

Universität Heidelberg  
Fakultät für Mathematik & Informatik  
Im Neuenheimer Feld 288  
69120 Heidelberg

Bachelor-Arbeit

# Uniformisierung kompakter Riemannscher Flächen

Tim Adler

Abgabe-Datum

Betreut durch AR Dr. Hendrik Kasten

## Liste der noch zu erledigenden Punkte

[ausrechnen](#) . . . . . 26

## 1 Der Serresche Dualitätssatz

In diesem Kapitel wollen wir  $H^1(\mathcal{O}, X)^*$  für eine kompakte Riemannsche Fläche  $X$  in direkten Zusammenhang mit dem Raum der holomorphen 1-Formen  $\Omega(X)$  stellen. Da es sich bei  $H^1(\mathcal{O}, X)$  um einen endlich-dimensionalen Vektorraum handelt, zieht dies das verblüffende Resultat nach sich, dass auch  $\Omega(X)$  endlich-dimensional ist, genauer ergibt sich

$$\dim \Omega(X) = g,$$

wobei  $g$  das Geschlecht der Fläche  $X$  bezeichnet.

Dieses Resultat für sich ist bereits erstaunlich und wird eine zentrale Rolle in unserem Uniformisierungssatz spielen, wir können es jedoch zusätzlich direkt verwenden, um auf sehr elegante Art und Weise das Geschlecht des Torus zu bestimmen.

Das gesamte Kapitel ist im Wesentlichen sehr technisch, da zunächst das Vokabular entwickelt werden muss, um unseren gewünschten Isomorphismus definieren zu können. Anschließend sind noch weitere technische Lemmata nötig, um die Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Ein wichtiges Hilfsmittel wird das Residuum einer Kohomologieklassse darstellen und wir starten direkt mit dessen Definition.

**Definition 1.1.** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Nach [For99, Satz 15.14] ist

$$0 \rightarrow \Omega \rightarrow \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{(2)} \rightarrow 0$$

exakt und es gilt

$$H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) / d\mathcal{E}^{1,0}(X).$$

Sei  $\zeta \in H^1(X, \Omega)$  und  $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$  ein Repräsentant von  $\zeta$ . Setzen wir

$$\text{res}(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega,$$

so ist diese Definition aufgrund von [For99, Satz 10.20] repräsentantenunabhängig.

**Definition 1.2** (Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen). Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\mathcal{M}^{(1)}$  die Garbe der meromorphen 1-Formen auf  $X$ . Wählen wir eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $X$ , so nennen wir

$$\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

eine *Mittag-Leffler-Verteilung*, falls für beliebige  $i, j \in I$  die 1-Form  $\omega_j - \omega_i$  auf  $U_i \cap U_j$  holomorph ist, d.h.  $\delta\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$ .

Wir bezeichnen mit  $[\delta\mu] \in H^1(X, \Omega)$  die Kohomologieklassse von  $\delta\mu$ . Weiterhin definieren wir zu  $a \in X$

$$\text{res}_a(\mu) := \text{res}_a(\omega_i),$$

wobei  $a \in U_i$ . Falls  $a \in U_i \cap U_j$ , so gilt  $\text{res}_a(\omega_i) = \text{res}_a(\omega_j)$ , denn  $\omega_j - \omega_i$  ist holomorph. Damit ist  $\text{res}_a(\mu)$  wohldefiniert, denn ist von der Wahl von  $U_i$  unabhängig. Ist  $X$  kompakt, so ist  $\text{res}_a(\mu) = 0$  für fast alle  $a \in X$  und wir können

$$\text{res}(\mu) := \sum_{a \in X} \text{res}_a(\mu)$$

definieren.

**Satz 1.3.** *Mit der Notation aus Definition 1.1 und 1.2 gilt*

$$\text{res}(\mu) = \text{res}([\delta\mu])$$

*Beweis.* Um  $\text{res}([\delta\mu])$  zu berechnen, konstruieren wir  $H^1(X, \Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) / d\mathcal{E}^{1,0}(X)$  explizit. Da  $\delta\mu = (\omega_j - \omega_i) \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega) \subseteq Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{1,0})$  und  $H^1(X, \mathcal{E}^{1,0}) = 0$  (vgl. [For99, Satz 12.6]) gilt, finden wir ein  $(\sigma_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{E}^{1,0})$  mit

$$\omega_j - \omega_i \cong \sigma_j - \sigma_i \quad \text{auf } U_i \cap U_j.$$

Nun ist jede holomorphe 1-Form geschlossen, d.h.  $d(\omega_j - \omega_i) = 0$  und wir erhalten  $d\sigma_i = d\sigma_j$  auf  $U_i \cap U_j$ . Also finden wir ein  $\tau \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$  mit  $\tau|_{U_i} \equiv d\sigma_i$ . Dieses  $\tau$  ist der Repräsentant von  $[\delta\mu]$ , also gilt

$$\text{res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau$$

Seien nun  $a_1, \dots, a_n \in X$  die endlich vielen Pole von  $\mu$  und  $X' := X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ . Auf  $X' \cap U_i \cap U_j$  gilt  $\sigma_i - \omega_i \cong \sigma_j - \omega_j$ . Erneut verwenden wir die Garbeneigenschaften und finden ein  $\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X')$  mit  $\sigma|_{X' \cap U_i} \equiv \sigma_i - \omega_i$ . Wir erhalten

$$d\sigma \equiv d\sigma_i - \underbrace{d\omega_i}_{=0} \equiv \tau \quad \text{auf } X' \cap U_i.$$

Und damit gilt  $d\sigma \equiv \tau$  auf  $X'$ . Als nächstes wählen wir zu jedem  $a_k$  ein  $i(k) \in I$ , so dass  $a_k \in U_{i(k)}$  gilt. Weiterhin wählen wir Koordinatenumgebungen  $(V_k, z_k)$  mit folgenden Eigenschaften

1. Es gelten  $V_k \subset U_{i(k)}$  und  $z_k(a_k) = 0$ ,
2. es ist  $V_k \cap V_j = \emptyset$  für alle  $k \neq j$  und

3.  $z_k(V_k) \subset \mathbb{C}$  ist eine Kreisscheibe.

Wählen wir  $f_k \in \mathcal{E}(X)$  mit  $\text{Supp}(f_k) \subset V_k$ , so dass eine offene Umgebung  $V'_k \subset V_k$  von  $a_k$  mit  $f_k|_{V'_k} \equiv 1$  existiert, so können wir  $g := 1 - (f_1 + \dots + f_k)$  definieren. Dies erlaubt uns  $g \cdot \sigma$  auf ganz  $X$  fortzusetzen, denn  $g|_{V'_k} \equiv 0$ . Also liegt  $g\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ . Nach [For99, Satz 10.20] gilt

$$\iint_X d(g\sigma) = 0. \quad (1)$$

Auf  $V'_k \setminus \{a_k\}$  erhalten wir

$$d(f_k\sigma) = d\sigma = d\sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)} = d\sigma_{i(k)}$$

Nun ist aber  $\sigma_i \in \mathcal{E}^{1,0}(U_i)$ , also kann  $d(f_k\sigma)$  glatt auf  $a_k$  fortgesetzt werden. Da  $f_k\sigma$  auf  $X' \setminus \text{Supp}(f_k)$  verschwindet, können wir  $d(f_k\sigma) \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$  auffassen. Wir erhalten die folgende Gleichung

$$\tau = d1 \cdot \sigma = d(g\sigma) + \sum_{k=1}^n d(f_k\sigma)$$

Unter Ausnutzung von (1) erhalten wir

$$\iint_X \tau = \sum_{k=1}^n \iint_X d f_k \sigma = \sum_{k=1}^n \iint_{V_k} d(f_k \sigma_{i(k)} - f_k \omega_{i(k)})$$

Erneut wegen [For99, Satz 10.20] gilt  $\iint_{V_k} d f_k \sigma_{i(k)} = 0$  und analog zum Beweis von [For99, Satz 10.21] folgt

$$\iint_{V_k} d(f_k \omega_{i(k)}) = -2\pi i \text{res}_{a_k}(\omega_{i(k)})$$

Bauen wir alles zusammen, so erhalten wir

$$\text{res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau = \sum_{k=1}^n \text{res}_{a_k}(\omega_{i(k)}) = \text{res}(\mu)$$

□

**Definition 1.4** (Die Garbe  $\Omega_D$ ). Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Für ein beliebiges  $D \in \text{Div}(X)$  und  $U \subset X$  offen definieren wir

$$\Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) \mid (\omega) \geq -D\}.$$

$\Omega_D$  bildet die Garbe der meromorphen 1-Formen, deren Divisoren Vielfache von  $-D$  sind. Insbesondere gilt  $\Omega_0 = \Omega$ .

Wählen wir ein  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^\times$  und setzen  $K = (\omega)$ . Dann wird durch Multiplikation mit  $\omega$  für jeden beliebigen Divisor  $D \in \text{Div}(X)$  ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{D+K} \xrightarrow{\sim} \Omega_D, \quad f \mapsto f\omega$$

definiert.

**Lemma 1.5.** *Es gibt ein  $k_0 \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg D + k_0$  für alle  $D \in \text{Div}(X)$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^\times$ ,  $K = (\omega)$  und  $g$  das Geschlecht von  $X$ . Setzen wir  $k_0 := 1 - g + \deg K$ , so gilt nach dem Satz von Riemann-Roch

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \deg(D + K) \\ &\geq \deg D + k_0 \end{aligned}$$

□

**Definition 1.6** (Duales Paar). Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $D \in \text{Div}(X)$ . Das Produkt

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \rightarrow \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

induziert eine Abbildung

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \Omega)$$

Diese ergibt sich aus der Tatsache, dass  $H^0(X, \Omega_{-D}) \equiv \Omega_{-D}(X)$  gilt und dem Isomorphismus aus Definition 1.4. Durch die Verkettung mit  $\text{res} : H^1(X, \Omega_D) \rightarrow \mathbb{C}$  erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle \omega, \xi \rangle := \text{res}(\xi\omega)$$

Diese lineare Abbildung liefert uns eine lineare Abbildung

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

Den verbleibenden Teil des Kapitels wollen wir nun verwenden, um zu zeigen, dass die eben definierte lineare Abbildung  $\iota_D$  ein Isomorphismus ist. Ein erster Schritt ist der nächste Satz.

**Satz 1.7.** *Die Abbildung  $\iota_D$  ist injektiv.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass es zu jedem  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$  mit  $\omega \neq 0$  ein  $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$  gibt, so dass  $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$  gilt. Wir wählen dazu ein  $a \in X$  mit  $D(a) = 0$  und eine Koordinatenumgebung  $(U_0, z)$  mit  $z(a) = 0$  und  $D|_{U_0} \equiv 0$ . Auf  $U_0$  schreiben wir  $\omega = f dz$  mit einem  $f \in \mathcal{O}(U_0)$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $U_0$  klein genug gewählt wurde, so dass  $f \neq 0$  auf  $U_0 \setminus \{a\}$ . Wir setzen  $U_1 := X \setminus \{a\}$  und  $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$ . Sei weiterhin  $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ , wobei  $f_0 = (zf)^{-1}$  und  $f_1 = 0$ . Dann gilt

$$\omega\eta = \left( \frac{dz}{z}, 0 \right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

$\omega\eta$  ist eine Mittag-Leffler-Verteilung mit  $\text{res}(\omega\eta) = 1$ . Nun liegt aber  $\delta\eta$  in  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$  und definieren wir  $\xi = [\delta\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ , so folgt

$$\omega\xi = \omega[\delta\eta] = [\delta(\omega\eta)].$$

Unter Anwendung von Satz 1.3 erhalten wir

$$\langle \omega, \xi \rangle = \text{res } \omega\xi = \text{res}([\delta(\omega\eta)]) = \text{res}(\omega\eta) = 1.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

**Lemma 1.8.** Seien  $D, D' \in \text{Div}(X)$  mit  $D' \leq D$ . Dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{i_{D'}^D} & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\ & & \uparrow \iota_D & & \uparrow \iota_{D'} \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D}) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_{-D'}) \end{array}$$

*Beweis.* Wir wählen ein  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D}) \subset H^0(X, \Omega_{-D'})$  und  $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ . Dann gilt

$$i_{D'}^D \circ \iota_D(\omega)(\xi) = \langle \omega, \xi \rangle = \iota_{D'}(\omega)(\xi).$$

□

**Lemma 1.9.** Sei die Notation wie in Lemma 1.8. Seien weiterhin  $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$  und  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$  mit  $i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega)$ . Dann liegt  $\omega$  bereits in  $H^0(X, \Omega_{-D})$  und  $\lambda = \iota_D(\omega)$ .

*Beweis.* Angenommen es gelte  $\omega \notin H^0(X, \Omega_{-D}) \cong \Omega_{-D}(X)$ . Dann existierte ein  $a \in X$ , so dass  $\text{ord}_a(\omega) < D(a)$ . Sei  $(U_0, z)$  eine Koordinatenumgebung von  $a$  mit  $z(a) = 0$ . Auf dieser Koordinatenumgebung drücken wir  $\omega$  durch  $\omega = f dz$  mit einem  $f \in \mathcal{M}(U_0)$  aus. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass wir  $U_0$  klein genug gewählt haben, so dass

1.  $D|_{U_0 \setminus \{a\}} \equiv 0 \equiv D'|_{U_0 \setminus \{a\}}$  gilt und
2.  $f$  keine Null- und Polstellen auf  $U_0 \setminus \{a\}$  besitzt.

Nun setzen wir  $U_1 := X \setminus \{a\}$ ,  $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$  und  $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$ , wobei  $f_0 := (zf)^{-1}$  und  $f_1 := 0$  definiert wird. Aus  $\text{ord}_a(\omega) < D(a)$  folgte nun sogar, dass  $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$  und damit sogar, dass

$$\delta\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{D'})$$

Bezeichnen wir mit  $\xi'$  die Kohomologieklassse von  $\delta\eta$  in  $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$  und mit  $\xi$  die Kohomologieklassse von  $\delta\eta$  in  $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ , so erhalten wir zunächst, weil  $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$  ist, dass  $\xi = 0$  gilt. Nach Voraussetzung gälte nun aber

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \iota_{D'}(\omega)(\xi') = i_{D'}^D(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0$$

Andererseits ist  $\omega\eta = \left(\frac{dz}{z}, 0\right)$  und es folgt

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \text{res}(\omega\eta) = 1$$

Ein Widerspruch. Also muss  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$  gelten. Da dann  $i_{D'}^D(\lambda) = \iota_{D'}(\omega) = i_{D'}^D(\iota_D(\omega))$  gelten muss, folgt  $\lambda = \iota_D(\omega)$  aus der Injektivität von  $i_{D'}^D$ .  $\square$

**Lemma 1.10.** Seien  $D, B \in \text{Div}(X)$  und  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Sei  $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ . Dann induziert der Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D, \quad f \mapsto \psi f$$

eine lineare Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

und damit auch eine lineare Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

Diese bezeichnen wir auch mit  $\psi$ . Mit dieser Notation folgt  $(\psi\lambda)(\xi) = \lambda(\psi\xi)$  für beliebige  $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$  und  $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$ . Weiterhin kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* & \xrightarrow{\psi} & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ \uparrow \iota_D & & \uparrow \iota_{D-B} \\ H^0(X, \Omega_{-D}) & \xrightarrow{\psi} & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \end{array}$$

*Beweis.* Dass Multiplikation mit  $\psi$  ein Garbenhomomorphismus ist, ist klar und damit folgt die Existenz der linearen Abbildungen. Die Kommutativität des Diagramms erhalten wir aus der Tatsache, dass für beliebige  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$  und  $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$  die folgende Rechnung durchführen können

$$\iota_{D-B}(\psi\omega)(\xi) = \langle \psi\omega, \xi \rangle = \text{res}((\psi\omega)\xi) = \text{res}(\omega(\psi\xi)) = \langle \omega, \psi\xi \rangle = \iota_D(\omega)(\psi\xi)$$

□

**Lemma 1.11.** *Falls  $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$  mit  $\psi \neq 0$ , gilt, so ist  $\psi : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$  injektiv.*

*Beweis.* Sei  $A := (\psi) \geq -B$ . Dann faktorisiert  $\psi : \mathcal{O}_{D-B} \rightarrow \mathcal{O}_D$  über  $\mathcal{O}_{D+A}$ , d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{D-B} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{O}_D \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_{D+A} & & \end{array}$$

kommutiert. Weiterhin ist die Abbildung  $\mathcal{O}_{D+A} \rightarrow \mathcal{O}_D$  ein Isomorphismus, wobei die Umkehrung einfach durch Multiplikation mit  $\psi^{-1}$  gegeben ist. Nun ist die Inklusion von  $\mathcal{O}_{D-B} \rightarrow \mathcal{O}_{D+A}$  injektiv und deshalb nach [For99, Satz 16.8]  $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})$  ein Epimorphismus. Also ist auch  $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D)$  ein Epimorphismus und schlussendlich die duale Abbildung injektiv. Dies zeigt die Behauptung. □

**Satz 1.12 (Der Serresche Dualitätssatz).** *Sei  $D \in \text{Div}(X)$  und  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist  $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$  ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Aufgrund von Satz 1.7 benötigen wir nur noch die Surjektivität von  $\iota_D$ . Sei  $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$  mit  $\lambda \neq 0$  und  $P \in \text{Div}(X)$  mit  $\deg P = 1$ . Weiterhin setzen wir  $D_n := D - nP$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ . Als nächstes bezeichnen wir mit  $\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$  den Untervektorraum aller Linearformen der Form  $\psi\lambda$ , wobei  $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ . Nach Lemma 1.11 ist  $\Lambda \cong H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ . Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt damit, dass

$$\dim \Lambda \geq 1 - g + n$$

gilt. Aus Lemma 1.5 und da  $\iota_{D_n}$  injektiv ist, erhalten wir

$$\dim \text{im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq n + k_0 - \deg D$$

Wählen wir  $n > \deg D$ , so erhalten wir  $\deg D_n < 0$  und damit  $H^0(X, \Omega_{-D_n}) = 0$ . Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg D_n = n + (g - 1 - \deg D).$$



Unter eventueller Vergrößerung von  $n$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \Lambda + \dim \operatorname{im}(\iota_{D_n}) &\geq 1 - g + n + n + k_0 - \deg D \\ &= 2n + 1 - g + \deg D \\ &> n + (g - 1 - \deg D) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*. \end{aligned}$$

Da sowohl  $\Lambda$  als auch  $\operatorname{im}(\iota_{D_n})$  Untervektorräume von  $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$  sind, muss  $\Lambda \cap \operatorname{im}(\iota_{D_n}) \neq 0$  sein. Also existiert ein  $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{D_n})$  mit  $\psi \neq 0$  und  $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$  mit  $\psi\lambda = \iota_{D_n}(\omega)$ . Setzen wir  $A := (\psi)$ , so liegt  $\frac{1}{\psi} \in H^0(X, \mathcal{O}_A)$ . Zu guter Letzt erhalten wir aus  $D' := D_n - A$ , dass

$$i_{D'}^d(\lambda) = \frac{1}{\psi}(\psi\lambda) = \frac{1}{\psi}\iota_{D_n}(\omega) = \iota_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right)$$

gilt und unter Ausnutzung von Lemma 1.9 folgt, dass  $\omega_0 := \frac{1}{\psi}\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$  die Gleichung  $\lambda = \iota_D(\omega_0)$  erfüllt.  $\square$

**Korollar 1.13.** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und  $D \in \operatorname{Div}(X)$ . Dann gilt

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$$

Insbesondere folgt für  $D = 0$

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega),$$

wobei  $g$  das Geschlecht von  $X$  bezeichnet.

**Satz 1.14.** Sei  $D \in \operatorname{Div}(X)$  und  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann gilt  $H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^1(X, \Omega_D)^*$ .

*Beweis.* Sei  $0 \neq \omega_0 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$  und  $K := (\omega_0)$ . Wie aus Definition 1.4 bekannt gelten  $\Omega_D \cong \mathcal{O}_{D+K}$  und  $\mathcal{O}_D \cong \Omega_{-D-K}$ . Mit Satz 1.12 folgt

$$H^0(X, \mathcal{O}_{-D}) \cong H^0(X, \Omega_{-D-K}) \cong H^1(X, \mathcal{O}_{D+K})^* = H^1(X, \Omega_D)^*$$

$\square$

**Korollar 1.15.** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche. Es gilt  $\dim H^1(X, \Omega) = 1$ .

*Beweis.* Satz 1.14 angewandt für den Fall  $D = 0$  liefert uns

$$\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = \dim \mathbb{C} = 1$$

$\square$

**Satz 1.16.** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht  $g$  und  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ , wobei  $\omega(x) \neq 0$  für jedes  $x \in X$ . Dann gilt

$$\deg(\omega) = 2g - 2$$

*Beweis.* Sei  $K := (\omega)$ . Aus dem Satz von Riemann-Roch erhalten wir

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg K$$

Wieder nach Definition 1.4 wissen wir  $\Omega \cong \mathcal{O}_K$ . Also erhalten wir weiter unter Ausnutzung von Satz 1.12 und Korollar 1.15 die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 1 - g + \deg K &= \dim H^0(X, \Omega) - \dim H^1(X, \Omega) \\ &= \dim H^1(X, \mathcal{O}) - 1 \\ &= g - 1 \end{aligned}$$

Aufgelöst nach  $\deg K$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 1.17.** Sei  $B$  ein  $n$ -dimensionaler, reeller Vektorraum. Eine additive Untergruppe  $\Gamma \subset V$  heißt *Gitter*, falls  $n$  linear unabhängige  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in V$  existieren, so dass

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \dots + \mathbb{Z}\gamma_n$$

**Korollar 1.18.** Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter. Dann hat der Torus  $\mathbb{C}/\Gamma$  Geschlecht 1.

*Beweis.* Wir betrachten die meromorphe 1-Form  $dz$  auf  $\mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}$  die universelle Überlagerung von  $\mathbb{C}/\Gamma$  darstellt und wir deshalb die Projektion als Kartenabbildung von  $\mathbb{C}/\Gamma$  verwenden können, finden wir eine 1-Form  $\omega \in \mathbb{C}/\Gamma$ , die auf jeder dieser Karten mit  $dz$  übereinstimmt. Dies folgt direkt daraus, dass  $\mathcal{M}^{(1)}(X)$  eine Garbe ist. Dann folgt aber sofort  $\omega(x) \neq 0$  für jedes  $x \in \mathbb{C}/\Gamma$  und damit  $\deg(\omega) = 0$ . Aus Satz 1.16 folgt dann  $g = 1$ .  $\square$

Korollar 1.13 und 1.18 finden direkt Anwendung im Beweis unseres Uniformisierungssatzes 11.7. Die folgenden Kapitel wenden sich nun aber hauptsächlich *nicht* kompakten Riemannschen Flächen zu, so dass die Resultate dieses Kapitels zwar immer im Hinterkopf behalten werden sollten, aber in den nächsten Kapiteln keine Rolle spielen.

## 2 Das Dirichlet Randwertproblem

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen holomorphen und harmonischen Abbildungen, genauer gesagt ist auf einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen jede harmonische Funktion Realteil einer holomorphen Funktion. Dieses Resultat ist sehr interessant, denn es ermöglicht uns holomorphe Abbildungen zu „konstruieren“. Wir sind im weiteren Verlauf vor allem an nicht-konstanten holomorphen Abbildungen interessiert und unsere Strategie, diese Abbildungen zu finden, wird darin bestehen das Dirichlet Randwertproblem (kurz: RWP) (vgl. Definition 2.9) zu lösen. Die Lösung eines solchen RWP ist immer harmonisch und durch geeignete Randwerte können wir dafür sorgen, dass sie nicht-konstant ist. Durch diesen einfachen Trick haben wir dann eine nicht-konstante holomorphe Abbildung gefunden.

Natürlich ist per se noch nicht klar, unter welchen Umständen überhaupt Lösungen für ein RWP existieren und ob diese eindeutig bestimmt sind. Der Großteil des Kapitels wird sich zunächst mit etwas Terminologie und dann der Eindeutigkeit von Lösungen des RWP beschäftigen. Wir werden Perrons Methode (Lemma 2.24) verwenden, um Lösungskandidaten zu konstruieren und schlussendlich ein hinreichendes Kriterium angeben, um Gebiete auf denen Lösungen des RWP existieren zu identifizieren.

**Definition 2.1.** Für jedes  $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$  existiert genau ein  $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$  und genau ein  $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ , so dass  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  gilt. Dies ermöglicht die Definition der Abbildung

$$* : \mathcal{E}^{(1)}(X) \rightarrow \mathcal{E}^{(1)}(X), \quad \omega_1 + \omega_2 \mapsto i(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2).$$

**Proposition 2.2.** Die Abbildung  $*$  ist ein  $\mathbb{R}$ -linearer Isomorphismus. Weiterhin bildet er  $\mathcal{E}^{1,0}(X)$  auf  $\mathcal{E}^{0,1}(X)$  ab und umgekehrt.

*Beweis.* Die  $\mathbb{R}$ -Linearität von  $*$  ist klar. Die Bijektivität folgt aus der Tatsache, dass  $*^{-1} = -*$  gilt. Sei nun weiterhin  $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$ . Auf einer Karte  $(z, U)$  nimmt  $\omega$  dann die Form  $\omega = f dz$  für ein  $f \in \mathcal{E}(U)$  an. Dann gilt aber  $*\omega = i\bar{\omega} = i\bar{f} d\bar{z} \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  auf der Karte. Also wird tatsächlich  $\mathcal{E}^{1,0}(X)$  auf  $\mathcal{E}^{0,1}(X)$  abgebildet. Die Bijektivität folgt auch einfach wieder aus der Tatsache, dass  $*^{-1} = -*$  gilt.  $\square$

**Definition 2.3.** Eine 1-Form  $\omega \in \mathcal{E}^1(X)$  heißt *harmonisch*, falls

$$d\omega = 0 = d*\omega$$

gilt.

**Satz 2.4.** Jede reelle 1-Form  $\sigma \in \mathcal{E}^1(X)$  ist Realteil genau einer holomorphen 1-Form  $\omega \in \Omega(X)$ .

*Beweis.* Wie können  $\sigma = \omega_1 + \omega_2$  mit  $\omega_1 \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$  und  $\omega_2 \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  schreiben. Nun folgt aber aus  $d\omega = 0$ , dass

$$d''\omega_1 + d'\omega_2 = 0 \tag{2}$$

gilt und aus  $d*\omega = 0$ , dass

$$i(d'\bar{\omega}_1 - d''\bar{\omega}_2) = 0 \quad (3)$$

gilt. Durch eine einfache Rechnung auf Karten lässt sich (3) zu

$$0 = \overline{d''\omega_1} - \overline{d'\omega_2}$$

umformen. Dies liefert uns zunächst zusammen mit der ersten Gleichung, dass  $d''\omega_1 = 0$  und  $d'\omega_2 = 0$  gelten. Daraus folgt aber direkt, dass  $\omega_1 \in \Omega(X)$  gilt. Und unter Ausnutzung, von  $\overline{d'\omega_2} = d''\bar{\omega}_2$  erhalten wir, dass  $\bar{\omega}_2 \in \Omega(X)$  gilt. Nun wissen wir aber, dass  $\sigma$  reell ist und wir erhalten die Gleichung

$$\omega_1 + \omega_2 = \sigma = \bar{\sigma} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2.$$

Da die Darstellung von  $\sigma$  eindeutig ist, muss  $\omega_1 = \bar{\omega}_2$  gelten. Setzen wir  $\omega = 2\omega_1 \in \Omega(X)$ , so gilt

$$\operatorname{Re}(\omega) = \operatorname{Re}(2\omega_1) = \frac{1}{2}(2\omega_1 + 2\bar{\omega}_1) = \omega_1 + \omega_2 = \sigma.$$

Um nun die Eindeutigkeit von  $\omega$  zu beweisen, zeigen wir, dass  $\sigma = 0$  bereits  $\omega = 0$  impliziert. Dies genügt, da  $\operatorname{Re}(x) = \operatorname{Re}(y)$  genau dann gilt, wenn  $\operatorname{Re}(x - y) = 0$  ist. Dies folgt aus der  $\mathbb{R}$ -Linearität von  $\operatorname{Re}$  (wobei  $\operatorname{Re}$  natürlich nicht  $\mathbb{C}$  linear ist). Sei also  $\omega \in \Omega(X)$  mit  $\operatorname{Re}(\omega) = 0$ . Nun existiert aber lokal immer eine Stammfunktion für  $\omega$ , d.h. lokal existiert ein holomorphes  $f$ , so dass  $\omega = df$  gilt. Dann folgt aber, dass  $d\operatorname{Re}(f) = 0$  sein muss, also ist  $\operatorname{Re}(f)$  konstant. Das wiederum hat aber zur Folge, dass die holomorphe Funktion  $e^f$  ihr Betragsmaximum annimmt, denn  $|e^f| = e^{\operatorname{Re}(f)}$  gilt. Dann ist aber  $|e^f|$  nach dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen (vgl. [For99, Kor. 2.6]) konstant. Also ist auch  $f$  konstant und es gilt  $\omega = df = 0$ . Da dies lokal um jeden Punkt gilt, ist somit  $\omega = 0$  und damit ist unser  $\omega$  eindeutig bestimmt.  $\square$

**Definition 2.5.** Sei  $Y \subset X$  offen und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann heißt  $u \in \mathcal{E}(Y)$  *harmonisch*, falls  $d'd''u = 0$  gilt. In lokalen Koordinaten  $(z, U)$  mit  $z = x + iy$  bedeutet das:

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u = 0$$

**Proposition 2.6.** Sei  $G \subset X$  ein Gebiet,  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch. Dann existiert ein  $f \in \mathcal{O}(G)$ , so dass

$$u = \operatorname{Re}(f)$$

*Beweis.* Nach Satz 2.4 gilt

$$ddu = 0 \quad \text{und} \quad d*d u = 0.$$

Also existiert ein  $\omega \in \Omega(G)$ , so dass  $du = \operatorname{Re}(\omega)$ . Nun ist aber  $G$  einfach zusammenhängend, d.h. es gibt eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(G)$ , so dass  $\omega = dg$ . Damit ist  $du = \operatorname{Re}(dg)$  und es folgt  $u = \operatorname{Re}(g) + \text{const.}$   $\square$

**Bemerkung 2.7.** Die Umkehrung gilt immer, d.h. der Realteil einer holomorphen Funktion ist immer harmonisch.

**Proposition 2.8** (Maximumsprinzip für harmonische Funktionen). *Sei  $Y \subset X$  ein Gebiet. Sei weiterhin  $u : Y \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und  $x_0 \in Y$  mit  $u(x_0) = \sup_{y \in Y} u(y)$ . Dann ist  $u$  konstant.*

**Beweis.** Wir verwenden für den Beweis ein „Offen-Abgeschlossen“-Argument. Sei dazu

$$M := \{y \in Y \mid u(y) = u(x_0)\} \neq \emptyset$$

Wir behaupten zunächst, dass  $M$  offen ist. Sei  $y \in Y$ . Dann existiert eine offene, einfach zusammenhängende Umgebung  $U \subset Y$  von  $y$ . Nach Proposition 2.6 folgt dann die Existenz von  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $u|_U = \operatorname{Re}(f)$ . Weiterhin ist die reelle Exponentialfunktion streng monoton steigend und somit nimmt die Funktion  $e^u$  bei  $y$  ein Maximum an. Allerdings gilt auch  $|e^f| = e^u$ , was nichts anderes bedeutet, als dass die holomorphe Funktion  $e^f$  ein Betragsmaximum bei  $y$  annimmt. Aus dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen (vgl. [For99, Kor. 2.6]) folgt dann die Konstanz von  $e^f$  und damit:

$$u|_U \equiv \text{const.}$$

Also gilt  $y \in U \subset M$ .

Als nächstes behaupten wir, dass  $M$  zusätzlich auch abgeschlossen ist. Dies ist aber eine direkte Konsequenz aus der Stetigkeit von  $u$ .

Damit ist  $M \subset Y$  sowohl offen als auch abgeschlossen und da  $Y$  zusammenhängend ist, muss  $M$  entweder leer oder ganz  $Y$  sein. Nun liegt  $x_0 \in M$  und somit folgt  $M = Y$ , also  $u \equiv \text{const.}$   $\square$

**Definition 2.9.** Sei  $Y \subset X$  offen,  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Man nennt  $u \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$  *Lösung des Dirichlet Randwertproblems* (Dirichlet-RWP), falls

1.  $u|_Y$  harmonisch ist und
2.  $u|_{\partial Y} \equiv f$ .

**Proposition 2.10.** *Sei  $Y \Subset X$  offen und  $\partial Y \neq \emptyset$ . Dann gilt: Falls zu einem gegebenen  $f \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$  die Lösung des Dirichlet-RWP existiert, ist diese eindeutig.*

**Beweis.** Seien  $u_1, u_2$  zwei Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann erfüllen die Funktionen

$$(u_1 - u_2)|_{\partial Y} \equiv (u_2 - u_1)|_{\partial Y} \equiv 0$$

und sind harmonisch. Aus dem Maximumsprinzip folgt sofort, die Nicht-Positivität von sowohl  $u_1 - u_2$  als auch von  $u_2 - u_1$  auf allen Zusammenhangskomponenten von  $Y$ , also:

$$0 \leq u_1 - u_2 \leq 0$$

und damit

$$u_1 \equiv u_2$$

□

**Satz 2.11.** Sei  $f : \partial B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $R > 0$  und

$$u(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi & \text{für } |z| < R \\ f(z) & \text{für } |z| = R \end{cases}$$

Dann ist  $u$  stetig auf  $\overline{B_R(0)}$  und harmonisch auf  $B_R(0)$ ; löst also das Dirichlet-Problem auf  $\overline{B_R(0)}$ .

*Beweis.* Für  $z \neq \rho$  definieren wir

$$P(z, \rho) := \frac{|\rho|^2 - |z|^2}{|\rho - z|^2}, \quad F(z, \rho) := \frac{\rho + z}{\rho - z}$$

Dann gilt  $P(z, \rho) = \operatorname{Re}(F(z, \rho))$  und für  $u$  ergibt sich

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi}) f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z, Re^{i\varphi}) f(Re^{i\varphi}) d\varphi \right). \end{aligned}$$

Nun ist  $F$  als Funktion von  $z$  holomorph (falls  $z \neq \rho$ ) und damit erhalten wir aus der Leibnizregel, dass  $u$  der Realteil einer holomorphen Funktion ist, also harmonisch.

Als nächstes müssen wir die Stetigkeit von  $u$  auf dem Rand zeigen. Zunächst zeigen wir jedoch:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi}) d\varphi = 1$$

Dazu verwenden wir den Residuensatz, denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\rho|=R} \underbrace{\frac{\rho + z}{(\rho - z)\rho}}_{=: h_z(\rho)} d\rho \right) \quad (1)$$

Weiterhin ist  $\operatorname{res}_{\rho=z} h_z(\rho) = 2$  und  $\operatorname{res}_{\rho=0} h_z(\rho) = -1$ . Da jede Singularität nur einmal umlaufen wird erhalten wir:

$$(1) = \operatorname{Re}(\operatorname{res}_{z=\rho} h_z(\rho) + \operatorname{res}_{z=0} h_z(\rho)) = 1$$

Also gilt für  $\rho_0 \in \partial B_R(0)$  und  $z \in B_R(0)$ :

$$u(z) - f(\rho_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \rho)(f(\rho) - f(\rho_0)) d\varphi$$

wobei  $\rho = Re^{i\varphi}$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  beliebig. Da  $f$  stetig ist existiert ein  $\delta_0 > 0$ , so dass

$$|f(\rho) - f(\rho_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall |\rho - \rho_0| \leq \delta_0, \quad \rho, \rho_0 \in \partial B_R(0)$$

Weiterhin existiert ein  $M > 0$ , so dass  $|f(\rho)| \leq M$  für jedes  $\rho \in \partial B_R(0)$ . Setzen  $\alpha \subset [0, 2\pi]$  so, dass

$$|Re^{i\varphi} - \rho_0| \leq \delta_0 \quad \forall \varphi \in \alpha$$

und  $\beta := [0, 2\pi] \setminus \alpha$ , erhalten wir:

$$\begin{aligned} |u(z) - f(\rho_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \underbrace{P(z, \rho)}_{\geq 0} \frac{\varepsilon}{2} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} P(z, \rho) 2M d\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi} \int_{\beta} P(z, Re^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

Sei nun  $|z - \rho_0| =: \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$ . Dann gilt für  $\varphi \in \beta$

$$|Re^{i\varphi} - z| \geq |Re^{i\varphi} - \rho_0| - |z - \rho_0| \geq \delta_0 - \delta = \frac{\delta_0}{2}$$

und damit für  $P$

$$P(z, Re^{i\varphi}) = \frac{(R + |z|)(R - |z|)}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{4 \cdot 2R\delta}{\delta_0^2}$$

Insgesamt erhalten wir

$$|u(z) - f(\rho_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{8R\delta}{\delta_0^2} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot 2\pi$$

und damit wird auch der rechte Summand kleiner als  $\frac{\varepsilon}{2}$ , wenn  $\delta =: |z - \rho_0|$  klein genug gewählt wurde.  $\square$

**Korollar 2.12.** Sei  $u : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch,  $R > 0$ . Dann gilt:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} u(re^{i\varphi}) d\varphi$$

für jedes  $|z| < r < R$ .

*Beweis.* Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.11 und Proposition 2.10. □

**Korollar 2.13.** Seien  $u_n : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch und konvergiere

$$u_n \rightarrow u : D(R) \rightarrow \mathbb{R}$$

kompakt. Dann ist auch  $u$  harmonisch.

*Beweis.* Nach Korollar 2.12 erhalten wir für jedes  $|z| < r < R$

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\varphi}) u_n(re^{i\varphi}) d\varphi$$

Da  $u_n$  gleichmäßig auf  $\partial B_r(0)$  konvergiert, gilt die Integralformel auch für  $u$ . Damit ist  $u$  auf allen  $B_r(0)$  mit  $r < R$  und schlußendlich auf  $B_R(0)$  harmonisch. □

**Satz 2.14** (Harnacksches Prinzip für Kreisscheiben). Sei  $M \in \mathbb{R}$  und  $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq M$  eine monoton wachsende, beschränkte Folge harmonischer Funktionen von  $B_R(0)$  nach  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt gegen eine harmonische Funktion  $u : B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $K \subset B_R(0)$  kompakt. Dann existieren  $\rho < r < R$ , so dass  $K \subset \overline{B_\rho(0)}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und

$$\varepsilon' := \varepsilon \frac{r - \rho}{r + \rho} > 0$$

Nun ist  $(u_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge und beschränkt, d.h. es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$u_n(0) - u_m(0) \leq \varepsilon' \quad \forall n \geq m \geq N$$

Für  $|z| \leq \rho$  erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq P(z, re^{i\varphi}) &= \frac{(r - |z|)(r + |z|)}{|re^{i\varphi} - z|^2} \\ &\leq \frac{(r - |z|)(r + |z|)}{(r - |z|)^2} \\ &= \frac{r + |z|}{r - |z|} \\ &\leq \frac{r + \rho}{r - \rho} \end{aligned} \tag{4}$$



Für beliebige  $z \in K$  gilt nun die folgende Integralformel:

$$\begin{aligned} u_n(z) - u_m(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\varphi}) (u_n(re^{i\varphi}) - u_m(re^{i\varphi})) d\varphi \\ &\stackrel{(4)}{\leq} \frac{r+\rho}{r-\rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_n(re^{i\varphi}) u_m(re^{i\varphi})) d\varphi \\ &= \frac{r+\rho}{r-\rho} (u_n(0) - u_m(0)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Also konvergiert  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakt und nach Korollar 2.13 ist die Grenzfunktion wieder harmonisch.  $\square$

**Proposition 2.15.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $D \Subset U \subset X$ , so dass  $(z, U)$  eine Karte und  $z(D) \subset \mathbb{C}$  eine Kreisscheibe ist. Dann ist das Dirichlet-Problem auf  $D$  wohldefiniert und eindeutig lösbar.

*Beweis.* Die Aussage folgt daraus, dass die Eigenschaft harmonisch zu sein invariant unter biholomorphen Transformationen und damit unabhängig von der gewählten Kartenabbildung ist. Die Lösung lässt sich dann einfach auf  $z(D)$  nach Satz 2.11 ermitteln.  $\square$

**Definition 2.16.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $Y \subset X$  offen. Wir bezeichnen mit  $\text{Reg}(Y)$  die Menge aller Teilgebiete  $D \Subset Y$ , die den Voraussetzungen von Proposition 2.15 genügen.

Für  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  und  $D \in \text{Reg}(Y)$  definieren wir  $P_D u : Y \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $P_D u|_{Y \setminus D} \equiv u|_{Y \setminus D}$  und  $P_D u|_D$  ist die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwerten  $u|_{\partial D}$ .

**Korollar 2.17.** Mit der gleichen Notation wie in der vorigen Definition erhalten wir für beliebige  $u, v \in C(Y, \mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

1.  $P_D(u + v) = P_D u + P_D v$
2.  $P_D(\lambda u) = \lambda P_D u$
3.  $u \leq v \Rightarrow P_D u \leq P_D v$

*Beweis.* Die ersten beiden Aussagen ergeben sich direkt aus der Eindeutigkeit harmonischer Funktionen und 3. ist eine Folge des Maximumprinzips.  $\square$

**Korollar 2.18.**  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  ist genau dann harmonisch, wenn  $P_D u = u$  für jedes  $D \in \text{Reg}(Y)$

*Beweis.*  $\Rightarrow$  Ist klar

$\Leftarrow$  Folgt aus der Tatsache, dass harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist und es zu jedem Punkt  $x \in Y$  ein  $D \in \text{Reg}(Y)$  mit  $x \in D$  existiert.  $\square$

**Definition 2.19.** Sei  $Y \subset X$  offen und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Ein  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  heißt

1. *subharmonisch*, falls  $P_D u \geq u$  für jedes  $D \in \text{Reg}(Y)$ .
2. *lokal subharmonisch*, falls es zu jedem Punkt in  $Y$  eine Umgebung gibt, auf der  $u$  subharmonisch ist.

**Korollar 2.20.** Sei  $Y \subset X$  offen und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Seien weiterhin  $u, v \in C(Y, \mathbb{R})$  subharmonisch und  $\lambda \geq 0$ . Dann sind  $u + v$ ,  $\lambda u$  und  $\sup(u, v)$  subharmonisch.

*Beweis.*  $u + v$  und  $\lambda u$  folgen direkt aus Korollar 2.17. Um die Aussage für  $\sup(u, v)$  zu zeigen, betrachten wir zunächst eine beliebige Funktion  $f \in C(\partial D, \mathbb{R})$ . Dann gilt klarerweise  $f \leq |f|$ . Seien nun  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  Lösungen des Randwertproblem zu  $f$  bzw.  $|f|$ . Dann folgt aus dem Maximumprinzip, dass  $\tilde{u} \leq \tilde{v}$  gelten muss. Andererseits gilt auch  $-f \leq |f|$  und aus der Eindeutigkeit der harmonischen Funktionen und dem Maximumprinzip erhalten wird  $-\tilde{u} \leq \tilde{v}$ . Insgesamt gilt also  $|\tilde{u}| \leq \tilde{v}$ . Diese Aussage verwenden wir, um die folgende Abschätzung herzuleiten

$$\begin{aligned} P_D \sup(u, v) &= \frac{1}{2}(P_D u + P_D v + P_D |u - v|) \\ &\geq \frac{1}{2}(P_D u + P_D v |P_D u - P_D v|) \\ &= \sup(P_D u, P_D v) \\ &\geq \sup(u, v). \end{aligned}$$

Also ist auch  $\sup(u, v)$  subharmonisch. □

**Satz 2.21** (Maximumprinzip für lokal subharmonische Funktionen). Sei  $Y \subset X$  ein Gebiet,  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  lokal subharmonisch, so dass ein  $x_0 \in Y$  existiert mit

$$u(x_0) = \sup_{y \in Y} u(y)$$

Dann ist  $u$  konstant.

*Beweis.* Sei  $M := \{y \in Y | u(y) = u(x_0)\}$ . Angenommen es gälte  $M \neq Y$ . Dann existierte ein  $a \in \partial M$  und aus der Stetigkeit von  $u$  folgte  $u(a) = u(x_0)$ . Nun müsste in jeder Umgebung von  $a$  ein  $x$  existieren, so dass  $u(x) < u(x_0)$  wäre, d.h. wir könnten ein  $D \in \text{Reg}(y)$  finden mit  $a \in D$  und  $u|_{\partial D} \not\equiv c$ . Wenn wir nun  $D$  klein genug wählen, können wir annehmen, dass  $u$  subharmonisch in einer Umgebung von  $\bar{D}$  ist. Also gilt  $u \leq P_D u =: v$ . Damit ist  $v$  harmonisch auf  $D$  und  $v|_{\partial D} \equiv u|_{\partial D} \leq c$  und es folgt  $v \leq c$  auf  $\bar{D}$ , aber  $c = u(a) \leq v(a)$ .  $v$  nimmt also ihr Maximum im Inneren an und ist nach Proposition 2.8 konstant, insbesondere wäre  $v \equiv c$  auf  $\partial D$ . Dies ist ein Widerspruch zu  $u|_{\partial D} \not\equiv c$ . Also muss  $M = Y$  gelten. □

**Korollar 2.22.** Sei  $Y \subset X$  offen,  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  lokal subharmonisch. Dann ist  $u$  bereits subharmonisch.

*Beweis.* Sei  $D \in \text{Reg}(Y)$  beliebig. Da  $P_D u$  harmonisch auf  $D$  ist, ist  $v := u - P_D u$  lokal subharmonisch auf  $D$  und  $v|_{\partial D} \equiv 0$ . Also gilt  $v \leq 0$  auf  $D$  und damit  $P_D u \geq u$ .  $\square$

**Lemma 2.23.** *Sei  $u \in C(Y, \mathbb{R})$  subharmonisch und  $B \in \text{Reg}(Y)$ . Dann ist  $P_B u$  auch subharmonisch.*

*Beweis.* Wir setzen  $v := P_B u$  und wählen  $D \in \text{Reg}(Y)$  beliebig. Wir zeigen dann  $P_D v \geq v$ . Auf  $Y \setminus D$  gilt  $P_D v \equiv v$  und auf  $Y \setminus B$  gilt

$$P_D v \equiv P_D P_B u = P_D u \geq u = P_B u = v$$

Damit gilt  $v - P_D v \leq 0$  auf  $Y \setminus (B \cap D)$ , insbesondere  $v - P_D v \leq 0$  auf  $\partial(Y \setminus (B \cap D))$  und aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen folgt  $v - P_D v \leq 0$  auf  $B \cap D$ , da  $v - P_D v$  dort harmonisch ist. Insgesamt ergibt sich  $P_D v \geq v$  auf ganz  $Y$ .  $\square$

**Lemma 2.24 (Perron).** *Sei  $M \subset C(Y, \mathbb{R})$  eine nicht-leere Menge subharmonischer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:*

1.  $u, v \in M \Rightarrow \sup(u, v) \in M$
2.  $u \in M, D \in \text{Reg}(Y) \Rightarrow P_D u \in M$
3.  $\exists K \in \mathbb{R} : u \leq K \quad \forall u \in M$ .

*Dann ist die Funktion  $u^* : Y \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $u^*(x) := \sup\{u(x) \mid u \in M\}$  harmonisch auf  $Y$ .*

*Beweis.* Sei  $a \in Y$  und  $D \in \text{Reg}(Y)$  eine Umgebung von  $a$ . Sei weiterhin  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(a) = u^*(a)$ . Aufgrund von 1. können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$  ist. Setzen wir  $v_n := P_D u_n$  so gilt:

$$\begin{aligned} u_n &\leq v_n \leq u^* \\ v_0 &\leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \end{aligned} \tag{5}$$

Nach dem Harnackschen Prinzip konvergiert  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $D$  gegen eine harmonische Funktion  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  und aus (5) erhalten wir  $v(a) = u^*(a)$  und  $v \leq u^*$  auf  $D$ .

Wir zeigen zunächst, dass  $v \equiv u^*|_D$  gilt. Sei dazu  $x \in D$  beliebig und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = u^*(x)$ . Aufgrund von 1. und 2. können wir  $v_n \leq w_n = P_D w_n$  und  $w_n \leq w_{n+1}$  annehmen. Also konvergiert  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $D$  gleichmäßig gegen  $w : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v \leq w \leq u^*$ . Damit gilt aber  $u^*(a) = v(a) \leq w(a) \leq u^*(a)$  und aus dem Maximumprinzip angewandt auf  $v - w$  ergibt sich  $v \equiv w$  auf  $D$ . Insbesondere  $v(x) = w(x) = u^*(x)$ . Also ist  $u^* = v$  harmonisch auf  $D$  und da  $D$  beliebig gewählt war auf ganz  $Y$ .  $\square$

**Definition 2.25.** Sei  $Y \subset X$  offen,  $\partial Y \neq \emptyset$  und  $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt. Setzen wir  $K := \sup\{f(x) : x \in \partial Y\}$ , dann bezeichnet  $\mathfrak{P}_f$  die Menge aller  $u \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$ , so dass

1.  $u|_Y$  subharmonisch ist,
2.  $u|_{\partial Y} \leq f$  und  $u \leq K$  gilt.

$\mathfrak{P}_f$  wird als *Perronklasse* von  $f$  bezeichnet.

**Korollar 2.26.** Mit der Notation aus der Definition 2.25 folgt, dass  $u^* := \sup_{u \in \mathfrak{P}_f} u$  harmonisch auf  $Y$  ist.

*Beweis.* Wir wenden einfach Lemma 2.24 auf  $M := \mathfrak{P}_f$  an. □

*Bemerkung 2.27.* Damit  $u^*$  eine Lösung des Dirichlet-Problems auf  $Y$  ist, müsste

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x) \tag{R}$$

für jedes  $x \in \partial Y$  gelten. Dies ist leider nicht immer der Fall. Im folgenden wollen wir Kriterien für die Randpunkte angeben, die sicherstellen, dass (R) erfüllt wird.

**Definition 2.28.** Sei  $Y \subsetneq X$  offen und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Ein Punkt  $x \in \partial Y$  heißt *regulär*, falls es eine offene Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  und eine Funktion  $\beta \in C(\bar{Y} \cap U)$  existiert, so dass

1.  $\beta|_{Y \cap U}$  harmonisch ist,
2.  $\beta(x) = 0$  und  $\beta(y) < 0$  für beliebige  $y \in \bar{Y} \cap U \setminus \{x\}$  gilt.

$\beta$  wird als *Barriere* von  $x$  bezeichnet.

**Lemma 2.29.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche,  $Y \subset X$  eine offene Menge und  $Z \subset Y$  eine Zusammenhangskomponente von  $Y$ . Dann ist  $Z$  offen.

*Beweis.* Sei  $x \in Z$ . Dann finden wir eine offene, zusammenhängende Koordinatenumgebung  $U \subset Y$  mit  $x \in U$ . Nun ist aber  $Z$  die maximale zusammenhängende Teilmenge, die  $x$  enthält und da  $U$  auch zusammenhängend gewählt wurde, muss  $U \subset Z$  gelten. Also ist  $x$  ein innerer Punkt und damit  $Z$  offen. □

**Korollar 2.30.** Sei  $x \in \partial Y$  ein regulärer Randpunkt und  $Z \subset Y$  offen mit  $x \in \partial Z$ . Dann ist  $x$  ein regulärer Randpunkt von  $Z$ . Insbesondere hat jede Zusammenhangskomponente von  $Y$  regulären Rand.

**Lemma 2.31.** Sei  $x \in \partial Y$  ein regulärer Randpunkt und  $V$  eine offene Umgebung von  $x$  mit reellen Konstanten  $m \leq c$ . Dann existiert ein  $v \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$ , so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

1.  $v|_Y$  ist subharmonisch,

2. es gelten  $v(x) = c$ ,  $v|_{\bar{Y} \cap V} \leq c$  und

3.  $v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$ .

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung  $c = 0$  annehmen. Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  mit Barriere  $\beta \in C(\bar{Y} \cap U, \mathbb{R})$ . Wir können nun eine offene Umgebung  $\tilde{V} \Subset U \cap V$  von  $x$  finden. Dort gilt

$$\sup\{\beta(y) | y \in \partial\tilde{V} \cap \bar{Y}\} < 0$$

Also existiert ein  $k > 0$ , so dass  $k\beta|_{\partial\tilde{V} \cap \bar{Y}} < m$ . Schlussendlich definieren wir

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta) & \text{auf } \bar{Y} \cap \tilde{V} \\ m & \text{auf } \bar{Y} \setminus V \end{cases}$$

Damit ist  $v$  stetig und genügt den Bedingungen 1 bis 3. □

**Lemma 2.32.** Sei  $Y \subsetneq X$  offen,  $f \in C(\partial Y, \mathbb{R})$  beschränkt und  $u^* := \sup_{u \in \mathfrak{P}_f} u$ , wobei  $\mathfrak{P}_f$  die Perronklasse von  $f$  bezeichnet. Dann gilt für jeden regulären Randpunkt  $x \in \partial Y$ :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x)$$

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert eine relativ kompakte offene Umgebun  $V$  von  $x$  mit

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \quad \forall y \in \partial Y \cap V$$

Seien  $k, K \in \mathbb{R}$  mit  $k \leq f(y) \leq K$  für jedes  $y \in \partial Y$ .

a) Nach Lemma 2.31 können wir eine Funktion  $v \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$  finden, die subharmonisch auf  $Y$  ist und

$$\begin{aligned} v(x) &= f(x) - \varepsilon, \\ v|_{\bar{Y} \cap V} &\leq f(x) - \varepsilon \quad \text{und} \\ v|_{\bar{Y} \setminus V} &= k - \varepsilon \end{aligned}$$

erfüllt. Damit ist  $v|_{\partial Y} \leq f$  und  $v \leq K$ . Also ist  $v \in \mathfrak{P}_f$  und es folgt  $v \leq u^*$ . Wir erhalten also

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} u^*(y) \geq v(x) = f(x) - \varepsilon.$$

b) Erneut durch Lemma 2.31 erhalten wir ein  $w \in c(\bar{Y}, \mathbb{R})$ , das subharmonisch auf  $Y$  ist und

$$\begin{aligned} w(x) &= -f(x), \\ w|_{\bar{Y} \cap V} &\leq -f(x) \quad \text{und} \\ w|_{\bar{Y} \setminus V} &= -K \end{aligned}$$

erfüllt. Also gilt für alle  $u \in \mathfrak{P}_f$  und  $y \in \partial Y \cap V$ :  $u(y) \leq f(x) + \varepsilon$  und wir erhalten

$$u(y) + w(y) \leq \varepsilon \quad \forall y \in \partial Y \cap V$$

Weiterhin erhalten wir für jedes  $z \in \bar{Y} \cap \partial V$

$$u(z) + w(z) \leq K + w(z) = K - K = 0.$$

Das Maximumprinzip angewandt auf die subharmonischen Funktion  $u + w$  auf  $Y \cap V$  ergibt  $u + w \leq \varepsilon$  auf  $\bar{Y} \cap V$ . Also ist  $u|_{\bar{Y} \cap V} \leq \varepsilon - w|_{\bar{Y} \cap V}$  für jedes  $u \in \mathfrak{P}_f$  und wir folgern

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} \leq \varepsilon - u(x) = f(x) + \varepsilon.$$

a) und b) zusammengesetzt ergibt dann die Behauptung. □

**Satz 2.33.** Sei  $Y \subsetneq X$  offen mit regulärem Rand und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann ist das Dirichlet-Problem für jedes beschränkte  $f \in C(\partial Y, \mathbb{R})$  lösbar auf  $Y$ .

**Satz 2.34.** Sei  $Y \subset \mathbb{C}$  offen und  $a \in \partial Y$ . Seien  $m \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$  so gewählt, dass  $a \in \partial B_r(m)$  und  $\bar{B}_r(m) \cap Y = \emptyset$ . Dann ist  $a$  ein regulärer Randpunkt von  $Y$ .

*Beweis.* Setzen wir  $c := \frac{a+m}{2}$ , dann stellt  $\beta(z) := \log \frac{r}{2} - \log |z - c|$  eine Barriere von  $a$  dar. Denn  $|a - c| = \frac{r}{2}$  und damit gilt  $\beta(a) = 0$ . Weiterhin gilt für  $z \in Y$ , dass  $|z - m| > r$  ist. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir  $|z - c| > r - |c - m| = \frac{r}{2}$ . Also ist  $\beta(y) < 0$  für beliebige  $y \in Y$ . Es bleibt also noch zu zeigen, dass  $\beta|_Y$  harmonisch ist. Für diese Berechnung nehmen wir ohne Einschränkung  $c = 0$  an und betrachten  $\beta$  als Funktion von  $x$  und  $y$ , wobei  $z = x + iy$  gilt. Wir werden in den folgenden Gleichungen aber dennoch (inkonsistenter Weise)  $z$  verwenden und fassen dieses dann auch als „Funktion“ von  $x$  und  $y$  auf. Wir erhalten für die Ableitungen, wobei wir für  $y$  direkt die zweite angeben, da  $\beta$  symmetrisch in  $x$  und  $y$  ist, die

Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \beta(x, y)}{\partial x} &= -\frac{x}{|z|^2} \\
 \frac{\partial^2 \beta(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{2x^2 - |z|^2}{|z|^4} \\
 \frac{\partial^2 \beta(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{2y^2 - |z|^2}{|z|^4} \\
 \Delta \beta(x, y) &= \frac{2x^2 - |z|^2 + 2y^2 - |z|^2}{|z|^4} \\
 &= \frac{2|z|^2 - 2|z|^2}{|z|^4} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Also ist  $\beta$  auch harmonisch auf  $Y$ . Wir erhalten, dass  $\beta$  eine Barriere in  $a$  ist.  $\square$

*Bemerkung 2.35.* Satz 2.34 gibt uns nur eine Beschreibung für reguläre Randpunkte für Gebiete in  $\mathbb{C}$ . Dies ist jedoch ausreichend, da die Eigenschaft ein regulärer Randpunkt zu sein lokal ist und deshalb auf Karten nachgerechnet werden kann. Weiterhin ist die Eigenschaft harmonisch zu sein invariant unter biholomorphen Transformationen, so dass wir das obige  $\beta$  einfach auf einer Karte angeben können. Somit überträgt sich Satz 2.34 direkt auf Gebiete beliebiger Riemannscher Flächen.

### 3 Abzählbare Topologie

Im Gegensatz zu reellen Mannigfaltigkeiten haben wir bei der Definition einer Riemannschen Fläche nicht gefordert, dass diese eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. Dies ist tatsächlich nicht erforderlich, sondern ergibt sich als Konsequenz der komplexen Struktur.

Der erste Teil des Kapitels gibt uns verschiedene Kriterien, um die Abzählbarkeit einer Topologie zu zeigen und kulminiert im Satz von Radó (Satz 3.3), der zeigt, dass jede Riemannsche Fläche eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.

Im zweiten Teil des Kapitels werden einige Eigenschaften abzählbarer topologischer Räume zusammengetragen, wobei die Aussagen jeweils nur für Riemannsche Flächen formuliert werden. Weiterhin wird der Begriff einer Runge-Teilmenge eingeführt, der eine zentrale Rolle in der Formulierung des Rungeschen Approximationssatzes spielt. Dieser wird in Kapitel 6 ausführlich behandelt.

**Lemma 3.1.** *Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  stetig, offen und surjektiv. Dann besitzt  $Y$  eine abzählbare Basis, falls  $X$  eine besitzt.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $X$  und

$$\mathfrak{B} := \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

eine abzählbare Familie von offenen Teilmengen von  $Y$ . Wir behaupten, dass  $\mathfrak{B}$  eine Basis der Topologie von  $Y$  ist. Um dies zu beweisen, sei  $D \subset Y$  offen und  $y \in D$ . Wir müssen nun zeigen, dass ein  $V \in \mathfrak{B}$  existiert mit  $y \in V \subset D$ . Aus der Surjektivität von  $f$  erhalten wir ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ . Weiterhin ist  $f^{-1}(D)$  offen und eine Umgebung von  $x$ , da  $f$  stetig ist. Da  $\mathcal{U}$  eine Basis der Topologie von  $X$  ist existiert ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U \subset f^{-1}(D)$ . Also genügt  $V := f(U)$  den geforderten Eigenschaften.  $\square$

**Lemma 3.2 (Poincaré-Volterra).** *Sei  $X$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $Y$  ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei weiterhin  $f : X \rightarrow Y$  stetig und diskret. Dann besitzt  $X$  eine abzählbare Basis der Topologie.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $Y$ . Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{B}$  die Menge aller offenen Teilmengen  $V \subset X$  mit

1.  $V$  besitzt eine abzählbare Basis der Topologie
2.  $V$  ist eine Zusammenhangskomponente eines  $f^{-1}(U)$  für ein  $U \in \mathcal{U}$ .

Zunächst zeigen wir, dass  $\mathfrak{B}$  eine Basis der Topologie von  $X$  der Topologie ist. Sei  $D \subset X$  offen mit  $x \in D$ . Zu zeigen ist, dass ein  $V \in \mathfrak{B}$  existiert, so dass  $x \in V \subset D$ . Da  $f$  diskret ist existiert ein  $W \subset D$  offen und relativ kompakt,  $x \in W$  und

$$\partial W \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset.$$



Dies lässt sich einfach auf einer Karte um  $x$  verifizieren. Nun ist  $f(\partial W)$  kompakt, also abgeschlossen und  $f(x) \notin f(\partial W)$ , d.h.  $f(x)$  liegt in der offenen Menge  $\mathbb{C} \setminus f(\partial W)$ , also existiert ein  $U \in \mathfrak{U}$ , so dass  $f(x) \in U$  und  $U \cap f(\partial W) = \emptyset$ . Sei  $V$  die Zusammenhangskomponente von  $f^{-1}(U)$ , die  $x$  enthält. Dann gilt  $V \cap \partial W = \emptyset$  und da  $V$  zusammenhängend ist folgt  $V \subset W$ . Also besitzt  $V$  eine abzählbare Basis der Topologie als Teilmenge einer relativ kompakten Menge und damit  $V \in \mathfrak{B}$ .

Als nächstes beweisen wir, dass jedes  $V_0 \in \mathfrak{B}$  höchstens abzählbar viele  $V \in \mathfrak{B}$  schneidet. Sei  $U \in \mathfrak{U}$ , dann sind per Definition die Zusammenhangskomponenten von  $f^{-1}(U)$  disjunkt und da  $V_0$  eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, kann  $V_0$  höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten von  $f^{-1}(U)$  treffen. Da es weiterhin nur abzählbar viele  $f^{-1}(U)$  gibt, folgt, dass  $V_0$  höchstens abzählbar viele  $V \in \mathfrak{B}$  schneidet.

Zu guter Letzt ist  $\mathfrak{B}$  abzählbar. Wir fixieren dazu  $V^* \in \mathfrak{B}$  und bezeichnen für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$  die Menge bestehend aus allen  $V \in \mathfrak{B}$ , so dass  $V_0, \dots, V_n \in \mathfrak{B}$  existieren mit  $V_0 = V^*$ ,  $V_n = V$  und  $V_{k-1} \cap V_k \neq \emptyset$  für  $k = 1, \dots, n$ . Da  $X$  zusammenhängend ist folgt  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$ , denn für ein  $V \in \mathfrak{B}$  wählen wir ein  $y \in V$  und ein  $x \in V^*$ . Dann existiert eine Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $c(0) = x$  und  $c(1) = y$ . Weiterhin ist  $c([0, 1])$  kompakt und damit finden wir eine endliche offene Überdeckung  $V_0, \dots, V_n$  von  $c([0, 1])$ , wobei  $V_0 = V^*$  und  $V_n = V$  ist. Weiterhin können wir nach einer Umsordnung ohne Einschränkung annehmen, dass  $V_{i-1} \cap V_i \neq \emptyset$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Also liegt  $V \in \mathfrak{B}_n$ . Damit reduziert sich unser Problem darauf zu zeigen, dass  $\mathfrak{B}_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  abzählbar ist. Wir gehen dabei induktiv vor. Klarerweise ist  $\mathfrak{B}_0 = \{V^*\}$  abzählbar. Angenommen  $\mathfrak{B}_n$  ist abzählbar.  $\mathfrak{B}_{n+1}$  besteht dann aus allen  $V \in \mathfrak{B}$ , so dass ein  $\tilde{V} \in \mathfrak{B}_n$  existiert mit  $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ . Nach 2. existieren zu jedem  $\tilde{V} \in \mathfrak{B}_n$  nur abzählbar viele  $V$ , die nicht-leeren Schnitt damit besitzen. Da  $\mathfrak{B}_n$  nun abzählbar ist und pro  $\tilde{V}$  nur abzählbar viele  $V$  existieren, ist auch  $\mathfrak{B}_{n+1}$  abzählbar. Damit besitzt  $X$  eine abzählbare Basis der Topologie.  $\square$

**Satz 3.3 (Radó).** *Jede Riemannsche Fläche  $X$  besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

*Beweis.* Sei  $U$  eine Koordinatenumgebung von  $X$ . Wähle  $K_0, K_1 \subset U$ , so dass  $z(K_0)$  und  $z(K_1)$  disjunkte, kompakte Kreisscheiben sind und setze  $Y := X \setminus (K_0 \cup K_1)$ . Nun genügt  $\partial Y = \partial K_0 \cup \partial K_1$  dem Regularitätskriterium von Satz 2.34. Also existiert nach Satz 2.33 eine stetige Funktion  $u : \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ , die harmonisch auf  $Y$  ist und  $u|_{\partial K_0} \equiv 0$  und  $u|_{\partial K_1} \equiv 1$  genügt. Da  $u$  aufgrund der Randwerte nicht konstant sein kann erhalten wir eine nicht-triviale holomorphe 1-Form  $\omega := d'u$  auf  $Y$ . Nach [For99, Kor. 10.6] existiert eine holomorphe Stammfunktion  $f$  von  $p^*\omega$  auf der universellen Überlagerung  $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ . Da  $f$  nicht konstant ist, genügt  $f$  den Voraussetzungen von Lemma 3.2<sup>1</sup>. Also besitzt auch  $\tilde{Y}$  eine abzählbare Basis der Topologie und aus Lemma 3.1 folgt, dass  $Y$  eine abzählbare Basis der Topologie. Nun ist  $X = Y \cup U$  und  $U$  ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge in  $\mathbb{C}$ , besitzt also auch eine abzählbare Basis der Topologie. Insgesamt ergibt sich also, dass auch  $X$  eine abzählbare Basis der Topologie besitzt.  $\square$

<sup>1</sup>denn  $\mathbb{C}$  ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie

**Definition 3.4.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Für alle  $Y \subset X$  definieren wir  $\mathfrak{h}(Y)$  durch  $Y$  vereinigt mit allen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus Y$ .  $Y \subset X$  heißt *Runge-Teilmenge* falls  $Y = \mathfrak{h}(Y)$ . Es gilt:

ausrechnen

$$1. \mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y) \quad \forall Y \subset X$$

2.  $Y_1 \subset Y_2$  impliziert  $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$ , denn entweder  $x \in Y_1$  liegt bereits in  $Y_2$  oder aber  $x \in Z \subset X \setminus Y_1$  eine relativ kompakte Zusammenhangskomponente. Da  $x$  weiterhin nicht in  $Y_2$  liegt, liegt  $x \in Z \setminus Y_2 \subset Z$ . Sei  $x \in \tilde{Z} \subset Z \setminus Y_2$  eine Zusammenhangskomponente von  $Z \setminus Y_2$ , dann ist  $\tilde{Z}$  als Teilmenge von  $Z$  relativ kompakt und  $\tilde{Z}$  ist eine Zusammenhangskomponente von  $X \setminus Y_2$ , da alle Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus Y_2$  in den Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus Y_1$  enthalten sein müssen. Damit liegt aber  $x \in \tilde{Z} \subset \mathfrak{h}(Y_2)$ .

**Satz 3.5.** Sei  $Y \subset X$  und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann gilt:

1.  $Y$  abgeschlossen  $\Rightarrow \mathfrak{h}(Y)$  abgeschlossen
2.  $Y$  kompakt  $\Rightarrow \mathfrak{h}(Y)$  kompakt

*Beweis.* 1. Seien  $C_j, j \in J$  die Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus Y$ . Da  $X \setminus Y$  ist offen und  $X$  ist eine Mannigfaltigkeit, deshalb sind alle  $C_j$  offen. Sei  $J_0 \subset J$ , die Menge der  $j \in J$ , so dass  $C_j$  relativ kompakt ist. Dann erhalten wir

$$X \setminus \mathfrak{h}(Y) = \bigcup_{j \in J \setminus J_0} C_j$$

und ist damit offen, als Vereinigung offener Mengen und folglich ist  $\mathfrak{h}(Y)$  abgeschlossen.

2. Wir können ohne Einschränkung  $Y \neq \emptyset$  annehmen. Sei  $U$  eine offene, relativ kompakte Umgebung von  $Y$ . Diese existiert, denn wir können  $Y$  durch endlich viele relativ kompakte Koordinatenumgebungen überdecken. Die Vereinigung dieser Koordinatenumgebungen ergibt dann unser  $U$ . Sei weiterhin  $C_j, j \in J$  wie oben.

Nun trifft jedes  $C_j$  trifft  $\bar{U}$ . Denn andernfalls wäre  $C_j \subset X \setminus \bar{U}$ , also  $\bar{C}_j \subset X \setminus U \subset X \setminus Y$ . Da  $C_j$  eine Zusammenhangskomponente von  $X \setminus Y$  ist, folgt  $C_j = \bar{C}_j$ . Also ist  $C_j$  offen und abgeschlossen, also  $C_j = \emptyset$  oder  $C_j = X$ . Beides führt zum Widerspruch.

Nun behaupten wir, dass nur endlich viele  $C_j$  den Rand  $\partial U$  treffen. Dies folgt daraus, dass  $\partial U$  kompakt ist und durch die disjunkten  $C_j$  überdeckt wird. Seien nun wieder  $C_j, j \in J_0$  die relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus Y$  und  $C_{j_1}, \dots, C_{j_n}$  diejenigen, die  $\partial U$  schneiden. Der Schnitt  $C_j \cap \bar{U}$  ist aber für jedes  $j$  nicht leer, also liegen alle anderen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten in  $U$ . Es folgt

$$\mathfrak{h}(Y) \subset U \cup C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_n}$$

und damit ist  $\mathfrak{h}(Y)$  relativ kompakt. Da  $\mathfrak{h}(Y)$  nach 1. aber auch abgeschlossen ist, ist es tatsächlich kompakt.  $\square$

**Satz 3.6.** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Folge kompakter Mengen  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

1. Es gilt  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und
2.  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

*Beweis.* Nach Satz 3.3 besitzt  $X$  eine abzählbare Basis der Topologie. Wir bezeichnen diese mit  $\mathfrak{B}$ . Dann definieren wir

$$\mathfrak{U} := \{B \in \mathfrak{B} \mid \bar{B} \text{ ist kompakt}\}.$$

Wir behaupten nun, dass bereits  $\mathfrak{U}$  eine Basis der Topologie von  $X$  ist. Sei dazu  $\emptyset \neq U \subset X$  und  $x \in U$ . Dann können wir eine relativ kompakte Koordinatenumgebung  $V \subset U$  von  $x$  finden. Da  $\mathfrak{B}$  eine Basis der Topologie ist, finden wir ein  $B \in \mathfrak{B}$ , so dass  $x \in B \subset V$ . Also ist  $\bar{B} \subset \bar{V}$  kompakt und damit liegt  $B \in \mathfrak{U}$  und es gilt  $x \in B \subset U$ . Also ist  $\mathfrak{U}$  eine weiter abzählbare Basis der Topologie von  $X$ .

Wir wählen nun eine Aufzählung für  $\mathfrak{U} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  und setzen  $K_1 := \bar{B}_1$ . Wir konstruieren nun induktiv die gewünschte Folge von kompakten Teilmengen.  $K_1$  wurde bereits konstruiert und wir setzen  $k_1 := 1$ . Gehen wir davon aus, dass auch  $K_n$  und  $k_n$  bereits konstruiert wurden, so gilt  $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ . Da  $K_n$  kompakt ist, existiert ein  $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ , so dass  $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} B_i$ . Setzen wir  $K_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} \bar{B}_i$ , so gilt  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  und weiterhin ist  $K_{n+1}$  kompakt. Außerdem gilt  $k_{n+1} > k_n$ .

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, dass  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  gilt. Sei dazu  $x \in X$  beliebig gewählt. Dann existiert ein  $B_j \in \mathfrak{U}$ , so dass  $x \in B_j$ . Da  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng monoton wachsend ist, existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $x \in K_N = \bigcup_{i=1}^{k_N} \bar{B}_i$  gilt.  $\square$

**Lemma 3.7.** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kompakte Ausschöpfung von  $X$  mit  $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei weiterhin  $K \subset X$  kompakt. Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $K \subset K_n$ .*

*Beweis.* Angenommen es gälte  $K \not\subset K_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann fänden wir zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in K \setminus K_n$ . Da  $K$  kompakt ist, existierte eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x \in K$ . Nun existiert aber ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x \in \overset{\circ}{K}_n$  gilt. Damit wäre  $\overset{\circ}{K}_n$  eine offene Umgebung von  $x$  und wir fänden ein  $K \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_{n_k} \in K_n$  für jedes  $k \geq K$  gälte. Das aber bedeutete, dass ein zweites  $\tilde{K} \in \mathbb{N}$  existieren müsste, so dass  $x_{n_k} \in K_{n_k}$  für alle  $k \geq \tilde{K}$  gälte. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass  $x_n \in K \setminus K_n$  gilt.  $\square$

**Lemma 3.8.** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $K \subset X$  kompakt. Dann existiert ein offenes  $M \Subset X$  mit  $K \subset M$ .*

*Beweis.* Zu jedem  $z \in K$  finden wir eine relativ kompakte Koordinatenumgebung  $U_z$ . Dann ist aber  $K \subset \bigcup_{z \in K} U_z$  und aus der Kompaktheit von  $K$  folgt, dass endlich viele  $z_1, \dots, z_n \in K$  existieren, so dass  $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{z_i}$ . Setzen wir  $M := \bigcup_{i=1}^n U_{z_i}$ , so ist  $M$  offen und relativ kompakt, weiterhin gilt  $K \subset M$ , was die Behauptung zeigt.  $\square$

**Korollar 3.9.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche. Dann existieren kompakte Runge-Teilmenge  $K_j \subset X, j \in \mathbb{N}$  mit*

1.  $K_{j-1} \subset \overset{\circ}{K}_j \quad \forall j \geq 1$
2.  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = X$

*Beweis.* Nach Sat 3.6 existiert eine Ausschöpfung

$$K'_0 \subset K'_1 \subset \dots$$

durch Kompakta von  $X$ . Wir Setzen  $K_0 := \mathfrak{h}(K'_0)$ . Seien  $K_0, \dots, K_n$  bereits konstruiert. Dann existiert nach Lemma 3.8 ein kompaktes  $M \subset X$  mit  $K'_n \cup K_n \subset M$ .  $\square$

**Lemma 3.10.** *Seien  $K_1, K_2 \subset X$  kompakte Teilmengen und  $X$  eine Riemannsche Fläche mit  $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$  und  $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$ . Dann existiert eine offene Runge-Teilmenge  $Y \subset X$  mit  $K_1 \subset Y \subset K_2$ .*

*Weiterhin kann  $Y$  so gewählt werden, dass sein Rand regulär ist.*

*Beweis.* Zu jedem  $x \in \partial K_2$  existiert eine Koordinatenumgebung  $U$  von  $x$ , so dass  $K_1 \cap U = \emptyset$  gilt. Wir wählen eine kompakte Scheibe  $D$ , die  $x$  im Inneren enthält. Da  $\partial K_2$  auch kompakt ist, wird es durch endlich viele  $D_1, \dots, D_k$  überdeckt. Setze  $Y := K_2 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$ . Dann ist  $Y$  offen und liegt zwischen  $K_1$  und  $K_2$ . Seien  $c_j, j \in J$  die Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus K_2$ . Nach Voraussetzung sind diese nicht relativ kompakt. Nun treffen alle  $D_i$  mindestens ein  $C_j$ , da  $D_i \cap (Y \setminus K_2) \neq \emptyset$  sein muss. Da alle  $D_i$  zusammenhängend sind, sind die  $D_i \cap C_j$  zusammenhängend und nicht relativ kompakt. Also existieren keine relativ kompakten Zusammenhangskomponenten in  $X \setminus Y$ . Also  $Y = \mathfrak{h}(Y)$ . Weiterhin sind nach Satz 2.34 alle Randpunkte von  $Y$  regulär.  $\square$

**Satz 3.11.** *Sei  $Y \subset X$  eine offene Runge-Teilmenge und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann ist jede Zusammenhangskomponente eine Runge-Teilmenge.*

*Beweis.* Seien  $Y_i, i \in I$ , die Zusammenhangskomponenten von  $Y$ . Nach Lemma 2.29 sind alle  $Y_i$  offen. Setze nun  $A := X \setminus Y$  und  $A_k, k \in \mathbb{N}$  die Zusammenhangskomponenten von  $A$ . Dann sind alle  $A_k$  abgeschlossen, aber nicht kompakt.

Für jedes  $i \in I$  gilt  $\bar{Y}_i \cap A \neq \emptyset$ . Ansonsten wäre  $\bar{Y}_i \subset Y$ . Da dann  $\bar{Y}_i \cap \bigcup_{j \neq i} Y_j = \emptyset$  gilt, müsste  $Y_i = \bar{Y}_i$  gelten. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $X$  zusammenhängend ist.

Es gilt  $C \cap A \neq \emptyset$  für jede Zusammenhangskomponente  $C$  von  $X \setminus Y_i$ . Ansonsten gäbe es ein  $j \neq i$ , so dass  $C \cap Y_j \neq \emptyset$  gälte. Nun ist aber  $Y_j \subset X \setminus Y_i$  zusammenhängend und aus dem

nicht leeren Schnitt folgte  $Y_j \subset C$ , da  $C$  maximal zusammenhängend ist. Weiterhin folgte dann auch  $\bar{Y}_j \subset \bar{C} = C$ , da  $C$  bereits abgeschlossen ist. Da  $\bar{Y}_i \cap A \neq \emptyset$  gilt, würde dies bedeuten, dass  $A \cap C \neq \emptyset$  gelten müsste. Also genau, was wir zeigen wollten.

Sei nun  $C$  eine Zusammenhangskomponente von  $X \setminus Y_i$ . Dann trifft  $C$  mindestens ein  $A_k$ . Also ist  $A_k \subset C$  und da  $A_k$  nicht kompakt ist, ist  $C$  auch nicht kompakt. Damit ist  $Y_i$  Runge-Teilmenge.  $\square$

**Satz 3.12.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche.*

*Dann existiert eine Ausschöpfung  $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$  von  $X$  durch relativ kompakte Runge-Gebiete. Weiterhin hat jedes  $Y_i$  regulären Rand.*

*Beweis.* Sei  $K \subset X$  kompakt. Da  $K$  kompakt ist, kann es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen, ansonsten könnten wir eine Folge ohne konvergente Teilfolgen konstruieren. Wählen wir nun aus jeder dieser endlich vielen Zusammenhangskomponenten einen Punkt aus, so können wir diese durch endlich viele Kurven verbinden. Vereinigen wir nun  $K$  mit den Bildern der Kurven, die auch kompakt sind, so ist dies eine endliche Vereinigung und das Resultat ist wieder kompakt und nach Konstruktion zusammenhängend. Wir bezeichnen es mit  $K_1$ . Es folgt  $K \subset K_1$ . Nach Lemma 3.8 finden wir ein kompaktes  $K_2 \subset X$  mit  $K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2$ . Nach Lemma 3.10 existiert eine offene Runge-Teilmenge  $\tilde{Y}_1 \subset X$  mit  $K_1 \subset \tilde{Y}_1 \subset \mathfrak{h}(K_2)$ , mit regulärem Rand.

Wählen wir nun die Zusammenhangskomponente  $Y_1$ , die  $K_1$  enthält, so ist  $Y_1$  nach Satz 3.11 ein Runge-Gebiet und hat nach Bemerkung 2.35 auch regulären Rand. Nun finden wir eine Ausschöpfung von  $X$  durch Kompakta  $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ . Durch das obige vorgehen erhalten wir ein  $Y_1$ , das  $K_1$  enthält. Seien nun  $Y_1, \dots, Y_k$  bereits konstruiert. Setzen wir  $\tilde{K}_k = K_k \cup \bar{Y}_k$ . Dann ist  $\tilde{K}_k$  kompakt und wir können wieder wie oben ein Runge-Gebiet  $Y_k \supset \tilde{K}_k$  finden. Damit ist die gewünschte Ausschöpfung konstruiert.  $\square$

## 4 Weyls Lemma

Wir sind in diesem Kapitel an der Aussage interessiert, dass jede harmonische Distribution bereits durch eine harmonische Funktion erzeugt wird. Das ist genau der Inhalt von Weyls Lemma 4.11. Bis wir die Aussage jedoch überhaupt formulieren können, ist einiges an (technischer) Vorarbeit nötig. Zunächst muss der Begriff einer Distribution eingeführt und Glättungen behandelt werden, bevor wir zu unserem eigentlichen Hauptresultat gelangen können.

Die technischen Methoden, die auf dem Weg zu Weyls Lemma entwickelt werden, spielen im weiteren Verlauf dieser Arbeit keine Rolle mehr. Wer befürchtet aufgrund der vielen sehr technischen Beweise den Überblick zu verlieren, kann deshalb getrost die Aussagen von Satz 4.11 und Korollar 4.12 als gegeben voraussetzen und zum nächsten Kapitel übergehen und später zu den notwendigen Beweisen zurückspringen.

**Definition 4.1.** Sei  $X \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in \mathcal{E}(X)$ . Der Raum der *Testfunktionen* auf  $X$  ist definiert als

$$\mathcal{D}(X) := \{f \in \mathcal{E}(X) \mid \text{Supp}(f) \subset X \text{ kompakt}\}.$$

Eine Folge  $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)$  heißt konvergent gegen  $f \in \mathcal{D}(X)$ , schreibe  $f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ , falls ein kompaktes  $K \subset X$  mit  $\text{Supp}(f), \text{Supp}(f_\nu) \subset K$  für jedes  $\nu \in \mathbb{N}$  und für alle  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}^2$  gilt:

$$D_\nu^\alpha \rightrightarrows D^\alpha f \quad \text{auf } K$$

$$\text{mit } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}.$$

**Definition 4.2 (Distribution).** Der topologische Dualraum,  $\mathcal{D}(X)'$ , von  $\mathcal{D}(X)$ , wird als *Raum der Distributionen* bezeichnet. Ein stetiges, lineares Funktional  $T \in \mathcal{D}(X)'$  heißt *Distribution*.

**Beispiele 4.3.** 1. Jedes  $h \in C(X)$  definiert eine Distribution  $T_h \in \mathcal{D}(X)'$  durch

$$T_h[f] := \iint_X h(z) f(z) \, dx \, dy \quad z = x + iy \quad f \in \mathcal{D}(X).$$

$T_h$  ist klarerweise linear und für die Stetigkeit wählen wir ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  und eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)$  mit  $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \in \mathcal{D}(X)$ .

Also finden wir ein kompaktes  $K \subset X$  mit  $\text{Supp}(f_n), \text{Supp}(f) \subset K$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_n - f\|_K < \frac{\varepsilon}{\|h\|_K |K|} \quad \forall n \geq N$$

$|K|$  bezeichnet dabei das Volumen von  $K$ . Dann erhalten wir für alle  $n \geq N$

$$\begin{aligned}
 |T_h[f_n] - T_h[f]| &= |T_h[f_n - f]| \\
 &= \left| \iint_X h(z)(f_n(z) - f(z)) \, dx \, dy \right| \\
 &\leq \iint_K |h(z)| \cdot |f_n(z) - f(z)| \, dx \, dy \\
 &\leq \|h\|_K \cdot \|f_n - f\|_K \cdot \iint_K dx \, dy \\
 &= \|h\|_K \cdot \|f_n - f\|_K \cdot |K| \\
 &< \|h\|_K \frac{\varepsilon}{\|h\|_K |K|} |K| \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit von  $T_h$ . Weiterhin ist die Abbildung  $C(X) \rightarrow \mathcal{D}(X)'$ ,  $h \mapsto T_h$  sogar injektiv. Dies ist eine direkte Folge des Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

2. Nicht alle Distributionen sind von der obigen Form. Ein Gegenbeispiel stellt die Diracsche Delta Distribution dar. Für ein  $a \in X$  ist sie durch

$$\delta_a[f] := f(a) \quad \forall f \in \mathcal{D}(X)$$

definiert. Wir werden im weiteren Verlauf ausschließlich versuchen zu zeigen, dass alle für uns interessanten Distributionen von der ersten Form sind.

**Definition 4.4** (Ableiten von Distributionen). Ausgehend von unserem ersten Beispiel und der partiellen Integration definieren wir für  $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$(D^\alpha T)[f] := (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha f] \quad \forall f \in \mathcal{D}(X).$$

Nun bedeutet unsere spezielle Wahl der Konvergenz, dass die Konvergenz  $f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} f$  auch die Konvergenz  $D^\alpha f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} D^\alpha f$  impliziert, was zur Folge hat, dass  $D^\alpha T$  wieder stetig ist, also in  $\mathcal{D}(X)'$  liegt.

**Lemma 4.5.** Sei  $X \subset \mathbb{C}$  offen,  $K \subset X$  kompakt und  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Sei weiterhin  $g : X \times I \rightarrow \mathbb{C}$  glatt und  $\text{Supp}(g) \subset K \times I$ . Wählen wir nun ein  $T \in \mathcal{D}(X)'$ , so ist die Abbildung

$$t \mapsto T_z[g(z, t)]$$

glatt auf  $I$  und genügt

$$\frac{d}{dt} T_z[g(z, t)] = T_z \left[ \frac{\partial g(z, t)}{\partial t} \right] \quad (6)$$

$T_z$  soll dabei nur verdeutlichen dass  $T$  nur auf  $g(z, t)$  als Variable von  $z$  operiert;  $t$  bleibt als Parameter unberührt.

*Beweis.* Es genügt die Formel (6) zu zeigen, da dann die Glattheit von  $T_z[g(z, t)]$  aus der Glattheit von  $g$  folgt. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T_z[g(z, t)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T_z[g(z, t+h)] - T_z[g(z, t)]) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} T_z \left[ \frac{1}{h} (g(z, t+h) - g(z, t)) \right]. \end{aligned}$$

Für festes  $t \in I$  und  $h \in \mathbb{R}^\times$  klein genug, ist  $f_h(z) := \frac{1}{h}(g(z, t+h) - g(z, t))$  wohldefiniert und in  $\mathcal{D}(X)$ . Weiterhin gilt  $f_h \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\partial g(\cdot, t)}{\partial t}$ , da  $g$  glatt ist. Aus der Stetigkeit von  $T$  folgt damit

$$\lim_{h \rightarrow 0} T_z[f_h] = T_z[\lim_{h \rightarrow 0} f_h] = T_z \left[ \frac{\partial g(z, t)}{\partial t} \right]$$

□

**Lemma 4.6.** *Seien  $X, Y \subset \mathbb{C}$  offen  $K \subset X$  bzw.  $L \subset Y$  kompakt. Sei weiterhin  $g : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  glatt mit  $\text{Supp}(g) \subset K \times L$ . Dann gilt für beliebige  $T \in \mathcal{D}(X)'$*

$$T_w \left[ \iint_Y g(w, z) \, dx \, dy \right] = \iint_Y T_w[g(w, z)] \, dx \, dy,$$

wobei die  $z = x + iy$  gesetzt wurde.

*Beweis.* Nach Lemma 4.5 ist  $T_w[g(w, z)]$  glatt und es gilt  $\text{Supp}(T_w[g(w, z)]) \subset L$ , denn für  $z \notin L$  ist  $g(\cdot, z) \equiv 0$  und damit  $T_w[g(w, z)] = 0$ . Also existiert das Integral  $\iint_Y T_w[g(w, z)] \, dx \, dy$ , insbesondere lässt es sich durch Riemann-Summen approximieren. Dazu wählen wir ein Rechteck  $R \subset \mathbb{C}$ , so dass  $L \subset R$  und die Seiten von  $R$  parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Wir können  $g$  durch 0 auf  $K \times R$  fortsetzen, d.h. wir können es als Funktion auf  $K \times R$  auffassen. Als nächstes unterteilen wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $R$  in  $n^2$  Teilrechtecke  $R_{n\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n^2$ . Diese Teilrechtecke werden dabei alle gleich groß gewählt. Sei weiterhin  $z_{n\nu} \in R_{n\nu}$  und  $F = |R|$ . Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$G_n(w) := \frac{F}{n^2} \sum_{\nu=1}^{n^2} g(w, z_{n\nu})$$

gegen  $\iint_Y g(w, z) \, dx \, dy$ . Nun ist  $g$  gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  finden wir ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|g(w, z) - g(\tilde{w}, \tilde{z})| < \frac{\varepsilon}{F}$$



für beliebige  $\|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\| < \delta$ . Wir finden also ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|z_{n_\nu} - z| < \delta$  für alle  $z \in R_{n_\nu}$  und für alle  $n \geq N$ . Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
|G_n(w) - \iint_R g(w, z) \, dx \, dy| &= \left| \sum_{\nu=1}^{n^2} \left( \frac{F}{n^2} g(w, z_{n_\nu}) - \iint_{R_{n_\nu}} g(w, z) \, dx \, dy \right) \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \left| \iint_{R_{n_\nu}} (g(w, z_{n_\nu}) - g(w, z)) \, dx \, dy \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \iint_{R_{n_\nu}} |g(w, z_{n_\nu}) - g(w, z)| \, dx \, dy \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \iint_{R_{n_\nu}} \frac{\varepsilon}{F} \, dx \, dy \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Also konvergiert  $G_n$  gleichmäßig gegen  $\iint_R g(\cdot, z) \, dx \, dy$ . Die gleiche Argumentation kann für beliebige Ableitungen  $D^\alpha G_n$  durchgeführt werden und wir erhalten, dass

$$G_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \iint_Y g(\cdot, z) \, dx \, dy$$

gilt. Also folgt aus der Stetigkeit von  $T$

$$T_w \left[ \iint_Y g(w, z) \, dx \, dy \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} T[G_n] = \iint_Y T_w[g(w, z)] \, dx \, dy$$

□

## 4.1 Glättung von Funktionen

**Definition 4.7** (Glättungskern).  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$  heißt *Glättungskern*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. Es gilt  $\text{Supp}(\rho) \subset \bar{D}$ .
2.  $\rho$  ist rotationssymmetrisch zum Ursprung.
3. Es gilt  $\rho \geq 0$ <sup>2</sup>.
4. Es gilt  $\iint_{\mathbb{C}} \rho(z) \, dx \, dy = 1$ , wobei  $z = x + iy$  gesetzt wurde.

<sup>2</sup>Insbesondere ist  $\rho$  also reellwertig.

Für  $\varepsilon > 0$  und  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

Dann ist  $\text{Supp}(\rho_\varepsilon) \subset \bar{D}(\varepsilon)$  und  $\iint_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon(z) \, dx \, dy = 1$ .

**Beispiele 4.8.** Das Standardbeispiel für einen Glättungskern stellt die Funktion

$$\varphi(z) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|z|^2}\right) & |z| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dar. Man kann zeigen, dass diese glatt ist. Weiterhin ist ihr Integral echt größer 0, weshalb sie auch so normiert werden kann, dass Bedingung 4 erfüllt ist.

**Definition 4.9.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $\varepsilon > 0$ . Dann definieren wir  $U^{(\varepsilon)} := \{z \in U \mid \bar{B}_\varepsilon(z) \subset U\}$  und für  $f \in C(U)$  setzen wir

$$\text{sm}_\varepsilon f : U^{(\varepsilon)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{sm}_\varepsilon f(w) := \iint_U \rho_\varepsilon(w-z) f(z) \, dx \, dy \quad z = x + iy$$

$\text{sm}_\varepsilon f$  wird als *Glättung* von  $f$  bezeichnet. Aus der Leibniz-Regel folgt, dass Integration und Differentiation vertauscht, also ist  $\text{sm}_\varepsilon f \in \mathcal{E}(U^{(\varepsilon)})$ , was auch den Namen „Glättung“ erklärt.

**Lemma 4.10.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen,  $f \in \mathcal{E}(U)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gelten:

1. Für jedes  $\alpha \in \mathbb{N}^2$  ist

$$D^\alpha(\text{sm}_\varepsilon f) = \text{sm}_\varepsilon(D^\alpha f).$$

2. Falls  $z \in U^{(\varepsilon)}$  und  $f$  harmonisch auf  $B_\varepsilon(z)$  ist, so gilt:

$$\text{sm}_\varepsilon f(z) = f(z)$$

**Beweis.** 1. Wir berechnen

$$\begin{aligned} D^\alpha(\text{sm}_\varepsilon f)(w) &= D^\alpha \iint_U \rho_\varepsilon(w-z) f(z) \, dx \, dy \\ &= \iint_U D_w^\alpha \rho(w-z) f(z) \, dx \, dy \end{aligned} \tag{1}$$

$$= \iint_U (-1)^{|\alpha|} D_z^\alpha \rho(w-z) f(z) \, dx \, dy \tag{2}$$

$$= \iint_U (-1)^{2|\alpha|} \rho_\varepsilon(w-z) D_z^\alpha f(z) \, dx \, dy \tag{3}$$

$$= (\text{sm}_\varepsilon D^\alpha f)(z).$$

(1) folgt dabei aus der Leibnizregel, (2) erhält man daraus, dass  $D^\alpha$  zunächst auf  $w$  wirkt (deshalb auch der Index), wir wollen aber, dass es auf  $z$  wirkt um die Partielle Integration in (3) anwenden zu können. Dies ist möglich in dem man das Vorzeichen, das durch die Kettenregel entsteht ausgleicht.

2. Wenn  $f$  harmonisch auf  $B_\varepsilon(z)$  ist, können wir die Mittelwerteigenschaft anwenden und erhalten:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi \quad \forall r \in ]0, \varepsilon[$$

Die folgende Rechnung liefert dann die Behauptung:

$$\begin{aligned} (\text{sm}_\varepsilon f)(w) &= \iint_u \rho_\varepsilon(w - z) f(z) dx dy \\ &= \iint_{B_\varepsilon(z)} \rho_\varepsilon(z - w) f(z) dx dy \\ &= \iint_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z) f(z + w) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(re^{i\varphi}) f(w + re^{i\varphi}) r dr d\varphi \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\rho}_\varepsilon(r) r dr \cdot 2\pi f(w) \\ &= f(z) \end{aligned} \tag{7}$$

(7) gilt dabei, aufgrund der Gleichung

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \tilde{\rho}_\varepsilon(r) r dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\varepsilon \tilde{\rho}_\varepsilon(r) r dr. \end{aligned}$$

□

**Satz 4.11 (Weyls Lemma).** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $T \in \mathcal{D}(U)'$  mit  $\Delta T \equiv 0$ . Dann existiert ein  $h \in \mathcal{E}(U)$  mit  $\Delta h = 0$ , so dass

$$T[f] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h(z) f(z) dx dy \quad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

gilt.

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $z \in U^{(\varepsilon)}$  hat  $w \mapsto \rho_\varepsilon(w - z)$  kompakten Träger in  $U$ . Damit ist

$$h_\varepsilon : U^{(\varepsilon)} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_\varepsilon(z) := T_w[\rho_\varepsilon(w - z)]$$

wohldefiniert. Nach Lemma 4.5 ist  $h_\varepsilon \in \mathcal{E}(U^{(\varepsilon)})$ . Sei nun  $f \in \mathcal{D}(U)$  mit  $\text{Supp}(f) \subset U^{(\varepsilon)}$ . Dann hat  $\text{sm}_\varepsilon f$  kompakten Träger in  $U$ , denn für  $w \in U$  mit  $B_\varepsilon(w) \cap U \neq \emptyset$  ist  $f|_{B_\varepsilon(w) \cap U} \equiv 0$  und es folgt  $\text{sm}_\varepsilon f(w) = 0$ . Also gilt

$$\text{Supp } \text{sm}_\varepsilon f \subset \{z \in U \mid B_\varepsilon(w) \cap U \neq \emptyset\} =: M.$$

Nun ist  $\text{Supp}(f)$  kompakt und damit beschränkt. Sei  $S$  das zugehörige Supremum. Für ein beliebiges  $w \in M$ , finden wir nun ein  $z \in B_\varepsilon(w) \cap U$  und wir erhalten

$$|w| \leq |w - z| + |z| < S + \varepsilon$$

Also ist  $M$  und damit  $\text{Supp } \text{sm}_\varepsilon f$  beschränkt. Da  $\text{Supp } \text{sm}_\varepsilon f$  auch abgeschlossen ist, ist es sogar kompakt und wir können folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} T[\text{sm}_\varepsilon f] &= T_w \left[ \iint_U \rho_\varepsilon(w - z) f(z) \, dx \, dy \right] \\ &= \iint_U T_w[\rho_\varepsilon(w - z)] f(z) \, dx \, dy \\ &= \iint_U h_\varepsilon(z) f(z) \, dx \, dy \end{aligned} \tag{8}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $T[f] = T[\text{sm}_\varepsilon f]$  gilt. Nun können  $f$  auch als Funktion auf  $\mathbb{C}$  auffassen, in dem wir es durch 0 fortsetzen. Dann liefert uns [For99, Kor. 13.3] die Existenz von  $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$  mit  $\Delta\psi = f$ . Dann ist  $\psi$  harmonisch auf  $V := \mathbb{C} \setminus \text{Supp}(f)$ . Also liefert uns Lemma 4.10  $\psi|_{V^{(\varepsilon)}} \equiv \text{sm}_\varepsilon \psi|_{V^{(\varepsilon)}}$ . Wir setzen  $\varphi := \psi - \text{sm}_\varepsilon \psi$ . Dann folgt  $\text{Supp}(\varphi) \subset V^c = \text{Supp}(f) \subset U$ , d.h.  $\varphi$  hat kompakten Träger in  $U$  und es gilt

$$\Delta\varphi = \Delta\psi - \text{sm}_\varepsilon \Delta\psi = f - \text{sm}_\varepsilon f$$

Da nun aber  $\Delta T = 0$ , folgt  $T[\Delta\varphi] = 0$  und schlussendlich

$$\begin{aligned} T[f] &= T[\text{sm}_\varepsilon f + \Delta\varphi] \\ &= T[\text{sm}_\varepsilon f] \\ &= \iint_{U^{(\varepsilon)}} h_\varepsilon(z) f(z) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Für beliebige  $0 < \varepsilon', \varepsilon'' \leq \varepsilon$  gilt  $U^{(\varepsilon)} \subset U^{(\varepsilon')}, U^{(\varepsilon'')}$  und es folgt

$$T[f] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h_{\varepsilon'}(z) f(z) \, dx \, dy = \iint_{U^{(\varepsilon'')}} h_{\varepsilon''}(z) f(z) \, dx \, dy.$$

Also folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung  $h_{\varepsilon'} \equiv h_{\varepsilon''}$  auf  $U^{(\varepsilon)}$ , d.h.  $h_{\varepsilon'}$  wird für  $\varepsilon' < \varepsilon$  konstant auf  $U^{(\varepsilon)}$  und da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, finden wir ein  $h \in \mathcal{E}(U)$  mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Korollar 4.12.** Sei  $U \subset \mathbb{C}$  offen und  $T \in \mathcal{D}(U)'$  mit  $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$ . Dann existiert ein  $h \in \mathcal{O}(U)$ , so dass

$$T[f] = \iint_U h(z) f(z) \, dx \, dy \quad \forall f \in \mathcal{D}(U)'$$

*Beweis.* Aus  $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$  folgt

$$\Delta T = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} T \right) = 0$$

Also existiert aufgrund von Satz 4.11 ein  $h \in \mathcal{E}(U)$ , so dass  $T = T_h$  und erneut aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$$

und damit  $h \in \mathcal{O}(U)$ . □

## 5 Fréchet Räume

Dieses recht kurze Kapitel trägt rudimentäre Eigenschaften von Fréchet-Räumen zusammen, wie sie in Kapitel 6 benötigt werden. Der Satz von Hahn-Banach 5.6 wird genannt und es wird auf eine Quelle für den Beweis verwiesen, der aufgrund seiner Umfänglichkeit leider nicht im Rahmen dieser Arbeit geführt werden konnte.

**Definition 5.1.** Sei  $E$  ein topologischer Vektorraum.  $E$  heißt *Fréchet-Raum*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine abzählbare Familie von Seminormen  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die die Topologie von  $E$  erzeugen,
2.  $E$  ist Hausdorffsch und
3.  $E$  ist vollständig.

Weiterhin definieren wir für  $\varepsilon > 0$  und  $x \in E$  die Menge

$$U(p_k, \varepsilon, x) := \{y \in E \mid p_k(x - y) < \varepsilon\}$$

**Bemerkung 5.2.** 1. Konvergenz bezüglich der Topologie von  $E$  bedeutet dann nichts anderes, als Konvergenz bezüglich aller Halbnormen  $p_k$ .

2. Die erste Bedingung bedeutet, dass  $U \subset X$  genau dann offen ist, falls zu jedem  $x \in U$  ein  $K \in \mathbb{N}$  und ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass

$$\bigcap_{k=1}^K U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$$

gilt.

3. Aus der Bedingung, dass  $E$  Hausdorffsch ist, folgt, dass  $x = y$  dann und nur dann gilt, wenn  $p_k(x - y) = 0$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Dies folgt leicht aus der Tatsache, dass falls  $p_k(x - y) = \varepsilon$  für beliebige  $k \in \mathbb{N}$  gilt,  $x \in U(p_k, \varepsilon, y)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon > 0$  gilt. Also ist  $x$  in jeder offenen Umgebung von  $y$  enthalten. Da  $E$  Hausdorffsch ist, ist dies nur möglich für  $x = y$ . Die Umkehrung ist natürlich immer wahr.

**Proposition 5.3.** Sei  $E$  ein Fréchet-Raum mit Halbnormen  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Dann ist

$$d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}$$

eine Metrik und die von  $d$  induzierte Topologie stimmt mit der Topologie von  $E$  überein. Also ist  $E$  insbesondere metrisierbar.  $d$  wird auch als Fréchet-Metrik bezeichnet.

*Beweis.* Zunächst ist die Abbildung  $d$  wohldefiniert, denn die Abbildung, die durch  $x \mapsto \frac{x}{1+x}$  gegeben ist, bildet das Intervall  $[0, \infty[$  auf das Intervall  $[0, 1[$  ab. Der Rest folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Wir bezeichnen diese Abbildung mit  $f$ .

Die Symmetrie der Metrik ist klar und für die Definitheit wählen wir  $x \neq y \in E$ . Dann existiert nach der dritten Bemerkung ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass  $p_k(x - y) > 0$  ist. Dann ist aber  $d(x, y) \geq 2^{-k} p_k(x - y) > 0$ . Da für  $x = y$  klarerweise  $d(x, y) = 0$  gilt, folgt die Definitheit von  $d$ . Es bleibt also nur noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass  $f$  streng monoton wachsend ist, denn die Ableitung  $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  ist positiv auf dem gesamten Intervall  $[0, \infty[$ . Nun folgt aus der Dreiecksungleichung für die Halbnormen, dass  $p_k(x + y) \leq p_k(x) + p_k(y)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Aus der Monotonie von  $f$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} f(p_k(x + y)) &\leq f(p_k(x) + p_k(y)) \\ &= \frac{p_k(x) + p_k(y)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} \\ &= \frac{p_k(x)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} + \frac{p_k(y)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} \\ &\leq \frac{p_k(x)}{1 + p_k(x)} + \frac{p_k(y)}{1 + p_k(y)} \\ &= f(p_k(x)) + f(p_k(y)). \end{aligned}$$

Aus dieser Dreiecksungleichung für  $f \circ p_k$  folgt direkt die Dreiecksungleichung für  $d$ , da die Gleichung  $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(p_k(x - y))$  gilt.

Nun wenden wir uns der Topologie zu. Wir wissen, dass die Bälle

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid d(x, y) < \varepsilon\} \quad \forall x \in E, \quad \varepsilon > 0$$

die Topologie der Metrik  $d$  erzeugen. Um nun zu zeigen, dass die Topologie von  $E$  mindestens genau so fein ist, wie die von  $d$  erzeugte, müssen wir zeigen, dass die metrischen Bälle bezüglich der Topologie von  $E$  offen sind. Genauer reicht es uns sogar zu zeigen, dass  $x$  ein innerer Punkt von  $B_\varepsilon(x)$  bezüglich der eigentlichen Topologie von  $E$  ist, denn für jeden anderen Punkt  $y \in B_\varepsilon(x)$  finden wir ein  $\delta > 0$ , so dass  $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$  und dann brauchen wir nur eine (bzgl.  $E$ ) offene Umgebung  $U$  von  $y$  mit  $U \subset B_\delta(y)$  zu finden. Also zeigen wir auch hier, dass  $y$  ein innerer Punkt von  $B_\delta(y)$  ist. Sei nun also  $B_\varepsilon(x)$  gegeben. Dann existiert ein  $K \in \mathbb{N}$ , so dass  $\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$  gilt. Wählen wir nun ein  $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2K}$ , so existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für  $0 \leq x < \delta$   $0 \leq f(x) < \tilde{\varepsilon}$  gilt. Dies folgt aus der Stetigkeit von  $f$ . Wir behaupten nun, dass  $U := \bigcap_{k=1}^{K-1} U(p_k, \delta, x) \subset B_\varepsilon(x)$  gilt. Dieses  $U$  ist dann nach der zweiten Bemerkung offen und wir haben die Behauptung gezeigt. Sei nun also  $y \in U$ , dann gilt  $p_k(x - y) < \delta$  für alle

$k \leq K - 1$  und damit

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(p_k(x - y)) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{K-1} 2^{-k} f(p_k(x - y)) + \sum_{k=K}^{\infty} 2^{-k} \\
 &< \sum_{k=1}^{K-1} f(p_k(x - y)) + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \sum_{k=1}^{K-1} \tilde{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &= (K - 1)\tilde{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die von  $d$  induzierte Topologie mindestens so fein ist, wie die Topologie von  $E$ . Sei dazu  $U \subset E$  offen. Wählen wir  $x \in U$ , so existiert ein  $K \in \mathbb{N}$  und ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\bigcap_{k=1}^K U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$ . Weiterhin können wir zu  $f$  explizit eine Umkehrfunktion angeben. Für diese gilt

$$f^{-1} := [0, 1[ \rightarrow [0, \infty[, \quad f^{-1}(x) := \frac{x}{1 - x}$$

und damit ist  $f^{-1}$  auch stetig und wir finden ein  $\delta > 0$ , so dass  $0 \leq f^{-1}(x) < \varepsilon$  für alle  $0 \leq x < \delta$ . Setzen wir  $\tilde{\delta} := 2^{-K}\delta$ , so behaupten wir, dass  $B_{\tilde{\delta}}(x) \subset \bigcap_{j=1}^K U(p_j, \varepsilon, x) \subset U$  gilt. Sei dazu  $y \in B_{\tilde{\delta}}(x)$ . Aus  $d(x, y) < \tilde{\delta}$  folgt dann, dass  $2^{-k} f(p_k(x - y)) < 2^{-K}\delta$  gilt. Insbesondere erhalten wir für alle  $k \leq K$ , dass  $f(p_k(x - y)) < 2^{-(K-k)}\delta \leq \delta$  gilt. Und aus der Stetigkeit von  $f^{-1}$  folgt, dass  $p_k(x - y) < \varepsilon$  ist für alle  $k \leq K$ . Also ist  $y \in \bigcap_{k=1}^K U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$ . Damit ist  $U$  auch bezüglich der von  $d$  induzierten Topologie offen. Insgesamt haben wir die Äquivalenz der Topologien gezeigt.  $\square$

**Satz 5.4.** *Sei  $F \subset E$  ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist  $F$  ein Fréchet-Raum.*

*Beweis.* Wir statten  $F$  mit der Teilraumtopologie aus. Dann ist  $F$  als abgeschlossener Teilraum automatisch vollständig. Weiterhin wird die Topologie wieder durch eine abzählbare Familie von Halbnormen erzeugt, denn wir können die Familie von  $E$  auf  $F$  einschränken. Dass  $F$  Hausdorffsch ist, ergibt sich daraus, dass wir die Topologie von  $F$  auch dadurch erhalten, dass wir die Metrik von  $E$  auf  $F$  einschränken. Dann ist  $F$  aber auch ein metrischer Raum und damit insbesondere Hausdorffsch. Insgesamt ist  $F$  also ein Fréchet-Raum.  $\square$

**Satz 5.5.** *Seien  $E, F$  Fréchet-Räume. Dann ist  $E \times F$  mit der Produkttopologie auch ein Fréchet-Raum.*



*Beweis.* Da  $E$  und  $F$  jeweils eine Metrik besitzen, wird die Produkttopologie von  $d(x, y) = d_E(x_1, y_1) + d_F(x_2, y_2)$ , wobei  $x = (x_1, x_2)$  und  $y = (y_1, y_2)$  gilt, induziert. Dann ist  $E \times F$  aber direkt vollständig und hausdorffsch. Weiterhin erhalten wir die gesuchte abzählbare Familie von Halbnormen, in dem wir die beiden Familien von  $E$  und  $F$  verwenden. Diese erzeugen die gleiche Topologie, wie die Produkttopologie. Dies lässt sich auf analoge Art und Weise wie im Beweis von Proposition 5.3 zeigen.  $\square$

**Satz 5.6** (von Hahn-Banach). *Sei  $E$  ein Fréchet-Raum,  $E_0 \subset E$  ein Untervektorraum und  $\varphi_0 \in E'_0$ . Dann existiert ein  $\varphi \in E'$  mit  $\varphi|_{E_0} \equiv \varphi_0$*

*Beweis.* Wir verweisen auf die Standardliteratur zur Funktionalanalysis z.B. [Rud91, Satz 3.6].  $\square$

**Korollar 5.7.** *Sei  $E$  ein Fréchet-Raum. Seien weiterhin  $A \subset B \subset E$  Untervektorräume. Falls für jedes  $\varphi \in E'$  mit  $\varphi|_A \equiv 0$  auch  $\varphi|_B \equiv 0$  ist, so liegt  $A$  dicht in  $B$ .*

*Beweis.* Sei  $A$  nicht dicht in  $B$ . Wir versuchen nun ein stetiges, lineares Funktional auf  $E$  zu konstruieren, dass zwar auf  $A$  verschwindet, jedoch nicht auf  $B$ . Wir finden nun ein  $b_0 \in B \setminus \bar{A}$ . Setzen wir  $E_0 := \bar{A} \oplus \mathbb{C}b_0$  und

$$\varphi_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{C}, \quad a + \lambda b_0 \mapsto \lambda,$$

so ist  $\varphi_0$  stetig. Angenommen  $\varphi_0$  wäre nicht stetig, dann wäre es aufgrund der Linearität insbesondere nicht in 0 stetig. Also fänden wir eine Folge  $(a_n + \lambda_n b_0)_{n \in \mathbb{N}} \subset E_0$  mit Grenzwert 0, wobei aber  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen 0 konvergiert. Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, dass  $\lambda_n \geq 0$ , denn wir finden auf jeden Fall eine Teilfolge mit  $\lambda_n \geq 0$  oder eine Teilfolge mit  $\lambda_n \leq 0$ . Im zweiten Fall betrachten wir  $(-\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(-(a_n + \lambda_n b_0))_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei dann auch diese Folge gegen 0 konvergiert. Dies folgt sofort durch die Halbnormen. Unter der Voraussetzung, dass  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gegen 0 konvergiert, fänden wir eine Teilfolge  $(\lambda_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  und ein  $C > 0$ , so dass  $\lambda_{n_l} > C$  für beliebige  $l \in \mathbb{N}$  gelten würde. Dann setzten wir  $\lambda := \liminf_{l \rightarrow \infty} \lambda_{n_l} \in [C, \infty]$ .

Wäre nun  $\lambda = \infty$ . Dann müsste bereits  $\lambda_{n_l} \rightarrow \infty$  für  $l \rightarrow \infty$  gelten. Nun konvergierte die Folge  $(a_n + \lambda_n b_0)_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich jeder Halbnorm  $p_k$  gegen 0, also fänden wir  $K_k > 0$ , so dass

$$p_k(a_{n_l} + \lambda_{n_l} b_0) < K_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

gelten würde. Wir erhielten dann, dass weiterhin

$$p_k(\lambda_{n_l}^{-1} a_{n_l} + b_0) < \lambda_{n_l}^{-1} K_k \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

für jedes  $k \in \mathbb{N}$  wäre. Damit wäre aber  $b_0$  in  $\bar{A}$  enthalten. Ein Widerspruch.

Für den Fall, dass  $\lambda < \infty$  wäre, fänden wir eine weitere Teilfolge, die gegen  $\lambda$  konvergierte. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass bereits  $(\lambda_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  gegen  $\lambda$  konvergierte. Dann erhielten wir aber aus der Dreiecksungleichung

$$p_k(a_{n_l} + \lambda b_0) \leq p_k(a_{n_l} + \lambda_{n_l} b_0) + |\lambda - \lambda_{n_l}| p_k(b_0) \rightarrow 0$$

für  $l \rightarrow \infty$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit würde aber  $\lim_{l \rightarrow \infty} (-a_{n_l}) = \lambda b_0$  gelten und es wäre wieder  $b_0 \in \bar{A}$ . Also ist  $\varphi_0$  stetig.

$\varphi_0$  lässt sich nun nach Satz 5.6 auf ganz  $E$  fortsetzen. Also existiert ein  $\varphi \in E'$  mit  $\varphi|_{E_0} \cong \varphi_0$ . Dann ist aber  $\varphi|_A$  konstant 0, aber dies gilt nicht für  $\varphi|_B$ .  $\square$

## 6 Der Rungesche Approximationssatz

Das große Ziel dieses Kapitels ist der oben genannte Approximationssatz. Dieser ist eine Verallgemeinerung des Satzes, dass auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet in  $\mathbb{C}$  jede holomorphe Funktion durch Polynome, also durch ganze Funktionen, approximiert werden kann.

Auf allgemeinen Riemannschen Flächen muss dazu jedoch „einfach zusammenhängende Gebiete“ durch „Runge-Gebiete“ ersetzt werden. Später werden wir dieses Resultat verwenden um spezielle Funktionenfolgen auf Riemannschen Flächen zu konstruieren, die wir beim Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes 8.12 verwenden werden.

In diesem Kapitel werden direkt die Methoden aus Kapitel 4 und 5 zum Einsatz kommen.

**Proposition 6.1.** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche,  $Y \subset X$  offen. Dann besitzen  $\mathcal{E}(Y)$  und  $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$  Struktur eines Fréchet-Raums.*

*Beweis.* Sei für jedes  $j \in \mathbb{N}$  die Menge  $K_j \subset Y$  kompakt mit  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_j = Y$  und  $K_j \subset U_j$ , wobei  $(U_j, z_j)$  Karten sind. Solche  $K_j$  können konstruiert werden, da wir im Beweis zu Korollar 3.9 eine abzählbare Basis der Topologie mit relativ kompakten Teilmengen gefunden haben. Für jedes  $\nu = (\nu_1, \nu_2)^T \in \mathbb{N}^2$  existiert eine Halbnorm

$$p_{j\nu} : \mathcal{E}(Y) \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_{j\nu}(f) := \|D_j^\nu f\|_{K_j},$$

wobei  $D_j^\nu := \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\nu_2}$  mit  $z_j = x_j + iy_j$ . Dies ist eine abzählbare Familie von Halbnormen. Diese können wir verwenden, um eine Topologie auf  $\mathcal{E}(Y)$  zu definieren, in dem wir als Basis der Topologie endliche Schnitte der Mengen  $U(p_{j\nu}, \varepsilon, y)$  für beliebige  $\varepsilon > 0$  und  $y \in Y$  verwenden (vgl. Definition 5.1 und Bemerkung 5.2). Diese Topologie ist hausdorffsch, denn falls  $0 \neq f \in \mathcal{E}(Y)$ , finden wir eine Halbnorm, so dass  $\varepsilon := p_{j\nu}(f) > 0$ . Dann können wir  $f$  und  $0$  durch die beiden offenen Mengen  $U(p_{j\nu}, \frac{\varepsilon}{3}, 0)$  und  $U(p_{j\nu}, \frac{\varepsilon}{3}, f)$  trennen. Weiterhin ist  $\mathcal{E}(Y)$  vollständig bezüglich Konvergenz in allen Halbnormen, da alle Ableitung lokal gleichmäßig konvergieren. Damit erfüllt  $\mathcal{E}(Y)$  alle Voraussetzungen von Definition 5.1.

Zu guter Letzt behaupten wir nun noch, dass die oben gewählte Topologie unabhängig von der gewählten Überdeckung ist. Seien dazu  $(K_j)$  und  $(\tilde{K}_m)$  zwei Überdeckungen, die den obigen Voraussetzungen genügen. Wir bezeichnen mit  $(p_{j\nu})$  bzw.  $(\tilde{p}_{m\nu})$  die zugehörigen Halbnormen. Wir zeigen nun, dass  $U(p_{j\nu}, \varepsilon, f)$  für beliebige  $j, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $f \in \mathcal{E}(Y)$  offen bzgl. der Topologie von  $(\tilde{p}_{m\nu})$  ist. Dies genügt bereits, da die Basis der Topologie von  $(p_{j\nu})$  aus endlichen Schnitten dieser Mengen besteht. Wir wissen nun, dass

$$K_j \subset \bigcup_{m=1}^M \overset{\circ}{K}_m \subset \bigcup_{m=1}^M \tilde{K}_m$$

gilt, da  $K_j$  kompakt ist. Wir behaupten nun, dass

$$\tilde{U} := \bigcap_{m=1}^M U(\tilde{p}_{m\nu}, \varepsilon, f) \subset U(p_{j\nu}, \varepsilon, f)$$

gilt. Sei dazu  $g \in \tilde{U}$ . Dann erhalten wir

$$\|D^\nu(g - f)\|_{K_j} \leq \max_{m=1, \dots, M} \|D^\nu(g - f)\|_{\tilde{K}_m} < \varepsilon,$$

was die Behauptung zeigt. Für die Rückrichtung vertauschen wir in der Argumentation einfach  $K_j$  und  $\tilde{K}_j$  und erhalten, dass die Topologie unabhängig, von der gewählten Überdeckung ist. Völlig analog kann die obige Konstruktion auch für  $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$  durchgeführt werden.  $\square$

**Korollar 6.2.** *Mit der obigen Topologie ist  $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{E}(Y)$  ein abgeschlossener Teilraum und die Konvergenz bzgl. dieser Topologie stimmt mit der kompakten Konvergenz überein.*

**Lemma 6.3.** *Sei  $Y \subset X$  offen,  $X$  eine Riemannsche Fläche. Sei  $T \in \mathcal{E}(Y)'$ . Dann hat  $T$  kompakten Träger, d.h. es existiert ein  $K \subset Y$  kompakt, so dass*

$$T[f] = 0 \quad \forall f \in \mathcal{E}(Y) \text{ mit } \text{Supp}(f) \subset Y \setminus K$$

*Das gleiche Resultat gilt für  $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$ .*

*Beweis.* Aus der Stetigkeit von  $T$  folgt die Existenz einer offenen Nullumgebung  $U \subset \mathcal{E}(Y)$ , so dass

$$|T[f]| < 1 \quad \forall f \in U$$

Nach Konstruktion der obigen Topologie finden wir ein  $\varepsilon > 0$  und endlich viele  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{N}$  und  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{N}^2$ , so dass  $U(p_{j_1\nu_1}, \varepsilon, 0) \cap \dots \cap U(p_{j_n\nu_n}, \varepsilon, 0) \subset U$ . Sei nun  $K := K_{j_1} \cup \dots \cup K_{j_n}$ . Wir behaupten, dass dies das gesuchte  $K$  ist. Dazu wählen wir  $f \in \mathcal{E}(Y)$  mit  $\text{Supp}(f) \subset Y \setminus K$ . Dann gilt für beliebige  $\lambda > 0$ :

$$p_{j_1\nu_1}(\lambda f) = \dots = p_{j_n\nu_n}(\lambda f) = 0$$

Damit liegt  $\lambda f \in U$  und es folgt:

$$|T[f]| < \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda > 0$$

und damit  $T[f] = 0$ .  $\square$

**Lemma 6.4.** *Sei  $Z \subset X$  offen und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Sei  $S \in \mathcal{E}^{0,1}(X)'$  mit  $S[d''g] = 0$  für beliebige  $g \in \mathcal{E}(X)$  mit  $\text{Supp}(g) \Subset Z$ . Dann existiert ein  $\sigma \in \Omega(X)$  mit  $S[\omega] = \iint_Z \sigma \wedge \omega$  für jedes  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  mit  $\text{Supp}(\omega) \Subset Z$ .*

*Beweis.* Sei  $z : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  eine Karte von  $X$  mit  $U \subset Z$ . Wir identifizieren  $U$  mit  $V$  und können deshalb vom Raum der Testfunktionen  $\mathcal{D}(U)$  auf  $U$  sprechen. Sei also  $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ . Wir bezeichnen mit  $\tilde{\varphi}$  jede 1-Form in  $\mathcal{D}^{0,1}(X)$ , für die  $\tilde{\varphi}|_U \equiv \varphi d\bar{z}$  und  $\tilde{\varphi}|_{X \setminus U} \equiv 0$  gilt. Damit können wir ein  $S_U \in \mathcal{D}(U)'$  definieren:

$$S_U : \mathcal{D}(U) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto S[\tilde{\varphi}]$$

Diese verschwindet auf allen Funktionen  $\varphi = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ ,  $g \in \mathcal{D}(U)$ , denn  $S_U[\varphi] = S[\tilde{\varphi}] = S[\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} dz] = S[d''g] = 0$  nach Voraussetzung. Das bedeutet aber, dass  $\frac{\partial S_U}{\partial \bar{z}} = 0$  gilt und aus Korollar 4.12 erhalten wir ein  $h \in \mathcal{O}(U)$ :

$$S[\tilde{\varphi}] = \iint_U h(z) \varphi(z) dz \wedge d\bar{z} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$$

Setzen wir nun  $\sigma_U := h dz$ , so folgt

$$S[\omega] = \iint_U \sigma_U \wedge \omega \quad \omega \in \mathcal{D}^{0,1}(U) \text{ und } \text{Supp}(\omega) \Subset U$$

Führen wir die gleiche Konstruktion auf einer zweiten Karte  $(z', U')$  durch und gilt außerdem noch, dass  $\text{Supp}(\omega) \Subset U'$ , so erhalten wir

$$\iint_U \sigma_U \wedge \omega = S[\omega] = \iint_{U'} \sigma_{U'} \wedge \omega \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ und } \text{Supp}(\omega) \Subset U \cap U'$$

und damit  $\sigma_U|_{U \cap U'} \equiv \sigma_{U'}|_{U \cap U'}$ . Also können wir alle  $\sigma_U$  zu einer globalen 1-Form  $\sigma \in \Omega(Z)$  verkleben und es folgt

$$S[\omega] = \iint_Z \sigma \wedge \omega \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ mit } \text{Supp}(\omega) \Subset U,$$

wobei  $U$  eine Koordinatenumgebung darstellt. Wählen wir nun ein beliebiges  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  mit  $\text{Supp}(\omega) \Subset Z$ , so können wir eine Partition der 1 wählen, so dass  $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j$  mit  $\text{Supp}(\omega_j) \Subset U_j$ . Dabei sind die  $U_j$  Koordinatenumgebungen. Zu guter Letzt erhalten wir damit

$$S[\omega] = \sum_{j=1}^n S[\omega_j] = \sum_{j=1}^n \iint_Z \sigma \wedge \omega_j = \iint_Z \sigma \wedge \omega.$$

□

**Satz 6.5.** Sei  $Y \Subset X$  eine offene Runge-Teilmenge und  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche. Dann liegt  $\text{im}(\mathcal{O}(Y') \rightarrow \mathcal{O}(Y))$  für beliebige  $Y' \Subset X$  offen und  $Y \subset Y'$  bzgl. kompakter Konvergenz dicht in  $\mathcal{O}(Y)$ .

*Beweis.* Sei  $\beta : \mathcal{E}(Y') \rightarrow \mathcal{E}(Y)$  die Einschränkungsabbildung. Wir verwenden Korollar 5.7. Dazu müssen wir zeigen, dass für  $T \in \mathcal{E}(Y)'$  mit  $T|_{\beta(\mathcal{O}(Y'))} \equiv 0$  auch  $T|_{\mathcal{O}(Y)} \equiv 0$  gilt. Nach [For99, Kor. 14.16] existiert zu jedem  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  ein  $f \in \mathcal{E}(Y')$  mit  $d''f = \omega|_{Y'}$ . Dies erlaubt uns die Definition von  $S : \mathcal{E}^{0,1}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $S[\omega] := T[f|_Y]$ . Diese Definition ist unabhängig von  $f$ , denn für ein  $g \in \mathcal{E}(Y')$  mit  $d''g = \omega|_{Y'}$ , dann ist  $f - g \in \mathcal{O}(Y')$  und deshalb  $T[(f - g)|_Y] = 0$  nach der Voraussetzung, dass  $T|_{\beta(\mathcal{O}(Y'))} \equiv 0$ . Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $S$  stetig ist. Dazu betrachten wir zunächst

$$V := \{(\omega, f) \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \times \mathcal{E}(Y') \mid d''f = \omega|_{Y'}\}.$$

Nun haben wir sowohl  $\mathcal{E}(Y')$ , als auch  $\mathcal{E}^{0,1}(Y')$  mit der Topologie eines Fréchet-Raums ausgestattet. Wählen wir eine Überdeckung von  $Y'$  durch Kompakta wie im Beweis von Proposition 6.1 und eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(Y')$ , die bzgl. der Fréchet-Topologie gegen  $f \in \mathcal{E}(Y')$  konvergiert, so gilt auf den Kompakta, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  glatt gegen  $f$  konvergiert, d.h. heißt aber, dass bezüglich den Karten auch die Folge  $\left(\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  glatt gegen  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$  konvergiert. Mit anderen Worten konvergiert  $(d'' f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $d'' f$ . Also ist  $d'' : \mathcal{E}(Y') \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(Y')$  stetig und es folgt, dass  $V \subset \mathcal{E}^{0,1}(X) \times \mathcal{E}(Y')$  abgeschlossen und somit nach den Sätzen 5.4 und 5.5 ein Fréchet-Raum ist.

Nach [For99, Kor. 14.16] ist  $\pi_1 : V \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(X)$  surjektiv und stetig. Es folgt aus dem Satz über die offene Abbildung, dass  $\pi_1$  offen ist. Weiterhin ist  $\beta \circ \pi_2 : V \rightarrow \mathcal{E}(Y)$  stetig. Da nun auch noch das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\beta \circ \pi_2} & \mathcal{E}(Y) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow T \\ \mathcal{E}^{0,1}(X) & \xrightarrow{S} & \mathbb{C} \end{array}$$

folgt die Stetigkeit von  $S$ .

Das Lemma 6.3 liefert

- ein kompaktes  $K \subset Y$  mit  $T[f] = 0$  für jedes  $f \in \mathcal{E}(Y)$  mit  $\text{Supp}(f) \subset Y \setminus K$  und
- ein kompaktes  $L \subset X$  mit  $S[\omega] = 0$  für jedes  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  mit  $\text{Supp}(\omega) \subset X \setminus L$

Sei  $g \in \mathcal{E}(X)$  mit  $\text{Supp}(g) \Subset X \setminus K$ . Dann ist  $S[d'' g] = T[g|_Y] = 0$ . Lemma 6.4 gibt uns dann ein  $\sigma \in \Omega(X \setminus K)$  mit

$$S[\omega] = \iint_{X \setminus K} \sigma \wedge \omega \quad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ mit } \text{Supp}(\omega) \Subset X \setminus K$$

Aufgrund des kompakten Trägers von  $S$  muss  $\sigma|_{X \setminus (K \cup L)} \equiv 0$  gelten. Nun ist jede Zusammenhangskomponente von  $X \setminus \mathfrak{h}(K)$  nicht relativ kompakt. Wir behaupten, dass jede Zusammenhangskomponente von  $X \setminus \mathfrak{h}(K)$  die Menge  $X \setminus (K \cup L)$  schneidet. Angenommen es gäbe eine Zusammenhangskomponente  $U \subset X \setminus \mathfrak{h}(K)$  mit  $U \cap X \setminus (K \cup L) = \emptyset$ . Dann gälte  $U \subset K \cup L$ , also wäre  $U$  relativ kompakt. Ein Widerspruch. Also schneiden alle Zusammenhangskomponenten  $X \setminus (K \cup L)$  und aus dem Identitätssatz folgt:

$$\sigma|_{X \setminus \mathfrak{h}(K)} \equiv 0 \tag{9}$$

Das bedeutet, dass  $S[\omega] = 0$  für jedes  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$  mit  $\text{Supp}(\omega) \subseteq X \setminus \mathfrak{h}(K)$ .

Sei nun  $f \in \mathcal{O}(Y)$ . Wir wollen zeigen, dass  $T[f] = 0$ .

Zunächst gilt  $\mathfrak{h}(K) \subset \mathfrak{h}(Y) = Y$ . Nun können wir eine offene Mengen  $U, V$  finden, die  $\mathfrak{h}(K) \subset U \subsetneq V \subset Y$  erfüllen. Nach dem Lemma von Urysohn (vgl. [Jam74, Satz 12.2]) finden wir eine stetige Funktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $\varphi|_U \equiv 1$  und  $\varphi|_{X \setminus \bar{V}} \equiv 0$  erfüllt. Durch eine geeignete Glättung dieser Funktion  $\varphi$  erhalten wir ein glattes  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{E}(X)$  und offene Mengen  $\mathfrak{h}(K) \subset \tilde{U} \subset U$  und  $U \subset \tilde{V} \subset V$ , so dass  $\tilde{\varphi}|_{\tilde{U}} \equiv 1$  und  $\tilde{\varphi}|_{X \setminus \tilde{V}} \equiv 0$  gilt. Setzen wir  $g := f \cdot \tilde{\varphi}$ , so gilt  $f \equiv g$  in einer Umgebung von  $\mathfrak{h}(K)$  und  $\text{Supp}(g) \subseteq Y$ . Also liegt  $\text{Supp}(f - g|_Y) \subset Y \setminus K$ , somit gilt  $T[f - g|_Y] = 0$  und schlußendlich  $T[f] = T[g|_Y] = S[d''g]$ . Nun ist aber  $g$  in einer Umgebung von  $\mathfrak{h}(K)$  holomorph, was nichts anderes bedeutet als, dass  $\text{Supp}(d''g) \subseteq X \setminus \mathfrak{h}(K)$  gilt. Mit (9) folgt

$$T[f] = T[g|_Y] = S[d''g] = 0$$

□

**Satz 6.6** (Rungescher Approximationssatz). *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche,  $Y \subset X$  eine offene Runge-Teilmenge. Dann kann jede holomorphe Funktion auf  $Y$  auf beliebigen Kompakta gleichmäßig durch holomorphe Funktionen auf ganz  $X$  approximiert werden.*

**Beweis.** **Fall  $Y \subseteq X$ :** Seien  $f \in \mathcal{O}(Y)$ ,  $K \subset Y$  kompakt und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Aus dem Beweis von Satz 3.12 erhalten wir eine Ausschöpfung  $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$  von  $X$  mit  $Y_0 := Y \subseteq Y_1$ . Nach Satz 6.5 existiert ein  $f \in \mathcal{O}(Y_1)$  mit

$$\|f_1 - f\|_K < 2^{-1}\varepsilon$$

Induktiv erhalten wir aus Satz 6.5 eine Folge von Funktionen  $f_n \in \mathcal{O}(Y_n)$  mit

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{\bar{Y}_{n-2}} < 2^{-n}\varepsilon \quad \forall n \geq 2$$

Nun gilt für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|f_{\nu+k} - f_\nu\|_{Y_n} \leq \varepsilon 2^{-\nu} \sum_{\mu=0}^k 2^{-\mu} \leq \varepsilon 2^{-(\nu+1)} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \nu > n$$

Also konvergiert  $(f_\nu)_{\nu > n}$  gleichmäßig auf  $Y_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  und damit existiert ein  $F \in \mathcal{O}(X)$ , so dass  $f_\nu \rightrightarrows F$  auf jedem  $Y_n$ . Eingesetzt folgt

$$\begin{aligned} \|F - f\|_K &\leq \|F - f_n\|_{Y_n} + \sum_{k=1}^n \|f_k - f_{k-1}\|_{\bar{Y}_{k-2}} \\ &< \|F - f_n\|_{Y_n} + \varepsilon \sum_{k=1}^n 2^{-k} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon. \end{aligned}$$

**Fall  $Y \subset X$  nicht relativ kompakt:** Auch hier wählen wir  $f \in \mathcal{O}(Y)$ ,  $K \subset Y$  kompakt und  $\varepsilon > 0$ .

In diesem Fall können wir nach Lemma 3.8  $L \subset Y$  kompakt finden mit  $K \subset \overset{\circ}{L}$ . Dann folgt aus Lemma 3.10 die Existenz einer offenen Runge-Teilmenge  $\tilde{Y} \subset X$  mit  $K \subset \tilde{Y} \subset L$ . Damit ist  $\tilde{Y} \Subset X$  und  $f$  kann als Funktion von  $\mathcal{O}(\tilde{Y})$  aufgefasst werden und schlussendlich können wir den obigen Fall anwenden und erhalten ein  $F \in \mathcal{O}(X)$  mit  $\|f|_{\tilde{Y}} - F\|_K = \|f - F\|_K < \varepsilon$ .

□

**Satz 6.7.** Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ . Dann existiert ein  $f \in \mathcal{E}(X)$ , so dass

$$d''f = \omega$$

gilt.

*Beweis.* Sei

$$Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots$$

eine Ausschöpfung von  $X$  durch Runge-Gebiete. Wir wollen nun eine Folge von  $f_n \in \mathcal{E}(Y_n)$ , so dass die Bedingungen

1.  $d''f_n = \omega|_{Y_n}$  und
2.  $\|f_{n+1} - f_n\|_{Y_{n-1}} \leq 2^{-n}$

erfüllt sind. Wir gehen dazu induktiv vor. Zunächst existiert nach [For99, Kor. 14.16] ein  $f_0 \in \mathcal{E}(Y_0)$ , so dass  $d''f_0 = \omega|_{Y_0}$  gilt. Seien nun  $f_0, \dots, f_n$  bereits konstruiert. Erneut nach [For99, Kor. 14.16] erhalten wir ein  $g_{n+1} \in \mathcal{E}(Y_{n+1})$ , so dass  $d''g_{n+1} = \omega|_{Y_{n+1}}$  erfüllt. Dann gilt aber auf  $Y_n$  die Gleichung

$$d''g_{n+1} = d''f_n,$$

was nichts anderes bedeutet, als dass  $g_{n+1} - f_n$  holomorph auf  $Y_n$  ist. Nach dem Rungeschen Approximationssatz 6.6 existiert ein  $h \in \mathcal{O}(Y_{n+1})$ , so dass

$$\|(g_{n+1} - f_n) - h\|_{Y_{n-1}} \leq 2^{-n} \tag{10}$$

gilt. Definieren wir  $f_{n+1} := g_{n+1} - h$ , so erfüllt  $f_{n+1}$  immer noch die erste und dank (10) auch die zweite Bedingung.

Nun definieren wir

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$



Die Funktion  $f$  ist wohldefiniert, da jedes  $z \in X$  in fast allen  $Y_n$  enthalten ist. Weiterhin können wir auf  $Y_{n-1}$  die Darstellung

$$f = f_n + \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1} - f_k) =: f_n + F_n$$

wählen. Nun konvergiert  $F_n$  gleichmäßig auf  $Y_{n-1}$  und ist deshalb dort holomorph. Also ist  $f$  glatt auf  $Y_n$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ , in anderen Worten ist  $f \in \mathcal{E}(X)$ . Weiterhin gilt

$$d''f = d''f_n = g$$

auf  $Y_{n-1}$  für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $d''f = g$  auf  $X$ . □

**Korollar 6.8.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist  $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ .*

*Beweis.* Aus dem Satz von Dolbeault (vgl. [For99, Satz 15.14]) folgt die Gleichung

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong \mathcal{E}^{0,1}(X) / d''\mathcal{E}(X).$$

Satz 6.7 besagt nun aber  $\mathcal{E}^{0,1}(X) = d''\mathcal{E}(X)$ , was die Behauptung zeigt. □

## 7 Der Weierstraßsche Produktsatz

Wie im letzten Kapitel handelt es sich auch hier um den Versuch ein wohlbekanntes, funktionentheoretisches Resultat auf Riemannsche Flächen zu verallgemeinern. Diesmal handelt es sich um den Weierstraßschen Produktsatz, der aussagt, dass es zu einer beliebigen diskreten Teilmenge  $D \subset \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion gibt, die genau diese Menge als Nullstellenmenge aufweist. Es kann sogar die Ordnung der Nullstelle an jedem Punkt vorgegeben werden.

Wir werden nun zeigen, dass sich dieses Resultat direkt auf (nicht kompakte) Riemannsche Flächen überträgt und sogar noch verschärft, denn es kann sogar eine Polstellenmenge mit zugehörigen Ordnungen angegeben werden und man findet immer eine meromorphe Funktion, die diese Vorgaben erfüllt. Die Sprache in der dieses Resultat auf Riemannschen Flächen formuliert wird, ist die der Divisoren. Auch wenn wir in Kapitel 1 bereits mit Divisoren gearbeitet haben, wollen wir hier noch einmal die Definition wiederholen.

**Definition 7.1.** Divisor Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Ein *Divisor* ist eine Abbildung  $D : X \rightarrow \mathbb{Z}$ , so dass für jede kompakte Teilmenge  $K \subset X$  gilt:  $D(x) = 0$  für fast alle  $x \in K$ . Wir bezeichnen mit  $\text{Div}(X)$  die Menge aller Divisoren.

Für eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)^\times$  definieren wir den zu  $f$  gehörigen Divisor  $(f) : X \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto \text{ord}_x(f)$ . Da die Null- und Polstellen eine diskrete Teilmenge von  $X$  bilden, ist dies tatsächlich ein Divisor.

**Definition 7.2.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $D \in \text{Div}(X)$ . Dann heißt  $f \in \mathcal{M}(X)$  eine *Lösung* von  $D$ , falls  $(f) = D$  gilt.

Setzen wir  $X_D := \{x \in X : D(x) \geq 0\}$ , so heißt  $f \in \mathcal{E}(X_D)$  *schwache Lösung* von  $D$ , falls für alle  $a \in X$  eine Koordinatenumgebung  $(U, z)$  mit  $z(a) = 0$  und ein  $\psi \in \mathcal{E}(U)$  mit  $\psi(a) \neq 0$  existieren, so dass  $f = \psi z^k$  auf  $U \cap X_D$  gilt, wobei  $k := D(a)$ .

**Lemma 7.3.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $D \in \text{Div}(X)$ . Seien weiterhin  $f, g \in \mathcal{E}(X_D)$  schwache Lösungen von  $D$ . Dann existiert ein  $h \in \mathcal{E}(X)$  mit  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$  und  $f = h \cdot g$ .

*Beweis.* Sie  $a \in X$  und  $(U_a, z_a)$  eine Karte um  $a$  mit  $z_a(a) = 0$ , so dass  $f|_{U_a} \equiv \psi_a z_a^{k_a}$  und  $g|_{U_a} \equiv \varphi_a z_a^{k_a}$  auf  $X_D \cap U_a$  gilt, wobei  $k_a := D(a)$ . Weiterhin sei  $U_a$  so klein gewählt, dass  $\psi_a(x) \neq 0 \neq \varphi_a(x)$  für alle  $x \in U_a$ . Dann ist klarerweise  $(U_a)_{a \in X}$  eine Überdeckung von  $X$ . Nun definieren wir auf  $U_a$  die Funktion

$$h_a := \frac{\psi_a}{\varphi_a} \in \mathcal{E}(U_a)$$

und es gilt  $f|_{U_a} = h_a g|_{U_a}$ . Setzen wir  $S := \{a \in X \mid D(a) \neq 0\}$ , so ist  $S$  diskret und setzen wir weiterhin  $\tilde{X} = X \setminus S$ , so ist  $\tilde{X}$  offen und es gilt auf  $U_a \cap U_b \cap \tilde{X}$

$$h_a|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}} = \frac{f|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}}{g|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}} = h_b|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}.$$

Also finden wir ein  $h \in \mathcal{E}(\tilde{X})$  mit  $h|_{U_a \cap \tilde{X}} = h_a|_{\tilde{X}}$ . Nun ist aber  $h_a$  glatt fortsetzbar auf ganz  $U_a$  und wir erhalten, dass  $h$  glatt auf ganz  $X$  fortgesetzt werden kann. Weiterhin folgt aus  $h_a(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_a$  und  $a \in X$ , dass auch  $h(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ . Und als letztes erhalten wir auch  $f = h \cdot g$ .  $\square$

**Lemma 7.4.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Sei weiterhin  $f_i$  eine schwache Lösung des Divisors  $D_i$ , wobei  $i \in \{1, 2\}$  gilt. Dann ist  $f_1 \cdot f_2$  eine schwache Lösung von  $D_1 + D_2$ .

*Beweis.* Auf  $X_{D_1} \cap X_{D_2}$  ist klar, dass  $f_1 \cdot f_2$  die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Allerdings ist falls ein  $a \in X$  mit  $D(a) := D_1(a) + D_2(a) \geq 0$ , aber  $D_1(a) < 0$  oder  $D_2(a) < 0$  gilt, entweder  $f_1(a)$  oder  $f_2(a)$  nicht definiert. Nehmen wir ohne Einschränkung an, dass  $D_1(a) < 0$  gilt, so können wir eine Karte  $(z, U)$  um  $a$  finden, so dass  $\psi, \varphi \in \mathcal{E}(U)$  existieren, die der Definition 7.2 genügen. Dann gilt zunächst auf  $U \cap X_{D_1} \cap X_{D_2}$  die Gleichung  $f_1 \cdot f_2 = \psi \cdot \varphi z^{D_1(a) + D_2(a)}$ . Da nun aber  $D_1(a) + D_2(a) \geq 0$  gilt, lässt sich die rechte Seite der Gleichung glatt auf ganz  $U$  fortsetzen. Also besitzt  $f_1 \cdot f_2$  an dieser Stelle eine hebbare Singularität und wir können das Produkt einfach fortsetzen.  $\square$

**Definition 7.5.** Sei  $c : [0, 1] \rightarrow X$  eine glatte, nicht geschlossene Kurve und  $X$  eine Riemannsche Fläche. Dann bezeichnet  $\partial c$  den Divisor, der durch

$$\partial c(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = c(1) \\ -1 & \text{für } x = c(0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

**Lemma 7.6.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $c : [0, 1] \rightarrow X$  eine glatte, nicht geschlossene Kurve. Sei weiterhin  $U \subset X$  eine relativ kompakte, offene Umgebung von  $c([0, 1])$ , so existiert eine schwache Lösung  $f$  von  $\partial c$  mit  $f|_{X \setminus U} \equiv 1$ .

*Beweis.* Wir gehen zunächst davon aus, dass  $U$  eine Kartenumgebung ist und bezeichnen mit  $z$  die zugehöriger Kartenabbildung. Nun können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $z(U) = B_1(0)$  gilt. Weiterhin identifizieren wir  $U$  mit  $B_1(0)$ . Sei  $a := c(0)$  und  $b := c(1)$ . Dann existiert ein  $0 < r < 1$ , so dass  $a, b \in B_r(0)$  gilt. Wir definieren

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad z \mapsto \frac{z - b}{z - a}.$$

Dann ist  $\varphi(a) = \infty$  und  $\varphi(b) = 0$ . Wenn wir also  $\varphi$  auf  $\mathbb{P}^1 \setminus \bar{B}_r(0)$  einschränken, so können wir  $\varphi$  als Abbildung nach  $\mathbb{C}^\times$  auffassen. Weiterhin ist  $\mathbb{P}^1 \setminus \bar{B}_r(0)$  einfach zusammenhängend. Dann können wir aber nach [For99, Beispiel 4.18] die Abbildung  $\varphi$  entlang der Überlagerung  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  liften. In anderen Worten ist die Abbildung

$$\mathbb{P}^1 \setminus \bar{B}_r(0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \log \left( \frac{z - b}{z - a} \right) \quad (11)$$

wohldefiniert und holomorph. Nun können wir die Abbildung aus (11) noch weiter auf  $B_1(0) \setminus \bar{B}_r(0)$  einschränken.

Als nächsten Schritt benötigen wir nun noch ein  $\psi \in \mathcal{E}(B_1(0))$ , das  $\psi|_{\bar{B}_r(0)} \equiv 1$  und  $\psi|_{B_1(0) \setminus \bar{B}_{\tilde{r}}(0)} \equiv 0$  erfüllt, wobei  $r < \tilde{r} < 1$  gewählt wurde. Eine stetige Funktion mit diesen Eigenschaften existiert auf jeden Fall. Glätten wir diese stetige Funktion, so erhalten wir unser  $\psi$ . Nun können wir ein  $f_0 \in \mathcal{E}(U \setminus \{a\})$  durch

$$f_0(z) := \begin{cases} \exp\left(\psi \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right) & r < |z| < 1 \\ \frac{z-b}{z-a} & |z| \leq r \end{cases}$$

definieren. Dank  $\psi$  wird  $f_0$  zu einer glatten Abbildung, die weiterhin  $f_0|_{\partial U} \equiv 1$  erfüllt. Also können wir  $f_0$  auf ganz  $X \setminus \{a\}$  durch 1 fortsetzen. Nach Konstruktion ist  $f_0$  aber auch eine schwache Lösung von  $\partial c$ , so dass wir die Behauptung in diesem Fall gezeigt haben.

Betrachten wir nun den Fall, dass  $U$  keine Koordinatenumgebung ist. Dann finden wir eine Unterteilung des Intervalls  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  und Karten  $(z_j, U_j)$ , wobei  $j = 1, \dots, n$ , so dass  $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j \subset U$  und  $z_j(U_j) = B_1(0)$  gelten. Diese Überdeckung existiert aufgrund der Kompaktheit von  $c([0, 1])$ . Es folgt nun aber, dass wir den ersten Teil des Beweises jeweils auf  $\partial c|_{[t_{j-1}, t_j]}$  anwenden können und erhalten somit schwache Lösungen  $f_j$  mit  $f_j|_{X \setminus U} \equiv 1$ . Setzen wir  $f = f_1 \dots f_n$ , so ist  $f$  nach Lemma 7.4 eine schwache Lösung zu  $\sum_{j=1}^n \partial c|_{[t_{j-1}, t_j]} = \partial c$  und sie erfüllt  $f|_{X \setminus U} \equiv 1$ .  $\square$

**Lemma 7.7.** *Jeder Divisor  $D$  auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche  $X$  hat eine schwache Lösung.*

*Beweis.* Wir wählen  $K_1, K_2, \dots$  kompakte Runge-Teilmenge von  $X$  mit

1.  $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} \forall j \geq 1$  und
2.  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = X$ .

Dies ist nach Korollar 3.9 möglich. Sei  $a_0 \in X \setminus K_j$  und  $A_0 \in \text{Div}(X)$  mit  $A_0(a_0) = 1$  und  $A_0(x) = 0$ , falls  $x \neq a_0$ . Wir behaupten, dass dann eine schwache Lösung  $\varphi$  von  $A_0$  mit  $\varphi|_{K_j} = 1$  existiert. Denn  $K_j$  ist eine Runge-Teilmenge, d.h.  $K_j = \mathfrak{h}(K_j)$ . Also liegt  $a_0$  in einer nicht relativ kompakten Zusammenhangskomponente  $U \subset X \setminus K_j$ . Nun existiert ein  $a_1 \in U \setminus K_{j+1}$ <sup>3</sup> und eine Kurve  $c_0 : I \rightarrow U$  mit  $c_0(0) = a_1$  und  $c_0(1) = a_0$ . Nach Lemma 7.6 existiert eine schwache Lösung  $\varphi_0$  des Divisors  $\partial c_0$  mit  $\varphi_0|_{K_j} = 1$ . Induktiv sind wir nun in der Lage eine Folge von Punkten  $a_\nu \in X \setminus K_{j+\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , und Kurven in  $X \setminus K_{j+\nu}$  von  $a_{\nu+1}$  nach  $a_\nu$  konstruieren. Analog zum obigen Verfahren erhalten wir dann wieder schwache Lösungen  $\varphi_\nu$  des Divisors  $\partial c_\nu$  mit  $\varphi_\nu|_{K_{j+\nu}} = 1$ . Nach Konstruktion gilt  $\partial c_\nu = A_\nu - A_{\nu+1}$ , wobei  $A_\nu$  nur für  $a_\nu$  nicht verschwindet und an dieser Stelle 1 ergibt. Weiterhin folgt aus Lemma 7.4, dass  $\varphi_0 \cdot \varphi_1 \dots \varphi_n$  eine schwache Lösung von  $A_0 - A_{n+1}$  ist. Lassen wir  $n$  gegen unendlich gehen,

<sup>3</sup>Ansonsten wäre  $K_{j+1}$  nicht kompakt.

so erhalten wir  $\varphi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{\nu}$ . Dieses Produkt konvergiert, da auf jeder kompakten Teilmenge nur endlich viele Faktoren von 1 verschieden sind. Dies folgt aus Lemma 3.7, denn zu jeder kompakten Menge  $K$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $K \subset K_n$ . Dann gilt aber  $\varphi_j|_K \equiv 1$  für alle  $j > n$ . Damit ist  $\varphi$  eine schwache Lösung von  $A_0$ .

Sei nun  $D$  ein beliebiger Divisor auf  $X$ . Für  $\nu \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$D_{\nu}(x) := \begin{cases} D(x) & x \in K_{\nu+1} \setminus K_{\nu} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $K_0$  als leere Menge definiert wird. Wir erhalten dann  $D = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_{\nu}$ . Nun ist  $D_{\nu}$  nur an endlich vielen Stellen von 0 verschieden und kann deshalb als endliche Summe von Divisoren der Form  $A_{\nu}$  dargestellt werden. Für diese wurde oben eine schwache Lösung konstruiert und das (endliche) Produkt dieser Lösungen liefert uns eine Lösung  $\psi_{\nu}$  von  $D_{\nu}$  und wir erhalten sogar  $\psi_{\nu}|_{K_{\nu}} = 1$ . Setzen wir  $\psi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \psi_{\nu}$ , so konvergiert das Produkt nach den gleichen Argumenten, wie oben und ist eine schwache Lösung von  $D$ .  $\square$

**Satz 7.8.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und  $D \in \text{Div}(X)$ . Dann existiert ein  $f \in \mathcal{M}(X)^{\times}$  mit  $(f) = D$ .*

*Beweis.* Wir können  $X$  mit relativ kompakten, einfach zusammenhängenden Koordinatenumgebungen  $(U_i)_{i \in I}$  überdecken. Auf diesen finden wir  $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^{\times}$ , so dass  $(f_i) = D|_{U_i}$ . Dies ist möglich, da  $D$  auf dem relativ kompakten  $U_i$  fast überall verschwindet und  $f_i$  deshalb in lokalen Koordinaten einfach als rationale Funktion darstellbar ist. Mit dieser Konstruktion haben  $f_i$  und  $f_j$  dieselben Pol- und Nullstellen auf  $U_i \cap U_j$ , also ist

$$\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^* \quad \forall i, j \in I$$

Nach Lemma 7.7 existiert eine schwache Lösung  $\psi$  von  $D$  und auf den  $U_i$  finden wir  $\psi_i \in \mathcal{E}(U_i)$ , so dass  $\psi = \psi_i \cdot f_i$  und  $\psi_i(x) \neq 0$  für alle  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  einfach zusammenhängend ist und  $\psi_i$  nicht verschwindet, existiert ein  $\varphi_i \in \mathcal{E}(U_i)$  mit  $\psi_i = e^{\varphi_i}$ .

Somit erhalten wir

$$\psi = e^{\varphi_i} f_i \quad \text{auf } U_i$$

und

$$e^{\varphi_j - \varphi_i} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^{\times}$$

Damit ist  $\varphi_{ij} := \varphi_i - \varphi_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ , da die exp-Funktion lokal biholomorph ist. Aus der Definition folgt auch direkt  $\varphi_{ij} + \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$  auf  $U_i \cap U_j \cap U_k$  und damit ist  $(\varphi_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ .

Nun gilt nach Korollar 6.8  $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ , also existieren  $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$  mit  $\varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i = g_j - g_i$  auf  $U_i \cap U_j$ . Eingesetzt folgt

$$e^{g_j} f_j = e^{g_i} f_i \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$

also finden wir ein  $f \in \mathcal{M}(X)^\times$  mit  $f = e^{f_j} f_j$  auf  $U_j$ . Damit ist  $f$  die gesuchte Lösung von  $D$ .  $\square$

**Korollar 7.9.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche. Dann existiert ein nicht-verschwindendes  $\omega \in \Omega(X)$ .*

*Beweis.* Sei  $g$  eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf  $X$  und  $f \in \mathcal{M}(X)^*$  mit  $(f) = -(dg)$ . Diese existiert nach Satz 7.8. Dann ist  $\omega := f dg$  die gesuchte 1-Form.  $\square$

## 8 Der Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir den zentralen Satz der Bachelor-Arbeit beweisen: den Riemannschen Abbildungssatz. Er charakterisiert alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen und besagt, dass es bis auf Biholomorphie nur drei verschiedene Arten gibt: die Riemannsche Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1$ , die komplexe Ebene  $\mathbb{C}$  und die Einheitskreisscheibe  $B$ . Später werden wir dieses Resultat im Zusammenhang mit der Überlagerungstheorie verwenden, denn hier besagt das Resultat nichts anderes, als dass es nur drei mögliche Universelle Überlagerungen zu jeder beliebigen Riemannschen Fläche gibt. Das erleichtert deren Untersuchung natürlich ungemein.

Zu Beginn des Kapitels werden einige Hilfssätze bewiesen, bevor wir am Ende dann die Früchte unserer Arbeit ernten können. Zunächst einmal beweisen wir den Riemannschen Abbildungssatz nicht direkt für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, sondern für Riemannsche Flächen mit verschwindender holomorpher deRham Gruppe (vgl. 8.2). Wie wir am Ende sehen werden, ist dies keine Einschränkung, allerdings müssen wir erst ein paar Eigenschaften für diese Riemannschen Flächen zusammentragen. Der restliche Teil dieses Kapitels besteht dann darin spezielle Funktionenfolgen zu konstruieren. Diese liefern uns schlussendlich bilholomorphe Abbildungen zwischen unserer Riemannschen Fläche  $X$  und  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $B$ , was den Riemannschen Abbildungssatz beweist.

**Definition 8.1.**

$$B_\infty(0) := \mathbb{C}$$

$$B := B_1(0)$$

**Definition 8.2.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche, dann heißt

$$Rh_{\mathcal{O}}^1(X) := \Omega(X) / d\mathcal{O}(X)$$

holomorphe deRham Gruppe.

**Lemma 8.3.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche mit  $Rh_{\mathcal{O}}^1(X) = 0$ . Dann gilt:

1. Zu jeder holomorphen Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  existieren  $g, h \in \mathcal{O}(X)$  mit  $e^g = f$  und  $h^2 = f$ .
2. Zu jeder harmonischen Funktion  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  existiert ein  $f \in \mathcal{O}(X)$  mit  $u = \operatorname{Re}(f)$ .

*Beweis.* 1. Es gilt  $f^{-1} df \in \Omega(X)$ , und wegen  $Rh_{\mathcal{O}}^1(X) = 0$  finden wir ein  $g \in \mathcal{O}(X)$  mit  $dg = f^{-1} df$ .

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass ein  $a \in X$  existiert mit  $e^{g(a)} = f(a)$ , ansonsten betrachten wir  $g + c$  für ein  $c \in \mathbb{C}$ . Weiterhin erhalten wir:

$$d(fe^{-g}) = d(f)e^{-g} + fe^{-g}(-1)f^{-1}df = 0$$

Also ist  $f e^{-g} \equiv \text{const}$  und aus  $f(a) e^{-g(a)} = 1$  erhalten wir

$$f \equiv e^g.$$

Damit ist der erste Teil der Aussage gezeigt. Für den zweiten setzen wir nun einfach

$$h := e^{\frac{g}{2}}.$$

2. Nach Satz 2.4 existiert genau ein  $\omega \in \Omega(X)$ , so dass  $du = \text{Re}(\omega)$  gilt. Wieder wegen  $\Omega(X) = d\mathcal{O}(X)$ , erhalten wir zunächst  $dg = \omega$  für ein  $g \in \mathcal{O}(X)$  und daraus weiterhin  $du = \text{Re}(dg) = d\text{Re}(g)$ . Insgesamt erhalten wir

$$u = \text{Re}(g) + \text{const}.$$

□

**Satz 8.4.** Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und  $Y \Subset X$  ein Gebiet mit  $Rh_{\mathcal{O}}^1(Y) = 0$  und regulärem Rand. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung auf den Einheitskreis  $B$ .

*Beweis.* Sei  $a \in Y$ . Nach Weierstrass 7.8 existiert ein  $g \in \mathcal{O}(X)$ , das eine Nullstelle erster Ordnung bei  $a$  besitzt und ansonsten  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \neq a$  gilt. Nach Satz 2.33 existiert ein stetiges  $u : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ , s.d.  $u|_Y$  harmonisch ist und

$$u(y) = \log(g(y)) \quad \forall y \in \partial Y$$

erfüllt. Nach Lemma 8.3 existiert ein  $h \in \mathcal{O}(Y)$  mit  $u = \text{Re}(h)$ . Wir setzen nun  $f := e^{-h} g \in \mathcal{O}(Y)$  und behaupten, dass  $f : Y \rightarrow B$  biholomorph ist.

- $f(Y) \subset B$ : Sei  $y \in Y$  beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(y)| &= |e^{-h(y)}| \cdot |g(y)| \\ &= e^{-u(y)} e^{\log(|g(y)|)} \\ &= \exp(\log |g(y)| - u(y)) \end{aligned}$$

Daran erkennen wir, dass  $|f|$  stetig auf ganz  $\bar{Y}$  fortgesetzt werden kann. Außerdem nimmt  $|f|$  auf  $\partial Y$  nach Konstruktion konstant den Wert 1 an. Da  $f$  eine holomorphe Funktion ist werden Extrema auf dem Rand angenommen und da  $f$  weiterhin nicht konstant ist ( $f(a) = 0$ ) erhalten wir aus dem Maximum-Prinzip:

$$|f(y)| < 1 \quad \forall y \in Y$$

und damit  $f(Y) \subset B$ .

- $f$  ist eigentlich: Sei  $0 < r < 1$  und  $Y_r := f^{-1}(\overline{B_r(0)})$ . Dann ist  $Y_r$  kompakt als abgeschlossene Teilmenge von  $\bar{Y}$ .



- $f$  ist biholomorph:  $f$  nimmt jeden Wert gleichhäufig an, da es sich um eine eigentlich Abbildung handelt. Weiterhin wird 0 genau einmal angenommen. Also ist  $f : Y \rightarrow B$  bijektiv und holomorph. Das genügt nach [For99, Kor. 2.5] bereits, um zu zeigen, dass  $f$  biholomorph ist.

□

**Proposition 8.5.** Sei  $f : B_r(0) \rightarrow B_{r'}(0)$  holomorph. Dann gilt:  $|f'(0)| \leq \frac{r'}{r}$

*Beweis.* Unter Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel erhalten wir:

$$\begin{aligned} |f'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi i t})}{r^2 e^{4\pi i t}} r 2\pi i e^{2\pi i t} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{|f(re^{2\pi i t})|}{r} dt \\ &\leq \frac{r'}{r} \int_0^1 dt \\ &= \frac{r'}{r} \end{aligned}$$

□

**Lemma 8.6.** Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, so dass  $\mathbb{C} \setminus G$  einen inneren Punkt besitzt. Sei  $\omega_0 \in G$ . Dann ist

$$\{f \in \mathcal{O}(B) : f(B) \subset G \text{ und } f(0) = \omega_0\} \quad (12)$$

eine kompakte Teilmenge von  $\mathcal{O}(B)$  bzgl. der Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

*Beweis.* Sei  $a \in (\mathbb{C} \setminus G)^\circ$ . Wir bezeichnen die Menge in (12) mit  $M$  und behaupten, dass  $z \mapsto \frac{1}{z-a}$   $G$  biholomorph auf ein Teilgebiet eines  $B_r(0)$  für ein  $r < \infty$  abbildet. Der Abstand  $d := \text{dist}(\{a\}, G) > 0$  existiert, da  $a \notin \bar{G}$ , denn  $a$  ist ein innerer Punkt von  $\mathbb{C} \setminus G$ . Deshalb folgt:

$$\left| \frac{1}{z-a} \right| < \frac{1}{d} \quad \forall z \in G$$

Also sind die  $f \in M$  gleichmäßig beschränkt und aus dem Satz von Montel (vgl. [Fre06, Satz 4.9]) erhalten wir die Kompaktheit von  $M$ . □

**Definition 8.7.** Sei  $\mathcal{S}$  die Menge aller injektiven holomorphen Funktionen  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ .

**Lemma 8.8.** Sei  $f \in \mathcal{S}$ . Dann existiert ein maximales  $r \geq 0$  mit  $B_r(0) \subseteq f(B)$ .

*Beweis.* Sei  $M := \{r \geq 0 \mid B_r(0) \subseteq f(B)\}$  und  $r \in M$ . Da  $f$  injektiv und holomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion  $\varphi : B_r(0) \rightarrow B$  mit  $f \circ \varphi = \text{id}_{B_r(0)}$  und  $\varphi'(0) = 1$ . Damit wissen wir aber

$$1 = \varphi'(0) \leq \frac{1}{r}$$

Also ist  $r \leq 1$  und somit  $M$  beschränkt. Setzen wir nun  $\tilde{r} := \sup M$ , so müssen wir noch zeigen, dass  $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$ . Sei  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$  mit  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{r}$  und  $z \in B_{\tilde{r}}(0)$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $z \in B_{r_n}(0) \subseteq f(B)$  und erhalten somit direkt  $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$ .  $\square$

**Satz 8.9.**  $\mathcal{S}$  ist kompakt in  $\mathcal{O}(B)$ .

*Beweis.* Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ . Nach Lemma 8.8 finden wir zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein maximales  $r_n \geq 0$  mit  $B_{r_n}(0) \subseteq f_n(B)$ . Setzen wir wieder  $\varphi_n := f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \rightarrow B$ , so erhalten wir  $1 = |\varphi_n'(0)| \leq \frac{1}{r_n}$  und damit  $r_n \leq 1$ . Sei  $a_n \in \partial B_{r_n}(0)$ , so dass  $a_n \notin f_n(B)$ . Dies ist aufgrund der Maximalität von  $r_n$  immer möglich. Damit definieren wir nun  $g_n := \frac{f_n}{a_n}$ . Wir erhalten  $B \subseteq g_n(B)$  und

$$1 \notin g_n(B) \tag{13}$$

Nun ist  $g_n(B)$  über  $g_n$  homöomorph zu  $B$ , also einfach zusammenhängend. Dies hat zur Folge, dass  $Rh_{\mathcal{O}}^1(g_n(B))$  verschwindet. Nach Lemma 8.3 existiert ein  $\psi : g_n(B) \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\psi(0) = i$  und  $\psi^2(z) = z - 1 \quad \forall z \in g_n(B)$ . Definiere wir  $h_n := \psi \circ g_n$ , so erhalten wir zunächst  $h_n^2 = g_n - 1$  und behaupten, dass  $w \in h_n(B)$  impliziert, dass  $-w \notin h_n(B)$  gilt. Angenommen es existierten  $z_1, z_2 \in B$  mit  $h_n(z_1) = w$  und  $h_n(z_2) = -w$ , dann hätten wir

$$\begin{aligned} g_n(z_1) &= h_n^2(z_1) + 1 \\ &= w^2 + 1 \\ &= (-w)^2 + 1 \\ &= h_n^2(z_2) + 1 \\ &= g_n(z_2) \end{aligned}$$

Da nun  $g$  aber injektiv ist, folgte  $z_1 = z_2$  und damit  $w = 0$ . Wir erhielten  $g(z_1) = 1$ , was einen Widerspruch zu Gleichung (13) darstellt.

Desweiteren führt  $B \subseteq g_n(B)$  zu  $U := \psi(B) \subseteq \psi(g_n(B)) = h_n(B)$ . Also ist  $(-U) \cap h_n(B) = \emptyset$ . Wir definieren  $G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n(B)$  und behaupten zunächst, dass  $G$  ein Gebiet ist. Nach dem Satz über die Gebietstreue sind alle  $h_n(B)$  offen und somit auch  $G$ . Es bleibt also zu zeigen, dass  $G$  zusammenhängend ist. Da wir uns in  $\mathbb{C}$  befinden fallen die Begriffe des Zusammenhangs und des Wegzusammenhangs zusammen und wir zeigen, dass  $G$  wegzusammenhängend ist. Seien dazu  $z, w \in G$ . Dann existieren  $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ , so dass  $z \in h_n(B)$  und

$w \in h_{\bar{n}}(B)$ . Weiterhin ist  $h_l(0) = i$  für beliebige  $l \in \mathbb{N}$ , d.h.  $i \in h_l(B)$  für alle  $l \in \mathbb{N}$ . Nun sind die  $h_l(B)$  Gebiete nach dem Satz über die Gebietstreue, also finden wir zwei stetige Kurven  $c_1 : I \rightarrow h_n(B)$  und  $c_2 : I \rightarrow h_{\bar{n}}(B)$  mit  $c_1(0) = z$ ,  $c_1(1) = i$ ,  $c_2(0) = i$  und  $c_2(1) = w$ . Definieren wir nun

$$c : I \rightarrow G, \quad c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

so finden wir eine Kurve in  $G$  mit  $c(0) = z$  und  $c(1) = w$ . Damit ist  $G$  wegzusammenhängend, also ein Gebiet.

Weiterhin gilt  $G \cap -U = \emptyset$ , da  $h_n(B) \cap -U = \emptyset$ . Also besitzt das Komplement von  $G$  innere Punkte. Schlußendlich verwenden wir noch, dass  $h_n(0) = i$  ist und erhalten, dass Lemma 8.6 anwendbar ist.  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt demnach eine konvergente Teilfolge. Aufgelöst nach  $f_n = a_n(1 + h_n^2)$  mit  $|a_n| \leq 1$  erhalten wir also eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f : B \rightarrow \mathbb{C}$$

Dann ist  $f$  klarerweise holomorph und es gilt  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ , also ist  $f$  insbesondere nicht konstant.

Zu zeigen bleibt nun nur noch die Injektivität von  $f$ . Nehmen wir also an  $f$  wäre nicht injektiv. Dann existierte ein  $a \in \mathbb{C}$ , so dass  $f - a$  mindestens zwei Nullstellen besäße. Nun könnten wir einen Radius  $r < 1$  finden, so dass  $f - a$  mindestens  $k \geq 2$  Nullstellen besäße und auf  $\partial B_r(0)$  nicht verschwände.<sup>4</sup> Unter Verwendung des Null- und Polstellenzählenden Integrals erhielten wir:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$$

Aber das Integral ist stetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, d.h. insbesondere, dass für jedes  $f_{n_l}$  nahe genug an  $f$  das Integral auch  $k$  ergeben müsste. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität der  $f_{n_l}$ , also ist  $f$  auch injektiv. Dies vervollständigt den Beweis.  $\square$

**Lemma 8.10.** Sei  $R \in ]0, \infty]$ ,  $Y \subsetneq B_R(0)$  ein Gebiet,  $0 \in Y$  und  $Rh_{\mathcal{O}}^1(Y) = 0$ . Dann existiert ein  $0 < r < R$  und eine holomorphe Funktion  $f : Y \rightarrow B_r(0)$  mit  $f(0) = 0$  und  $f'(0) = 1$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $R < \infty$ . Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $Y \subsetneq B$  gilt, ansonsten betrachten wir  $\tilde{Y} = \frac{Y}{R}$ . Nach Voraussetzung existiert ein  $a \in B \setminus Y$ . Wir betrachten

$$\varphi : B \rightarrow B, \quad \varphi(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

<sup>4</sup>Könnten wir kein solches  $r$  finden, wäre  $f - a$  bereits konstant Null nach dem Identitätssatz.

Es folgt  $0 \notin \varphi(Y)$ . Nach Lemma 8.3 existiert ein  $g \in \mathcal{O}(Y)$  mit  $g^2 = \varphi|_Y$ . Also ist  $g(Y) \subseteq B$ . Wir definieren nun eine weitere Hilfsfunktion

$$\psi(z) := \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}, \quad b := g(0)$$

Zusammen mit  $g$  ergibt dies unsere letzte Hilfsfunktion  $h := \psi \circ g : Y \rightarrow B$  mit  $h(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \gamma &:= h'(0) = \psi'(b)g'(0) \\ &= \psi'(b) \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\ &= \frac{1}{1 - |b|^2} \frac{1 - |a|^2}{2b} \\ &= \frac{1 + |b|^2}{2b} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir  $|\gamma| > 1$ .<sup>5</sup> Setzen wir nun  $r := \frac{1}{\gamma} < 1 = R$  und  $f := \frac{h}{\gamma}$  haben wir die gewünschte Funktion gefunden.

Wenden wir uns nun dem Fall  $R = \infty$  zu. Nach Voraussetzung existiert ein  $a \in \mathbb{C} \setminus Y$ . Wir betrachten

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = z - a$$

Nun gilt aber  $0 \notin \varphi(Y)$ . Nach Lemma 8.3 existiert ein  $g \in \mathcal{O}(Y)$  mit  $g^2 = \varphi|_Y$ . Völlig analog zum Beweis von Satz 8.9 erhalten wir für  $w \in g(Y)$ , dass  $-w \notin g(Y)$  gilt.  $g$  ist nicht konstant und damit eine offene Abbildung. Sei  $b \in g(Y)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , s.d.  $B_\varepsilon(b) \subseteq g(Y)$ . Da nun  $w \in g(Y)$  impliziert, dass  $-w \notin g(Y)$  gilt, folgt insbesondere  $g \notin B_\varepsilon(b)$ . Also erhalten wir

$$|-w - b| = |w + b| \geq r.$$

Das bedeutet wir können

$$\psi : g(Y) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(w) = \frac{1}{w + b}$$

definieren. Dann ist  $\psi$  holomorph und es gilt  $|\psi(w)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$  für jedes  $w \in g(Y)$ . Damit können wir eine holomorphe Abbildung  $\tilde{\psi} : Y \rightarrow B$  finden. Setzen wir nun noch  $c := \tilde{\psi}(0)$  und betrachten

$$\eta : B \rightarrow B, \quad \eta(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$$

---

<sup>5</sup>Die Funktion  $x \mapsto \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + x \right)$  nimmt bei  $x = 1$  ihr striktes Minimum an und ist für  $0 < x < 1$  echt größer als 1.

so können wir  $\tilde{f} := \eta \circ \tilde{\psi} : Y \rightarrow B$  definieren.  $\tilde{f}$  erfüllt dabei die Eigenschaften  $\tilde{f}(0) = 0$  und

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(0) &= \eta'(c) \cdot \tilde{\psi}'(0) \\ &= \frac{1}{1-|c|^2} \cdot r \cdot \psi'(g(0)) \cdot g'(0) \\ &= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\ &= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{1}{2g(0)} \\ &\neq 0.\end{aligned}$$

Das heißt nach dem gleichen Skalierungsargument, wie im ersten Fall erhalten wir eine holomorphe Abbildung  $f : Y \rightarrow B_r(0)$ , wobei  $r < R = \infty$ .  $\square$

**Lemma 8.11.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte Riemannsche Fläche,  $Rh_{\mathcal{O}}^1(X) = 0$  und  $Y \subseteq X$  ein Runge-Gebiet. Dann gilt  $Rh_{\mathcal{O}}^1(Y) = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $\omega \in \Omega(Y)$  nach Korollar 7.9 existiert ein  $w_0 \in \Omega(X)$  ohne Nullstellen. Daher existiert ein  $f \in \mathcal{O}(Y)$  mit  $\omega = f\omega_0$ . Der Runge'sche Approximationssatz besagt nun, dass eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(X)$  existiert, so dass  $f_n \rightarrow f$  kompakt auf  $Y$  konvergiert. Sei nun  $\alpha$  eine beliebige geschlossene Kurve in  $Y$ . Dann gilt

$$0 = \int_{\alpha} f_n \omega_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} \omega.$$

Also verschwindet  $\int_{\alpha} \omega$  für jede geschlossene Kurve. Demnach besitzt  $\omega$  nach [For99, Satz 10.15] eine Stammfunktion und damit verschwindet  $Rh_{\mathcal{O}}^1(Y)$ .  $\square$

**Satz 8.12 (Der Riemannsche Abbildungssatz).** *Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche mit  $Rh_{\mathcal{O}}^1(X) = 0$ . Dann ist  $X$  konform äquivalent*

1. zur Riemannschen Zahlenkugel  $\mathbb{P}^1$ ,
2. zur Komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  oder
3. zur Einheitskreisscheibe  $B$ .

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $X$  kompakt ist. Dann wissen wir, dass  $d\mathcal{O}(X) = 0$  und damit auch  $\Omega(X) = 0$ . Nun liefert uns der Serresche Dualitätssatz, dass  $H^0(X, \Omega) \cong H^1(X, \mathcal{O})^*$ . Da immer  $\Omega(X) \cong H^0(X, \Omega)$  gilt und im kompakten Fall  $H^1(X, \mathcal{O})$  ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, erhalten wir

$$H^1(X, \mathcal{O}) \cong H^1(X, \mathcal{O})^* = 0.$$

Also ist das Geschlecht unserer kompakten Riemanschen Fläche 0 und aus dem Satz von Riemann-Roch erhalten wir, dass  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{P}^1$  ist.

Ist nun  $X$  nicht kompakt, so existiert nach Satz 3.12 eine Ausschöpfung

$$Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \dots$$

von  $X$ , wobei die  $Y_i$  Rungegebiete mit regulärem Rand. Nach Lemma 8.11 verschwindet  $Rh_{\mathcal{O}}^1(Y_i)$  für jedes  $i \in \mathbb{N}$ . Aus Satz 8.4 erhalten wir, dass die  $Y_i$  konform äquivalent zu  $B$  sind. Sei  $a \in Y_0$  und  $(U, z)$  eine Koordinatenumgebung von  $a$ . Dann existieren  $r_n < 0$  und eine biholomorphe Abbildung  $f_n : Y_n \rightarrow B_{r_n}(0)$  mit  $f_n(a) = 0$  und  $\frac{df_n}{dz}(a) = 1$ , denn betrachten wir die Abbildung  $\tilde{f}_n : Y_n \rightarrow B$  die nach Satz 8.4 existiert und die Abbildung

$$\varphi : B \rightarrow B, \quad \varphi_n(z) := \frac{z - \tilde{f}_n(a)}{1 - \overline{z} \tilde{f}_n(a)},$$

so erhalten wir zunächst  $\bar{f}_n := \varphi_n \circ \tilde{f}_n$ . Diese erfüllt  $\bar{f}_n : Y_n \rightarrow B$  und  $\bar{f}_n(a) = 0$ . Setzen wir nun  $r_n^{-1} := \left| \frac{d\bar{f}_n}{dz}(a) \right|$  und  $f_n := r_n \cdot \bar{f}_n : Y_n \rightarrow B_{r_n}(0)$ , so haben wir die gewünschte Abbildung gefunden. Weiterhin gilt  $r_n \leq r_{n+1}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , denn  $h : f_{n+1} \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \rightarrow B_{r_{n+1}}(0)$  erfüllt  $h(0) = 0$  und  $h'(0) = 1$ , also  $1 = |h'(0)| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}$  nach Proposition 8.5. Wir setzen nun

$$R := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \in ]0, \infty]$$

und behaupten, dass  $X$  biholomorph auf  $B_R(0)$  abgebildet wird. Dazu betrachten wir die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir behaupten, dass eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, so dass  $(f_{n_k}|_{Y_m})_{k \geq m}$  für beliebige  $m \in \mathbb{N}$  kompakt auf  $Y_m$  konvergiert. Dazu definieren wir  $g_n(z) := \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z))$  für alle  $n \geq 0$ . Damit sind die  $g_n : B \rightarrow \mathbb{C}$  injektive holomorphe Funktionen mit  $g_n(0) = 0$  und  $g'_n(0) = 1$ , also  $g_n \in \mathcal{S}$  und aus Satz 8.9 erhalten wir eine konvergente Teilfolge  $(g_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Diese Teilfolge gibt uns direkt eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_{0k}})_{k \in \mathbb{N}}$ . Wenden wir die gleiche Konstruktion nun auf  $\frac{1}{r_1} f_{n_{0k}}(f_1^{-1}(r_1 z))$  erhalten wir eine Teilfolge  $(f_{n_{1k}})_k$ . Induktiv erhalten wir so zu jedem  $Y_m$  eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_{mk}})_k$ . Setzen wir  $f_{n_k} := f_{n_{kk}}$ , so erhalten wir die gewünschte Teilfolge. Sei  $f \in \mathcal{O}(X)$  der Grenzwert von  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Dann können wir analog zum Beweis von Satz 8.9 zeigen, dass  $f$  injektiv ist und  $f(a) = 0$  und  $\frac{df(a)}{dz} = 1$  genügt.

Wir zeigen nun, dass  $X$  via  $f$  konform äquivalent zu  $B_R(0)$  ist. Zunächst folgt aus  $|f_{n_k}(x)| < r_{n_k}$  für beliebige  $x \in X$  und  $k \in \mathbb{N}$  groß genug, dass  $|f(x)| \leq R$ . Da  $f$  holomorph und nicht-konstant, also eine offene Abbildung ist, erhalten wir direkt, dass  $f(X) \subset B_R(0)$ . Ansonsten gäbe es ein  $z \in f(X)$  mit  $z \in \partial B_R(0)$ . Dieses  $z$  kann aber kein innerer Punkt von  $f(B)$  sein. Ein Widerspruch.

Es bleibt also nur noch die Surjektivität zu zeigen. Angenommen  $f$  wäre nicht surjektiv. Dann existierte nach Lemma 8.10 ein  $0 < r < R$  und eine holomorphe Abbildung  $g : f(X) \rightarrow B_r(0)$  mit  $g(0) = 0$  und  $g'(0) = 1$ . Sei nun  $n$  so groß gewählt, dass  $r_n > r$ . Dann gälte für

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \rightarrow B_r(0)$$

$h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 1$ , aber  $r < r_n$ . Dies ist ein Widerspruch zu Proposition 8.5. Also ist  $X$  konform äquivalent zu  $B_R(0)$ . Für  $R = \infty$  also zu  $\mathbb{C}$  und für  $R < \infty$  zu  $B$ .  $\square$

*Bemerkung 8.13.* Dank [For99, Kor.16] und [For99, Kor.10.7] wissen wir bereits, dass jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche eine verschwindende deRham-Gruppe hat und dementsprechend konform äquivalent zu  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $B$  ist, andererseits zeigt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jede Riemannsche Fläche mit verschwindender deRham-Gruppe einfach zusammenhängend ist. Also haben wir unser eigentliche Resultat bewiesen, nämlich, dass jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche konform äquivalent zu einer der obigen drei ist.

## 9 Automorphismengruppen & Gitter

Im letzten Kapitel haben wir alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen und damit alle möglichen universellen Überlagerungen kompakter Riemannscher Flächen bestimmt. In diesem Kapitel wollen wir nun die Automorphismengruppen von  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}^1$  und  $B$  bzw.  $\mathbb{H}$  bestimmen, denn die Überlagerungstheorie liefert uns, dass sich unsere kompakten Riemannschen Flächen jeweils aus  $X \in \{\mathbb{C}, \mathbb{P}^1, \mathbb{H}\}$  modulo der Wirkung einer Untergruppe der Automorphismengruppe ergeben. Das bedeutet, wenn wir die Untergruppen der Automorphismengruppen verstanden haben, haben wir auch die verschiedenen kompakten Riemannschen Flächen verstanden.

Als ersten Schritt berechnen wir dazu in diesem Kapitel die Automorphismengruppen. Danach wenden wir uns der Charakterisierung von Gittern zu, da wir diese einmal benötigen, um den Torus zu beschreiben und diese andererseits zeigen, dass alle diskreten, abelschen Untergruppen von  $\mathbb{R}$  gerade Gitter und damit zyklisch sind. Die Untergruppen der Automorphismengruppen werden dann in den nächsten zwei Abschnitten bestimmt.

### 9.1 Automorphismengruppen

**Definition 9.1.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Unter der *Automorphismengruppe* von  $X$  verstehen wir

$$\text{Aut}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f, f^{-1} \text{ holomorph}\}.$$

Diese ist mit der Verkettung von Abbildungen tatsächlich eine Gruppe.

**Lemma 9.2.** *Die Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{H} \rightarrow B, \quad \varphi(z) := \frac{z - i}{z + i}$$

*ist biholomorph.*

*Beweis.* Zunächst ist  $\varphi$  wohldefiniert, denn für  $z \in \mathbb{H}$  erhalten wir, dass  $\text{Im}(z) > 0$  gilt und daher folgt

$$\begin{aligned} |\varphi(z)|^2 &= \frac{z - i}{z + i} \cdot \frac{\bar{z} + i}{\bar{z} - i} \\ &= \frac{|z|^2 - \bar{z}i + iz + 1}{|z|^2 + i\bar{z} - iz + 1} \\ &= \frac{|z|^2 - 2\text{Re}(iz) + 1}{|z|^2 - 2\text{Re}(iz) + 1} \\ &= \frac{|z|^2 + 1 - 2\text{Im}(z)}{|z|^2 + 1 + 2\text{Im}(z)} \\ &< 1. \end{aligned}$$



Betrachten wir nun

$$\psi : B \rightarrow \mathbb{H}, \quad \psi(z) := \frac{-iz - i}{z - 1},$$

so ist diese Abbildung auch wohldefiniert, denn für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\psi(z)) &= \frac{1}{2i}(\psi(z) - \bar{\psi}(z)) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{-iz - i}{z - 1} - \frac{i\bar{z} + i}{\bar{z} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i(1 - |z|^2)}{|z - 1|^2} \\ &= \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Weiterhin zeigt eine einfache Rechnung, dass  $\psi \circ \varphi = \operatorname{id}_{\mathbb{H}}$  und  $\varphi \circ \psi = \operatorname{id}_B$  gelten.  $\square$

*Bemerkung 9.3.* Dass  $\mathbb{H}$  und  $B$  konform äquivalent sind, ist bereits eine Konsequenz aus dem Riemannschen Abbildungssatz 8.12, allerdings benötigen wir für den nächsten Satz die Übergangsabbildung explizit.

**Satz 9.4.** *Es gelten*

1.  $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\}$
2.  $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) = \{f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, f(z) = M\langle z \rangle \mid M \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{C})\}$
3.  $\operatorname{Aut}(B) = \{f : B \rightarrow B, z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| - |\beta| = 1\}$
4.  $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, f(z) = M\langle z \rangle \mid M \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})\}$

*Beweis.* Wir zeigen jeweils nur  $\subseteq$ , denn die andere Inklusion ergibt sich sofort, da alle Umkehrfunktionen explizit ausgedrückt werden können.

Sei also  $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ , dann ist  $f$  eine ganze Funktion, also existieren  $a_k \in \mathbb{C}$ , so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gilt. Wir behaupten nun, dass  $a_k = 0$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gelten muss. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann hätte die Funktion  $g : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) := f(\frac{1}{z})$  eine wesentliche Singularität bei 0. Dann wäre aber der Satz von Casorati-Weierstraß (vgl. [Kas, Satz 6.11]) anwendbar und wir erhielten zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $z_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(0)$ , so dass  $|g(z_n) - f(0)| < \frac{1}{n}$  gilt. Setzen

wir  $w_n := \frac{1}{z_n}$ , so konvergierte  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\infty$  und  $f(w_n) \rightarrow f(0)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Setzen wir nun weiterhin  $\tilde{z}_n := f(w_n)$  und  $\tilde{z} = f(0)$ , so erhielten wir also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}_n = \tilde{z}$ , allerdings gälte  $|f^{-1}(\tilde{z}_n)| = |w_n| \rightarrow \infty \neq 0 = |f^{-1}(\tilde{z})|$ . Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von  $f^{-1}$ . Also ist  $f$  ein Polynom. Dies hat aber direkt zur Folge, dass der Grad von  $f$  eins sein muss, da wir ansonsten nach dem Hauptsatz der Algebra mehrere Nullstellen hätten. Damit haben wir bereits die gewünschte Form gefunden.

Als nächstes wenden wir uns  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$  zu. Sei dazu  $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Wir setzen  $a := f(\infty)$  und  $b := f^{-1}(\infty)$ . Zunächst betrachten wir den Fall  $a \neq \infty$ . Dann gilt auch  $b \neq \infty$  und wir können

$$\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \psi(z) = \frac{bz + c}{z - a}$$

definieren, wobei  $c \in \mathbb{C}$  mit  $c \neq a$ . Weiterhin gilt

$$\psi^{-1} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, \quad \psi^{-1}(z) = \frac{az + c}{z - b}$$

und damit ist  $\psi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Setzen wir nun  $g := f \circ \psi$ , so erhalten wir

$$g(\infty) = f(\psi(\infty)) = f(b) = \infty.$$

Also ist  $g|_{\mathbb{C}} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  und wie wir oben gesehen haben, existieren  $d, e \in \mathbb{C}$  mit  $d \neq 0$ , so dass  $g|_{\mathbb{C}}(z) = dz + e$ . Nun gilt  $|dz + e| \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow \infty$ . Also können wir die Notation  $g(z) = dz + e$  auf ganz  $\mathbb{P}^1$  fortsetzen. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= g(\psi^{-1}(z)) \\ &= d\psi^{-1}(z) + e \\ &= d \cdot \frac{az + c}{z - b} + e \\ &= \frac{(da + e)z + (dc - eb)}{z - b} \\ &= \begin{pmatrix} (da + e) & (dc - eb) \\ 1 & -b \end{pmatrix} \langle z \rangle \\ &=: M \langle z \rangle. \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $\det M = d(a - c) \neq 0$ . Wählen wir als  $\gamma$  eine Wurzel von  $\det M$  und definieren  $\tilde{M} := \gamma^{-1}M$ , so gilt  $f(z) = M \langle z \rangle = \tilde{M} \langle z \rangle$  und  $\det \tilde{M} = \gamma^{-2} \det M = 1$ . Also liegt  $\tilde{M} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ .

Für den Fall, dass  $a = \infty = b$ , so brauchen wir die Hilfsfunktion  $\psi$  nicht und wir können direkt unser Wissen über  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  anwenden. Eine analoge Rechnung liefert dann das Resultat.

Sei nun  $f \in \text{Aut}(B)$  und  $w := f^{-1}(0)$ . Dann definieren wir

$$f_w : B \rightarrow B, \quad f_w(z) = \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}.$$

Es zeigt sich, dass  $f_w$  selbstinvers ist und damit in  $\text{Aut}(B)$  liegt. Setzen wir  $g := f \circ f_w$ , so erhalten wir

$$g(0) = f(f_w(0)) = f(w) = 0.$$

Damit ist das Lemma von Schwarz (vgl. [Kas, Satz 5.10]) anwendbar und wir erhalten sowohl für  $g$ , als auch für  $g^{-1}$

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |z|, \\ |g^{-1}(z)| &\leq |z|. \end{aligned}$$

Es ergibt sich, dass

$$|w| = |g^{-1}(g(w))| \leq |g(w)| \leq |w|$$

gilt. Also ist  $|g(w)| = |w|$  und als weitere Folgerung aus dem Lemma von Schwarz erhalten wir die Existenz eines  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c| = 1$ , so dass

$$g(z) = cz$$

gilt. Es folgt, dass

$$f(z) = cf_w(z) = \frac{idz - idw}{-\overline{idw}z + \overline{id}}$$

gilt, wobei  $d^2 = c$ . Setzen wir  $\tilde{\alpha} = id$  und  $\tilde{\beta} = -idw$ , so folgt  $|\tilde{\alpha}| = 1$  und  $|\tilde{\beta}| = |w| < 1$ . Wir definieren

$$\lambda = |\tilde{\alpha}| - |\tilde{\beta}|$$

und setzen  $\alpha := \lambda^{-1}\tilde{\alpha}$  und  $\beta := \lambda^{-1}\tilde{\beta}$ . Es gilt  $|\alpha| - |\beta| = 1$  und

$$f(z) = \frac{\alpha z - \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}},$$

was die Behauptung zeigt.

Als letztes interessieren wir uns nun für  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ . Diesen Fall können wir aber auf  $\text{Aut}(B)$  zurückführen, denn Lemma 9.2 gibt uns eine Bijektion

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{Aut}(B), \quad f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Sei also  $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ , dann existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| - |\beta| = 1$ , so dass

$$\varphi(f(\varphi^{-1}(z))) = \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta}z + \overline{\alpha}}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \varphi^{-1} \left( \frac{\alpha\varphi(z) + \beta}{\bar{\beta}\varphi(z) + \bar{\alpha}} \right) \\
 &= \frac{-i\alpha\varphi(z) - i\beta - i\bar{\beta}\varphi(z) - i\bar{\alpha}}{\alpha\varphi(z) + \beta - \bar{\beta}\varphi(z) - \bar{\alpha}} \\
 &= \frac{-i(\alpha + \bar{\beta})(z - i) - i(\beta + \bar{\alpha})(z + i)}{(\alpha - \bar{\beta})(z - i) + (\beta - \bar{\alpha})(z + i)} \\
 &= \frac{-i(\alpha + \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha})z + (\bar{\alpha} - \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha})}{(\alpha - \bar{\beta} + \beta - \bar{\alpha})z + i(-\alpha + \bar{\beta} + \beta - \bar{\alpha})} \\
 &= \frac{-(\operatorname{Re}(\alpha) + \operatorname{Re}(\beta))z + (\operatorname{Im}(\beta) - \operatorname{Im}(\alpha))}{(\operatorname{Im}(\alpha) + \operatorname{Im}(\beta))z + (\operatorname{Re}(\beta) - \operatorname{Re}(\alpha))} \\
 &=: M\langle z \rangle.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun  $\det M$ , so erhalten wir  $\det M = |\alpha| - |\beta| = 1$ . Außerdem hat  $M$  nur reelle Einträge, also liegt  $M \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ .  $\square$

## 9.2 Gitter

Als nächstes wenden wir uns Gittern zu und möchten deshalb zunächst an die Definition 1.17 auf Seite 10 erinnern. Wir benötigen Gitter, um die diskreten Untergruppen von  $\mathbb{C}$  zu beschreiben. Später wird sich dann auch zeigen, dass wir diese diskreten Untergruppen benötigen, um die Riemannschen Flächen zu beschreiben, deren Universelle Überlagerung  $\mathbb{C}$  ist.

**Lemma 9.5.** *Sei  $\Gamma \subset v$  eine additive Untergruppe.  $\Gamma$  ist ein Gitter genau dann, wenn*

1.  $\Gamma$  diskret ist und
2.  $\Gamma$  nicht in einem echten Untervektorraum von  $V$  enthalten ist.

*Beweis.* Falls  $\Gamma$  ein Gitter ist, ist die Aussage aus der Definition klar. Erfülle also  $\Gamma$  die beiden Bedingungen. Wir gehen nun per Induktion vor. Für  $n = 0$  ist die Aussage klar. Gelte also die Aussage für ein  $n \in \mathbb{N}_0$ . Da  $\Gamma \subset V$  mit  $\dim V = n + 1$  in keinem echten Untervektorraum von  $V$  enthalten ist, existieren linear unabhängige  $x_1, \dots, x_{n+1} \in \Gamma$ . Sei  $V_1 := \langle x_1, \dots, x_n \rangle$  und  $\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1$ . Nun ist  $\Gamma_1$  wieder diskret und in keinem echten Untervektorraum von  $V_1$  enthalten. Weiterhin ist  $\dim V_1 = n$ , also können wir die Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten linear unabhängige  $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma_1 \subset \Gamma$ , so dass  $\Gamma_1 = \mathbb{Z}\gamma_1 + \dots + \mathbb{Z}\gamma_n$  gilt. Nun bilden die  $\gamma_i$  bereits eine Basis von  $V_1$  und fügen wir  $x_{n+1}$  erhalten wir sogar eine Basis von  $V$ , das bedeutet aber, dass wir zu jedem  $x \in \Gamma \subset V$ , eindeutig bestimmte  $c_i(x), c(x) \in \mathbb{R}$  finden, so dass

$$x = c_1(x)\gamma_1 + \dots + c_n(x)\gamma_n + c(x)x_{n+1}$$

gilt. Wir betrachten nun

$$P := \{\lambda_1\gamma_1 + \cdots + \lambda_n\gamma_n + \lambda x_{n+1} \mid \lambda_i, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Dieses  $P$  ist kompakt und da  $\Gamma$  diskret ist, folgt dass  $P \cap \Gamma$  endlich ist. Weiterhin ist  $(\Gamma \cap P) \setminus V_1$  nicht leer, da  $x_{n+1}$  enthalten ist. Damit existiert ein  $\gamma_{n+1} \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1$  mit

$$c(\gamma_{n+1}) = \min\{c(x) \mid x \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1\} \in ]0, 1].$$

Wir behaupten nun, dass  $\Gamma = \Gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_{n+1}$ . Sei dazu  $x \in \Gamma$ . Dann existieren  $n_j \in \mathbb{Z}$ , so dass

$$x' := x - \sum_{j=1}^{n+1} n_j \gamma_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_j + \lambda x_{n+1}$$

mit  $0 \leq \lambda_j < 1$  und  $0 \leq \lambda < c(\gamma_{n+1})$  gilt. Da  $x' \in \Gamma \cap P$  liegt und  $c(\gamma_{n+1})$  minimal von 0 verschieden gewählt wurde, muss  $\lambda = 0$  sein. Also liegt  $x' \in \Gamma \cap V_1 = \Gamma_1$ . Damit sind die  $\lambda_i$  ganzzahlig und die einzig verbleibende Möglichkeit ist  $\lambda_i = 0$ . Dann ist aber  $x'$  bereits 0 und wir erhalten

$$x = \sum_{j=1}^n n_j \gamma_j \in \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_n.$$

□

## 10 Abelsche Fuchssche Gruppen

In diesem Kapitel wollen wir die diskreten, abelschen Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  beschreiben. Das Resultat dieses Abschnitts wird sein, dass dies gerade die zyklischen Untergruppen sind. Dieses Resultat ist notwendig um zu zeigen, dass Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1 nicht von der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  überlagert werden können.

Zunächst charakterisieren wir die Elemente in  $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  durch ihre Fixpunkteigenschaften und zeigen die eigentliche Aussage dann dadurch, dass wir alle abelschen diskreten Untergruppen durch topologische Gruppenisomorphismen<sup>6</sup> auf abelsche, diskrete Untergruppen von  $\mathbb{R}$  abbilden können. Diese haben wir jedoch im letzten Abschnitt als die zyklischen Untergruppen charakterisiert.

**Definition 10.1.** Die diskreten Untergruppen von  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  werden als Fuchssche Gruppen bezeichnet.

*Bemerkung 10.2.* Um über Diskretheit sprechen zu können, benötigt  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  eine Topologie. Hier verwenden wir die Quotiententopologie von

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{id}\}$$

induziert wird.  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  stattdessen wir dabei mit der Teilraumtopologie aus, die durch die Standardtopologie auf  $\text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$  gegeben ist.

**Satz 10.3.** Sei  $\text{id} \neq S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Dann gelten

- Für  $|\text{tr } S| < 2$  besitzt  $S$  einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .
- Für  $|\text{tr } S| = 2$  besitzt  $S$  einen Fixpunkt auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .
- Für  $|\text{tr } S| > 2$  besitzt  $S$  zwei Fixpunkte auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

*Beweis.* Gelte

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Für einen Fixpunkt  $S(z) = z$  muss die Gleichung

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{14}$$

Falls  $c \neq 0$  gilt erhalten wir unter Ausnutzung von  $\det S = 1$

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{a - d}{2c} \pm \sqrt{\frac{(d - a)^2}{4c^2} + \frac{b}{c}} \\ &= \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(\text{tr } S)^2 - 4} \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>d.h. bi-tetige Gruppenisomorphismen

Nun hängt die Anzahl und Art der Lösungen von der Diskriminante ab. Wir erhalten also die folgenden Fälle:

- Für  $|\operatorname{tr} S| < 2$  erhalten wir zwei Lösungen in  $\mathbb{C}$ , wobei der Imaginärteil von Null verschieden ist. Aufgrund des Vorzeichens liegt nur eine dieser Lösungen in  $\mathbb{H}$ . Also finden wir einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$ .
- Für  $|\operatorname{tr} S| = 2$  erhalten wir eine Lösung in  $\mathbb{R}$ .
- Für  $|\operatorname{tr} S| > 2$  erhalten wir zwei Lösungen in  $\mathbb{R}$ .

Nun müssen wir noch den Fall  $c = 0$  betrachten. Dann vereinfacht sich die Gleichung (14) unter Ausnutzung von  $1 = \det S = ad$  zu

$$z = a^2 z - ba.$$

Weiterhin wissen wir, dass  $\operatorname{tr} S = a + \frac{1}{a}$  erfüllt. Damit wissen wir aber bereits, dass  $|\operatorname{tr} S| \geq 2$  gilt, denn die Funktion, die durch  $x \mapsto \frac{1}{x} + x$  gegeben ist, hat zwei globale Betragsminima bei  $\pm 1$ , was eine einfache Kurvendiskussion zeigt. Betrachten wir zunächst den Fall  $|\operatorname{tr} S| = 2$ , so muss  $a = \pm 1$  gelten. Dann ist aber  $\infty$  die einzige Lösung der obigen Gleichung. Für  $|\operatorname{tr} S| > 2$  ist  $\infty$  auch eine Lösung, allerdings erhalten wir als zweite Lösung  $z = \frac{ba}{1-a^2} \in \mathbb{R}$ , da  $a^2 \neq 1$  gelten muss. Dies zeigt den verbleibenden Fall.  $\square$

**Definition 10.4.** Die Elemente aus  $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$  mit  $|\operatorname{tr} S| < 2$  ( $= 2$  oder  $> 2$ ) heißen elliptisch (parabolisch, hyperbolisch).

**Lemma 10.5.** Sei  $S \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Dann gelten

1. Ist  $S$  elliptisch mit Fixpunkt  $w \in \mathbb{H}$ , so existiert ein  $C \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ , so dass  $C\langle w \rangle = i$  gilt. Weiterhin gilt dann für ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$CSC^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

2. Ist  $S$  parabolisch mit Fixpunkt  $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , so existiert ein  $C \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ , so dass  $C\langle w \rangle = \infty$  erfüllt ist. Weiterhin gilt dann für ein  $b \in \mathbb{R}$  die Gleichung

$$CSC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ist  $S$  hyperbolisch mit Fixpunkten  $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , so existiert ein  $C \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ , so dass  $C\langle w_1 \rangle = 0$  und  $C\langle w_2 \rangle = \infty$  erfüllt sind. Weiterhin folgt dann, dass ein  $\lambda > 0$  existiert, so dass die Gleichung

$$CSC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

erfüllt ist.

*Beweis. Fall 1:* Sei  $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  elliptisch und  $w \in \mathbb{H}$  der Fixpunkt von  $S$ . Nun gilt nach Satz 9.4, dass ein  $C \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  existiert, so dass  $C\langle w \rangle = i$  ist. Setzen wir

$$\tilde{S} = CSC^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so gilt  $\tilde{S}\langle i \rangle = i$  und wir erhalten die Gleichung

$$ai + b = -c + di$$

Nun sind die  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und wir erhalten, dass  $a = d$  und  $b = -c$  gelten muss. Dann erhalten wir aber, dass

$$1 = \det S = ad - bc = a^2 + b^2$$

gelten muss. Damit finden wir aber geeignete  $\varphi \in \mathbb{R}$ , so dass  $a = \cos(\varphi)$  und  $b = \sin(\varphi)$  erfüllen und damit hat  $\tilde{S}$  die gewünschte Form.

*Fall 2:* Sei  $S \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  parabolisch und sei  $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  der Fixpunkt von  $S$ . Wir setzen

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Falls nun  $w = \infty$  gilt, muss  $c = 0$  sein. Dann folgt aber aus  $|\text{tr } S| = 2$  und  $\det S = 1$ , dass  $a = d = \pm 1$  gelten muss. Da wir uns aber in  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  befinden, können wir ohne Einschränkung  $a = d = 1$  annehmen. Also ist  $S$  bereits in der gewünschten Form. Falls  $w \neq \infty$  gilt, so betrachten wir

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & w \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

$C$  erfüllt die Gleichung  $C\langle w \rangle = \infty$ . Also erfüllt  $\tilde{S} = CSC^{-1}$  die Gleichung  $\tilde{S}\langle \infty \rangle = \infty$ . Also haben wir diesen Fall auf den ersten Fall zurückgeführt.

*Fall 3:* Sei  $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  hyperbolisch und seien  $w_1 \neq w_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  die Fixpunkte von  $S$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $w_1 = 0$  und  $w_2 = \infty$  und wählen die obige Darstellung für  $S$ . Dann folgt aber aus  $S\langle 0 \rangle = 0$  und  $S\langle \infty \rangle = \infty$ , dass  $b = c = 0$  gelten muss. Aus  $\det S = 1$  folgt dann, dass  $a = \frac{1}{d}$  gilt. Da  $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  liegt, können wir ohne Einschränkung  $\lambda = a > 0$  annehmen, was die Behauptung in diesem Fall zeigt. Als nächstes sei  $w_1 = \infty$  oder  $w_2 = \infty$ . Wir nehmen ohne Einschränkung  $w_2 = \infty$  an. Dann ist  $w_1 \neq \infty$  und wir setzen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -w_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Dann erfüllt  $C\langle \infty \rangle = \infty$  und  $C\langle w_1 \rangle = 0$  und wir erhalten für  $\tilde{S} = CSC^{-1}$  die beiden Gleichungen  $\tilde{S}\langle \infty \rangle = \infty$  und  $\tilde{S}\langle 0 \rangle = 0$  und wir haben es auf den obigen Fall zurückgeführt.



Sind nun sowohl  $w_1$  als auch  $w_2$  von  $\infty$  verschieden, so führen wir die gleiche Argumentation mit der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} (w_1 - w_2)^{-1} & -w_1(w_1 - w_2)^{-1} \\ 1 & -w_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

durch und erhalten auch hier, dass  $\tilde{S} = CSC^{-1}$  die gewünschten Eigenschaften erfüllt.  $\square$

Nun wollen wir die abelschen Fuchsschen Gruppen charakterisieren. Wir beginnen mit der folgenden Proposition.

**Proposition 10.6.** *Seien  $T, S \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  mit  $TS = ST$ . Dann bildet  $S$  die Fixpunktmenge von  $T$  injektiv auf sich selbst ab.*

*Beweis.* Sei  $w$  ein Fixpunkt von  $T$ , dann gilt

$$TS\langle p \rangle = ST\langle p \rangle = S\langle p \rangle.$$

Also ist auch  $S\langle p \rangle$  ein Fixpunkt von  $T$ . Da nun  $S$  auch in  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$  liegt, ist  $S$  insbesondere auf der gesamten Fixpunktmenge von  $T$  injektiv.  $S$  bildet also Fixpunkte von  $T$  injektiv auf Fixpunkte von  $T$  ab.  $\square$

**Satz 10.7.** *Seien  $T, S \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \setminus \{\mathrm{id}\}$ . Dann kommutieren  $T$  und  $S$  genau dann, wenn die Fixpunktmenge übereinstimmen.*

*Beweis.* Gelte zunächst  $TS = ST$ . Dann bildet nach Proposition 10.6 die Abbildung  $ST$  die Fixpunktmenge von  $T$  injektiv auf die Fixpunktmenge von  $T$  ab. Da diese nach Satz 10.3 endlich ist, wirkt  $ST$  auch surjektiv auf dieser Menge. Analog wirkt  $TS$  sowohl injektiv, als auch surjektiv auf der Fixpunktmenge von  $S$ . Dann gilt aber direkt  $\# \mathrm{Fix}(S) = \# \mathrm{Fix}(T)$ . Aus Satz 10.3 folgt nun auch, dass wir nur die beiden Fälle ein bzw. zwei Fixpunkte überprüfen müssen. Gelte also zunächst  $\# \mathrm{Fix}(S) = 1$ . Sei  $p$  der Fixpunkt von  $S$ , dann ist nach Proposition 10.6  $T\langle p \rangle$  auch ein Fixpunkt von  $S$  und da nur ein Fixpunkt existiert, gilt  $p = T\langle p \rangle$ . Also ist  $p$  auch der einzige Fixpunkt von  $T$  und die Fixpunktmenge stimmen überein.

Lieben zwei Fixpunkte vor, so ist  $T$  (und auch  $S$ ) parabolisch und nach Lemma 10.5 existiert ein  $C \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , so dass

$$\tilde{T} = CTC^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

für ein  $\lambda > 0$  gilt. Setzen wir

$$\tilde{S} = CSC^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so folgt aus  $ST = TS$  auch  $\tilde{S}\tilde{T} = \tilde{T}\tilde{S}$ . Diese Gleichung liefert uns  $\lambda^{-1}c = \lambda c$  und  $\lambda^{-1}b = \lambda b$ . Da  $T \neq \text{id}$  ist, gilt  $\lambda \neq 1$  und wir erhalten  $b = c = 0$  und es folgt  $a = d^{-1}$ . Also erhalten wir

$$\text{Fix}(\tilde{S}) = \{0, \infty\} = \text{Fix}(\tilde{T}).$$

Nach Rücktransformation folgt die Aussage für  $S$  und  $T$ .

Gelte nun  $\text{Fix}(S) = \text{Fix}(T)$ , so stimmen die Typen von  $S$  und  $T$  überein weiterhin finden wir nach Lemma 10.5 ein  $C \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , so dass  $CSC^{-1}$  und  $CTC^{-1}$  gemeinsam eine der Formen aus dem obigen Lemma annehmen. Nun haben wir aber im elliptischen Fall Rotationen und die Gruppe der Rotationen im  $\mathbb{R}^2$  ist kommutativ. Im parabolischen Fall handelt es sich um Translationen und diese bilden auch eine kommutative Gruppe. Der hyperbolische Fall liefert Diagonalmatrizen, diese kommutieren immer mit allen anderen Matrizen, kommutieren also insbesondere untereinander. Aus der Kommutativität von  $CSC^{-1}$  und  $CTC^{-1}$  folgt dann direkt die Kommutativität von  $S$  und  $T$ .  $\square$

**Satz 10.8.** *Sei  $G \leq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  eine Fuchssche Gruppe. Dann ist  $G$  genau dann abelsch, wenn  $G$  zyklisch ist.*

*Beweis.* Falls  $G$  zyklisch ist, ist  $G$  klarerweise kommutativ. Betrachten wir also den Fall, dass  $G$  kommutativ ist. Nach Satz 10.7 sind die Fixpunktmenngen aller Elemente aus  $G$  identisch. Sie haben also alle den gleichen Typ.

Betrachten wir zunächst den elliptischen Fall. Dann können alle Elemente von  $G$  durch Konjugation mit einem festen  $C \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  auf die Form

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Betrachten wir nun die Abbildungen von  $G$  als lineare Abbildungen auf  $\mathbb{R}^2$ , so stellen wir nach Identifizierung mit  $\mathbb{C}$  fest, dass es sich bei den Rotationen einfach nur um Multiplikation mit  $e^{i\varphi}$  handelt. Wir können also  $G$  mit einer diskreten Untergruppe von  $S^1$  identifizieren. Angenommen diese Untergruppe wäre nicht zyklisch. Dann gäbe es  $\varphi \neq \psi \in \mathbb{R}$ , so dass  $e^{in\varphi} \neq e^{im\psi}$  für beliebige  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Nun wissen wir aber nach Lemma 9.5, dass eine nichttriviale additive Untergruppe von  $\mathbb{R}$  ein Gitter sein muss, d.h. die additive Untergruppe  $L := \{n\varphi + m\psi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$  kann nicht diskret sein. Weiterhin ist die Abbildung

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

stetig, also kann auch  $p(L) \leq G$  nicht diskret sein. Ein Widerspruch. Also muss ein  $\varphi \in \mathbb{R}$  existieren, so dass

$$G \cong \{e^{in\varphi} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

gilt. Damit ist  $G$  zyklisch.

Gehen wir nun zum parabolischen Fall über, so können wir alle Elemente von  $G$  durch Konjugation mit einem festen  $C \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

bringen, wobei  $b \in \mathbb{R}$  gilt. Hier erhalten wir direkt einen Homöomorphismus von der Menge der Matrizen der Form (15) nach  $\mathbb{R}$ , in dem wir einfach die Komponente  $b$  auswählen. Es ist also das Bild von  $G$  unter diesem Homöomorphismus eine diskrete, abelsche Untergruppe von  $\mathbb{R}$ . Nun wissen wir aber nach Lemma 9.5, dass die nichttrivialen diskreten, abelschen Untergruppen von  $\mathbb{R}$  Gitter und damit (im eindimensionalen Fall) zyklisch sind. Also ist auch  $G$  zyklisch.

Wenden wir uns dem letzten Fall zu. Seien also alle Elemente von  $G$  hyperbolisch. Dann finden wir erneut ein festes  $C \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , das alle Element von  $G$  auf die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

bringt. Auch hier finden wir einen Homöomorphismus von den Matrizen der Form (16) nach  $\mathbb{R}_{>0}$ , in dem wir die Matrizen auf  $\lambda^2$  abbilden. Da es sich tatsächlich um einen Homöomorphismus handelt, folgt aus der Tatsache, dass wir das Vorzeichen von  $\lambda$  nach Definition von  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  vernachlässigen können. Nun können wir aber  $\mathbb{R}_{>0}$  durch  $\log$  homöomorph auf  $\mathbb{R}$  abbilden. Also finden wir wieder eine abelsche, diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}$ . Diese ist wieder zyklisch und da wir nur mit Gruppenisomorphismen gearbeitet haben, folgt direkt auch, dass  $G$  zyklisch sein muss.  $\square$

## 11 Uniformisierung kompakter Riemannscher Flächen

Wir nähern uns dem eigentlichen Ziel dieser Arbeit. Am Ende dieses Kapitels wird der Uniformisierungssatz für kompakte Riemannsche Flächen stehen. Bevor es jedoch so weit ist, müssen wir noch einige Eigenschaften von Decktransformationen zusammentragen. Zum einen werden wir sehen, dass genau die Fuchsschen Gruppen die möglichen Decktransformationsgruppen der oberen Halbebene darstellen, weiterhin wird klar werden, dass  $\mathbb{P}^1$  nur sich selbst überlagert. Zu guter letzt müssen wir auch noch die Fundamentalgruppe der Riemannschen Flächen mit Geschlecht 1 bestimmen, dazu müssen wir einen Satz zur Charakterisierung kompakter, orientierbarer topologischer Flächen importieren.

Nach diesen letzten technischen Spielereien sind wir dann endlich in der Lage aus dem Riemannschen Abbildungssatz unseren Uniformisierungssatz herzuleiten.

**Lemma 11.1.** *Seien  $X$  eine Riemannsche Fläche,  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  die Universelle Überlagerung und  $G = \text{Deck}(X/\tilde{X}) \leq \text{Aut}(\tilde{X})$ . Dann gelten:*

1. *Für beliebige  $\sigma \in G \setminus \{\text{id}\}$  gilt, dass  $\sigma(x) \neq x$  für alle  $x \in \tilde{X}$ .*
2. *Für alle  $x \in \tilde{X}$  ist der Orbit  $Gx := \{\sigma(x) \mid \sigma \in G\}$  diskret.*

*Beweis.* 1. Jede Decktransformation ist eindeutig durch einen Punkt bestimmt. Dies folgt aus der Eindeutigkeit für das liften von Abbildungen (vgl. [For99, Satz 4.8]). Das bedeutet aus  $\sigma(x) = x$  für ein  $x \in \tilde{X}$ , folgt bereits  $\sigma = \text{id}$ .

2. Nach [For99, Satz 5.6] ist  $\text{Deck}(\tilde{X}/X)$  galoisch und es folgt  $Gx = p^{-1}(p(x))$ . Die Aussage folgt nun, da die Faser von  $p(x)$  diskret ist.

□

**Lemma 11.2.** 1. *Jeder Automorphismus von  $\mathbb{P}^1$  hat einen Fixpunkt.*

2. *Sei  $G \leq \text{Aut}(\mathbb{C})$  eine diskret operierende Gruppe ohne Fixpunkte. Dann ist  $G$  eine der folgenden Gruppen*

- a)  $G = \{\text{id}\}$ ,
- b)  $G = \{z \mapsto z + n\gamma \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , wobei  $\gamma \in \mathbb{C}^\times$  liegt oder
- c)  $G = \{z \mapsto z + n\gamma_1 + m\gamma_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , wobei die  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^\times$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  sind.

*Beweis.* 1. Sei  $f \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Dann ist nach Satz 9.4  $f(z) = M\langle z \rangle$  mit  $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ . Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Falls  $c \neq 0$ , so erhalten wir als Fixpunkte

$$z_{1,2} = \frac{a}{2c} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4c^2} - \frac{d-b}{c}}$$

Falls  $c = 0$ , so muss  $a \neq 0$  gelten, ansonsten hätte  $M$  nicht vollen Rang und wir erhalten als Fixpunkt

$$z = \frac{d-b}{a}.$$

2. Sei  $f \in G \leq \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Nach Satz 9.4 existieren  $a \in \mathbb{C}^\times$  und  $b \in \mathbb{C}$  mit  $f(z) = az + b$ . Sei nun  $f \neq \text{id}$ . Angenommen es gälte  $a \neq 1$ , dann wäre  $w = \frac{b}{1-a}$  ein Fixpunkt von  $f$ , allerdings operiert  $G$  nach Voraussetzung fixpunktfrei. Also muss  $a = 1$  gelten. Also ist  $f(z) = z + b$ . Definieren wir  $\Gamma := \{f(0) \mid f \in G\}$ , so ist  $\Gamma$  eine additive, diskrete Untergruppe von  $\mathbb{C}$ . Nun können alle reellen (Unter-)vektorräume  $V \subset \mathbb{C}$  die Dimension 0, 1 oder 2 besitzen und  $\Gamma$  ist in einem dieser drei Typen so enthalten, dass es in keinem echten Untervektorraum liegt. Aus Lemma 9.5 erhalten wir also, dass  $\Gamma = \{0\}$ ,  $\Gamma = \{n\gamma \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , wobei  $\gamma \in \mathbb{C}^\times$  oder  $\Gamma = \{n\gamma_1 + m\gamma_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , wobei die  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^\times$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  sind, gilt. Nun ist aber  $G = \{z \mapsto z + b \mid b \in \Gamma\}$ . Dies liefert die Behauptung.  $\square$

Bevor wir uns unserem Hauptresultat widmen können, müssen wir noch einen Satz aus der Topologie importieren.

**Satz 11.3.** *Seien  $X$  und  $Y$  kompakte Riemannsche Flächen mit Geschlechtern  $g$  und  $h$ . Dann sind  $X$  und  $Y$  genau dann homöomorph, wenn  $g = h$  ist.*

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [Jos06, Korollar 2.4.A.2]  $\square$

**Bemerkung 11.4.** Dieser Satz gilt noch deutlich allgemeiner als hier aufgeführt, allerdings muss man sich dann über die Definition des Geschlechts Gedanken machen, da wir für unsere Definition auf die komplexe Struktur zurückgegriffen haben. Allgemein kann das Geschlecht aber bereits für beliebige kompakte topologische Mannigfaltigkeiten definiert werden.

**Korollar 11.5.** *Sei  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  ein Gitter und  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht 1. Dann sind  $X$  und  $\mathbb{C}/\Gamma$  homöomorph.*

*Beweis.* Nach Korollar 1.18 hat der Torus Geschlecht 1. Aus Satz 11.3 folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 11.6.** *Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht  $g = 1$ . Dann ist die Fundamentalgruppe von  $X$  isomorph zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Nach Korollar 11.5 ist  $X$  homöomorph zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  für ein beliebiges Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ . Nun ist aber die Fundamentalgruppe eine topologische Invariante, d.h. es gilt  $\pi_1(X) \cong \pi_1(\mathbb{C}/\Gamma)$ . Weiterhin ist die Universelle Überlagerung zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  durch  $\mathbb{C}$  gegeben und es gilt  $\pi_1(\mathbb{C}/\Gamma) \cong \text{Deck}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}/\Gamma)$ . Die Decktransformationsgruppe ist aber gerade durch Translationen um Elemente aus  $\Gamma$  gegeben und  $\Gamma$  ist klarerweise isomorph zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Insgesamt erhalten wir also, dass  $\pi_1(X)$  isomorph zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist.  $\square$

Nun haben wir das Handwerkszeug zusammen, um unser zentrales Resultat zu beweisen.

**Satz 11.7.** *Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und bezeichne  $g$  ihr Geschlecht. Dann gelten:*

1. *Ist  $g = 0$ , so ist  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{P}^1$ .*
2. *Ist  $g = 1$ , so existiert ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ , so dass  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  ist.*
3. *Ist  $g \geq 2$ , so existiert eine Untergruppe  $G \leq \text{Aut}(\mathbb{H})$ , so dass  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{H}/G$  ist.*

*Beweis.* Der erste Fall ergibt sich direkt aus dem Satz von Riemann-Roch [For99, Kor. 16.13]. Sei nun also  $g \geq 1$  und bezeichne  $\tilde{X}$  die Universelle Überlagerung von  $X$ . Dann ist  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend und aus dem Riemannschen Abbildungssatz 8.12 folgt, dass  $\tilde{X}$  konform äquivalent zu  $\mathbb{P}^1$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  ist. Da wir wissen, dass  $\mathbb{H}$  konform äquivalent zu  $\mathbb{H}$  ist, können wir in der Betrachtung genau so gut  $\mathbb{H}$  verwenden. Nun wissen wir nach Lemma 11.2, dass jeder Automorphismus von  $\mathbb{P}^1$  einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt keine fixpunktfrei operierende Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ . Also überlagert  $\mathbb{P}^1$  nur sich selbst, also müsste  $X \cong \tilde{X} \cong \mathbb{P}^1$  gelten. Dies ist ein Widerspruch zu  $g \neq 0$ . Also ist die Universelle Überlagerung von  $X$  entweder  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ .

Sei nun  $g \geq 2$ . Angenommen  $\tilde{X} \cong \mathbb{C}$ . In Lemma 11.2 wurden alle diskreten, fixpunktfreiooperierenden Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  bestimmt. Die zugehörigen Riemannschen Flächen sind dann  $X \cong \mathbb{C}$ ,  $X \cong \mathbb{C}^\times$  oder  $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ . Nun sind aber die ersten beiden Möglichkeiten nicht kompakt und die Dritte hat Geschlecht  $g = 1$ . Ein Widerspruch. Also muss die Universelle Überlagerung von  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{H}$  sein und damit ist  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{H}/G$  für eine Untergruppe  $G \leq \text{Aut}(\mathbb{H})$ .

Nun fehlt noch der Fall  $g = 1$ . Angenommen  $\tilde{X} \cong \mathbb{H}$ . Wir wissen aus Satz 11.6, dass

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong G := \text{Deck}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}/\Gamma) \leq \text{Aut}(\mathbb{H}) \quad (17)$$

gelten müsste. Insbesondere müssten wir eine abelsche Fuchsische Gruppe finden, allerdings wissen wir nach Satz 10.8, dass diese alle zyklisch sind. Damit ist  $G$  also isomorph zu  $\mathbb{Z}$  oder zu  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dies ist ein Widerspruch dazu, dass Gleichung (17) gelten soll. Also ist die Universelle Überlagerung von  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{C}$ . Die Gruppe der Decktransformation ist also eine diskrete abelsche Untergruppe von  $\mathbb{C}$  und muss isomorph zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sein. In Lemma 11.2 sind die möglichen diskreten Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  charakterisiert und die einzige Möglichkeit, die isomorph zu  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist, ist die des Gitters. Also ist die  $\text{Deck}(\tilde{X} \setminus X)$  isomorph zu einem Gitter  $\Gamma \subset \mathbb{C}$ . Insgesamt erhalten wir, dass  $X$  konform äquivalent zu  $\mathbb{C}/\Gamma$  ist.  $\square$

## **Literatur**

- [For99] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1999.
- [Fre06] Eberhard Freitag. *Funktionentheorie 1*. Springer, 2006.
- [Jam74] Graham J. O. Jameson. *Topology and Normed Spaces*. Chapman und Hall Ltd., 1974.
- [Jos06] Jürgen Jost. *Compact Riemann Surfaces*. Springer, 2006.
- [Kas] Hendrik Kasten. *Funktionentheorie 1. Sommersemester 2013*.
- [Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.