# IST108
# OLASILIK VE İSTATİSTİK

KOŞULLU OLASILIK

## İçerik

Koşullu Olasılık

Çarpım Kuralı

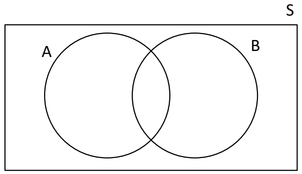
İkiden Fazla Olay

Toplam Olasılık

Baye’s Eşitliği

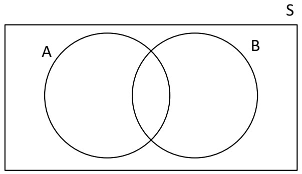


## Koşullu Olasılık



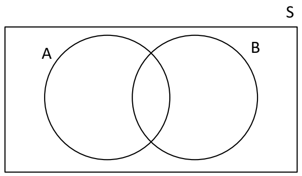



## Koşullu Olasılık




$P(A) = \frac{\eta_A}{\eta_S}$

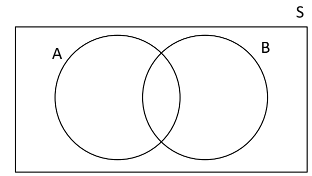
## Koşullu Olasılık




$P(A) = \frac{\eta_A}{\eta_S}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{\eta_B}{\eta_S}$



## Koşullu Olasılık

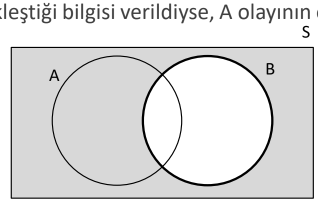



$P(A) = \frac{\eta_A}{\eta_S}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{\eta_B}{\eta_S}$ $\qquad$ $P(A \cap B) = \frac{\eta_{A \cap B}}{\eta_S}$



## Koşullu Olasılık

B olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, A olayının olasılığı $P(A|B)$

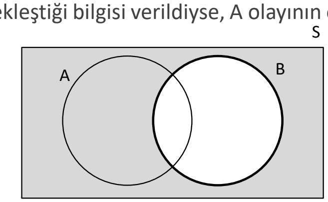



$P(A|B) =$



## Koşullu Olasılık

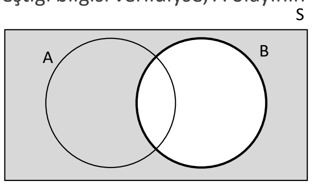
B olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, A olayının olasılığı $P(A|B)$




$P(A|B) = \frac{\eta_{A \cap B}}{\eta_B} =$

## Koşullu Olasılık

B olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, A olayının olasılığı $P(A|B)$

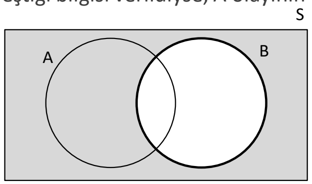



$$P(A|B) = \frac{\eta_{A\cap B}}{\eta_B} = \frac{\eta_{A\cap B}/\eta_S}{\eta_B/\eta_S} =$$



## Koşullu Olasılık

B olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, A olayının olasılığı $P(A|B)$

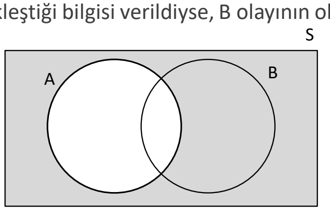



$$P(A|B) = \frac{\eta_{A\cap B}}{\eta_B} = \frac{\eta_{A\cap B}/\eta_S}{\eta_B/\eta_S} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



## Koşullu Olasılık

A olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, B olayının olasılığı $P(B|A)$

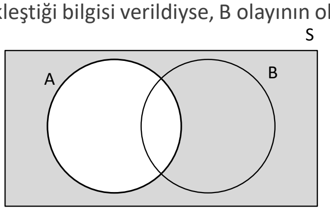



$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$



## Koşullu Olasılık

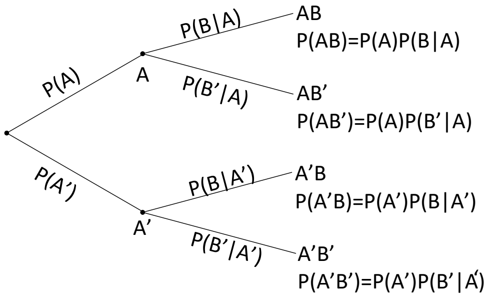
A olayının gerçekleştiği bilgisi verildiyse, B olayının olasılığı $P(B|A)$




$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

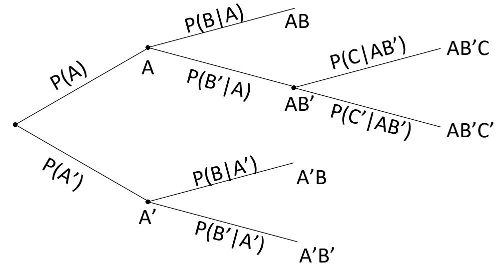
$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

## Çarpım Kuralı






## Çarpım Kuralı






## Çarpım Kuralı

$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$



## Çarpım Kuralı

$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$

$$= \underbrace{P(A_1)P(A_2|A_1)}_{P(A_1A_2)}P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

## Çarpım Kuralı

$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$

$$= \underbrace{\underbrace{P(A_1)P(A_2|A_1)}_{P(A_1A_2)} P(A_3|A_1A_2)}_{P(A_1A_2A_3)} \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$



## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %25'i matematikten, %15'i kimyadan ve %10'u da hem matematikten hem kimyadan kalmıştır. Rastgele seçilen bir öğrencinin

A) Kimyadan kalmışsa matematikten de kalmış olma olasılığı nedir?

B) Matematikten kalmışsa kimyadan kalmış olma ihtimali?



## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %25'i matematikten, %15'i kimyadan ve %10'u da hem matematikten hem kimyadan kalmıştır. Rastgele seçilen bir öğrencinin

A) Kimyadan kalmışsa matematikten de kalmış olma olasılığı nedir?

$$P(M|K) = \frac{P(M\cap K)}{P(K)} = \frac{0{,}1}{0{,}15} = \frac{2}{3}$$



## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %25'i matematikten, %15'i kimyadan ve %10'u da hem matematikten hem kimyadan kalmıştır. Rastgele seçilen bir öğrencinin

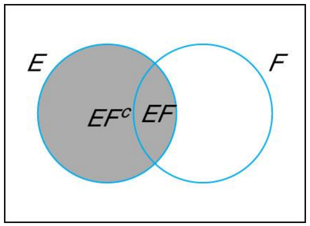
B) Matematikten kalmışsa kimyadan kalmış olma ihtimali?

$$P(K|M) = \frac{P(M\cap K)}{P(M)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = \frac{2}{5}$$

# Toplam Olasılık

E ve F iki olay olsun

Bu durumda $E = EF \cup EF'$ yazılabilir.






# Toplam Olasılık

E ve F iki olay olsun

Bu durumda $E = EF \cup EF'$ yazılabilir.

Buradan hareketle

$P(E) = P(EF) + P(EF')$

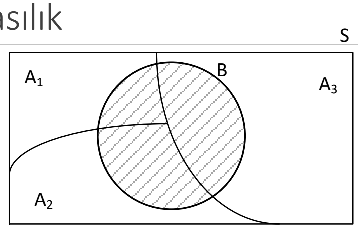
$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F')P(E|F')$

$P(E) = P(F)P(E|F) + \big(1 - P(F)\big)P(E|F')$



# Toplam Olasılık

Üç olay durumu




$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$



# Baye's Eşitliği

Bilinenler

- $P(A_i)$
- $P(B|A_i)$

## Baye's Eşitliği

Bilinenler

- $P(A_i)$
- $P(B|A_i)$

İstenen

- $P(A_i|B)$



## Baye's Eşitliği

Bilinenler

- $P(A_i)$
- $P(B|A_i)$

İstenen

- $P(A_i|B)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$



## Baye's Eşitliği

Bilinenler

- $P(A_i)$
- $P(B|A_i)$

İstenen

- $P(A_i|B)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

Örnek uzay $n$ tane ayrık olaydan oluşuyorsa $(i = 1, 2, \cdots, n)$



## Baye's Eşitliği

Bilinenler

- $P(A_i)$
- $P(B|A_i)$

İstenen

- $P(A_i|B)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

Örnek uzay $n$ tane ayrık olaydan oluşuyorsa $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

## Örnek 2

Bir sigorta şirketi kişileri kazaya meyilli olanlar ve olmayanlar olarak iki gruba ayırmıştır. Şirket kazaya meyilli olan kişilerin 1 yıllık süre içerisinde kaza yapma olasılıklarının 0,4 olduğunu hesaplamıştır. Kazaya meyilli olmayanlar için aynı olasılık 0,2 olarak hesaplanmıştır. Nüfusun %30'unun kazaya meyilli olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda;

A) Yeni poliçe yaptırmış bir sigortalının 1 yıl içinde kaza yapma olasılığı nedir?

B) Yeni poliçe sahibinin 1 yıl içinde kaza yaptığı bilindiğinde sigortalının kazaya meyilli olma olasılığı nedir?



## Örnek 2

A) Yeni poliçe yaptırmış bir sigortalının 1 yıl içinde kaza yapma olasılığı nedir?

K: Sigortalının 1 yıl içinde kaza yapması olayı olsun.

M: Sigortalının kazaya meyilli olması olayı olsun.

$P(K) = ?$



## Örnek 2

A) Yeni poliçe yaptırmış bir sigortalının 1 yıl içinde kaza yapma olasılığı nedir?

K: Sigortalının 1 yıl içinde kaza yapması olayı olsun.

M: Sigortalının kazaya meyilli olması olayı olsun.

$P(K) = ?$

$$P(K) = P(KM) + P(KM') = P(K|M)P(M) + P(K|M')P(M')$$

$$P(K) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}26$$



## Örnek 2

B) Yeni poliçe sahibinin 1 yıl içinde kaza yaptığı bilindiğinde sigortalının kazaya meyilli olma olasılığı nedir?

A şıkkından devam edilerek;

$P(M|K) = ?$

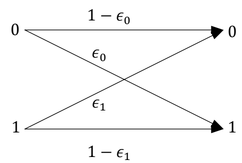
$$P(M|K) = \frac{P(MK)}{P(K)} = \frac{P(K|M)\,P(M)}{P(K)} = \frac{0{,}4\times 0{,}3}{0{,}26} = \frac{0{,}12}{0{,}26} = \frac{6}{13}$$

## Örnek 3

İkili mesaj (0 veya 1) gürültülü bir haberleşme hattı üzerinden aktarılmaktadır. 0 mesajının hatalı olarak alınması olasılığı $\epsilon_0$, 1 mesajının hatalı alınması olasılığı $\epsilon_1$ olarak verilmiştir.

Herbir mesajın aktarımında oluşan hatalar bağımsızdır.

Hat kaynağı $p$ olasılıkla 0 mesajı göndermektedir.






## Örnek 3

A) Rastgele seçilen bir mesajın doğru olarak alınması olasılığı nedir?



## Örnek 3

A) Rastgele seçilen bir mesajın doğru olarak alınması olasılığı nedir?

H: Mesajın hatalı olarak alınması olayı olsun.

A: 0 mesajının gönderilmesi olayı olsun.

B: 1 mesajının gönderilmesi olayı olsun.

$P(H') = P(A \cap H') + P(B \cap H')$

$P(H') = P(A)P(H'|A) + P(B)P(H'|B)$

$P(H') = p(1-\epsilon_0) + (1-p)(1-\epsilon_1)$



## Örnek 3

B) 1011 mesajının gönderildiğini düşünelim. Bu mesajın doğru olarak alınması olasılığı nedir?

## Örnek 3

B) 1011 mesajının gönderildiğini düşünelim. Bu mesajın doğru olarak alınması olasılığı nedir?

H: Mesajın hatalı olarak alınması olayı olsun.

A: 0 mesajının doğru olarak alınması olayı olsun.

B: 1 mesajının doğru olarak alınması olayı olsun.

$P(A) = (1 - \epsilon_0)$

$P(B) = (1 - \epsilon_1)$



## Örnek 3

B) 1011 mesajının gönderildiğini düşünelim. Bu mesajın doğru olarak alınması olasılığı nedir?

H: Mesajın hatalı olarak alınması olayı olsun.

A: 0 mesajının doğru olarak alınması olayı olsun.

B: 1 mesajının doğru olarak alınması olayı olsun.

$P(H') = P(B).P(B).P(A).P(B)$

$P(H') = (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_0)(1 - \epsilon_1)$

$P(H') = (1 - \epsilon_0)(1 - \epsilon_1)^3$



## Örnek 3

C) Güvenilirliği artırmak için her bir mesaj 3 kez gönderilecek ve fazla olan sembol alınan mesaj olarak kabul edilecek. Yani, 0 mesajı 000 olarak, 1 mesajı da 111 olarak gönderilecek. Gönderilen 000 mesajı 000, 001, 010 veya 100 olarak alınırsa 0 kabul edilecek. 111 mesajı 111, 110, 101 veya 011 olarak alınırsa 1 kabul edilecek.

0 mesajının doğru olarak alınması olasılığı nedir?



## Örnek 3

C) 0 mesajının doğru olarak alınması olasılığı nedir?

0 mesajı için 000 gönderilecek. Dolayısıyla 000 veya 001 veya 010 veya 100 mesajlarının alınması olasılığını bulmalıyız.

A: 0 mesajının doğru olarak alınması olayı olsun.

B: 0 mesajının yanlış olarak alınması olayı olsun.

H: Mesajın hatalı olarak alınması olayı olsun.

$P(A) = (1 - \epsilon_0)$

$P(B) = \epsilon_0$

## Örnek 3

C) 0 mesajının doğru olarak alınması olasılığı nedir?

$P(H') = P(000) + P(001) + P(010) + P(100)$

$P(H') = P(A).P(A).P(A) + P(A).P(A).P(B)$
$+P(A).P(B).P(A) + P(B).P(A).P(A)$

$P(H') = (1-\epsilon_0).(1-\epsilon_0).(1-\epsilon_0) + (1-\epsilon_0).(1-\epsilon_0).\epsilon_0$
$+(1-\epsilon_0).\epsilon_0.(1-\epsilon_0) + \epsilon_0.(1-\epsilon_0).(1-\epsilon_0)$

$P(H') = (1-\epsilon_0)^3 + (1-\epsilon_0)^2.\epsilon_0 + (1-\epsilon_0)^2.\epsilon_0 + \epsilon_0.(1-\epsilon_0)^2$

$P(H') = (1-\epsilon_0)^3 + 3\epsilon_0.(1-\epsilon_0)^2$



## Örnek 3

D) Yukarıdaki tekrarlı gönderme yöntemi kullanılırken alınan mesajın 101 olduğu bilindiğinde, 0 gönderilmiş olması olasılığı nedir?



## Örnek 3

D) Yukarıdaki tekrarlı gönderme yöntemi kullanılırken alınan mesajın 101 olduğu bilindiğinde, 0 gönderilmiş olması olasılığı nedir?

A: 0 mesajının gönderilmesi olayı olsun.

B: 101 mesajının alınması olayı olsun.

$P(A|B) = ?$

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}$

$P(A|B) = \frac{p\epsilon_0^2(1-\epsilon_0)}{p\epsilon_0^2(1-\epsilon_0)+(1-p)\epsilon_1(1-\epsilon_1)^2}$



## Örnek 4

Bir kan testi, belirli bir hastalığı mevcut olduğu durumda tespit etmede %99 etkilidir. Test %1 olasılıkla test edilen sağlıklı kişileri "yanlış pozitif" (sağlıklı bir kişiyi hastaymış gibi) gösteriyor. Nüfusun %0,5'inde hastalık varsa test sonucu pozitif çıkan bir kişinin gerçekten hasta olma ihtimali nedir?

## Örnek 4

Bir kan testi, belirli bir hastalığı mevcut olduğu durumda tespit etmede %99 etkilidir. Test %1 olasılıkla test edilen sağlıklı kişileri “yanlış pozitif” (sağlıklı bir kişiyi hastaymış gibi) gösteriyor. Nüfusun %0,5’inde hastalık varsa test sonucu pozitif çıkan bir kişinin gerçekten hasta olma ihtimali nedir?

F: Test edilen kişinin hasta olması olayı olsun.

E: Test sonucunun pozitif olması olayı olsun.

$P(F|E) = ?$



## Örnek 4

Bir kan testi, belirli bir hastalığı mevcut olduğu durumda tespit etmede %99 etkilidir. Test %1 olasılıkla test edilen sağlıklı kişileri “yanlış pozitif” (sağlıklı bir kişiyi hastaymış gibi) gösteriyor. Nüfusun %0,5’inde hastalık varsa test sonucu pozitif çıkan bir kişinin gerçekten hasta olma ihtimali nedir?

$$P(F|E) = \frac{P(FE)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F)+P(E|F')P(F')} = \frac{0,99\times 0,005}{0,99\times 0,005+0,01\times 0,995}$$

$$P(F|E) = 0,3322$$



## Örnek 5

Bir doktor şöyle bir ikilemde kalmıştır.

«Eğer hastamın belirli bir hastalığa %80 sahip olduğuna inanırsam ameliyat öneririm. Eğer o kadar emin değilsem, yeni testler isterim. Fakat bu testler pahalı ve acı vericidir.»



## Örnek 5

«Başlangıçta Ahmet’in hasta olduğundan %60 emindim, bu yüzden A testini yaptırmasını istedim. Bu testler, kişi hasta ise her zaman pozitif sonuç verir değilse hiçbir zaman pozitif sonuç vermez.

Test sonuçları pozitif çıktı. Tam ameliyat olmasını tavsiye edecekken Ahmet diyabet hastası olduğunu söyledi. Bu bilgi sorunu karmaşık hale getirdi çünkü (hala Ahmet’in %60 ihtimalle o hastalığa sahip olduğunu düşünsem de) bu durum A testinin sonuçlarının okunmasını değiştirecektir.

Çünkü A testi kişi sağlıklı iken hiçbir zaman pozitif sonuç üretmese de diyabet olan ama bu hastalığa sahip olmayan kişiler için %30 ihtimalle pozitif sonuç üretmektedir.

Bu durumda ne yapmalıyım? Daha fazla test mi istemeliyim yoksa ameliyat mı önermeliyim?»

## Örnek 5

H: Ahmet’in gerçekten hastalığa sahip olma olayı olsun.

T: Test sonucunun pozitif olması olayı olsun.

$P(H|T) = ?$



## Örnek 5

$$P(H|T) = \frac{P(TH)}{P(T)} = \frac{P(T|H)P(H)}{P(TH)+P(TH')} = \frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H)+P(T|H')P(H')}$$

$$P(H|T) = \frac{1\times 0{,}6}{1\times 0{,}6+0{,}3\times 0{,}4} = 0{,}833$$

Sonuç %80’nin üzerinde olduğu için ameliyat olmasını öneririm.