Partimos de una función que pueda expandirse con polinomios de Legendre:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m P_m(x) \text{ ; donde } C_m \text{ son los coeficientes } \quad (I)$$

Luego, por la relación de otorgonalidad de los polinomios de Legendre:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases} \quad (II)$$

Multiplicamos a cada lado de la ecuación (I) por $P_n(x)$ e integramos de -1 hasta 1:

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m P_m(x) \right) P_n(x)\,dx$$

Por (II) sabemos que la integral del lado derecho siempre da cero cuando $m \neq n$ $\therefore$ solo queda la integral para $m = n$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx = C_n \int_{-1}^{1} P_n(x) P_n(x)\,dx \quad \text{Reemplazando:}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx = C_n \left(\frac{2}{2n+1} \right) \quad \text{Despejando } C_n\text{:}$$

$$\boxed{C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx}$$