Técnicas de Conteo

① Variación sin repetición

$$V(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \boxed{6} \text{ formas}$$

$1!$

② Combinación sin repetición

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \boxed{3} \text{ formas}$$

$$\frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}(1)!}$$

③ Permutación sin repetición

$$P(5) = 5! = \boxed{120} \text{ formas}$$

④ Variación sin repetición

$$V(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \boxed{336} \text{ formas}$$

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}$$

⑤ Combinación sin repetición

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \boxed{45} \text{ formas}$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2! \cdot \cancel{8!}}$$

Scribe

⑥ Variación sin repetición

$$V(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \boxed{2520}$$ formas

⑦ Combinación sin repetición

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \boxed{45}$$ formas

⑧ Permutación con repetición (Remember → 8 letras)

$$P(8,3,2) = \frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = \boxed{1680}$$ palabras

"E" → 3 letras
"M" → 2 letras
"R" → 2 letras

⑨ Combinación sin repetición — Como María ya está, hacemos la combinación con una menos

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \boxed{462}$$ equipos

$$\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6!}}{5!\ \cancel{6!}}$$

⑩ Combinación sin repetición — al ser surtidas

Para 2 frutas	Para 3 frutas	Para 4 frutas	Total Combinación
$C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	$C(4,3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	$C(4,4) = \frac{4!}{4!(4-4)!} = 1$	$6 + 4 + 1 = \boxed{11}$ frutas

⑪ Variación sin repetición

$$V(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \boxed{720}$$ formas

(12) variación sin repetición

$V(8,2) = \frac{8!}{(8-2)!} = \boxed{56}$ formas

(14) variación con repetición

$V'(7,3) = 7^3 = \boxed{343}$ números

(13) variación sin repetición

$V(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \boxed{210}$ números

(15) Combinación sin repetición

$C(10,3) = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \boxed{120}$ formas

(16) En una placa $\left\{ \begin{array}{l} 10 \text{ Dígitos} \\ 26 \text{ letras} \end{array} \right\}$ variación con repetición

para los dígitos

$V'(10,3) = 10^3 = 1000$

para las letras

$V'(26,3) = 26^3 = 17576$

dígitos · letras:

$\boxed{17576000}$ placas

Scribe

(17) permutación circular sin repetición

$pc(n) = \boxed{(n-1)!}$ maneras

Es $n-1$ porque fijamos la primera rotación para evitar rotaciones redundantes.

(18) Combinación con repetición

$$C'(7,3) = \frac{(7+3-1)!}{3!\,(7-1)!} = \boxed{84} \text{ sabores}$$

(19) Formas diferentes | Formas posibles

Combinación sin repetición

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \boxed{20} \text{ combinaciones}$$

Combinación con repetición

$$C'(6,3) = \frac{(6+3-1)!}{3!\,(6-1)!} = \boxed{56} \text{ combinaciones}$$

(20) Demostración combinaciones con repetición:

Comenzamos seleccionamos r elementos de un conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ con repetición. Buscamos determinar cuántas selecciones diferentes se pueden hacer.

Seleccionar r elementos con repetición es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = r$$

Donde $y_i \geq 0$ representa el número de veces que elegimos el elemento x_i (# veces que se repite el elemento i)

Ej: Si elegimos A dos veces ($y_1 = 2$) B una vez ($y_2 = 1$) y C una vez ($y_3 = 1$), entonces $y_1 + y_2 + y_3 = 4$.

Ahora queremos encontrar el # de soluciones enteras ≥ 0 de esta ecuación.

Para esto, primero hacemos un cambio de variable para quitarnos la restricción de $y_i \geq 0$:

$z_i = y_i + 1$ } Sumamos 1 a y_i para que su valor mínimo sea 1

∴ al convertir $y_i \geq 0$ en $z_i \geq 1$ el sistema se transforma en:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r + n$$

Queda de esta forma ya que:

Cuando sustituimos $y_i = z_i - 1$ en la ecuación original queda:

$$(z_1 - 1) + (z_2 - 1) + \cdots + (z_n - 1) = r$$

Simplificando:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n - n = r$$

Despejando:

$$\boxed{z_1 + z_2 + \cdots + z_n = r + n}$$ Donde

El "n" sale de restar 1 de cada y_i, pues movemos el total r hacia arriba por cada uno de los n términos

Ya teniendo esto, ahora hacemos otro cambio de variable para eliminar la restricción de $z_1 \geq 1$:

$$w_i = z_i - 1$$

y al convertirse $z_i \geq 1$ en $w_i \geq 0$, la ecuación queda:

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = r$$

y en este sistema, los w_i representan directamente la distribución de r elementos entre n categorías sin restricciones adicionales.

Ahora queremos contar el número de soluciones enteras ≥ 0 del sistema.

Sabiendo que elegir r elementos para distribuir entre n categorías equivale a dividir un conjunto de $r+(n-1)$ elementos en dos grupos:

1. $r \rightarrow$ posiciones ocupadas por los elementos

2. $n-1 \rightarrow$ separadores de las categorías

quedando expresado de la siguiente forma:

$$\binom{r+n-1}{r}$$

Ahora, para contar cuántas soluciones hay, considerando el conjunto de $r+n-1$ elementos, queremos elegir r posiciones para las selecciones (ui)

El # de maneras de hacer esto es el # de combinaciones de $r+n-1$ elementos tomados de r en r de la siguiente forma

$$\boxed{\binom{r+n-1}{r} = \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!}}$$

Donde:

$r \rightarrow$ Elementos totales

$n \rightarrow$ el # elementos o veces que queremos combinar

Siendo esta la fórmula para combinaciones con repetición.