PGCD

Exercice 1 PGCD

1) 7 est-il un diviseur de 72 ?
2) 7 est-il divisible par 14 ?
3) Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et par lui-même. 19 est-il un nombre premier ?
4) Écris un diviseur commun de 12 et de 21.
5) Écris le plus grand commun diviseur de 12 et de 30.
6) Quel est le PGCD 12 et 16?
7) Quel est le PGCD de 1000 et de 100?
8) Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD vaut 1. Les nombres 6 et 15 sont-ils premiers entre eux ?
9) Calcule le PGCD de 5971 et 1855.
10) En utilisant le PGCD écris la fraction $\frac{247}{475}$ sous forme irréductible.

Exercice 2 Méthode d'Euclide

1) Quel est le PGCD de 35 et 20 ?
2) Quel est le PGCD de 16, 27et 20 ?
3) Quel est le PGCD de 15 et 42 ?
4) Quel est le PGCD de 110, 40, et 120 ?
5) Quel est le PGCD de 26 et 14 ?
6) Quel est le PGCD de 7, 15 et 21 ?

Exercice 3 PGCD

Une fleuriste dispose de 124 roses et de 279 œillets.

Elle souhaite composer des bouquets similaires.

En utilisant toutes les fleurs quel est le plus grand nombre de bouquets qu'elle pourra créer?

Congruence

Exercice 1

Déterminer les congruences suivantes :

1) Modulo 5 des nombres suivants : 12 ; 45 ; 87 ; 12 ; 104

2) Modulo 7 des nombres suivants : 14 ; 85 ; 24 ; 46

3) Modulo 8 des nombres suivants : 12 ; 204 ; 36 ; 48

Exercice 2

1) Déterminer le reste de 2 , 2^2 , 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 dans la division euclidienne par 7

2) En déduire une formule générale donnant le reste de 23k, 2^{3k+1}, 2^{3k+2} dans la division euclidienne par 7 (vous aurez donné le reste de 2^n)

3) En déduire le reste de 2^{55} dans la division par 7

Exercice 3

1) En vous inspirant de l'exercice 7 , donner le reste de 5^n dans la division euclidienne par 12

2) En déduire le reste de 5^{789} dans la division euclidienne par 12

Corrigé

Exercice 1 PGCD

1) 7 est-il un diviseur de 72 ?
    a. Non
2) 7 est-il divisible par 14 ?
    a. Non
3) Un nombre premier est un nombre qui n'est divisible que par 1 et par lui-même. 19 est-il un nombre premier ?
    a. Oui
4) Écris un diviseur commun de 12 et de 21.
    a. 3
5) Écris le plus grand commun diviseur de 12 et de 30.
    a. 6
6) Quel est le PGCD 12 et 16?
    a. 4
7) Quel est le PGCD de 1000 et de 100?
    a. 100
8) Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD vaut 1. Les nombres 6 et 15 sont-ils premiers entre eux ?
    a. Non. PGCD = 3
9) Calcule le PGCD de 5971 et 1855.
    a. $5971 = 7 \times 853$ et $1855 = 7 \times 265$
       Le PGCD de 5971 et 1855 est égal à 7.
       Méthode d'Euclide :
       $5971 = 3 \times 1855 + 406$
       $1855 = 4 \times 406 + 231$
       $406 = 1 \times 231 + 175$
       $231 = 1 \times 175 + 56$
       $175 = 3 \times 56 + 7$
       $56 = 8 \times 7 + 0$
       Le PGCD est égal au dernier reste non nul : 7.
10) En utilisant le PGCD écris la fraction $\frac{247}{475}$ sous forme irréductible.
    Pour écrire une fraction sous la forme irréductible on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.
    Comme le PGCD de 247 et 475 est 19 on divise le numérateur et le dénominateur par 19.

    On obtient . $\frac{13}{25}$.

Exercice 2 Méthode d'Euclide

1) Quel est le PGCD de 35 et 20 ?

   204 = 5×35 + 29
   35 = 1×29 + 6
   29 = 4×6 + 5
   6 = 1×5 + 1
   5 = 5×1 + 0
   Le PGCD est égal au dernier reste non nul : 1.

2) Quel est le PGCD de 16, 27et 20 ?

   Pour déterminer rapidement quel est le pgcd de plusieurs nombres, il suffit d'écrire leurs décompositions en facteurs premiers.
   16 = 2 × 2 × 2 × 2 × 1
   27 = 3 × 3 × 3 × 1
   20 = 5 x 2 × 1
   Le pgcd est égal à 1.

3) Quel est le PGCD de 15 et 42 ?

   15 = 3 × 5 et 42 = 3 × 14
   Le PGCD de 15 et 42 est égal à 3.
   Méthode d'Euclide :
   42 = 2×15 + 12
   15 = 1×12 + 3
   12 = 4×3 + 0
   Le PGCD est égal au dernier reste non nul : 3.

4) Quel est le PGCD de 110, 40, et 120 ?

   Le PGCD de la série : 110, 40, 120 est 10

5) Quel est le PGCD de 26 et 14 ?

   26 = 2 × 13 et 14 = 2 × 7
   Le PGCD de 26 et 14 est égal à 2.
   Méthode d'Euclide :
   26 = 1×14 + 12
   14 = 1×12 + 2
   12 = 6×2 + 0
   Le PGCD est égal au dernier reste non nul : 2.

6) Quel est le PGCD de 7, 15 et 21 ?

   Le PGCD de la série : 7, 15, 21 est 1

Exercice 3 PGCD

Une fleuriste dispose de 124 roses et de 279 œillets.

Elle souhaite composer des bouquets similaires.

En utilisant toutes les fleurs quel est le plus grand nombre de bouquets qu'elle pourra créer?

Le nombre de bouquets doit être un diviseur de 124 et de 2119 pour ne pas qu'il reste de fleurs.

Il doit être le plus grand possible donc on doit calculer le PGCD de 124 et de 279.

Le PGCD est 31 donc il y aura 31 bouquets composés chacun de 4 roses et 9 œillets.

Congruence

Exercice 1

Déterminer les congruences suivantes :

1) Modulo 5 des nombres suivants : 12 ; 45 ; 87 ; 12 ; 104

$$12 \equiv 2[5]; 45 \equiv 0[5]; 87 \equiv 2[5]; 104 \equiv 4[5]$$

2) Modulo 7 des nombres suivants : 14 ; 85 ; 24 ; 46

$$14 \equiv 0[7]; 85 \equiv 1[7]; 24 \equiv 3[7]; 43 \equiv 1[7]$$

3) Modulo 8 des nombres suivants : 12 ; 204 ; 36 ; 48

$$12 \equiv 4[8]; 204 \equiv 4[8]; 36 \equiv 4[8]; 48 \equiv 0[8]$$

Exercice 2

1) Déterminer le reste de 2 , 2^2 , 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 dans la division euclidienne par 7

On travaille modulo 7 :

$$2 \equiv 2[7] \text{ ; } 2^2 = 4 \equiv 4[7] \text{ ; } 2^3 = 8 \equiv 1[7] \text{ ; } 2^4 = 16 \equiv 2[7] \text{ ; } 2^5 = 32 \equiv 4[7] \text{ ; } 2^6 = 64 \equiv 1[7]$$

2) En déduire une formule générale donnant le reste de 23k, 2^{3k+1}, 2^{3k+2} dans la division euclidienne par 7 (vous aurez donné le reste de 2^n)

On remarque que :

$$2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1[7] \text{ ; } 2^{3k+1} = (2^3)^k \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2[7] \text{ ; } 2^{3k+1} = (2^3)^k \times 2^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4[7]$$

On peut aussi s'aider de la question 1 , en la présentant différemment :

Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste	Puissance de 2	reste
1	2	4	2	7	2	3k + 1	2
2	4	5	4	8	4	3k + 2	4
3	1	6	1	9	1	3k	1

3) En déduire le reste de 2^{55} dans la division par 7

On a : $2^{55} = 2^{3\times18} \times 2 \equiv 1 \times 2 \equiv 2[7]$

Exercice 3

1) En vous inspirant de l'exercice 7 , donner le reste de 5^n dans la division euclidienne par 12

On commence par chercher les restes dans la division par 12 de 5 , 5^2, 5^3 … jusqu'à ce qu'on en trouve un congru à 1 modulo 12

$5 \equiv 5[12]$; $5^2 = 25 \equiv 1[12]$

$5^3 = 125 \equiv 5[12]$; $5^4 = 625 \equiv 1[12]$ …

Les puissances paires de 5 ont donc un reste égal à 1 , et les puissances impaires ont un reste égal à 5. On résume pour répondre proprement :

$5^{2k} \equiv 1[12]$ *et* $5^{2k+1} \equiv 5[12]$

2) En déduire le reste de 5^{789} dans la division euclidienne par 12

789 est une puissance impaire donc $5^{789} \equiv 5[12]$