INP ENSEEIHT

Contrôle évaluation de performances - 2APP

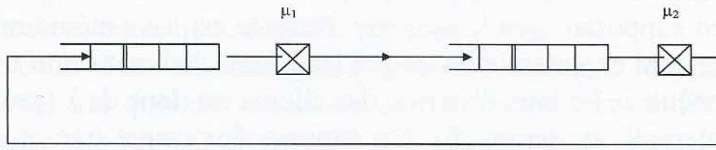
– Mercredi 19 Novembre 2014 – Riadh DHAOU

(Notes de cours et documents distribués autorisés)

Durée : 1h45 – Nombre de pages : 4 pages

Exercice 1 : Système cyclique

Considérons le « système cyclique » suivant, où M clients circulent à travers deux stations de files d'attente, comme le montre la figure suivante :



Les deux serveurs sont exponentiels de paramètres μ_1 et μ_2.

Considérons : P_k = Proba [k clients dans la station 1 et (M - k) clients dans la station 2]

1. Etablir la chaîne de Markov des taux de transition.
2. La propriété PASTA s'applique t-elle pour ce système ?
3. Déterminer les Pk. Quelle est la condition d'ergodicité du système ?

Exercice 2 : Système d'attente avec un serveur semi-actif

Un système de services vidéo, hébergé par un fournisseur de contenus vidéo, comporte deux serveurs. Le système est limité et ne peut gérer que p requêtes dans le système d'attente, y compris les requêtes que l'on est en train de servir : s'il y a déjà p requêtes dans le système d'attente, les requêtes qui arrivent sont rejetées, et les clients pourront refaire une autre tentative ultérieurement.

Les services demandés par les clients du système ne justifient pas d'avoir en permanence ses deux serveurs actifs, néanmoins, pour des raisons de fiabilité, il est important d'avoir en permanence les deux serveurs à disposition dans le système, le deuxième serveur pouvant effectuer d'autres tâches indépendantes des services directs aux clients lorsqu'elle n'est pas en train de servir les clients, comme il peut également être mis en mode veille pour économiser l'énergie consommée.

On a donc décidé la politique de fonctionnement suivante pour le système de services vidéo : Le serveur A est toujours en fonctionnement et son taux de service est μ_a (il est fonction de la performance de la machine sur laquelle se trouve le serveur A). Le serveur B est en permanence affiché « en mode Idle ». Néanmoins, un processus surveille la longueur de la file d'attente et s'il y a au moins k+1 clients dans le système (1 servi par A et k en attente), alors le serveur B se met à servir le premier client en attente dans la file. Son taux de service est μ_b. Lorsqu'il aura fini de servir le client, il se remettra à ses tâches habituelles si le nombre de clients dans le système est inférieur ou égal à k ou traitera le premier client en attente dans la file s'il y a au moins k+1 clients dans le système.

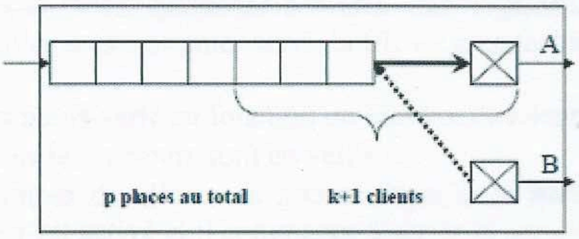


Figure 1: Fonctionnement de la File d'attente

On suppose que les demandes des clients peuvent être plus ou moins complexes et que l'on ne commet pas d'erreur en supposant que le système d'attente est sans mémoire, c'est-à-dire que les deux lois de service sont exponentielles et que les clients arrivent selon une loi de poisson dont on notera le paramètre λ. Le taux d'arrivée des clients est donc de λ (probabilité d'arrivée d'un client λdt sur l'intervalle de temps dt). On suppose également que dt est suffisamment petit pour que la probabilité de deux évènements simultanées soit négligeable (on ne représente pas les transitions en $(dt)^2$).

Pour résumer, on a un système d'attente à deux serveurs non identiques (sauf si $\mu_a = \mu_b$), dont le serveur A n'est pas toujours actif (s'il n'y a pas de client ou si le serveur B est en train de finir un client dont le service était plus long que le dernier client traité par A), mais est toujours disponible alors que l'autre serveur B s'active de manière conditionnelle.

<u>**Partie 1 ($\mu_a \neq \mu_b$ et $k > 1$)**</u>

Nous vous proposons ci-dessus le dessin du graphe associé à la chaîne de Markov décrivant le système d'attente du serveur vidéo. Chaque sommet du graphe correspond à un état dénoté par $E_{b,i}$, où b vaut 0 (serveur B en veille) ou 1 (le serveur B actif) et où i varie de 0 à k si b=0 et de 1 à p si b=1.

1.a) expliquer dans quel état est le système lorsqu'il est dans l'état $E_{b,i}$.

1.b) compléter la chaîne de Markov en ajoutant les probabilités de transition sur les arcs du graphe.

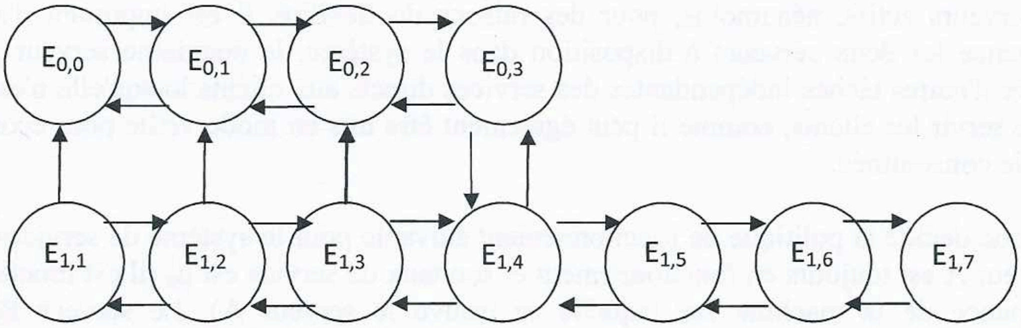


Figure 2: Chaîne de Markov

Partie 2 ($\mu_a = \mu_b$ et $k > 1$)

Nous vous proposons ci-dessus le dessin du graphe associé à la chaîne de Markov décrivant le système d'attente du système vidéo. (k=3, p=7)

2.a) compléter la chaîne de Markov en ajoutant les probabilités de transition $\mu_a = \mu_b = \mu$.

2.b) on se place dans le cas très particulier où les deux serveurs ont des lois identiques et où k=1. Que pensez-vous de ce cas particulier ? A quel système d'attente peut-on considérer qu'il est équivalent et sous quelles conditions d'analyse des performances de ce système ?

Partie 3 ($\mu_a \neq \mu_b$ et $k = 1$)

Vous pouvez au choix prendre p=7 comme sur les graphes ci-dessus ou $p=+\infty$.

1. dans le but de montrer que ce problème est différent
   - de celui d'une file d'attente à deux serveurs non identiques où les clients ne savent pas quel est le serveur le plus rapide (probabilité ½ de choisir l'un ou l'autre des serveurs lorsqu'ils sont tous les deux inoccupés, sinon le client va toujours sur le premier serveur qui se libère)
   - de celui d'une file d'attente à deux serveurs dont les clients savent que $\mu b > \mu a$ (probabilité 1 de choisir le plus rapide B lorsque les deux serveurs sont inoccupés),

   dessiner (dans le cas k=1) les chaînes de Markov associées à ces trois cas (le problème considéré ici et les deux nouveaux problèmes de cette question) et comparer les.

2. en notant $\pi_{b,i}$ la probabilité d'être dans l'état $E_{b,i}$ en régime permanent, utiliser le graphe dessiné dans le cas particulier de notre problème pour k=1 de la question précédente et le théorème des coupes afin d'obtenir le système d'équations qui permettraient d'obtenir tout d'abord toutes ces probabilités en fonction de $\pi_{1,2}$, puis la valeur de $\pi_{1,2}$ en tenant compte du fait que la somme des probabilités de tous les états est toujours égale à 1.
3. Dans le cas où $\mu_a=2\lambda$ et $\mu_b=\lambda$ avec $p=+\infty$, donner l'expression des probabilités d'états (aucun calcul n'est à faire).

Exercice 3 : File à capacité infinie avec adaptation du nombre de serveurs actifs

Nous considérons une file d'attente à capacité infinie. Les arrivées sont supposées poissoniennes de taux λ et les temps de services sont exponentiels de taux μ. Avec une discipline de type premier arrivé premier servi, la file est à capacité infinie.

Le nombre de serveurs actifs varie en fonction du nombre de clients en attente :

- Initialement, tous les serveurs sont en veille.
- Dès que le nombre de clients en attente dépasse le nombre de serveurs actifs, un nouveau serveur est activé et il commence à servir le premier client en attente.
- A la fin de son service chaque serveur observe le nombre de clients en attente (uniquement en attente). Si ce nombre est strictement inférieur au nombre de serveurs actifs alors le serveur se met en veille (sinon, il sert le premier client en attente).

On note N_t le nombre de clients dans la file à l'instant t.

1) Montrez que $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus markovien. de naissance et de mort (il suffit de dresser la chaine associée).
2) On veut calculer les probabilités des divers états possibles.
On note π_i la probabilité qu'il n'y ait i clients dans le système à l'état stationnaire.
Quelle est la condition de stabilité de la file ?
Donner l'expression de π_i en fonction de celle de l'état π_0
(on distinguera le cas i=2k du cas i=2k+1)