Uniformisierung kompakter Riemannscher Flächen

Bachelor-Seminar

Tim Adler

7. Januar 2014

Als erste müssen Begriffe geklärt werden. Was ist eine Riemannsche Fläche? Warum sind sie interessant?

In Funktionentheorie betrachtet man die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ und holomorphe bzw. meromorphe Funktionen auf ihr. Das Konzept soll verallgemeinert werden. Wir wollen gekrümmte Flächen betrachten und Funktionentheorie auf ihnen machen.

Definition 0.1 (Riemannsche Fläche). Eine *Riemannsche Fläche* X ist eine 2-dimensionale zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit, deren Kartenwechselabbildungen aufgefasst als Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ holomorph sind.

Zeichne das Bild eines Torus mit Kartenabbildung.

Wir wollen, dass unsere Räume X lokal wie die Ebene $\mathbb{C}$ aussehen, global können sie jedoch sehr verschieden sein, was sich z.B. auf die Existenz holomorpher und meromorpher Funktionen auswirkt.

Neue Struktur wurde definier $\Rightarrow$ Klassifikation?

Ziel der Arbeit: Klassifiziere zumindest alle *kompakten* Riemannschen Flächen. Dazu muss noch kurz gesagt werden, was die strukturerhaltenden Abbildungen sind:

Definition 0.2. Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt *holomorph*, falls für jede Karte (U, z) von X und jede Karte (V, w) von Y mit $f(U) \subset W$ die Abbildung

$$w \circ f \circ z^{-1} : z(U) \subset \mathbb{C} \to w(V) \subset \mathbb{C}$$

holomorph im Sinne der Funktionentheorie 1 ist. f heißt *biholomorph*, falls f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind. Zwei Riemannsche Flächen X und Y heißen *konform äquivalent*, falls es eine biholomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt.

Wir wollen also alle Riemannschen Flächen bis auf konforme Äquivalenz klassifizieren. Dieses Resultat lässt sich relativ einfach formulieren, allerdings brauchen wir noch einen Einschub über kompakte, orientierbare topologische Flächen. Diese sind letztendlich Riemannsche Flächen, wenn man die komplexe Struktur vergisst.

Für diese ist das Geschlecht definiert:

Definition 0.3. Das Geschlecht einer kompakten, orientierbaren Fläche ist die Anzahl ihrer Löcher.

Wie man sich leicht vorstellen kann, sind zwei topolgische Flächen genau dann äquivalent, d.h. homöomorph, wenn sie das gleiche Geschlecht haben. Denke an Tasse und Torus.

Deshalb ist es kaum verwunderlich, dass das Geschlecht auch bei unserem Uniformisierungssatz eine wichtige Rolle spielt.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel sind Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen. Wir können jeder Fläche X die Gruppe

$$\mathrm{Aut}(X) = \{f : X \to X \mid f, f^{-1} \text{ holomorph}\}$$

zuordnen. Sie wirkt klarerweise auf X und es zeigt sich, dass Quotientenräume aus diskretoperierenden Untergruppen ohne Fixpunkte wieder Riemannsche Flächen erzeugen!

Satz 0.4. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht g. Dann gilt:

- $g = 0 \quad \Rightarrow \quad X \cong \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- $g = 1 \quad \Rightarrow \quad X \cong \mathbb{C}/\Gamma$ mit $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$, γ_i linear unabhängig über $\mathbb{R}$
- $g \geq 2 \quad \Rightarrow \quad X \cong \mathbb{H}/G$ und $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ geeignet.

Was ist die Herangehensweise an diesen Satz? Auffälligkeit: $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{P}^1$ sind einfach zusammenhängend (haben also keine Löcher).

Können wir jeder kompakten Riemannschen Fläche eine andere nicht notwendigerweise kompkate Riemannsche Fläche ohne Löcher zuordnen? Antwort: Ja! und die Theorie heißt Überlagerungstheorie.

Satz 0.5. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, dann existiert eine einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche $\tilde{X}$ und eine diskret- und fixpunktfreioperierende Untergruppe $G \leq \mathrm{Aut}(\tilde{X})$, so dass

$$X \cong \tilde{X}/G$$

gilt. Außerdem ist $G \cong \pi_1(X)$.

Bild für Fundamentalgruppe malen.

Dieser Satz ist schon alles andere als trivial, aber wir müssen ihn für diesen Vortrag hinnehmen.

Beweisidee: Wir charakterisieren einfachzusammenhängende Riemannsche Flächen und deren Automorphismengruppen. Dann haben wir alle kompakten verstanden.

In der Funktionentheorie 1 wird der (kleine) Riemannsche Abbildungssatz bewiesen er besagt, dass jedes echte einfach zsh. Gebiet in $\mathbb{C}$ konform äquivalent zum Einheitskreis und damit zu $\mathbb{H}$ ist. Wir verallgemeinern dieses Resultat auf Riemannsche Flächen. Dort lautet es:

Satz 0.6. Sei X eine Riemannsche Fläche $Y \subset X$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet. Dann ist Y konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

Der Großteil der Arbeit beschäftigt sich mit diesem Resultat. Letztendlich gibt es viele Parallelen zum Beweis wie in der Funktionentheorie 1, aber es müssen eben erstmal viele der Sätze der Funktionentheorie auf Riemannsche Flächen ausgeweitet werden.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Runge} \arrow[dr] & \text{Weierstraß} \arrow[d] & & \text{Dirchlet} \arrow[dll] & \\
& \text{RMT} \arrow[dr] & & \text{Auto} \arrow[dl] & \\
& & \text{Überlagerung} \arrow[dd] & & \\
& & & & \text{RiRo} \arrow[dll] \\
& & \text{Uni} & &
\end{tikzcd}
$$

Für große Teile dies RMT ist wichtig, dass Funktionentheorie auf *nicht*-kompakten Riemannschen Flächen quasi genau so funktioniert wie in $\mathbb{C}$. Dazu müssen wir aber erstmal genügend viele holomorphe Funktionen konstruieren können. Dazu nutzen wir die enge Verwandtschaft zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen aus.

Den Rest der Zeit wollen wir uns nun mit den Automorphismengruppen von $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{P}^1$ auseinandersetzen. Wir erinnern uns an die Funktionentheorie 1:

Satz 0.7.
- $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$
- $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$
- $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$

3

Aut($\mathbb{C}$) berechnet sich über den Satz von Casorati-Weierstraß. Aut($\mathbb{P}^1$) lässt sich auf Aut($\mathbb{C}$) zurückführen. Aut($\mathbb{H}$) ist etwas involvierter und wird am einfachsten mit Aut(B) geführt.

Wir versuchen die Automorphismengruppen besser zu verstehen und beginnen mit $\mathbb{P}^1$.

Proposition 0.8. Jedes Element $M \in$ Aut($\mathbb{P}^1$) besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann muss ein Fixpunkt $M\langle z\rangle = z$ die Gleichung

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

erfüllen. Falls $c \neq 0$ gilt, so erhalten wir als Fixpunkte

$$z_{1,2} = \frac{a}{2c} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4c^2} - \frac{d-b}{c}}.$$

Falls $c = 0$ gilt, so muss $a \neq d$ gelten, ansonsten wäre det $M = 0$ und wir erhalten als Fixpunkt

$$z = \frac{b}{d-a}.$$

□

Das bedeutet $\mathbb{P}^1$ kann nur sich selbst überlagern und nichts anderes!

Nun wollen wir Aut($\mathbb{C}$) etwas besser verstehen. Dazu wenden wir uns kurz dem $\mathbb{R}^n$ und Gittern zu:

Definition 0.9. Sei V ein $n-$dimensionaler, reeller Vektorraum. Eine additive Untergruppe $\Gamma \subset V$ heißt *Gitter*, falls n linear unabhängige $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in V$ existieren, so dass

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_2$$

gilt.

Lemma 0.10. Sei V ein reeller Vektorraum und $\Gamma \subset V$ eine additive Untergruppe. Dann ist Γ genau dann ein Gitter, wenn

1. Γ diskret ist und
2. Γ nicht in einem echten Untervektorraum von V enthalten ist.

Beweis. Falls Γ ein Gitter ist, ist die Aussage aus der Definition klar. Erfülle also Γ die beiden Bedingungen. Wir gehen nun per Induktion über $n = \dim V$ vor. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Gelte also die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Da $\Gamma \subset V$ mit $\dim V = n + 1$ in keinem echten Untervektorraum von V enthalten ist, existieren linear unabhängige $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \Gamma$. Sei $V_1 := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ und $\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1$. Nun ist Γ_1 wieder diskret und in keinem echten Untervektorraum von V_1 enthalten. Weiterhin ist $\dim V_1 = n$, also können wir die Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten linear unabhängige $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma_1 \subset \Gamma$, so dass $\Gamma_1 = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_n$ gilt. Nun bilden die γ_i bereits eine Basis von V_1 und fügen wir x_{n+1} hinzu, erhalten wir sogar eine Basis von V, das bedeutet aber, dass wir zu jedem $x \in \Gamma \subset V$, eindeutig bestimmte $c_i(x), c(x) \in \mathbb{R}$ finden, so dass

$$x = c_1(x)\gamma_1 + \cdots + c_n(x)\gamma_n + c(x)x_{n+1}$$

gilt. Wir betrachten nun

$$P := \{\lambda_1\gamma_1 + \cdots + \lambda_n\gamma_n + \lambda x_{n+1} \mid \lambda_i, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Dieses P ist kompakt und da Γ diskret ist, folgt dass $P \cap \Gamma$ endlich ist. Weiterhin ist $(\Gamma \cap P) \setminus V_1$ nicht leer, da x_{n+1} enthalten ist. Damit existiert ein $\gamma_{n+1} \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1$ mit

$$c(\gamma_{n+1}) = \min\{c(x) \mid x \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1\} \in]0, 1].$$

Wir behaupten nun, dass $\Gamma = \Gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_{n+1}$ ist. Sei dazu $x \in \Gamma$. Dann existieren $n_j \in \mathbb{Z}$, so dass

$$x' := x - \sum_{j=1}^{n+1} n_j\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\gamma_j + \lambda x_{n+1}$$

mit $0 \leq \lambda_j < 1$ und $0 \leq \lambda < c(\gamma_{n+1})$ gilt. Da $x' \in \Gamma \cap P$ liegt und $c(\gamma_{n+1})$ minimal von 0 verschieden gewählt wurde, muss $\lambda = 0$ sein. Also liegt $x' \in \Gamma \cap V_1 = \Gamma_1$. Damit sind die λ_i ganzzahlig und die einzig verbleibende Möglichkeit ist $\lambda_i = 0$. Dann ist aber x' bereits 0 und wir erhalten

$$x = \sum_{j=1}^{n} n_j\gamma_j \in \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_n.$$

$\square$

Proposition 0.11. Sei $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ eine fixpunktfrei- und diskretoperrierende Untergruppe dann ist Γ eine der folgenden Gruppen:

- $\Gamma = \{\mathrm{id}\}$
- $\Gamma = \{z \mapsto z + n\gamma \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\gamma \in \mathbb{C}^*$.
- $\Gamma = \{z \mapsto z + n\gamma_1 + m\gamma_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $f \in \Gamma$. Dann existieren $a \in \mathbb{C}^*$ und $b \in \mathbb{C}$, so dass $f(z) = az + b$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gilt. Angenommen $a \neq 1$. Dann ist

$$z = \frac{b}{1-a}$$

ein Fixpunkt. Also ist $f(z) = z + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir definieren

$$\tilde{\Gamma} = \{f(0) \mid f \in \Gamma\} \leq \mathbb{C}.$$

Dann ist

$$\Gamma = \{z \mapsto z + \gamma \mid \gamma \in \tilde{\Gamma}\}$$

Da Γ diskret operiert ist $\tilde{\Gamma}$ eine diskrete Untergruppe. Die haben wir aber charakterisiert und damit ist $\tilde{\Gamma}$ entweder ein 0, 1 oder 2 dimensionales Gitter. Das entspricht aber gerade den obigen drei Fällen. □

Nun sollten wir Aut($\mathbb{H}$) als nächste verstehen. Das ist jedoch eine sehr schwierige Aufgabe und füllt ganze Bücher. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit der Aussage, dass eine fixpunktfrei- und diskretoperierende Untergruppe die abelsch ist, automatisch zyklisch sein muss.

Satz 0.12. Sei $G \leq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ eine Fuchssche Gruppe. Dann ist G genau dann abelsch, wenn G zyklisch ist.

Jetzt können wir versuchen den Uniformisierungssatz zu beweisen.

Beweis. Der erste Fall ergibt sich direkt aus dem Satz von Riemann-Roch [**For**] und müssen wir leider als gegeben annehmen.

Sei nun also $g \geq 1$ und bezeichne $\tilde{X}$ die Universelle Überlagerung von X. Dann ist $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und aus dem Riemannschen Abbildungssatz **??** folgt, dass $\tilde{X}$ konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder B ist. Da wir wissen, dass B konform äquivalent zu $\mathbb{H}$ ist, können wir in der Betrachtung genau so gut $\mathbb{H}$ verwenden. Nun wissen wir nach Lemma **??**, dass jeder Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt keine fixpunktfrei-operierende Untergruppe von Aut($\mathbb{P}^1$). Also überlagert $\mathbb{P}^1$ nur sich selbst und es müsste $X \cong \tilde{X} \cong \mathbb{P}^1$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zu $g \neq 0$. Dementsprechend ist die Universelle Überlagerung von X entweder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

Sei nun $g \geq 2$. Angenommen $\tilde{X} \cong \mathbb{C}$. In Lemma **??** wurden alle diskreten, fixpunkfreioperierenden Untergruppen von Aut($\mathbb{C}$) bestimmt. Die zugehörigen Riemannschen Flächen sind dann $X \cong \mathbb{C}$, $X \cong \mathbb{C}^\times$ oder $X \cong {}^{\mathbb{C}}/_{\Gamma}$ für ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Nun sind aber die ersten beiden Möglichkeiten nicht kompakt und die Dritte hat Geschlecht $g = 1$. Ein Widerspruch. Also muss die Universelle Überlagerung von X konform äquivalent zu $\mathbb{H}$ sein und damit ist X konform äquivalent zu ${}^{\mathbb{H}}/_{G}$ für eine Fuchssche Gruppe $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

Nun fehlt noch der Fall $g = 1$. Angenommen $\tilde{X} \cong \mathbb{H}$. Wir wissen aus Satz **??**, dass

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong G := \mathrm{Deck}(\tilde{X} \setminus X) \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \tag{1}$$

gelten müsste. Insbesondere müssten wir eine abelsche Fuchssche Gruppe finden, allerdings wissen wir nach Satz 0.12, dass diese alle zyklisch sind. Damit ist G also isomorph zu $\mathbb{Z}$ oder zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass Gleichung (1) gelten soll. Also ist die Universelle Überlagrung von X konform äquivalent zu $\mathbb{C}$. Die Gruppe der Decktransformation ist also eine diskrete abelsche Untergruppe von $\mathbb{C}$ und muss isomorph zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ sein. In Lemma **??** sind die möglichen diskreten Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ charakterisiert und die einzige Möglichkeit, die isomorph zu $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist, ist die des Gitters. Also ist die $\mathrm{Deck}(\tilde{X} \setminus X)$ isomorph zu einem Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Insgesamt erhalten wir, dass X konform äquivalent zu $\mathbb{C}/\Gamma$ ist. $\square$