

Rapport Évaluation de performances de réseaux

Morgane Cadeau, Morgan Canas, Lucas Lafage, William
Mateille, Raphael Sombstay

Novembre 2019



Table des matières

1	Comparaison de files d'attente	2
1.1	Temps moyen de réponse du système 1	2
1.2	Temps moyen de réponse du système 2	3
1.3	Nombre moyen de passages d'un client et temps de réponse moyen dans chacune des 2 files du système 3	6
1.4	Classement des 3 systèmes en fonction de leurs performances respectives	7
1.5	Performances si on a un système 3 bis où les clients se dirigent vers la file la moins remplie	8
1.6	Montrer que $N(t) = (N1(t), N2(t))$ est markovien et construire la chaîne de Markov pour des files inférieures ou égales à 3	9
2	File avec arrivées découragées	10
2.1	Chaîne de Markov associée au nombre de clients dans la file	10
2.2	Probabilité P_k d'avoir k clients dans la file. Détermination de la condition de stabilité	10
2.3	Taux d'utilisation du serveur	11
2.4	Nombre moyen L de clients dans le système	12
2.5	Débit moyen Λ en sortie du système	12
2.6	Démonstration que le temps moyen de réponse de cette file est $R = \frac{\rho}{\mu(1-\pi_0)}$	12
3	Unité de transmission de paquets	13
3.1	Notation de Kendall de la file	13
3.2	Nombre moyen de paquets dans la file et temps moyen de réponse	13
3.2.1	Charge de trafic à 0.6	13
3.2.2	Charge de trafic à 0.9	14
3.3	Cas de paquets de longueur constante	14
3.3.1	Charge de trafic à 0.6	14
3.3.2	Charge de trafic à 0.9	14
4	Réseaux de commutateurs	15
4.1	Temps moyen de réponse	15
4.1.1	Paquets de longueur exponentiellement distribuée	15
4.1.2	Paquets de taille constante	16
4.2	Temps moyen de réponse du schéma simplifié	17
4.2.1	Paquets de longueur exponentiellement distribuée	17
4.2.2	Paquets de taille constante	17
4.3	Modélisation du nouveau système et temps moyen de réponse	18

5	Économie d'énergie d'un serveur vidéo	19
5.1	Vérification que $Dt, t \geq 0$ constitue une chaîne de Markov	19

1 Comparaison de files d'attente

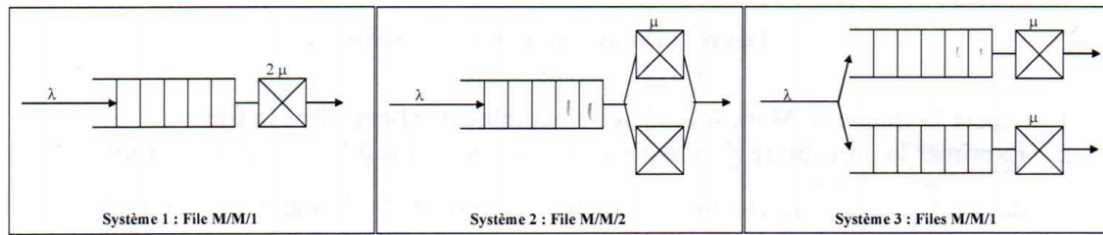


Figure 1: Schéma des différents systèmes

1.1 Temps moyen de réponse du système 1

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

$$E[L] = \frac{\rho}{1 - \rho} \text{ donc}$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{\frac{2\mu - \lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{2\mu}{2\mu - \lambda}$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}$$

Calcul du temps moyen de réponse du système

$$E[R] = \frac{E[L]}{\lambda}$$

$$E[R] = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} * \frac{1}{\lambda}$$

$$E[R] = \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

1.2 Temps moyen de réponse du système 2

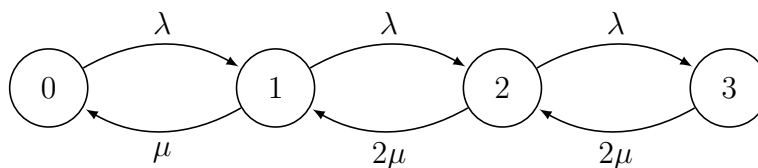


Figure 2: Chaîne de Markov du système de 0 à 3 clients

On peut donc en déduire la chaîne de Markov du système pour n clients :

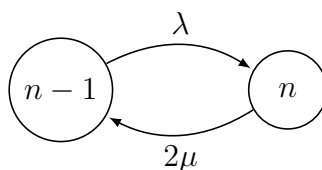


Figure 3: Chaîne de Markov du système pour n clients

Utilisation de la méthode des coupes afin de déterminer π_n selon π_0

$$\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

$$2\mu \pi_2 = \lambda \pi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0$$

$$2\mu \pi_3 = \lambda \pi_2 = \frac{\lambda^3}{2\mu^2} \pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \pi_0$$

$$\text{On a donc } \pi_n = \frac{\lambda}{2\mu} \pi_{n-1}$$

$$\text{On en déduit que } \pi_n = \frac{\lambda^n}{2^{n-1} \mu^n} \pi_0$$

$$\text{Or } \rho = \frac{\lambda}{2\mu} \text{ donc } \pi_n = 2\rho^n \pi_0$$

Calcul de π_0 grâce à la somme des probabilités

$$\begin{aligned}\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i &= 1 \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2\rho^i \pi_0 \\ \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \\ \Rightarrow \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \rho \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \\ \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \rho \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho} \\ \pi_0 &= 1 - \frac{2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ \Rightarrow 1 &= \pi_0 + \frac{2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ 1 &= \pi_0 \left(1 + \frac{2\rho}{1-\rho} \right) = \frac{1-\rho+2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1-\rho}{1+\rho}\end{aligned}$$

La valeur de π_0 nous permet de déduire π_n

$$\pi_n = 2\rho^n \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$\begin{aligned}
 E[L] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_i \\
 E[L] &= \sum_{i=0}^{\infty} i 2 \rho^i \frac{1-\rho}{1+\rho} \\
 E[L] &= 2 \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i \\
 \Rightarrow E[L] &= 2 \left(\frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\
 E[L] &= \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)} \\
 \Rightarrow \mathbf{E[L]} &= \frac{\mathbf{2\rho}}{\mathbf{1-\rho^2}}
 \end{aligned}$$

Calcul du temps moyen de réponses du système 2

$$\begin{aligned}
 E[R] &= \frac{E[L]}{\lambda} \\
 E[R] &= \frac{2\rho}{\lambda(1-\rho^2)} = \frac{2\lambda}{2\mu\lambda(1-\rho^2)} \\
 \mathbf{E[R]} &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu(1-\rho^2)}}
 \end{aligned}$$

1.3 Nombre moyen de passages d'un client et temps de réponse moyen dans chacune des 2 files du système 3

On peut appliquer le théorème de Jackson car toutes les hypothèses sont respectées

- Arrivées selon un processus de poisson de débit λ
- Chaque file a 1 seul serveur, un service exponentiel de paramètre μ , une capacité infinie est est FIFO

Calcul de la charge ρ

$$\begin{aligned}e_1 &= e_2 = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda \\ \rho_1 &= \rho_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu}\end{aligned}$$

Calcul du nombre moyen de passages d'un client dans chacune des 2 files

$$\begin{aligned}E[L_i] &= \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \text{ et on sait que } \rho_1 = \rho_2 \\ E[L_1] &= E[L_2] = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{\frac{2\mu - \lambda}{2\mu}} \\ E[L_1] &= E[L_2] = \frac{\lambda}{2\mu} \times \frac{2\mu}{2\mu - \lambda} \\ \mathbf{E[L_1]} &= \mathbf{E[L_2]} = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}\end{aligned}$$

Calcul du temps moyen de réponse du système

$$\begin{aligned}E[R_i] &= \frac{E[L_i]}{\lambda e_i} \text{ et on sait que } E[L_1] = E[L_2] \text{ et } e_1 = e_2 \\ E[R_1] &= \frac{E[L_1]}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\lambda} \\ E[R_1] &= \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}\end{aligned}$$

Or $E[L_1] = E[L_2]$ et $\lambda_1 = \lambda_2$ donc

$$E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$$

$$E[R] = e_1 E[R_1] + e_2 E[R_2]$$

$$E[R] = \frac{1}{2(\mu - \frac{1}{2}\lambda)} + \frac{1}{2(\mu - \frac{1}{2}\lambda)}$$

$$E[R] = \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$$

1.4 Classement des 3 systèmes en fonction de leurs performances respectives

	Temps moyen de réponse	Temps de réponse pour $\mu = 1$ et $\lambda = 1$
Système 1	$\frac{1}{2\mu - \lambda}$	1
Système 2	$\frac{1}{\mu(1 - \rho^2)}$	$\frac{4}{3}$
Système 3	$\frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$	2

Figure 4: Tableau de comparaison des performances des 3 systèmes

Le système 1 est le plus efficace car son temps de réponse est plus faible pour la même valeur de μ et de λ entre les 3 systèmes.

Ce résultat était prévisible car le système 1 a un serveur 2 fois plus rapide que les autres systèmes. Ainsi, s'il n'y a qu'un client, ce système est plus rapide que le système 2.

1.5 Performances si on a un système 3 bis où les clients se dirigent vers la file la moins remplie

Dans ce cas là, le système 3 bis serait plus performant que le système 3 car le temps de réponse serait inférieur. Cependant, le système 2 aurait tout de même un temps moyen de réponse supérieur à celui du système 2.

Le classement serait donc le suivant :

1. Système 1
2. Système 2
3. Système 3 bis
4. Système 4

1.6 Montrer que $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$ est markovien et construire la chaîne de Markov pour des files inférieures ou égales à 3

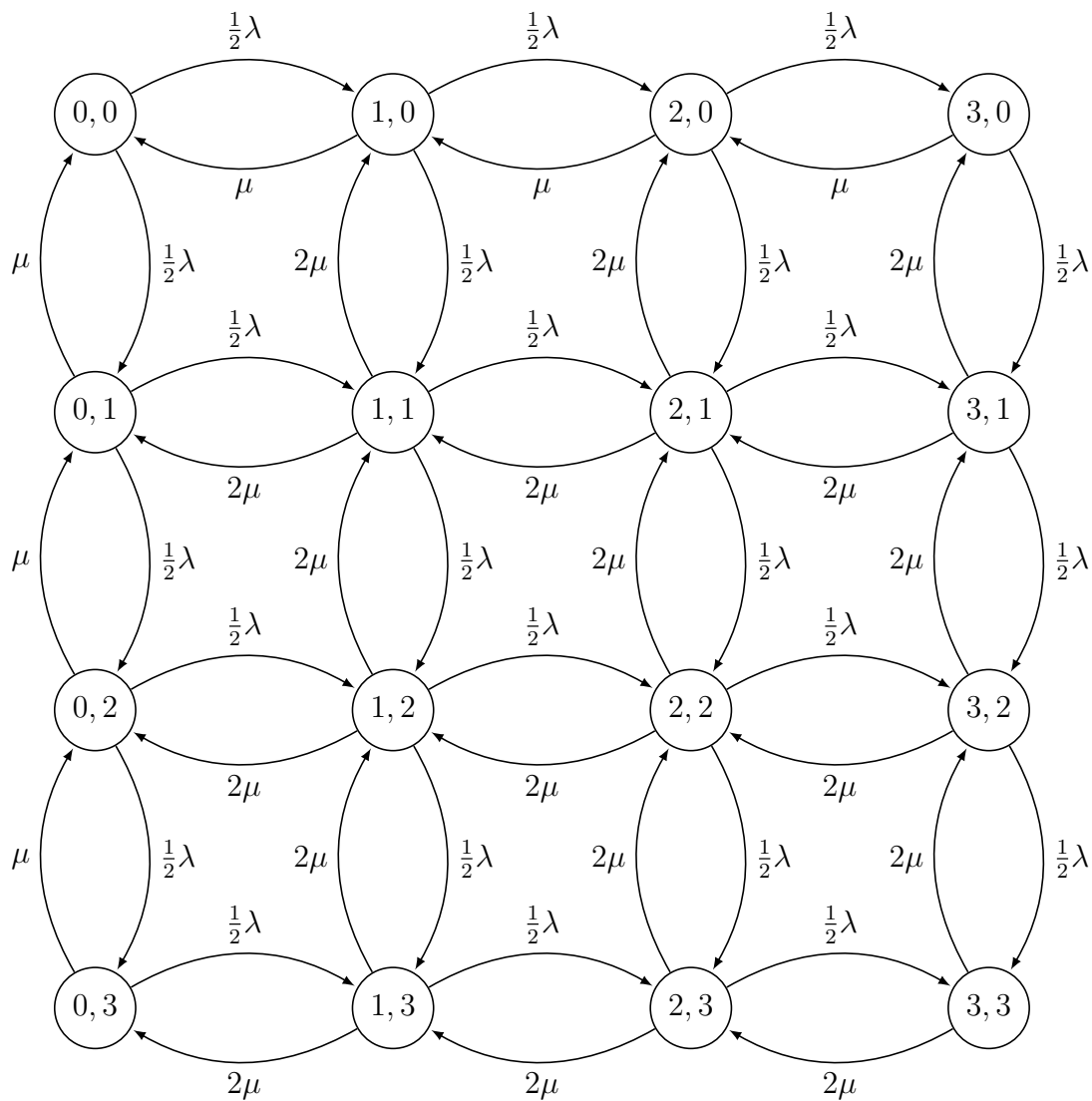


Figure 5: Chaîne de Markov pour des files de longueur inférieures à 3

C'est un processus Markovien car on n'a pas besoin de connaître N pour trouver $N + 1$. On peut calculer les probabilités suivantes :

Probabilité d'une arrivée dans la file : $P(N_1(t + dt) = j + 1 / N_1(t) = j) = \frac{1}{2}\lambda dt + o(dt)$

Probabilité d'un départ de file : $P(N_1(t + dt) = j - 1 / N_1(t) = j) = \mu dt + o(dt)$

2 File avec arrivées découragées

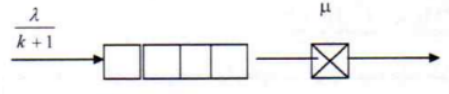


Figure 6: Schéma de la file avec arrivées découragées

2.1 Chaîne de Markov associée au nombre de clients dans la file

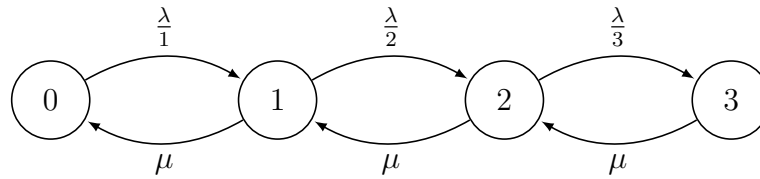


Figure 7: Chaîne de Markov du système de 0 à 3 clients

On peut donc en déduire la chaîne de Markov du système pour n clients :

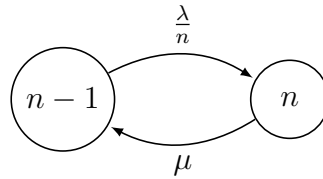


Figure 8: Chaîne de Markov du système pour n clients

2.2 Probabilité P_k d'avoir k clients dans la file. Détermination de la condition de stabilité

Calcul de π_n par rapport à π_0

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{\lambda^3}{6\mu^3} \pi_0 \\ \pi_n &= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0\end{aligned}$$

Calcul de π_0

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \pi_0 \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} - 1 \right) \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 (e^\rho - 1) \\ \pi_0 &= 1 - e^\rho \pi_0 + \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{e^\rho}\end{aligned}$$

Condition de stabilité de la file

Le système est stable lorsque le débit d'entrée est inférieur au débit de sortie. Ici, le débit d'entrée est variable donc on prend sa valeur maximale lorsque $k = 0$. La condition de stabilité est donc $\lambda < \mu$.

2.3 Taux d'utilisation du serveur

$$\begin{aligned}U &= 1 - \pi_0 = 1 - \frac{1}{e^\rho} \\ U &= \frac{e^\rho - 1}{e^\rho}\end{aligned}$$

2.4 Nombre moyen L de clients dans le système

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k + 0 \times \pi_0 \\
 L &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} \times \frac{1}{e^\rho} \\
 L &= \frac{1}{e^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} \\
 L &= \frac{\rho}{e^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \\
 L &= \frac{\rho}{e^\rho} \sum_{k-1=0}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \\
 L &= \frac{\rho}{e^\rho} \times e^\rho \\
 \mathbf{L} &= \mathbf{\rho}
 \end{aligned}$$

2.5 Débit moyen Λ en sortie du système

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{\mu} \\
 \Lambda &= \frac{U}{S} = U\mu = (1 - \pi_0)\mu \\
 \mathbf{\Lambda} &= \frac{\mathbf{\mu}(e^\rho - 1)}{e^\rho}
 \end{aligned}$$

2.6 Démonstration que le temps moyen de réponse de cette file est $R = \frac{\rho}{\mu(1-\pi_0)}$

$$\begin{aligned}
 L &= R\Lambda \\
 \Rightarrow R &= \frac{L}{\Lambda} = \frac{\rho}{U\mu} \\
 \text{Donc on retrouve } \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{\rho}}{(1 - \pi_0)\mu}
 \end{aligned}$$

3 Unité de transmission de paquets

3.1 Notation de Kendall de la file

La file présentée a une arrivée de paquets qui suit une loi exponentielle, ceux-ci ont une longueur exponentiellement distribuée. Ainsi, leur temps de service suit une loi exponentielle. Enfin, il n'y a qu'un commutateur. La notation de Kendall de la file se note donc $M/M/1$.

3.2 Nombre moyen de paquets dans la file et temps moyen de réponse

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda}{\mu C} \\ \mu C &= \frac{10000000}{1000} = 10000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda}\end{aligned}$$

3.2.1 Charge de trafic à 0.6

$$\begin{aligned}\rho = 0.6 &= \frac{\lambda}{10000} \Rightarrow \lambda = 6000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} = \frac{6000}{10000 - 6000} \\ L &= \frac{3}{2} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda} = \frac{1}{10000 - 6000} = \frac{1}{4000} \\ R &= 0,25.10^{-3}\end{aligned}$$

3.2.2 Charge de trafic à 0.9

$$\begin{aligned}\rho = 0.9 &= \frac{\lambda}{10000} \Rightarrow \lambda = 9000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} = \frac{9000}{10000 - 9000} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{9} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda} = \frac{1}{10000 - 9000} = \frac{1}{1000} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{0,1.10^{-2}}\end{aligned}$$

3.3 Cas de paquets de longueur constante

3.3.1 Charge de trafic à 0.6

$$\begin{aligned}E[L] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)} = \frac{0,6(2 - 0,6)}{2(1 - 0,6)} \\ \mathbf{E[L]} &= \mathbf{1,05} \\ E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,6(2 - 0,6)}{2 \times 6000(1 - 0,6)} \\ \mathbf{E[R]} &= \mathbf{0,175ms}\end{aligned}$$

3.3.2 Charge de trafic à 0.9

$$\begin{aligned}E[L] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)} = \frac{0,9(2 - 0,9)}{2(1 - 0,9)} \\ \mathbf{E[L]} &= \mathbf{4,95} \\ E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,9(2 - 0,9)}{2 \times 6000(1 - 0,9)} \\ \mathbf{E[R]} &= \mathbf{0,55ms}\end{aligned}$$

4 Réseaux de commutateurs

4.1 Temps moyen de réponse

4.1.1 Paquets de longueur exponentiellement distribuée

Calcul du temps moyen de réponse de chacune des files

Switch 1 et 2

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ car les files sont de la forme } M/M/1$$

$$\rho = 0.5 \text{ donc } \mu = 2\lambda$$

$$E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_1] = \mathbf{E}[\mathbf{R}_2] = \frac{1}{\lambda}$$

Switch 3

$$\lambda_{31} = 0,5\lambda + 0,5\lambda = \lambda \text{ donc } e_{31} = 1$$

$$\lambda_{32} = 0,5\lambda + 0,5\lambda = \lambda \text{ donc } e_{32} = 1$$

$$\rho_{31} = \frac{\lambda_{31}}{\mu_{31}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{32} = \frac{\lambda_{32}}{\mu_{32}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$E[L_i] = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1$$

$$E[R_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

On trouve donc les résultats suivants

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_{31}] = 1$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_{31}] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_{32}] = 1$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_{32}] = \frac{1}{\lambda}$$

Temps moyen de réponse de l'ensemble

$$\begin{aligned}E[R_3] &= 0,5E[R_{31}] + 0,5E[R_{32}] = \frac{1}{\lambda} \\E[R] &= 0,5E[R_1] + 0,5E[R_2] + E[R_3] \\E[\mathbf{R}] &= \frac{2}{\lambda}\end{aligned}$$

4.1.2 Paquets de taille constante

Calcul du temps moyen de réponse de chacune des files

Switch 1 et 2

$$\begin{aligned}E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)} \\E[\mathbf{R}] &= \frac{3}{4\lambda}\end{aligned}$$

Switch 3

$$\begin{aligned}E[R_{31}] &= \frac{3}{4\lambda} \\E[R_{32}] &= \frac{3}{4\lambda}\end{aligned}$$

Temps moyen de réponse de l'ensemble

$$\begin{aligned}E[R_3] &= 0,5E[R_{31}] + 0,5E[R_{32}] = \frac{3}{4\lambda} \\E[R] &= 0,5E[R_1] + 0,5E[R_2] + E[R_3] \\E[\mathbf{R}] &= \frac{3}{2\lambda}\end{aligned}$$

4.2 Temps moyen de réponse du schéma simplifié

4.2.1 Paquets de longueur exponentiellement distribuée

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ et } \mu = 2\lambda$$

$$E[R_1] = \frac{1}{2\lambda - \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

On a $\rho < 1$ donc $\Lambda = \lambda$

$$E[R_1] = \frac{1}{2\lambda - \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2]$$

$$E[R] = \frac{2}{\lambda}$$

4.2.2 Paquets de taille constante

$$E[R] = \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)}$$

$$E[R_1] = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)}$$

$$E[R_1] = \frac{3}{4\lambda}$$

$$E[R_2] = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)}$$

$$E[R_2] = \frac{3}{4\lambda}$$

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2] = \frac{3}{2\lambda}$$

On constate que le schéma simplifié est équivalent au schéma complet pour $E[R]$. En ce qui concerne la différence entre les paquets de taille constante et de longueur exponentiellement distribuée, on peut voir que le temps de réponse est légèrement supérieur pour des paquets de longueur exponentiellement distribuée.

4.3 Modélisation du nouveau système et temps moyen de réponse

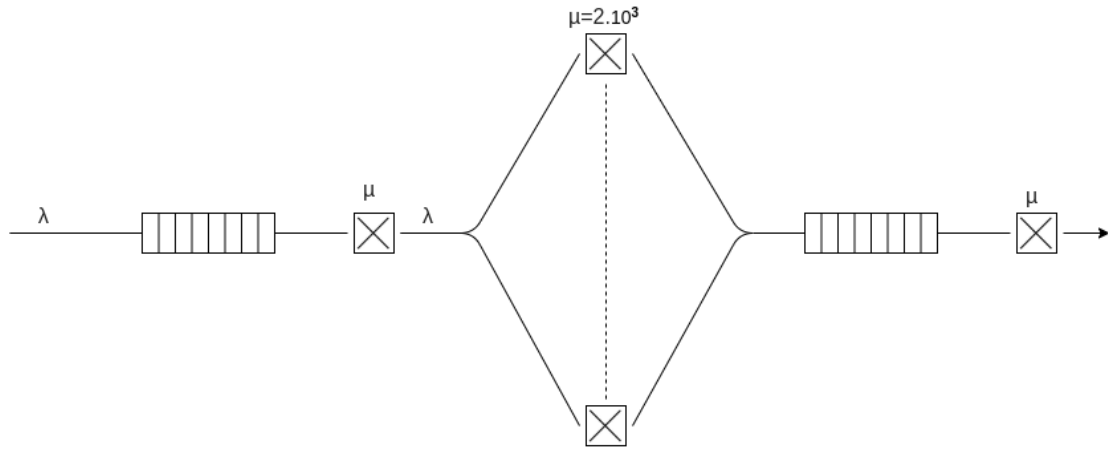


Figure 9: Modélisation du nouveau système

Pour une file $M/M/N$, on sait que $E[R] = \frac{1}{\mu}$

Or, on sait que $E[R_{FileM/M/N}] = 0,5.10^{-3}$

Donc, on a $0,5.10^{-3} = \frac{1}{\mu} \iff \mu = 2.10^3$

On a alors $E[R_N] = E[R] + E[R_{FileM/M/N}]$

$$E[R_N] = \frac{2}{\lambda} + 0,5.10^{-3}s$$

5 Économie d'énergie d'un serveur vidéo

5.1 Vérification que $Dt, t \geq 0$ constitue une chaîne de Markov

$$P(Dt(t+dt) = j+1/Dt(t) = j) = \lambda dt + o(dt)$$

$$P(Dt(t+dt) = j-1/Dt(t) = j) = \mu dt + o(dt)$$

On a donc un processus Markovien car le passage d'un état à un autre ne dépend pas des états précédents.

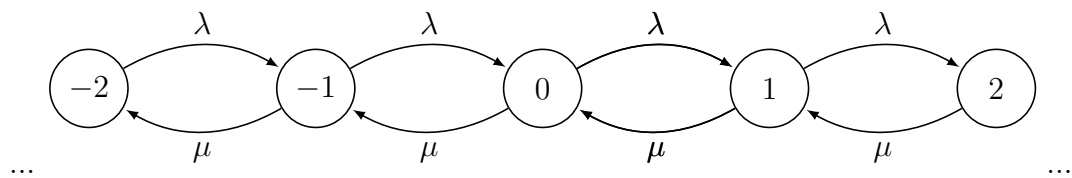


Figure 10: Chaîne de Markov du système