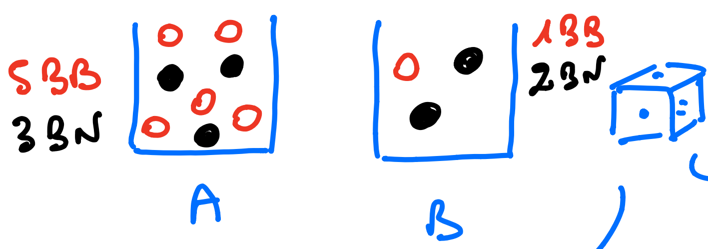
R2 Rappels de probabilités (via un exo)

2 urnes A et B, 1 dé

A contient 5 boules blanches, 3 noires

B contient 1 boule blanche, 2 noires



2, 4, 5, 6
On tire 2 boules dans A (sans remise)

- dé → 1 ou 3
- on tire une boule de A (1er tirage)
- on la regarde
- on la met dans B
- on tire ensuite 1 boule dans B (2e tir)

$\boxed{Q1}$ Probabilité d'avoir 1 boule blanche au premier tirage ?

① dénombrement triplet $(\Omega, \mathcal{E}, \mathcal{P})$

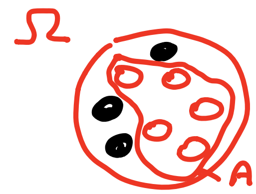
$\text{Card}\,\Omega = 8$ $\quad \mathcal{P}(\Omega)$

Ω fini $\quad \Omega = \{\omega_k\}_{k=1..8}$

équiproba $\quad \mathcal{P}[\{\omega_k\}] = \frac{1}{8}$ $\qquad \mathcal{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

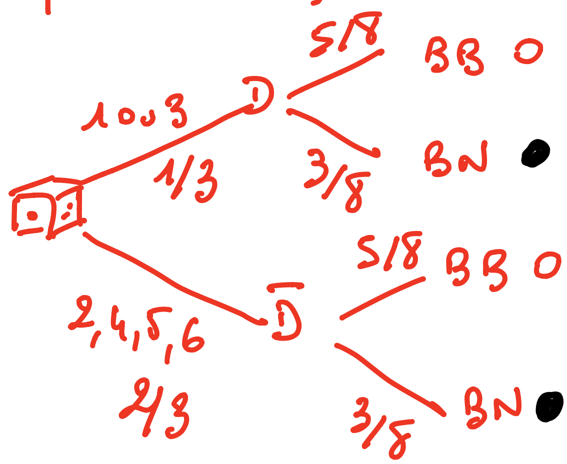
Év. élém.

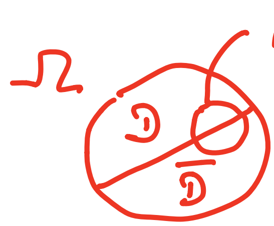
$A =$ "1 BB au 1^{er} tirage"



$P[A] = \frac{5}{8}$

② probabilités totales





$$P[A] = P[(A \overset{\text{et}}{\cap} D) \overset{\text{ou}}{\cup} (A \overset{\text{et}}{\cap} \bar{D})]$$

$$= P[A \cap D] + P[A \cap \bar{D}]$$

$$= P[A | D]\, P[D] + P[A | \bar{D}]\, P[\bar{D}]$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{8} + \frac{2}{3} = \frac{5}{8}$$

↑

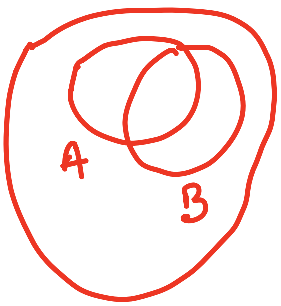
$P[A | D] = P[A]$

Rappels $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(D \cup \bar{D}) = 1$

$\mathbb{P}(\bar{D}) = 1 - \mathbb{P}(D) \rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

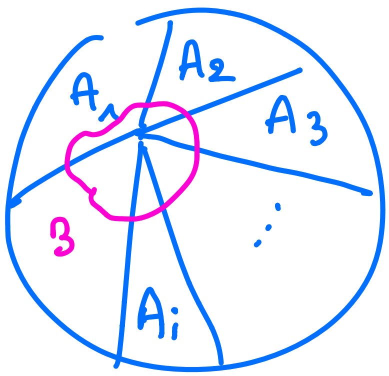
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(D_i)$ si D_i disjoints

Ω



$\rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + P(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Système complet d'événement
(partition de Ω)



$\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$

$A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[B \cap A_i]$$

Connaissance / Condition "A_i s'est réalisé"

$$\underbrace{\mathbb{P}(B \mid A_i)}_{\text{proba conditionnelle}} = \frac{\mathbb{P}[B \cap A_i]}{\mathbb{P}[A_i]}$$

Probas Totales

$$\mathbb{P}[B] = \sum_{i \in I} \mathbb{P}[B \mid A_i]\, \mathbb{P}[A_i]$$

Bayes $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$

Indépendance A et B sont indép.

ssi $P[A\cap B] = \underbrace{P[A]}_{P[A|B]}\,P[B]$

$\boxed{Q2}$ X est le nombre de BB tirés au cours de l'expérience complète. déterminer la loi de X.

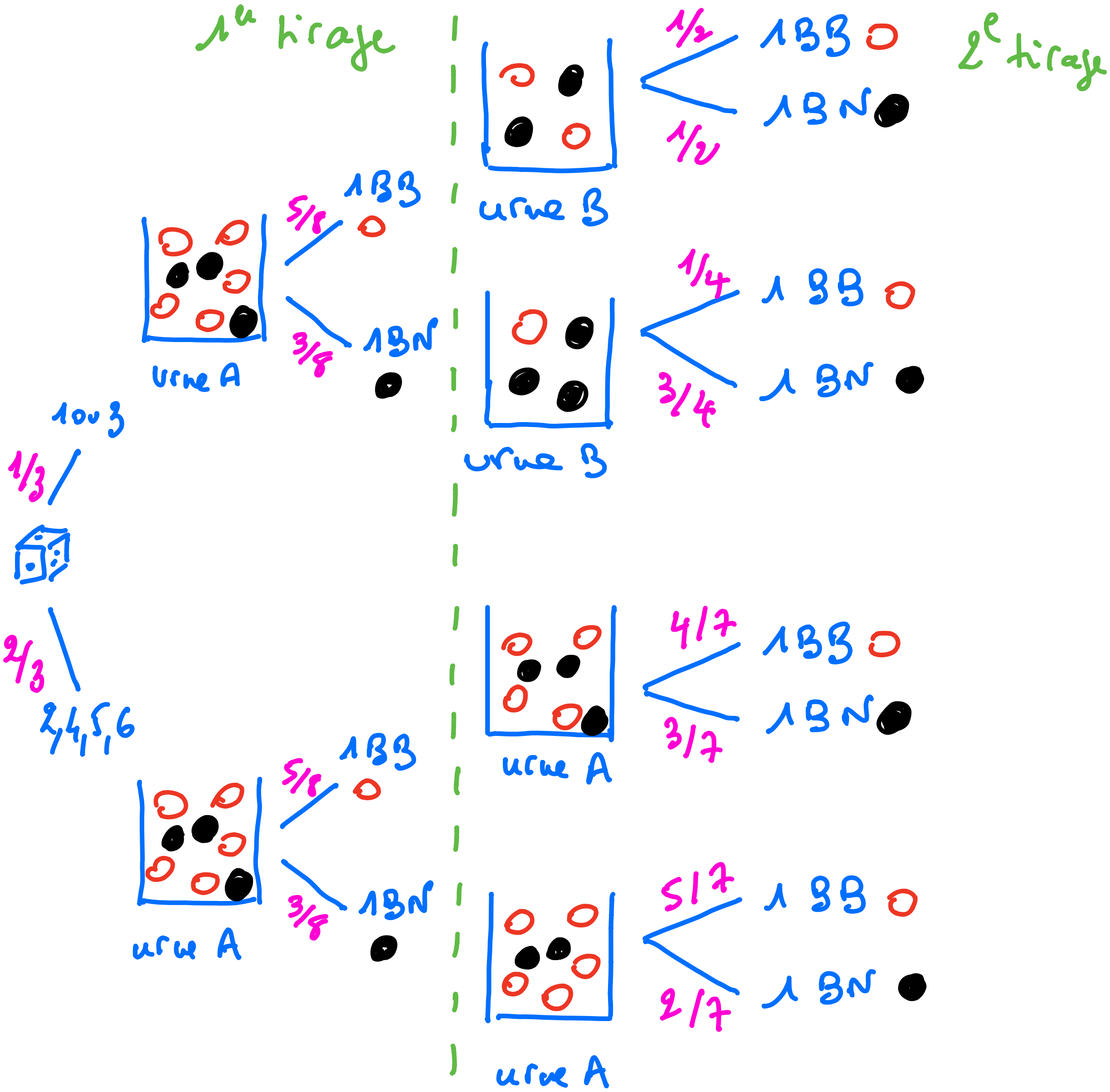
X est une v.a.r $\mathcal{E}_X = \{0, 1, 2\}$

X est une var discrète

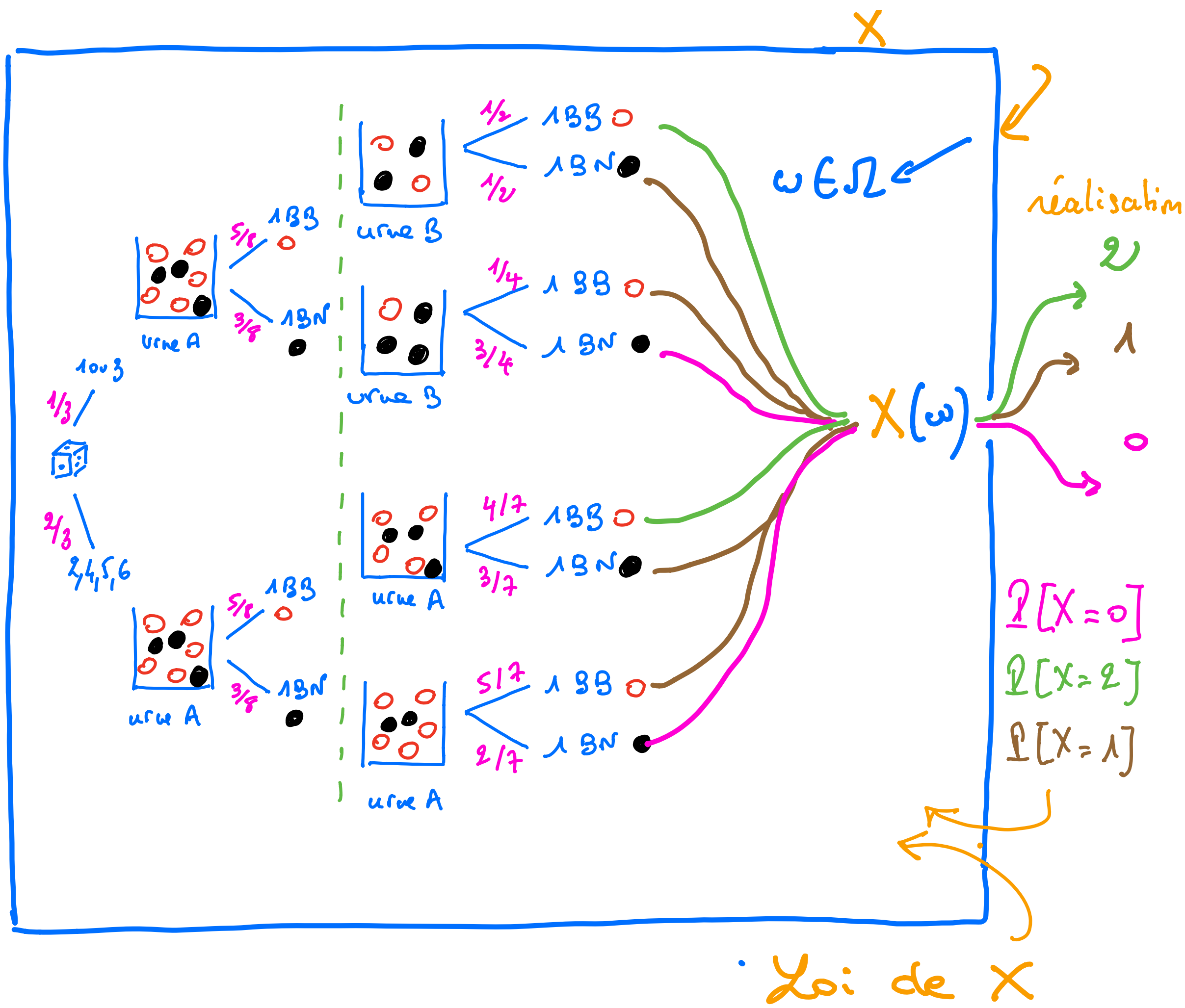
Loi de X donnée par $p_0 = P[X=0]$

$p_1 = P[X=1]$

$\boxed{X} \rightarrow x \in \mathcal{E}_X$ $p_2 = P[X=2] = 1 - p_0 - p_1$



v.a.r X nb de Boules Blanches



$$P[X=0] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}\right)$$

$P[\text{dé} = 1,3]$ $\quad$ $P[\text{BN } 2^e \text{ tir} \mid \text{BN } 1^{er} \text{ tir et dé} = 1,3]$

$P[\text{BN } 1^{er} \text{ tir.} \mid \text{dé} = 1,3]$

$$P[X=2] = \left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}\right)$$ 2 cas!

$$P[X=1] = 1 - P[X=0] - P[X=2]$$ (évite 4 cas)

$\boxed{Q3}$ Sachant que la 1ère boule est blanche, quelle est la probabilité que le 4 soit sorti du jet de dé

$P[\text{dé} = 4 \mid BB \ 1^{er} \text{ tir}] = \ ?$

Bayes

$$P[\text{dé} = 4 \mid 1^{er} BB] = \frac{P[1^{er} BB \mid 4] \, P[4]}{P[1^{er} BB]}$$

$$= \frac{5/8 \times 1/6}{5/8} = \frac{1}{6}$$

dé $= 4$ et 1^{er} BB sont 2 év. ind.