IST108
OLASILIK VE İSTATİSTİK

SÜREKLİ RASTGELE DEĞİŞKENLER

İçerik

Sürekli Rastgele Değişken

Mümkün değerler kümesi bir aralık olan rastgele değişkene **süreklidir** denir.

Bu tür rastgele değişkenlere **sürekli rastgele değişken** denir.

Örneğin bir akıllı telefonun pilinin ömrü 3 ile 5 yıl arasındadır dersek burada akıllı telefon pilinin ömrünü gösteren rastgele değişken süreklidir ve değeri (3, 5) aralığında herhangi bir değerdir.

Sürekli Rastgele Değişken

Sürekli rastgele değişkenlerin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** vardır.

$f(x)$ fonksiyonu, X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun.

Herhangi bir B kümesi için

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

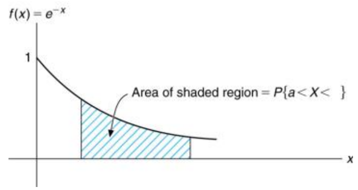
Sürekli Rastgele Değişken

$B = [a, b]$ ise $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

$a = b$ ise $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

Sürekli rastgele değişkenin herhangi bir özel değere eşit olma olasılığı 0'dır.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$



Sürekli Rastgele Değişken

$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonunun türevidir.

$F(a) = P(X < a) = P(X \leq a) = P\{X \in (-\infty, a]\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$\frac{d}{da}F(a) = f(a)$

$f(a)$, rastgele değişkenin a değeri çevresinde olma ihtimalidir.

Örnek 1

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

A) C'nin değeri nedir? $C = ?$

B) X rastgele değişkeninin 1'den büyük olma olasılığı nedir?

$P(X > 1) = ?$

Örnek 1

A) $C = ?$

$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$P\{X \in (-\infty, \infty)\} = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^{\infty} f(x)dx = 1$

$0 + \int_0^2 C(4x - 2x^2)dx + 0 = 1 \rightarrow C\int_0^2 (4x - 2x^2)dx = 1$

$C\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 1 \rightarrow C = \frac{3}{8}$

Örnek 1

B) $P\{X > 1\} = ?$

$P\{X > 1\} = \int_1^\infty f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^\infty f(x)dx$

$P\{X > 1\} = \int_1^2 C(4x - 2x^2)dx + 0$

$P\{X > 1\} = \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)dx$

$P\{X > 1\} = \frac{3}{8}\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{x=1}^{x=2}$

$P\{X > 1\} = \frac{1}{2}$

Sürekli Rastgele Değişkenin Beklentisi

Sürekli rastgele değişkenlerin de beklentisi tanımlanabilir.

Bir X sürekli rastgele değişkeninin beklentisi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Örnek 2

Saat 15:00'den sonra bir mesaj beklediğimizi düşünelim. Tecrübelerimizden şunu biliyoruz. X, saat 15:00'den sonra mesaj beklediğimiz saati gösteren bir rastgele değişken olmak üzere aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1,5} & 0 < x < 1,5 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$

15:00'den sonra mesajın varması için ortalama olarak kaç saat beklenir?

Örnek 2

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1,5} & 0 < x < 1,5 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_0^{1,5} \frac{1}{1,5}xdx + \int_{1,5}^{\infty} xf(x)dx$

$E[X] = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_0^{1,5} \frac{1}{1,5}xdx + \int_{1,5}^{\infty} x0dx$

$E[X] = 0 + \frac{1}{1,5}\int_0^{1,5} xdx + 0 = \frac{1}{1,5}\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1,5} = 0,75$

Ortalama olarak 0,75 saat beklemeliyiz.

Sürekli Rastgele Değişkenin Beklentisi

Bir X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiş olsun.

X'in bir fonksiyonunun, örneğin $g(X)$ fonksiyonunun beklenen değerini nasıl hesaplarız?

$g(X)$'in dağılımı, X'in dağılım bilgisinden hesaplanabilir.

$g(X)$'in dağılımını bulduğumuzda $E[g(X)]$'i hesaplayabiliriz.

Örnek 3

Bir fabrikada elektrik arızasını tespit etme süresini X rastgele değişkeni göstersin. Bu rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde olsun.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

x sürede tespit edilen arızanın maliyeti x^3 ise böyle bir arızanın beklenen maliyeti nedir?

Örnek 3

$Y = X^3$ rastgele değişkenin dağılım fonksiyonunu hesaplayalım.

$0 < a < 1$ için

$$F_Y(a) = P(Y \le a) = P(X^3 \le a) = P\left(X \le a^{1/3}\right)$$

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{a^{1/3}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a^{1/3}} f(x)dx$$

$$F_Y(a) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{a^{1/3}} 1dx = \int_{0}^{a^{1/3}} dx = a^{1/3}$$

Örnek 3

$Y = X^3$ rastgele değişkenin dağılım fonksiyonunu hesaplayalım.

$0 < a < 1$ için

$$\frac{d}{da}F_Y(a) = f_Y(a) \rightarrow \frac{d}{da}a^{1/3} = f_Y(a) \rightarrow f_Y(a) = \frac{1}{3}a^{-2/3}$$

$$E[X^3] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} a\, f_Y(a)da = \int_0^1 a\,\frac{1}{3}a^{-2/3}da = \frac{1}{3}\int_0^1 a^{1/3}\,da$$

$$E[X^3] = \frac{1}{3}\frac{3}{4}a^{4/3}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sürekli Rastgele Değişkenin Beklentisi

Önceki örneğimizde anlatılan rastgele değişkenin fonksiyonunun beklenen değerini formüllerle ifade ederek daha rahat hesaplayabiliriz.

X, $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda gerçek değerli herhangi bir g fonksiyonu için;

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

Örnek 3 – Formül Kullanarak

Bir fabrikada elektrik arızasını tespit etme süresini X rastgele değişkeni göstersin. Bu rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde olsun.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

x sürede tespit edilen arızanın maliyeti x^3 ise böyle bir arızanın beklenen maliyeti nedir?

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$

$E[X^3] = \int_0^1 x^3 f(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

Sürekli Rastgele Değişkenlerin Özellikleri

a ve b sabitse

- $E[aX + b] = aE[X] + b$
- $a = 0$ ise $E[b] = b$
- $b = 0$ ise $E[aX] = aE[X]$

$(n \geq 1)$ olmak üzere $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$

n adet sürekli rastgele değişkenin toplamlarının beklentisini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$E[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + \cdots + E[X_n]$

Sürekli Rastgele Değişkenin Varyansı

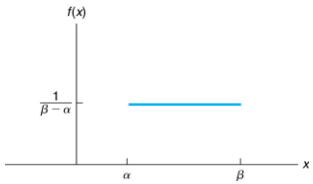
$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$

$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Düzgün Rastgele Değişken

Bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ise bu rastgele değişkene $[\alpha, \beta]$ aralığında düzgün dağılmıştır denir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & diger\ durumlarda \end{cases}$$

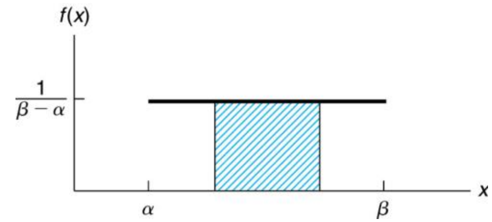


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha} dx = 1 \rightarrow \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} dx = 1$$

Düzgün Rastgele Değişken

$[\alpha, \beta]$ aralığının bir $[a, b]$ alt aralığı için

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_a^b dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$$



Örnek 4

Bir X rastgele değişkeni $[0,10]$ aralığında düzgün dağılmış olsun. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

A) $P(X > 4) =?$

B) $P(2 < X < 7) =?$

C) $P(X < 7) =?$

Örnek 4

Bir X rastgele değişkeni $[0,10]$ aralığında düzgün dağılmış olsun. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

A) $P(X > 4) =?$

$\alpha = 0, \beta = 10$

$$P(X > 4) = P(4 < X < 10) = \frac{1}{10-0} \int_4^{10} dx = \frac{10-4}{10-0} = \frac{6}{10}$$

Örnek 4

Bir X rastgele değişkeni $[0,10]$ aralığında düzgün dağılmış olsun. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

B) $P(2 < X < 7) =?$

$\alpha = 0, \beta = 10$

$P(2 < X < 7) = \frac{1}{10-0}\int_2^7 dx = \frac{7-2}{10-0} = \frac{5}{10}$

Örnek 4

Bir X rastgele değişkeni $[0,10]$ aralığında düzgün dağılmış olsun. Aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

C) $P(X < 7) =?$

$\alpha = 0, \beta = 10$

$P(X < 7) = P(0 < X < 7) = \frac{1}{10-0}\int_0^7 dx = \frac{7-0}{10-0} = \frac{7}{10}$

Örnek 5

Belli bir hattın otobüsleri, belli bir durağa sabah 07:00'den itibaren 15 dakikada bir varmaktadır. Örneğin 07:00, 07:15, 07:30, 07:45, 08:00 gibi. Bir yolcunun durağa saat 7 ile 07:30 arasında düzgün dağılmış bir zamanda vardığı varsayılsın.

A) Otobüs için 5 dakikadan az beklemesi olasılığını hesaplayın

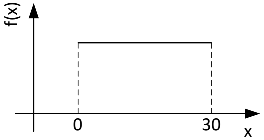
B) Otobüs için en az 12 dakika beklemesi olasılığını hesaplayın

Örnek 5

Belli bir hattın otobüsleri, belli bir durağa sabah 07:00'den itibaren 15 dakikada bir varmaktadır. Örneğin 07:00, 07:15, 07:30, 07:45, 08:00 gibi. Bir yolcunun durağa saat 7 ile 07:30 arasında düzgün dağılmış bir zamanda vardığı varsayılsın.

A) Otobüs için 5 dakikadan az beklemesi olasılığını hesaplayın

B) Otobüs için en az 12 dakika beklemesi olasılığını hesaplayın

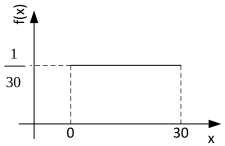


Örnek 5

Belli bir hattın otobüsleri, belli bir durağa sabah 07:00'den itibaren 15 dakikada bir varmaktadır. Örneğin 07:00, 07:15, 07:30, 07:45, 08:00 gibi. Bir yolcunun durağa saat 7 ile 07:30 arasında düzgün dağılmış bir zamanda vardığı varsayılsın.

A) Otobüs için 5 dakikadan az beklemesi olasılığını hesaplayın

B) Otobüs için en az 12 dakika beklemesi olasılığını hesaplayın

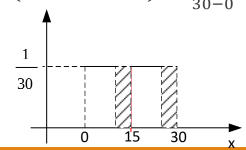


Örnek 5

A) Otobüs için 5 dakikadan az beklemesi olasılığını hesaplayın

X, dakika olarak yolcunun 7'den sonra durağa varış zamanını göstersin. X, (0,30) aralığında düzgün bir rastgele değişkendir. Bu durumda 07:10-07:15 arasında veya 07:25-07:30 arasında durağa vardığında 5 dakikadan az bekler.

$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \frac{15-10}{30-0} + \frac{30-25}{30-0} = \frac{1}{3}$

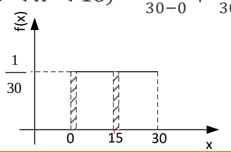


Örnek 5

B) Otobüs için en az 12 dakika beklemesi olasılığını hesaplayın

X, dakika olarak yolcunun 7'den sonra durağa varış zamanını göstersin. X, (0,30) aralığında düzgün bir rastgele değişkendir. Bu durumda 07:00-07:03 arasında veya 07:15-07:18 arasında durağa vardığında en az 12 dakika bekler.

$P(0 < X < 3) + P(15 < X < 18) = \frac{3-0}{30-0} + \frac{18-15}{30-0} = \frac{1}{5}$



Düzgün Rastgele Değişken

Düzgün rastgele değişkenin beklentisi, ikinci momenti ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} x\frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$E[X^2] = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$

$Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

Örnek 6

Bir yarı iletken diyot içindeki akım sıklıkla Shockley denklemi ile ölçülür.

$I = I_0(e^{aV} - 1)$

V, diyottan geçen gerilim

I_0, ters akım

a, sabit

I, diyot üzerinde elde edilen akım

$a = 5, I_0 = 10^{-6}$ ve V, $(1,3)$ aralığında düzgün dağıldığında $E[I]$'yı hesaplayınız.

Örnek 6

$I = I_0(e^{aV} - 1)$

$E[I] = E[I_0(e^{aV} - 1)] = I_0E[(e^{aV} - 1)] = I_0(E[e^{aV}] - 1)$

$E[I] = I_0E[e^{aV}] - I_0 = 10^{-6}E[e^{5V}] - 10^{-6}$

$E[I] = 10^{-6}\int_1^3 e^{5x}\frac{1}{3-1}dx - 10^{-6} = 10^{-7}(e^{15} - e^5) - 10^{-6}$

$E[I] \approx 0{,}3269$

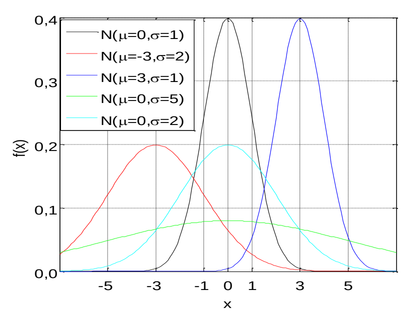
Normal (Gaussian) Rastgele Değişken

Bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ise bu rastgele değişkene μ ve σ^2 parametreleri ile normal dağılmıştır denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir.

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

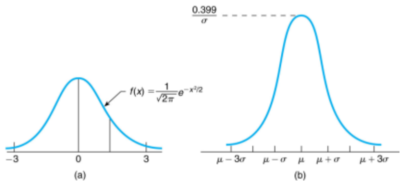
$f(x)$ fonksiyonu, μ etrafında simetrik olan ve $x = \mu$ olduğunda $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}399}{\sigma}$ maksimum değerine ulaşan çan biçimli bir eğridir.

Normal (Gaussian) Rastgele Değişken



Normal Rastgele Değişken

Olasılık yoğunluk fonksiyonu altında kalan alan olasılık bilgisi verir.



$$P(X > x_1) = \int_{x_1}^{+\infty} f(x)dx$$

$$P(X < x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)dx$$

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Normal Rastgele Değişken

Normal dağılım 1773'de Fransız matematikçi Abraham De Moivre tarafından ortaya atılmıştır.

n binom parametresi büyük olduğunda bu olasılıklara yakınsamak için kullanılmıştır.

Bu yakınsama daha sonra başta Laplace olmak üzere birçok matematikçi tarafından geliştirilerek Merkezi Limit Teoremi oluşturulmuştur.

Pratikte bir çok rastgele olayın en azından yaklaşık olarak normal dağılımı sağladığı görülmüştür.

Normal Rastgele Değişken

Bir kişinin boyu

Gaz içerisindeki herhangi bir molekülün herhangi bir doğrultudaki hızı

Fiziksel bir niceliği ölçerken yapılan hatalar

Normal Rastgele Değişken

μ ve σ^2 parametreleri ile normal dağılan bir X rastgele değişkenin beklentisi ve varyansı aşağıdaki gibidir.

$E[X] = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

a ve b sabit, $b \neq 0$ ve $Y = a + bX$ ise

$E[Y] = E[a + bX] = a + bE[X] = a + b\mu$

$Var(Y) = Var(a + bX) = b^2Var(X) = b^2\sigma^2$

Standart Normal Rastgele Değişken

X, parametreleri μ ve σ^2 olan bir normal dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.

Bu durumda, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ rastgele değişkeni 0 ortalamalı ve 1 varyanslı bir normal dağılıma sahiptir.

Z rastgele değişkenine, standart veya birim normal dağılıma sahiptir denir.

Bu rastgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$

Standart Normal Rastgele Değişken

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$

$\Phi(x)$'in negatif olamayan x için alabileceği değerler, hazır tablolarda verilir.

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

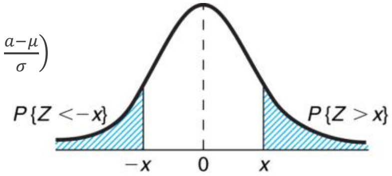
Standart Normal Rastgele Değişken

Bu durumda, X rastgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$F_X(a) = P(X \leq a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$F_X(a) = P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$F_X(a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$



Bu aşamadan sonra $\Phi(x)$'in değeri tablodan bulunur.

Standart normal dağılım tablosu tablo başlıklarında verilen değerlerden küçük olma olasılıklarını verir.

Standart Normal Rastgele Değişken

$a < b$ için

$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$

$P(a < X < b) = P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Standart Normal Rastgele Değişken

EK: Standart Normal Dağılım Tablosu

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240

$P(Z < z)$ olasılığı okunur.

$z =$ Başlık sütun değeri + Başlık satır değeri

Standart Normal Rastgele Değişken

: Başlık sütun değeri + Başlık satır değeri

: + = 0,53

$z =$ Başlık sütun değeri + Başlık satır değeri

$z = \boxed{0{,}5} + \boxed{0{,}03} = 0{,}53$

Standart Normal Rastgele Değişken

EK: Standart Normal Dağılım Tablosu

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240

$z = \boxed{0{,}5} + \boxed{0{,}03} = 0{,}53$

$P(Z < 0{,}53) = \boxed{0{,}70194}$

Örnek 7

X, $\mu = 3$ ortalamalı ve $\sigma^2 = 16$ varyanslı bir normal rastgele değişken olsun.

A) $P(X < 11) =?$

B) $P(X > -1) =?$

C) $P(2 < X < 7) =?$

Örnek 7

X, $\mu = 3$ ortalamalı ve $\sigma^2 = 16$ varyanslı bir normal rastgele değişken olsun.

A) $P(X < 11) =?$

$P(X < 11) = P\left(\frac{X-3}{4} < \frac{11-3}{4}\right) = P\left(Z < \frac{8}{4}\right) = P(Z < 2) = \Phi(2)$

$\Phi(2) = 0{,}9772$

Örnek 7

X, $\mu = 3$ ortalamalı ve $\sigma^2 = 16$ varyanslı bir normal rastgele değişken olsun.

B) $P(X > -1) =?$

$P(X > -1) = P\left(\frac{X-3}{4} > \frac{-1-3}{4}\right) = P\left(Z > \frac{-4}{4}\right)$

$P(X > -1) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1)$

$\Phi(1) = 0{,}8413$

Örnek 7

X, $\mu = 3$ ortalamalı ve $\sigma^2 = 16$ varyanslı bir normal rastgele değişken olsun.

C) $P(2 < X < 7) =?$

$P(2 < X < 7) = P\left(\frac{2-3}{4} < \frac{X-3}{4} < \frac{7-3}{4}\right) = P\left(\frac{-1}{4} < Z < \frac{4}{4}\right)$

$P(2 < X < 7) = P(Z < 1) - P(Z < -0{,}25) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}25)$

$P(2 < X < 7) = \Phi(1) - \big(1 - \Phi(0{,}25)\big) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}5987$

$P(2 < X < 7) = 0{,}4400$

Örnek 8

Bir bilgisayar sisteminde iki silikon yongadan birinin kullanılması düşünülüyor. Yongalardan birinin ömrü 20K saat ortalamalı, 5K saat standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Diğer yonganın ömrü 22K saat ortalamalı, 1K standart sapmalı normal dağılıma sahiptir.

A) Hedef ömür 20K saat ise hangi yonga tercih edilmelidir?

B) Hedef ömür 24K saat ise hangi yonga tercih edilmelidir?

Örnek 8

Bir bilgisayar sisteminde iki silikon yongadan birinin kullanılması düşünülüyor. Yongalardan birinin ömrü 20K saat ortalamalı, 5K saat standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Diğer yonganın ömrü 22K saat ortalamalı, 1K standart sapmalı normal dağılıma sahiptir.

A) Hedef ömür 20K saat ise hangi yonga tercih edilmelidir?

$X_1 \sim N(20{,}25)$

$X_2 \sim N(22{,}1)$

$P(X_1 > 20)$

$P(X_2 > 20)$

Örnek 8

Bir bilgisayar sisteminde iki silikon yongadan birinin kullanılması düşünülüyor. Yongalardan birincisinin ömrü 20K saat ortalama, 5K saat standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. İkinci yonga 22K saat ortalama, 1K standart sapmalıdır.

A) Hedef ömür 20K saat ise hangi yonga tercih edilir.

$X_1 \sim N(20{,}25)$

$X_2 \sim N(22{,}1)$

$P(X_1 > 20) = P\left(Z > \frac{20-20}{5}\right) = P(Z > 0) = 0{,}5$

$P(X_2 > 20) = P\left(Z > \frac{20-22}{1}\right) = P(Z > -2) = 0{,}9772$ ✓

Örnek 8

Bir bilgisayar sisteminde iki silikon yongadan birinin kullanılması düşünülüyor. Yongalardan birinin ömrü 20K saat ortalama, 5K saat standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Diğer yonga 22K saat ortalama, 1K standart sapmalıdır.

B) Hedef ömür 24K saat ise hangi yonga tercih edilmelidir?

$X_1 \sim N(20{,}25)$

$X_2 \sim N(22{,}1)$

$P(X_1 > 24)$

$P(X_2 > 24)$

Örnek 8

Bir bilgisayar sisteminde iki silikon yongadan birinin kullanılması düşünülüyor. Yongalardan birinin ömrü 20K saat ortalama, 5K saat standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Diğer yonga 22K saat ortalama, 1K standart sapmalıdır.

B) Hedef ömür 24K saat ise hangi yonga tercih edilmelidir?

$X_1 \sim N(20{,}25)$

$X_2 \sim N(22{,}1)$

$P(X_1 > 24) = P\left(Z > \frac{24-20}{5}\right) = P\left(Z > \frac{4}{5}\right) = 0{,}212$ ✓

$P(X_2 > 24) = P\left(Z > \frac{24-22}{1}\right) = P(Z > 2) = 0{,}023$

Örnek 9

Bir sınavdaki sınıf ortalaması 74 ve standart sapma 7'dir. Sınıfın %12'si A almışsa A alanların alt limiti nedir?

Örnek 9

Bir sınavdaki sınıf ortalaması 74 ve standart sapma 7'dir. Sınıfın %12'si A almışsa A alanların alt limiti nedir?

$P(Z > z) = 0{,}12$

Örnek 9

Bir sınavdaki sınıf ortalaması 74 ve standart sapma 7'dir. Sınıfın %12'si A almışsa A alanların alt limiti nedir?

$P(Z > z) = 0{,}12 \implies z = 1{,}18$

$\frac{x-74}{7} = 1{,}18$

$x = 7 \times 1{,}18 + 74 = 82{,}26$

Örnek 10

Bir motorun ömrü ortalama 10 yıl, standart sapması 2 yıl olan normal dağılımla modelleniyor. Üretici garanti süresinde bozulan ürünleri ücretsiz değiştiriyor. Motorların yalnızca %3'ü değiştirilmek isteniyorsa garanti süresi ne kadar olmalıdır?

Örnek 10

Bir motorun ömrü ortalama 10 yıl, standart sapması 2 yıl olan normal dağılımla modelleniyor. Üretici garanti süresinde bozulan ürünleri ücretsiz değiştiriyor. Motorların yalnızca %3'ü değiştirilmek isteniyorsa garanti süresi ne kadar olmalıdır?

$P(Z < z) = 0{,}03$

Örnek 10

Bir motorun ömrü ortalama 10 yıl, standart sapması 2 yıl olan normal dağılımla modelleniyor. Üretici garanti süresinde bozulan ürünleri ücretsiz değiştiriyor. Motorların yalnızca %3'ü değiştirilmek isteniyorsa garanti süresi ne kadar olmalıdır?

$P(Z < z) = 0{,}03 \implies z = -1{,}88$

$x = 2 \times (-1{,}88) + 10 = 6{,}24$ yıl