Econométrie Financière
M2 272 IEF
TD3
Value-at-Risk et Expected Shortfall

Année universitaire 2020-2021

On estime deux mesures de risque :

1. la Value-at-Risk (VaR),
2. l'Expected Shortfall (ES).

La VaR est définie comme la perte potentielle minimum que subit un portefeuille dans $\alpha\%$ des pires cas, pour un horizon de temps donné. L'ES est la valeur moyenne anticipée de ces pertes dans $\alpha\%$ des pires cas, sur un horison de temps donné [1].

On dispose des cotations des actions de Apple et de Exxon sur la période du 04/01/2016 au 31/12/2019 et l'on considère le portefeuille équipondéré de ces deux titres. On estime la VaR et l'ES de ce portefeuille à un horizon d'un jour par différentes méthodes. Les données figurent dans le fichier apple_exxon.xlsx

1 Présentation et analyse descriptive des données

- Après avoir importé les données, vous calculerez les rendements des deux actifs et le rendement du portefeuille équipondéré de ces deux titres.
- Faites les représentations graphiques suivantes :
  - graphique des rendements des actifs et du portefeuille,
  - histogramme des rendements des actifs et du portefeuille. Pour chaque série de rendement, vous calculerez

  Pour les rendements des actifs et du portefeuille, calculez et commentez les statistiques suivantes :
  - moyenne, médiane, maximum, minimum
  - variance ou écart type annualisé
  - skewness et kurtosis
  - statistique du test de Jarque et Bera et sa probabilité critique
  - Autocorrélogramme des rendements (jusqu'à l'ordre 15)
  - Autocorrélogramme des rendements au carré (jusqu'à l'ordre 15)

1. *cf.* Jondeau et al., 2000. Financial Modeling Under Non-Gaussian Distribution, édition Springer. chapitre 8 : Risk Management and VaR.

2 Estimation de la VaR et de l'ES à partir de l'historique.

On calcule la VaR et l'ES du *portefeuille* uniquement en appliquant la méthode suivante :

- On note $\{r_1^p, r_2^p, .., r_t^p, ., r_T^p\}$ les T observations du rendement du portefeuille r_t^p .
- A partir des T observations, construisez *T-N+1* sous-échantillons emboités de taille N de $\{r_1^p, ..., r_N^p\}$ à $\{r_{T-N+1}^p, ..., r_T^p\}$
- Chacun des sous-échantillons est utilisé pour estimer la fonction de répartition (*cdf*) des rendements.
- On considère par exemple le $t-N+1^{ème}$ sous-échantillon $\{r_{t-N+1}^p, ..., r_t^p\}$ et l'on classe les N rendements par ordre croissant.
- Les N rendements classés par ordre croissant sont notés $\{\tilde{r}_{t-N+1,t}^p, ..., \tilde{r}_{t,t}^p\}$ avec $\tilde{r}_{t-N+1,t}^p \leq ..., \leq \tilde{r}_{t,t}^p$.
- La $VaR_{\alpha,t}$ avec une probabilité α est le quantile d'ordre α du sous-échantillon classé par ordre croissant. Elle correspond à la $\alpha N^{ème}$ statistique d'ordre $\tilde{r}_{\alpha N,t}$ [2].
- Alors, la VaR à la date t pour la date *t+1* est

$$VaR_{\alpha,t} = -\tilde{r}_{\alpha N,t}$$

- L'ES est estimée par la moyenne des rendements observés inférieurs à $\tilde{r}_{\alpha N,t}$:

$$ES_{\alpha,t} = -\frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^{\alpha N} \tilde{r}_{i,t}$$

1. Calculez les $VaR_{\alpha,t}$ et $ES_{\alpha,t}$ avec $N = 100$, $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$.
2. Faites la représentation graphique de $VaR_{\alpha,t}$ sur un même graphique pour les deux valeurs de α et commentez.
3. Faites de même la représentation graphique de $ES_{\alpha,t}$ sur un même graphique.

2. On choisit ici N tel $\alpha N^{ème}$ est un nombre entier.

3 Estimation de la VaR avec un modèle GARCH

On estime la VaR et l'ES du *portefeuille* en utilisant un modèle ARMA-GARCH :

$$\begin{cases} r_t^p = m_t + e_t \\ e_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \sigma_{t-i}^2 \end{cases}$$

- On suppose que $z_t \sim N(0,1)$. La loi conditionnelle des rendements du portefeuille est alors $r_{t+1}^p | I_t \sim N\left(m_{t+1}, \sigma_{t+1}^2\right)$.
- La VaR à la date t pour la date *t+1* est :

$$VaR_{\alpha,t} = -\left(m_{t+1} + q_\alpha \times \sigma_{t+1}\right)$$

  où $m_{t+1} = E\left(r_{t+1}^p | I_t\right)$ est la prévision en t de r_{t+1}^p, σ_{t+1} son écart type conditionnelle et q_α le quantile d'ordre α de la loi $N(0,1)$.
- L'ES à la date t pour la date *t+1* est égal à :

$$ES_{\alpha,t} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{\alpha} \times \sigma_{t+1} - m_{t+1}$$

  où $\varphi(z)$ est la fonction de densité de la loi $N(0,1)$.

1. Recherchez le modèle ARMA-GARCH du rendement du portefeuille en supposant $z_t \sim N(0,1)$. Vous vérifierez l'existence d'un effet d'asymétrie. Les critères de validation de votre modèle sont :
   - significativité des coefficients des retards les plus élevés,
   - absence de corrélation des résidus standardisés,
   - absence d'effet ARCH pour les résidus standardisés.
2. En remplaçant m_{t+1} par la valeur anticipée en t de r_{t+1}^p et σ_{t+1} par son estimation obtenue du modèle GARCH, calculez la $VaR_{\alpha,t}$ et la $ES_{\alpha,t}$ pour $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$.
3. Faites un graphique des $VaR_{\alpha,t}$ et un autre des $ES_{\alpha,t}$ pour $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$.

4 Estimation de la VaR et de L'ES au niveau désagrégé

- On estime la VaR du portefeuille à partir de la modélisation de la matrice des variance-covariance des rendements des actifs du portefeuille.
- Cette approche désagrégée permet notamment d'évaluer l'effet d'une modification de la composition du portefeuille sur la VaR.
- On note $r_t = (r_t^1, r_t^2)'$ le vecteur des rendements des deux actifs du portefeuille.
- On suppose que les rendements suivent une loi normale : $r_t \sim N(m_t, \Omega_t)$
- Le rendement du portefeuille $r_t^p = w' r_t = \sum_{i=1}^2 w_i r_t^i$ suit une loi normale $r_t^p \sim N(m_t^p, \sigma_{p,t}^2)$ avec $m_t^p = w' m_t$ et $\sigma_{p,t}^2 = w' \Omega_t w$
- La VaR agrégée à la date t pour la date *t+1* est alors :

$$VaR_{\alpha,t} = -\left(m_{p,t+1} + q_\alpha \times \sigma_{p,t+1}\right)$$

  où q_α est le quantile d'ordre α de la loi $N(0,1)$.
- L'ES à la date t pour la date *t+1* est alors :

$$ES_{\alpha,t} = \frac{\varphi(q_\alpha)}{\alpha} \times \sigma_{p,t+1} - m_{p,t+1}$$

  où $\varphi(z)$ est la fonction de densité de la loi $N(0,1)$.

1. Pour chacun des actifs du portefeuille, vous allez calculer les résidus non standardisés de chacun de leur modèle ARMA respectif : $\hat{e}_{it} = r_{it} - \hat{m}_{it}$ et construire la matrice $(T, 2)$ de ces résidus non-standardisés : $[\hat{e}_{1t}, \hat{e}_{2t}]$
2. En utilisant le modèle BEKK(1,1), estimez la matrice de variance-covariance $\hat{\Omega}_t$ chaque date et calculez les $VaR_{\alpha,t}$ et les $ES_{\alpha,t}$
3. Faites les mêmes calculs en utilisant le modèle DCC(1,1)
4. Faites un graphique des $VaR_{\alpha,t}$ et un autre des $ES_{\alpha,t}$ pour $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$.

5 Comparaison des méthodes d'estimation

- On dispose de 3 méthodes d'estimation de la VaR du portefeuille :

1. à partir de l'historique
2. GARCH + loi normale au niveau agrégé
3. MGARCH + loi normale au niveau désagrégé

1. Calculez la moyenne de la VaR et de l'ES pour chacune des méthodes d'estimation.
2. Comptez le nombre de fois où le rendement du portefeuille r_t^p est inférieur à la $VaR_{\alpha,t}$ pour $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 5\%$. Comparez ce nombre à l'effectif attendu et classez les différentes méthodes d'estimation selon leur degré de précision.