2.3 Durum değişkenleri yöntemi

Fark denklemiyle modellenen nedensel süzgeçlerin iç değişkenlerinin durumunu belirlemek için durum değişkenleri yaklaşımı kullanılır.

Sistemin tüm durum değişkenleri durum vektörü adı verilen bir vektörle gösterilir.

Durum değişkenleri N nci dereceden fark denklemini N adet birinci dereceden sisteme dönüştürerek elde edilir.

Bu amaçla, geçen haftaki dersimizde anlatmış olduğumuz N nci dereceden fark denklemini gözönüne alalım.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k . x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} b_k . y(n-k)$$

Bu süzgeci birbirine seri bağlanmış iki süzgece ayırabiliriz.

$$\omega(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k . \omega(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k . \omega(n-k)$$

Son verilen iki bağıntı yeniden düzenlenmek suretiyle bir önceki slayttaki fark denklemi elde edilir. $q_1(n)$, $q_2(n)$, … , $q_n(n)$ durum değişkenleri de aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \omega(n-N) \\ q_2(n) &= \omega(n-N+1) \\ &\vdots \\ q_{N-1}(n) &= \omega(n-2) \\ q_N(n) &= \omega(n-1) \end{aligned}$$

Son yazılan denklemlerden durum değişkenleri arasında aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
q_1(n+1) &= \omega(n-N+1) = q_2(n) \\
q_2(n+1) &= \omega(n-N+2) = q_3(n) \\
&\vdots \\
q_{N-1}(n+1) &= \omega(n-1) = q_N(n) \\
q_N(n+1) &= \omega(n) = x(n) - b_1\omega(n-1) - b_2\omega(n-2) - \ldots\ldots - b_N\omega(n-N) \\
&= x(n) - b_1 q_N(n) - b_2 q_{N-1}(n) - \ldots\ldots - b_N q_1(n)
\end{aligned}
$$

Bu denklemleri bir sonraki slaytta görüldüğü gibi matris formunda gösterebiliriz.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n+1) \\ q_N(n+1) \end{bmatrix}}_{q(n+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -b_N & -b_{N-1} & -b_{N-2} & \cdots & -b_2 & -b_1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_{N-1}(n) \\ q_N(n) \end{bmatrix}}_{q(n)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} \cdot x(n)$$

Daha önce verilen denklemler kullanılarak $\omega(n)$ değişkeni yok edilip çıkış için aşağıdaki bağıntı elde edilebilir.

$$y(n) = a_0 . \left[x(n) - \sum_{k=1}^{N} b_k . \omega(n-k) \right] + \sum_{k=1}^{N} a_k . \omega(n-k)$$

$$= a_0 x(n) + \sum_{k=1}^{N} [a_k - a_0 b_k] . \omega(n-k)$$

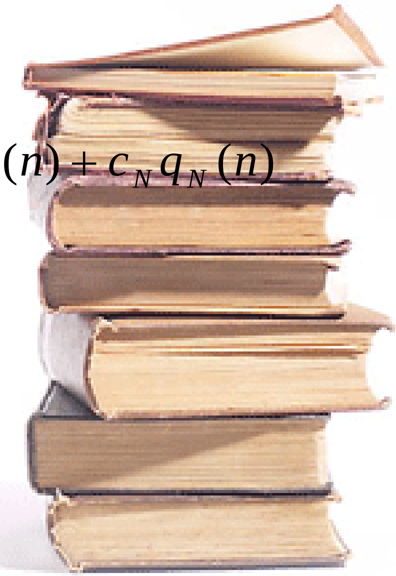
Son denkleme göre aşağıdaki katsayıları tanımlayabiliriz.

$$
\begin{aligned}
c_1 &= a_N - a_0 b_N \\
c_2 &= a_{N-1} - a_0 b_{N-1} \\
&\vdots \\
c_{N-1} &= a_2 - a_0 b_2 \\
c_N &= a_1 - a_0 b_1
\end{aligned}
$$

Bu tanımlamalar kullanılarak çıkış ifadesi için aşağıdaki iki bağıntı yazılabilir.

$$y(n) = a_0 x(n) + c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + c_3 q_3(n) + \ldots\ldots + c_{N-1} q_{N-1}(n) + c_N q_N(n)$$

$$y(n) = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \\ \vdots \\ q_N(n) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \end{bmatrix}}_{d} x(n)$$



Girişine $x(n)$ işareti uygulanan doğrusal bir sistemin çıkışı $y(n)$ olduğuna göre, durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

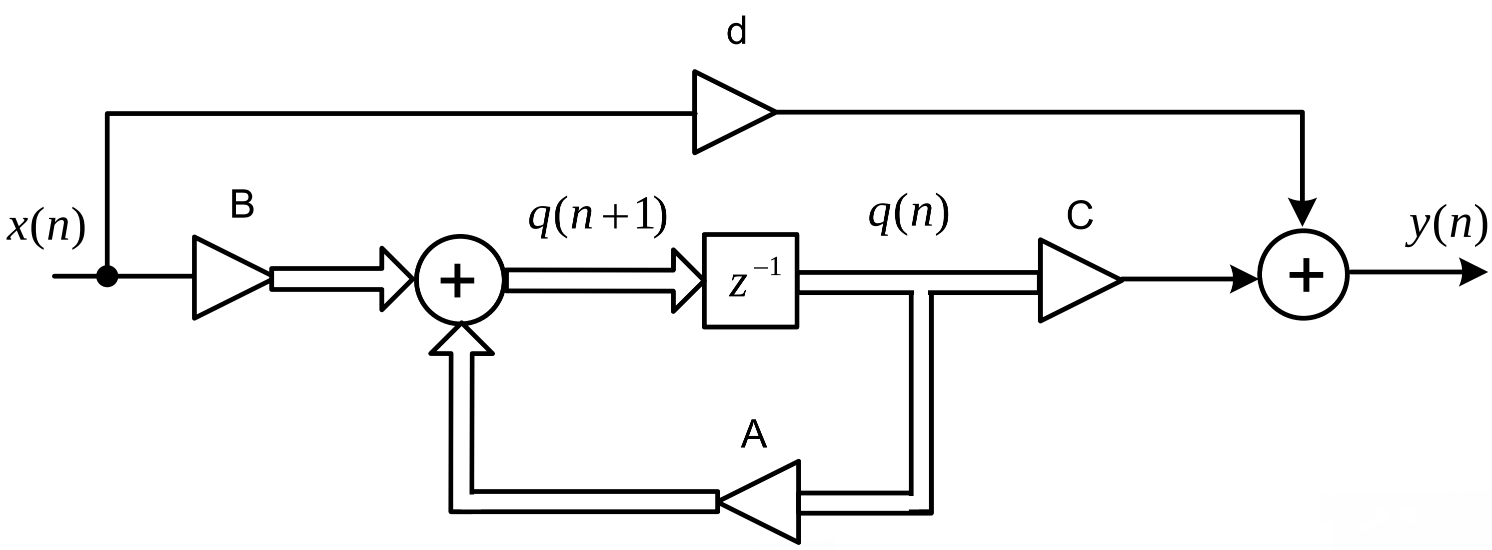
$$q(n+1) = Aq(n) + Bx(n)$$

$$y(n) = Cq(n) + dx(n)$$

A sistem matrisi, B kontrol vektörü, C gözlem vektörü ve d geçiş katsayısı olarak kullanılır. A matrisi N nci dereceden bir kare matristir. B ve C vektörleri N boyutludur. $q(n)$ ise durum değişkenleri içeren durum vektörü olup aşağıdaki gibi verilir.

$$q(n) = \left[q_1(n) \quad q_2(n) \quad \cdots \quad q_N(n)\right]^T$$

Şekil 2.11 de durum değişkenlerine ilişkin blok diyagramı gösterilimi verilmiştir. Burada çift çizgiler vektör işaretleri göstermektedir.



Şekil 2.11 Durum değişkenleri yöntemiyle modellenen süzgecin blok diyagramı

<u>Örnek 2.11(a)</u> Sayısal bir süzgeç aşağıdaki fark denklemiyle tanımlandığında bu süzgeci durum değişkenleri yöntemiyle modelleyiniz.

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2) - y(n-1) + 2y(n-2)$$

Yukarıdaki denklemden $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -2$ olarak belirlendiğinden, bu süzgeç durum değişkenleri yöntemi ile matris formunda aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(n)$$

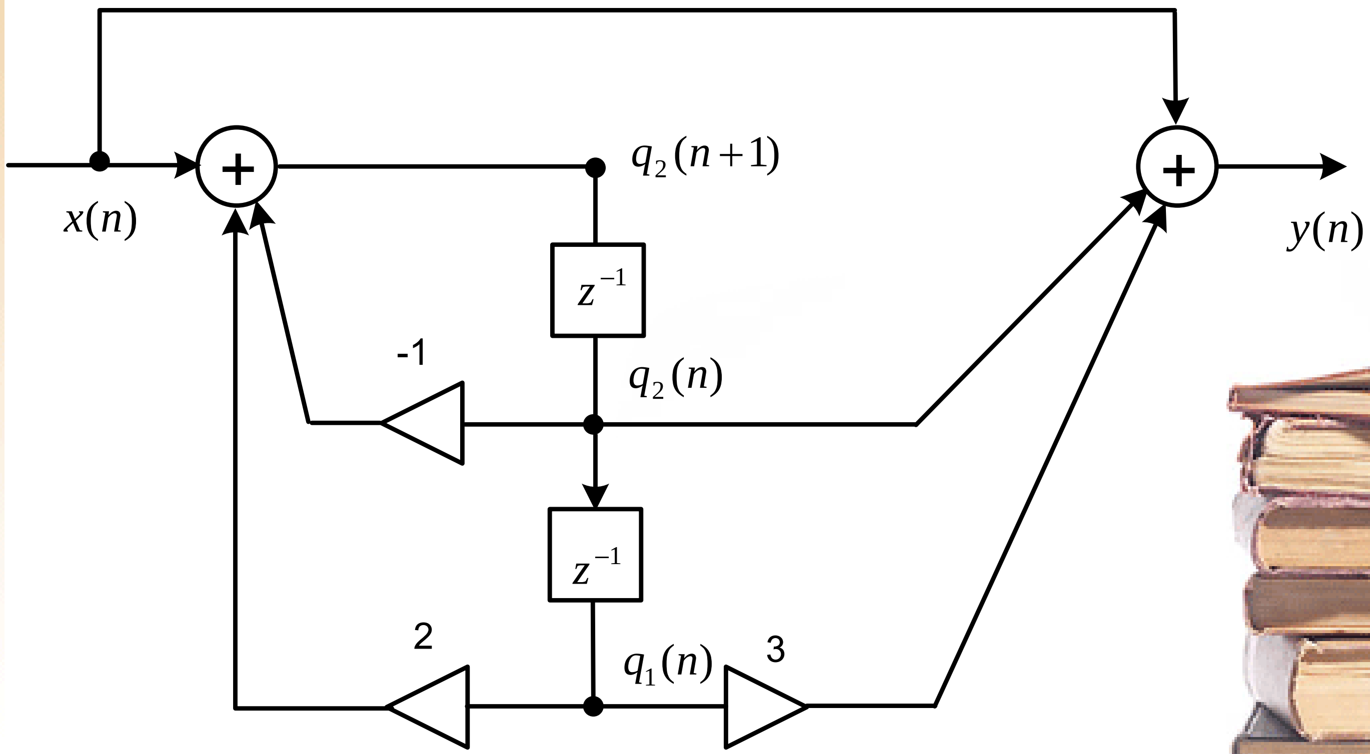
Çıkış ifadesi için ise aşağıdaki katsayılar hesaplanır.

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 1(-2) = 3$$
$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 2 - 1.1 = 1$$

Böylece çıkış bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(n) = [3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + x(n)$$

Son verilen iki matris sayısal süzgecin durum denklemlerini göstermektedir. Bu süzgecin blok diyagramı durum değişkenleri cinsinden şekil 2.12 deki gibi çizilebilir.



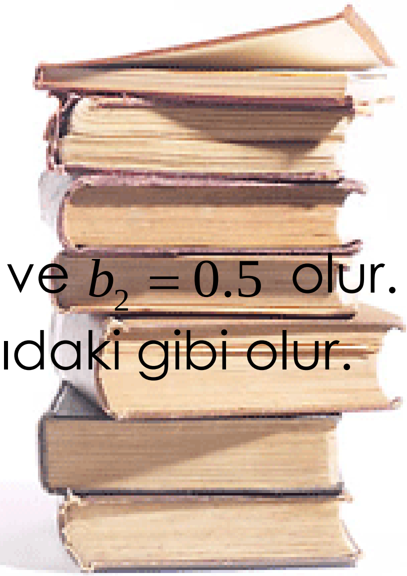
Şekil 2.12 Örnek 2.11 deki sayısal süzgecin durum denklemleri cinsinden blok diyagramı

Örnek 2.11(b) Sayısal bir süzgecin çıkışı ile girişi arasında aşağıda verilen fark denklemi geçerli olduğuna göre bu süzgeci durum değişkenleri yöntemiyle modelleyiniz.

$$y(k+2)-1.5y(k+1)+0.5y(k)=u(k)$$

$k+2=n$ şeklinde bir değişken dönüşümü yaparsak, $k+1=n-1$ ve $k=n-2$ yazabiliriz. Bu durumda denklemimiz aşağıdaki hale gelir.

$$y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n-2)=u(n-2)$$



Bu durumda $a_0=0$, $a_1=0$, $a_2=1$, $b_0=1$, $b_1=-1.5$ ve $b_2=0.5$ olur. Bu katsayılara göre sistemin durum denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(n)$$

$$c_1 = a_2 - a_0 b_2 = 1 - 0 \times (-2) = 1$$

$$c_2 = a_1 - a_0 b_1 = 0 - 0 \times 1 = 0$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix}$$

Aynı sistemi aşağıdaki tanımlamaları yaparak da çözebiliriz. Bu denklem ikinci mertebeden bir fark denklemidir. Sabit katsayılı ikinci mertebeden olan bu fark denklemi aşağıdaki gibi yazılacak olursa iki adet durum denklemi elde edilir.

$$y(k) = q_1(k) \rightarrow y(k+1) = q_1(k+1)$$

$$y(k+1) = q_2(k) = q_1(k+1) \rightarrow y(k+2) = q_2(k+1)$$

Bu tanım eşitliklerini esas denklemde yerine yazıp, ardından da hep birlikte yazacak olursak, durum denklemleri ile çıkış fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$q_1(k+1) = q_2(k)$$

$$q_2(k+1) = -0.5q_1(k) + 1.5q_2(k) + u(k)$$

$$y(k) = q_1(k)$$

O halde lineer sabit katsayılı ikinci mertebeden fark denklemini matris şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix}$$

2.3.1 Durum vektörünün doğrusal dönüşümü

Durum denklemleri gösterimi, verilen bir sistem için tek değildir.

Aynı sayısal süzgeç için farklı yapıların varlığı, kuvantalama hatalarının etkisinin azaltılması ve işlem karmaşıklığının azaltılması gibi konularda yararlıdır.

T matrisi, boyutu N olan ve tersi alınabilen bir kare matris olduğuna göre, $q(n)$ durum vektörünün doğrusal dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$q^{'}(n) = Tq(n)$$

Yukarıda verilen denklemlerin tersi alınmak suretiyle aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$q^{'}(n+1) = Tq(n+1) \quad \text{ve} \quad q(n+1) = Aq(n) + Bx(n)$$

$$q^{'}(n+1) = TAq(n) + TBx(n)$$
$$= TAT^{-1}q^{'}(n) + TBx(n)$$

$$y(n) = CT^{-1}q^{'}(n) + dx(n)$$

$$A^{'} = TAT^{-1} \qquad B^{'} = TB \qquad C^{'} = CT^{-1} \qquad d^{'} = d$$

olarak tanımlanırsa yeni durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$q^{'}(n+1) = A^{'}q^{'}(n) + B^{'}x(n)$$
$$y(n) = C^{'}q^{'}(n) + d^{'}x(n)$$

Örnek 2.12 Dönüşüm matrisi T nin bir diagonal matris olması durumunda $A^{'}$, $B^{'}$ ve $C^{'}$ matrislerini bulunuz.

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{bmatrix}$$

olduğuna göre ölçeklenmiş durum vektörü $q^{'}(n)$ aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

$$q^{'}(n) = \begin{bmatrix} q_1^{'}(n) \\ q_2^{'}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} q_1(n) \\ t_{22} q_2(n) \end{bmatrix}$$

Ayrıca ölçeklenmiş durum matrisleri de aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A' = T\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dfrac{t_{11}}{t_{22}} \cdot a_{12} \\ \dfrac{t_{22}}{t_{11}} \cdot a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B' = T\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}b_1 \\ t_{22}b_2 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{c_1}{t_{11}} & \dfrac{c_2}{t_{22}} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Zaman domeni analizi

Sayısal süzgecin zaman domeni analizi durum denklemleri yardımıyla da gerçekleştirilir.
İlk koşulların bilinmesi durumunda giriş ve çıkış ilişkisi A , B , C ve d cinsinden ifade edilebilir. $n = 0,1,2,\ldots$ için

$$
\begin{aligned}
q(1) &= Aq(0) + Bx(0) \\
q(2) &= Aq(1) + Bx(1) \\
q(3) &= Aq(2) + Bx(2) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olduğu açıkça görülür ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
q(2) &= A^2 q(0) + ABx(0) + Bx(1) \\
q(3) &= A^3 q(0) + A^2 Bx(0) + ABx(1) + \underbrace{A^0}_{I} Bx(2)
\end{aligned}
$$

Buradan genel bağıntı olarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$q(n) = A^n q(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} Bx(k)$$

Bu bağıntıda $A^0 = I$ matrisi $(N \times N)$ boyutlu birim matristir. O halde aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$y(n) = Cq(n) + dx(n)$$

$$y(n) = CA^n q(0) + C\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} Bx(k) + dx(n)$$

$q(0)$ başlangıç koşullarını taşıyan durum vektörü olup aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q(0) = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ \vdots \\ q_N(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega(-N) \\ \vdots \\ \omega(0) \end{bmatrix}$$

Giriş işaretinin $n < 0$ için $x(n) = 0$ ve $q(0) = 0$ olması durumunda, çıkış ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(n) = C\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} Bx(k) + dx(n)$$

Bu son denklemi başlangıç koşulları sıfır olan sayısal süzgecin çıkışını gösterir. Benzer şekilde A, B, C ve d cinsinden sayısal süzgecin impuls cevabı son denklemden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$h(n) = C\sum_{k=0}^{n-1} A^{(n-1-k)} B\delta(k) + d\delta(n)$$

Böylece $a(0) = d$ olmak üzere son denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h(n) = \begin{cases} a(0), & n = 0 \quad \text{için} \\ CA^{(n-1)}B, & n \neq 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

Ör: $y(n)-3y(n-1)-4y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$

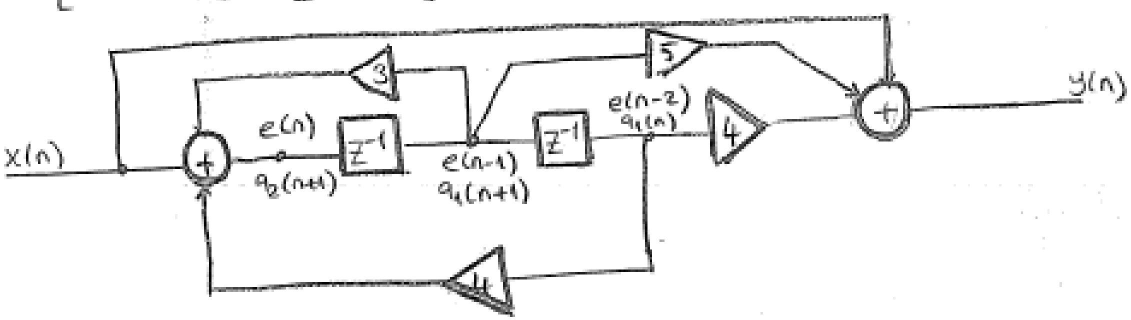
$e(n)-3e(n-1)-4e(n-2)=x(n)+2x(n-1)$

1. $\rightarrow$ $x(n)=e(n)-3e(n-1)-4e(n-2)$

$e(n)=x(n)+3e(n-1)+4e(n-2)$

durum değişkenleri	durum denklemleri
$q_1(n)=e(n-2)$	$q_1(n+1)=e(n-1)=q_2(n)$
$q_2(n)=e(n-1)$	$q_2(n+1)=e(n)=x(n)+3q_2(n)+4q_1(n)$

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$



2. $\rightarrow$ $y(n)=e(n)+2e(n-1)$

$=x(n)+3e(n-1)+4e(n-2)+2e(n-1)$

$=x(n)+5e(n-1)+4e(n-2)$

$=x(n)+5q_2(n)+4q_1(n)$

$$y(n)=\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \underbrace{1}_{D} \cdot x(n)$$

$y(n-1)-2y(n-2)=x$

Ör: $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$

? $y(n) + y(n-1) - ...$

?

1. $x(n) = e(n) + e(n-1) - 2e(n-2)$

$e(n) = x(n) - e(n-1) + 2e(n-2)$

durum değişkenleri	durum denklemleri
$q_1(n) = e(n-2)$	$q_1(n+1) = e(n-1) = q_2(n)$
$q_2(n) = e(n-1)$	$q_2(n+1) = e(n) = x(n) - q_2(n) + 2q_1(n)$

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

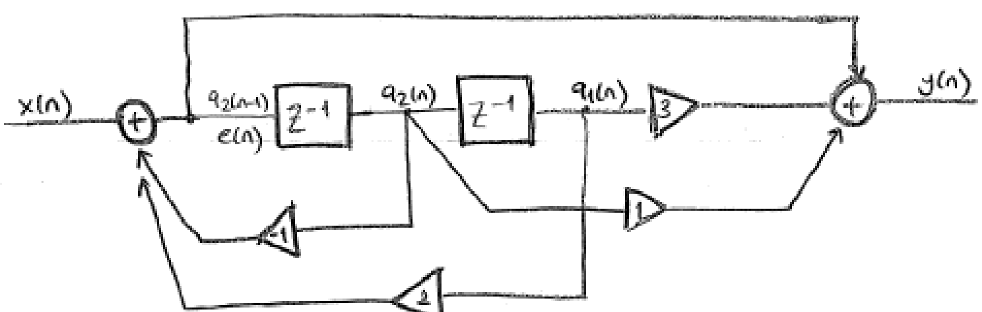
2. $y(n) = e(n) + 2e(n-1) + e(n-2)$

$= x(n) - e(n-1) + 2e(n-2) + 2e(n-1) + e(n-2)$

$= x(n) + e(n-1) + 3e(n-2)$

$= x(n) + q_2(n) + 3q_1(n)$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + 1\, x(n)$$



$y(k+2) + \dots \Rightarrow$ gibi ifade varsa, $k+2 = n$ yapıyoruz.

3. $n \geq 0$ için $y(n) - y(n-2) = x(n-1)$ fark denklemi ile ifade edilen sistemin durum denklemlerini bulunuz

1. Yol:

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b_2 & -b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \text{ 8p}$$

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \text{ 5p}$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} a_2 - a_0 b_2 & a_1 - a_0 b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + a_0 x(n) \text{ 7p}$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} \text{ 5p}$$

2. yol

$x(n) = e(n) - e(n-2)$ 2p
$e(n) = x(n) + e(n-2)$

$q_1(n) = e(n-2)$
$q_2(n) = e(n-1)$

$q_1(n+1) = e(n-1) = q_2(n)$ 3p
$q_2(n+1) = e(n) = x(n) + e(n-2) = x(n) + q_1(n)$ 3p

$$\begin{bmatrix} q_1(n+1) \\ q_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \text{ 5p}$$

$y(n) = e(n-1) = q_2(n)$ 7p

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(n) \\ q_2(n) \end{bmatrix} \text{ 5p}$$