Elektrik Devre Temelleri

Hafta 4

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Ayan

DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN DEVRE ELEMANLARI

Teorem:

$$(v_a, i_a) \in N$$
$$(v_b, i_b) \in N$$

ve α, β sonlu reel sayılar olduğunda $(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \in N$ şartı sağlanıyor ise, bu eleman doğrusal elemandır. Aksi takdirde yani $(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \notin N$ olduğunda bu eleman doğrusal olmayan elemandır.

Örnek 1:

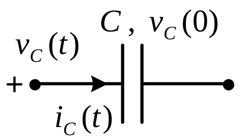
$$v_a(t) = R.i_a(t)$$
$$v_b(t) = R.i_b(t)$$

$v(t) = R.i(t)$ ve $i(t) = \alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)$ olmak üzere aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$v(t) = R.(\alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)) = \alpha.\underbrace{R.i_a(t)}_{v_a} + \beta.\underbrace{R.i_b(t)}_{v_b} = \alpha.v_a(t) + \beta.v_b(t)$$

Buna göre direnç elemanı doğrusal bir elemandır deriz.

Örnek 2:



$$v_a(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau + v(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau = v_a(t) - v(0)$$

$$v_b(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau + v(0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau = v_b(t) - v(0)$$

$v(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(\tau).d\tau + v(0)$ ve $i(t) = \alpha.i_a(t) + \beta.i_b(t)$ olmak üzere;

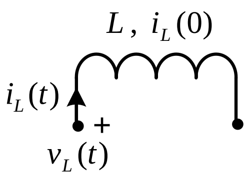
$$v(t) = \frac{1}{C}\cdot\int_0^t (\alpha.i_a(\tau) + \beta.i_b(\tau)).d\tau + v(0)$$

$$v(t) = \alpha\cdot\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_a(\tau).d\tau + \beta\cdot\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i_b(\tau).d\tau + v(0) = \alpha.[v_a(t) - v(0)] + \beta.[v_b(t) - v(0)] + v(0)$$

$$v(t) = \alpha.v_a(t) + \beta.v_b(t) + v(0) - \alpha.v(0) - \beta.v(0)$$

Şayet $v(0)$ başlangıç gerilimi sıfır ise kapasite elemanı doğrusal, sıfırdan farklı ise doğrusal değildir.

Ödev:



Kapasite elemanının incelenmesindeki yol esas alınmak suretiyle, indüktans elemanının başlangıç akım değeri sıfır alındığında, bu elemanının doğrusal eleman olduğunu gösteriniz.

Çarpımsallık ve toplamsallık(süperpozisyon) teoremi(özelliği):

Teorem: Elektriksel bir devre elemanı için,

$(v_a, i_a) \in N$

$(v_b, i_b) \in N$

ve α, β sonlu reel sayılar olmak üzere, $(\alpha.v_a, \alpha.i_a) \in N$ ise çarpımsallık özelliği, $(v_a + v_b, i_a + i_b) \in N$ ise toplamsallık özelliği sağlanıyor demektir. Bütün doğrusal elemanlar çarpımsallık ve toplamsallık özelliğini sağlarlar.

İspat:

$(\alpha.v_a + \beta.v_b, \alpha.i_a + \beta.i_b) \in N$ özelliğinin sağlanması gerekir. Buna göre;

$\beta = 0$ ise $(\alpha.v_a, \alpha.i_a) \in N$ olur. Eleman lineer ise bu çarpımsallık özelliğini gösterir.

$\alpha = \beta = 1$ ise $(v_a + v_b, i_a + i_b) \in N$ olur. Eleman doğrusal ise toplamsallık özelliğini gösterir.

Uygulama 1. Gerilim ile yük arasındaki bağıntısı $v(t) = q(t) - q^3(t)$ şeklinde verilen kapasite elemanının aktif mi yoksa pasif mi olduğunu belirleyiniz.

Bir devre elemanının aktif olması için aşağıdaki bağıntıyı sağlaması gerekir.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt < 0$$

Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$v(t) = q(t) - q^3(t)$ ile $i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt}$ bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} [q(t) - q^3(t)].\frac{dq(t)}{dt}.dt = \int_{0}^{q(t)} [q(t) - q^3(t)].dq(t) = \left. \frac{q^2(t)}{2} - \frac{q^4(t)}{4} \right|_{0}^{q(t)}$$

sonucu elde edilir. Bu ifade $q(t)>1$ değerleri için negatif olacağından, bu eleman aktif eleman, $q(t)\leq 1$ değerleri için ise pozitif olacağından, pasif eleman olacaktır.

Uygulama 2. Gerilim ile yük arasındaki bağıntısı $v(t)=1+q(t)+q^2(t)$ şeklinde verilen kapasite elemanının yükünü $q(t_0)=0$ Coulomb dan $q(t)=1$ Coulomb a çıkarmak için gereken enerjiyi bulunuz.

Bir devre elemanının enerji bağıntısı aşağıdaki gibi verilir.

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt$$

Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

$v(t)=1+q(t)+q^2(t)$ ile $i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}$ bağıntısını yukarıdaki denklemde yerine koyarak entegrasyonu tamamlarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}[1+q(t)+q^2(t)].\frac{dq(t)}{dt}.dt=\int_{0}^{1}[1+q(t)+q^2(t)].dq(t)$$

$$=q(t)+\frac{q^2(t)}{2}+\frac{q^3(t)}{3}\bigg|_0^1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}\ \text{Joule}$$

Uygulama 3. Akım ile akı arasındaki bağıntısı $i(t)=\dfrac{1}{t}\cdot\tanh\phi(t)$ ve akım ifadesi $i(t)=\sin t$ şeklinde verilen elemanının gerilim ifadesini bulunuz.

İlk bakışta bu elemanın bir indüktans (self) elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. İndüktans elemanının sargılarında indüklediği elektromotor kuvvet(gerilim) ile akı arasındaki bağıntı ise aşağıdaki gibi idi.

$$v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Bu elemana ait akım ile akı arasındaki ifadeyi açacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$i(t)=\frac{1}{t}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot(e^{\phi(t)}-e^{-\phi(t)})}{\frac{1}{2}\cdot(e^{\phi(t)}+e^{-\phi(t)})}$$

$$i(t).t.(e^{\phi(t)}+e^{-\phi(t)})-(e^{\phi(t)}-e^{-\phi(t)})=0$$

$$i(t).t.(e^{\phi(t)}+\frac{1}{e^{\phi(t)}})-(e^{\phi(t)}-\frac{1}{e^{\phi(t)}})=0$$

$$i(t).t.(e^{2\phi(t)}+1)-(e^{2\phi(t)}-1)=0$$

$$e^{2\phi(t)}[i(t).t-1]=-[i(t).t+1]$$

$$e^{2\phi(t)}=-\frac{i(t).t+1}{i(t).t-1}\quad\Rightarrow\quad 2\phi(t)=-\ln\frac{i(t).t+1}{i(t).t-1}$$

$$\phi(t)=-\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{i(t).t+1}{i(t).t-1}\quad\Rightarrow\quad\phi(t)=-\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{t.\sin t+1}{t.\sin t-1}$$

Son tahlilde elde edilmiş olan $\phi(t)$ ifadesi aşağıdaki gibi zamana göre türetilmek suretiyle gerilim ifadesi bulunur.

$$v(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Uygulama 4. Akım ile akı arasındaki bağıntısı $\phi(t)=-i(t)+i^3(t)$ ifadesi ile verilen bir devre elemanının, aktif bir eleman mı yoksa pasif bir eleman mı olduğunu belirleyiniz.

İlk bakışta bu elemanın bir indüktans (self) elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişmeyen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bir devre elemanının aktif olması için aşağıdaki bağıntıyı sağlaması gerekir.

$$W(t)=\int_{-\infty}^{t}v(t).i(t).dt<0$$

Aynı zamanda bir indüktans elemanının sargılarında indüklediği elektromotor kuvvet (gerilim) ile akı arasındaki bağıntı ise aşağıdaki gibi idi.

$$v(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Verilen akı ifadesini zamana göre türetmek ve enerji ifadesinde yerine koymak suretiyle aşağıdaki denkleme geliriz.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} i(t).[-\frac{di(t)}{dt} + 3i^2(t) \cdot \frac{di(t)}{dt}].dt$$

$$W(t) = \int_{0}^{i(t)} [-i(t) + 3i^3(t)].di(t) = -\frac{i^2(t)}{2} + \frac{3i^4(t)}{4}\Bigg|_0^{i(t)}$$

Bu ifade en az bir değer için sıfırdan küçük olduğundan bu eleman aktif bir elemandır.

Uygulama 5. Yük ile gerilim arasındaki bağıntısı $q(t) = v^3(t)$ şeklinde verilen devre elemanının aktif mi yoksa pasif mi olduğunu belirleyiniz.

İlk bakışta bu elemanın bir kapasite elemanı olduğunu, doğrusal olmadığını ve zamanla değişmeyen bir eleman olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca kapasite elemanının akımı ile üzerindeki yük arasında aşağıdaki bağıntı geçerli idi.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Verilen yük ifadesini zamana göre türetip enerji bağıntısında yerine koyacak olursak aşağıdaki ifadeye geliriz.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t).i(t).dt = v(t).3v^2(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} \cdot dt = \int_{0}^{v(t)} 3v^3(t).dv(t) = \frac{3v^4(t)}{4}\Bigg|_0^{v(t)} \geq 0$$

Her $v(t)$ değeri için yukarıdaki ifade pozitif olduğundan bu devre elemanı pasif bir elemandır.

Uygulama 6. Tanım bağıntısı $v(t) = i(t) + 1$ ile verilen elemanın toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerini sağlayıp sağlamadıklarını belirleyiniz.

$v(t) = i(t) + 1$ ifadesinde, önce $v(t)$ yerine $v(t) = \alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t})$ ve ardından da $i(t)$ yerine de $\alpha i_a(t) + \beta i_b(t)$ koymak suretiyle aşağıdaki bağıntıyı elde edebiliriz.

$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t}) = (\alpha i_a(t) + \beta i_b(t)) + 1$$
$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(\mathrm{t}) = \alpha i_a(t) + 1 + \beta i_b(t)$$

Diğer taraftan $v_a(t) = i_a(t) + 1$ ve $v_b(t) = i_b(t) + 1$ olduğundan, $\alpha v_a(t)$ ve $\beta v_b(t)$ ifadelerini elde etmek için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\alpha v_a(t) = \alpha(i_a(t) + 1) = \alpha i_a(t) + \alpha$$
$$\beta v_b(t) = \beta(i_b(t) + 1) = \beta i_b(t) + \beta$$

Yukarıdaki iki ifadeyi topladığımızda aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

$$\alpha v_a(t) + \beta v_b(t) = \alpha i_a(t) + \alpha + \beta i_b(t) + \beta$$

Toplamsallık ve çarpımsallık özelliklerinin sağlanması için yukarıda elde ettiğimiz iki eşitliğin sağlanması gerekmektedir. Bu şekilde elde ettiğimiz $\alpha v_a(t) + \beta v_b(t)$ ifadesi ile yukarıda elde ettiğimiz $\alpha v_a(t) + \beta v_b(t)$ ifadesi birbirine eşit olmadığından, bu elemanın toplamsallık ve çarpımsallık özelliğini sağlanmadığını söyleyebiliriz.