

سوالات الگوریتم مرحله دوم المپیاد سال ۹۴

سوال ۱

یه درخت ریشه دار داریم که هر راس وزن داره، می خوایم یه مجموعه برداریم که تو این مجموعه ۱-یه راس باشه که جد بقیه رئوس باشه و ۲-هر راس عددش از عدد جدش بیشتر باشه. بزرگترین مجموعه که این ویژگی رو داره توی $O(n^2)$ بدست بیارید

راه حل داینامیک n^2 که تو هر استیت بررسی می کنیم که ۱-اون راس جد برداشته شده یا نه اگه برداشته نشده بر می داریم اگه نه میریم تو بچه ها، اگه برداشتیم هم می ریم تو بچه ها فقط باید یه آرایه بگیریم برای وزن ها که بگیریم آخرین وزنی که برداشتیم چی بوده) راه حل $O(n)$ هم می گن داره

سوال ۲

Solve:

```
if(rand-bit() == 0)
```

```
return 0;
```

```
else
```

```
return 1-solve()
```

الف) ثابت کنید احتمال این که ۱ بشه خروجی هست $1/3$

واضحه وقتی ۱ میشه که تعداد ۱ ها فرد باشه و اولین بیت هم ۱ باشه، پس جواب میشه $zigma$

$1/pow(4,i)$ از ۱ تا بی نهایت که میشه $3/1$

(ب) امید ریاضیه Call شدن تابع Solve چقدره ؟

که انگاری داره می گه داریم شیر میندازیم یا خط، تو چندمین پرتاب شیر میاد که میشه $2 = 1/1/2$

(ج) فرض کنید اگر یک تابع دیگر داشته باشیم به نام `third_bit` که با احتمال $1/3$ یک و به احتمال $2/3$ صفر تولید می کند، با استفاده از این تابع یک تابع بنویسید که با احتمال مساوی صفر یا یک تولید کند.

(د) اگر در کد بالا به جای `rand-bit` از `third-bit` استفاده کنیم امید ریاضی رو بدست بیارید. که میشه

۱,۵

سوال ۳

یه مجموعه مرجع داریم که شامل یه سری دور تو گرافه که از یه راس خاص شروع میشه و به همون راس بر می گرده می خوایم بگیریم k تا عضو تو این مجموعه هست که کل رئوس رو می پوشونه NPC است.

راه حل: مسئله `SCP(Set Coverage Problem)` رو کاهش می دیم. `SCP` می گه یه سری مجموعه

داریم و یه مجموعه مرجع آیا k تا مجموعه هست که اجتماعشون بشه مجموعه مرجع؟! حالا می خوایم

`SCP` رو حل کنیم! می گیم راس S رو به اول و آخر هر مجموعه بچسبون! و هر مجموعه رو که می بینی

یه دور تو گراف ایجاد کن به این صورت که راس هایی که تو مجموعه پشت سر هم بینشون یال وصل شه.

حالا اگه بتونیم تو این گراف k تا سیکل پیدا کنیم که مجموعه مرجع رو پوشش می ده تونستیم مسئله رو

حل کنیم پس مسئله NPC است. برای `SCP` هم اول باید مسئله `Vertex Cover` رو بهش کاهش بدیم.

می شد مستقیم از `Vertex Cover` کاهش داد ولی این جوری راحت تره.

سوال ۴

یه سری بازه داریم یه سری نقطه تو فضای دو بعدی، بازه ها افقی هستن، نزدیک ترین نقطه بالای هر بازه

چیه؟! توی $n \lg n$

راه حل : یه KD Tree تعریف می کنیم و کل نقاط روی میریزیم توش و KD رو build میکنیم . برای build هم به ازای هر x و y و c میایم اونو رو بر میداریم که به c نزدیک تره و بعد مرج می کنیم. در نهایت به ازای هر بازه کوئری می زنیم. از اونجا که تعداد رئوس محدوده نمی خواد درخت رو از منفی بی نهایت تا مثبت بی نهایت بسازیم. مشخصه که اردر $n \lg n$ هست

سوال ۵

یه سری نقطه وزن دار داریم یه سری بازه، می خوایم یه تعدادی از این نقطه ها رو برداریم که کل بازه ها کاور شن (فضا یک بعدی)

راه حل:

نقطه ها رو Sort می کنیم بازه ها رو هم ایضا! بعد می گیم که برای هر نقطه اولین و آخرین بازه ای که می پوشونه چیه؟! $dp[i][j]$ می زنیم که i نقطه ای که روش هستیم رو نشون میده و j آخرین بازه ای که کاور شده یا این که i کمترین بازه اش بیشتر از j هست که جواب بی نهایته یا میایم i رو بر میداریم و آخرین بازه ای که دیدیم میشه $high[i]$ و وزن i رو اضافه می کنیم یا این که این که i رو بر نمی داریم. در نهایت مینیم این دوتا میشه جواب (داینامیک تاپ داون)