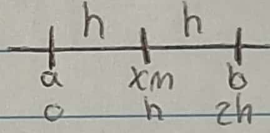
Por interpolación sabemos que:

$f(x) \simeq P_2(x)$ y si definimos nuestro conjunto de soporte como $\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} f(b)$$

Asumiendo una discretización constante, $P_2(x)$ se puede escribir como:



$$P_2(x) = \frac{(x-2h)(x-h)}{(-2h)(-h)} f(0) + \frac{(x-0)(x-2h)}{(h)(-h)} f(h) + \frac{(x-0)(x-h)}{(2h)(h)} f(2h)$$

$$P_2(x) = \frac{f(0)}{2h^2}(x^2 - xh - 2xh + 2h^2) - \frac{f(h)}{h^2}(x^2 - 2hx) + \frac{f(2h)}{2h^2}(x^2 - xh)$$

Ahora debido a la discretización:

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \int_0^{2h} P_2(x)\,dx = \frac{f(0)}{2h^2}\int_0^{2h}(x^2 - 3xh + 2h^2)\,dx - \frac{f(h)}{h^2}\int_0^{2h}(x^2 - 2hx)\,dx$$

$$+ \frac{f(2h)}{2h^2}\int_0^{2h}(x^2 - xh)\,dx$$

Powered by CamScanner

Resolviendo las integrales por separado:

$$\frac{f(0)}{2h^2}\left[\frac{x^3}{3}-3h\frac{x^2}{2}+2h^2x\right]\Bigg|_0^{2h}=\frac{f(0)}{2h^2}\left[\frac{(2h)^3}{3}-\frac{3h(2h)^2}{2}+2h^2(2h)\right]$$

$$=\boxed{f(0)\frac{h}{3}}$$

$$+\frac{f(h)}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}-hx^2\right]\Bigg|_{2h}^{0}=\frac{f(h)}{h^2}\left[-\frac{(2h)^3}{3}+h(2h)^2\right]=\frac{f(h)}{h^2}\left[\frac{4h^3}{3}\right]$$

$$=\boxed{\frac{4}{3}f(h)h}$$

$$+\frac{f(2h)}{2h^2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{hx^2}{2}\right]\Bigg|_0^{2h}=\frac{f2h}{2h^2}\left[\frac{(2h)^3}{3}-\frac{h(2h)^2}{2}\right]=\frac{f(2h)}{2h^2}\left[\frac{2}{3}h^3\right]$$

$$=\boxed{f(2h)\frac{h}{3}}$$

Juntandos los resultados:

$$\int_a^b P_2(x)=f(0)\frac{h}{3}+\frac{4}{3}f(h)h+f(2h)\frac{h}{3}$$

$$=\frac{h}{3}\left[f(0)+4f(h)+f(2h)\right]$$

Recordando que, $a=0$, $x_m=h$ y $b=2h$:

$$\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(x_m)+f(b)\right]$$

Powered by CamScanner