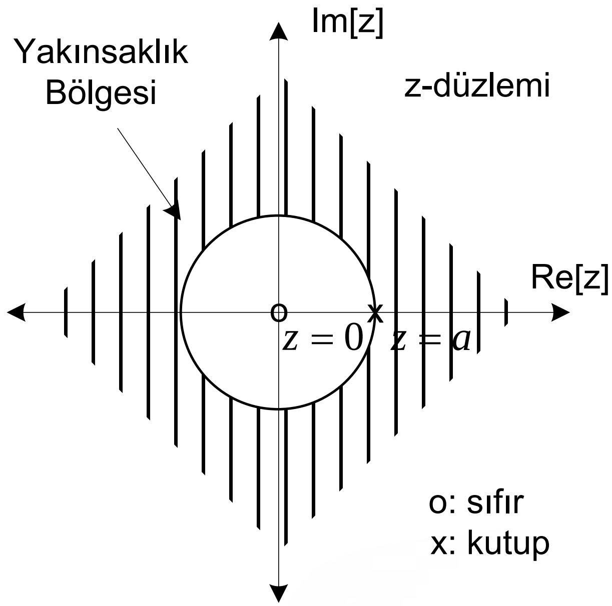
Cevap 6.2 Dönüşüm aşağıdaki şekilde verilir.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a.z^{-1})^n$$

Burada $\left|a.z^{-1}\right| < 1$ için seri yakınsak olur ve $X(z)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$X(z) = \frac{1}{1 - a.z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

$\left|a.z^{-1}\right| < 1$ koşulundan $|z| > |a|$ yazılabilir. Şekil 6.5 te gösterildiği gibi yakınsaklık bölgesi a yarıçaplı dairenin dışında kalan bölgedir. $X(z)$ nin $z = 0$ da bir sıfırı ve $z = a$ da bir kutbu vardır.



Şekil 6.5 $x(n) = a^n u(n)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

<u>Örnek 6.3</u> Aşağıdaki sol taraflı dizinin z -dönüşümünü bulunuz.

$$x(n) = \begin{cases} 0, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} \leq -1 \quad \text{için} \end{cases}$$

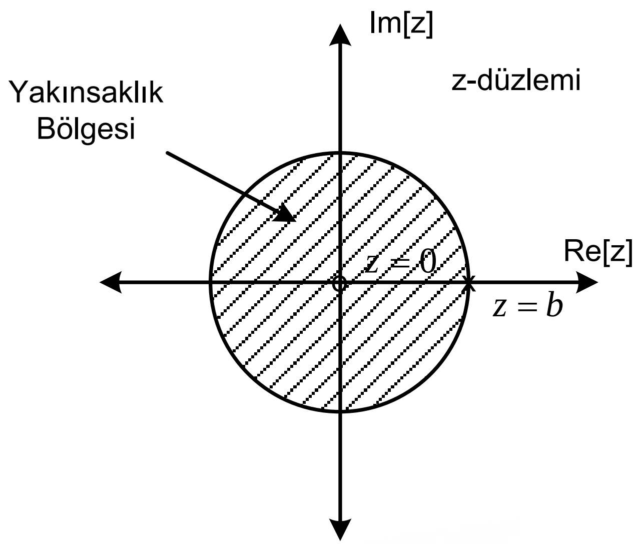
Cevap 6.3 $x(n)$ nin z -dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} - b^{n}.z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} - b^{-n}.z^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}.z^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}.z)^{n}$$

Eğer $\left|b^{-1}.z\right| < 1$ veya $|z| < b$ ise son verilen seri yakınsar. Böylece aşağıdaki ifade elde edilir.

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - b^{-1}.z} = \frac{-b^{-1}.z}{1 - b^{-1}.z} = \frac{z}{-b + z} = \frac{z}{z - b}$$

Şekil 6.6 da görüleceği gibi yakınsaklık bölgesi b yarıçaplı dairenin içinde kalan alandır.



Şekil 6.6 $x(n) = -b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi

Son iki örnekteki dizilere ait z -dönüşümlerinin incelenmesinden, sadece z -dönüşümünün sıfırları ve kutupları yardımıyla dizileri belirlemenin mümkün olmadığı görülmektedir. Gerçekten $a=b$ alınması halinde, son iki örnekte verilen sağ ve sol taraflı dizilerin z - dönüşümleri aynı olmaktadır. Farklı olan özellik ise yakınsaklık bölgeleridir. O halde dizilerin yakınsaklık bölgeleri de verilmelidir.

Örnek 6.4 Aşağıda verilen iki taraflı dizinin z -dönüşümünü bulunuz.

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{n} \geq 0 \quad \text{için} \\ -b^n, & \text{n} < 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

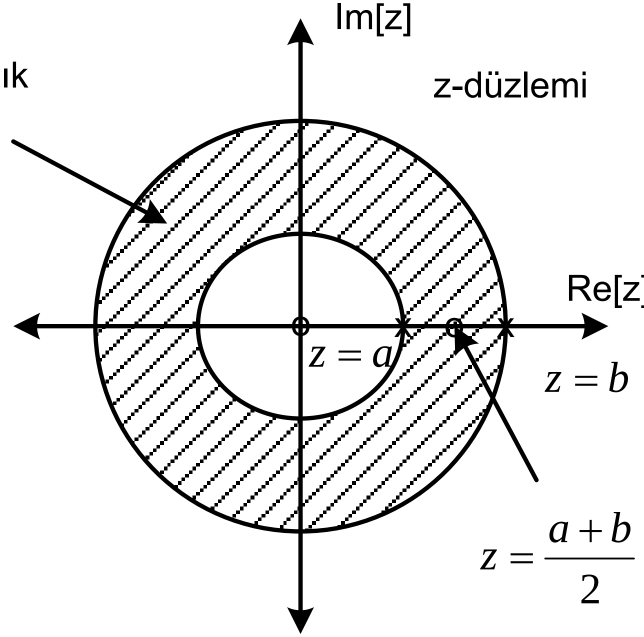
Cevap 6.4 $x(n)$ nin z -dönüşümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n.z^{-n}$$

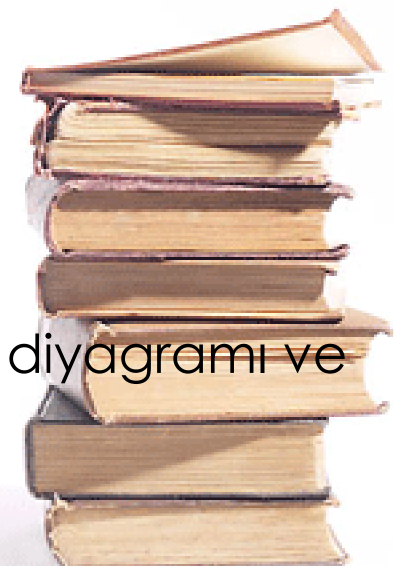
$\left|a.z^{-1}\right| < 1$ ve $\left|b^{-1}.z\right| < 1$ koşullarının sağlanması durumunda aşağıdaki ifadeye gelinir.

$$X(z) = \frac{z}{z-b} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(2z-a-b)}{(z-a).(z-b)}$$

Yakınsaklık bölgesi şekil 6.7 deki gibi yarıçapları a ve b olan halka içindedir. Yani, $|a|<|b|$ ise, $|a|<|z|<|b|$ yakınsaklık bölgesidir.



Şekil 6.7 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$ dizisi için sıfır-kutup diyagramı ve yakınsaklık bölgesi



Teorem 6.2 (Doğrusallık). $x_1(n)$ ve $x_2(n)$ herhangi iki dizi olsun ve z -dönüşümleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$Z[x_1(n)] = X_1(z)$$

$$Z[x_2(n)] = X_2(z)$$

a ve b herhangi iki sabit katsayı ise aşağıdaki bağıntı yazılabilmelidir.

$$X_3(z) = Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z)$$

$$Z[ax_1(n) + bx_2(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax_1(n) + bx_2(n)].z^{-n}$$

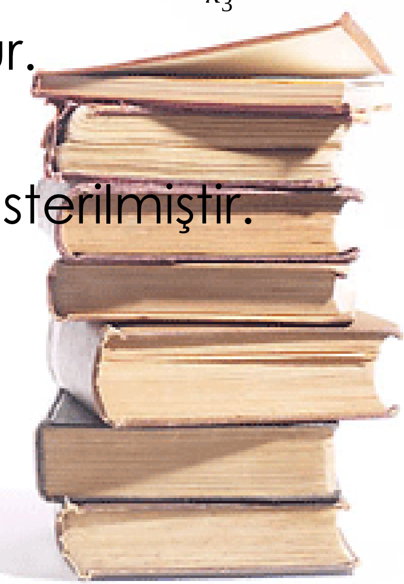
$$= a.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).z^{-n} + b.\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n).z^{-n} = aX_1(z) + bX_2(z)$$

$X_3(z)$ nin yakınsaklık bölgesi en azından $X_1(z)$ ve $X_2(z)$ nin yakınsaklık bölgelerinin arakesitini kapsar. Yani sonuç aşağıda gösterildiği gibi olur.

$$R_{x_3} \supset (R_{x_1} \cap R_{x_2})$$

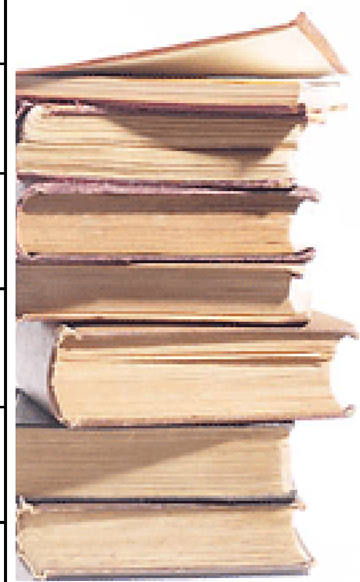
R_{x_1} ve R_{x_2} nin sınırında bulunan bir kutbun, doğrusallık toplamı sonucu ortaya çıkan bir sıfır ile yok edilmesi durumunda R_{x_3} yakınsaklık bölgesi $(R_{x_1} \cap R_{x_2})$ den daha geniş olur.

Çok kullanılan z -dönüşüm çiftleri Tablo 6.1 de gösterilmiştir.



Tablo 6.1 Standart -Dönüşümleri

Dizi	z-Dönüşümü	Yakınsaklık Aralığı
$\delta(n)$	1	Tüm z
$\delta(n-m)\,,\ m>0$	z^{-m}	$\lvert z\rvert<0$, yani $z=0$ hariç tüm z
$\delta(n+m)\,,\ m>0$	z^{m}	$\lvert z\rvert<\infty$, yani $z=\infty$ hariç tüm z
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$a^{n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^{n}u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$u(n)\cos n\theta$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$u(n)\sin n\theta$	$\dfrac{z^{-1}\sin\theta}{1-2z^{-1}\cos\theta+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>1$
$u(n)r^{n}\cos n\theta$	$\dfrac{1-rz^{-1}\cos\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^{2}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$
$u(n)r^{n}\sin n\theta$	$\dfrac{rz^{-1}\sin\theta}{1-2rz^{-1}\cos\theta+r^{2}z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert r\rvert$



İşaret	z-Domeni	Yakınsama Bölgesi (YB)
$x(n)$	$X(z)$	YB: $r_2 < \lvert z \rvert < r_1$
$x_1(n)$	$X_1(z)$	YB_1
$x_2(n)$	$X_2(z)$	YB_2
$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	En azından $YB_1 \cap YB_2$
$x(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	YB ile $z \neq 0$ veya $z \neq \infty$
$nx(n)$	$-z\frac{\partial}{\partial z}(X(z))$	YB
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{r_1} < \lvert z \rvert < \frac{1}{r_2}$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	En azından $YB_1 \cap YB_2$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$

6. Aşağıda verilen fark denklemini;

$$x(k)+\frac{1}{3}x(k-1)=u(k)+u(k-1) \quad k\geq 0, \quad u(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

a. İki yanlı z dönüşümü ile

b. Bir yanlı z dönüşümü ile

$k\geq 0$ için $u(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$, $x(-1)=3$ koşulları altında ve

c. $k\rightarrow k+1$ ötelenmesi uygulayarak çözünüz.

a. $X(z)=\dfrac{\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

b. $X_u(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}U(z)-\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

c. $X_u(z)=\dfrac{z+1}{\left(z+\frac{1}{3}\right)}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\dfrac{z}{\left(z+\frac{1}{3}\right)}$

1 – $x(n) = \delta(n)$ $\quad X(z) = ?$

2 – $x(n) = a^n u(n)$ $\quad X(z) = ?$

3 – $\begin{cases} 0 & n \geq 0 \\ -5^n & n \leq -1 \end{cases}$

4 – $\begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -b^n & n < 0 \end{cases}$

5 – $-a^n u(-n-1)$

6 – $x(n) = a^n u(n) - b^n (u(-n-1))$.

7 – $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - u(n-10)$ $\quad X(z) = ?$

8 – $x(n) = 2^n u(n))$

9 – $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

10 – $x(n) = a^{n-1} u(n-1)$

11 – $x(n) = [3.2^n - 4.3^n] u(n)$

12 – $\cos(w_0 n)\, u(n)$

13 – $n.a^n u(n)$

14 – $x(n) = |n| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

15 – $n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-2)$

16 – $\frac{1}{n} u(n-1)$

17 – $2^n u(n)$

18 – $(2^n - 1) u(n)$

19 – $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n+1)$

20 – $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \frac{1}{2}$

21 – $(-1)^n \cdot 2^{-n} u(n)$

26 –
$x(n) = (n+1) a^n u(n-1)$

22) $y[n] = x[n] + x[n-1]$

$H(z) = ?$

$y(z) = x(z) + z^{-1} \cdot x[z]$

23) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 2^n u(-n-1)$

$y(n) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$

$H(z) = ?$

24) $x(n) = u(n)$ $\quad H(z) = ?$

$y(n) = n \cdot u(n)$ $\quad y(n)$ fark denklemi ifadesi

25) $X(z) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{5} z^{-1}\right)\left(1 + 3 z^{-1}\right)}$ $\quad H(z) = \dfrac{1 + 3 z^{-1}}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}$

$Y(z) = ?$

27- $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n) + x(n-1)$

$H(z) = ?$

$x(z) = \dfrac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$

$|z| > 1$

28- $h(n) = (0,5)^n \cdot u(n)$ $x(n) = \delta(n-3)$

$y(n)$ z dönüşümü ile bul

$y(n) = (0,5)^{n-3}\, u(n-3)$