Universität Heidelberg
Fakkultät für Mathematik & Informatik
Im Neuenheimer Feld 288
69120 Heidelberg

Bachelor-Arbeit

Uniformisierung kompakter riemannscher Flächen

Tim Adler

Abgabe-Datum
Betreut durch AR Dr. Hendrik Kasten

Liste der noch zu erledigenden Punkte

1 Der Serresche Dualitätssatz

Definition 1.1. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Nach [For99, Satz 15.14] ist

$$0 \to \Omega \to \mathcal{E}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{E}^{(2)} \to 0$$

exakt und es gilt

$$H^1(X,\Omega) \cong \mathcal{E}^{(2)}(X) \Big/ \mathrm{d}\mathcal{E}^{1,0}(X) \, .$$

Sei $\zeta \in H^1(X,\Omega)$ und $\omega \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ ein Repräsentant von ζ. Setzen wir

$$\operatorname{res}(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \iint_X \omega,$$

so ist diese Definition aufgrund von [For99, Satz 10.20] repräsentantenunabhängig.

Definition 1.2 (Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen). Sei X eine Riemannsche Fläche und $\mathcal{M}^{(1)}$ die Garbe der meromorphen 1-Formen auf X. Wählen wir eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X, so nennen wir

$$\mu = (\omega_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^{(1)})$$

eine *Mittag-Leffler-Verteilung*, falls für beliebige $i, j \in I$ die 1-Form $\omega_j - \omega_i$ auf $U_i \cap U_j$ holomorph ist, d.h. $\delta\mu \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega)$.

Wir bezeichnen mit $[\delta\mu] \in H^1(X,\Omega)$ die Kohomologieklasse von $\delta\mu$. Weiterhin definieren wir zu $a \in X$

$$\operatorname{res}_a(\mu) := \operatorname{res}_a(\omega_i),$$

wobei $a \in U_i$. Falls $a \in U_i \cap U_j$, so gilt $\operatorname{res}_a(\omega_i) = \operatorname{res}_a(\omega_j)$, denn $\omega_j - \omega_i$ ist holomorph. Ist X kompakt, so ist $\operatorname{res}_a(\mu) = 0$ für fast alle $a \in X$ und wir können

$$\operatorname{res}(\mu) := \sum_{a \in X} \operatorname{res}_a(\mu)$$

definieren.

Satz 1.3. *Mit der Notation aus Definition 1.1 und 1.2 gilt*

$$\operatorname{res}(\mu) = \operatorname{res}([\delta\mu])$$

Beweis. Um $\operatorname{res}([\delta\mu])$ zu berechnen, konstruieren wir $H^1(X,\Omega) \equiv \mathcal{E}^{(2)}(X) \big/ \mathrm{d}\mathcal{E}^{1,0}(X)$ explizit. Da $\delta\mu = (\omega_j - \omega_i) \in Z^1(\mathfrak{U},\Omega) \subseteq Z^1(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{1,0})$ und $H^1(X,\mathcal{E}^{1,0}) = 0$ (vgl. [For99, Satz 12.6]) gilt, finden wir ein $(\sigma_i) \in C^0(\mathfrak{U},\mathcal{E}^{1,0})$ mit

$$\omega_j - \omega_i \cong \sigma_j - \sigma_i \qquad \text{auf } U_i \cap U_j.$$

Nun ist jede holomorphe 1-Form geschlossen, d.h. $\mathrm{d}(\omega_j - \omega_i) = 0$ und wir erhalten $\mathrm{d}\sigma_i = \mathrm{d}\sigma_j$ auf $U_i \cap U_j$. Also finden wir ein $\tau \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ mit $\tau|_{U_i} \cong \mathrm{d}\sigma_i$. Dieses τ ist der Repräsentant von $[\delta\mu]$, also gilt

$$\operatorname{res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau$$

Seien nun $a_1,\dots,a_n \in X$ die endlich vielen Pole von μ und $X' = X \setminus \{a_1,\dots,a_n\}$. Auf $X' \cap U_i \cap U_j$ gilt $\sigma_i - \omega_i \cong \sigma_j - \omega_j$. Erneut verwenden wir die Garbeneigenschaften und finden ein $\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X')$ mit $\sigma|_{X'\cap U_i} \cong \sigma_i - \omega_i$. Wir erhalten

$$\mathrm{d}\sigma \equiv \mathrm{d}\sigma_i - \underbrace{\mathrm{d}\omega_i}_{=0} \equiv \tau \qquad \text{auf } X' \cap U_i.$$

Und damit gilt $\mathrm{d}\sigma \equiv \tau$ auf X'. Als nächstes wählen wir zu jedem a_k ein $i(k) \in I$, so dass $a_k \in U_{i(k)}$ gilt. Weiterhin wählen wird Koordinatenumgebungen (V_k, z_k) mit folgenden Eigenschaften

1. Es gelten $V_k \subset U_{i(k)}$ und $z_k(a_k) = 0$,
2. es ist $V_k \cap V_j = \varnothing$ für alle $k \neq j$ und
3. $z_k(V_k) \subset \mathbb{C}$ ist eine Kreisscheibe.

Wählen wir $f_k \in \mathcal{E}(X)$ mit $\operatorname{Supp}(f_k) \subset V_k$ und so dass eine offene Umgebung $V_k' \subset V_k$ von a_k mit $f_k|_{V_k'} \equiv 1$, so können wir $g := 1 - (f_1 + \dots + f_k)$ definieren. Dies erlaubt uns $g \cdot \sigma$ auf ganz X fortzusetzen, denn $g|_{V_k'} \equiv 0$. Also liegt $g\sigma \in \mathcal{E}^{1,0}(X)$. Nach (10.20) gilt

$$\iint_X \mathrm{d}(g\sigma) = 0. \tag{1}$$

Auf $V_k' \setminus \{a_k\}$ erhalten wir

$$\mathrm{d}(f_k\sigma) = \mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}\sigma_{i(k)} - \omega_{i(k)} = \mathrm{d}\sigma_{i(k)}$$

Nun ist aber $\sigma_i \in \mathcal{E}^{1,0}(U_i)$, also kann $\mathrm{d}(f_k\sigma)$ glatt auf a_k fortgesetzt werden. Da $f_k\sigma$ auf $X' \setminus \operatorname{Supp}(f_k)$ verschwindet, können wir $\mathrm{d}(f_k\sigma) \in \mathcal{E}^{(2)}(X)$ auffassen. Wir erhalten die folgende Gleichung

$$\tau = \mathrm{d}1 \cdot \sigma = \mathrm{d}(g\sigma) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}(f_k\sigma)$$

Unter Ausnutzung von (1) erhalten wir

$$\iint_X \tau = \sum_{k=1}^{n} \iint_X \mathrm{d} f_k \sigma = \sum_{k=1}^{n} \iint_{V_k} \mathrm{d}(f_k \sigma_{i(k)} - f_k \omega_{i(k)})$$

Erneut wegen (10.20) gilt $\iint_{V_k} \mathrm{d} f_k \sigma_{i(k)} =$ und analog zum Beweis von [For99, Satz 10.21] folgt

$$\iint_{V_k} \mathrm{d}(f_k \omega_{i(k)}) = -2\pi i \operatorname{res}_{a_k}(\omega_{i(k)})$$

Bauen wir alles zusammen, so erhalten wir

$$\operatorname{res}([\delta\mu]) = \frac{1}{2\pi i} \iint_X \tau = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{a_k}(\omega_{i(k)}) = \operatorname{res}(\mu)$$

□

Definition 1.4 (Die Garbe Ω_D). Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Für ein beliebiges $D \in \operatorname{Div}(X)$ und $U \subset X$ offen definieren wir

$$\Omega_D(U) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U) | (\omega) \geq -D\}.$$

Ω_D bildet die Garbe der meromorphen 1-Formen, deren Divisoren Vielfache von $-D$ sind. Insbesondere $\Omega_0 = \Omega$.

Wählen wir ein $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^\times$ und setzen $K = (\omega)$. Dann wird durch Multiplikation mit ω für jeden beliebigen Divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ ein Isomorphismus

$$\mathcal{O}_{D+K} \xrightarrow{\sim} \Omega_D, \quad f \mapsto f\omega$$

definiert.

Lemma 1.5. *Es gibt ein* $k_0 \in \mathbb{Z}$*, so dass* $\dim H^0(X, \Omega_D) \geq \deg D + k_0$ *für alle* $D \in \operatorname{Div}(X)$ *gilt.*

Beweis. Sei $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)^\times$, $K = (\omega)$ und g das Geschlecht von X. Setzen wir $k_0 := 1 - g + \deg K$, so gilt nach dem Satz von Riemann-Roch

$$\begin{aligned}
\dim H^0(X, \Omega_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D+K}) \\
&= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D+K}) + 1 - g + \deg(D+K) \\
&\geq \deg D + k_0
\end{aligned}$$

□

Definition 1.6 (Duales Paar). Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Das Produkt

$$\Omega_{-D} \times \mathcal{O}_D \to \Omega, \quad (\omega, f) \mapsto \omega f$$

induziert eine Abbildung

$$H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to H^1(X, \Omega)$$

Diese ergibt sich aus er Tatsache, dass $H^0(X, \Omega_{-D}) \equiv \Omega_{-D}(X)$ gilt und dem Isomorphismus aus Definition 1.4. Durch die Verkettung mit $\mathrm{res} : H^1(X, \Omega_D) \to \mathbb{C}$ erhalten wir eine blinieare Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^0(X, \Omega_{-D}) \times H^1(X, \mathcal{O}_D) \to \mathbb{C}, \quad \langle \omega, \xi \rangle := \mathrm{res}(\xi \omega)$$

Diese lineare Abbildung liefert uns eine lineare Abbildung

$$\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$$

Den verbleibenden Teil des Kapitels wollen wir nun zeigen, dass die eben definierte lineare Abbildung ι_D ein Isomorphismus ist. Ein erster Schritt ist der nächste Satz.

Satz 1.7. *Die Abbildung ι_D ist injektiv.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ mit $\omega \neq 0$ ein $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$ gibt, so dass $\langle \omega, \xi \rangle \neq 0$ gilt. Wir wählen dazu ein $a \in X$ mit $D(a) = 0$ und eine Koordinatenumgebunge (U_0, z) mit $z(a) = 0$ und $D|_{U_0} \equiv 0$. Auf U_0 schreiben wir $\omega = f\,\mathrm{d}z$ mit einem $f \in \mathcal{O}(U_0)$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass U_0 klein genug gewählt wurde, so dass $f \neq 0$ auf $U_0 \setminus \{a\}$. Wir setzen $U_1 := X \setminus \{a\}$ und $\mathfrak{U} := (U_0, U_1)$. Sei weiterhin $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, wobei $f_0 = (zf)^{-1}$ und $f_1 00$. Dann gilt

$$\omega\eta = \left(\frac{\mathrm{d}z}{z}, 0\right) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M}^(1))$$

$\omega\eta$ ist eine Mittag-Leffler-Verteilung mit $\mathrm{res}(\omega\eta) = 1$. Nun liegt aber $\delta\eta$ in $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ und definieren wir $xi = [\delta\eta] \in H^1(X, \mathcal{O}_D)$, so folgt

$$\omega\xi = \omega[\delta\eta] = [\delta(\omega\eta)].$$

Unter Anwendung von Satz 1.3 erhalten wir

$$\langle \omega, \xi \rangle = \mathrm{res}\,\omega\xi = \mathrm{res}([\delta(\omega\eta)]) = \mathrm{res}(\omega\eta) = 1.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 1.8. *Seien $D, D' \in Div(X)$ mit $D' \leq D$. Dann kommutiert das folgende Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \arrow[r, "i^D_{D'}"] & H^1(X, \mathcal{O}_{D'})^* \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \Omega_{-D}) \arrow[r] \arrow[u, "\iota_D"] & H^0(X, \Omega_{-D'}) \arrow[u, "\iota_{D'}"]
\end{tikzcd}$$

Beweis das.

Beweis. Nachrechnen. ☐

Lemma 1.9. *Sei die Notation wie in Lemma 1.8. Seien weiterhin $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ und $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ mit $i^D_{D'}(\lambda = \iota_{D'}(\omega)$. Dann liegt ω bereits in $H^0(X, \Omega_{-D})$ und $\lambda = \iota_D(\omega)$.*

Beweis. Angenommen es gelte $\omega \notin H^0(X, \Omega_{-D}) \cong \Omega_{-D}(X)$. Dann existierte ein $a \in X$, so dass $\operatorname{ord}_a(\omega) < D(a)$. Sei (U_0, z) eine Koordinatenumgmebung von a mit $z(a) = 0$. Auf dieser Koordinatenumgebung drücken wir ω durch $\omega = f\,\mathrm{d}z$ mit einem $f \in \mathcal{M}(U_0)$ aus. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass wir U_0 klein genug gewählt haben, so dass

1. $D|_{U_0 \setminus \{a\}} \equiv 0 \equiv D'|_{U_0 \setminus \{a\}}$ gilt und
2. f keine Null- und Polstellen auf $U_0 \setminus \{a\}$ besitzt.

Nun setzen wir $U_1 := X \setminus \{a\}$, $\mathfrak{U} = (U_0, U_1)$ und $\eta = (f_0, f_1) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{M})$, wobei $f_0 := (zf)^{-1}$ und $f_1 := 0$ definiert wird. Aus $\operatorname{ord}_a(\omega) < D(a)$ folgte nun sogar, dass $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$ und damit sogar, dass

$$\delta\eta \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{D'})$$

Bezeichnen wir mit ξ' die Kohomologieklasse von $\delta\eta$ in $H^1(X, \mathcal{O}_{D'})$ und mit ξ die Kohomologieklasse von $\delta\eta$ in $H^1(X, \mathcal{O}_D)$, so erhalten wir zunächst, weil $\eta \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_D)$, dass $\xi = 0$. Nach Voraussetzung gälte nun aber

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \iota_{D'}(\omega)(\xi') = {}^D_{D'}(\lambda)(\xi') = \lambda(\xi) = 0$$

Andererseits ist $\omega\eta = \left(\frac{\mathrm{d}z}{z}, 0\right)$ und es folgt

$$\langle \omega, \xi' \rangle = \operatorname{res}(\omega\eta) = 1$$

Ein Widerspruch. Also muss $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ gelten. Da dann ${}^D_{D'}(\lambda) = \iota_{D'}(\omega) = i^D_{D'}(\iota_D(\omega))$ gelten muss, folgt $\lambda = \iota_D(\omega)$ aus der Injektivität von $i^D_{D'}$. ☐

Lemma 1.10. *Seien $D, B \in \mathrm{Div}(X)$ und X eine kompakte Riemannsche Fläche. Sei $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$. Dann induziert der Garbenhomomorphismus $\mathcal{O}_{D-B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_D$ gegeben durch $f \mapsto \psi f$ eine lineare Abbildung*

$$H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)$$

und damit auch eine lineare Abbildung

$$H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$$

Diese bezeichnen wir auch mit ψ. Mit dieser Notation folgt $(\psi\lambda)(\xi) = \lambda(\psi\xi)$ für beliebige $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ und $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$. Weiterhin kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \arrow[r, "\psi"] & H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^* \\ H^0(X, \Omega_{-D}) \arrow[u, "\iota_D"] \arrow[r, "\psi"] & H^0(X, \Omega_{-D+B}) \arrow[u, "\iota_{D-B}"] \end{tikzcd}$$

Beweis. Das Multiplikation mit ψ ein Garbenhomomorphismus ist, ist klar und damit folgt die Existenz der linearen Abbildungen. Die Kommutativität des Diagramss erhalten wir aus der Tatsache, dass für beliebige $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ und $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})$ die folgende Rechnung durchführen können

$$\iota_{D-B}(\psi\omega)(\xi) = \langle \psi\omega, \xi \rangle = \mathrm{res}((\psi\omega)\xi) = \mathrm{res}(\omega(\psi\xi)) = \langle \omega, \psi\xi \rangle = \iota_D(\omega)(\psi\xi)$$

□

Lemma 1.11. *Falls $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_B)$ mit $\psi \neq 0$. Dann ist $\psi : H^1(X, \mathcal{O}_D)^* \to H^1(X, \mathcal{O}_{D-B})^*$ injektiv.*

Beweis. Sei $A := (\psi) \geq -B$. Dann faktorisiert $\psi : \mathcal{O}_{D-B} \to \mathcal{O}_D$ über $\mathcal{O}_{D+A}$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{D-B} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_D \\ \mathcal{O}_{D+A} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Weiterhin ist die Abbildung $\mathcal{O}_{D+A} \to \mathcal{O}_D$ ein Isomorphismus, wobei die Umkehrung einfach durch Multiplikation mit ψ^{-1} gegeben ist. Nun ist die Inklusion von $\mathcal{O}_{D-B} \to \mathcal{O}_{D+A}$ injektiv und deshalb nach (16.8) $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \to H^1(X, \mathcal{O}_{D+A})$ ein Epimorphismus. Also ist auch $H^1(X, \mathcal{O}_{D-B}) \xrightarrow{\psi} H^1(X, \mathcal{O}_D)$ ein Epimorphismus und schlussendlich die duale Abbildung injektiv. Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 1.12 (Der Serresche Dualitätssatz). *Sei $D \in \mathrm{Div}(X)$ und X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist $\iota_D : H^0(X, \Omega_{-D}) \to H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Aufgrund von Satz 1.7 benötigen wir nur noch die Surjektivität von ι_D. Sei $\lambda \in H^1(X, \mathcal{O}_D)^*$ mit $\lambda \neq 0$ und $P \in \mathrm{Div}(X)$ mit $\deg P = 1$. Weiterhin setzen wir $D_n := D - nP$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Als nächstes bezeichnen wir mit $\Lambda \subset H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ den Untervektorraum aller Linearformen der Form $\psi\lambda$, wobei $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$. Nach Lemma 1.11 ist $\Lambda \cong H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$. Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt damit, dass

$$\dim \Lambda \geq 1 - g + n$$

gilt. Aus Lemma 1.5 und da ι_{D_n} injektiv ist, erhalten wir

$$\dim \mathrm{im}(\iota_{D_n}) = \dim H^0(X, \Omega_{-D_n}) \geq n + k_0 - \deg D$$

Wählen wir $n > \deg D$, so erhalten wir $\deg D_n < 0$ und damit $H^0(X, \mathcal{O}_{D_n}) = 0$. Aus dem Satz von Riemann-Roch folgt

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^* = g - 1 - \deg D_n = n + (g - 1 - \deg D).$$

Unter eventueller Vergrößerung von n erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dim \Lambda + \dim \mathrm{im}(\iota_{D_n}) &\geq 1 - g + n + n + k_0 - \deg D \\
&= 2n + 1 - g + \deg D \\
&> n + (g - 1 - \deg D) \\
&= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*.
\end{aligned}$$

Da sowohl Λ als auch $\mathrm{im}(\iota_{D_n})$ Untervektorräume von $H^1(X, \mathcal{O}_{D_n})^*$ sind, muss $\Lambda \cap \mathrm{im}(\iota_{D_n}) \neq 0$ sein. Also existiert ein $\psi \in H^0(X, \mathcal{O}_{nP})$ mit $\psi \neq 0$ und $\omega \in H^0(X, \Omega_{-D_n})$ mit $\psi\lambda = \iota_{D_n}(\omega)$. Setzen wir $A := (\psi)$, so liegt $\frac{1}{\psi} \in H^0(X, \mathcal{O}_A)$. Zu guter Letzt erhalten wir aus $D' := D_n - A$, dass

$${}^{d}_{D'}(\lambda) = \frac{1}{\psi}(\psi\lambda) = \frac{1}{\psi}\iota_{D_n}(\omega) = \iota_{D'}\left(\frac{1}{\psi}\omega\right)$$

gilt und unter Ausnutzung von Lemma 1.9 folgt, dass $\omega_0 := \frac{1}{\psi}\omega \in H^0(X, \Omega_{-D})$ die Gleichung $\lambda = \iota_D(\omega_0)$ erfüllt. □

Korollar 1.13. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$. Dann gilt*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$$

Insbesondere folgt für $D = 0$

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}) = \dim H^0(X, \Omega),$$

wobei g das Geschlecht von X bezeichnet.

2 Das Dirichlet Randwertproblem

Definition 2.1. Sei $Y \subset X$ offen und X eine Riemannsche Fläche. Dann heißt $u \in \mathcal{E}(Y)$ *harmonisch*, falls $\mathrm{d}'\,\mathrm{d}''u = 0$.
In lokalen Koordinaten (z, U) mit $z = x + iy$ bedeutet das:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u \\ &= 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} u \\ &= 0\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *Sei $G \subset X$ ein Gebiet, X eine Riemannsche Fläche und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann eixsitert ein $f \in \mathcal{O}(G)$, so dass*

$$u = \mathrm{Re}(f)$$

Beweis. Nach (19.4) gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathrm{d}u &= 0 && \text{und} \\ \mathrm{d}*\mathrm{d}u &= 0\end{aligned}$$

Also existiert ein $\omega \in \Omega(G)$, so dass $\mathrm{d}u = \mathrm{Re}(\omega)$. Nun ist aber G einfach zusammenhängend, d.h. es gibt eine Funktion $g \in \mathcal{O}(G)$, so dass $\omega = \mathrm{d}g$.
Also ist $\mathrm{d}u = \mathrm{Re}(\mathrm{d}g)$ und damit $u = \mathrm{Re}(g)$+const. □

Bemerkung 2.3. Die Umkehrung gilt immer, d.h. der Realteil einer holomorphen Funktion ist immer harmonisch.

Proposition 2.4 (Maximumsprinzip für harmonische Funktione). *Sei $Y \subset X$ ein Gebiet. Sei weiterhin $u : Y \to \mathbb{R}$ harmonisch und $x_0 \in Y$ mit $u(x_0) = \sup_{y \in Y} u(y)$.
Dann ist u konstant.*

Beweis. Wir verwenden für den Beweis ein „Offen-Abgeschlossen"-Argument. Sei dazu $M := \{y \in Y | u(y) = u(x_0)\} \neq \varnothing$.

- Behauptung: M ist offen.
  Sei $y \in Y$. Dann existiert ein eine offene, einfachzusammenhängende Umgebung $U \subset Y$ von y.
  Nach Proposition 2.2 folgt dann die Existenz von $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $u|_U = \mathrm{Re}(f)$.
  Weiterhin ist die reelle Exponentialfunktion streng monoton steigend und somit nimmt die Funktion e^u bei y ein Maximum an. Allerdings gilt auch $|e^f| = e^u$, was nichts anderes

bedeutet, als dass die holomorphe Funktion e^f ein Betragsmaximum bei y annimmt. Aus dem Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen folgt dann die Konstanz von e^f und damit:

$$u_U \equiv \text{const.}$$

Also gilt $y \in U \subset M$.

- Behauptung: M ist abgeschlossen.
  Dies ist eine direkte Konsequenz aus der Stetigkeit von u.

Damit ist $M \subset Y$ sowohl offen als auch abgeschlossen und da Y zusammenhängen ist, muss M entweder leer oder ganz Y sein. Nun liegt $x_0 \in M$ und somit folgt $M = Y$, also $u \equiv$const. □

Definition 2.5. Sei $Y \subset X$ offen, X eine Riemannsche Fläche und $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ stetig.
Man nennt $u \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$ *Lösung des Dirichlet Randwertproblemes* (Dirichlet-RWP), falls

1. $u|_Y$ harmonisch ist und
2. $u|_{\partial Y} \equiv f$.

Proposition 2.6. *Sei $Y \Subset X$ offen und $\partial y \neq \varnothing$. Dann gilt:*
Falls zu einem gegebenen $f \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$ die Lösung des Dirichlet-RWP existiert, ist diese eindeutig.

Beweis. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen des Dirichlet-Problems. Dann erfüllen die Funktionen

$$(u_1 - u_2)|_{\partial Y} \equiv (u_2 - u_1)|_{\partial Y} \equiv 0$$

und sind harmonisch. Aus dem Maximumsprinzip folgt sofort, die Nicht-Positivität von sowohl $u_1 - u_2$ als auch von $u_2 - u_1$ auf allen Zusammenhangskomponenten von Y, also:

$$0 \leq u_1 - u_2 \leq 0$$

und damit

$$u_1 \equiv u_2$$

□

Satz 2.7. *Sei $f : \partial D(R) \to \mathbb{R}$ stetig, $R > 0$ und*

$$u(z) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\varphi} - z|^2} f(Re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi & \textit{für } |z| < R \\ f(z) & \textit{für } |z| = R \end{cases}$$

Dann ist u stetig auf $\overline{D(R)}$ und harmonisch auf $D(R)$; löst also das Dirichlet-Problem auf $\overline{D(r)}$.

Beweis. Für $z \neq \rho$ definieren wir

$$P(z,\rho) := \frac{|\rho|^2 - |z|^2}{|\rho - z|^2}, \qquad F(z,\rho) := \frac{\rho + z}{\rho - z}$$

Dann gilt $\mathbb{P}(z,\rho) = \mathrm{Re}(F(z,\rho))$ und für u ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi}) f(Re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(z, Re^{i\varphi}) f(Re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\right) \end{aligned}$$

Nun ist F als Funktion von z holomorph (falls $z \neq \rho$) und damit erhalten wir aus der Leibnizregel, dass u der Realteil einer holomorphen Funktion ist, also harmonisch.
Als nächstes müssen wir die Stetigkeit von u auf dem Rand zeigen. Zunächst zeigen wir jedoch:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = 1$$

Dazu verwenden wir den Residuensatz, denn es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\rho|=R} \underbrace{\frac{\rho + z}{(\rho - z)\rho}}_{=:h_z(\rho)}\,\mathrm{d}\rho\right) \tag{1}$$

Weiterhin ist $\mathrm{res}_{\rho=z}\, h_z(\rho) = 2$ und $\mathrm{res}_{\rho=0}\, h_z(\rho) = -1$. Da jede Singularität nur einmal umlaufen wird erhalten wir:

$$(1) = \mathrm{Re}(\mathrm{res}_{z=\rho}\, h_z(\rho) + \mathrm{res}_{z=0}\, h_z(\rho)) = 1$$

Also gilt für $\rho_0 \in \partial D(R)$ und $z \in D(R)$:

$$u(z) - f(\rho_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\rho)(f(\rho) - f(\rho_0)\,\mathrm{d}\varphi$$

wobei $\rho = Re^{i\varphi}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist existiert ein $\delta_0 > 0$, so dass

$$|f(\rho) - f(\rho_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall |\rho - \rho_0| \leq \delta_0, \quad \rho, \rho_0 \in \partial D(R)$$

Weiterhin existiert ein $M > 0$, so dass $|f(\rho)| \leq M$ für jedes $\rho \in \partial D(R)$. Setzen $\alpha \subset [0, 2\pi]$ so, dass

$$|Re^{i\varphi} - \rho_0| \leq \delta_0 \qquad \forall \varphi \in \alpha$$

und $\beta := [0, 2\pi] \setminus \alpha$, erhalten wir:

$$\begin{aligned}|u(z) - f(\rho_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\alpha \underbrace{P(z,\rho)}_{\geq 0} \frac{\varepsilon}{2} \,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_\beta P(z,\rho) 2M \,\mathrm{d}\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi} \int_\beta P(z, Re^{i\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

Sei nun $|z - \rho_0| =: \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$. Dann gilt für $\varphi \in \beta$

$$|Re^{i\varphi} - z| \geq |Re^{i\varphi} - \rho_o| - |z - \rho_o| \geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{2} = \frac{\delta_0}{2}$$

und damit für P

$$P(z, Re^{i\varphi}) = \frac{(R + |z|)(R - |z|)}{|Re^{i\varphi} - z|^2} \leq \frac{4 \cdot 2R\delta}{\delta_0^2}$$

Insgesamt erhalten wir

$$|u(z) - f(\rho_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{8R\delta}{\delta_0^2} \cdot \frac{M}{\pi} \cdot 2\pi$$

und damit wird auch der recht Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, wenn $\delta =: |z - \rho_0|$ klein genug geählt wurde. $\square$

Korollar 2.8. *Sei $u : D(R) \to \mathbb{R}$ harmonisch, $R > 0$. Dann gilt:*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2} u(re^{i\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi$$

für jedes $|z| < r < R$.

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 2.7 und Proposition 2.6. $\square$

Korollar 2.9. *Seien $u_n : D(R) \to \mathbb{R}$ harmonisch und konvergiere $u_n \to u : D(R) \to \mathbb{R}$ kompakt.*
Dann ist auch u harmonisch

Beweis. Nach Korollar 2.8 erhalten wir für jedes $|z| < r < R$

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\varphi}) u_n(re^{i\varphi}) \,\mathrm{d}\varphi$$

Da u_n gleichmäßig auf $\partial D(r)$ konvergiter, gilt die Integralformel auch für u. Damit ist u auf allen $D(r)$ mit $r < R$ und schlussendlich auf $D(R)$ harmonisch. $\square$

Satz 2.10 (Harnacksches Prinzip für Kreisscheiben). *Sei $M \in \mathbb{R}$ und $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq M$ eine monoton wachende, beschränkte Folge harmonischer Funktionen von $D(R)$ nach $\mathbb{R}$.*
Dann konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen eine harmonische Funktion $u : D(R) \to \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $K \subset D(R)$ kompakt. Dann existieren $\rho < r < R$, so dass $K \subset \overline{D(\rho)}$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und

$$\varepsilon' := \varepsilon \frac{r-\rho}{r+\rho} > 0$$

Nun ist $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge und beschränkt, d.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$u_n(0) - u_m(0) \leq \varepsilon' \qquad \forall n \geq m \geq N$$

Für $|z| \leq \rho$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq P(z, re^{i\varphi}) &= \frac{(r-|z|)(r+|z|)}{|re^{i\varphi}-z|^2} \\ &\leq \frac{(r-|z|)(r+|z|)}{(r-|z|)^2} \\ &= \frac{r+|z|}{r-|z|} \\ &\leq \frac{r+\rho}{r-\rho} \end{aligned} \tag{blubb}$$

Für beliebige $z \in K$ gilt nun die folgende Integralformel:

$$\begin{aligned} u_n(z) - u_m(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\varphi}(u_n(re^{i\varphi}) - u_m(re^{i\varphi}))\,\mathrm{d}\varphi \\ &\overset{\text{(blubb)}}{\leq} \frac{r+\rho}{r-\rho}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u_n(re^{i\varphi}u_m(re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{r+\rho}{r-\rho}(u_n(0) - u_m(0)) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Also konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt und nach Korollar 2.9 ist die Grenzfunktion wieder harmonisch. ☐

Proposition 2.11. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \Subset U \subset X$, so dass (z, U) eine Karte und $z(D) \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe ist.*
Dann ist das Dirichlet-Problem auf D wohldefiniert und eindeutig lösbar.

Beweis. Die Aussage folgt daraus, dass die Eigenschaft harmonisch zu sein invariant unter biholomorphen Transformationen und damit unabhängig von der gewählten Kartenabbildung ist. Die Lösung lässt sich dann einfach auf $z(D)$ nach den obigen Kriterien ermittlen. □

Definition 2.12. Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ offen.
Wir bezeichnen mit $\mathrm{Reg}(Y)$ die Menge aller Teilgebiete $D \Subset Y$, die den Voraussetzungen von Propositon 2.11 genügen.
Für $u \in C(Y, \mathbb{R})$ und $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ definieren wir $P_D u : Y \to \mathbb{R}$ durch $P_D u|_{Y \setminus D} \equiv u_{Y \setminus D}$ und $P_D u|_D$ ist die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwerten $u|_{\partial D}$.

Korollar 2.13. *Mit der gleichen Notation wie in der vorigen Definition erhalten wir für beliebige $u, v \in C(Y, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. $P_D(u + v) = P_D u + P_D v$
2. $P_D(\lambda u) = \lambda P_D u$
3. $u \leq v \Rightarrow P_D u \leq P_D v$

Beweis. Die ersten beiden Aussagen ergeben sich direkt aus der Eindeutigkeit harmonischer Funktionen und 3. ist eine Folge des Maximumprinzips. □

Korollar 2.14. *$u \in C(Y, \mathbb{R})$ ist genau dann harmonisch, wenn $P_D u = u$ für jedes $D \in \mathrm{Reg}(Y)$*

Beweis. $\Rightarrow$ Ist klar

$\Leftarrow$ Folgt aus der Tatsache, dass harmonisch zu sein eine lokale Eigenschaft ist und es zu jedem Punkt $x \in Y$ ein $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ mit $x \in D$ existiert.

□

Definition 2.15. Sei $Y \subset X$ offen und X eine Riemannsche Fläche. Ein $u \in C(Y, \mathbb{R})$ heißt

1. *subharmonisch*, falls $P_D u \geq u$ für jedes $D \in \mathrm{Reg}(Y)$.
2. *lokal subharmonisch*, falls es zu jedem Punkt in Y eine Umgebung gibt, auf der u subharmonisch ist.

Korollar 2.16. *Sei $Y \subset X$ offen und X eine Riemannsche Fläche. Seien weiterhin $u, v \in C(Y, \mathbb{R})$ subharmonisch und $\lambda \geq 0$.*
Dann sind $u + v$, λu und $\sup(u, v)$ subharmonisch.

Beweis. $u + v$ und λu folgen direkt aus Korollar 2.13. □

Satz 2.17 (Maximumprinzip für lokal subharmonische Funktionen)**.** *Sei $Y \subset X$ ein Gebiet, X eine Riemannsche Fläche unde $u \in C(Y, \mathbb{R})$ lokal subharmonisch, so dass ein $x_0 \in Y$ existiert mit*

$$u(x_0) = \sup_{y \in Y} u(y)$$

Dann ist u konstant.

Beweis. Sei $M := \{y \in Y | u(y) = u(x_0)\}$.
Angenommen $S \neq Y$.
Dann existiert ein $a \in \partial S \cup S$ und aus der Stetigkeit von u folgt $u(a) = u(x_0)$. Nun muss in jeder Umgebung von a ein x existieren, so dass $u(x) < u(x_0)$ ist, d.h. wir können ein $D \in \text{Reg}(y)$ finden mit $a \in D$ und $u|_{\partial D} \not\equiv c$.
Wenn wir nun D klein genug wählen, können wir annehmen, dass u subharmonisch in einer Umgebung von $\bar{D}$ ist. Also gilt $u \leq P_D u =: v$.
Damit ist v harmonisch auf D und $v|_{\partial D} \equiv u|_{\partial_D} \leq c$ und es folgt $v \leq c$ auf $\bar{D}$, aber $c = u(a) \leq v(a)$. v nimmt also ihr Maximum im Inneren an und ist nach Proposition 2.4 konstant, insbesondere $v \equiv c$ auf ∂D. Ein Widerspruch zu $u|_{\partial D} \not\equiv c$.
Also muss $S = Y$ gelten. □

Korollar 2.18. *Sei $Y \subset X$ offen, X eine Riemannsche Fläche und $u \in C(Y, \mathbb{R})$ lokal subharmonisch.*
Dann ist u bereits subharmonisch.

Beweis. Sei $D \in \text{Reg}(Y)$ beliebig. Da $P_D u$ harmonisch auf D ist, ist $v := u - P_D u$ lokal subharmonisch auf D und $v|_{\partial D} \equiv 0$. Also gilt $v \leq 0$ auf D und damit $P_D u \geq u$. □

Lemma 2.19. *Sei $u \in C(Y, \mathbb{R})$ subharmonisch und $B \in \text{Reg}(Y)$.*
Dann ist $P_B u$ auch subharmonisch

Beweis. Setze $v := P_B u$ und sei $D \in \text{Reg}(Y)$ beliebig. Zu zeigen ist dann $P_D v \geq v$.
Auf $Y \setminus D$ gilt $P_D v \equiv v$ und auf $Y \setminus B$ gilt

$$P_D v \equiv P_D P_B u = P_D u \geq u = P_B u = v$$

Damit gilt $v - P_D v \leq 0$ auf $Y \setminus (B \cap D)$, insbesondere $v - P_D v \leq 0$ auf $\partial(Y \setminus (B \cap D))$ und aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen folgt $v - P_D v \leq 0$ auf $B \cap D$, da $v - P_D v$ dort harmonisch ist.
Insgesamt ergibt sich $P_D v \geq v$ auf ganz Y. □

Lemma 2.20 (Perron). *Sei $M \subset C(Y, \mathbb{R})$ eine nicht-leere Menge subharmonischer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $u, v \in M \Rightarrow \sup(u, v) \in M$
2. $u \in M, D \in \text{Reg}(Y) \Rightarrow P_D u \in M$
3. $\exists K \in \mathbb{R} : u \leq K \quad \forall u \in M.$

Dann ist die Funktion $u^* : Y \to \mathbb{R}$ durch $u^*(x) := \sup\{u(x) : u \in m\}$ harmonisch auf Y.

Beweis. Sei $a \in Y$ und $D \in \text{Reg}(Y)$.eine Umgebung von a. Sei weiterhin $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n(a) = u^*(a)$.
Aufgrund von 1. können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$ ist. Setzen wir $v_n := P_D u_n$ so gilt:

$$\begin{aligned} &u_n \leq v_n \leq u^* \\ &v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \end{aligned} \tag{1}$$

Nach dem Harnackschen Prinzip konvergiert $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf D gegen eine harmonische Funktion $v : D \to \mathbb{R}$ und aus (1) erhalten wir $v(a) = u^*(a)$ und $v \leq u^*$ auf D.
Behauptung: $v \equiv u^*|_D$.
Sei dazu $x \in D$ beliebig und $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = u^*(x)$.
Aufgrund von 1. und 2. können wir $v_n \leq w_n = P_D w_n$ und $w_N \leq w_{n+1}$ annehmen. Also konvergiert $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gauf D gleichmäßig gegen $w.D \to \mathbb{R}$ mit $v \leq w \leq u^*$.
Damit gilt aber $u^*(a) = v(a) \leq w(a) \leq u^*(a)$ und aus dem Maximumprinzip angewandt auf $v - w$ ergibt sich $v \equiv w$ auf D. Insbesondere $v(x) = w(x) = u^*(x)$.
Also ist $u^* = v$ harmonisch auf D und da D beliebig gewählt war auf ganz Y. □

Definition 2.21. Sei $Y \subset X$ offen, $\partial Y \neq \varnothing$ und $f : \partial Y \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.
Setzen wir $K := \sup\{f(x) : x \in \partial Y\}$, dann bezeichnet $\mathfrak{P}_f$ die Menge aller $u \in C(\bar{Y}, \mathbb{R}$ mit

1. $u|_Y$ ist subharmonisch
2. $u|_{\partial Y} \leq F$ und $u \leq K$

$\mathfrak{P}_f$ wird als *Perronklasse* von f bezeichnet.

Korollar 2.22. *Mit der Notation aus der obigen Definition folgt:* $u^* := \sup_{u\in\mathfrak{P}_f} u$ *ist harmonisch auf* Y

Beweis. Wende Lemma 2.20 auf $M := \mathfrak{P}_f$ an. □

Bemerkung 2.23. Damit u^* eine Lösung des Dirichlet-Problems auf Y ist, müsste

$$\lim_{\substack{y\to x \\ y\in Y}} u^*(y) = f(x) \tag{R}$$

für jedes $x \in \partial Y$ gelten. Dies ist leider nicht immer der Fall. Im folgenden wollen wir Kriterien für die Randpunkte angeben, die sicherstellen, dass (R) erfüllt wird.

Definition 2.24. Sei $Y \subsetneq X$ offen und X eine Riemannsche Fläche.
Ein Punkt $x \in \partial Y$ heißt *regulär*, falls es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und eine Funktion $\beta \in C(\bar{Y} \cap U)$ existiert, so dass

1. $\beta|_{Y\cap U}$ harmonisch ist,

2. $\beta(x) = 0$ und $\beta(y) < 0$ für beliebige $y \in \bar{Y} \cap U \setminus \{x\}$ gilt.

β wird als *Barriere* von x bezeichnet.

Korollar 2.25. *Sei $x \in \partial Y$ ein regulärer Randpunkt und $Z \subset Y$ offen mit $x \in \partial Z$.*
Dann ist x ein regulärer Randpunkt von Z. Insbesondere hat jede Zusammenhangskomponente von Y regulären Rand.

Lemma 2.26. *Sei $x \in \partial Y$ ein regulärer Randpunkt und V eine offene Umgebung von x mit reellen Konstanten $m \leq c$. Dann existiert ein $v \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$ mit*

1. *$v|_Y$ ist subharmonisch,*

2. *$v(x) = c$, $v|_{\bar{Y} \cap V} \leq c$ und*

3. *$v|_{\bar{Y} \setminus V} = m$*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung $c = 0$ annehmen.
Sei U eine offene Umgebung von x mit Barriere $\beta \in C(\bar{Y} \cap U, \mathbb{R})$. Wir können nun eine offene Umgebung $\tilde{V} \Subset U \cap V$ von x finden. Dort gilt

$$\sup\{\beta(y) | y \in \partial\tilde{V} \cap \bar{Y}\} < 0$$

Also existiert ein $k > 0$, so dass $k\beta|_{\partial\tilde{V} \cap \bar{Y}} < m$. Schlussendlich definieren wir

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta) & \text{auf } \bar{Y} \cap \tilde{V} \\ m & \text{auf } \bar{Y} \setminus V \end{cases}$$

Damit ist v stetig und genügt den Bedingungen 1 bis 3. □

Lemma 2.27. *Sei $Y \subsetneq X$ offen, $f \in C(\partial Y, \mathbb{R})$ beschränkt und $u^* := \sup_{u \in \mathfrak{P}_f} u$, wobei $\mathfrak{P}_f$ die Perronklasse von f bezeichnet.*
Dann gilt für jeden regulären Randpunkt $x \in \partial Y$:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert relativ kompakte offene Umgebun V von x mit

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \geq f(x) + \varepsilon \qquad \forall y \in \partial Y \cap V$$

Seien $k, K \in \mathbb{R}$ mit $k \leq f(y) \leq K$ für jedes $y \in \partial Y$.

a) Nach Lemma 2.26 können wir eine Funktion $v \in C(\bar{Y}, \mathbb{R})$, die subharmonisch auf Y ist und

$$\begin{aligned} v(x) &= f(x) - \varepsilon \\ v|_{\bar{Y} \cap V} &\leq f(x) - \varepsilon \\ v|_{\bar{Y} \setminus V} &= k - \varepsilon \end{aligned}$$

erfüllt.
Damit ist $v|_{\partial Y} \leq f$ und $v \leq K$. Also ist $v \in \mathfrak{P}_f$ und es folgt $v \leq u^*$.

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} U^*(y) \geq v(x) = f(x) - \varepsilon$$

b) Erneut durch Lemma 2.26 erhalten wir ein $w \in c(\bar{Y}, \mathbb{R})$, das subharmonisch auf Y ist und

$$\begin{aligned} w(x) &= -f(x) \\ w|_{\bar{\cap} V} &\leq -f(x) \\ w|_{\bar{Y} \setminus V} = -K \end{aligned}$$

erfüllt.
Also gilt für alle $u \in \mathfrak{P}_f$ und $y \in \partial Y \cap V$: $u(y) \leq f(x) + \varepsilon$ und wir erhalten

$$u(y) + w(y) \leq \varepsilon \qquad \forall y \in \partial Y \cap V$$

Weiterhin erhalten wir für jedes $z \in \bar{Y} \cap \partial V$:

$$u(z) + w(z) \leq K + w(z) = K - K = 0$$

Das Maximumprinzip angewand auf die subharmonischen Funktion u+w auf $Y \cap V$ ergibt $u + w \leq \varepsilon$ auf $\bar{Y} \cap V$.
Also ist $u|_{\bar{Y} \cap V} \leq \varepsilon - w|_{\bar{Y} \cap V}$ für jedes $u \in \mathfrak{P}_f$ und wir folgern

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} \leq \varepsilon - u(x) = f(x) + \varepsilon$$

a) und b) zusammengesetzt ergibt dann die Behauptung. □

Satz 2.28. *Sei $Y \subsetneq X$ offen mit regulärem Rand und X eine Riemannsche Fläche. Dann ist das Dirichlet-Problem für jedes beschränkte $f \in C(\partial y, \mathbb{R})$ lösbar auf Y.*

Satz 2.29. *Sei $Y \subset \mathbb{C}$ offen und $a \in \partial Y$. Seine $m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ so gewählt, dass $a \in \partial B_r(m)$ und $\bar{B}_r(m) \cap Y = \varnothing$.
Dann ist a ein regulärer Randpunkt von Y.*

Beweis. Setzen wir $c := \frac{a+m}{2}$, dann stellt $\beta(z) := \log \frac{r}{2} - \log |z - c|$ eine Barriere von a dar □

3 Abzählbare Topologie

Lemma 3.1. *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stet, offen und surjektiv. Dann besitzt Y eine abzählbare Basis, falls X eine besitzt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X und

$$\mathfrak{B} := \{f(U) : U \in \mathfrak{U}\}$$

eine abzählbare Familie von offenen Teilmengen von Y.
Behauptung: $\mathfrak{B}$ ist eine Basis der Topologie von Y.
Um dies zu beweisen wir $D \subset Y$ offen und $y \in D$ und müssen nun zeigen, dass ein $V \in \mathfrak{B}$ existiert mit $y \in V \subset D$.
Aus der Surjektivität von f erhalten wir ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Weiterhin ist $f^{-1}(D)$ offen und eine Umgebung von x, da f stetig ist.
Da $\mathfrak{U}$ eine Basis der Topologie von X ist existiert ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $x \in U \subset f^{-1}(D)$. Also genügt $V := f(U)$ den geforderten Eigenschaften. □

Lemma 3.2 (Poincaré-Volterra). *Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und Y ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei weiterhin $f : X \to Y$ stetig und diskret. Dann besitzt X eine abzählbare Basis der Topologie.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie von Y.
Bezeichne mit $\mathfrak{B}$ die Menge aller offenen Teilmengen $V \subset X$ mit

1. V besitzt eine abzählbare Basis der Topologie
2. V ist eine Zusammenhangskomponente eines $f^{-1}(U)$ für ein $U \in \mathfrak{U}$.

1. Behauptung: $\mathfrak{B}$ ist eine Basis der Topologie von X.
   Sei $D \subset X$ offen mit $x \in D$. Zu zeigen ist, dass ein $V \in \mathfrak{B}$ existiert, so dass $x \in V \subset D$. Da f diskret ist existiert ein $W \subset D$ offen und relativ kompakt, $x \in W$ und $\partial W \cap f^{-1}(f(x)) = \varnothing$. Dies lässt sich einfach auf einer Karte um x verifizieren.
   Nun ist $f(\partial w)$ kompakt, also abgeschlossen und $f(x) \notin f(\partial W)$, d.h. $f(x)$ liegt in der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus f(\partial W)$, also existiert ein $U \in \mathfrak{U}$, so dass $f(x) \in U$ und $U \cap f(\partial W) = \varnothing$. Sei V die Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(U)$, die x enthält. Dann gilt $V \cap \partial W = \varnothing$ und da V zusammenhängend ist folgt $V \subset W$. Also besitzt V eine abzählbare Basis der Topologie als Teilmenge einer relativ kompakten Menge und damit $V \in be$.

2. Behauptung: Jedes $V_0 \in \mathfrak{B}$ schneidet höchstens abzählbar viele $V \in \mathfrak{B}$.
   Sei $U \in \mathfrak{U}$, dann sind per Definition die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(U)$ disjunkt und da V_0 eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, kann V_0 höchstens abzählbarviele Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(U)$ treffen.
   Da es weiterhin nur abzählbar viele $f^{-1}(U)$ gibt, folgt, dass V_0 höchstens abzählbar viele $V \in \mathfrak{B}$ schneidet.

3. Behauptung: $\mathfrak{B}$ ist abzählbar.
   Fixiere dazu $V^* \in \mathfrak{B}$ und definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$ wie folgt:
   $\mathfrak{B}_n$ besteht asu allen $V \in \mathfrak{B}$, so dass $V_0, \ldots, V_n \in \mathfrak{B}$ existieren mit $V_0 = V^*$, $V_n = V$ und $V_{k-1} \cap V_k \neq \varnothing$ für $k = 1, \ldots, n$.
   Da X zusammenhängend ist folgt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$, denn für ein $V \in \mathfrak{B}$ wählen wir ein $y \in V$ und ein $x \in V^*$. Dann existiert eine Kurve $c : [0,1] \to X$ mit $c(0) = x$ und $c(1) = y$. Weiterhin ist $c([0,1])$ kompakt und damit finden wir eine endliche offene Überdeckung $V_0, \ldots, V_n$ von $c([0,1])$, wobei $V_o = V^*$ und $V_n = V$ ist. Weiterhin können wir nach einer Umsortierung ohne Einschränkung annehmen, dass $V_{i-1} \cap V_i \neq \varnothing$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Also liegt $V \in \mathfrak{B}_n$. Damit reduziert sich unser Problem darauf zu zeigen, dass $\mathfrak{B}_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist; dies tun wir induktiv.
   Klarerweise ist $\mathfrak{B}_0 = \{V^*\}$ abzählbar. Angenommen $\mathfrak{B}_n$ ist abzählbar. $\mathfrak{B}_{n+1}$ besteht dann aus allen $V \in \mathfrak{B}$, so dass ein $\tilde{V} \in \mathfrak{B}_n$ existiert mit $V \cap \tilde{V} \neq \varnothing$. Nach 2. existieren zu jedem $\tilde{V} \in be_n$ nur abzählbar viele V, die nicht-leeren Schnitt damit besitzen.
   Da $\mathfrak{B}_n$ nun abzählbar ist und pro $\tilde{V}$ nur abzählbar viele V existieren, ist auch $\mathfrak{B}_{n+1}$ abzählbar.

Damit besitzt X eine abzählbare Basis der Topologie. □

Satz 3.3 (Radó). *Jede Riemannsche Fläche X besitzt eine abzählbare Basis der Topologie.*

Beweis. Sei U eine Koordinatenumgebung von X. Wähle $K_0, K_1 \subset U$, so dass $z(K_0)$ und $z(K_1)$ disjunkte, kompakte Kreisscheiben sind und setze $Y := X \setminus (K_0 \cup K_1)$.
Nun genügt $\partial Y = \partial K_0 \cap \partial K_1$ dem Regulariätskriterium von Satz 2.29. Also existiert nacht Satz 2.28 eine stetige Funktion $u : \bar{Y} \to \mathbb{R}$, die harmonisch auf Y ist und $u|_{\partial K_0} \equiv 0$ und $u|_{\partial K_1} \equiv 1$ genügt.
Da u aufgrund der Randwerte nicht konstant sein kan erahlten wir eine nicht-triviale holomorphe 1-Form $\omega := d'U$ auf Y.
Nach [For99, Kor. 10.6] existiert eine holomorphe Stammfunktion f von $p^*\omega$ auf der universellen Überlagerung $p : \tilde{Y} \to Y$.
Da f nicht konstant ist, genügt f den Voraussetzungen von Lemma 3.2 (denn $\mathbb{C}$ ist hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Basis der Topologie). Also besitzt auch $\tilde{y}$ eine abzählbare Basis der Topologie und aus Lemma 3.1 folgt, dass Y eine abzählbare Basis der Topologie.
Nun ist $X = Y \cup U$ und U ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge in $\mathbb{C}$, besitzt also auch eine abzählbare Basis der Topologie.
Insgesamt ergibt sich also, dass auch X eine abzählbare Basis der Topologie besitzt. □

Definition 3.4. Sei X eine Riemannsche Fläche. Für alle $Y \subset X$ definieren wir $\mathfrak{h}(Y)$ durch Y vereinigt mit allen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von $X \setminus Y$.
$Y \subset X$ heißt *Runge-Teilmenge* falls $Y = \mathfrak{h}(Y)$.
Es gilt:

1. $\mathfrak{h}(\mathfrak{h}(Y)) = \mathfrak{h}(Y) \quad \forall Y \subset X$ ausrechnen

2. $Y_1 \subset Y_2$ impliziert $\mathfrak{h}(Y_1) \subset \mathfrak{h}(Y_2)$

Satz 3.5. *Sei $Y \subset X$ und X eine Riemannsche Fläche. Dann gilt:*

1. *Y abgeschlossen $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}(Y)$ abgeschlossen*

2. *Y kompakt $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}(Y)$ kompakt*

Beweis. 1. Seien $C_j, j \in J$ die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus Y$ Da $X \setminus Y$ ist offen und X ist eine Mannigfaltigkeit, deshalb sind alle C_j offen.
Sei $J_0 \subset J$, die Menge der $j \in J$, so dass C_j relativ kompakt ist. Dann erhalten wir

$$X \setminus \mathfrak{h}(Y) = \bigcup_{j \in J \setminus J_0} C_j$$

und ist damit offen, als Vereinigung offener Mengen und folglich ist $\mathfrak{h}(Y)$ abgeschlossen.

2. Wir können ohne Einschränkung $Y \neq \varnothing$ annehmen. Sei U eine offene, relativ kompakte Umgebung von Y. Diese existiert, denn wir können Y durch endlich viele relativ kompakte Koordinatenumgebungen überdecken. Die Vereinigung dieser Koordinatenumgebungen ergibt dann unser U. Sei weiterhin $C_j, j \in J$ wie oben.

   a) Behauptung: Jedes C_j trifft $\bar{U}$.
   Ansonsten wäre $C_j \subset X \setminus \bar{U}$, also $\bar{C}_j \subset X \setminus U \setminus X \setminus Y$. Da C_j eine Zusammenhangskomponente von $X \setminus Y$ ist, folgt $C_j = \bar{C}_j$. Also ist C_j offen und abgeschlossen, also $C_j = \varnothing$ oder $C_j = X$. Beides führt zum Widerspruch

   b) Behauptung: Nur endlich viele C_j treffen ∂U.
   Dies folgt daraus, dass ∂U kompakt ist und durch die disjunkten C_j überdeckt wird.

   Seien nun wieder $C_j, j \in J_0$ die relativ kompakten Zusammenhangskomponente von $X \setminus Y$ und $C_{j_1}, \dots, C_{j_n}$ diejenigen, die ∂U schneiden. Nach a) liegen alle anderen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten in U. Also ist

$$\mathfrak{h}(Y) \subset U \cup C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_n}$$

   und damit relativ kompakt. Da $\mathfrak{h}(Y)$ nach 1. aber auch abgeschlossen ist, ist es tatsächlich kompakt

□

Satz 3.6. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann existiert eine Folge kompakter Mengen $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. *Es gilt $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und*

2. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Nach Satz 3.3 besitzt X eine abzählbare Basis der Topologie. Wir bezeichnen Diese mit $\mathfrak{B}$. Dann definieren wir

$$\mathfrak{U} := \{B \in \mathfrak{B} \mid \bar{B} \text{ ist kompakt}\}.$$

Wir behaupten nun, dass bereits $\mathfrak{U}$ eine Basis der Topologie von X ist. Sei dazu $\varnothing \neq U \subset X$ und $x \in U$. Dann können wir eine relativ kompakte Koordinatenumgebung $V \subset U$ von x finden. Da $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie ist, finden wir ein $B \in \mathfrak{B}$, so dass $x \in B \subset V$. Also ist $\bar{B} \subset \bar{V}$ kompakt und damit liegt $B \in \mathfrak{U}$ und es gilt $x \in B \subset U$. Also ist $\mathfrak{U}$ eine weiter abzählbare Basis der Topologie von X.

Wir wählen nun eine Aufzählung für $\mathfrak{U} = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und setzen $K_1 := \bar{B}_1$. Wir konstruieren nun induktiv die gewünschte Folge von kompakten Teilmengen. K_1 wurde bereits konstruiert und wir setzen $k_1 = 1$. Gehen wir davon aus, dass auch K_n und k_n bereits konstruiert wurden, so gilt $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Da K_n kompakt ist, existiert ein $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, so dass $K_n \subset \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} B_i$. Setzen wir $K_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{k_{n+1}} \bar{B}_i$, so gilt $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und weiterhin ist K_{n+1} kompakt. Weiterhin gilt $k_{n+1} > k_n$.

Es bleibt nun nur noch zu zeigen, dass $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ gilt. Sei dazu $x \in X$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $B_j \in \mathfrak{U}$, so dass $x \in B_j$. Da $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x \in K_N = \bigcup_{i=1}^{k_N} \bar{B}_i$ gilt. □

Lemma 3.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von X mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei weiterhin $K \subset X$ kompakt. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset K_n$.*

Beweis. Angenommen es gälte $K \not\subset K_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann fänden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K \setminus K_n$. Da K kompakt ist, existierte eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in K$. Nun existiert aber ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x \in \mathring{K}_n$ gilt. Damit wäre $\mathring{K}_n$ eine offene Umgebung von x und wir fänden ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $x_{n_k} \in K_n$ für jedes $k \geq K$ gälte. Das aber bedeutete, dass eine zweites $\tilde{K} \in \mathbb{N}$ existieren müsste, so dass $x_{n_k} \in K_{n_k}$ für alle $k \geq \tilde{K}$ gälte. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass $x_n \in K \setminus K_n$ gilt. □

Lemma 3.8. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $K \subset X$ kompakt. Dann existiert ein offenes $M \Subset X$ mit $K \subset M$.*

Beweis. Zu jedem $z \in K$ finden wir eine relativ kompakte Koordinatenumgebung U_z. Dann ist aber $K \subset \bigcup_{z\in K} U_z$ und aus der Kompaktheit von K folgt, dass endlich viele $z_1, \ldots, z_n \in K$ existieren, so dass $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i}$. Setzen wir $M := \bigcup_{i=1}^{n} U_{z_i}$, so ist M offen und relativ kompakt, weiterhin gilt $K \subset M$, was die Behauptung zeigt. □

Korollar 3.9. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche.*
Dann existieren kompakte Runge-Teilmenge $K_j \subset X, j \in \mathbb{N}$ mit

1. $K_{j-1} \subset \mathring{K}_j \quad \forall j \geq 1$

2. $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = X$

Beweis. Nach Sat 3.6 existiert eine Ausschöpfung

$$K_0' \subset K_1' \subset \dots$$

durch Kompakta von X.
Setze nun $K_0 := \mathfrak{h}(K_0')$
Seien $K_0, \dots, K_n$ bereits konstruiert. Dann existiert ein kompaktes $M \subset X$ mit $K_n' \cup K_n \subset \mathring{M}$. Dieses M erhalten wir, in dem wir K_n' und K_n durch endlich viele, relativ kompakte Koordinatenumgebungen überdecken. M ist dann deren Vereinigung. Anschließend setzen wir $K_{n+1} := \mathfrak{h}(M)$. □

Lemma 3.10. *Seien $K_1, K_2 \subset X$ kompakte Teilmengen und X eine Riemannsche Fläche mit $K_1 \subset \mathring{K}_2$ und $\mathfrak{h}(K_2) = K_2$.*
Dann existiert eine offene Runge-Teilmenge $Y \subset X$ mit $K_1 \subset Y \subset K_2$.
Weiterhin kann Y so gewählt werden, dass sein Rand regulär ist.

Beweis. Zu jedem $x \in \partial K_2$ existiert eine Koordinatenumgebung U von x, so dass $K_1 \cap U = \varnothing$. Wähle eine kompakte Scheibe D, die x im Inneren enthält. Da ∂K_2 auch kompakt ist, wird es durch endlich viele $D_1, \dots, D_k$ überdeckt. Setze $Y := K_2 \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_k)$.
Dann ist Y offen und liegt zwischen K_1 und K_2.
Seien $c_j, j \in J$ die Zusammenhangskomponenten von $X \setminus K_2$. Nach Voraussetzund sind diese nicht relativ kompakt. Nun treffen alle D_i mindestens ein C_j, da $D_i \cap (Y \setminus K_2) \neq \varnothing$ sein muss. DA alle D_i zusammenhängend sind, sind die $D_i \cap C_j$ zusammenhängend un nicht relativ kompakt. Also existieren keine relativ kompakten Zusammenhangskomponenten in $X \setminus Y$. Also $Y = \mathfrak{h}(Y)$.
Weiterhin sind nach (22.18) alle Randpunkte von Y regulär. □

Lemma 3.11. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ eine offene Menge und $Z \subset Y$ eine Zusammenhangskomponente von Y. Dann ist Z offen.*

Beweis. Sei $x \in Z$. Dann finden wir eine offene, zusammenhängende Koordinatenumgebung $U \subset Y$ mit mit $x \in U$. Nun ist aber Z die maximale zusammenhängende Teilmenge, die x enthält und da U auch zusammenhängend gewählt wurde, muss $U \subset Z$ gelten. Also ist x ein innerer Punkt und damit Z offen. □

Satz 3.12. *Sei $Y \subset X$ eine offene Runge-Teilmenge und X eine Riemannsche Fläche.*
Dann ist jede Zusammenhangskomponente runge.

Beweis.
1. Seien $Y_i, i \in I$, die Zusammenhangskomponenten von Y. Nach Lemma 3.11 sind alle Y_i offen. Setze nun $A := X \setminus Y$ und $A_k, k \in \mathbb{N}$ die Zusammenhangskomponenten von A. Dann sind alle A_k abgeschlossen, aber nicht kompakt.

2. Behauptung: Für jedes $i \in I$ gilt: $\bar{Y}_i \cap A \neq \varnothing$.
   Ansonsten wäre $\bar{Y}_i \subset Y$. Da $\bar{Y}_i \cap \bigcup_{j \neq i} Y_j = \varnothing$. Also ist $Y_i = \bar{Y}_i$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass X zusammenhängend ist.

3. Behauptung: $C \cap A \neq \varnothing$ für jede Zusammenhangskomponente C von $X \setminus Y_i$.
   Ansonsten gäbe es ein $j \neq i$, so dass $C \cap Y_j \neq \varnothing$.
   Nun ist aber $Y_j \subset X \setminus Y_i$ zusammenhängend und aus dem nicht leeren Schnitt folgte $Y_j \subset C$, da C maximal zusammenhängend ist. Weiterhin folgt dann auch $\bar{Y}_j \subset \bar{C} = C$, da C bereits abgeschlossen ist. Nach 2. würde dies bedeuten, dass $A \cap C \neq \varnothing$ gelten müsste. Also genau, was wir zeigen wollten.

4. Sei nun C eine Zusammenhangskomponente von $X \setminus Y_i$. Dann trifft C nach 3. mindestens ein A_k. Also ist $A_k \subset C$ und da A_k nicht kompakt ist, ist C auch nicht kompakt.

Damit ist Y_i runge. □

Satz 3.13. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche.*
Dann existiert eine Ausschöpfung $Y_0 \Subset Y_1 \Subset \dots$ von X durch relativ kompakte Runge-Gebiete. Weiterhin hat jedes Y_i regulären Rand.

Beweis. Sei $K \subset X$ kompakt. Da K kompakt ist, kann es nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen, ansonsten könnten wir eine Folge ohne konvergente Teilfolgen konstruieren. Wählen wir nun aus jeder dieser endlich vielen Zusammenhangskomponenten einen Punkt aus, so können wir diese durch endlich viele Kurven verbinden. Vereinigen wir nun K mit den Bildern der Kurven, die auch kompakt sind, so ist dies eine endliche Vereinigung und das Resultat ist wieder kompakt und nach Konstruktion zusammenhängend. Wir bezeichnen es mit K_1. Es folgt $K \subset K_1$. Nach 3.8 finden wir ein kompaktes $K_2 \subset X$ mit $K_1 \subset \mathring{K}_2$. Nach Lemma 3.10 existiert eine offene Runge-Teilmenge $\tilde{Y}_1 \subset X$ mit $K_1 \subset \tilde{Y}_1 \subset \mathfrak{h}(K_2)$. mit regulärem Rand.
Wählen wir nun die Zusammenhangskomponente Y_1, die K_1 enthält, so ist Y_1 nach Satz ein Runge-Gebiet und hat nach Bem nach Satz 2.29 auch regulären Rand.
Nun finden wir eine Ausschöpfung von X durch Kompakta $K_1 \subset K_2 \subset \dots$.
Durch das obige vorgehen erhalten wir ein Y_1, das K_1 enthält.
Seien nun $Y_1, \dots, Y_k$ bereits konstruiert. Setzen wir $\tilde{K}_k = K_k \cup \bar{Y}_k$. Dann ist $\tilde{K}_k$ kompakt und wir können wieder wie oben ein Runge-Gebiet $Y_k \supset \tilde{K}_k$ finden.
Damit ist die gewünschte Ausschöpfung konstruiert. □

4 Weyls Lemma

Definition 4.1. Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen und $f \in \mathcal{E}(X)$.
Dann ist der *Träger* von f definiert als

$$\operatorname{Supp}(f) := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$$

Dies ermöglicht es uns den Raum der *Testfunktionen* auf X zu definieren:

$$\mathcal{D}(X) := \{f \in \mathcal{E}(X) | \operatorname{Supp}(f) \subset X \text{ kompakt}\}$$

Eine Folge $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)$ heißt konvergent gegen $f \in \mathcal{D}(X)$, schreibe $f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} f$, falls ein kompaktes $K \subset X$ Mit $\operatorname{Supp}(f), \operatorname{Supp}(f_\nu) \subset K$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ und für alle $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T \in \mathbb{N}^2$ gilt:

$$D^\alpha_\nu \rightrightarrows D^\alpha f \qquad \text{auf } K$$

mit $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$.

Definition 4.2 (Distribution). Der topologische Dualraum, $\mathcal{D}(X)'$, von $\mathcal{D}(X)$, wird als *Raum der Distributionen* bezeichnet. Ein stetiges, lineares Funktional $T \in \mathcal{D}(X)'$ heißt *Distribution*.

Beispiele 4.3.

1. Jees $h \in C(X)$ definiert eine Distribution $T_h \in \mathcal{D}(X)'$ durch

$$T_h[f] := \iint_X h(z) f(z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \qquad z = x + iy \qquad f \in \mathcal{D}(X)$$

T_h ist klarerweise linear und für die Stetigkeit wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(X)$ mit $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \in \mathcal{D}(X)$.
Also finden wir ein kompaktes $K \subset X$ mit $\operatorname{Supp}(f_n), \operatorname{Supp}(f) \subset K$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f_n - f\|_K < \frac{\varepsilon}{\|h\|_K\|} \qquad \forall n \geq N$$

$||$ bezeichnet dabei das Volumen von K. Dann erhalten wir für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}
|T_h[f_n] - T_h[f]| &= |T_h[f_n - f]| \\
&= |\iint_X h(z)(f_n(z) - f(z))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y| \\
&\leq \iint_K |h(z)| \cdot |f_n(z) - f(z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leq \|h\|_K \cdot \|f_n - f\|_K \cdot \iint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \|h\|_K \cdot \|f_n - f\|_K \cdot |K| \\
&< \|h\|_K \frac{\varepsilon}{\|h\|_K |K|} |K| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

und damit die Stetigkeit von T_h. Weiterhin ist die Abbildung $C(X) \to \mathcal{D}(X)', \quad h \mapsto T_h$ sogar injektiv. Dies ist eine direkte Folge des Fundamentallemmas der Variationsrechnung Deshalb werden häufig Distributionen direkt mit der erzeugenden Funktion identifiziert. Wir werden diese Notation hier nicht verwenden.

2. Nicht alle Distributionen sind von der obigen Form. Ein Gegenbeispiel stellt die Diracsche Delta Distribution dar. Für ein $a \in X$ ist sie durch

$$\delta_a[f] := f(a) \qquad \forall f \in \mathcal{D}(X)$$

definiert. Wir werden im weiteren Verlauf ausschließlich versuchen zu zeigen, dass alle für uns interessanten Distributionen von der ersten Form sind.

Definition 4.4 (Ableiten von Distributionen). Ausgehend von unserem ersten Beispiel und der partiellen Integration definieren wir für $\alpha \in \mathbb{N}^2$

$$(D^\alpha T)[f] := (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha f] \qquad \forall f \in \mathcal{D}(X)$$

Nun bedeutet unsere spezielle Wahl der Konvergenz, dass die Konvergenz $f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ auch die Konvergenz $D^\alpha f_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}} D^\alpha f$ impliziert, was zur Folge hat, dass $D^\alpha T$ wieder stetig ist, also in $\mathcal{D}(X)'$ liegt.

Lemma 4.5. *Sei $X \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset X$ kompakt und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei weiterhin $g : X \times I \to \mathbb{C}$ glatt und* $\operatorname{Supp}(g) \subset K \times I$.
Wählen wir nun ein $T \in \mathcal{D}(X)'$, so ist die Abbildung

$$t \mapsto T_z[g(z,t)]$$

glatt auf I und genügt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_z[g(z,t)] = T_z\left[\frac{\partial g(z,t)}{\partial t}\right] \tag{$*$}$$

T_z soll dabei nur verdeutlichen dass T nur auf $g(z,t)$ als Variable von z operiert; t bleibt als Parameter unberührt.

Beweis. Es genügt die Formel ($*$) zu zeigen, da dann die Glattheit von $T_z[g(z,t)]$ aus der Glattheit von g folgt.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T_z[g(z,t)] &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_z[g(z,t+h)] - T_z[g(z,t)]) \\ &= \lim_{h\to 0} T_z\left[\frac{1}{h}(g(z,t+h) - g(z,t))\right]\end{aligned}$$

Für festes $t \in I$ und $h \in \mathbb{R}^\times$ klein genug, ist $f_h(z) := \frac{1}{h}(g(z,t+h) - g(z,t))$ wohldefiniert und in $\mathcal{D}(X)$. Weiterhin gitl $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\partial g(\cdot,t)}{\partial t}$, da g glatt ist.
Aus der Stetigkeit von T folgt damit

$$\lim_{h\to 0} T_z[f_h] = T_z[\lim_{h\to 0} f_h] = T_z\left[\frac{\partial g(z,t)}{\partial t}\right]$$

□

Lemma 4.6. *Seien $X, Y \subset \mathbb{C}$ offen $K \subset X$ bzw. $L \subset Y$ kompakt. Sei weiterhin $g : X \times Y \to \mathbb{C}$ glatt mit* $\mathrm{Supp}(g) \subset K \times L$.
Dann gilt für beliebige $T \in \mathcal{D}(X)'$

$$T_w\left[\iint_Y g(w,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] = \iint_Y T_w[g(w,z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad z = x + iy$$

Beweis. Nach Lemma 4.5 ist $T_w[g(w,z)]$ glatt und es gilt $\mathrm{Supp}(T_w[g(w,z)]) \subset L$, denn für $z \notin L$ ist $g(\cdot,z) \equiv 0$ und damit $T_w[(g(w,z)] = 0$.
Also existiert das Integral $\iint_Y T_w[g(w,z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, insbesondere lässt es sich durch Riemann-Summen approximieren.
Dazu wählen wir ein Rechteck $R \subset \mathbb{C}$, so dass $L \subset R$ und die Seiten von R parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.
Wir können g durch 0 auf $K \times R$ fortsetzen, d.h. wir können si als Funktion auf $K \times R$ auffassen.
Als nächstes unterteilen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ R in n^2 Teilrechtecke $R_{n\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n^2$. Diese Teilrechtecke werden dabei alle gleich groß gewählt. Sei weiterhin $z_{n\nu} \in R_{n\nu}$ und $F = |R|$.
Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$G_n(w) := \frac{F}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n^2} g(w, z_{n\nu})$$

gegen $\iint_Y g(w,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Nun ist g gleichmäßig stetig, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(w,z) - g(\tilde{w},\tilde{z})| < \frac{\varepsilon}{F}$$

für beliebige $\|(w,z) - (\tilde{w},\tilde{z})\| < \delta$. Wir finden also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_{n_\nu} - z| < \delta$ für alle $z \in R_{n_\nu}$ und für alle $n \geq N$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
|G_n(w) - \iint_R g(w,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y| &= |\sum_{\nu=1}^{n^2} \left(\frac{F}{n^2} g(w, z_{n_\nu}) - \iint_{R_{n_\nu}} g(w,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \left| \iint_{R_{n_\nu}} (g(w,z_{n_\nu}) - g(w,z))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \iint_{R_{n_\nu}} |g(w,z_{n_\nu}) - g(w,z)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{n^2} \iint_{R_{n_\nu}} \frac{\varepsilon}{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Also konvergiert G_n gleichmäßig gegen $\iint_R g(\cdot,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Die gleiche Argumentation kann für beliebige Ableitungen $D^\alpha G_n$ durchgeführt werden und wir erhalten, dass

$$G_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \iint_Y g(\cdot,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gilt. Also folgt aus der Stetigkeit von T

$$T_w\left[\iint_Y g(w,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] = \lim_{n\to\infty} T[G_n] = \iint_Y T_w[g(w,z)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□

4.1 Glättung von Funktionen

Definition 4.7 (Glättungskern). $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ heißt *Glättungskern* falls

1. $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \bar{D}$
2. ρ ist rotationssymmetrisch zum Ursprung
3. $\rho \geq 0$ (insbesondere also reellwertig)

4. $\iint_{\mathbb{C}} \rho(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 \; z = x + iy$

Für $\varepsilon > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\rho\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

Dann ist $\operatorname{Supp}(\rho_\varepsilon) \subset \bar{D}(\varepsilon)$ und $\iint_{\mathbb{C}} \rho_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$.

Beispiele 4.8. Das Standardbeispiel für einen Glättungskern stellt die Funktion

$$\varphi(z) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|z|^2}\right) & |z| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass diese glatt ist. Weiterhin ist ihr Integral echt größer 0, weshalb sie auch so normiert werden kann, dass Bedingung 4 erfüllt ist.

Definition 4.9. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U^{(\varepsilon)} := \{z \in U | \bar{B}_\varepsilon(z) \subset U\}$ und für $f \in C(U)$ definieren wir

$$\operatorname{sm}_\varepsilon f : U^{(\varepsilon)} \to \mathbb{C}, \quad \operatorname{sm}_\varepsilon f(w) := \iint_U \rho_\varepsilon(w - z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad z = x + iy$$

$\operatorname{sm}_\varepsilon f$ wird als *Glättung* von f bezeichnet.
Aus der Leibniz-Regel folgt, dass Integration und Differentiation vertauscht, also ist $\operatorname{sm}_\varepsilon f \in \mathcal{E}(U^{(\varepsilon)})$, was auch den Namen „Glättung“ erklärt.

Lemma 4.10. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{E}(U)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gelten:*

1. *Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^2$ ist*

$$D^\alpha(\operatorname{sm}_\varepsilon f) = \operatorname{sm}_\varepsilon(D^\alpha f).$$

2. *Falls $z \in U^{(\varepsilon)}$ und f harmonisch auf $B_\varepsilon(z)$ ist, so gilt:*

$$\operatorname{sm}_\varepsilon f(z) = f(z)$$

Beweis. 1.

$$\begin{aligned} D^\alpha(\operatorname{sm}_\varepsilon f)(w) &= D^\alpha \iint_U \rho_\varepsilon(w - z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_U D^\alpha_w \rho(w - z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (1) \\ &= \iint_U (-1)^{|\alpha|} D^\alpha_z \rho(w - z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (2) \\ &= \iint_U (-1)^{2|\alpha|} \rho_\varepsilon(w - z) D^\alpha_z f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y && (3) \\ &= (\operatorname{sm}_\varepsilon D^\alpha f)(z) \end{aligned}$$

(1) folgt dabei aus der Leibnizregel, (2) erhält man daraus, dass D^α zunächst auf w wirkt (deshalb auch der Index), wir wollen aber, dass er auf z wirkt um die Partielle Integration in (3) anwenden zu können. Dies ist möglich in dem man das Vorzeichen, das durch die Kettenregel entsteht ausgleicht.

2. Wenn f harmonisch auf $B_\varepsilon(z)$ ist, können wir die Mittelwerteigenschaft anwenden und erhalten:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \qquad \forall r \in]0,\varepsilon[$$

Die folgende Rechnung liefert dann die Behauptung:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{sm}_\varepsilon f)(w) &= \iint_u \rho_\varepsilon(w-z)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{B_\varepsilon(z)} \rho_\varepsilon(z-w)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)f(z+w)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \rho_\varepsilon(re^{i\varphi})f(w+re^{i\varphi})r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\varepsilon} \tilde{\rho}_\varepsilon(r)r\,\mathrm{d}r \cdot 2\pi f(w) \\
&= f(z) \qquad (*)
\end{aligned}$$

(*) gilt dabei, weil

$$\begin{aligned}
1 &= \iint_{B_\varepsilon(0)} \rho_\varepsilon(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \tilde{\rho}_\varepsilon(r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_0^{\varepsilon} \tilde{\rho}_\varepsilon(r)r\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

□

Satz 4.11 (Weyls Lemma). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $T \in \mathcal{D}(U)'$ mit $\Delta T \equiv 0$.*
Dann existiert ein $h \in \mathcal{E}(U)$ mit $\delta h = 0$, so dass

$$T[f] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h(z)f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Für $z \in U^{(\varepsilon)}$ hat $w \mapsto \rho_\varepsilon(w-z)$ kompakten Träger in U. Damit ist

$$h_\varepsilon : U^{(\varepsilon)} \to \mathbb{C}, \quad h_\varepsilon(z) := T_w[\rho_\varepsilon(w-z)]$$

wohldefiniert. Nach Lemma 4.5 ist $h_\varepsilon \in \mathcal{E}(U^{(\varepsilon)})$.

Sei nun $f \in \mathcal{D}(U)$ mit $\operatorname{Supp}(f) \subset U^{(\varepsilon)}$. Dann hat $\operatorname{sm}_\varepsilon f$ kompakten Träger in U, denn für $w \in U$ mit $B_\varepsilon(w) \cap U = \varnothing$ ist $f|_{B_\varepsilon(w)\cap U} \cong 0$ und es folgt $\operatorname{sm}_\varepsilon f(w) = 0$. Also gilt $\operatorname{Supp} \operatorname{sm}_\varepsilon f \subset \{z \in U | B_\varepsilon(w) \cap U \neq \varnothing\} =: M$. Nun ist $\operatorname{Supp}(f)$ kompakt und damit beschränkt. Sei S das zugehörige Supremum. Für ein beliebiges $w \in M$, finden wir nun ein $z \in B_\varepsilon(w) \cap U$ und wir erhalten

$$|w| \leq |w-z| + |z| < S + \varepsilon$$

Also ist M und damit $\operatorname{Supp} \operatorname{sm}_\varepsilon f$ beschränkt. Da $\operatorname{Supp} \operatorname{sm}_\varepsilon f$ auch abgeschlossen ist, ist es sogar kompakt und wir können folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
T[\operatorname{sm}_\varepsilon f] &= T_w\left[\iint_U \rho_\varepsilon(w-z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] \\
&= \iint_U T_w[\rho_\varepsilon(w-z)] f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (*) \\
&= \iint_U h_\varepsilon(z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $T[f] = T[\operatorname{sm}_\varepsilon f]$ gilt. Nun können f auch als Funktion auf $\mathbb{C}$ auffassen, in dem wir es durch 0 fortsetzen. Dann liefert uns [For99, Kor. 13.3] die Existenz von $\psi \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ mit $\Delta\psi = f$.
Dann ist ψ harmonisch auf $V := \mathbb{C} \setminus \operatorname{Supp}(f)$. Also liefert uns Lemma 4.10 $\psi|_{V^{(\varepsilon)}} \equiv \operatorname{sm}_\varepsilon \psi|_{V^{(\varepsilon)}}$. Setze $\varphi := \psi - \operatorname{sm}_\varepsilon \psi$. Dann folgt $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset V^c = \operatorname{Supp}(f) \subset U$, d.h. φ hat kompakten Träger in U und es gilt

$$\Delta\varphi = \Delta\psi - \operatorname{sm}_\varepsilon \Delta f = f - \operatorname{sm}_\varepsilon f$$

Da nun aber $\Delta T = 0$, folgt $T[\Delta\varphi] = 0$ und schlussendlich

$$\begin{aligned}
T[f] &= T[\operatorname{sm}_\varepsilon f + \Delta\varphi] \\
&= T[\operatorname{sm}_\varepsilon f] \\
&= \iint_{U^{(\varepsilon)}} h_\varepsilon(z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Nun gilt für beliebige $0 < \varepsilon', \varepsilon'' \leq \varepsilon$: $U^{(\varepsilon)} \subset U^{(\varepsilon')}, U^{(\varepsilon'')}$ und es folgt

$$T[f] = \iint_{U^{(\varepsilon)}} h_{\varepsilon'}(z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{U^{(\varepsilon'')}} (z) f(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Also folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $h_{\varepsilon'} \equiv h_{\varepsilon''}$ auf $U^{(\varepsilon)}$, d.h. $h_{\varepsilon'}$ wird für $\varepsilon' < \varepsilon$ konstant auf $U^{(\varepsilon)}$ und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, finden wir ein $h \in \mathcal{E}(U)$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Korollar 4.12. *Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{D}(U)'$ mit $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$.*
Dann existiert ein $h \in \mathcal{O}(U)$, so dass

$$T[f] = \iint_U h(z) f(z) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \forall f \in \mathcal{D}(U)'$$

Beweis. Aus $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$ folgt

$$\Delta T = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T \right) = 0$$

Also existiert aufgrund von Satz 4.11 ein $h \in \mathcal{E}(U)$, so dass $T = T_h$ und erneut aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung folgt

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$$

und damit $h \in \mathcal{O}(U)$. □

5 Fréchet Räume

Definition 5.1. Sei E ein topologischer Vektorraum. E heißt *Fréchet-Raum*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert eine abzählbare Familie von Seminormen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die die Topologie von E erzeugen.
2. E ist Hausdorffsch.
3. E ist vollständig.

Weiterhin definieren wir für $\varepsilon > 0$ und $x \in E$ die Menge

$$U(p_k, \varepsilon, x) := \{y \in E \mid p_k(x-y) < \varepsilon\}$$

Bemerkung 5.2.
1. Konvergenz bezüglich der Topologie von E bedeutet dann nichts anderes, als Konvergenz bezüglich aller Halbnormen p_k.
2. Die erste Bedingung bedeutet, dass $U \subset X$ genau dann offen ist, falls zu jedem $x \in U$ ein $K \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

   $$\cap_{k=1}^{K} U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$$

   gilt.
3. Aus der Bedingung, dass E Hausdorffsch ist, folgt, dass $x = y$ dann und nur dann gilt, wenn $p_k(x-y) = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt leicht aus der Tatsache, dass ansonsten $x \in U(p_k, \varepsilon, y)$ liegen müsste und damit x in jeder offenen Umgebung von y enthalten wäre. Umgekehrt natürlich genau so.

Proposition 5.3. *Sei E ein Fréchet-Raum mit Halbnormen $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist*

$$d : E \times E \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)}$$

eine Metrik und die von d induzierte Topologie stimmt mit der Topologie von E überein. Also ist E insbesondere metrisierbar. d wird auch als Fréchet-Metrik *bezeichnet.*

Beweis. Zunächst ist die Abbildung d wohldefiniert, denn die Abbildung, die durch $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ gegeben ist, bildet das Intervall $[0, \infty[$ auf das Intervall $[0, 1[$ ab. Der Rest folgt aus der Konvergenz der geometrischen Reihe. Wir bezeichnen diese zweite Abbildung mit f.

Die Symmetrie der Metrik ist klar und für die Definitheit wählen wir $x \neq y \in E$. Dann existiert nach der dritten Bemerkung ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $p_k(x-y) > 0$ ist. Dann ist aber $d(x,y) \geq 2^{-k} p_k(x-y) > 0$. Da für $x = y$ klarerweise $d(x,y) = 0$ gilt, folgt die Definitheit von d. Es bleibt also nur noch die die Dreiecksungleichung zu zeigen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass f streng monoton wachsend ist, denn die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ist positiv auf dem gesamten Intervall $[0, \infty[$. Nun folgt aus der Dreicksungleichung für die Halbnormen, dass $p_k(x+y) \leq p_k(x) + p_k(y)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Aus der Monotonie von f erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
f(p_k(x+y)) &\leq f(p_k(x) + p_k(y)) \\
&= \frac{p_k(x) + p_k(y)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} \\
&= \frac{p_k(x)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} + \frac{p_k(y)}{1 + p_k(x) + p_k(y)} \\
&\leq \frac{p_k(x)}{1 + p_k(x)} + \frac{p_k(y)}{1 + p_k(y)} \\
&= f(p_k(x)) + f(p_k(y))
\end{aligned}$$

Aus dieser Dreiecksungleichung für $f \circ p_k$ folgt direkt die Dreieckungleichung für d, da die Gleichung $d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(p_k(x-z))$ gilt.

Nun wenden wir uns der Topologie zu. Wir wissen, dass die Bälle

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in E \mid d(x,y) < \varepsilon\} \qquad \forall x \in E, \quad \varepsilon > 0$$

die Topologie der Metrik d erzeugen. Um nun zu zeigen, dass die Topologie von E mindestens genau so fein ist, wie die von d erzeugte, müssen wir zeigen, dass die metrischen Bälle bezüglich der Topologie von E offen sind. Genauer reicht es uns sogar zu zeigen, dass x ein innerer Punkt von $B_\varepsilon(x)$ bezüglich der eigentlichen Topologie von E ist, denn für jeden andern Punkt $y \in B_\varepsilon(x)$ finden wir ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(y) \subset B_\varepsilon(x)$ und dann brauchen wir nur eine (bzgl. E) offene Umgebung U von y mit $U \subset B_\delta(y)$ zu finden. Also zeigen wir auch hier, dass y ein innerer Punkt von $B_\delta(y)$ ist. Sei nun also $B_\varepsilon(x)$ gegeben. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Wählen wir nun ein $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2K}$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass für $0 \leq x < \delta$ $0 \leq f(x) < \tilde{\varepsilon}$ gilt. Dies folgt aus der Stetigkeit von f. Wir behaupten nun, dass $U := \bigcap_{k=1}^{K-1} U(p_k, \delta, x) \subset B_\varepsilon(x)$ gilt. Dieses U ist dann nach der zweiten Bemerkung offen und wir haben die Behauptung gezeigt. Sei nun also $y \in U$, dann gilt $p_k(x-y) < \delta$ für alle

$k \leq K - 1$ und damit

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(p_k(x-y)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{K-1} 2^{-k} f(p_k(x-y)) + \sum_{k=K}^{\infty} 2^{-k} \\ &< \sum_{k=1}^{K-1} f(p_k(x-y)) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sum_{k=1}^{K-1} \tilde{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= (K-1)\tilde{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die von d induzierte Topologie mindestens so fein ist, wie die Topologie von E. Sei dazu $U \subset E$ offen. Wählen wir $x \in U$, so existiert ein $K \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $\bigcap_{k=1}^{K} U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$. Weiterhin können wir zu f explizit eine Umkehrfunktion angeben. Für diese gilt

$$f^{-1} := [0,1[\to [0,\infty[, \quad f^{-1}(x) := \frac{x}{1-x}$$

und damit ist f^{-1} auch stetig und wir finden ein $\delta > 0$, so dass $0 \leq f^{-1}(x) < \varepsilon$ für alle $0 \leq x < \delta$. Setzen wir $\tilde{\delta} := 2^{-K}\delta$, so behaupten wir, dass $B_{\tilde{\delta}}(x) \subset \cap_{j=1}^{K} U(p_j, \varepsilon, x) \subset U$ gilt. Sei dazu $y \in B_{\tilde{\delta}}(x)$. Aus $d(x,y) < \tilde{\delta}$ folgt dann, dass $2^{-k} f(p_k(x-y)) < 2^{-K}\delta$ gilt. Insbesonder erhalten wir für alle $k \leq K$, dass $f(p_k(x-y)) < 2^{-(K-k)}\delta \leq \delta$ gilt. Und aus der Stetigkeit von f^{-1} folgt, dass $p_k(x-y) < \varepsilon$ ist für alle $k \leq K$. Also ist $y \in \bigcap_{k=1}^{K} U(p_k, \varepsilon, x) \subset U$. Damit ist U auch bezüglich der von d induzierten Topologie offen. Insgesamt haben wir die Äquivalenz der Topologien gezeigt. ☐

Satz 5.4. *Sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann ist F ein Fréchet-Raum.*

Beweis. Wir können F mit der Teilraumtopologie ausstatten. Dann ist F als abgeschlossener Teilraum automatisch vollständig. Weiterhin wird die Topologie wieder durch eine abzählbare Familie von Halbnormen erzeugt, denn wir können die Familie von E auf F einschränken. Dass F Hausdorffsch ist, ergibt sich daraus, dass wir die Topolgie von F auch dadurch erhalten, dass wir dei Metrik von E auf F einschränken. Dann ist F aber auch ein metrischer Raum und damit insbesondere Hausdorffsch. Insgesamt ist F also ein Fréchet-Raum. ☐

Satz 5.5. *Seien E, F Fréchet-Räume. Dann ist $E \times F$ mit der Produkttopologie auch ein Fréchet-Raum.*

Beweis. Da E und F jeweils eine Metrik besitzen, wird die Produkttopologie von $d(x,y) = d_E(x_1,y_1)+d_Y(x_2,y_2)$, wobei $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ gilt, induziert. Dann ist $E\times F$ aber direkt vollständig und hausdorffsch. Weiterhin erhalten wir die gesuchte abzählbare Familie von Halbnormen, in dem wir die beiden Familien von E und F verwenden. Diese erzeugen die gleiche Topologie, wie die Produkttopologie. Dies lässt sich auf analoge Art und Weise wie im Beweis von Proposition 5.3 zeigen. □

Satz 5.6 (von Hahn-Banach). *Sei E ein Fréchet-Raum, $E_0 \subset E$ ein Untervektorraum und $\varphi_0 \in E_0'$. Dann existiert ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi|_{E_0} \equiv \varphi_0$*

Beweis. Wir verweisen auf [Rud91, Satz3.6]. □

Korollar 5.7. *Sei E ein Fréchet-Raum. Seien weiterhin $A \subset B \subset E$ Untervektorräume. Falls für jedes $\varphi \in E'$ mit $\varphi|_A \cong 0$ auch $\varphi|_B \cong 0$ ist, so liegt A dicht in B.*

Beweis. Sei A nicht dicht in B. Wir versuchen nun eine stetige lineares Funktionalf auf E zu konstruieren, dass zwar auf A verschwindet, jedoch nicht auf B. Wir finden nun ein $b_0 \in B\setminus\bar{A}$. Setzen wir $E_0 := \bar{A}\oplus\mathbb{C}b_0$ und

$$\varphi_0 : E_0 \to \mathbb{C}, \quad a+\lambda b_0 \mapsto \lambda,$$

so ist φ_0 stetig. Angenommen φ_0 wäre nicht stetig, dann wäre es aufgrund der Linearität insbesondere nicht in 0 stetig. Also fänden wir eine Folge $(a_n+\lambda_n b_0)_{n\in\mathbb{N}} \subset E_0$ mit Grenzwert 0, wobei aber $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegeon 0 konvergiert. Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, dass $\lambda_n \geq 0$, denn wir finden auf jeden Fall eine Teilfolge mit $\lambda_n \geq 0$ oder eine Teilfolge mit $\lambda_n \leq 0$. Im zweiten Fall betrachten wir $(-\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-(a_n+\lambda_n b_0))_{n\in\mathbb{N}}$, wobei dann auch diese Folge gegen 0 konvergiert. Dies folgt sofort durch die Halbnormen. Unter der Voraussetzung, dass $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen 0 konvergiert, fänden wir eine Teilfolge $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $C>0$, so dass $\lambda_{n_l} > C$ für beliebige $l\in\mathbb{N}$ gelten würde. Dann setzten wir $\lambda := \liminf_{l\to\infty}\lambda_{n_l} \in [C,\infty]$.

Wäre nun $\lambda=\infty$. Dann müsste bereits $\lambda_{n_l}\to\infty$ für $\to\infty$ gelten. Nun konvergierte die Folge $(a_n+\lambda_n b_0)_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich jeder Halbnorm p_k gegen 0, also fänden wir $K_k>0$, so dass

$$p_k(a_{n_l}+\lambda_{n_l}b_0) < K_k \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

gelten würde. Wir erhielten dann, dass weiterhin

$$p_k(\lambda_{n_l}^{-1}a_{n_l}+b_0) < \lambda_{n_l}^{-1}K_k \xrightarrow{l\to\infty} 0$$

für jedes $k\in\mathbb{N}$ wäre. Damit wäre aber b_0 in $\bar{A}$ enthalten. Ein Widerspruch.

Für denn Fall, dass $\lambda<\infty$ wäre, fänden wir eine weitere Teilfolge, die gegen λ konvergierte. Wir gehen ohne Einschränkung davon aus, dass bereits $(\lambda_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ gegen λ konvergierte. Dann erhielten wir aber aus der Dreiecksungleichung

$$p_k(a_{n_l}+\lambda b_0) \leq p_k(a_{n_l}+\lambda_{n_l}) + |\lambda-\lambda_{n_l}|p_k(b_0) \to 0$$

für $l \to \infty$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Damit würde aber $\lim_{l\to\infty}(-a_{n_l}) = \lambda b_0$ gelten und es wäre wieder $b_0 \in \bar{A}$. Also ist φ_0 stetig.

φ_0 lässt sich nun nach Satz 5.6 auf ganz E fortsetzen. Also existiert ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi|_{E_0} \cong \varphi$. Dann ist aber $\varphi|_A$ konstant 0, aber dies gilt nicht für $\varphi|_B$. $\square$

6 Der Rungesche Approximationssatz

Proposition 6.1. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ offen.*
Dann besitzen $\mathcal{E}(Y)$ und $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$ Struktur eines Fréchet-Raums.

Beweis. Sei für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Menge $K_j \subset Y$ kompakt mit $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathring{K}_j = Y$ und $K_j \subset U_j$, wobei (U_j, z_j) Karten sind. Solche K_j können konstruiert werden, da wir im Beweis zu Korollar3.9 eine abzählbare Basis der Topologie mit relativ kompakten Teilmengen gefunden haben. Für jedes $\nu = (\nu_1, \nu_2)^T \in \mathbb{N}^2$ eine Halbnorm

$$p_{j\nu} : \mathcal{E}(Y) \to \mathbb{R}, \quad p_{j\nu}(f) := \|D_j^\nu f\|_{K_j},$$

wobei $D_j^\nu := \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^{\nu_2}$ mit $z_j = x_j + iy_j$. Dies ist eine abzählbare Familie von Halbnormen. Diese können wir verwenden, um eine Topologie auf $\mathcal{E}(Y)$ zu definieren, in dem wir als Basis der Topologie endliche Schnitte der Mengen $U(p_{j\nu}, \varepsilon, y)$ für beliebige $\varepsilon > 0$ und $y \in Y$ verwenden (vgl. Definition 5.1 und Bemerkung 5.2). Diese Topologie ist hausdorffsch, denn falls $0 \neq f \in \mathcal{E}(Y)$, finden wir eine Halbnorm, so dass $\varepsilon := p_{j\nu}(f) > 0$. Dann können wir f und 0 durch die beiden offenen Mengen $U(p_{j\nu}, \frac{\varepsilon}{3}, 0)$ und $U(p_{j\nu}, \frac{\varepsilon}{3}, f)$ trennen. Weiterhin ist $\mathcal{E}(Y)$ vollständig bezüglich Konvergenz in allen Halbnormen, da alle Ableitung lokal gleichmäßig konvergieren. Damit erfüllt $\mathcal{E}(Y)$ alle Voraussetzungen von Definition 5.1.

Zu guter Letzt behaupten wir nun noch, dass die oben gewählte Topologie unabhängig von der gewählten Überdeckung ist. Seien dazu (K_j) und $(\tilde{K}_m)$ zwei Überdeckungen, die den obigen Voraussetzungen genügen. Wir bezeichnen mit $(p_{j\nu})$ bzw. $(\tilde{p}_{m\nu})$ die zugehörigen Halbnormen. Wir zeigen nun, dass $U(p_{j\nu}, \varepsilon, f)$ für beliebige $j, \nu \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{E}(Y)$ offen bzgl. der Topologie von $(\tilde{p}_{m\nu})$ ist. Dies genügt bereits, da die Basis der Topologie von $(p_{j\nu})$ aus endlichen Schnitten dieser Mengen besteht. Wir wissen nun, dass $K_j \subset \bigcup_{m=1}^M \mathring{\tilde{K}}_m \subset \bigcup_{m=1}^M \tilde{K}_m$ gilt, da K_j kompakt ist. Wir behaupten nun, dass

$$\tilde{U} := \bigcap_{m=1}^{M} U(\tilde{p}_{m\nu}, \varepsilon, f) \subset U(p_{j\nu}, \varepsilon, f)$$

gilt. Sei dazu $g \in \tilde{U}$. Dann erhalten wir

$$\|D^\nu(g - f)\|_{K_j} \leq \max_{m=1,\dots,M} \|D^\nu(g-f)\|_{\tilde{K}_m} < \varepsilon,$$

was die Behauptung zeigt. Für die Rückrichtung vertauschen wir in der Argumentation einfach K_j und $\tilde{K}_j$ und erhalten, dass die Topologie unabhängig, von der gewählten Überdeckung ist.

Völlig analog kann die obige Konstruktion auch für $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$ durchgeführt werden. $\square$

Korollar 6.2. *Mit der obigen Topologie ist $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{E}(Y)$ ein abgeschlossener Teilraum und die Konvergenz bzgl. dieser Topologie stimmt mit der kompakten Konvergenz überein.*

Lemma 6.3. *Sei $Y \subset X$ offen, X eine Riemannsche Fläche. Sei $T \in \mathcal{E}(Y)'$. Dann hat T kompakten Träger, d.h. es existiert ein $K \subset Y$ kompakt, so dass*

$$T[f] = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{E}(Y) \textit{ mit } \operatorname{Supp}(f) \subset Y \setminus K$$

Das gleiche Resultat gilt für $\mathcal{E}^{0,1}(Y)$.

Beweis. Aus der Stetigkeit von T folgt die Existenz einer offenen Nullumgebung $U \subset \mathcal{E}(Y)$, so dass

$$|T[f]| < 1 \qquad \forall f \in U$$

Nach Konstruktion der obigen Topologie finden wir ein $\varepsilon > 0$ und endlich viele $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$ und $\nu_1, \ldots \nu_n \in \mathbb{N}^2$, so dass $U(p_{j_1\nu_1}, \varepsilon, 0) \cap \cdots \cap U(p_{j_n\nu_n}, \varepsilon, 0) \subset U$.
Sei nun $K := K_{j_1} \cup \cdots \cup K_{j_n}$. Wir behaupten, dass dies das gesuchte K ist.
Dazu wählen wir $f \in \mathcal{E}(Y)$ mit $\operatorname{Supp}(f) \subset Y \setminus K$. Dann gilt für beliebige $\lambda > 0$:

$$p_{j_1\nu_1}(\lambda f) = \cdots = p_{j_n\nu_n}(\lambda f) = 0$$

Damit liegt $\lambda f \in U$ und es folgt:

$$|T[f]| < \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0$$

und damit $T[f] = 0$. $\square$

Lemma 6.4. *Sei $Z \subset X$ offen und X eine Riemannsche Fläche. Sei $S \in \mathcal{E}^{0,1}(X)'$ mit $S[\mathrm{d}''g] = 0$ für beliebige $g \in \mathcal{E}(X)$ mit $\operatorname{Supp}(g) \Subset Z$.
Dann existiert ein $\sigma \in \Omega(X)$ mit $S[\omega] = \iint_Z \sigma \wedge \omega$ für jedes $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ mit $\operatorname{Supp}(\omega) \Subset Z$.*

Beweis. Sei $z : U \to V \subset \mathbb{C}$ eine Karte von X mit $U \subset Z$. Wir identifizieren U mit V und können deshalb vom Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(U)$ auf U sprechen. Sei also $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\varphi}$ jede 1-Form in $\mathcal{D}^{0,1}(X)$, für die $\tilde{\varphi}|_U \cong \varphi \,\mathrm{d}\bar{z}$ und $\tilde{\varphi}|_{U \setminus U} \cong 0$ gilt.
Damit können wir ein $S_U \in \mathcal{D}(U)'$ definieren:

$$S_U : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto S[\tilde{\varphi}]$$

Diese verschwindet auf allen Funktionen $\varphi = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}, g \in \mathcal{D}(U)$, denn $S_U[\varphi] = S[\tilde{\varphi}] = S[\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \,\mathrm{d}\bar{z}] = S[\mathrm{d}''g] = 0$ nach Voraussetzung. Das bedeutet aber, dass $\frac{\partial S_U}{\partial \bar{z}} = 0$ und aus Korollar 4.12 erhalten wir ein $h \in \mathcal{O}(U)$:

$$S[\tilde{\varphi}] = \iint_U h(z)\varphi(z) \,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$$

Setzen wir nun $\sigma_U := h \,\mathrm{d}z$, so folgt

$$S[\omega] = \iint_U \sigma_u \wedge \omega \qquad \omega \in \mathcal{D}^{0,1}(U) \text{ und } \operatorname{Supp}(\omega) \Subset U$$

Führen wir die gleiche Konstruktion auf einer zweiten Karte (z', U') aus und gilt außerdem noch, dass $\operatorname{Supp}(\omega) \Subset U'$), so erhalten wir

$$\iint_U \sigma_U \wedge \omega = S[\omega] = \iint_{U'} \sigma_{U'} \wedge \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ und } \operatorname{Supp}(\omega) \Subset U \cap U'$$

und damit $\sigma_U|_{U\cap U'} \equiv \sigma_{U'}|_{U\cap U'}$. Also können wir alle σ_U zu einer globalen 1-Form $\sigma \in \Omega(Z)$ verkleben und es folgt

$$S[\omega] = \iint_Z \sigma \wedge \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ mit } \operatorname{Supp}(\omega) \Subset U,$$

wobei U eine Koordinatenumgebung darstellt.
Wählen wir nun ein beliebiges $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ mit $\operatorname{Supp}(\omega) \Subset Z$, so können wir eine Partition der 1 wählen, so dass $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_J$ mit $\operatorname{Supp}(\omega_j) \Subset U_j$. Dabei sind die U_j Koordinatenumgebungen.
Zu guter Letzt erhalten wir damit:

$$S[\omega] = \sum_{j=1}^n S[\omega_j] = \sum_{j=1}^n \iint_Z \sigma \wedge \omega_j = \iint_Z \sigma \wedge \omega$$

□

Satz 6.5. *Sei $Y \Subset X$ eine offene Runge-Teilmenge und X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche.*
Dann liegt $\operatorname{im}(\mathcal{O}(Y') \to \mathcal{O}(Y))$ für beliebige $Y' \Subset X$ offen und $Y \subset Y'$ bzgl. kompakter Konvergenz dicht in $\mathcal{O}(Y)$.

Beweis. Sei $\beta : \mathcal{E}(Y') \to \mathcal{E}(Y)$ die Einschränkungsabbildung. Wir verwenden Korollar 5.7. Dazu müssen wir zeigen, dass falls $T \in \mathcal{E}(Y)'$ mit $T_{\beta(\mathcal{O}(Y'))} \equiv 0$ auch $T|_{\mathcal{O}(Y)} \equiv 0$ gilt.
Nach [For99, Kor. 14.16] existiert zu jedem $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ ein $f \in \mathcal{E}(Y')$ mit $\mathrm{d}''f = \omega|_{Y'}$.
Dies erlaubt uns die Definition von $S : \mathcal{E}^{0,1}(X) \to \mathbb{C}, \quad S[w] := T[f|_Y]$. Diese Definition ist unabhängig von f, denn für ein $g \in \mathcal{E}(Y')$ mit $\mathrm{d}''g = \omega|_{Y'}$, dann ist $f - g \in \mathcal{O}(Y')$ und deshalt $T[(f-g)|_Y] = 0$ nach der Voraussetzung, dass $T|_{\beta(\mathcal{O}(Y'))} \equiv 0$.
Als nächstes wollen wir zeigen, dass S stetig ist.
Dazu betrachten wir zunächst $V := \{(\omega, f) \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \times \mathcal{E}(Y') : \quad \mathrm{d}''f = \omega|_{Y'}\}$. Nun haben wir sowohl $\mathcal{E}(Y')$, als auch $\mathcal{E}^{0,1}(Y')$ mit der Topologie eines Fréchet-Raums ausgestattet. Wählen wir ine Überdeckung von Y' durch Kompakta wie im Beweis von Proposition 6.1 und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}(Y')$, die bzgl. der Fréchet-Topologie gegen $f \in \mathcal{E}(Y')$ konvergiert, so gilt auf den Kompakta, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glatt gegen f konvergiert, d.h. heißt aber, dass bezüglich den Karten auch die Folge $\left(\frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ glatt gegen $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ konvergiert. In anderen Worten konvergiert $(\mathrm{d}''f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\mathrm{d}''f$. Also ist $\mathrm{d}'' : \mathcal{E}(Y') \to \mathcal{E}^{0,1}(Y')$ stetig und es folgt, dass $V \subset \mathcal{E}^{0,1}(X) \times \mathcal{E}(Y')$ abgeschlossen und somit nach Satz 5.4 unf 5.5 ein Fréchet-Raum ist.

Nach [For99, Kor. 14.16] ist $\pi_1 : V \to \mathcal{E}^{0,1}(X)$ surjektiv und stetig. Es folgt aus dem Satz über die offene Abbildung, dass π_1 offen ist. Weiterhin ist $\beta \circ \pi_2 : V \to \mathcal{E}(Y)$ stetig. Da nun auch noch das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta \circ \pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathcal{E}(Y) \arrow[d, "T"] \\ \mathcal{E}^{0,1}(X) \arrow[r, "S"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

folgt die Stetigkeit von S.

Das Lemma 6.3 liefert

- ein kompaktes $K \subset Y$ mit $T[f] = 0$ für jedes $f \in \mathcal{E}(Y)$ mit $\mathrm{Supp}(f9 \subset Y \setminus K$ und
- ein kompaktes $L \subset X$ mit $S[\omega] = 0$ für jedes $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ mit $\mathrm{Supp}(\omega) \subset X \setminus L$

Sei $g \in \mathcal{E}(X)$ mit $\mathrm{Supp}(g) \Subset X \setminus K$. Dann ist $S[\mathrm{d}''g] = T[g|_Y] = 0$. Lemma 6.4 gibt uns dann ein $\sigma \in \Omega(X \setminus K)$ mit

$$S[\omega] = \iint_{X \setminus K} \sigma \wedge \omega \qquad \forall \omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X) \text{ mit } \mathrm{Supp}(\omega) \Subset X \setminus K$$

Aufgrund des kompakten Trägers von S muss $\sigma|_{X\setminus(K \cup L)} \equiv 0$ gelten.
Nun ist jede Zusammenhangskomponente von $X \setminus \mathfrak{h}(K)$ nicht relativ kompakt.
Behauptung: Jede Zusammenhangskomponente von $X \setminus \mathfrak{h}(K)$ schneidet $X \setminus (K \cup L)$.
Angenommen es gäbe eine Zusammenhangskomponente $U \subset X \setminus \mathfrak{h}(K)$ mit $U \cap X \setminus (K \cup L) = \varnothing$. Dann gilt $U \subset K \cup L$, also ist U relativ kompakt. Ein Widerspruch.
Also schneiden alle Zusammenhangskomponenten $X \setminus (K \cup L)$ und aus de Identitätssatz folgt:

$$\sigma|_{X \setminus \mathfrak{h}(K)} \equiv 0 \tag{$*$}$$

Das bedeutet, dass $S[\omega] = 0$ für jedes $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(X)$ mit $\mathrm{Supp}(\omega) \Subset X \setminus \mathfrak{h}(K)$.

Sei nun $f \in \mathcal{O}(Y)$. Wir wollen zeigen, dass $T[f] = 0$.

genauer

Zunächst gilt $\mathfrak{h}(K) \subset \mathfrak{h}(Y) = Y$. Durch Glättung können wir ein $g \in \mathcal{E}(X)$ mit $f \equiv g$ in einer Umgebung von $\mathfrak{h}(K)$ und $\mathrm{Supp}(g) \Subset Y$ finden.
Also liegt $\mathrm{Supp}(f - g|_Y) \subset Y\ K$, somit $T[f - g|_Y] = 0$ und schlussendlich $T[f] = T[g|_Y] = S[\mathrm{d}''g]$.
Nun ist aber g in einer Umgebung von $\mathfrak{h}(K)$ holomorph, was nichts anderes bedeutet als

$\mathrm{Supp}(\mathrm{d}''g) \Subset X \setminus \mathfrak{h}(K)$.
Mit $(*)$ folgt

$$T[f] = T[g|_f] = S[\mathrm{d}''g] = 0$$

□

Satz 6.6 (Rungescher Approximationssatz). *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ eine offene Runge-Teilmenge.*
Dann kann jede holomorphe Funktion auf Y auf beliebigen Kompakta gleichmäßig durch holomorphe Funktionen auf ganz X approximiert werden.

Beweis. **Fall $Y \Subset X$:** Seien $f \in \mathcal{O}(Y)$, $K \subset Y$ kompakt und $\varepsilon > 0$ gegeben.
Aus dem Beweis von Satz 3.13 erhalten wir eine Ausschöpfung$Y_1 \Subset Y_2 \Subset \dots$ von X mit $Y_0 := Y \Subset Y_1$.
Nach Satz 6.5 existiert ein $f \in \mathcal{O}(Y_1)$ mit

$$\|f_1 - f\|_K < 2^{-1}\varepsilon$$

Induktiv erhalten wir aus Satz 6.5 eine Folge von Funktionen $f_n \in \mathcal{O}(Y_n)$ mit

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{\bar{Y}_{n-2}} < 2^{-n}\varepsilon \qquad \forall n \geq 2$$

Nun gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_{\nu+k} - f_\nu\|_{Y_n} \leq \varepsilon 2^{-\nu} \sum_{\mu=0}^{k} 2^{-\mu} \leq 2\varepsilon 2^{-\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} 0 \qquad \forall \nu > n$$

Also konvergiert $(f_\nu)_{\nu>n}$ gleichmäßig auf Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ und damit existiert ein $F \in \mathcal{O}(X)$, so dass $f_\nu \rightrightarrows F$ auf jedem Y_n.
Eingesetzt folgt

$$\begin{aligned}\|F - f\|_K &\leq \|F - f_n\|_{Y_n} + \sum_{k=1}^{n} \|f_k - f_{k-1}\|_{\bar{Y}_{k-2}} \\ &< \|F - f_n\|_{Y_n} + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \varepsilon\end{aligned}$$

Fall $Y \subset X$ nicht relativ kompakt: Auch hier wählen wir $f \in \mathcal{O}(Y)$, $K \subset Y$ kompakt und $\varepsilon > 0$.
In diesem Fall können wir $L \subset Y$ kompakt finden mit $K \subset \mathring{L}$. Dies ist möglich in dem wir K durch endlich viele relativ Kompakte Koordinatenumgebungen überdecken und L

als deren Abschluss definieren.
Dann folgt aus Lemma 3.10 die Existenz einer offenen Runge-Teilmenge $\tilde{Y} \subset X$ mit $K \subset \tilde{Y} \subset L$.
Damit ist $\tilde{Y} \Subset X$ und f kann als Funktion von $\mathcal{O}(\tilde{Y})$ aufgefasst werden und schlussendlich können wir den obigen Fall anwenden und erhalten ein $F \in \mathcal{O}(X)$ mit $\|f|_{\tilde{Y}} - F\|_K = \|f - F\|_K < \varepsilon$.

□

7 Der Weierstrasssche Produktsatz

Definition 7.1. Divisor Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein *Divisor* ist eine Abbildung $D : X \to \mathbb{Z}$, so dass für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ gilt: $D(x) = 0$ für fast alle $x \in K$.
Wir bezeichnen mit $Div(X)$ die Menge aller Divisoren.
Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)^*$ definieren wir den zu f gehörigen Divisor $(f) : X \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto \operatorname{ord}_x(f)$. Da die Null- und Polstellen eine diskrete Teilmenge von X bilden, ist dies tatsächlich ein Divisor.

Definition 7.2. Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \in Div(X)$. Dann heißt $f \in \mathcal{M}(X)$ eine *Lösung* von D, falls $(f) = D$.
Setzen wir $X_D := \{x \in X : D(x) \geq 0\}$, so heißt $f \in \mathcal{E}(X_D)$ *schwache Lösung* von D, falls für alle $a \in X$ eine Koordinatenumgebung (U, z) mit $z(a) = 0$ und ein $\psi \in \mathcal{E}(U)$ mit $\psi(a) \neq 0$ existieren, so dass $f = \psi z^k$ auf $U \cap X_D$ gilt, wobei $k = D(a)$.

Lemma 7.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $D \in Div(X)$. Seien weiterhin $f, g \in \mathcal{E}(X_D)$ schwache Lösungen von D. Dann existiert ein $h \in \mathcal{E}(X)$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ und $f = h \cdot g$.*

Beweis. Sie $a \in X$ und (U_a, z_a) eine Karte um a mit $z(a) = 0$, so dass $f|_{U_a} \equiv \psi_a z^{k_a}$ und $g|_{U_a} \equiv \varphi_a z^{k_a}$ auf $X_D \cap U_a$ gilt, wobei $k_a := D(a)$. Weiterhin sei U_a so klein gewählt, dass $\psi_a(x) \neq 0 \neq \varphi_a(x)$ für alle $x \in U_a$. Dann ist klarerweise $(U_a)_{a \in X}$ eine Überdeckung von X. Nun definieren wir auf U_a die Funktion

$$h_a := \frac{\psi_a}{\varphi_a} \in \mathcal{E}(U)$$

und es gilt $f|_{U_a} = h_a g|_{U_a}$. Setzen wir $S := \{a \in X \mid D(a) \neq 0\}$, so ist S diskret und setzen wir weiterhin $\tilde{X} = X \setminus S$, so ist $\tilde{X}$ offen und es gilt auf $U_a \cap U_b \cap \tilde{X}$

$$h_a|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}} = \frac{f|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}}{g|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}} = h_b|_{U_a \cap U_b \cap \tilde{X}}.$$

Also finden wir ein $h \in \mathcal{E}(\tilde{X})$ mit $h|_{U_a \cap \tilde{X}} = h_a|_{\tilde{X}}$. Nun ist aber h_a glatt fortsetzbar auf ganz U_a und wir erhalten, dass h glatt auf ganz X fortgesetzt werden kann. Weiterhin folgt aus $h_a(x) \neq 0$ für alle $x \in U_a$ und $a \in X$, dass auch $h(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Und als letztes erahlten wir auch $f = h \cdot g$. □

Lemma 7.4. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Seien weiterhin f_1 bzw. f_2 je eine schwache Lösung der Divisoren D_1 bzw. D_2. Dann ist $f_1 \cdot f_2$ eine schwache Lösung von $D_1 + D_2$.*

Beweis. Auf $X_{D_1} \cap X_{D_2}$ ist klar, dass $f_1 \cdot f_2$ die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Allerdings ist falls ein $a \in X$ mit $D(a) := D_1(a) + D_2(a) > 0$, aber $D_1(a) < 0$ oder $D_2(a) < 0$ gilt, entweder $f_1(a)$ oder $f_2(a)$ nicht definiert. Nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $D_1(a) < 0$ gilt, so können wir eine Karte (z, U) um a finden, so dass $\psi, \varphi \in \mathcal{E}(U)$ existieren, die der Definition 7.2 für f_1 bzw. f_2 genügen. Dann gilt also auf $U \cap X_{D_1} \cap X_{D_2}$

$$f_1 \cdot f_2 = \psi z^{k_1} \varphi z^{k_1} = (\psi\varphi) \cdot z^{k_1+k_2}.$$

Nun ist $k_1 + k_2 = D_1(a) + D_2(a) > 0$, also steht auf der rechten Seite eine glatte Funktion, die sogar auf ganz U, insbesondere in a, definiert ist. Also kann das Produkt $f_1 \cdot f_2$ auf a fortgesetzt werden und $f_1 \cdot f_2$ stellt tatsächlich eine schwache Lösung von $D_1 + D_2$ dar. □

Lemma 7.5. *Jeder Divisor D auf einer nicht kompakten Riemannschen Fläche X hat eine schwache Lösung.*

Beweis. Wir wählen $K_1, K_2, \dots$ kompakte Runge-Teilmengen von X mit

1. $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}\ \forall j \geq 1$ und
2. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = X$

Dies ist nach Korollar 3.9 möglich.

- Behauptung: Sei $a_0 \in X \setminus K_j$ und $A_0 \in Div(X)$ mit $A_0(a_0) = 1$ und $A_0(x) = 0$, falls $x \neq a_0$. Dann existiert eine schwache Lösung φ von A_0 mit $\varphi|_{K_j} = 1$.

  K_j ist eine Runge-Teilmenge, d.h. $K_j = \mathfrak{h}K_j$. Also liegt a_0 in einer nicht relativ kompakten Zusammenhangskomponente $U \subset X \setminus K_j$
  Nun existiert ein $a_1 \in U \setminus K_{j+1}$ (ansonsten wäre K_{j+1} nicht kompakt) und eine Kurve $c_0 : I \to U$ mit $c_0(0) = a_1$ und $c_0(1) = a_0$.
  Nach [For99, Lemma 20.5] existiert eine schwache Lösung φ_0 des Divisors ∂c_0 mit $\varphi_0|_{K_j} = 1$.
  Induktiv sind wir nun in der Lage eine Folge von Punkten $a_\nu \in X \setminus K_{j+\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, und Kurven in $X \setminus K_{j+\nu}$ von $a_{\nu+1}$ nach a_ν konstruieren. Analog zum obigen erfahren erhalten wir dann wieder schwache Lösungen φ_ν des Divisors ∂c_ν mit $\varphi_\nu|_{K_{j+\nu}} = 1$.
  Nach Konstruktion gilt $\partial c_\nu = A_\nu - A_{\nu+1}$, wobei $A_\nu(a_\nu) = 1$ und sonst verschwindet A_ν.
  Weiterhin folgt aus Lemma 7.4, dass $\varphi_0 \cdot \varphi_1 \dots \varphi_n$ eine schwache Lösung von $A_0 - A_{n+1}$ ist. Lassen wir n gegen unendlich gehen, so erhalten wir $\varphi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu$. Dieses Produkt konvergiert, da auf jeder kompakten Teilmenge nur endlich viele Faktoren von 1 verschieden sind. Dies folgt aus Lemma 3.7, denn zu jeder kompakten Menge K existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $K \subset K_n$. Dann gilt aber $\varphi_j|_K \equiv 1$ für alle $j > n$. Damit ist φ eine schwache Lösung von A_0.

- Sei nun D ein beliebiger Divisor auf X. Für $\nu \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$D_\nu(x) := \begin{cases} D(x) & x \in K_{\nu+1} \setminus K_\nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei K_0 als leere Menge definiert wird. Wir erhalten dann $D = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu$.
Nun ist D_ν nur an endlich vielen stellen von 0 verschieden und kann deshalb als endliche Summe von Divisoren der Form A_ν dargestellt werden. Für diese wurde oben eine schwache Lösung konstruiert und das (endliche) Produkt dieser Lösungen liefert uns eine Lösung ψ_ν von D_ν und wir erhalten sogar $\psi_\nu|_{K_\nu} = 1$.
Setzen wir nun $\psi := \prod_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu$, so konvergiert das Produkt nach den gleichen Argumenten, wie oben und ist eine schwache Lösung von D.

□

Satz 7.6. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und $D \in Div(X)$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $(f) = D$.*

Beweis. Wir können X mit relativ kompakten, einfach zusammenhängenden Koordinatenumgebungen $(U_i)_{i\in I}$ überdecken. Auf diesen finden wir $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^*$, so dass $(f_i) = D|_{U_i}$. Dies ist möglich, da D auf dem relativ kompakten U_i fast überall verschwindet und f_i deshalb in lokalen Koordinaten einfach als rationale Funktion darstellen.
Mit dieser Konstruktion haben f_i und f_j dies selben Pol- und Nullstellen auf $U_i \cap U_j$, also ist

$$\frac{f_i}{f_j} \in hol(U_i \cap U_j)^* \qquad \forall i, j \in I$$

Nach Lemma 7.5 existiert eine schwache Lösung ψ von D und auf den U_i finden wir $\psi_i \in \mathcal{E}(U_i)$, so dass $\psi = \psi_i \cdot f_i$ und $\psi_i(x) \neq 0$ für alle $x \in U_i$. (Wir setzend abei ψ auf ganz X fort, in dem wir es an den nicht definierten Stellen ∞ setzen).
Da U_i einfach zusammenhängend ist und ψ_i nicht verschwindet, existiert ein $\varphi_i \in \mathcal{E}(U_i)$ mit $\psi_i = e^{\varphi_i}$.
Somit erhalten wir

$$\psi = e^{\varphi_i} f_i \qquad \text{auf } U_i$$

und

$$e^{\varphi_j - \varphi_i} = \frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)^* \qquad \text{auf } U_i \cap U_j$$

Damit ist $\varphi_{ij} := \varphi_i - \varphi_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$, da die exp-Funktion lokal biholomorph ist. Aus der Definition folgt auch direkt $\varphi_{ij} + \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ und damit ist $(\varphi_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$.
Nun ist $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, also existieren $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$ mit $\varphi_{ij} = \varphi_j - \varphi_i = g_j - g_i$ auf $U_i \cap U_j$.
Eingesetzt folgt

$$e^{g_j} f_j = e^{g_i} f_i \qquad \text{auf } U_i \cap U_j$$

also finden wir ein $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $f = e^{f_j} f_j$ auf U_j.
Damit ist f die gesuchte Lösung von D. □

Korollar 7.7. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche.*
Dann existiert ein nicht-verschwindendes $\omega \in \Omega(X)$.

Beweis. Sei g eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf X und $f \in \mathcal{M}(X)^*$ mit $(f) = -(\mathrm{d}g)$. Diese existiert nach Satz 7.6.
Dann ist $\omega := f\,\mathrm{d}g$ die gesuchte 1-Form. □

8 Der Riemannsche Abbildungssatz

In diesem Abschnitt wollen wir den zentralen Satz der Bachelor-Arbeit beweisen: den Riemannschen Abbildungssatz. Er charakterisiert alle einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen und besagt, dass es bis auf Biholomorphie nur drei verschiedene gibt: die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$, die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ und die Einheitskreisscheibe B. Später werden wir dieses Resultat im Zusammenhang mit der Überlagerungstheorie verwenden, denn hier besagt das Resultat nichts anderes, als dass es nur drei mögliche Universelle Überlagerungen zu jeder beliebigen Riemannschen Fläche gibt. Das erleichtert deren Untersuchung natürlich ungemein.

Zu Beginn des Kapitels werden einige Hilfssätze bewiesen, bevor wir am Ende dann die Früchte unserer Arbeit ernten können. Zunächst einmal beweisen wir den Riemannschen Abbildungssatz nicht direkt für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, sondern für Riemannsche Flächen mit verschwindender holomorpher deRham Gruppe (vgl. 8.2). Wie wir am Ende sehen werden, ist dies keine Einschränkung, allerdings müssen wir erst ein paar Eigenschaften für diese Riemannschen Flächen zusammentragen. Der restliche Teil dieses Kapitels besteht dann darin spezielle Funktionenfolgen zu konstruieren. Diese liefern uns schlussendlich bilholomorphe Abbildungen zwischen unserer Riemannschen Fläche X und $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder B, was den Riemannschen Abbildungssatz beweist.

Definition 8.1.

$$\begin{aligned} B_\infty(0) &:= \mathbb{C} \\ B &:= B_1(0) \end{aligned}$$

Definition 8.2. Sei X eine Riemannsche Fläche, dann heißt

$$Rh^1_{\mathcal{O}}(X) := \Omega(X)/\,\mathrm{d}\mathcal{O}(X)$$

holomorphe deRham Gruppe.

Lemma 8.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Dann gilt:*

1. *Zu jeder holomorphen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}^\times$ existieren $g, h \in \mathcal{O}(X)$ mit $e^g = f$ und $h^2 = f$.*

2. *Zu jeder harmonischen Funktion $u : X \to \mathbb{R}$ existiert ein $f \in \mathcal{O}(X)$ mit $u = \mathrm{Re}(f)$.*

Beweis. 1. Es gilt $f^{-1}\,\mathrm{d}f \in \Omega(X)$, und wegen $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$ finden wir ein $g \in \mathcal{O}(X)$ mit $\mathrm{d}g = f^{-1}\,\mathrm{d}f$.
Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass ein $a \in X$ existiert mit $e^{g(a)} = f(a)$, ansonsten betrachten wir $g + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Weiterhin erhalten wir:

$$\mathrm{d}(fe^{-g}) = \mathrm{d}(f)e^{-g} + fe^{-g}(-1)f^{-1}\,\mathrm{d}f = 0$$

Also ist $fe^{-g} \equiv \text{const}$ und aus $f(a)e^{-g(a)} = 1$ erhalten wir

$$f = e^g.$$

Damit ist der erste Teil der Aussage gezeigt. Für den zweiten setzen wir nun einfach

$$h := e^{\frac{g}{2}}.$$

2. Nach (19.4) [1] existiert genau ein $\omega \in \Omega(X)$, so dass $\mathrm{d}u = \mathrm{Re}(\omega)$ gilt. Wieder wegen $\Omega(X) = \mathrm{d}\mathcal{O}(X)$, erhalten wir zunächst $\mathrm{d}g = \omega$ für ein $g \in \mathcal{O}(X)$ und daraus weiterhin $\mathrm{d}u = \mathrm{Re}(\mathrm{d}g) = \mathrm{dRe}(g)$. Insgesamt erhalten wir

$$u = \mathrm{Re}(g) + \text{const}.$$

□

Satz 8.4. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche und $Y \Subset X$ ein Gebiet mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$ und regulärem Rand. Dann existiert eine biholomorphe Abbildung auf den Einheitskreis B.*

Beweis. Sei $a \in Y$. Nach Weierstrass 7.6 existiert ein $g \in \mathcal{O}(X)$, das eine Nullstelle erster Ordnung bei a besitzt und ansonsten $g(x) \neq 0$ für alle $x \neq a$ gilt.
Nach Satz 2.28 existiert ein stetiges $u : \bar{Y} \to \mathbb{R}$, s.d. $u|_Y$ harmonisch ist und

$$u(y) = \log(g(y)) \qquad \forall y \in \partial Y$$

erfüllt.
Nach Lemma 8.3 existiert ein $h \in \mathcal{O}(Y)$ mit $u = \mathrm{Re}(h)$.
Wir setzen nun $f := e^{-h}g \in \mathcal{O}(Y)$ und behaupten, $f : Y \to B$ sei biholomorph.

- $f(Y) \subset B$: Sei $y \in Y$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|f(y)| &= |e^{-h(y)}| \cdot |g(y)| \\ &= e^{-u(y)} e^{\log(|g(y)|)} \\ &= \exp(\log|g(y)| - u(y))\end{aligned}$$

  Daran erkennen wir, dass $|f|$ auf $\bar{Y}$ fortgesetzt werden kann und dort nach Konstruktion konstant den Wert 1 annimmt. Da f eine holomorphe Funktion ist werden Extrema auf dem Rand angenommen und da f weiterhin nicht konstant ist ($f(a) = 0$) erhalten wir aus dem Maximum-Prinzip:

$$|f(y)| < 1 \qquad \forall y \in Y$$

  und damit $f(Y) \subset B$.

[1] Jede harmonische 1-Form ist Realteil von genau einer holomorphen 1-Form

- f ist eigentlich: Sei $0 < r < 1$ und $Y_r := f^{-1}(\overline{B_r(0)})$. Dann ist Y_r kompakt als abgeschlossene Teilmenge von $\bar{Y}$.
- f ist biholomorph: f nimmt jeden Wert gleichhäufig an, da es sich um eine eigentlich Abbildung handelt. Weiterhin wird 0 genau einmal angenommen. Also ist $f : Y \to B$ bijektiv und holomorph. Das genügt bereits, um zu zeigen, dass f biholomorph ist.

□

Proposition 8.5. *Sei $f : B_r(0) \to B_{r'}(0)$ holomorph. Dann gilt: $|f'(0)| \leq \frac{r'}{r}$*

Beweis. Unter Ausnutzung der Cauchyschen Integralformel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|f'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} \,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi i t})}{r^2 e^{4\pi i t}} r 2\pi i e^{2\pi i t} \,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{|f(re^{2\pi i t})|}{r} \,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{r'}{r} \int_0^1 \mathrm{d}t \\
&= \frac{r'}{r}
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.6. *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass $\mathbb{C} \setminus G$ einen inneren Punkt besitzt. Sei $\omega_0 \in G$. Dann ist*

$$\{f \in \mathcal{O}(B) : f(B) \subset G \text{ und } f(0) = \omega_0\} \tag{2}$$

eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{O}(B)$ bzgl. der Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

Beweis. Sei $a \in (\overset{\circ}{\mathbb{C} \setminus G})$. Wir bezeichnen die Menge in (2) mit M und behaupten, dass $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ G biholomorph auf ein Teilgebiet eines $B_r(0)$ für ein $r < \infty$ abbildet. Der Abstand $d := \mathrm{dist}(\{a\}, G) > 0$ existiert, da $a \notin \bar{G}$, denn a ist ein innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus G$. Deshalb folgt:

$$\left| \frac{1}{z-a} \right| < \frac{1}{d} \qquad \forall z \in G$$

Also sind die $f \in M$ gleichmäßig beschränkt und aus dem Satz von Montel (vgl. [Fre06, Satz 4.9]) erahlten wir die Kompakthreit von M. □

Definition 8.7. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller injektiven holomorphen Funktionen $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Lemma 8.8. *Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann existiert ein maximales $r \geq 0$ mit $B_r(0) \subseteq f(B)$.*

Beweis. Sei $M := \{r \geq 0 \mid B_r(0) \subseteq f(B)\}$ und $r \in M$. Da f injektiv und holomorph ist, existiert eine holomorphe Funktion $\varphi : B_r(0) \to B$ mit $f \circ \varphi = \mathrm{id}_{B_r(0)}$ und $\varphi'(0) = 1$. Damit wissen wir aber

$$1 = \varphi'(0) \leq \frac{1}{r}$$

Also ist $r \leq 1$ und somit M beschränkt. Setzen wir nun $\tilde{r} := \sup M$, so müssen wir noch zeigen, dass $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$.
Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ mit $r_n \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{r}$ und $z \in B_{\tilde{r}}(0)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $z \in B_{r_n}(0) \subseteq f(B)$ und erhalten somit direkt $B_{\tilde{r}}(0) \subseteq f(B)$. $\square$

Satz 8.9. *$\mathcal{S}$ ist kompakt in $\mathcal{O}(B)$.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$. Nach Lemma 8.8 finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein maximales $r_n \geq 0$ mit $B_{r_n}(0) \subseteq f_n(B)$. Setzen wir wieder $\varphi_n := f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B$, so erhalten wir $1 = |\varphi_n'(0)| \leq \frac{1}{r_n}$ und damit $r_n \leq 1$.
Sei $a_n \in \partial B_{r_n}(0)$, so dass $a_n \notin f_n(B)$. Dies ist aufgrund der Maximalität von r_n immer möglich. Damit definieren wir nun $g_n := \frac{f_n}{a_n}$. Wir erhalten $B \subseteq g_n(B)$ und

$$1 \notin g_n(B) \tag{3}$$

Nun ist $g_n(B)$ über g_n homöomorph zu B, also einfach zusammenhängend. Dies hat zur Folge, dass $Rh^1_{\mathcal{O}}(g_n(B))$ verschwindet. Nach Lemma 8.3 existiert ein $\psi : g_n(B) \to \mathbb{C}^*$ mit $\psi(0) = i$ und $\psi^2(z) = z - 1 \quad \forall z \in g_n(B)$. Definiere wir $h_n := \psi \circ g_n$, so erhalten wir zunächst $h_n^2 = g_n - 1$ und behaupten, dass $w \in h_n(B)$ impliziert, dass $-w \notin h_n(B)$ gilt. Angenommen es existierten $z_1, z_2 \in B$ mit $h_n(z_1) = w$ und $h_n(z_2) = -w$, dann hätten wir

$$\begin{aligned}
g_n(z_1) &= h_n^2(z_1) + 1 \\
&= w^2 + 1 \\
&= (-w)^2 + 1 \\
&= h_n^2(z_2) + 1 \\
&= g(z_2)
\end{aligned}$$

Da nun g aber injektiv ist, folgte $z_1 = z_2$ und damit $w = 0$. Wir erhielten $g(z_1) = 1$, was einen Widerspruch zu Gleichung (3) darstellt.

Desweiteren führt $B \subseteq g_n(B)$ zu $U := \psi(B) \subseteq \psi(g_n(B)) = h_n(B)$. Also ist $(-U) \cap h_n(B) = \varnothing$. Wir definieren $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} h_n(B)$ und behaupten zunächst, dass G ein Gebiet ist. Nach dem Satz über die Gebietstreue sind alle $h_n(B)$ offen und somit auch G. Es bleibt also zu zeigen, dass G zusammenhängend ist. Da wir uns in $\mathbb{C}$ befinden fallen die Begriffe des Zusammenhangs und des Wegzusammenhangs zusammen und wir zeigen, dass G wegzusammenhängend ist. Seien dazu $z, w \in G$. Dann existieren $n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, so dass $z \in h_n(B)$ und $w \in h_{\tilde{n}}(B)$. Weiterhin ist $h_l(0) = i$ für beliebige $l \in \mathbb{N}$, d.h. $i \in h_l(B)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Nun sind die $h_l(B)$ Gebiete nach dem Satz über die Gebietstreue, also finden wir zwei stetige Kurven $c_1 : I \to h_n(B)$ und $c_2 : I \to h_{\tilde{n}}(B)$ mit $c_1(0) = z$, $c_1(1) = i$, $c_2(0) = i$ und $c_2(1) = w$. Definieren wir nun

$$c : I \to G, \quad c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

so finden wir eine Kurve in G mit $c(0) = z$ und $c(1) = w$. Damit ist G wegzusammenhängend, also ein Gebiet.

Weiterhin gilt $G \cap -U = \varnothing$, da $h_n(B) \cap -U = \varnothing$. Also besitzt das Komplement von G innere Punkte. Schlußendlich verwenden wir noch, dass $h_n(0) = i$ ist und erhalten, dass Lemma 8.6 anwendbar ist. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt demnach eine konvergente Teilfolge. Aufgelöst nach $f_n = a_n(1 + h_n^2)$ mit $|a_n| \leq 1$ erhalten wir also eine konvergente Teilfolge

$$f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f : B \to \mathbb{C}$$

Dann ist f klarerweise holomorph und es gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, also ist f insbesondere nicht konstant.

Zu zeigen bleibt nun nur noch die Injektivität von f. Nehmen wir also an f wäre nicht injektiv. Dann existierte ein $a \in \mathbb{C}$, so dass $f - a$ mindestens zwei Nullstellen besäße. Nun könnten wir einen Radius $r < 1$ finden, so dass $f - a$ mindestens $k \geq 2$ Nullstellen besäße und auf $\partial B_r(0)$ nicht verschwände. [2] Unter Verwendung des Null- und Polstellenzählenden Integrals erhielten wir:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{z=|r|} \frac{f'(z)}{f(z) - a} \, \mathrm{d}z$$

Aber das Integral ist stetig bzgl. gleichmäßiger Konvergenz, d.h. insbesondere, dass für jedes f_{n_l} nahe genug an f das Integral auch k ergeben müsste. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität der f_{n_l}, also ist f auch injektiv.
Dies vervollständigt den Beweis. □

Lemma 8.10. *Sei $R \in]0, \infty]$, $Y \subsetneq B_R(0)$ ein Gebiet, $0 \in Y$ und $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$.*
Dann existiert ein $0 < r < R$ und eine holomorphe Funktion $f : Y \to B_r(0)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

[2] Könnten wir kein solches r finden, wäre $f - a$ bereits konstant Null nach dem Identitätssatz.

Wohldefiniertheit von phi?

Beweis. Sei zunächst $R < \infty$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $Y \subsetneq B$, ansonsten betrachten wir $\tilde{Y} = \frac{Y}{R}$. Nach Voraussetzung existiert ein $a \in B \setminus Y$. Wir betrachten

$$\varphi : B \to B, \quad \varphi(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

Es folgt $0 \notin \varphi(Y)$. Nach Lemma 8.3 existiert ein $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $g^2 = \varphi|_Y$. Also ist $g(Y) \subseteq B$. Wir definieren nun eine weitere Hilfsfunktion

$$\psi(z) := \frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \qquad b := g(0)$$

Zusammen mit g ergibt dies unsere letzte Hilfsfunktion $h := \psi \circ g : Y \to B$ mit $h(0) = 0$.

$$\begin{aligned}\gamma := h'(0) &= \psi'(b)g'(0) \\ &= \psi'(b) \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\ &= \frac{1}{1-|b|^2}\frac{1-|a|^2}{2b} \\ &= \frac{1+|b|^2}{2b}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $|\gamma| > 1$.[3] Setzen wir nun $r := \frac{1}{\gamma} < 1 = R$ und $f := \frac{h}{\gamma}$ haben wir die gewünschte Funktion gefunden.

Wenden wir uns nun dem Fall $R = \infty$ zu. Nach Voraussetzung existiert ein $a \in \mathbb{C} \setminus Y$. Wir betrachten

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = z - a$$

Nun gilt aber $0 \notin \varphi(Y)$. Nach Lemma 8.3 existiert ein $g \in \mathcal{O}(Y)$ mit $g^2 = \varphi|_Y$. Völlig analog zum Beweis von Satz 8.9 erhalten wir für $w \in g(Y)$, dass $-w \notin g(Y)$. g ist nicht konstant und damit eine offene Abbbildung. Sei $b \in g(Y)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, s.d. $B_\varepsilon(b) \subseteq g(Y)$. Da nun für $w \in g(Y)$ $-w \notin g(Y)$, gilt insbesondere $g \notin B_\varepsilon(b)$. Also gilt:

$$|-w-b| = |w+b| \geq r$$

D.h. wir können

$$\psi : g(Y) \to \mathbb{C}, \quad \psi(w) = \frac{1}{w+b}$$

definieren. Dann ist ψ holomorph und es gilt $|\psi(w)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ für jedes $w \in g(Y)$. Damit können wir eine holomorphe Abbildung $\tilde{\psi} : Y \to B$ finden. Setzen wir nun noch $c := \tilde{\psi}(0)$ und betrachten

$$\eta : B \to B, \quad \eta(z) = \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$$

[3] Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)$ nimmt bei $x = 1$ ihr striktes Minimum an und ist für $x < 1$ echt größer als 1.

so können wir $\tilde{f} := \eta \circ \tilde{\psi} : Y \to D$ definieren. $\tilde{f}$ erfüllt dabei die Eigenschaften $\tilde{f}(0) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(0) &= \eta'(c) \cdot \tilde{\psi}'(0) \\
&= \frac{1}{1-|c|^2} \cdot r \cdot \psi'(g(0)) \cdot g'(0) \\
&= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{\varphi'(0)}{2g(0)} \\
&= \frac{r}{1-|c|^2} \cdot \frac{-1}{(g(0)+b)^2} \cdot \frac{1}{2g(0)} \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Das heißt nach dem gleichen Skalierungsargument, wie im ersten Fall erhalten wir eine holomorphe Abbildung $f : Y \to B_r(0)$, wobei $r < R = \infty$. $\square$

Lemma 8.11. *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$, $Y \subseteq X$ ein Runge-Gebiet. Dann gilt $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y) = 0$.*

Beweis. Sei $\omega \in \Omega(Y)$ nach Korollar 7.7 existiert ein $w_0 \in \Omega(X)$ ohne Nullstellen. Daher existiert ein $f \in \mathcal{O}(Y)$ mit $\omega = f\omega_0$. Der Rungesche Approximationssatz besagt nun, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{O}(X)$ existiert, so dass $f_n \to f$ kompakt auf Y konvergiert. Sei nun α eine beliebige geschlossene Kurve in Y. Dann gilt:

Kurven immer stetig.

$$0 = \int_\alpha f_n \omega_0 \xrightarrow{n\to\infty} \int_\alpha \omega$$

Also verschwindet $\int_\alpha \omega$ für jede geschlossene Kurve. Demnach besitzt ω nach (10.15) eine Stammfunktion und damit verschwindet $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y)$. $\square$

Satz 8.12 (Der Riemannsche Abbildungssatz). *Sei X eine Riemannsche Fläche mit $Rh^1_{\mathcal{O}}(X) = 0$. Dann ist X entweder konform äquivalent*

1. *zur Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$,*
2. *zur Komplexen Ebene $\mathbb{C}$ oder*
3. *zur Einheitskreisscheibe B.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass X kompakt ist. Dann wissen wir, dass $\mathrm{d}\mathcal{O}(X) = 0$ und damit auch $\Omega(X) = 0$. Nun liefert uns der Serresche Dualitätssatz, dass $H^0(X,\Omega) \cong H^1(X,\mathcal{O})^*$. Da immer $\Omega(X) \cong H^0(X,\Omega)$ gilt und im kompakten Fall $H^1(X,\mathcal{O})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, erhalten wir

$$H^1(X,\mathcal{O}) \cong H^1(X,\mathcal{O})^* = 0$$

Also ist das Geschlecht unserer kompakten Riemanschen Fläche 0 und aus dem Satz von Riemann-Roch erhalten wir, dass X konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$ ist.

Ist nun X nicht kompakt, so existiert nach Satz 3.13 eine Ausschöpfung $Y_0 \Subset Y_1 \Subset Y_2 \Subset \ldots$ von X, wobei die Y_i Rungegebiete mit regulärem Rand. Nach Lemma 8.11 gilt für jedes $i \in \mathbb{N}$ $Rh^1_{\mathcal{O}}(Y_i) = 0$. Aus Satz 8.4 erhalten wir, dass die Y_i konform äquivalent zu B sind. Sei $a \in Y_0$ und (U, z) eine Koordinatenumgebung von a. Dann existieren $r_n < 0$ und eine biholomorphe Abbildung $f_n : Y_n \to B_{r_n}(0)$ mit $f_n(a) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}z}(a) = 1$, denn betrachten wir die Abbildung $\tilde{f}_n : Y_n \to B$ die nach Satz 8.4 existiert und die Abbildung

$$\varphi : B \to B, \quad \varphi_n(z) := \frac{z - \tilde{f}_n(a)}{1 - z\overline{\tilde{f}_n(a)}},$$

so erhalten wir zunächst $\bar{f}_n := \varphi_n \circ \tilde{f}_n$. Diese erfüllt $\bar{f}_n : Y_n \to B$ und $\bar{f}_n(a) = 0$. Setzen wir nun $r_n^{-1} := \left|\frac{\mathrm{d}\bar{f}(a)}{\mathrm{d}z}\right|$ und $f_n := r_n \cdot \bar{f}_n : Y_n \to B_{r_n}(0)$, so haben wir die gewünschte Abbildung gefunden. Weiterhin gilt $r_n \leq r_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn $h : f_{n+1} \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B_{r_{n+1}}(0)$ erfüllt $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$, also $1 = |h'(0)| \leq \frac{r_{n+1}}{r_n}$ nach Proposition 8.5. Wir setzen nun

$$R := \lim_{n\to\infty} r_n \in]0, \infty]$$

Behauptung: X wird biholomorph auf $B_R(0)$ abgebildet. Dazu betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir behaupten, dass eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass für beliebige $m \in \mathbb{N}$ $(f_{n_k}|_{Y_m})_{k\geq m}$ kompakt auf Y_m konvergiert. Dazu definieren wir $g_n(z) := \frac{1}{r_0} f_n(f_0^{-1}(r_0 z))$ für alle $n \geq 0$. Damit sind die $g_n : B \to \mathbb{C}$ injektive holomorphe Funktionen mit $g_n(0) = 0$ und $g_n'(0) = 1$, also $g_n \in \mathcal{S}$ und aus Satz 8.9 erhalten wir eine konvergente Teilfolge $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese Teilfolge gibt uns direkt eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{0k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Wenden wir die gleiche Konstruktion nun auf $\frac{1}{r_1} f_{n_{0k}}(f_1^{-1}(r_1 z))$ erahlten wir eine Teilfolge $f_{n_{1k}}$. Induktiv erhalten wir so zu jedem Y_m eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{mk}})$. Setzen wir $f_{n_k} := f_{n_{kk}}$, so erhalten wir die gewünschte Teilfolge. Sei $f \in \mathcal{O}(X)$ der Grenzwert von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann können wir analog zum Beweis von Satz 8.9 zeigen, dass f injektiv ist und $f(a) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}z} = 1$ genügt.

Wir zeigen nun, dass f X biholomorph auf $B_R(0)$ abbildet. Zunächst folgt aus $|f_{n_k}(x)| < r_{n_k}$ für beliebige $x \in X$ und $k \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $|f(x)| \leq R$. Da f holomorph und nicht-konstant, also eine offene Abbildung ist erhalten wir direkt, dass $f(x) \subset B_R(0)$. Ansonsten gäbe es ein $z \in f(x)$ mit $z \in \partial B_R(0)$. Dieses z kann aber kein innerer Punkt von $f(B)$ sein. Ein Widerspruch.

Es bleibt also nur noch die Surjektivität zu zeigen. Angenommen f wäre nicht surjektiv. Dann existierte nach Lemma 8.10 ein $0 < r < R$ und eine holomorphe Abbildung $g : f(X) \to B_r(0)$ mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Sei nun n so groß gewählt, dass $r_n > r$. Dann gälte für

$$h := g \circ f \circ f_n^{-1} : B_{r_n}(0) \to B_r(0)$$

$h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, aber $r < r_n$. Dies ist ein Widerspruch zu Proposition 8.5. Also ist X konform äquivalent zu $D_R(0)$. Für $R = \infty$ also zu $\mathbb{C}$ und für $R < \infty$ zu B. $\square$

Bemerkung 8.13. Wir wissen bereits, dass jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche eine verschwindende deRham-Gruppe hat und dementsprechend konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder B ist, andererseits zeigt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jede Riemannsche Fläche mit verschwindender deRham-Gruppe einfach zusammenhängend ist. Also haben wir unser eigentliche Resultat bewiesen, nämlich, dass jede einfachzusammenhängende Riemansche Fläche konform äquivalent zu einer der obigen drei ist.

9 Uniformisierung kompakter Riemannscher Flächen

Definition 9.1. Sei X eine Riemannsche Fläche. Unter der *Automorphismengruppe* von X verstehen wir

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid f, f^{-1} \text{ holomorph}\}.$$

Diese ist mit der Verkettung von Abbildungen tatsächlich eine Gruppe.

Lemma 9.2. *Die Abbildung*

$$\varphi : \mathbb{H} \to B, \quad \varphi(z) := \frac{z-i}{z+i}$$

ist biholomorph.

Beweis. Zunächst ist φ wohldefiniert, denn für $z \in \mathbb{H}$ erhalten wir, dass $\mathrm{Im}(z) > 0$ gilt und daher folgt

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)|^2 &= \frac{z-i}{z+i} \cdot \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} \\
&= \frac{|z|^2 - \bar{z}i + iz + 1}{|z|^2 + i\bar{z} - iz + 1} \\
&= \frac{|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(iz) + 1}{|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(iz) + 1} \\
&= \frac{|z|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Im}(z)}{|z|^2 + 1 + 2\,\mathrm{Im}(z)} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun

$$\psi : B \to \mathbb{H}, \quad \psi(z) := \frac{-iz-i}{z-1},$$

so ist diese Abbildung auch wohldefiniert, denn für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\psi(z)) &= \frac{1}{2i}(\psi(z) - \bar{\psi}(z)) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{-iz-i}{z-1} - \frac{i\bar{z}+i}{\bar{z}-1}\right) \\
&= \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i(1-|z|^2)}{|z-1|^2} \\
&= \frac{1-|z|^2}{|z-1|^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Weiterhin zeigt eine einfache Rechnung, dass $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ gelten. $\square$

Bemerkung 9.3. Dass $\mathbb{H}$ und B konform äquivalent sind, ist bereits eine Konsequenz aus dem Riemannschen Abbildungssatz 8.12, allerdings benötigen wir für den nächsten Satz die Übergangsabbildung explizit.

Satz 9.4. *Es gelten*

1. $\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{C}^\times,\ b \in \mathbb{C}\}$
2. $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1) = \{f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1,\ f(z) = M\langle z \rangle \mid M \in Sl(2, \mathbb{C})\}$
3. $\operatorname{Aut}(B) = \{f : B \to B,\ z \mapsto \frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta} z+\bar{\alpha}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ |\alpha| - |\beta| = 1\}$
4. $\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ f(z) = M\langle z \rangle \mid M \in Sl(2, \mathbb{R})\}$

Beweis. Wir zeigen jeweils nur $\subseteq$, denn die andere Inklusion ergibt sich sofort, da alle Umkehrfunktionen explizit ausgedrückt werden können.

Sei also $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$, dann ist f eine ganze Funktion, also existieren $a_k \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

gilt. Wir behaupten nun, dass $a_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelten muss. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann hätte die Funktion $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := f(\frac{1}{z})$ eine wesentliche Singularität bei 0. Dann wäre aber der Satz von Casorati-Weierstraß (vgl. [Kas, Satz 6.11]) anwendbar und wir erhielten zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(0)$, so dass $|g(z_n) - f(0)| < \frac{1}{n}$ gilt. Setzen wir $w_n := \frac{1}{z_n}$, so konvergierte $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ und $f(w_n) \to f(0)$ für $n \to \infty$. Setzen wir nun weiterhin $\tilde{z}_n := f(w_n)$ und $\tilde{z} = f(0)$, so erhielten wir also $\lim_{n\to\infty} \tilde{z}_n = \tilde{z}$, allerdings gälte $|f^{-1}(\tilde{z}_n)| = |w_n| \to \infty \neq |f^{-1}(\tilde{z})| = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f^{-1}. Also ist f ein Polynom. Dies hat aber direkt zur Folge, dass der Grad von f eins sein muss, da wir ansonsten nach dem Hauptsatz der Algebra mehrere Nullstellen hätten. Damit haben wir bereits die gewünschte Form gefunden.

Als nächstes wenden wir uns $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$ zu. Sei dazu $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Wir setzen $a := f(\infty)$ und $b := f^{-1}(\infty)$. Zunächst betrachten wir den fall $a \neq \infty$. Dann gilt auch $b \neq \infty$ und wir können

$$\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \quad \psi(z) = \frac{bz + c}{z - a}$$

definieren, wobei $c \in \mathbb{C}$ mit $c \neq a$. Weiterhin gilt

$$\psi^{-1} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \quad \psi^{-1}(z) = \frac{az + c}{z - b}$$

und damit ist $\psi \in \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Setzen wir nun $g := f \circ \psi$, so erhalten wir

$$g(\infty) = f(\psi(\infty)) = f(b) = \infty.$$

Also ist $g|_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und wie wir oben gesehen haben, existieren $d, e \in \mathbb{C}$ mit $d \neq 0$, so dass $g|_{\mathbb{C}}(z) = dz + e$. Nun gilt $|dz + e| \to \infty$ für $z \to \infty$. Also können wir die Notation $g(z) = dz + e$ auf ganz $\mathbb{P}^1$ fortsetzen. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= g(\psi^{-1}(z)) \\ &= d\psi^{-1}(z) + e \\ &= d \cdot \frac{az + c}{z - b} + e \\ &= \frac{(da + e)z + (dc - eb)}{z - b} \\ &= \begin{pmatrix} (da + e) & (dc - eb) \\ 1 & -b \end{pmatrix} \langle z \rangle \\ &=: M\langle z \rangle. \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\det M = d(a - c) \neq 0$. Wählen wir als γ eine Wurzel von $\det M$ und definieren $\tilde{M} := \gamma^{-1} M$, so gilt $f(z) = M\langle z \rangle = \tilde{M}\langle z \rangle$ und $\det \tilde{M} = \gamma^{-2} \det M = 1$. Also liegt $\tilde{M} \in PSl(2, \mathbb{C})$.

Für den Fall, dass $a = \infty = b$, so brauchen wir die Hilfsfunktion ψ nicht und wir können direkt unser Wissen über $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ anwenden. Eine analoge Rechnung liefert dann das Resultat.

Sei nun $f \in \mathrm{Aut}(B)$ und $w := f^{-1}(0)$. Dann definieren wir

$$f_w : B \to B, \quad f_w(z) = \frac{z - w}{\bar{w}z - 1}.$$

Es zeigt sich, dass f_w selbstinvers ist und damit in $\mathrm{Aut}(B)$ liegt. Setzen wir $g := f \circ f_w$, so erhalten wir

$$g(0) = f(f_w(0)) = f(w) = 0$$

Damit ist das Lemma von Schwarz (vgl. [Kas, Satz 5.10]) anwendbar und wir erhalten sowohl für g, als auch für g^{-1}

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |z| \\ |g^{-1}(z)| &\leq |z| \end{aligned}$$

Es ergibt sich, dass

$$|w| = |g^{-1}(g(w))| \leq |g(w)| \leq |w|$$

gilt. Also ist $|g(w)| = |w|$ und als weitere Folgerung aus dem Lemma von Schwarz erhalten wir die Existenz eines $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, so dass

$$g(z) = cz$$

gilt. Es folgt, dass

$$f(z) = cf_w(z) = \frac{idz - idw}{-\overline{idw}z + \overline{id}}$$

gilt, wobei $d^2 = c$. Setzen wir $\tilde{\alpha} = id$ und $\tilde{\beta} = -idw$, so folgt $|\tilde{\alpha}| = 1$ und $|\tilde{\beta}| = |w| < 1$. Wir definieren

$$\lambda = |\tilde{\alpha}| - |\tilde{\beta}|$$

und setzen $\alpha := \lambda^{-1}\tilde{\alpha}$ und $\beta := \lambda^{-1}\tilde{\beta}$. Es gilt $|\alpha| - |\beta| = 1$ und

$$f(z) = \frac{\alpha z - \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}},$$

was die Behauptung zeigt.

Als letztes interessieren wir uns nun für $\text{Aut}(\mathbb{H})$. Diesen Fall können wir aber auf $\text{Aut}(B)$ zurückführen, denn Lemma 9.2 gibt uns eine Bijektion

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) \to \text{Aut}(B), \quad f \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}.$$

Sei also $f \in \text{Aut}(\mathbb{H})$, dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| - |\beta| = 1$, so dass

$$\varphi(f(\varphi^{-1}(z))) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
f(z) &= \varphi^{-1}\left(\frac{\alpha\varphi(z) + \beta}{\bar{\beta}\varphi(z) + \bar{\alpha}}\right) \\
&= \frac{-i\alpha\varphi(z) - i\beta - i\bar{\beta}\varphi(z) - i\bar{\alpha}}{\alpha\varphi(z) + \beta - \bar{\beta}\varphi(z) - \bar{\alpha}} \\
&= \frac{-i(\alpha + \bar{\beta})(z - i) - i(\beta + \bar{\alpha})(z + i)}{(\alpha - \bar{\beta})(z - i) + (\beta - \bar{\alpha})(z + i)} \\
&= \frac{-i(\alpha + \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha})z + (\bar{\alpha} - \bar{\beta} + \beta + \bar{\alpha})}{(\alpha - \bar{\beta} + \beta - \bar{\alpha})z + i(-\alpha + \bar{\beta} + \beta - \bar{\alpha})} \\
&= \frac{-(\text{Re}(\alpha) + \text{Re}(\beta))z + (\text{Im}(\beta) - \text{Im}(\alpha))}{(\text{Im}(\alpha) + \text{Im}(\beta))z + (\text{Re}(\beta) - \text{Re}(\alpha))} \\
&=: M\langle z\rangle.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun $\det M$, so erhalten wir $\det M = |\alpha| - |\beta| = 1$. Außerdem hat M nur reelle Einträge, also liegt $M \in Sl(2, \mathbb{R})$. $\square$

Als nächstes wenden wir uns Gittern zu. Diese benötigen wir, um die diskreten Untergruppen von $\mathbb{C}$ zu beschreiben. Später wird sich dann auch zeigen, dass wir diese diskreten Untergruppen benötigen, um die Riemannschen Flächen zu beschreiben, deren Universelle Überlagerung $\mathbb{C}$ ist.

Definition 9.5. Sei B ein $n-$dimensionaler, reeller Vektorraum. Eine additive Untergruppe $\Gamma \subset V$ heißt *Gitter*, falls n linear unabhängige $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in V$ existieren, so dass

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_2$$

Lemma 9.6. *Sei $\Gamma \subset v$ eine additive Untergruppe. Γ ist ein Gitter genau dann, wenn*

1. *Γ diskret ist und*
2. *Γ nicht in einem echten Untervektorraum von V enthalten ist.*

Beweis. Falls Γ ein Gitter ist, die Aussage aus der Definition klar. Erfülle also Γ die beiden Bedingungen. Wir gehen nun per Induktion vor. Für $n = 0$ ist di eAussage klar. Gelte also die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Da $\Gamma \subset V$ mit $\dim V = n + 1$ in keinem echten Untervektorraum von V enthalten ist, existieren linear unabhängige $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \Gamma$. Sei $V_1 := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ und $\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1$. Nun ist Γ_1 wieder diskret und in keinem echten Untervektorraum von V_1 enthalten. Weiterhin ist $\dim V_1 = n$, also können wir die Induktionsvoraussetzung verwenden und erhalten linear unabhängige $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma_1 \subset \Gamma$, so dass $\Gamma_1 = \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_n$ gilt. Nun bildendie γ_i bereits eine Basis von V_1 und fügen wir x_{n+} erhalten wir sogar eine Basis von V, das bedeutet aber, dass wir zu jedem $x \in \Gamma \subset V$, eindeutig bestimmte $c_i(x), c(x) \in \mathbb{R}$ finden, so dass

$$x = c_1(x)\gamma_1 + \cdots + c_n(x)\gamma_n + c(x)x_{n+1}$$

Wir betrachten nun

$$P := \{\lambda_1\gamma_1 + \cdots + \lambda_n\gamma_n + \lambda x_{n+1} \mid \lambda_i, \lambda \in [0,1]\}.$$

Dieses P ist kompakt und da Γ diskret ist, folgt dass $P \cap \Gamma$ endlich ist. Weiterhin ist $(\Gamma \cap P) \setminus V_1$ nicht leer, da x_{n+1} enthalten ist. Damit existiert ein $\gamma_{n1} \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1$ mit

$$c(\gamma_n) = \min\{c(x) \mid x \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1\} \in]0,1].$$

Wir behaupten nun, dass $\Gamma = \Gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_{n+1}$. Sei dazu $x \in \Gamma$. Dann existieren $n_j \in \mathbb{Z}$, so dass

$$x' := x - \sum_{j=1}^{n+1} n_j\gamma_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\gamma_j + \lambda x_{n+1}$$

mit $0 \leq \lambda_j <!$ und $0 \leq \lambda < c(\gamma_{n+1})$ gilt. Da $x' \in \Gamma \cap P$ liegt und $c(\gamma_{n+1})$ minimal von 0 verschieden gewählt wurde, muss $\lambda = 0$ sein. Also liegt $x' \in \Gamma \cap V_1 = \Gamma_1$. Also sind die λ_i

ganzzahlig und die einzige Möglichkeit, bleibt, dass $\lambda_i = 0$ gilt. Dann ist aber x' bereits 0 und wir erhalten

$$x = \sum_{j=1}^{n} n_j \gamma_j \in \mathbb{Z}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{Z}\gamma_n.$$

□

Nun benötigen wir noch einige Eigenschaften von Decktransformationen, bevor wir unseren Uniformisierungssatz beweisen können.

Lemma 9.7. *Seien X eine Riemannsche Fläche, $p : \tilde{X} \to X$ die Universelle Überlagerung und $G = \mathrm{Deck}(X/\tilde{X}) \leq \mathrm{Aut}(\tilde{X})$. Dann gelten:*

1. *Für beliebige $\sigma \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ gilt, dass $\sigma(x) \neq x$ für alle $x \in \tilde{X}$.*
2. *Für alle $x \in \tilde{X}$ ist der Orbit $Gx := \{\sigma(x) \mid x \in G\}$ diskret.*

Beweis.

1. Jede Decktransformation ist eindeutig durch einen Punkt bestimmt. Dies folt aus der Eindeutigkeit für das liften von Abbildunge (vgl. [For99, Satz 4.8]). Das bedeutet aus $\sigma(x) = x$ für ein $x \in \tilde{X}$, folgt bereits $\sigma = \mathrm{id}$.
2. Nach [For99, Satz 5.6] ist $\mathrm{Deck}(\tilde{X}/X)$ galoisch und es folgt $Gx = p^{-1}(p(x))$. Die Aussage folgt nun, da die Faser von $p(x)$ diskret ist.

□

Lemma 9.8.

1. *Jeder Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ hat einen Fixpunkt.*
2. *Sei $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ eine diskret opereierende Gruppe ohne Fixpunkte. Dann ist G eine der folgenden Gruppen*
   a) *$G = \{\mathrm{id}\}$,*
   b) *$G = \{z \mapsto z + n\gamma \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ liegt oder*
   c) *$G = \{z \mapsto z + n\gamma_1 + m\gamma_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, wobei die $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^\times$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind.*

Beweis.

1. Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Dann ist nach Satz 9.4 $f(z) = M\langle z\rangle$ mit $M \in Sl(2, \mathbb{C})$. Sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Falls $c \neq 0$, so erhalten wir als Fixpunkte

$$z_{1,2} = \frac{a}{2c} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4c^2} - \frac{d-b}{c}}$$

Falls $c = 0$, so muss $a \neq 0$ gelten, ansonsten hätte M nicht vollen Rang und wir erhalten als Fixpunkt

$$z = \frac{d-b}{a}.$$

2. Sei $f \in G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$. Nach Satz 9.4 existieren $a \in \mathbb{C}^\times$ und $b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b$. Sei nun $f \neq \mathrm{id}$. Angenommmen es gälte $a \neq 1$, dann wäre $w = \frac{b}{1-a}$ ein Fixpunkt von f, allerdings operiert G nach Voraussetzung fixpunktfrei. Also muss $a = 1$ gelten. Also ist $f(z) = z + b$. Definieren wir $\Gamma := \{f(0) \mid f \in G\}$, so ist Γ eine additive, diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$. Nun können alle reellen (Unter-)vektorräume $V \subset \mathbb{C}$ die Dimension 0, 1 oder 2 besitzen und Γ ist in einem dieser drei Typen so enthalten, dass es in keinem echten Untervektorraum liegt. Aus Lemma 9.6 erhalten wir also, dass $\Gamma = \{0\}$, $\Gamma = \{n\gamma \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ oder $\Gamma = \{n\gamma_1 + m\gamma_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, wobei die $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}^\times$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind, gilt. Nun ist aber $G = \{z \mapsto z + b \mid b \in \Gamma\}$. Dies liefert die Behauptung.

□

Satz 9.9. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und bezeichne g ihr Geschlecht. Dann gelten:*

1. *Ist $g = 0$, so ist X konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$.*
2. *Ist $g = 1$, so existiert ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$, so dass X konform äquivalent zu $\mathbb{C}/\Gamma$ ist.*
3. *Ist $g \geq 2$, so existiert eine Untergruppe $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, so dass X konform äquivalent zu $\mathbb{H}/G$ ist.*

Beweis. Der erste Fall ergibt sich direkt aus dem Satz von Riemann-Roch [For99, Kor. 16.13]. Sei nun also $g \geq 1$ und bezeichne $\tilde{X}$ die Universelle Überlagerung von X. Dann ist $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend und aus dem Riemannschen Abbildungssatz 8.12 folgt, dass $\tilde{X}$ konform äquivalent zu $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder B ist. Da wir wissen, dass B konform äquivalent zu $\mathbb{H}$ ist, können wir in der Betrachtung genau so gut $\mathbb{H}$ verwenden. Nun wissen wir nach Lemma 9.8, dass jeder Automorphismus von $\mathbb{P}^1$ einen Fixpunkt besitzt, d.h. es gibt keine fixpunktfrei-operierende Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Also überlagert $\mathbb{P}^1$ nur sich selbst, also müsste $X \cong \tilde{X} \cong \mathbb{P}^1$ gelten. Dies ist ein Widerspruch zu $g \neq 0$. Also ist die Universelle Überlagerung von X entweder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$.

Sei nun $g \geq 2$. Angenommen $\tilde{X} \cong \mathbb{C}$. In Lemma 9.8 wurden alle diskreten, fixpunkfreioperierenden Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ bestimmt. Die zugehörigen Riemannschen Flächen sind dann $X \cong \mathbb{C}$, $X \cong \mathbb{C}^\times$ oder $X \cong \mathbb{C}/\Gamma$ für ein Gitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$. Nun sind aber die ersten beiden Möglichkeiten nicht kompakt und die Dritte hat Geschlecht $g = 1$. Ein Widerspruch. Also muss die Universelle Überlagerung von X konform äquivalent zu $\mathbb{H}$ sein und damit ist X konform äquivalent zu $\mathbb{H}/G$ für eine Untergruppe $G \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$.

Lösung finden.

Nun fehlt noch der Fall $g = 1$. □

Literatur

[For99] Otto Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer, 1999.

[Fre06] Eberhard Freitag. *Funktionentheorie 1*. Springer, 2006.

[Kas] Hendrik Kasten. *Funktionentheorie 1. Sommersemester 2013*.

[Rud91] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.