

# IST108

## OLASILIK VE İSTATİSTİK

### GİRİŞ

### İçerik

Olasılık  
İstatistik  
Olasılık ve İstatistiğin Kullanım Alanı  
Örnek Uzayı ve Olay  
Tekrarlanabilir Deney  
Olay ve Rastgele Değişken  
Temel Olasılık Bilgileri  
Saymanın İlkeleri

07.03.2018

2

### Olasılık

Bir kişi şunu söylesin: “Bir bölgede önümüzdeki bir yılda deprem olma olasılığı %10’dur.” Bunu iki şekilde anlayabiliriz.

- Kişisel, öznel yorum
  - Kişi ilgili bölgede deprem olmayacağına daha çok inanmaktadır.
  - Tecrübeye dayalı kanaat bildirir.
- Frekans yorumu
  - Yapmış olduğu çalışmalar ve deneyler sonucunda ilgili bölgede deprem olma olasılığının %10 olduğunu hesaplamıştır.
  - Olasılık, deney sonuçlarının bir özelliğidir.
  - Bilim insanları kullanır.

07.03.2018

3

### Olasılık

**Olasılık**, sonuçlarını önceden bilemediğimiz olayların gerçekleşip gerçekleşmeme durumları hakkında çıkarım yapmamıza yardımcı olan matematiksel kurallarla ilgili bilim dalıdır.

07.03.2018

4

## İstatistik

**İstatistik**, verileri kullanarak bilgi edinme işidir.

İstatistik temelde şu konular ile ilgilenir:

- Verilerin toplanması
- Verilerin düzenlenmesi ve betimlenmesi
- Verilerin analizi

07.03.2018

5

## Olasılık ve İstatistiğin Kullanım Alanı

Sosyoloji

Ekonomi

Eğitim

Spor

Tıp

Mühendislik

07.03.2018

6

## Olasılık ve İstatistiğin Kullanım Alanı

Yazılım testleri

Görüntü işleme

Bilgisayar grafikleri

Veri madenciliği

Programlama dilleri

Bilgisayar ağları

Büyük veri

07.03.2018

7

## Örnek Uzayı ve Olay

Doğacak bir çocuğun cinsiyetini araştıran bir deney düşünelim.

Doğacak çocuğun cinsiyeti kız veya erkek olabilir.

$$S = \{kız, erkek\}$$



**Örnek Uzayı:** Bir deneyin bütün muhtemel sonuçlarını içeren küme.

Örnek uzayı,  $S$  ile gösterilir.

07.03.2018

8

## Örnek Uzayı ve Olay

$$E = \{kız\}$$



Örnek uzayının her bir alt kümesine bir **olay** denir.

07.03.2018

9

## Örnek Uzayı ve Olay

Yukarıdaki örnekte  $E$ , bir olaydır.

Benzer şekilde  $F = \{erkek\}$  kümesi de bir olaydır.

Bir olayın meydana gelme **olasılığı**  $P(F) = \frac{\eta_F}{\eta_S}$

Olasılık,  $P(Olay)$  ile gösterilir.

Doğacak çocuğun kız olması olasılığı nedir?

- $E = \{kız\}$  kümesinde 1 adet eleman vardır.
- Örnek uzayında 2 adet eleman vardır.
- $P(E) = \frac{\eta_E}{\eta_S} = \frac{1}{2} = 0,5 = \%50$

07.03.2018

10

## Örnek Uzayı ve Olay

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

07.03.2018

11

## Örnek Uzayı ve Olay

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

Bu yarışın muhtemel bütün sonuçlarını içeren örnek uzayı aşağıdaki gibidir.

$$S = \{(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)\}$$

07.03.2018

12

## Örnek Uzayı ve Olay

3 koşucunun yarıştığı bir yarış düşünelim. Koşucuların her birisi 1, 2 ve 3 numaraları ile temsil edilsin. 3 numaralı koşucunun yarışı kazanma olasılığı nedir?

3 numaralı koşucunun yarışı kazandığı olayı temsil eden alt küme aşağıdaki gibidir.

$$F = \{(3,1,2), (3,2,1)\}$$

$$P(F) = \frac{2}{6} \cong 0,333 \cong \%33,3$$

07.03.2018

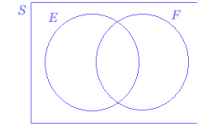
13

## Örnek Uzayı ve Olay

Örnek uzayı ve olaylar Venn diyagramları ile gösterilebilirler.

Aşağıdaki Venn diyagramında  $S$  örnek uzayı temsil eder.

$E$  ve  $F$  de olayları temsil eder.



07.03.2018

14

## Örnek Uzayı ve Olay

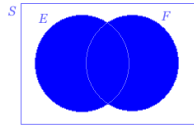
$E$  ile  $F$  kümelerinin birleşimi,  $E$  veya  $F$  olayı olarak adlandırılır.

$E$  veya  $F$  olaylarından herhangi birisi gerçekleştiğinde

$E$  veya  $F$  olayı gerçekleşir.

$E$  veya  $F$  olayı  $E \cup F$  olarak da gösterilir.

$$P(E \text{ veya } F) = P(E \cup F)$$



07.03.2018

15

## Örnek Uzayı ve Olay

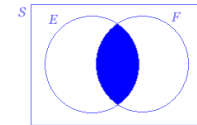
$E$  ile  $F$  kümelerinin kesişimi,  $E$  ve  $F$  olayı olarak adlandırılır.

$E$  ve  $F$  olaylarının ikisi de gerçekleştiğinde (aynı anda)

$E$  ve  $F$  olayı gerçekleşir.

$E$  ve  $F$  olayı  $E \cap F$  olarak veya  $EF$  olarak da gösterilir.

$$P(E \text{ ve } F) = P(E \cap F) = P(EF)$$



07.03.2018

16

## Örnek Uzayı ve Olay

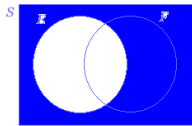
$E$  kümesinin tümleyeni,  $E'$  olayı olarak adlandırılır.

$E'$  olayı,  $E$  olayının meydana gelmemesi olayıdır.

$E'$  olayı  $\bar{E}$  olarak veya  $E^c$  olarak da gösterilir.

$$P(E') = P(\bar{E}) = P(E^c)$$

$$P(E') = 1 - P(E)$$



07.03.2018

17

## Tekrarlanabilir Deney

Gerçek hayatta karşılaştığımız durumlar genellikle karmaşık ve büyüktür.

Bu durumlarda örnek uzayının ve ilgilendiğimiz olayların nokta sayısını (eleman sayısını) hesaplayamayabiliriz.

Bundan dolayı aynı şartlar altında tekrar edebileceğimiz deneyler tasarlayarak, aynı deneyi aynı şartlarda mümkün olduğunca çok tekrar eder (uzun koşumlu) ve sonuçlarını kaydederiz.

İlgilendiğimiz olayın gerçekleştiği deneylerin sayısını bütün deneylerin sayısına bölerek olasılık hesaplarız.

Diğer bir deyişle yaklaşım yaparız.

07.03.2018

18

## Olay ve Rastgele Değişken

Kırmızı ve mavi renkte iki zarın atıldığı bir deney düşünelim.

Kırmızı zarın üstte gelen sayısı  $K$  harfi ile gösterilsin.

Mavi zarın üstte gelen sayısı  $M$  harfi ile gösterilsin.

$K = 3$  bir olaydır. Kırmızı zarın üstte gelen sayısının 3 olması olayı.

$K + M = 4$  bir olaydır. Kırmızı ve mavi zarların üstte gelen sayılarının toplamının 4 olması olayı.

07.03.2018

19

## Olay ve Rastgele Değişken

Örnek uzayın elemanlarına karşılık gelen, sayısal değerlere sahip ilgilendiğimiz niceliklere **rastgele değişken** denir.

Bir rastgele değişkenin değeri, deneyin sonucu tarafından belirlenir.

Yukarıdaki  $K$  ve  $M$  değişkenleri birer rastgele değişkendir.

Rastgele değişkenlerin fonksiyonları da rastgele değişkendir.

• Örneğin  $K, K + M, K - M, \cos(M), 3K$  birer rastgele değişkendir.

$P(K + M)$  bir anlam ifade etmez.

Rastgele değişkenin belirli bir değere sahip olması olasılığı ilişkili olduğu örnek uzay elemanlarının olasılığına karşılık gelir.

$P(K + M = 4)$  anlamlıdır.  $K + M$  rastgele değişkeninin 4'e eşit olma olasılığını ifade eder.

07.03.2018

20

## Temel Olasılık Bilgileri

$P(E)$  olasılığı,  $P[E]$  olarak veya  $P\{E\}$  olarak da gösterilebilir.

Olasılık 0 ile 1 arasında değer alır.  $0 \leq P(E) \leq 1$

F olayı E olayını kapsıyorsa ( $E \subset F$  ve  $E \neq F$  ise)  $P(F) > P(E)$

$P(A \text{ veya } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ve } B)$

$EF = FE$ ,  $E \cup F = F \cup E$  Değişme kuralı

$(EF)G = E(FG)$ ,  $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$  Birleşme kuralı

07.03.2018

21

## Temel Olasılık Bilgileri

$EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$ ,  $(E \cup F)G = EG \cup FG$  Dağılma kuralı

$P(S) = 1$

$P(E) = 1 - P(E')$

De Morgan kuralı

◦  $(E \cup F)' = E'F'$

◦  $(EF)' = E' \cup F'$

07.03.2018

22

## Örnek 1

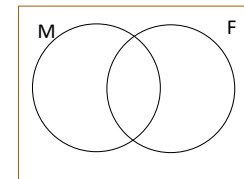
Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

07.03.2018

23

## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

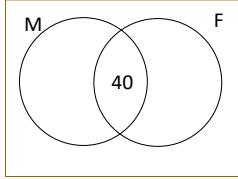


07.03.2018

24

## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

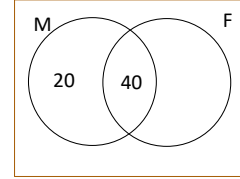


07.03.2018

25

## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

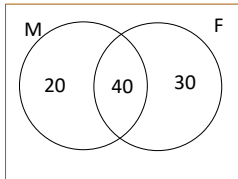


07.03.2018

26

## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?

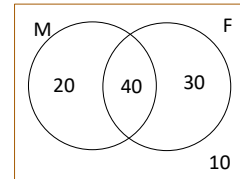


07.03.2018

27

## Örnek 1

Bir sınıftaki öğrencilerin %60'ı matematikte, %70'i fizikte ve %40'ı hem matematikte hem de fizikte iyidir. Bu durumda rastgele seçilen bir öğrencinin her ikisinden de kötü olma ihtimali nedir?



07.03.2018

28

## Örnek 2

6 kenarlı bir zarda çift gelme olasılığı tek gelmesi olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

07.03.2018

29

## Örnek 2

6 kenarlı bir zarda çift gelme olasılığı tek gelmesi olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

$T$  : Tek gelme olayı ve  $\Ç$ : Çift gelme olayı olsun.

$$P(T) = a \quad P(\Ç) = 3a$$

3 tek ve 3 çift yüz var.

$$3a + 9a = 1$$

$$a = \frac{1}{12}$$

07.03.2018

30

## Örnek 2

6 kenarlı bir zarda çift gelme olasılığı tek gelmesi olasılığının üç katı ise 1, 2 veya 3 gelme olasılığı nedir?

$$P(\{1,2,3\}) = P(1) + P(2) + P(3) = P(T) + P(\Ç) + P(T)$$

$$P(\{1,2,3\}) = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

07.03.2018

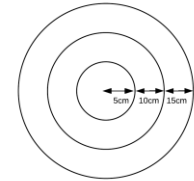
31

## Örnek 3

Bir dart oyununda 30cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

A) Merkeze en yakın bölmeye atma olasılığı nedir?

B) Ara bölmeye atma olasılığı nedir?



07.03.2018

32



### Örnek 3

Bir dart oyununda 30cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

A) Merkeze en yakın bölmeye atma olasılığı nedir?

$E$ , merkeze en yakın bölmeye atma olayı olsun.

$$P(E) = \frac{\text{Bölmenin Alanı}}{\text{Toplam Alan}} = \frac{\pi 5^2}{\pi 30^2} = \frac{25}{900} = \frac{1}{36}$$

07.03.2018

33

### Örnek 3

Bir dart oyununda 30cm yarıçapındaki hedef tahtası merkezden itibaren 5, 10 ve 15cm aralıklarla 3 bölmeye ayrılmıştır. Tahta üzerinde herhangi bir yere atma olasılığı eşitse;

B) Ara bölmeye atma olasılığı nedir?

$F$ , ara bölmeye atma olayı olsun.

$$P(F) = \frac{\text{Ara Bölmenin Alanı}}{\text{Toplam Alan}} = \frac{\pi 15^2 - \pi 5^2}{\pi 30^2} = \frac{200}{900} = \frac{2}{9}$$

07.03.2018

34

### Saymanın İlkeleri

Permütasyonu bilmeliyiz.

$n$  adet farklı eleman için  $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  farklı permütasyon vardır.

Yani bu  $n$  adet eleman  $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$  kadar farklı şekilde sıralanabilir.

07.03.2018

35

### Saymanın İlkeleri

$n$  tane elemanın içinde birbiriyle aynı elemanlar olduğunu düşünelim.

Örneğin  $n_1$  adet eleman birbiri ile aynı,  $n_2$  adet eleman birbiri ile aynı,  $n_3$  adet eleman birbiri ile aynı, ..., ve  $n_r$  adet eleman birbiri ile aynı olsun. Bu durumda yapılabilecek sıralama sayısı aşağıdaki gibidir.

$$\frac{n!}{(n_1! n_2! \dots n_r!)}$$

07.03.2018

36

## Örnek 4

6 beyaz ve 5 siyah top içeren bir kaptan rastgele 2 top çekilsin. Çekilen toplardan birinin beyaz ve diğerinin siyah olma ihtimali nedir?

07.03.2018

37

## Örnek 4

6 beyaz ve 5 siyah top içeren bir kaptan rastgele 2 top çekilsin. Çekilen toplardan birinin beyaz ve diğerinin siyah olma ihtimali nedir?

$$\frac{6}{11} \times \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \times \frac{6}{10} = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}$$

07.03.2018

38

## Örnek 5

Bir kişi, 10 tane kitabını kitaplık rafına dizmek istiyor. Kitapların 4 tanesi olasılık, 3 tanesi matematik, 2 tanesi programlama ve 1 tanesi ise tarih kitabıdır. Aynı konuyla ilgili kitaplar yan yana gelecek şekilde kaç farklı dizilim mümkündür?

07.03.2018

39

## Örnek 5

Bir kişi, 10 tane kitabını kitaplık rafına dizmek istiyor. Kitapların 4 tanesi olasılık, 3 tanesi matematik, 2 tanesi programlama ve 1 tanesi ise tarih kitabıdır. Aynı konuyla ilgili kitaplar yan yana gelecek şekilde kaç farklı dizilim mümkündür?

Kitaplar olasılık, matematik, programlama ve tarih olarak sıralanırsa toplam  $4! \times 3! \times 2! \times 1!$  farklı dizilim olur.

Fakat kitaplar farklı sırada da düzenlenebilir. Bundan dolayı toplam  $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 6912$  farklı dizilim olur.

07.03.2018

40

## Örnek 6

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almamıştır. Bu durumda;

A) Öğrencileri kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

B) Yapılan sıralamalar içerisinde kız öğrencilerin ilk 4 sırada olması olasılığı nedir?

07.03.2018

41

## Örnek 6

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almamıştır. Bu durumda;

A) Öğrencileri kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

Her öğrencinin puanı farklı olduğundan ve toplam 10 öğrenci bulunduğundan dolayı  $10! = 3628800$  farklı sıralama yapılabilir.

07.03.2018

42

## Örnek 6

Olasılık ve İstatistik dersini 4 kız ve 6 erkek öğrenci almaktadır. Bu öğrenciler ara sınav puanlarına göre sıralanmak istenmektedir. Ara sınavdan tüm öğrenciler farklı puanlar almamıştır. Bu durumda;

B) Yapılan sıralamalar içerisinde kız öğrencilerin ilk 4 sırada olması olasılığı nedir?

Kız öğrenciler ilk 4 sırada bulunacak şekilde toplam  $4! \times 6! = 17280$  farklı sıralama yapılabilir.

Bunun olasılığı ise şu şekildedir:  $\frac{4! \times 6!}{10!} = \frac{17280}{3628800} = \frac{1}{210}$

07.03.2018

43

## Saymanın İlkeleri

Kombinasyonu bilmeliyiz.

$n$  adet eleman içeren bir kümeden  $r$  adet eleman içeren gruplar oluşturmak isteyelim.

Kaç farklı grup oluşturabiliriz?

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

07.03.2018

44

## Örnek 7

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa komitenin 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

07.03.2018

45

## Örnek 7

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa komitenin 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

Kurul kaç farklı şekilde oluşturulabilir?  $\rightarrow \binom{15}{5} = \frac{15!}{(15-5)!5!}$

Kadın adaylar içerisinde  $\binom{9}{2}$  farklı ikişer kişilik grup oluşturulabilir.

Kadın adaylar içerisinde  $\binom{6}{3}$  farklı üçer kişilik grup oluşturulabilir.

07.03.2018

46

## Örnek 7

5 kişiden oluşan bir kurul oluşturulacaktır. Bu kurula katılacak kişiler 9 kadın ve 6 erkek aday arasından seçilecektir. Seçimin rastgele yapıldığı varsayılırsa komitenin 2 kadın ve 3 erkekten oluşma olasılığı nedir?

$$\text{Olasılık} = \frac{\binom{9}{2}\binom{6}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

07.03.2018

47

## Örnek 8

Bir basketbol 12 oyuncudan oluşmaktadır. Oyuncular otelde iki kişilik odalarda kalacaklar. Eğer eşleştirme rastgele yapılırsa, oyuncular odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

07.03.2018

48

## Örnek 8

Bir basketbol 12 oyuncudan oluşmaktadır. Oyuncular otelde iki kişilik odalarda kalacaklar. Eğer eşleştirme rastgele yapılırsa, oyuncular odalara kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

12 oyuncu ilk odaya  $\binom{12}{2}$  şekilde yerleştirilebilir. İlk odaya oyuncular yerleştikten sonra kalan 10 oyuncu ikinci odaya  $\binom{10}{2}$  farklı şekilde yerleşebilir. Bu şekilde devam ederse aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{2^6} = 7484400$$