M2 IEF-parcours quantitatif
Econométrie de la volatilité
TD 1 :
Détection d'un effet ARCH
et
Estimation d'un modèle GARCH(1,1)

Année universitaire 2020-2021

On utilise MATLAB pour construire deux programmes permettant de :

1. faire le test d'un effet ARCH,
2. estimer les paramètres d'un modèle GARCH(1,1).

On appliquera ces programmes aux observations quotidiennes de l'indice S&P 500 sur la période du au 01/02/2008 au 07/31/2020 (3167 observations) [1].

1 Etude descriptive des rendements

1. On note P_t le prix de l'actif à la date t, $r_t = log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ son rendement et T le nombre d'observations $\{r_1, r_2, .., r_T\}$. Calculez le rendement r_t et faites sa représentation graphique. Commentez.
2. Calculez et commentez les statistiques suivantes :
   - moyenne empirique $\hat{m} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$
   - écart type $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \hat{m})^2}$
   - skewness $\hat{S} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{r_t-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right)^3$
   - kurtosis $\hat{K} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{r_t-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right)^4$
   - Représentez l'histogramme des rendements (fonction *histogram*).
3. Les hypothèses du test de normalité [2] de Jarque et Bera sont :

$$\begin{cases} H_0 : S(r) = 0 \; et \; K(r) = 3 \\ H_1 : S(r) \neq 0 \; ou \; K(r) \neq 3 \end{cases}$$

   La statistique de test est :

$$LJB = \frac{T-1}{6}\left(\hat{S}\right)^2 + \frac{T-1}{24}\left(\hat{K} - 3\right)^2 \rightarrow \chi^2(2) \, \text{sous} \, H_0$$

   Calculez la statistique de ce test, le seuil critique à 1%, 5% et 10% et sa probabilité critique. Que pouvez-vous en conclure sur la loi des rendements ?

1. Format des dates : MM/DD/YYYY.
2. Si $r_t \sim N(m, \sigma^2)$, $S(r) = 0$ et $K(r) = 3$.

4. Calculez le rendement corrigé de sa moyenne au carré : $\hat{e}_t^2 = (r_t - \hat{m})^2$ utilisé comme proxy de la variance conditionnelle à la date t.
   — Faîtes la représentation graphique de $\hat{e}_t^2$
   — Estimez son autocorrélogramme (fonction *autocorr*).
   Que pouvez-vous en conclure sur l'existence d'un effet ARCH ?

2 Test d'un effet ARCH

On construit une routine effectuant le test d'un effet ARCH :

[Fstat,LMstat,hF,hLM,pvalF,pvalLM] = ARCH_test(r,q,alpha)

Inputs :
- r : vecteur (T+q,1) des rendements,
- q : nombre de retards pris en compte pour la régression 1
- alpha : niveau du risque de première espèce, en supposant que 5% est la valeur par défaut

Outputs :
- hF, hLM : variables indicatrices du résultat des deux statistiques de test,
- pvalF, pvalLM : probabilités critiques des deux statistiques de test.

Etapes de la construction du test :

1. Estimation de la régression :
$$\hat{e}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{e}_{t-1}^2 + ... + \gamma_q \hat{e}_{t-q}^2 + u_t \tag{1}$$
   où $\hat{e}_t = r_t - \bar{m}$ et u_t est le résidu de la régression.
   Hypothèses du test :
$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_q = 0 \Rightarrow \, pas\, d'effet\, ARCH \\ H_a : \gamma_1 > 0\, ou\, \gamma_2 > 0 ...\, ou\, \gamma_q > 0 \Rightarrow effet\, ARCH \end{cases}$$
   Estimez la régression (1) par les MCO sous l'hypothèse nulle H_0 et sous l'hypothèse alternative H_a.
2. L'hypothèse nulle peut être vérifiée à l'aide de deux statistiques de test.
   (a) Le test de Fisher :
$$F = \frac{\left(SCR^C - SCR^{NC}\right)/q}{SCR^C/(T-q-1)} \rightarrow \mathsf{F}(q, T-q-1)\,\text{sous}\, H_0$$
   où T est le nombre d'observations utilisées pour l'estimation, SCR^{NC} est la somme des carrés des résidus du modèle non contraint, SCR^C la somme des carrés des résidus du modèle contraint, q le nombre de contraintes sous l'hypothèse nulle.
   (b) Le test du multiplicateur de Lagrange :
$$LM_{stat} = TR^2 \rightarrow \chi^2(q)\,\text{sous}\, H_0$$
   est le produit du nombre T d'observations utilisées pour l'estimation et du R^2 de la régression (1).
   (c) Calculez ces deux statistiques de test, les seuils critiques associés (pour un risque de première espèce de 1%, 5%, 10%) et les probabilités critiques.
   (d) Pour chaque statistique de test, calculez la variable indicatrice du résultat du test :
$$h = \begin{cases} 1\,\text{si}\, H_0\,\text{rejetée}, \\ 0\,\text{sinon} \end{cases}$$
   Elle est notée hF pour le test de Fisher et hLM pour le test du multiplicateur de Lagrange.

3 Estimation des paramètres d'un modèle GARCH(1,1)

On estime les paramètres du modèle GARCH(1,1) par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance.

$$\begin{cases} r_t = \mu + e_t,\ e_t = \sigma_t z_t \ avec\ z_t \sim i.i.d\, N(0,1) \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

L'expression de la fonction de log-vraisemblance pour les T observations est :

$$\mathcal{L}(\theta) \quad = \quad -\frac{T}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma_t}\right)^2$$

1. Les paramètres inconnus sont $\mu, \omega, \alpha_1, \beta_1$. En utilisant la méthode du "variance targeting", on transforme le vecteur des paramètres $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = (\mu \times 10^3, \alpha_1, \alpha_1 + \beta_1, \sigma^2 \times 10^4)'$. Les paramètres transformés ont un ordre de grandeur comparable, ce qui devrait faciliter la recherche d'un estimateur. Montrez que l'on peut récupérer la totalité des paramètres inconnus à partir du vecteur des paramètres θ.
2. Pour calculer l'EMV on doit donner des valeurs initiales aux coefficients. On choisit les valeurs suivantes :
$$\begin{cases} \mu = \bar{r}_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t \\ \alpha_1 = 0.15 \\ \beta_1 = 0.8 \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{r}_T)^2 \end{cases}$$
3. On construit une fonction calculant la log-vraisemblance :

   [LL] = LLgarch11(theta,r)

   où
   — theta : vecteur des paramètres
   — r : vecteur des rendements
   — LL : valeur de la log-vraisemblance pour les T observations

   Pour calculer la log-vraisemblance, on doit calculer les résidus $e_t = r_t - \mu$ et les variances conditionnelles $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$. On choisit des valeurs initiales égales à leurs espérances :
$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ \sigma_0^2 = \sigma^2 \end{cases}$$
4. Pour trouver l'estimateur du maximum de vraisemblance on utilise la fonction matlab fminunc. On écrit la séquence des instructions suivantes :

   options= optimoptions('fminunc','MaxIterations',500)
   f=@(x)LLgarch11(x,r)
   $[x, fval, exitflag]$ = fminunc(f,theta)
5. Utilisez les paramètres estimés et les valeurs initiales de la question précédente pour calculer les variances conditionnelles σ_t^2 à chaque date.