1 Der Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir den zentralen Satz der Bachelor-Arbeit beweisen: den Riemannschen Abbildungssatz. Er charakterisiert alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen und besagt, dass es bis auf Biholomorphie nur drei verschiedene gibt: die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$, die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ und die Einheitskreisscheibe B.

Später werden wir dieses Resultat im Zusammenhang mit der Überlagerungstheorie verwenden, denn hier besagt das Resultat nichts anderes, als dass es nur drei mögliche Universelle Überlagerungen zu jeder beliebigen Riemannschen Fläche gibt. Das erleichtert deren Untersuchung natürlich ungemein.

Zu Beginn des Kapitels werden einige Hilfssätze bewiesen, bevor wir am Ende dann die Früchte unserer Arbeit ernten können.

Zunächst einmal beweisen wir den Riemannschen Abbildungssatz nicht direkt für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, sondern für Riemannschle Flächen mit verschwindender holomorpher deRham Gruppe (vgl. 1.2). Wie wir aber am Ende sehen werden ist dies keine Einschränkung, allerdings müssen wir erst ein paar Eigenschaften für diese Riemannschen Flächen zusammentragen.

Der restliche Teil dieses Kapitels besteht dann darin Funktionenfolgen zu konstruieren, die schlussendlich gegen unsere gesuchte biholomorphe Funktion konvergieren.

Definition 1.1.

$$\begin{aligned} B_\infty(0) &:= \mathbb{C} \\ B &:= B_1(0) \end{aligned}$$

Definition 1.2. Sei X eine Riemannsche Fläche, dann heißt

$$Rh^1_{\mathcal{O}}(X) := \Omega(X)/\,\mathrm{d}\,\mathcal{O}(X)$$

holomorphe deRham Gruppe.

Lemma 1.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Dann gilt:*

1. *Zu jeder holomorphen Funktionen $f : X \to C^*$ existieren $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $e^g = f$ und $h^2 = f$.*
2. *Zu jeder harmonischen Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ existiert ein $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $u = \Re(f)$.*

Beweis. 1. Es gilt $f^{-1}\,\mathrm{d}\,f \in \Omega(X)$ und da $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$ finden wir ein $g \in \mathcal{O}(X)$ mit $\mathrm{d}\,g = f^{-1}\,\mathrm{d}\,f$.
Wir können annehmen, dass ein $a \in X$ existiert mit $e^{g(a)} = f(a)$, ansonsten betrachten wir $g+$ const. Weiterhin erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(fe^{-g}) &= \mathrm{d}(f)e^{-g} + fe^{-g}(-1)f^{-1}\,\mathrm{d}\,f \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist fe^{-g} ≡const und aus $f(a)e^{-g(a)} = 1$ erhalten wir:

$$f = e^g$$

Damit ist der erste Teil der Aussage gezeigt. Für den zweiten setzen wir nun einfach

$$h := e^{\frac{g}{2}}$$

2. Nach (19.4) [1] existiert genau ein $\omega \in \Omega(X)$, so dass $\mathrm{d}\,u = \Re(\omega)$ gilt. Da nun wieder $\Omega(X) = \mathrm{d}\,\mathcal{O}(X)$ ist erhalten wir zunächst $\mathrm{d}\,g = \omega$ für ein $g \in \mathcal{O}(X)$ und daraus weiterhin: $\mathrm{d}\,u = \Re(\mathrm{d}\,g)$. Insgesamt erhalten wir:

$$u = \Re(g) + \text{const.}$$

□

Satz 1.4. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und $Y \Subset X$ ein Gebiet mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$ und regulärem Rand.*
Dann existiert eine biholomorphe Abbildung auf den Einheitskreis B.

Beweis. Sei $a \in Y$. Nach Weierstrass **??** existiert ein $g \in \mathcal{O}(X)$, das eine Nullstelle erster Ordnung bei a besitzt und ansonsten $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$ gilt.
Nach Satz **??** existiert ein stetiges $u : \bar{Y} \to \mathbb{R}$, s.d. $u|_Y$ harmonisch ist und

$$u(y) = \log(g(y)) \qquad \forall y \in \partial Y$$

erfüllt.
Nach Lemma 1.3 existiert ein $h \in \mathcal{O}(Y)$ mit $u = \Re(h)$.
Wir setzen nun $f := e^{-h}g \in \mathcal{O}(Y)$ und behaupten $f : Y \to B$ ist biholomorph.

- $f(Y) \subset B$: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |f(y)| &= |e^{-h(y)}| \cdot |g(y)| \\ &= e^{-u(y)} e^{\log(|g(y)|)} \\ &= \exp(\log|g(y)| - u(y)) \end{aligned}$$

  Daran erkennen wir, dass $|f|$ auf $\bar{Y}$ fortgesetzt werden kann und dort nach Konstruktion konstant den Wert 1 annimmt. Da f eine holomorphe Funktion ist werden Extrema auf dem Rand angenommen und da f weiterhin nicht konstant ist ($f(a) = 0$) erhalten wir aus dem Maximum-Prinzip:

$$|f(y)| < 1 \qquad \forall y \in Y$$

  und damit $f(Y) \subset B$.

[1] Jede harmonische 1-Form ist Realteil von genau einer holomorphen 1-Form

- f ist eigentlich: Sei $0 < r < 1$ und $Y_r := f^{-1}(\overline{B_r(0)})$.
  Dann ist Y_r kompakt als abgeschlossene Teilmenge von $\bar{Y}$.

- f ist biholomorph: f nimmt jeden Wert gleich häufig an, da es sich um eine eigentlich Abbildung handelt. Weiterhin wird 0 genau einmal angenommen. Also ist $f : Y \to B$ bijektiv und holomorph. Das genügt bereits, um zu zeigen, dass f biholomorph ist.

□

Proposition 1.5. *Sei $f : B_r(0) \to B_{r'}(0)$ holomorph. Dann gilt: $|f'(0)| \leq \frac{r'}{r}$*

Beweis. Unter Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|f'(0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}\,z\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{f(re^{2\pi it})}{r^2e^{4\pi it}}r2\pi ie^{2\pi it}\,\mathrm{d}\,t\right| \\
&\leq \int_0^1\frac{|f(re^{2\pi it})|}{r}\,\mathrm{d}\,t \\
&\leq \frac{r'}{r}\int_0^1\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{r'}{r}
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.6. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C}\setminus G$ einen inneren Punkt besitzt. Sei $\omega_0 \in G$. Dann ist*

$$\{f \in \mathcal{O}(B) : f(B) \subset G \text{ und } f(0) = \omega_0\} \tag{$*$}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{O}(B)$ bzgl. der Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

Beweis. Sei $a \in (\mathbb{C} \overset{\circ}{\setminus} G)$ und wir bezeichnen die Menge in ($*$) mit M.
Behauptung: $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ bildet G biholomorph auf ein Teilgebiet eines $B_r(0)$, $\quad r < \infty$ ab.
$d :=$ dist$(\{a\}, G) > 0$ existiert, da $a \notin \bar{G}$, denn a ist ein innerer Punkt von $\mathbb{C}\setminus G$. Deshalb folgt:

$$\left|\frac{1}{z-a}\right| < \frac{1}{d} \qquad \forall z \in G$$

Also sind die $f \in M$ gleichmäßig beschränkt und aus dem Satz von Montel folgt M ist kompakt.

□

Definition 1.7. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller injektiven holomorphen Funktionen $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Lemma 1.8. *Sei $f \in \mathcal{S}$.*
Dann existiert ein maximales $r \geq 0$, so dass $B_r(0) \subseteq f(B)$.

Beweis. Sei $M := \{r \geq 0 | B_r(0) \subseteq f(B)\}$ und $r \in M$. Da f injektiv und holomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion $\varphi : B_r(0) \to B$ mit $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{B_r(0)}$ und $\varphi'(0) = 1$. Damit wissen wir aber

$$1 = \varphi'(0) \leq \frac{1}{r}$$

Also ist $r \leq 1$ und somit M beschränkt. Setzen wir nun $\tilde{r} := \sup M$, so müssen wir noch zeigen, dass $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$.
Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $r_n \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{r}$ und $z \in B_{\tilde{r}}(0)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $z \in B_{r_n}(0) \subseteq f(B)$ und erhalten somit direkt $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$. □

Satz 1.9. *$\mathcal{S}$ ist kompakt in $\mathcal{O}(B)$.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$.
Nach Lemma 1.8 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein maximales $r_n \geq 0$ mit $B_{r_n}(0) \subseteq f_n(B)$. Setzen wir wieder $\varphi_n := f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B$ so erhalten wir $1 = |\varphi'(0)| \leq \frac{1}{r_n}$ und damit $r_n \leq 1$.
Sei $a_n \in \partial B_{r_n}(0)$, so dass $a_n \notin f_n(B)$. Dies ist aufgrund der Maximalität von r_n immer möglich. Damit definieren wir nun $g_n := \frac{f_n}{a_n}$. Wir erhalten $B \subseteq g_n(B)$ und

$$1 \notin g_n(B) \tag{$*$}$$

Nun ist $g_n(B)$ über g_n homöomorph zu B, also einfach zusammenhängend. Dies hat zur Folge dass $Rh^1_{\mathcal{O}}(g_n(B))$ verschwindet.
Nach Lemma 1.3 existiert ein $\psi : g_n(B) \to \mathbb{C}^*$ mit $\psi(0) = i$ und $\psi^2(z) = z - 1 \quad \forall z \in g_n(B)$.
Definiere $h_n := \psi \circ g_n$, also $h_n^2 = g_n - 1$.
Behauptung: $w \in h_n(B) \Rightarrow -w \notin h_n(B)$.
Angenommen: es existierten $z_1, z_2 \in B$ mit $h_n(z_1) = w$ und $h_n(z_2) = -w$, dann hätten wir

$$\begin{aligned} g_n(z_1) &= h_n^2(z_1) + 1 \\ &= w^2 + 1 \\ &= (-w)^2 + 1 \\ &= h_n^2(z_2) + 1 \\ &= g(z_2) \end{aligned}$$

Da nun g aber injektiv ist folgt $z_1 = z_2$ und damit $w = 0$. Wir erhalten $g(z_1) = 1$ ein Widerspruch zu Gleichung ($*$).
Desweiteren führt $B \subseteq g_n(B)$ zu $U := \psi(B) \subseteq \psi(g_n(B)) = h_n(B)$. Also $(-U) \cap h_n(B) = \varnothing$.
Wir definieren $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n(B)$ und behaupten zunächst: G ist ein Gebiet.
Nach dem Satz über die Gebietstreue sind alle $h_n(B)$ offen und somit auch G. Es bleibt also zu zeigen, dass G zusammenhängend ist. Da wir uns in $\mathbb{C}$ befinden fallen die Begriffe des Zusammenhangs und des Wegzusammenhangs zusammen und wir zeigen, dass G wegzusammenhängend ist.

Seien dazu $z, w \in G$. Dann existieren $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, so dass $z \in h_n(B)$ und $w \in h_{\tilde{n}}(B)$. Weiterhin ist $h_l(0) = i \quad \forall l \in \mathbb{N}$, d.h. $i \in h_l(B) \quad \forall l \in \mathbb{N}$. Nun sind die $h_l(B)$ Gebiete nach dem Satz über die Gebietstreue, also finden wir zwei stetige Kurven $c_1 : I \to h_n(B)$ und $c_2 : I \to h_{\tilde{n}}(B)$ mit $c_1(0) = z$, $c_1(1) = i$, $c_2(0) = i$ und $c_2(1) = w$. Definieren wir nun:

$$c : I \to G, \quad c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

so finden wir eine Kurve in G mit $c(0) = z$ und $c(1) = w$. Damit ist G wegzusammenhängend, also ein Gebiet.
Weiterhin gilt $G \cap -U = \varnothing$, da $h_n(B) \cap -U = \varnothing$. Also besitzt das Komplement von G innere Punkte. Schlußendlich verwenden wir noch, dass $h_n(0) = i$ ist und erhalten, dass Lemma 1.6 anwendbar ist. $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt demnach eine konvergente Teilfolge. Aufgelöst nach $f_n = a_n(1 + h_n^2)$ mit $|a_n| \leq 1$ erhalten wir also eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} f : B \to \mathbb{C}$$

Dann ist f klarerweise holomorph und es gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, also ist f insbesondere nicht konstant.
Zu zeigen bleibt nun nur noch die Injektivität von f.
Nehmen wir also an f ist nicht injektiv. Dann existiert ein $a \in \mathbb{C}$, so dass $f - a$ mindestens zwei Nullstellen besitzt. Nun können wir einen Radius $r < 1$ finden, so dass $f - a$ mindestens $k \geq 2$ Nullstellen besitzt und auf $\partial B_r(0)$ nicht verschwindet. [2] Unter Verwendung des Null- und Polstellenzählenden Integrals erhalten wir:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{z=|r|} \frac{f'(z)}{f(z) - a} \,\mathrm{d}\, z$$

Aber das Integral ist stetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, d.h. insbesondere, dass für jedes f_{n_l} nahe genug an f das Integral auch k ergeben müsste. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität der f_{n_l}, also ist f auch injektiv.
Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Lemma 1.10. *Sei $R \in]0, \infty]$, $Y \subsetneq B_R(0)$ ein Gebiet, $0 \in Y$ und $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$.*
Dann existiert ein $0 < r < R$ und eine holomorphe Funktion $f : Y \to B_r(0)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Beweis. **Fall 1:** $R < \infty$: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $Y \subsetneq B$, ansonsten betrachten wir $\tilde{Y} = \frac{Y}{R}$.
Nach Voraussetzung existiert ein $a \in B \setminus Y$. Wir betrachten

$$\varphi : B \to B, \quad \varphi(z) := \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

[2] Könnten wir kein solches r finden, wäre $f - a$ bereits konstant Null nach dem Identitätssatz.

Es folgt $0 \notin \varphi(Y)$. Nach Lemma 1.3 existiert ein $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $g^2 = \varphi|_Y$. Also ist $g(Y) \subseteq B$.
Wir definieren nun eine weitere Hilfsfunktion

$$\psi(z) := \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \qquad b := g(0)$$

Zusammen mit g ergibt dies unsere letzte Hilfsfunktion $h := \psi \circ g : Y \to B$ mit $h(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\gamma := h'(0) &= \psi'(b)g'(0) \\ &= \psi'(b) \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\ &= \frac{1}{1-|b|^2} \frac{1-|a|^2}{2b} \\ &= \frac{1+|b|^2}{2b}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $|\gamma| > 1$.[3] Setzen wir nun $r := \frac{1}{\gamma} < 1 = R$ und $f := \frac{h}{\gamma}$ haben wir die gewünschte Funktion gefunden.

Fall 2: $R = \infty$: Nach Voraussetzung existiert ein $a \in \mathbb{C} \setminus Y$. Wir betrachten

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = z - a$$

Nun gilt aber $0 \notin \varphi(Y)$. Nach Lemma 1.3 existiert ein $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $g^2 = \varphi|_Y$. Völlig analog zum Beweis von Satz 1.9 erhalten wir für $w \in g(Y)$, dass $-w \notin g(Y)$.
g ist nicht konstant und damit eine offene Abbbildung. Sei $b \in g(Y)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, s.d. $B_\varepsilon(b) \subseteq g(Y)$. Da nun für $w \in g(Y)$ $-w \notin g(Y)$, gilt insbesondere $g \notin B_\varepsilon(b)$. Also gilt:

$$|-w-b| = |w+b| \geq r$$

D.h. wir können

$$\psi : g(Y) \to \mathbb{C}, \quad \psi(w) = \frac{1}{w+b}$$

definieren. Dann ist ψ holomorph und es gilt $|\psi(w)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ für jedes $w \in g(Y)$.
Damit können wir eine holomorphe Abbildung $\tilde{\psi} : Y \to B$ finden. Setzen wir nun noch $c := \tilde{\psi}(0)$ und betrachten

$$\eta : B \to B, \quad \eta(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$$

[3] Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)$ nimmt bei $x = 1$ ihr striktes Minimum an und ist für $x < 1$ echt größer als 1.

so können wir $\tilde{f} := \eta \circ \tilde{\psi} : Y \to D$ definieren mit den Eigenschaften: $\tilde{f}(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(0) &= \eta'(c) \cdot \tilde{\psi}'(0) \\
&= \frac{1}{1-|c|^2} \cdot r \cdot \psi'(g(0)) \cdot g'(0) \\
&= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\
&= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{1}{2g(0)} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Das heißt nach dem gleichen Skalierungsargument, wie im ersten Fall erhalten wir eine holomorphe Abbildung $f : Y \to B_r(0)$, wobei $r < R = \infty$.

□

Lemma 1.11. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0, Y \subseteq X$ ein Runge-Gebiet.*
Dann gilt $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega(Y)$ nach Korollar **??** existiert ein $w_0 \in \Omega(X)$ ohne Nullstellen. Daher existiert ein $f \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\omega = f\omega_0$.
Der Runge Approximationssatz besagt nun, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(X)$ existiert, so dass $f_n \to f$ kompakt auf Y konvergiert.
Sei nun α eine beliebige geschlossene Kurve in Y. Dann gilt:

$$0 = \int_\alpha f_n\omega_0 \xrightarrow{n\to\infty} \int_\alpha \omega$$

Also verschwindet $\int_\alpha \omega$ für jede geschlossene Kurve. Demnach besitzt ω nach (10.15) eine Stammfunktion und damit verschwindet $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y)$. □

Satz 1.12 (Der Riemannsche Abbildungssatz). *Sei X eine Riemannsche Fläche mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Dann ist X entweder konform äquivalent*

1. *zur Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$,*
2. *zur Komplexen Ebene $\mathbb{C}$ oder*
3. *zur Einheitskreisscheibe B.*

Beweis. **Fall 1: X ist kompakt:** Dann wissen wir zunächst, dass $\mathrm{d}\,\mathcal{O}(X) = 0$ und damit auch $\Omega(X) = 0$. Nun liefert uns der Serresche Dualitätssatz, dass $H^0(X,\Omega) \cong H^1(X,\mathcal{O})^*$. Da nun immer $\Omega(x) \cong H^0(X,\Omega)$ gilt und im kompakten Fall $H^1(X,\mathcal{O})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, erhalten wir

$$H^1(X,\mathcal{O}) \cong H^1(X,\mathcal{O})^* = 0$$

Also ist das Geschlecht unserer kompakten Riemanschen Fläche 0 und aus dem Satz von Riemann-Roch erhalten wir, dass X konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$ ist.

Fall 2: X ist nicht kompakt: Nach (23.9) existiert dann eine Ausschöpfung $Y_0 \Subset Y_1 \Subset Y_2 \Subset \dots$ von X, wobei die Y_i Rungegebiete mit regulärem Rand.
Nach Lemma 1.11 gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y_i) = 0$. Aus Satz 1.4 erhalten wir, dass die Y_i konform äquivalent zu B sind.
Sei $a \in Y_0$ und (U, z) eine Koordinatenumgebung von a. Dann existieren $r_n < 0$ und eine biholomorphe Abbildung $f_n : Y_n \to B_{r_n}(0)$ mit $f_n(a) = 0$ und $\frac{\mathrm{d} f_n}{\mathrm{d} z}(a) = 1$, denn betrachten wir die Abbildung $\tilde{f}_n : Y_n \to B$ die nach Satz 1.4 existiert und die Abbildung

$$\varphi : B \to B, \quad \varphi_n(z) := \frac{z - \tilde{f}_n(a)}{1 - z\overline{\tilde{f}_n(a)}},$$

so erhalten wir zunächst $\bar{f}_n := \varphi_n \circ \tilde{f}_n$. Diese erfüllt $\bar{f}_n : Y_n \to B$ und $\bar{f}_n(a) = 0$. Setzen wir nun $r_n^{-1} := \left|\frac{\mathrm{d}\, \bar{f}(a)}{\mathrm{d}\, z}\right|$ und $f_n := r_n \cdot \bar{f}_n : Y_n \to B_{r_n}(0)$, so haben wir die gewünschte Abbildung gefunden.
Weiterhin gilt $r_n \leq r_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn $h : f_{n+1} \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B_{r_{n+1}}(0)$ erfüllt $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$, also $1 = |h'(0)| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}$ nach Proposition 1.5.
Wir setzen nun

$$R := \lim_{n\to\infty} r_n \in]0, \infty]$$

Behauptung: X wird biholomorph auf $B_R(0)$ abgebildet. Dazu betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir behaupten, dass eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass für beliebige $m \in \mathbb{N}$ $(f_{n_k}|_{Y_m})_{k\geq m}$ kompakt auf Y_m konvergiert.
Dazu definieren wir $g_n(z) := \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z))$ für alle $n \geq 0$. Damit sind die $g_n : B \to \mathbb{C}$ injektive holomorphe Funktionen mit $g_n(0) = 0$ und $g_n'(0) = 1$, also $g_n \in \mathcal{S}$ und aus Satz 1.9 erhalten wir eine konvergente Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Teilfolge gibt uns direkt eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{0k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Wenden wir die gleiche Konstruktion nun auf $\frac{1}{r_1} f_{n_{0k}}(f_1^{-1}(r_1 z))$ erahlten wir eine Teilfolge $f_{n_{1k}}$. Induktiv erhalten wir so zu jedem Y_m eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{mk}})$.
Setzen wir $f_{n_k} := f_{n_{kk}}$, so erhalten wir die gewünschte Teilfolge. Sei $f \in \mathcal{O}(X)$ der Grenzwert von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann können wir analog zum Beweis von Satz 1.9 zeigen, dass f injektiv ist und $f(a) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}\, f(a)}{\mathrm{d}\, z} = 1$ genügt.
Behauptung: f bildet X biholomorph auf $B_R(0)$ ab.
Zunächst folgt aus $|f_{n_k}(x)| < r_{n_k}$ für beliebige $x \in X$ und $k \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $|f(x)| \leq R$. Da f holomorph und nicht-konstant, also eine offene Abbildung ist erhalten wir direkt, dass $f(x) \subset B_R(0)$. Ansonsten gäbe es ein $z \in f(x)$ mit $z \in \partial B_R(0)$. Dieses z kann aber kein innerer Punkt von $f(B)$ sein. Ein Widerspruch.
Es bleibt also nur noch die Surjektivität zu zeigen.
Angenommen f wäre nicht surjektiv. Dann existiert nach Lemma 1.10 ein $0 < r < R$ und eine holomorphe Abbildung $g : f(X) \to B_r(0)$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$.
Sei nun n so groß gewählt, dass $r_n > r$. Dann gilt für

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B_r(0)$$

$h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, aber $r < r_n$. Dies ist ein Widerspruch zu Proposition 1.5.
Also ist X konform äquivalent zu $D_R(0)$. Für $R = \infty$ also zu $\mathbb{C}$ und für $R < \infty$ zu B.

$\square$

Bemerkung 1.13. Wir wissen bereits, dass jede einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche eine verschwindende deRham-Gruppe hat und dementsprechend konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder B ist, andererseits zeigt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jede Riemannsche Fläche mit verschwindender deRham-Gruppe einfach zusammenhängend ist. Also haben wir unser eigentliche Resultat bewiesen, nämlich, dass jede einfachzusammenhängende Riemansche Fläche konform äquivalent zu einer der obigen drei ist.