SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

İŞLETME FAKÜLTESİ

İŞLETME BÖLÜMÜ

.:: BÖLÜM I ::.

MATRİS

ve

DETERMİNANT

Halil İbrahim CEBECİ

BÖLÜM I

MATRİS VE DETERMİNANT

1. Matris Cebirine Giriş

Sayıların, değişkenlerin veya parametrelerin oluşturduğu dikdörtgen veya kare biçimindeki tablolara ***matris*** denir. Bir matris, satır sayısı ve sütun sayısı ile ifade edilir. m sayıda satırı, n sayıda sütunu olan bir matris için mXn ye matris boyutu denir.

Tek bir satırdan ya da tek bir sütundan oluşan matrisin özel haline ise ***vektör*** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Birim Matris: Kare matrislerin yaygın bir örneği ise, asal köşegenin üzerindeki öğelerinin 1, geri kalan yerlerdeki öğelerin 0 olduğu birim matristir. Satır ve sütun sayısı n olan bir birim matrisi göstermek için (başka bir yerde kullanılmamışsa) genelde I_n kullanılır.

Mesela 3x3'lük bir birim matris aşağıdaki şeklinde gösterilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İki matristeki elemanların eşleştirilmesi bir başka deyişle iki matrisin eşit olması için her iki matrisin boyutları tamamen aynı olmalıdır.

1.2. Matrislerde Temel İşlemler

Matrislerde toplama:

Matrislerde toplama yapılması için gerekli tek şart matris boyutlarının eşit olması zorunluluğudur.

A ve B matrisleri aşağıdaki gibi verilsin;

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{bmatrix} \ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Bu durumda matrislerin toplamı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3+1} & \mathbf{4+3} \\ \mathbf{3+2} & \mathbf{9+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki matris eşitliğinde x, y ve z değişkenleri değerlerini bulunuz.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ y \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$-2 + 5 = z \qquad => z = 3$$
$$1 + y = -1 \qquad => y = -2$$
$$x + 4 = 2 \qquad => x = -2$$

Matrislerde çıkarma:

Matrislerde çıkarma işlemi de tamamen toplama işlemi ile aynı şekilde gerçekleştirilir. Yani çıkarılmış matrisi bulmak için ilk matrisin her bir elemanından ikinci matrisin her bir elemanı çıkarılır.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & -7 & 9 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -6 & 12 & -11 \\ 5 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Matrislerde Çarpma:

Matrisleri herhangi sabit bir sayı ile çarpmak demek, her bir elemanın sabit sayı ile çarpılması demektir.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \, olmak \text{ üzere } 3 * A = \begin{bmatrix} 3*2 & 3*-3 \\ 3*4 & 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

İki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Çarpma işleminde birinci matrisin tüm satır elemanları ikinci matrisin tüm sütun elemanları ile karşılıklı olarak çarpılıp toplanır.

A ve B matrisleri aşağıdaki gibi olsun.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Burada A matrisi mxn boyutlu ve B matrisi nxk boyutlu ise bu durumda çarpım matrisi (ki biz C diyelim) mxk boyutlu olur. A ve B matrisleri 2x2 boyutunda olduğundan kural gereği C matrisi de 2x2 boyutunda olmalıdır.

$$A_{mxn} * B_{nxk} = C_{mxk}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

İlk elemanın (C_{11})bulunabilmesi için ilk matrisin ilk satırı ile ikinci matrisinin ilk sütun elemanları çarpılır.

$$\begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 1} \\ 3 \quad 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*3+1*0=6 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde C_{21} bulunabilmesi için indis rakamları yani ilk matrisin 2. satırı ile ikinci matrisin 1. sütunu çarpılır.

$$\begin{bmatrix} 2 \quad 1 \\ \boxed{3 \quad 0} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & c_{12} \\ 3*3+0*0=9 & c_{22} \end{bmatrix}$$

Diğer hesaplamalar ile birlikte matris çarpımı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Bu işlemlerden sonra aşağıdaki matris özelliklerine dikkat edelim. A, B ve C matris gösterimli ifadeler olma üzere;

1. A + B = B + A
2. A + (B + C) = (A + B) + C
3. 0 + A = A
4. A + (-A) = 0
5. A * B ≠ B * A

Burada en dikkat edilmesi gereken 5. kuraldır. Yani matris çarpımlarında değişim özelliği söz konusu değildir. Bunu yukarıdaki örnek ile teyit edelim.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi boyutları aynı olsa da tamamen farklı iki matris ifadesi elde edilmiştir.

Tek bir satırdan oluşan bir matris ile tek bir sütundan oluşan matrisin çarpımı tek bir değer verir.

$$A_{1x4} * B_{4x1} = C_{1x1}$$

Örnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = [1*5+2*6+3*7+4*8] = [70]$$

Matris devriği (Transpozesi)

Bir matrisin devriği (transpozu) satırların sütun, sütunların satır haline getirilmesiyle elde edilen matristir. Bir A matrisinin transpozu A^T ile gösterilebilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \; ise \; A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}_{2x3} \; iken \; A^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3x2}$$

1.3. Matris yardımıyla problem çözümü

Temel işletme problemleri içerisinde yer alan değişkenlerin matrisler yardımıyla gösterilmesi ve matris işlemleri sayesinde kolayca çözülebilir.

Örnek: Bir perakendecide 4 çeşit mamül bulunmaktadır. Bu ürünlerin fiyatları sırası ile 70, 60, 80 ve 100 liradır. Ürünlere ait başlangıç stokları 40, 20, 15 ve 20, dönem sonu stokları ise 30, 10, 10, 15 ise bu durumda söz konusu dönemde elde edilebilecek toplam geliri matris cebiri yardımıyla belirleyiniz.

Burada öncelikle stok işlemlerini gerçekleştirelim.

Dönem başı stok ve dönem sonu stok çıkarma işlemi yapılacağından eşit boyutta olacak şekilde aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$DB = [40 \quad 20 \quad 15 \quad 20]$$

$$DS = [30 \quad 10 \quad 10 \quad 15]$$

Toplam gelir toplam satışın birim fiyatlar ile çarpılması ile belirlenir. Bu yüzden toplam satış rakamını belirlemek gereklidir. Toplam satış başlangıçtaki stoklardan son stokların çıkarılması ile elde edilebilir.

$$DB - DS = [40 \quad 20 \quad 15 \quad 20] - [30 \quad 10 \quad 10 \quad 15] = [10 \quad 10 \quad 5 \quad 5]$$

Toplam gelir için çarpım gereklidir. Bu çarpım sonucunda ise tek bir değer elde edilmelidir. (Toplam Gelir (R) = Satış Fiyatı (p) * Satış Miktarı (q)). Burada miktar tek bir satırda yazıldığı için çarpım kuralından dolayı fiyat tek bir sütunda yazılmalıdır.

$$P = \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Toplam gelir ise aşağıdaki formülden elde edilebilir.

$$R = p * q$$

Fakat bu formül direkt yerleştirilirse bu durumda çarpım 4x4 matris olur. O yüzden fiyat ve miktarın yeri değiştirilerek aşağıdaki gibi çarpılabilir.

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 5 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 70 \\ 60 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix} = 70 * 10 + 60 * 10 + 80 * 5 + 100 * 5 = 2200$$

Böylece toplam gelir 2200 lira olarak belirlenmiş oldu.

Örnek: Bir galeri 4 model araba satmaktadır. Önceki hafta A, B, C ve D modellerinden sırası ile 10, 5, 8 ve 3 adet satış gerçekleştirilmiştir. Modellerin satış fiyatları sırası ile 12500, 11800, 15900 ve 25300 olduğuna göre problemi matris notasyonu yardımıyla çözünüz.

Soruda yine toplam gelir formülü kullanılacaktır.

$$R = p * q$$

Burada sonucun tek bir değer olabilmesi için fiyatın tek bir satırda ve miktarın tek bir sütunda olması gerekliliğine dikkat ediniz.

Bu gereklilik sonucunda aşağıdaki çarpım ile sonuç elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 12500 & 11800 & 15900 & 25300 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = 387.100\ TL$$

Örnek: Serdivan ilçesinde 10 lise ve 16 ilköğretim okulu yer almaktadır. Her ilköğretim okulunda 25 öğretmen, 10 memur, 4 hizmetli ve 2 güvenlik görevlisi yer alırken, Liselerde bu rakamlar sırası ile 30, 12, 6 ve 4 olmakta ve ek olarak liselerde 1 kütüphaneci yer almaktadır. Aylık ortalama maaşlar öğretmen=2000TL, memur=1500TL, Hizmetli=1000TL, Güvenlik görevlisi=1200TL ve kütüphaneci=1500TL olarak tahmin edilmektedir. Bu bilgilerden hareketle matrislerden yararlanarak

a. Serdivan'da Lise ve İlköğretim okullarında çalışanların sayısını
b. Serdivan'daki Lise ve İlköğretim okullarında bir ayda ödenen toplam maaşı, belirleyiniz.

a şıkkında toplam çalışan sayısını belirlemek için okul sayıları ve ortalama çalışan sayıları çarpılmalıdır.

Okul sayıları 10 ve 16 aşağıdaki gibi gösterilir.

$$O = \begin{bmatrix} 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Okul sayıları ile çalışan rakamları çarpılarak toplam çalışan sayısı belirlenebilir. Bunun için ilk matristeki sütun sayısı (2) kadar satırdan oluşan çalışan matrisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$Ç = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 4 & 2 & 0 \\ 30 & 12 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi toplam çalışan sayısını çarpım ile belirleyelim.

$$O * Ç = [16 \quad 10]_{1x2} * \begin{bmatrix} 25 & 10 & 4 & 2 & 0 \\ 30 & 12 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{2x5} = [700 \quad 280 \quad 124 \quad 72 \quad 10]_{1x5}$$

a şıkkı için cevap belirlenmiş oldu. Şimdi ise çalışan türleri ile maaşları çarparak toplam aylık maaş ödemesini belirleyerek soruyu tamamlayalım.

Elimizdeki matris 1x5 olduğundan 5x1 matris ile çarpılır ise sonuç tek bir değer olacaktır. Bu nedenle çalışan tiplerine bağlı maaşları 5x1 tipinde bir matris olarak aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$M = \begin{bmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 1000 \\ 1200 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Şimdi yapmamız gereken a şıkkında elde ettiğimiz matris ile yukarıdaki matrisi çarpmak olacaktır.

$$[700 \quad 280 \quad 124 \quad 72 \quad 10]_{1x5} * \begin{bmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 1000 \\ 1200 \\ 1500 \end{bmatrix}_{5x1} = 2.045.400$$

Şimdi ise birden fazla matris ile yapılan işlemlere örnekler gösterelim.

Örnek: u, x, v ve y matrisleri aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$u = [4 \quad -2 \quad 1] \qquad x = [0 \quad 3 \quad 1] \qquad v = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

aşağıdaki şıkları cevaplayınız.

a. $u * v + x * y = ?$
b. $5uv + 10[x(2v - y)] = ?$

Öncelikle a şıkkı için cevabı bulmaya çalışalım.

İfadenin matris cinsinden açık ve uzun hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$u * v + x * y = [4 \quad -2 \quad 1] * \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + [0 \quad 3 \quad 1] * \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= [(4 * 6) + (-2 * 0) + (1 * 2)] + [(0 * -1) + (3 * -3) + (1 * 4)] = 26 + (-5) = 21$$

Diğer şıkta aşağıdaki gibi ifade edilecektir.

$$5uv + 10[x(2v - y)] = 5 * [4 \quad -2 \quad 1] * \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 10 * [[0 \quad 3 \quad 1] * (2 * \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}]$$

$$= 5 * 26 + 10 * \left[[0 \quad 3 \quad 1] * \begin{bmatrix} 2 * 6 - (-1) \\ 2 * 0 - (-3) \\ 2 * 2 - (+4) \end{bmatrix} \right] = 130 + 10 * \left[[0 \quad 3 \quad 1] * \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$= 130 + 10 * [0 * 13 + 3 * 3 + 1 * 0] = 130 + 90 = 220$$

Örnek: A, B ve C matrisleri aşağıdaki gibi verilmiş olsun

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

a) $A^2, B^2, C^2 = ?$
b) $A * B = ?$
c) $B * C = ?$
d) $A * C = ?$

Her dört şıkta da birer çarpma işlemi yapılacaktır. Bu durumdaki işlemlere ait sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

a. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C^2 = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A * B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = C$

c. $B * C = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = A$

d. $A * C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = B$

1.4. Determinant

Determinant, kare matrisleri bir sayıya eşleyen fonksiyondur. Determinant fonksiyonunun, kare matrisi eşlediği o sayıya matrisin determinantı denir. A matrisinin determinantı, detA biçiminde gösterilir. |A|, matrislerde mutlak değer anlamına gelmez. |A| sıfır veya negatif de olabilir.

Tek değerli bir matrisin determinantı kendine eşittir. Örneğin; A=[5] iken $|A| = 5$ olacaktır.

2x2 şeklindeki matrislerin determinantı köşegen çarpımlarının farkından bulunur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını bulunuz.

Bu matrisinin determinantı kuzeydoğu yönündeki köşegen çarpımından kuzey batı yönündeki köşegen çarpımının çıkarılması yardımıyla bulunur.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = (3 * 2) - (4 * 5) = -14$$

Bu kural sadece 2x2 boyutundaki matrisler için geçerlidir. Eğer 3x3 boyutunda bir matris için determinant belirlemek istiyorsak bu durumda Sarrus kuralından yararlanabiliriz. Bir örnekle açıklayalım.

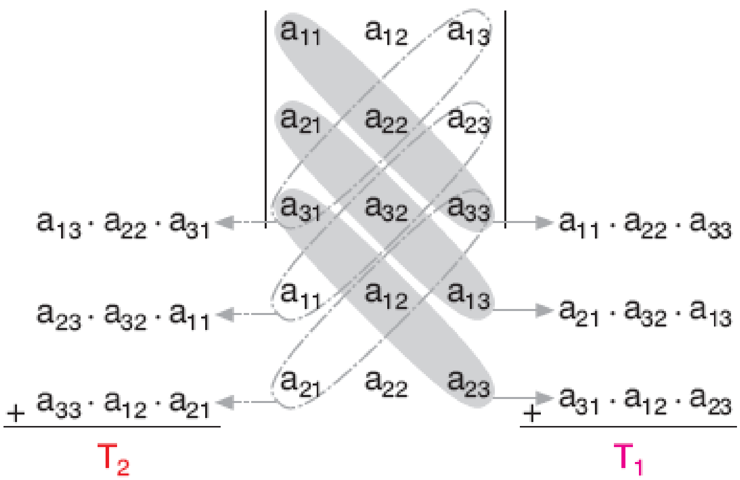
Örnek: Aşağıdaki A matrisinin determinantını belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Sarrus kuralına göre matrisinin ilk iki satırı alt tarafa yazılarak matris 5x3 formuna döndürülür.

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

Daha sonra yeni matristeki kuzey doğu köşegen çarpımları yapılarak toplanır. Aynı işlem kuzey doğu köşegen çarpımları için de gerçekleştirilir. İlk toplamdan ikincisi çıkarılarak determinant belirlenir. Aşağıdaki şekilde bu durum gösterilmektedir.



$$detA = T_1 - T_2$$

Sorumuzdaki kuzey doğu köşegen toplamları (T_1) aşağıdaki gibi olacaktır.

$$T_1 = (-1 * 2 * 0) + (1 * -1 * -2) + (-1 * -2 * 1) = 0 + 2 + 2 = 4$$

Benzer şekilde kuzey batı köşegen toplamını (T_2) da bulabiliriz.

$$T_2 = (-2 * 2 * -1) + (1 * -1 * -1) + (0 * -2 - 1) = (4 + 1 + 0) = 5$$

Determinant ise iki toplamın farkından aşağıdaki gibi bulunur.

$$detA = |A| = T_1 - T_2 = 4 - 5 = -1$$

Sarrus kuralında izlenebilecek bir diğer yöntem ise ilk iki sütunun sütunun sağ tarafa bir kez daha yazılarak yine yukarıdaki işlemlerin tekrar edilmesidir.

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

$$T_1 = (-1 * 2 - 0) + (-2 * 1 * -1) + (-2 * 1 * -1) = 0 + 2 + 2 = 4$$

$$T_2 = (-2 * 2 * -1) + (-1 * 1 * -1) + (-2 * 1 * 0) = 4 + 1 + 0 = 5$$

$$detA = |A| = T_1 - T_2 = 4 - 5 = -1$$

Başka bir örnekle determinant kavramını pekiştirelim.

Örnek: Aşağıdaki A matrisinin determinantını belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Sarrus kuralını uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{matrix}$$

$$T_1 = (5 * -1 * 4) + (2 * 3 * 6) + (-3 * 2 * 4) = -20 + 36 - 24 = -8$$

$$T_2 = (6 * -1 * -3) + (4 * 3 * 5) + (4 * 2 * 2) = 18 + 60 + 16 = 94$$

$$detA = |A| = T_1 - T_2 = -8 - 94 = -102$$

Bir matrisin minörünü bulma:

Herhangi bir matrisinin minörünü bulmak için her bir elemanın bulunduğu satır ve sütun kapatılır. Geriye kalan matrisin determinantı o elemana ait minör değeridir. Her bir elemanın minöründen oluşan matris ise Minör matris olarak adlandırılır. Bir matrisin boyutu ile minör matrisin boyutu aynıdır.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin Minörünü belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Minör belirlenirken her bir elemanın teker teker minör matris karşılığı bulunmalıdır.

a_{11} elemanı için minör değeri bulunması için elemanın bulunduğu satır (1.satır) ve bulunduğu sütun (1.sütun) kapatılır. Kalan kısmın determinantı alınır.

$$minor\ a_{11} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & 2 \end{bmatrix}$$

2x2 şeklindeki matrislerde bu işlem kolaydır. Yukarıdan da görüleceği üzere ilk satır ve sütun kapatıldığında geriye sadece 2 rakamı kalır ki bu değer Minör A 'da a_{11} elemanına karşılık gelir.

$$minor\ a_{12} = \begin{bmatrix} x & x \\ 4 & x \end{bmatrix}$$

$$minor\ a_{21} = \begin{bmatrix} x & 5 \\ x & x \end{bmatrix}$$

$$minor\ a_{22} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ x & x \end{bmatrix}$$

Bu durumda minör A aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrisin 3x3 boyutunda olması sadece işlemi biraz uzatır. İşleyiş mantığı tamamen aynıdır.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin Minörünü belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Minör A aşağıdaki gibi olsun.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11} değeri içim minör değer aşağıdaki gibi belirlenir.

$$Minör\ a_{11} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ x & -7 & 3 \\ x & 3 & 3 \end{bmatrix} => Det \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = (-7 * 3) - (3 * 3) = -30$$

Şimdi diğer elemanlar için minörleri belirleyelim.

$$Minör\ a_{12} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 6 & x & 3 \\ 0 & x & 3 \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (6 * 3) - (0 * 3) = 18$$

$$Minör\ a_{13} = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 6 & -7 & x \\ 0 & 3 & x \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (6 * 3) - (0 * -7) = 18$$

$$Minör\ a_{21} = \begin{bmatrix} x & 0 & -2 \\ x & x & x \\ x & 3 & 3 \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = (0 * 3) - (-2 * 3) = 6$$

$$Minör\ a_{22} = \begin{bmatrix} 4 & x & -2 \\ x & x & x \\ 0 & x & 3 \end{bmatrix} => Det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (4 * 3) - (0 * -2) = 12$$

$$Minör\ a_{23} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & x \\ x & x & x \\ 0 & 3 & x \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = (4 * 3) - (0 * 0) = 12$$

$$Minör\ a_{31} = \begin{bmatrix} x & 0 & -2 \\ x & -7 & 3 \\ x & x & x \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = (0 * 3) - (-2 * -7) = -14$$

$$Minör\ a_{32} = \begin{bmatrix} 4 & x & -2 \\ 6 & x & 3 \\ x & x & x \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = (4 * 3) - (-2 * 6) = 24$$

$$Minör\ a_{33} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & x \\ 6 & -7 & x \\ x & x & x \end{bmatrix} => det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = (4 * -7) - (6 * 0) = -28$$

Yukarıdaki değerleri birleştirirsek Minör A matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} -30 & 18 & 18 \\ 6 & 12 & 12 \\ -14 & 24 & -28 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin kofaktörünü bulma:

Herhangi bir minörü alınmış matrisin kofaktörü her bir elemanın $(-1)^{i+j}$ ifadesi ile çarpılması ile bulunur.

Örnek: Aşağıda minörü verilmiş matrisin Kofaktörünü belirleyiniz.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Örneğin a_{11} elemanı için kofaktör $2 * -1^{1+1} = 2 * 1 = 2$ olarak bulunur. Benzer şekilde diğer kofaktörler aşağıdaki gibi belirlenir.

$$Cof\,a_{12} = 4 * -1^{1+2} = 4 * -1 = -4$$

$$Cof\,a_{21} = 5 * -1^{2+1} = 5 * -1 = -5$$

$$Cof\,a_{22} = 3 * -1^{2+2} = 3 * +1 = 3$$

Burada değerleri birleştirerek kofaktör matrisi aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$Cof A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Eğer matris boyutu 3x3 olsa bile yine işlemler tamamen aynı şekilde olacaktır. Bu şekildeki çarpımlardan kurtulmak adına 2x2 ve 3x3 (ki en çok kullanılan boyut) işaretler matrisi oluşturulabilir.

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}_{2x2} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}_{3x3}$$

Bu şekilde herhangi bir minör matrisin kofaktörü yukarıdaki işaretler matrisi ile işaretler çarpımı ile bulunur. Yukarıdaki örneği tekrar inceleyelim.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ iken } Cof A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Şimdi ise 3x3 boyutundaki yukarıda minörü verilmiş olan matris için kofaktörü işaretler matrisi yardımıyla belirleyelim.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} -30 & 18 & 18 \\ 6 & 12 & 12 \\ -14 & 24 & -28 \end{bmatrix} => Cof A = \begin{bmatrix} -30 & 18 & 18 \\ 6 & 12 & 12 \\ -14 & 24 & -28 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & -18 & 18 \\ -6 & 12 & -12 \\ -14 & -24 & -28 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin kofaktörü yardımıyla determinant hesaplama:

Eğer bir matrisin kofaktörü bulunmuş ise determinant kolayca hesaplanabilir. Kofaktör matrisinden herhangi bir satır veya sütun seçilir. Daha sonra o satır ve sütun orijinal matristen de seçilir ve karşılık gelen değerler çarpılarak toplanır. Sonuç determinantı verecektir.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisine ait determinantı Sarrus kuralı ve Kofaktör yardımlarıyla ayrı ayrı belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Öncelikle Sarrus kuralı ile determinantı bulalım.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -7 & 3 \end{matrix}$$

$$T_1 = (4 * -7 * 3) + (6 * 3 * -2) + (0 * 0 * 3) = -84 - 36 + 0 = -120$$

$$T_2 = (-2 * -7 * 0) + (3 * 3 * 4) + (3 * 0 * 6) = 0 + 36 + 0 = 36$$

$$detA = |A| = T_1 - T_2 = -120 - 36 = -156$$

Şimdi kofaktör yardımıyla bulalım. Burada ilk yapılması gereken herhangi bir satır veya sütunun seçilmesidir. Seçim yapılırken işlem kolaylığı için küçük veya sıfır içeren satırların seçimleri doğru bir strateji olacaktır.

A matrisi ve Kofaktörü aşağıdadır.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 6 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$CofA = \begin{bmatrix} -30 & -18 & 18 \\ -6 & 12 & -12 \\ -14 & -24 & -28 \end{bmatrix}$$

Seçim işlemini A matrisinden veya Kofaktöründen gerçekleştirebilirsiniz. Sadece 0, 3 ve3 değerlerinden oluşan A matrisi üçüncü satırını seçelim ve kofaktör üçüncü satır elemanları ile çarpalım.

$$detA = (0 * -14) + (3 * -24) + (3 * -28) = 0 - 72 - 84 = -156$$

Görüleceği üzere aynı sonucu elde etmekteyiz. Sorunun gidişatına göre her iki yöntemden biri tercih edilebilir.

Şimdi bir örnekle daha pekiştirelim.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisine ait determinantı Kofaktör matrisi yardımıyla belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1/4 \\ 2 & 0 & -3/4 \\ 4 & 180 & 11 \end{bmatrix}$$

Öncelikle A matrisinin minörü alınmalıdır.

Minör işlemleri:

$$Minör\ a_{11} = Det\begin{bmatrix} 0 & -3/4 \\ 180 & 11 \end{bmatrix} = (0 * 11) - (180 * -3/4) = 135$$

$$Minör\ a_{12} = Det\begin{bmatrix} 2 & -3/4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = (2 * 11) - (4 * -3/4) = 25$$

$$Minör\ a_{13} = Det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 180 \end{bmatrix} = (2 * 180) - (4 * 0) = 360$$

$$Minör\ a_{21} = Det\begin{bmatrix} 8 & 1/4 \\ 180 & 11 \end{bmatrix} = (8 * 11) - (180 * 1/4) = 43$$

$$Minör\ a_{22} = Det\begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = (3 * 11) - (4 * 1/4) = 32$$

$$Minör\ a_{23} = Det\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 180 \end{bmatrix} = (3 * 180) - (4 * 8) = 508$$

$$Minör\ a_{31} = Det\begin{bmatrix} 8 & 1/4 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} = (8 * -3/4) - (0 * 1/4) = -6$$

$$Minör\ a_{32} = Det\begin{bmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & -3/4 \end{bmatrix} = (3 * -3/4) - \left(2 * \frac{1}{4}\right) = -11/4$$

$$Minör\ a_{33} = Det\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = (3 * 0) - (2 * 8) = -16$$

Minör matrisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} 135 & 25 & 360 \\ 43 & 32 & 508 \\ -6 & -11/4 & -16 \end{bmatrix}$$

Kofaktör bulmak için ise minör ile işaretler matrisi aşağıdaki gibi çarpılabilir.

$$Cof\ A = \begin{bmatrix} 135 & 25 & 360 \\ 43 & 32 & 508 \\ -6 & -11/4 & -16 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 135 & -25 & 360 \\ -43 & 32 & -508 \\ -6 & 11/4 & -16 \end{bmatrix}$$

Determinant bulmak için işlem kolaylığı için ikinci sütunlar çarpım için seçilmiştir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 4 & 180 & 11 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 135 & -25 & 360 \\ -43 & 32 & -508 \\ -6 & \frac{11}{4} & -16 \end{bmatrix} =>$$

$$detA = (8 * -25) + (0 * 32) + \left(180 * \frac{11}{4}\right) = -200 + 0 + 495 = 295$$

Örnek: Aşağıda verilen A matrisine ait determinantı Kofaktör matrisi yardımıyla belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrise ait minör gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki gibi bulunur.

$$MinörA = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \\ 10 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

Kofaktör matrisi ise minör ve işaretler matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi olacaktır.

$$cofA = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 3 \\ -1 & -4 & 6 \\ 10 & 13 & -6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 3 \\ 1 & -4 & -6 \\ 10 & -13 & -6 \end{bmatrix}$$

Determinantı bulmak için ise ikinci satırı tercih ettik.

$$detA = (3 * 1) + (0 * -4) + (5 * -6) = -27$$

Bir matrisin tersinin bulunması:

Herhangi bir matrisini tersi aşağıdaki formül yardımıyla bulunabilir.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^{EK}$$

Yukarıdaki formülden de anlaşılacağı üzere bir matrisin tersi ancak ve ancak determinantın sıfırdan farklı olduğu durumlarda bulunabilir.

A^{EK} olarak gösterilen ek matris ise bir matrisinin kofaktörünün devriğidir.

Matrislerin tersinin bulunması özellikle çok bilinmeyenli denklemlerin çözümlerinde önem arz etmektedir.

Bir matrisin tersi alınırken aşağıdaki işlemler sıra ile yapılır.

1. Matrisinin minör matrisi bulunur
2. Minör matris işaretler matrisi ile çarpılarak kofaktör matrisi bulunur.
3. Ek matris kofaktör matrisinin trasnpozesi (devriği) bulunarak elde edilir.
4. Determinant hesaplanır.
5. Ters matris formülden elde edilir.

Ters matrisin doğru bulunup bulunmadığını "bir matris ile tersinin çarpımı birim matrisi verir" kuralı yardımıyla teyit edebilirsiniz.

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin tersini alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

İlk olarak minör matris belirlenir.

$$MinörA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra işaretler matrisi çarpımı ile kofaktör elde edilir.

$$CofA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin deviriği alınarak ek matris elde edilmiş olur.

$$A^{EK} = CofA^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdi ise determinantı belirleyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} => detA = (1*4) - (3*0) = 4$$

Son olarak ters matris formülü ile sonucu bulalım.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^{EK} = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 * \frac{1}{4} & 0 * \frac{1}{4} \\ -3 * \frac{1}{4} & 1 * \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Şimdi sonucun doğru olup olmadığını teyit edelim.

$$A * A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*1+0*-\frac{3}{4} & 1*0+0*\frac{1}{4} \\ 3*1+4*-\frac{3}{4} & 3*0+4*\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin tersini alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Sırası ile işlemleri gerçekleştirelim.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

İşaretler matrisi çarpımı ile Kofaktörü bulalım.

$$CofA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Şimdi Kofaktörün transpozesi yardımıyla EK matrisi belirleyelim.

$$A^{EK} = CofA^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinantı belirleme adına ilk sütun tercih edilerek kofaktör kullanılır.

$$detA = \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 1 & x & x \\ -1 & x & x \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 2 & x & x \\ 3 & x & x \end{bmatrix} = (0*0) + (1*2) + (-1*3) = -1$$

Son olarak ters matris formülü ile problem çözülmüş olur.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^{EK} = -1 * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıda verilen A matrisinin tersini alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Sırası ile işlemleri gerçekleştirelim.

$$Minör\ A = \begin{bmatrix} 24 & -5 & -4 \\ 12 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

İşaretler matrisi çarpımı ile Kofaktörü bulalım.

$$CofA = \begin{bmatrix} 24 & -5 & -4 \\ 12 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 5 & -4 \\ -12 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Şimdi Kofaktörün transpozesi yardımıyla EK matrisi belirleyelim.

$$A^{EK} = CofA^T = \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determinantı belirleme adına ikinci satır tercih edilerek kofaktör kullanılır.

$$detA = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & 4 & 5 \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ -12 & 3 & 2 \\ x & x & x \end{bmatrix} = (0 * -12) + (4 * 3) + (5 * 2) = 22$$

Son olarak ters matris formülü ile problem çözülmüş olur.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} * A^{EK} = \frac{1}{22} * \begin{bmatrix} 24 & -12 & -2 \\ 5 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{22} & -\frac{12}{22} & -\frac{2}{22} \\ \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & -\frac{5}{22} \\ -\frac{4}{22} & \frac{2}{22} & \frac{4}{22} \end{bmatrix}$$

1.4. Çok bilinmeyenli denklem sistemlerinin matris yöntemi ile çözümü

Matrisler çok bilinmeyenli denklem kümelerinin çözümlerinde oldukça kullanışlıdır. Şimdi bir örnekle bu durumu açıklayalım.

Örnek: Aşağıdaki denklem kümesini matrisler yardımıyla çözünüz.

$$\left.\begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + x_2 = 1 \end{matrix}\right\} \quad x_1, x_2 = ?$$

Çözüm için öncelikle değişken katsayılarından oluşan bir katsayılar matrisi oluşturulur.

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra her bir değişkenin bir satıra atandığı tek sütunlu bilinmeyenler matrisi oluşturulur.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Son olarak sağ taraf ifadelerinden oluşan tek sütunlu sonuç matrisi oluşturulur.

$$S = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki eşitlikte yer alan X değişken matrisi çekildiğinde çözüm bulunmuş olur.

$$K * X = S => \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf soldan K^{-1} ile çarpılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$K^{-1} * K * X = K^{-1} * S => X = K^{-1} * S$$

Burada X matrisi bulunduğunda her bir değer bir değişkene karşılık gelecektir. Bu sistemi çözmek için öncelikle K^{-1} ifadesi bulunmalıdır. İşlemler sırası ile aşağıdaki gibi olacaktır.

İlk olarak minör matris belirlenir.

$$Min\text{ö}rK = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Daha sonra işaretler matrisi çarpımı ile kofaktör elde edilir.

$$CofK = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin deviriği alınarak ek matris elde edilmiş olur.

$$K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Şimdi ise determinantı belirleyelim.

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} => detK = (3 * 1) - (2 * 4) = -5$$

Son olarak ters matris formülü ile sonucu bulalım.

$$K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{-5} * \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

Katsayılar matrisinin tersi bulunduğuna gör artık bu matrisi sonuç matrisi ile çarpabiliriz.

$$K^{-1} * S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} * 7 + \frac{2}{5} * 1 \\ \frac{4}{5} * 7 - \frac{3}{5} * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Artık X matrisi ile bu değerleri eşitleyebiliriz.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} => x_1 = -1 \; ve \; x_2 = 5$$

Örnek: Aşağıdaki denklem kümesini matrisler yardımıyla çözünüz.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

K, X ve S matrislerini belirleyerek soruyu çözmeye başlayalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Minör\ K = \begin{bmatrix} -14 & -1 & 23 \\ 6 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow CofK = \begin{bmatrix} -14 & -1 & 23 \\ 6 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 & 23 \\ -6 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} -14 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 23 & -3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow detK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 & 1 & 23 \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} = (1 * -14) + (1 * 1) + (-1 * -23) = -36$$

$$\Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{-36} * \begin{bmatrix} -14 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 23 & -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \\ -\frac{23}{36} & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} \end{bmatrix}$$

Artık çıkan eşitliği sonuç matrisi S ile çarparak değişken değerlerini belirleyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36} \\ -\frac{23}{36} & \frac{1}{12} & \frac{7}{36} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Denklem çözümünde $x_1 = 2,\ x_2 = 0$ ve $x_3 = -4$ olarak bulunur

Örnek: Aşağıdaki denklem kümesini matrisler yardımıyla çözünüz.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$

K, X ve S matrislerini belirleyerek soruyu çözmeye başlayalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Minör\ K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow CofK = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow detK = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ x & 1 & x \\ x & 2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & -4 & x \\ x & 0 & x \\ x & 4 & x \end{bmatrix} = (1 * -4) + (1 * 0) + (2 * 4) = 4$$

$$\Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Artık çıkan eşitliği sonuç matrisi S ile çarparak değişken değerlerini belirleyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Denklem çözümünde $x_1 = 0,\ x_2 = 2$ ve $x_3 = -1/2$ olarak bulunur.

Örnek: Aşağıdaki denklem kümesini matrisler yardımıyla çözünüz.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$$

K, X ve S matrislerini belirleyerek soruyu çözmeye başlayalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Minör\ K = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow CofK = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow detK = \begin{bmatrix} x & x & x \\ 2 & -1 & 2 \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix} = (2 * 0) + (-1 * 0) + (2 * 0) = 0$$

Determinant sıfır çıktığı için K matrisinin tersi alınamaz. Bu durumda denklem kümesinin çözümünün olmadığı sonucuna ulaşılır.

Örnek: Bir tiyatro oyununda 340 tane seyirci vardır. Yetişkinler için bilet 2 lira ve çocuklar için 1 lira olduğuna göre ve toplamda 490 liralık bilet satıldığına göre seyircilerin kaçı çocuktur?

Soruyu çözmek için istenen ve bilinmeyen bilgiler için karar değişkenleri oluşturalım. Örneğin x_1 yetişkin izleyici ve x_2 çocuk izleyici sayısı olsun. Şimdi değişkenler ile soruda verilen bilgileri denklemlere aktaralım.

Toplam izleyici sayısı 340 yetişkin ve çocukların toplamı olacağından aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$x_1 + x_1 = 340$$

Ayrıca her yetişkin 2 lira ödeyeceğinden x_1 yetişkin toplam 2*x_1 kadar ödeme yapacak, çocuk bileti 1 lira olduğundan ödemede 1*x_2 kadar olacaktır. Toplam ödemeler 490 olduğuna aşağıdaki denklem de yazılabilir.

$$2x_1 + x_2 = 490$$

Çözülmesi gereken iki denklem belirlendiğine göre K, X ve S matrisleri aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 340 \\ 490 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$➔$Minör\ K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

➔ $CofK = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

➔$K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

➔$detK = (1 * 1) - (1 * 2) = -1$

➔$K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{-1} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Artık çıkan eşitliği sonuç matrisi S ile çarparak değişken değerlerini belirleyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 340 \\ 490 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 190 \end{bmatrix}$$

Denklem çözümünde $x_1 = 150$ ve $x_2 = 190$ olarak bulunur. Yani oyunu izleyen 190 çocuk izleyici bulunmaktadır.

Örnek: 2 gitar modeline ait işgücü ve malzeme maliyetleri aşağıda verilmiştir. 1 haftalık 1800 lira işgücü ve 1200 lira malzeme maliyetine katlanıldığına göre, hangi modelden ne kadar üretileceğini matrisler yardımıyla belirleyiniz.

Model	İşgücü Maliyeti	Malzeme Maliyeti
A	30	20
B	40	30

Burada soruda istenen hangi modelden kaçar adet üretilmesi gerekliliğidir. Bu bilinmeyenler değişkenlere döndürülmelidir.

x_1: üretilecek A model gitar sayısı

x_2: üretilecek B model gitar sayısı

Firma bir A modeli üretmek için 30lira işçilik maliyetine ve bir B model gitar üretmek için 40lira işçilik maliyetine katlanmaktadır. x_1 adet A üretilirse bu maliyet 30*x_1 ve x_2 adet B modeli üretilirse $40 * x_2$ kadar olacaktır. Toplam işçilik maliyeti 1800 lira olduğuna göre aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$30x_1 + 40x_1 = 1800$$

Malzeme maliyetleri denklemi de benzer şekilde aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$20x_1 + 30x_1 = 1200$$

Şimdi bu denklem kümelerini çözmek için K, X ve S matrislerini yazalım.

$$K = \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1800 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$K = \begin{bmatrix} 30 & 40 \\ 20 & 30 \end{bmatrix}$ ➔ $Minör\ K = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 30 \end{bmatrix}$

➔ $CofK = \begin{bmatrix} 30 & 20 \\ 40 & 30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -40 & 30 \end{bmatrix}$

➔ $K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} 30 & -40 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}$

➔ $detK = (30 * 30) - (40 * 20) = 100$

➔ $K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{100} * \begin{bmatrix} 30 & -40 \\ -20 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/5 \\ -1/5 & 3/10 \end{bmatrix}$

Artık çıkan eşitliği sonuç matrisi S ile çarparak değişken değerlerini belirleyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -2/5 \\ -1/5 & 3/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1800 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Denklem çözümünde $x_1 = 60$ ve $x_2 = 0$ olarak bulunur. Yani firma sadece A modelinden 60 adet üretecek ve B modeli üretmeyecektir.

Cramer kuralı ile denklem çözümü:

Çok bilinmeyenli denklemler Cramer kuralı olarak adlandırılan özel bir yöntemle de çözülebilir.

Bu yöntemde K (Katsayı) ve S (Sonuç) matrisleri oluşturulur. Her bir değişken sütuna sırasıyla atanır. Daha sonra sonuç matrisi her bir sütun yerine geçirilerek yeni matrisler oluşturulur. Örneğin 3x3 boyutundaki bir matris için S matrisinin sütunlar yerine geçtiği 3 farklı matris oluşturulur. Bu matrislerinin determinantı bulunur ve bulunan sonuç orijinal katsayı matrisi determinantına bölünür. Üç matris için elde edilen değerler sırası ile değişken çözümlerini verir. Bir örnekle pekiştirelim.

Örnek: Aşağıdaki daha önceden çözümünü yatığımız denklem sisteminin çözümünü bu defa Cramer yöntemi ile bulmaya çalışalım.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 6$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$$

K ve S matrislerini belirleyerek soruyu çözmeye başlayalım.

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Orijinal soruda katsayılar matrisi için determinant değeri -36 olarak belirlenmişti.

Matris 3x3 olduğu için üç farklı matris oluşturmamız gerekmektedir. İlk matriste ilk sütun silinerek yerine S sütunu eklenir. İkinci ve üçüncü matrislerde benzer şekilde S sütunu diğer sütunların yerine atanır ve aşağıdaki K_1, K_2 ve K_3 matrisleri elde edilir.

$$K_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 1 & -1 \\ \mathbf{-2} & -4 & 2 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{6} & -1 \\ 3 & \mathbf{-2} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{6} \\ 3 & -4 & \mathbf{-2} \\ 2 & 5 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Şimdi ise bu üç matrisin determinantları bulunmalıdır.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{6} & 1 & -1 \\ \mathbf{-2} & -4 & 2 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 6 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \end{matrix}$$

$$T_1 = (6 * -4 * 1) + (-2 * 5 * -1) + (0 * 1 * 2) = -24 + 10 - 0 = -14$$

$$T_2 = (-1 * -4 * 0) + (2 * 5 * 6) + (1 * 1 * -2) = 0 + 60 - 2 = 58$$

$$detK_1 = |K_1| = T_1 - T_2 = -14 - 58 = -72$$

Çıkan sonuç aşağıdaki formüle yerleştirildiğinde birinci değişken için sonuç bulunmuş olur.

$$x_1 = \frac{1}{detK} * detK_1 = \frac{1}{-36} * -72 = 2$$

Şimdi aynı işlemleri ikinci matris için yapalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{6} & -1 \\ 3 & \mathbf{-2} & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$$T_1 = (1 * -2 * 1) + (3 * 0 * -1) + (2 * 6 * 2) = -2 + 0 + 24 = 22$$

$$T_2 = (-1 * -2 * 2) + (2 * 0 * 1) + (1 * 6 * 3) = 4 + 0 + 18 = 22$$

$$detK_2 = |K_2| = T_1 - T_2 = 22 - 22 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{detK} * detK_2 = \frac{1}{-36} * 0 = 0$$

Son olarak üçüncü matris için çözümü bulalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{6} \\ 3 & -4 & \mathbf{-2} \\ 2 & 5 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & -4 & -2 \end{matrix}$$

$$T_1 = (1 * -4 * 0) + (3 * 5 * 6) + (2 * 1 * -2) = 0 + 90 - 4 = 86$$

$$T_2 = (6 * -4 * 2) + (-2 * 5 * 1) + (0 * 1 * 3) = -48 - 10 + 0 = -58$$

$$detK_3 = |K_3| = T_1 - T_2 = 86 - (-58) = 144$$

$$x_3 = \frac{1}{detK} * detK_3 = \frac{1}{-36} * 144 = -4$$

Görüleceği üzere önceki çözüm ile tamamen aynı sonuçlar üretilmiştir.

Örnek: Aşağıdaki denklem kümesinin çözümünü Ters Matris ve Cramer yöntemi ile ayrı ayrı çözünüz.

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

$$5x_1 - 3x_2 - x_3 = 16$$

K, X ve S matrislerini belirleyerek soruyu çözmeye başlayalım.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Soruyu çözmek için K matrisi tersini alalım.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Minör\ K = \begin{bmatrix} 8 & -13 & 1 \\ -10 & 13 & -11 \\ -4 & 13 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow CofK = \begin{bmatrix} 8 & -13 & 1 \\ -10 & 13 & -11 \\ -4 & 13 & -7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 1 \\ 10 & 13 & 11 \\ -4 & -13 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K^{EK} = CofK^T = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow detK = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ x & -2 & x \\ x & -3 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 13 & x \\ x & 13 & x \\ x & -13 & x \end{bmatrix} = (1 * 13) + (-2 * 13) + (-3 * -13) = 26$$

$$\Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{detK} * K^{EK} = \frac{1}{26} * \begin{bmatrix} 8 & 10 & -4 \\ 13 & 13 & -13 \\ 1 & 11 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{26} & \frac{10}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{13}{26} & \frac{13}{26} & -\frac{13}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{11}{26} & -\frac{7}{26} \end{bmatrix}$$

Artık çıkan eşitliği sonuç matrisi S ile çarparak değişken değerlerini belirleyebiliriz.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{26} & \frac{10}{26} & -\frac{4}{26} \\ \frac{13}{26} & \frac{13}{26} & -\frac{13}{26} \\ \frac{1}{26} & \frac{11}{26} & -\frac{7}{26} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Denklem çözümünde $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ ve $x_3 = -2$ olarak bulunur.

Şimdi aynı soruyu Cramer yöntemi ile çözmeye çalışalım.

Öncelikle K_1, K_2 ve K_3 matrislerini S matrisi yardımıyla oluşturalım.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 1 & -3 \\ \mathbf{5} & -2 & 2 \\ \mathbf{16} & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{5} & -3 \\ 3 & \mathbf{5} & 2 \\ 5 & \mathbf{16} & -1 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{5} \\ 3 & -2 & \mathbf{5} \\ 5 & -3 & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

x_1 değişkeni için;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & 1 & -3 \\ \mathbf{5} & -2 & 2 \\ \mathbf{16} & -3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$$T_1 = (5 * -2 * -1) + (5 * -3 * -3) + (16 * 1 * 2) = 10 + 45 + 32 = 87$$

$$T_2 = (-3 * -2 * 16) + (2 * -3 * 5) + (-1 * 1 * 5) = 96 - 30 - 5 = 61$$

$$detK_1 = |K_1| = T_1 - T_2 = 87 - 61 = 26$$

$$x_1 = \frac{1}{detK} * detK_1 = \frac{1}{26} * 26 = 1$$

x_2 değişkeni için;

$$\begin{bmatrix} 2 & \mathbf{5} & -3 \\ 3 & \mathbf{5} & 2 \\ 5 & \mathbf{16} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \end{matrix}$$

$$T_1 = (2 * 5 * -1) + (3 * 16 * -3) + (5 * 5 * 2) = -10 - 144 + 50 = -104$$

$$T_2 = (-3 * 5 * 5) + (2 * 16 * 2) + (-1 * 5 * 3) = -75 + 64 - 15 = -26$$

$$detK_1 = |K_1| = T_1 - T_2 = -104 - (-26) = -78$$

$$x_2 = \frac{1}{detK} * detK_2 = \frac{1}{26} * -78 = -3$$

x_3 değişkeni için;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{5} \\ 3 & -2 & \mathbf{5} \\ 5 & -3 & \mathbf{16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{matrix}$$

$$T_1 = (2 * -2 * 16) + (3 * -3 * 5) + (5 * 1 * 5) = -64 - 45 + 25 = -84$$

$$T_2 = (5 * -2 * 5) + (5 * -3 * 2) + (16 * 1 * 3) = -50 - 30 + 48 = -32$$

$$detK_1 = |K_1| = T_1 - T_2 = -84 - (-32) = -52$$

$$x_3 = \frac{1}{detK} * detK_3 = \frac{1}{26} * -52 = -2$$

Soru 1: G1, G2 ve G3 gibi üç gıda maddesinin her birsinde bulunan A, B, C ve D vitaminlerinin miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	A	B	C	D
G1	5	5	0	0
G2	3	0	2	1
G3	1	1	2	5

Buna göre aşağıdaki soruları matris notasyonu ile cevaplayınız.

a. G1'den 5, G2'den 10 ve G3'ten 8 ünite alan bir kimse her vitaminden kaçar ünite almış olur?
b. Gıdalara yalnızca içerdikleri vitaminlere göre fiyat konulmaktadır. A, B, C ve D vitaminlerinin 1 biriminin maliyeti sırası ile 10, 20, 25 ve 50 TL olduğuna göre, her tip gıdanın fiyatını belirleyiniz.
c. G1'den 5, G2'den 10 ve G3'ten 8 ünite alan bir kimse toplamda ne kadar ödeme yapmalıdır?

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 63 & 33 & 36 & 50 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 10 \\ 20 \\ 25 \\ 50 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 150 \\ 130 \\ 330 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 8 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 150 \\ 130 \\ 330 \end{vmatrix} = 750 + 1300 + 2640 = 4690TL$$

Soru 2: Bir yem fabrikası soya, mısır ve buğday karıştırarak iki farklı yem elde etmektedir. Bu iki farklı yemin 15kg lik torbalarındaki karışım oranları ve yeme ait gelecek 3 aylık talepler aşağıda verilmiştir. Eğer firma mısır için 2TL, Soya için 3 TL ve Buğday için 5TL maliyete katlanıyor ise, 3 aylık toplam maliyet ne olmalıdır. Soruyu <u>Matris Notasyonu</u> ile çözünüz

	Karışım Oranları		
	Mısır	Soya	Buğday
YEM 1	9 kg	4 kg	2 kg
YEM 2	7 kg	5 kg	3 kg

	Aylık Talepler		
	Ay 1	Ay 2	Ay 3
YEM 1	200 adet	250 adet	300 adet
YEM 2	300 adet	400 adet	400 adet

<u>Toplam Talep (Ay 1 + Ay 2 + Ay 3)</u>

$$\begin{bmatrix}200\\300\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}250\\400\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}300\\400\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}750\\1000\end{bmatrix}$$

<u>Toplam Hammadde (karışım miktarları * talep)</u>

$$\begin{bmatrix}9 & 7\\4 & 5\\2 & 3\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}750\\1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9*750+7*1000\\4*750+5*1000\\2*750+3*1000\end{bmatrix}==>\begin{bmatrix}13750\\8000\\4500\end{bmatrix}$$

<u>Toplam Maliyet (Birim maliyet * miktar)</u>

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}13750\\8000\\4500\end{bmatrix}=74000\ TL$$

Soru 3: Bir mağazanın elinde A, B, C, ve D ürünlerinden sırası ile 120, 180, 90 ve 200 adet bulunmaktadır. Firma bir günlük satış sonrasında stokları kontrol ettiğinde sırasıyla 50, 40, 70 ve 120 adet ürünün satılmadan kaldığını gözlemlemiştir. Ürünlerin Satınalma maliyetleri ve satış fiyatları aşağıdaki gibidir.

	ÜRÜNLER			
	A	**B**	**C**	**D**
Satınalma Maliyeti	40	45	55	70
Satış Fiyatı	60	75	85	100

Firmanın bir günlük toplam kârını **matris notasyonu** kullanarak çözünüz ***(15 Puan).***

Günlük Satış = Dönem başı stok – Dönem Sonu Stok = $\begin{bmatrix} 120 \\ 180 \\ 90 \\ 200 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 \\ 40 \\ 70 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 \\ 140 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix}$

Birim Kar = Satış Geliri – Toplam Maliyet

$= [60 \quad 75 \quad 85 \quad 100] - [40 \quad 45 \quad 55 \quad 70] = [20 \quad 30 \quad 30 \quad 30]$

Toplam Kar = Satış Miktarı * Birim Kar

$= [20 \quad 30 \quad 30 \quad 30] * \begin{bmatrix} 70 \\ 140 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} = 1400 + 4200 + 600 + 2400 = 8600\, TL$

Soru 4: Bir firma üç tip (A, B ve C) ürün üretmektedir. Her bir ürün için satış fiyatları, maliyetler ve son bir aylık satış rakamları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	ÜRÜNLER		
	A	**B**	**C**
Birim Maliyet	27	32	35
Satış Fiyatı	45	48	60
Son bir aylık talep	250	350	300

Firmanın son bir aylık toplam kârını **matris notasyonu** kullanarak çözünüz ***(15 Puan).***

Birim Kar = Satış Geliri – Toplam Maliyet = $[45 \quad 48 \quad 60] - [27 \quad 32 \quad 35] = [18 \quad 16 \quad 25]$

Toplam Kar = Satış Miktarı * Birim Kar

$$= [18 \quad 16 \quad 25] * \begin{bmatrix} 250 \\ 350 \\ 300 \end{bmatrix} = 4500 + 5600 + 7500 = 17600TL$$

Soru 5: $5x - 2y + z = 6$
$x - y + z = -2$
$-x + 2y + 3z = 2$

Yanda verilen üç bilinmeyenli denklem kümesinin çözümünü **Ters Matris veya Cramer Yöntemi ile çözünüz *(30 Puan).***

TERS MATRİS

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad ==> \qquad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$MinA = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -8 & 16 & 8 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix} ==> CofA = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -8 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} ==>$$

$$EkA = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -1 \\ -4 & 16 & -4 \\ 1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$ikinci\ satırdan\ determinant\ hesaplayalım. ==> DetA = 1 * 8 - 1 * 16 - 1 * 8 = -16$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/16 & -8/16 & 1/16 \\ 4/16 & -16/16 & 4/16 \\ -1/16 & 8/16 & 3/16 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$x = 3$$

$$y = 4$$

$$z = -1$$

CRAMER

Determinantın bulunması=

$$x = \frac{1}{-16} * det \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} * -48 = 3$$

$$y = \frac{1}{-16} * det \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} * -64 = 4$$

$$z = \frac{1}{-16} * det \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} * 16 = -1$$

Soru 6: $2x + 3y + z = -1$
$x - 2y - z = 4$
$3x - y - 2z = 1$

Yanda verilen üç bilinmeyenli denklem kümesinin çözümünü **Ters Matris veya Cramer Yöntemi ile çözünüz.**

TERS MATRİS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad ==> \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$MinA = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -5 & -7 & -11 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix} ==> CofA = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & -7 & 11 \\ -1 & 3 & -7 \end{bmatrix} ==> EkA = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -7 & 3 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$İlk\ satırdan\ determinant\ hesaplayalım. ==> DetA = 2 * 3 - 3 * 1 + 1 * 5 = 8$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 & -1/8 \\ -1/8 & -7/8 & 3/8 \\ 5/8 & 11/8 & -7/8 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$x = (-1 * (3/8) + 4 * (5/8) + 1 * (-1/8) = 2$$
$$y = (-1 * (-1/8) + 4 * (-7/8) + 1 * (3/8) = -3$$
$$z = (-1 * (5/8) + 4 * (11/8) + 1 * (-7/8) = 4$$

CRAMER

Determinantın bulunması=

$$x = \frac{1}{8} * det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} * 16 = 2$$

$$y = \frac{1}{8} * det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} * -24 = -3$$

$$z = \frac{1}{8} * det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} * 32 = 4$$