

Okut. Yüksel YURTAY



Sayısal Analiz

Giriş

İletişim :

yyurtay@sakarya.edu.tr

www.cs.sakarya.edu.tr/yyurtay

(264) 295 58 99

Amaç :

Mühendislik problemlerinin bilgisayar ortamında çözümünü mümkün kılacak sayısal çözüm metot ve algoritmalarının öğretilmesi.

Öğrenme Çıktısı :

1. Teorik derslerde el ile yapılan tüm hesaplamaların bilgisayar ortamına nasıl taşınabileceği ve bu problemlerin bilgisayarlara nasıl çözdürülebileceği hakkında beceriler kazandırmak.
2. Sayısal çözüm yaklaşımlarının mutlaka bir algoritma yapısına dayandığının anlaşılması.
3. Bilgisayar ve yazılım dillerinin mühendislik hayatında nasıl bir fonksiyon icra ettiğinin anlaşılması.

Ders İçeriđi:

1. Sayısal analize giriş, sayısal yöntemler, algoritma mantığı
2. Algoritma kurulması ve algoritma alt birimlerinin tanıtılması
3. Matrisler ve matris işlemleri
4. Matrisler ve matris işlemleri
5. Lineer denklem sistemleri çözüm yöntemleri
6. Lineer olmayan denklem sistemleri çözüm yöntemleri
7. Lineer olmayan denklem sistemleri çözüm yöntemleri
8. Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri
9. Eğri uydurma, aradeğer ve dış değer bulma yöntemleri
10. Sayısal integral yöntemleri
11. Sayısal türev yöntemleri
12. Diferansiyel denklemlerin çöz. yöntemleri
13. Diferansiyel denklemlerin çöz. yöntemleri
14. Kompleks sayılar

BSM

1.
Hafta

3.
Sayfa



Değerlendirme Sistemi

| Yarıyıl İçi Çalışmaları | Sayısı | Katkı Payı % |
|-------------------------------|--------|--------------------|
| Ara Sınav | 1 | 80 |
| Kısa Sınav | 2 | 10 |
| Ödev | 1 | 10 |
| TOPLAM | | 100 |
| Yarıyıl içinin Başarıya Oranı | | 50 |
| Finalin Başarıya Oranı | | 50 |
| TOPLAM | | 100 |

BSM

1.
Hafta

4.
Sayfa

Beklenenler


- Bütün derslere gelmeniz ve dersleri dikkatle takip etmeniz,
- Sınıf aktivitelerine katılmanız,
- Ödevlerinizi zamanında yapmanız,
- Bir konuyu iyi anlayamadığınızı düşündüğünüzde bunu hemen paylaşmanız.

BSM

1.
Hafta

5.
Sayfa

Ödevler

- Ev ödevleri
- Her ödev, verilmesini takip eden hafta toplanacaktır.
- Dönemin ilk ve son haftalarında ve arasınnav haftasında ödev verilmeyecektir.
- Ödevler WORD ortamında yazılıp, elektronik ortamda toplanacaktır.
- Ödev gönderileri Öğrenci numarası_haftano şeklinde düzenlenerek gönderilecektir. ( 030110035_Hft01)

BSM

1.
Hafta

6.
Sayfa

Sayısal analize giriş

- Sayısal analiz konusunun sınırları diğer bazı disiplinlerin aksine kesin olarak belirlenmemektedir.
- Sayısal çözümleme ile yapılan işlem verilen sayısal bilgileri belli bir algoritma ile işleyerek sayısal bilgi elde etmektedir.

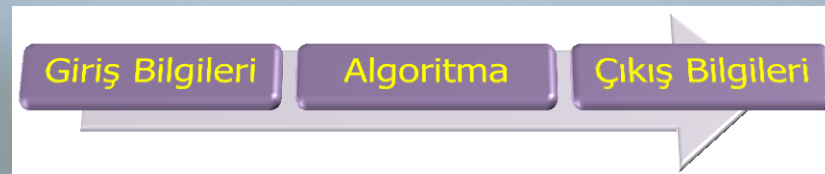
BSM

1.
Hafta

7.
Sayfa

Sayısal analize giriş

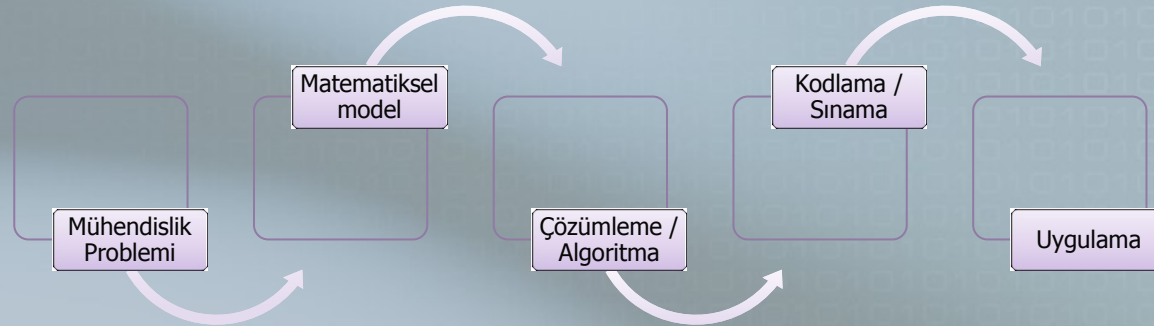
- Sayısal çözüm yöntemleri, matematiksel problemleri elektronik hesaplayıcılar üzerinde çözmek için kullanılan bir yoldur.



- Çözümlerdeki hassasiyet artırıldıkça, işlem yükü artmaktadır bu yük elektronik hesaplayıcılar yardımıyla kolayca aşılabilmektedir.
- Hatalarda sayısal analiz konuları içersinde yer almaktadır.

Sayısal analize giriş

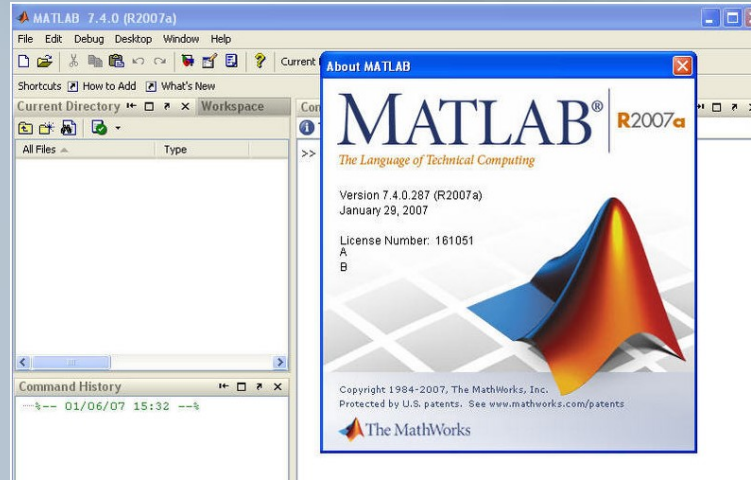
- Bir işlemin veya çözüm yönteminin tekrar tekrar uygulanması işlemi ardışık yaklaşım (iterasyon) olarak bilinir.



- Şüphe yok ki hataları en az olan algoritma verilen problemin çözümü için kullanılacaktır.

Sayısal Analiz Bilimi

- Bu alanındaki çalışmaların sonunda elde edilen veya geliştirilen sayısal yöntemler bilgisayar yardımıyla çok çeşitli mühendislik problemlerinin ve bazı temel bilimlerin çözümünü kolaylaştırır.
- Bilgisayarlarda problemlerin modellenmesi ve çözümleri için genel amaçlı programlama dilleri kullanılabileceği gibi ticari paket programlar, **MatLab**, **MathCAD**, veya **Mathematica** gibi matematiksel işlemler yapmak için geliştirilmiş programlarda kullanılabilir.



BSM

1.
Hafta

10.
Sayfa

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Sayısal hatalar, matematiksel işlemler ve değerlerin yaklaşık kullanımlarından ortaya çıkan farklar olarak tanımlanabilir.

Bu hataların bir kısmı kullanıcılardan, bir kısmı elektronik hesaplayıcılardan , bir kısmı da yazılımlardan kaynaklanır.

Belirli bir ondalıktan sonra gelecek sayılar kestirilemez. Gözlemlenen değer, noktadan sonra dört basamaklı ise beşinci basamak için bir şey söylenemez. Bu durumda gözlemlenen veya ölçülen değerlerin binlerce aritmetik işlemin bulunduğu bir algorithmada kullanılacağı varsayılırsa, her bir işlemde sonra, sonucun daha az doğru olduğu kanısına varabiliriz.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Fiziksel veya sosyal olayların matematiksel olarak çözümlerinde yapılan hatalar genellikle üç ana başlıkta toplanır. Bunlar modelleme hataları, ölçme hataları ve sayısal hatalardır.

- Modelleme hatası bir olayın formüle edilmesi esnasında varsayımlardan kaynaklanan hatalardır.
Örnek olarak serbest düşme problemlerinin modellenmesinde, hava ile cisim arasındaki sürtünme kuvvetinin ihmal edilmesinden dolayı meydana gelen hatalar bu tür hatalar grubuna girer.
- Ölçme hatası, deney ve gözlemede ölçmelerden dolayı meydana gelen hatalardır.
örnekte eğer serbest düşme yapan cismin, düştüğü mesafe veya havada düşerken geçen süre eğer yanlış ölçülürse bu tür hatalar ölçme hatası olarak tanımlanabilir.
- Sayısal hatalar veya diğer bir deyimle modelin çözümlemesinde yapılan hatalardır.

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

Örnek vermek gerekirse,

$$\pi = 3,141592653589793...$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356237...$$

$$2/3 = 0,6666666666...$$

Bu sayılarla işlem yapıldığında hataların büyük olacağı açıktır.

Verilen reel sayı ise ondalık kısmının iki tabanında tam karşılığı olup olmadığı araştırılmalıdır.

BSM

1.
Hafta

13.
Sayfa

HATALAR VE HATALARIN KAYNAKLARI

$(0.125)_{10} = (0.001)_2$ durumunda olduğu gibi (0.125) sayısının iki tabanlı karşılığı (0.001) dir. Dolayısıyla (0.1) reel sayısının iki tabanında tam olarak ifade edilmesi mümkün değildir.

Elektronik hesaplayıcılarda sayılar iki tabanında ancak belirli uzunlukta ifade edilebilmektedir.

Örneğin, reel sayılar için normal hassasiyette 32 bitlik bir yer ayrılan hesaplayıcıda 7 ondalık basamağa, çift hassasiyette ise 64 bitlik yer ayrılır ve buda yaklaşık 15 ondalık basamağa karşılık gelir. Bu nedenle değerler için hesaplayıcılardaki ayrılan yerler veri tipine göre değişmektedir. Buda farklı bir türde hataya neden olabilmektedir.

■ SAYILARIN İFADE ŞEKLİ

Sayılar günlük hayatta onluk sisteme göre işlemler yapılır. Örnek olarak 298 sayısı

$$\begin{aligned} 298 &= 2 * 100 + 9 * 10 + 8 * 1 \\ &= 2 * 10^2 + 9 * 10^1 + 8 * 10^0 \end{aligned}$$

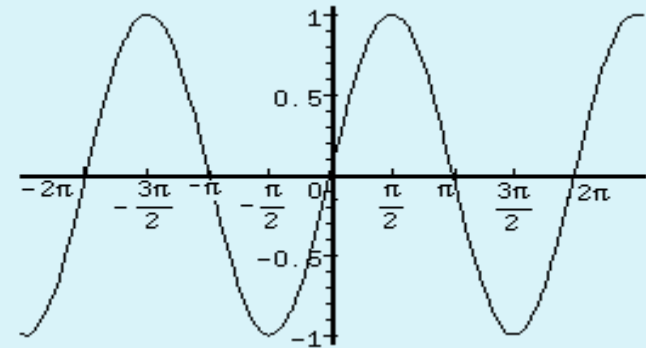
Şeklinde işlemler yapılır. Bunun yanında bazı 12 lik 16 sistemlerde mevcuttur. Bilgisayarlarda ise işler 2 ilk (binary) sistemler üzerine kurulduğu için ikilik sistem kullanılır yani 298 sayısı bilgisayar hafızasında

$$\begin{aligned} 298 &= 1 * 2^8 + 0 * 2^7 + 0 * 2^6 + 1 * 2^5 + 0 * 2^4 + 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 \\ &= 1 * 256 + 0 * 128 + 0 * 64 + 1 * 32 + 0 * 16 + 1 * 8 + 0 * 4 + 1 * 2 + 0 * 1 \\ &= (100101010)_2 \end{aligned}$$

Hatalar

Hata = Gerçek değer-Yaklaşık değer

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



Hesaplama ihmal edilen terimlerin toplamı yapılan kesme hatasına eşit olur.

Mutlak Hata

Analitik olarak bulunan veya doğru olarak kabul edilen değer ile sayısal olarak bulunan değer arasındaki farkın mutlak değeri mutlak hata olarak tanımlanır.

BSM

1.
Hafta

17.
Sayfa

$$\epsilon_{\text{mutlak}} = |f_{\text{gerçek}} - f_{\text{hesaplanan}}|$$

Bir integral işlemini analitik olarak yapmak yerine sayısal olarak hesaplamak için sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu yerine, bu fonksiyonun alanını kolay yoldan bulabilecek biçimde küçük parçacıklara bölünerek sürekli olmayan hale getirilebilir.

Bu durum hatalara neden olur; bu tür hatalara **kesme hatası** denir.

$\sin(x)$ fonksiyonunun değeri yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Fakat $\sin(x)$ fonksiyonunun gerçek değeri bu değildir. Fonksiyonunun gerçek değerini hesaplamak için

$$\sin(x) = p(x) + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

gibi sonsuz bir seri kullanılmalıdır.

Belli sayıda terim kullanılmasından dolayı meydana gelen bu tür hatalara '*kesme hatası*' denir.

Kesme hatalarına ilaveten diğer bir problem bilgisayarların rakamları belli hassasiyetteki büyüklüklerde hafızalarında tutmalarıdır. Aşağıdaki örnek kesme hatasının nasıl oluştuğunu göstermektedir.

Örnek : Asıl fonksiyonda verilen ifadenin açılımını kullanarak $\sin(\pi/7)$ fonksiyonunun değerini hesaplanması.

| | Fonksiyon | Değeri |
|---|---|----------------|
| 1 | $\frac{\pi}{7}$ | = 0.4487989505 |
| 2 | $\frac{\pi}{7} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^3$ | = 0.4337327325 |
| 3 | $\frac{\pi}{7} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^5$ | = 0.4338844648 |
| 4 | $\frac{\pi}{7} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^5 + \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^7$ | = 0.4338837371 |
| 5 | $\frac{\pi}{7} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^3 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^5 + \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^7 - \frac{1}{9!} \left(\frac{\pi}{7}\right)^9$ | = 0.4338837391 |

Bağıl Hata

Gerçek değer ile yaklaşık değerlerin farklarının, gerçek değere oranı olarak tanımlanır.

$$\epsilon_{\text{bağıl}} = \epsilon_{\text{mutlak}} / f_{\text{gerçek}} = \epsilon_{\text{mutlak}} / f_{\text{yaklaşık}}$$

Bağıl hata boyutsuz olduğu için, mutlak hatadan daha anlamlıdır. Ama fonksiyonun gerçek değeri sıfıra eşit olduğunda bağıl hata tanımsız olacağından dolayı her problem için kullanışlı değildir.

Bağıl hata ve yaklaşım hatası 100 ile çarpılarak çoğu zaman hata yüzdesi olarak gösterilir. Yüzde değerlerin negatif çıkmaması için farklar mutlak değer olarak alınabilir.

Yaklaşım Hatası ve Veri Hataları

Gerçek değeri bilinmeyen fakat yaklaşık olarak hesaplanabilen değerlerin ne kadar hata ile birbirlerine yakın bulunduklarını tanımlayan hata türüdür.

Genellikle bir yinelemede (iterasyon) her adımda bir önceki adım sonucu ile olan bağıl hatası olarak da tanımlanır.

$$\epsilon_{\text{yaklaşım}} = (f_{\text{yeni}} - f_{\text{eski}}) / f_{\text{yeni}}$$

Bağıl hata ve yaklaşım hatası 100 ile çarpılarak çoğu zaman hata yüzdesi olarak gösterilir.

İşlemlerde kullanılacak verilerde bulunan hatalara veri hataları diyoruz.

Yaklaşım Hatası ve Veri Hataları

Örnek :

e^x fonksiyonunun seri açılımı $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^{n+1}/(n+1)!$

ile veriliyor. $x=0.5$ değeri için $e^{0.5}=1.648721271$ olduğu bilindiğine göre seri açılımından yararlanarak ilk iki ve üç terim alarak bağıl ve yaklaşım hata yüzdelerini bulunuz?

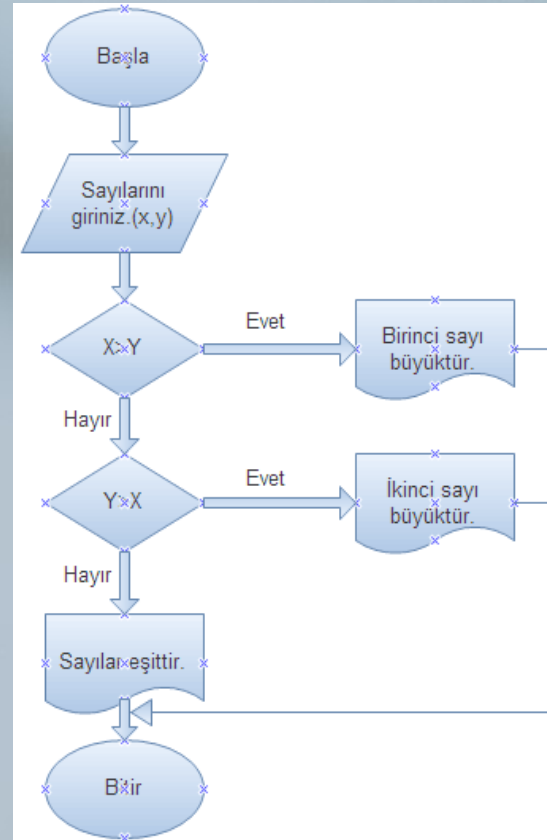
$x = 0.5$ değeri için

ilk iki terim alındığında $e^x = 1.50$ ilk üç terim alındığında $e^x = 1.75$ hesaplamada yapılan bağıl ve yaklaşım hata yüzdeleri sırasıyla,

$$e_{bağıl} = \frac{e^{0.5} - 1.5}{e^{0.5}} \times 100 = \frac{|1.648721271 - 1.5|}{1.648721271} \times 100 = 6.1428$$

$$e_{yaklaşım} = \frac{|1.75 - 1.5|}{1.75} \times 100 = 14.2857$$

Algoritma ve Akış Diyagramları



BSM

1.
Hafta

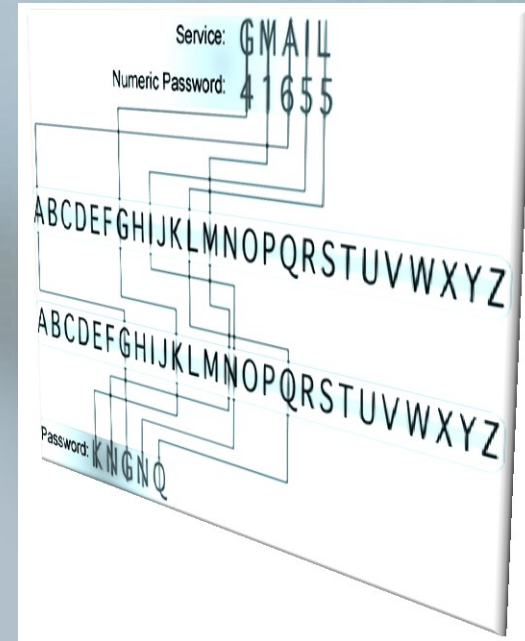
23.
Sayfa

Kaynaklar

Sayısal Analiz S.Akpınar

Sonraki Hafta :

Algoritma Kurulması ...



BSM

1.
Hafta

24.
Sayfa