SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

Elektrik Devre Temelleri

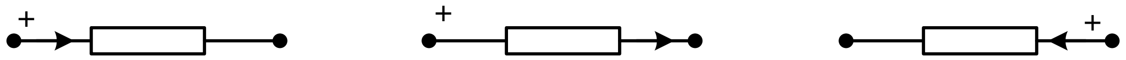
Hafta ç

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Ayan

BÖLÜM 3. TANIMLANMIŞ BÜYÜKLÜKLER

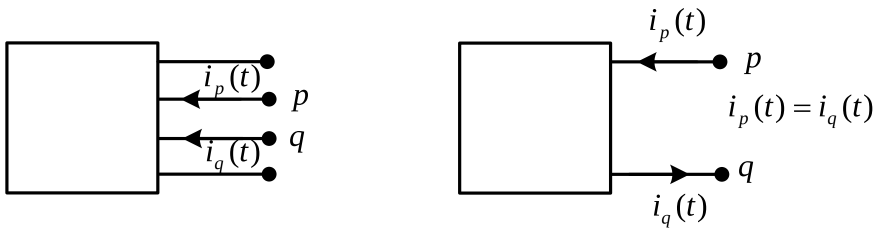
Uyumlu referans yönleri

Gerilim kutbu ile akım oku aynı yönde (kuyruğunda) ise bunlar uyumlu referans yönleridir.



Kapı

$i_p(t) = -i_q(t)$ ise (p,q) uç çifti bir kapıdır. Yani iki uç yalnız bir kapı oluşturur.

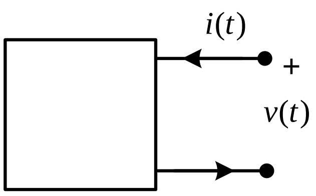


Güç

Güç uyumlu referans yönleri için ve aynı zamanda herhangi bir kapı için tanımlanmıştır. Birimi ise Watt dır.

1-kapılının ani gücü: 1-kapılı elemanın ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$P(t) = v(t).i(t)$ (Bu güç reel bir sayıdır.)



$P(t) > 0$ ise tanım uyarınca bu 1-kapılı güç alıyor demektir.

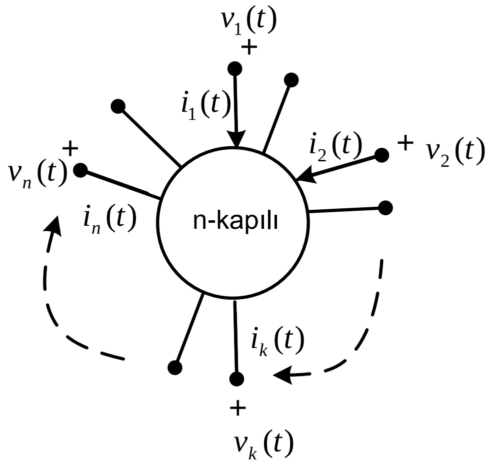
$P(t) < 0$ ise tanım uyarınca bu 1-kapılı güç veriyor demektir.

n-kapılının ani gücü: n-kapılı elemanın ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_k(t) = v_k(t).i_k(t)$$

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)$$

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k(t).i_k(t)$$



Kapılara ilişkin gerilim vektörü ile akım vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}, \quad i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \end{bmatrix}$$

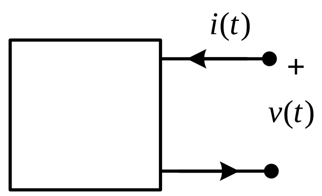
Bu durumda n-kapılının ani gücü vektörel biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P(t) = v^T(t).i(t) = i^T(t).v(t)$$

Enerji

1-kapılıya ilişkin enerji: 1-kapılı elemanın enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} v(t).\,i(t).\,dt + W(t_0)$$



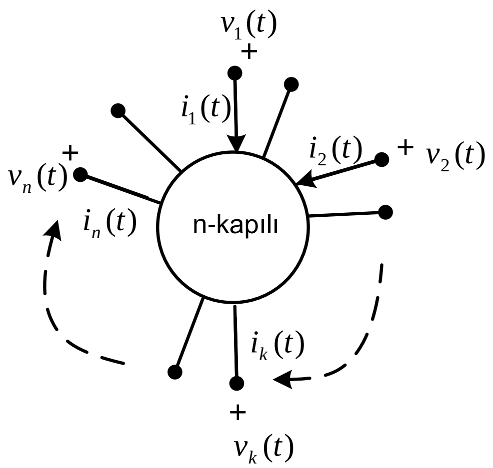
Bu durumda $(t-t_0)$ zaman aralığındaki bir kapılıya ilişkin enerji aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W(t,t_0)=W(t)-W(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(t).\,i(t).\,dt$$

$W(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **1-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye enerji veriyor denir. Aksi takdirde, yani $W(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden enerji alıyor denir. Enerji birimi 1 Joule(1J) dur.

$$W(t)=\int_{t_0}^{t} p(t).\,dt+W(t_0) \qquad \Rightarrow \qquad p(t)=\frac{dW(t)}{dt}$$

n-kapılıya ilişkin enerji: n-kapılı elemanın enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.



$$W(t)=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} v_k(t).\,i_k(t).\,dt+W(t_0)$$

$$W(t,t_0)=W(t)-W(t_0)=\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n} v_k(t).\,i_k(t).\,dt$$

$W(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **n-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye enerji veriyor denir. Aksi takdirde, yani $W(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden enerji alıyor denir.

$$W(t)=\int_{t_0}^{t}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}p_k(t)}_{P_n(t)}.dt+W(t_0)=\int_{t_0}^{t}P_n(t).d(t)+W(t_0)$$

Yük

1-kapılı elemanın yükü aşağıdaki gibi tanımlanır ve birimi 1 Coulomb(1C) dur.

$$q(t)=\int_{t_0}^{t}i(t).dt+q(t_0)$$

$$q(t,t_0)=q(t)-q(t_0)=\int_{t_0}^{t}i(t).dt$$

$q(t,t_0)$ terimi (-) ise, bu **1-kapılı eleman**, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreye yük veriyor denir. Aksi taktirde, yani $q(t,t_0)$ terimi (+) ise, bu eleman, $(t-t_0)$ zaman aralığında bağlı olduğu devreden yük alıyor denir.

Akı

1-kapılı elemanın akısı aşağıdaki gibi tanımlanır ve birimi 1 Weber(1W) dir.

$$\phi(t)=\int_{t_0}^{t}v(t).dt+\phi(t_0)$$

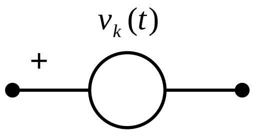
$$\phi(t,t_0)=\phi(t)-\phi(t_0)=\int_{t_0}^{t}v(t).dt$$

Devre elemanları

a) **1-kapılı devre elemanı**
b) **2-kapılı devre elemanı**
c) **n-kapılı devre elemanı**

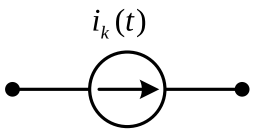
1-kapılı devre elemanları

1. Bağımsız gerilim kaynağı: Birimi volt(1V) dur.



$$v(t) = v_k(t)$$

2. Bağımsız akım kaynağı: Birimi amper(1A) dir.



$$i(t) = i_k(t)$$

3. Direnç elemanı: R harfi ile gösterilir ve birimi 1ohm(1Ω) dur.

Direncin tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$v(t) = R.i(t)$$
$$i(t) = G.v(t)$$

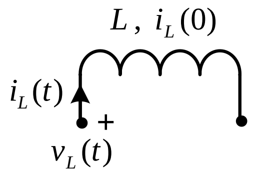
Yukarıdaki ifadelerde R direnç ve G iletkenlik olarak adlandırılır ve iletkenliğin birimi1 mho veya 1 siemens dir. Direncin ani gücü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p(t) = R.i^2(t)$$

$p(t) = G.v^2(t)$

Direnç elemanı pasif bir eleman olup, üzerinde güç harcar. Yani $p(t)$ değeri daima pozitiftir.

4. Endüktans elemanı: L harfi ile gösterilir ve birimi1Henry(1H) dir.



Endüktansın tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

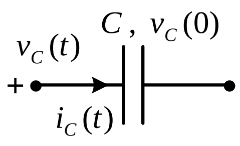
$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau).\,d\tau + i_L(0) = \Gamma\int_0^t v_L(\tau).\,d\tau + i_L(0)$$

Yukarıdaki ifadelerde L endüktans ve $\Gamma = \dfrac{1}{L}$ **manyetik iletkenlik** olarak adlandırılır. Endüktansın ani gücü ve enerjisi ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_L(t) = v_L(t).\,i_L(t) = L.\,i_L(t) \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

5. Kapasite elemanı: C harfi ile gösterilir ve birimi1Farad(1F) dir.



Kapasitenin tanım bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

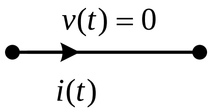
$$v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_C(\tau).\,d\tau + v_C(0) = \mathrm{O} \cdot \int_0^t i_C(\tau).\,d\tau + v_C(0)$$

Yukarıdaki ifadelerde C kapasitans ve $\mathrm{O} = \frac{1}{C}$ **dielektrik iletkenlik** olarak adlandırılır. Kapasitansın ani gücü ve enerjisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_C(t) = v_C(t).\,i_C(t) = C.\,v_C(t) \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$W_C(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot v_C^2(t)$$

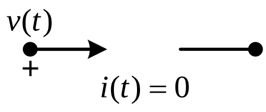
6. Kısa-devre elemanı:



$$p(t) = v(t).\,i(t) = 0$$

Bu kısa devre elemanının gücü sıfırdır. Bu yüzden bağlı olduğu devreye ne enerji verir ve ne de bağlı olduğu devreden enerji alırlar.

7. Açık-devre elemanı:

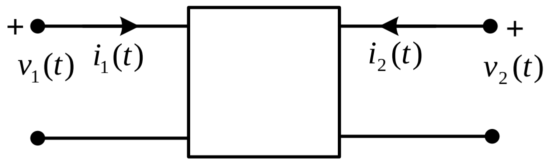


$$p(t) = v(t).\,i(t) = 0$$

Aynı şekilde bu açık devre elemanının gücü de sıfırdır. Bu yüzden bağlı olduğu devreye ne enerji verir ve ne de bağlı olduğu devreden enerji alırlar.

2-kapılı devre elemanı

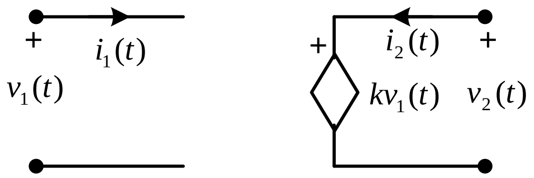
1. Bağımlı kaynaklar



(a) GKGK(Gerilimle kontrol edilebilen gerilim kaynağı)

$$i_1(t) = 0$$
$$v_2(t) = kv_1(t)$$

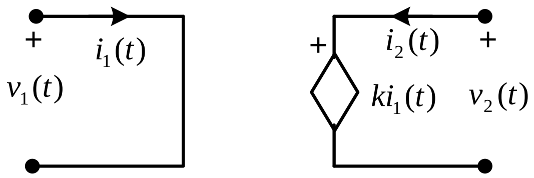
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir GKGK dır.



(b) AKGK(Akımla kontrol edilebilen gerilim kaynağı)

$$v_1(t) = 0$$
$$v_2(t) = ki_1(t)$$

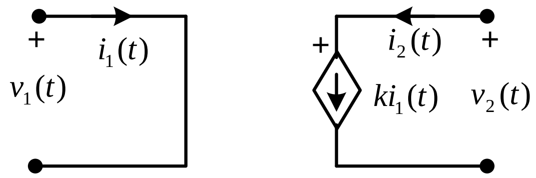
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir AKGK dır.



(c) AKAK(Akımla kontrol edilebilen akım kaynağı)

$$v_1(t) = 0$$
$$i_2(t) = ki_1(t)$$

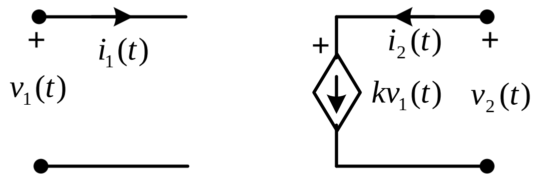
Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir AKAK dır.



(d) GKAK(Gerilimle kontrol edilebilen akım kaynağı)

$$i_1(t) = 0$$
$$i_2(t) = kv_1(t)$$

Bu iki bağıntıyı da aynı anda gerçekliyorsa bu 2-kapılı bir GKAK dır.

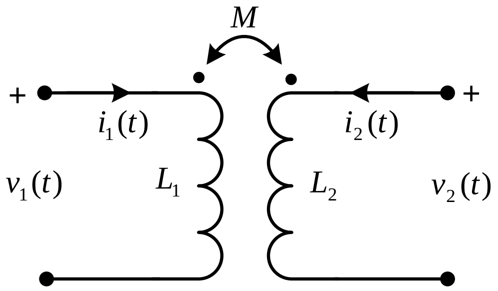


$$p(t) = \underbrace{p_1(t)}_{0} + p_2(t)$$

$p_2(t) = v_2(t).i_2(t) = kv_2(t).v_1(t)$ (GKAK için)

Önemli not: Bu güç değeri pozitif de olabilir, negatif de olabilir.

2. Transformatör



$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Burada L_1 ve L_2 öz endüktanslar olup, M ise ortak endüktansdır. Tanım uyarınca $L_1, L_2 > 0$ dır. Bu iki kapılının transformatör olabilmesi için $L_1.L_2 - M^2 = \Delta > 0$ şartı gerçeklenmelidir. Yukarıdaki şekilde gösterilen düğümlerin anlamı: Her iki akım bu düğümlerden girecek ya da çıkacak şekilde yönlendirilmiş iseler, ortak endüktans(M) pozitifdir. Akımın biri düğümden girecek, diğeri çıkacak şekilde referans gösterilmişse, ortak endüktans(M) negatifdir.

Akımların ikisi de sabit tutuluyorsa gerilimler $(v_1 = v_2 = 0)$ sıfır olacaklardır. Her iki akımın türevlerini bulmak istersek, $\Delta = L_1.L_2 - M^2$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{di_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_2 & -M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{L_2}{\Delta} \cdot v_1 - \frac{M}{\Delta} \cdot v_2$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{M}{\Delta}\cdot v_1 + \frac{L_1}{\Delta}\cdot v_2$$

$$i_1(t) = \frac{L_2}{\Delta}\int_0^t v_1(\tau).d\tau - \frac{M}{\Delta}\int_0^t v_2(\tau).d\tau + i_1(0)$$

$$i_2(t) = -\frac{M}{\Delta}\int_0^t v_1(\tau).d\tau - \frac{L_1}{\Delta}\int_0^t v_2(\tau).d\tau + i_2(0)$$

Yukarıda ifade edilen integralleri hesaplayabilmemiz için $i_1(0)$ ve $i_2(0)$ başlangıç değerlerini bilmemiz gerekir.

Transformatör tanım bağıntısı aşağıdaki gibi verilmiş idi.

$$v_1(t) = L_1\cdot\frac{di_1(t)}{dt} + M\cdot\frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M\cdot\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\cdot\frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki tanım bağıntısında $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ ve $L_1.L_2 - M^2 > 0$ şartları sağlanıyor ise, bu iki kapılı bir transformatördür ve bu transformatöre ait güç ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$p(t) = v_1(t).i_1(t) + v_2(t).i_2(t) =$$
$$= i_1(t).L_1\cdot\frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t).M\cdot\frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t).M\cdot\frac{di_1(t)}{dt} + i_2(t).L_2\cdot\frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki ifadeyi kısaltmak suretiyle aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$p(t) = L_1.i_1\cdot\frac{di_1}{dt} + M\cdot\frac{d}{dt}(i_1.i_2) + L_2.i_2\cdot\frac{di_2}{dt}$$

Yine aynı koşullar altında bu transformatöre ait enerji ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$W(t) = \int_0^t p(\tau).d\tau + W(0)$$

Yukarıdaki güç ifadesini enerji formuna sokmak için aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$p(t).dt = L_1.i_1.di_1 + M.d(i_1.i_2) + L_2.i_2.di_2$$

Bu durumda enerji ifadesi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$W_L(t) = \frac{1}{2}L.i_L^2(t)$ ve $W_L(0) = \frac{1}{2}L.i_L^2(0)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$W(t) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(t) - \frac{1}{2}L_1.i_1^2(0) + M.i_1(t).i_2(t) - M.i_1(0).i_2(0) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(t) - \frac{1}{2}L_2.i_2^2(0)$$

Yukarıdaki ifadeyi ayırmak suretiyle aşağıdaki sonuca gelinir.

$$W(0) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(0) + M.i_1(0).i_2(0) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(0)$$
$$W(t) = \frac{1}{2}L_1.i_1^2(t) + M.i_1(t).i_2(t) + \frac{1}{2}L_2.i_2^2(t)$$

Sonuç: Transformatörün enerjisini kapı akımları cinsinden yazabiliriz.

3. Mükemmel transformatör

$$v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + M \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$
$$v_2(t) = M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

Yukarıdaki tanım bağıntısında $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ ve $L_1.L_2 - M^2 = 0$ şartları sağlanıyor ise, bu iki kapılı mükemmel bir transformatördür ve bu transformatöre ait akımlar gerilim cinsinden ifade edilemez. Yukarıdaki tanım bağıntılarından birincisinin her iki tarafını L_2 ile çarpıp M ile bölersek aşağıdaki sonuca geliriz.

$$\underbrace{L_1 . L_2}_{M^2} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 . M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = L_2 . v_1 \quad \Rightarrow \quad M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{L_2}{M} \cdot v_1$$

Bu sonuç ifadesini tanım bağıntısındaki ikinci denklemi olan

$$M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = v_2(t)$$

ile benzeştirirsek aşağıdaki sonuca geliriz.

$$v_2(t) = \frac{L_2}{M} \cdot v_1(t)$$

Yani iki nolu kapıya ilişkin gerilim bir nolu kapıya ilişkin gerilime lineer bağımlıdır. Oysa mükemmel olmayan(normal) transformatörde böyle bir bağıntı yazılamaz.