

Örnek 1-) a) Olasılık teorisi **rastgele** olayların hükmettiği matematiksel kuralları inceler.

b) Olasılık ve İstatistiğin Bilgisayar Mühendisliği uygulamalarından bazıları şunlardır: **simülasyon, görüntüleme, algoritmalar**

c) Size şu şekilde bir soru verilmiştir “Yazdığınız bir algoritmada belirli bir syntax hatasını yaklaşık olarak her 10 satırda bir tekrarladığınızı fark ettiniz. Bu durumu düzeltmek için hatanızı otomatik olarak düzeltecek bir sistem kuruyorsunuz.

Kurduğunuz sistem yaptığınız her 10 hatadan 9’unu düzeltiyor. Fakat sistemi çalıştırmayı %3 ihtimalle unutuyorsunuz. Sistemi kurduktan sonra hata yapma ihtimaliniz, sisteme kurmadan önceki hata yapma ihtimalinize oranla ne kadar değişmiştir?” Bu soruda H: Sistemi kurduktan sonra hata yapma olayınızı ve S: Sistemi çalıştırma olayınızı gösterebilir. Bu durumda;

i. $P(H|\bar{S})$, $P(H|S)$, $P(S)$, $P(\bar{S})$ ve $P(H)$ neleri ifade etmektedir ve değerleri nedir?

$P(H|\bar{S})$: Sistem çalıştırılmayı unutulduğu zaman hata yapma ihtimali(%10)

$P(H|S)$: Sistem çalıştırıldığında hata yapma ihtimali(%1)

$P(S)$: Sistemin Çalıştırılma ihtimali(%97)

$P(\bar{S})$: Sistemin çalıştırılmasının unutulma ihtimali(%3)

$P(H)$: Hata yapma ihtimali(%1,27)

ii. Soruda isteneni matematiksel bir ifade olarak yazınız.

$$\begin{aligned} P(H) &= P(H\bar{S}) + P(HS) = P(H|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) + P(H|S) \cdot P(S) \\ &= \%10 \cdot \%3 + \%1 \cdot \%97 \\ &= \%1,27 \end{aligned}$$

Örnek 2-) X, Y, ve Z üç adet rastgele değişkendir. X rastgele değişkeni 2 ile 4 arasında, Y rastgele değişkeni 0 ile 2 arasında ve Z rastgele değişkeni 3 ile 9 arasında uniform olarak dağıtılmıştır. Bahar

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{2+4}{2} = 3 & \text{Var}(X) &= \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3} \\ E[Y] &= \frac{0+2}{2} = 1 & \text{Var}(Y) &= \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3} \\ E[Z] &= \frac{3+9}{2} = 6 & \text{Var}(Z) &= \frac{(9-3)^2}{12} = 3 \end{aligned}$$

a) $X+Y-Z$ ’nin beklentisini ve varyansını bulun. **(-2, 11/3)**

$$E[X + Y - Z] = E[X] + E[Y] - E[Z] = 3 + 1 - 6 = -2$$

$$\text{Var}(X + Y - Z) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + \text{Var}(Z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 3 = \frac{11}{3}$$

b) $\rho(X + Y, Y - Z) = ?$ **(0,2236)**

$$\text{Cov}(X + Y, Y - Z) = E[(X + Y)(Y - Z)] - E[X + Y]E[Y - Z]$$

$$\begin{aligned}
&= E[XY - XZ + Y^2 - YZ] - (E[X] + E[Y])(E[Y] - E[Z]) \\
&= E[XY] - E[XZ] + E[Y^2] - E[YZ] - (E[X]E[Y] - E[X]E[Z] + (E[Y])^2 - E[Y]E[Z]) \\
&= E[X]E[Y] - E[X]E[Z] + E[Y^2] - E[Y]E[Z] - E[X]E[Y] + E[X]E[Z] - (E[Y])^2 + E[Y]E[Z] \\
&= E[Y^2] - (E[Y])^2 = \text{Var}(Y) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\rho(X + Y, Y - Z) = \frac{\text{Cov}(X + Y, Y - Z)}{\sqrt{\text{Var}(X + Y)\text{Var}(Y - Z)}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0,2236$$

Örnek 3-) Belirli bir fabrikada üretilen bilgisayar çiplerinin her biri birbirinden bağımsız olarak 0,25 ihtimalle bozuk çıkmaktadır. Rastgele seçilen 1000 adet çip test edildiğinde, bu çipler içinde bozuk olanların sayısının;

$$p = 0,25 \quad n = 1000$$

a) 275'den az olma ihtimali nedir? **0,9664**

$$n \cdot p = 1000 \cdot 0,25 = 250 \quad np(1 - p) = 250 \cdot 0,75 = 187,5$$

$$X \sim N(250, (13,69)^2)$$

$$P\{X \leq 275\} = P\left\{\frac{X-250}{13,69} \leq \frac{275-250}{13,69}\right\} = P\{Z \leq 1,8257\} \approx 0,5 + \text{erf}(1,83) = 0,9664$$

b) 220'den fazla olma ihtimali nedir? **0,9857**

$$n \cdot p = 1000 \cdot 0,25 = 250 \quad np(1 - p) = 250 \cdot 0,75 = 187,5$$

$$X \sim N(250, (13,69)^2)$$

$$\begin{aligned}
P\{X \geq 220\} &= P\left\{\frac{X-250}{13,69} \geq \frac{220-250}{13,69}\right\} = P\{Z \geq -2,1909\} = P\{Z \leq 2,1909\} \approx 0,5 + \text{erf}(2,19) \\
&= 0,9857
\end{aligned}$$

c) 220 ile 275 arasında olma ihtimali nedir? **0,9521**

$$\begin{aligned}
P\{220 \leq X \leq 275\} &= P\{X \leq 275\} - P\{X \leq 220\} = P\{X \leq 275\} - (1 - P\{X \geq 220\}) \\
&= 0,9664 - 1 + 0,9857 = 0,9521
\end{aligned}$$

Örnek 4-) Bir şirkette Bilgisayar Mühendisi olarak işe başladınız ve sizden, veri merkezindeki serverları hız açısından güncelleniz istenmektedir (yeni CPU alımı). İki şirketten fiyat teklifi ve ürün performansları ile ilgili bilgi aldınız; A şirketi ve B şirketi. A ve B şirketi birbirlerine yakın fiyatlar vermektedirler ve iki şirkette CPU'larının kapasitelerinin 3.2 GHz olduğunu iddia etmektedirler. Tecrübelerinize göre veri merkezindeki dış faktörlerin server içindeki CPU hızlarına etkisi, beklentisi 0 ve standart sapması 0,5 (GHz) olan bir Normal dağılım ile modellenenabilir. Yani veri merkezinde çalıştıracağınız bu yeni CPUların kapasitesi beklentisi henüz bilinmeyen ama varyansı 0,5 (GHz) olan bir normal dağılıma sahiptir. İki şirketten ayrı ayrı CPU numuneleri istediniz. A şirketi 20 adet ve B şirketi 25 adet CPU numunesi gönderdi. Belirli bir server üzerinde bu numuneleri test ediyorsunuz.

a) A şirketinden aldığınız numuneler için önem seviyesi $\alpha=0,05$ olacak şekilde kritik bölgeyi bulunuz ve *çift taraflı* hipotez testini oluşturun.

$$Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96 \quad c = \frac{s \cdot Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} = \frac{0,5 \cdot 1,96}{\sqrt{20}} = \pm 0,22$$

b) A şirketinden aldığınız CPU numunelerinin hız ortalaması 2.8 GHz ise A şirketinin iddia ettiği gibi CPU hızlarının 3.2 GHz olması hipotezini kabul mu yoksa ret mi edersiniz? **(ret)**

$$\frac{\sqrt{n} \cdot |\mu_0 - \mu|}{s} = \frac{\sqrt{20} \cdot |2,8 - 3,2|}{0,5} = 3,58 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 2.086 \text{ (t tablosundan)} \Rightarrow 3,58 > 2,086 \Rightarrow \text{Hipotezi reddederiz}$$

c) B şirketinden aldığınız numuneleri de aynı ortamda test ettiniz ve onların ortalamasını da 3.0 GHz olarak buldunuz. Bu durumda bu iki şirketin CPU'ları iddia ettikleri gibi aynı performansa sahipler midir? Hipotez testini oluşturarak bu iddiayı kabul edip etmeyeceğimizi önem seviyesi $\alpha=0,05$ için belirtiniz.

(kabul)

$$\frac{\sqrt{n} \cdot |\mu_0 - \mu|}{s} = \frac{\sqrt{25} \cdot |3 - 3,2|}{0,5} = 2 \quad Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 2.06 \text{ (t tablosundan)} \Rightarrow 2 \leq 2,06 \Rightarrow \text{Hipotezi kabul ederiz}$$

d) Şirketler performans bilgilerini verirken genelde gerçekleştirecek en üst hızı verirler. Yani A şirketinden aldığınız bir CPU en fazla 3.2 GHz kapasitedir ve üstünde olamaz. Bu bilgi ışığında yine önem seviyesi $\alpha=0,05$ olacak şekilde *tek taraflı* hipotez testini A şirketi için oluşturun. Bu durumda yine A şirketinden aldığınız CPU numunelerinin hız ortalaması 2.8 GHz ise A şirketinin iddia ettiği gibi CPU hızlarının 3.2 GHz olması hipotezini kabul mu yoksa ret mi edersiniz?

(ret)

$$\frac{\sqrt{n} \cdot |\mu_0 - \mu|}{s} = \frac{\sqrt{20} \cdot |2,8 - 3,2|}{0,5} = 3,58 \quad Z_{\alpha} = Z_{0,05} = 1,725 \text{ (t tablosundan)} \Rightarrow 3,58 > 1,725 \Rightarrow \text{Hipotezi reddederiz}$$

e) Şirket server odasında bazı değişiklikler yapmış ve CPU'ların hızlarını etkileyen dış faktörler değişmiştir. Yani veri merkezinde çalıştıracağınız bu yeni CPUların kapasitesi beklentisi de varyansı da bilinmeyen bir normal dağılıma sahiptir. Eğer A şirketinden aldığınız CPU numunelerinin hız ortalaması 2.8 GHz ve örneklem varyansı 0,16 GHz ise b) şıkkındaki cevabınız nasıl değişir? **(ret)**

$$\frac{\sqrt{n} \cdot |\mu_0 - \mu|}{s} = \frac{\sqrt{20} \cdot |2,8 - 3,2|}{0,4} = 4,47 \quad Z_{\alpha} = Z_{0,05} = 1,725 \text{ (t tablosundan)} \Rightarrow 4,47 > 1,725 \Rightarrow \text{Hipotezi reddederiz}$$