

# Rapport Évaluation de performances de réseaux

Morgane Cadeau, Morgan Canas, Lucas Lafage, William  
Mateille, Raphael Sombstay

Novembre 2019

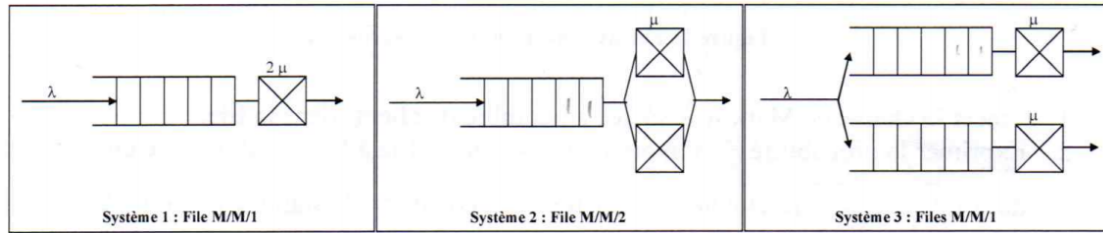


# Table des matières

<b>1</b>	<b>Comparaison de files d'attente</b>	<b>4</b>
1.1	Temps moyen de réponse du système 1 . . . . .	4
1.2	Temps moyen de réponse du système 2 . . . . .	5
1.3	Nombre moyen de passages d'un client et temps de réponse moyen dans chacune des 2 files du système 3 . . . . .	8
1.4	Classement des 3 systèmes en fonction de leurs performances respectives . . . . .	9
1.5	Performances si on a un système 3 bis où les clients se dirigent vers la file la moins remplie . . . . .	10
1.6	Montrer que $N(t) = (N1(t), N2(t))$ est markovien et construire la chaîne de Markov pour des files inférieures ou égales à 3 . . . . .	11
<b>2</b>	<b>File avec arrivées découragées</b>	<b>12</b>
2.1	Chaîne de Markov associée au nombre de clients dans la file . . . . .	12
2.2	Probabilité $P_k$ d'avoir $k$ clients dans la file. Détermination de la condition de stabilité . . . . .	12
2.3	Taux d'utilisation du serveur . . . . .	13
2.4	Nombre moyen $L$ de clients dans le système . . . . .	14
2.5	Débit moyen $\Lambda$ en sortie du système . . . . .	14
2.6	Démonstration que le temps moyen de réponse de cette file est $R = \frac{\rho}{\mu(1-\pi_0)}$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Unité de transmission de paquets</b>	<b>15</b>
3.1	Notation de Kendall de la file . . . . .	15
3.2	Nombre moyen de paquets dans la file et temps moyen de réponse . . . . .	15
3.2.1	Charge de trafic à 0.6 . . . . .	15
3.2.2	Charge de trafic à 0.9 . . . . .	16
3.3	Cas de paquets de longueur constante . . . . .	16
3.3.1	Charge de trafic à 0.6 . . . . .	16
3.3.2	Charge de trafic à 0.9 . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Réseaux de commutateurs</b>	<b>17</b>
4.1	Temps moyen de réponse . . . . .	17
4.1.1	Paquets de longueur exponentiellement distribuée . . . . .	17
4.1.2	Paquets de taille constante . . . . .	18
4.2	Temps moyen de réponse du schéma simplifié . . . . .	19
4.2.1	Paquets de longueur exponentiellement distribuée . . . . .	19
4.2.2	Paquets de taille constante . . . . .	19
4.3	Modélisation du nouveau système et temps moyen de réponse . . . . .	20

<b>5</b>	<b>Économie d'énergie d'un serveur vidéo</b>	<b>21</b>
5.1	Vérification que $\{Dt, t \geq 0\}$ constitue une chaîne de Markov . . . .	21
5.2	La chaîne n'est jamais ergodique . . . . .	21
5.3	Valeurs de $Dt$ avec une capacité limitée $C$ . . . . .	21
5.4	Vérification que $\{Dt, t \geq 0\}$ constitue une chaîne de Markov avec une capacité limitée $C$ . . . . .	22
5.5	Probabilités stationnaires des états en fonction de $\rho$ et $C$ . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Système cyclique-multiserveur</b>	<b>23</b>
6.1	Établissement de la chaîne de Markov des taux de transition . . . .	23
6.2	Vérifions si la propri�� PASTA s'applique dans ce système . . . . .	23
6.3	Détermination des $P_k$ et de la condition d'ergodicité du système . .	24
6.4	Temps de réponse moyen . . . . .	24

# 1 Comparaison de files d'attente



**Figure 1:** Schéma des différents systèmes

## 1.1 Temps moyen de réponse du système 1

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

$$E[L] = \frac{\rho}{1 - \rho} \text{ donc}$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{\frac{2\mu - \lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{2\mu}{2\mu - \lambda}$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}$$

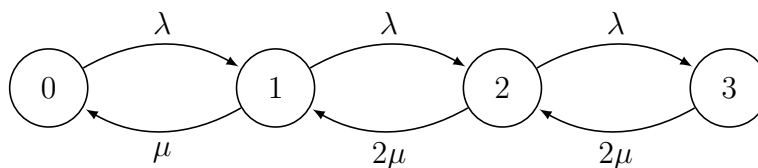
Calcul du temps moyen de réponse du système

$$E[R] = \frac{E[L]}{\lambda}$$

$$E[R] = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} * \frac{1}{\lambda}$$

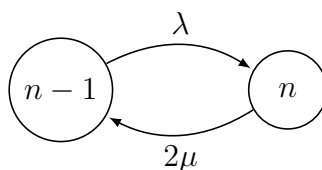
$$E[R] = \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

## 1.2 Temps moyen de réponse du système 2



**Figure 2:** Chaîne de Markov du système de 0 à 3 clients

On peut donc en déduire la chaîne de Markov du système pour  $n$  clients :



**Figure 3:** Chaîne de Markov du système pour  $n$  clients

Utilisation de la méthode des coupes afin de déterminer  $\pi_n$  selon  $\pi_0$

$$\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

$$2\mu \pi_2 = \lambda \pi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu} \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0$$

$$2\mu \pi_3 = \lambda \pi_2 = \frac{\lambda^3}{2\mu^2} \pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \pi_0$$

$$\text{On a donc } \pi_n = \frac{\lambda}{2\mu} \pi_{n-1}$$

$$\text{On en déduit que } \pi_n = \frac{\lambda^n}{2^{n-1} \mu^n} \pi_0$$

$$\text{Or } \rho = \frac{\lambda}{2\mu} \text{ donc } \pi_n = 2\rho^n \pi_0$$

Calcul de  $\pi_0$  grâce à la somme des probabilités

$$\begin{aligned}\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i &= 1 \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2\rho^i \pi_0 \\ \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \\ \Rightarrow \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \rho \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \\ \pi_0 &= 1 - 2\pi_0 \rho \left( \frac{1}{1-\rho} \right) \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho} \\ \pi_0 &= 1 - \frac{2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ \Rightarrow 1 &= \pi_0 + \frac{2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ 1 &= \pi_0 \left( 1 + \frac{2\rho}{1-\rho} \right) = \frac{1-\rho+2\rho}{1-\rho} \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1-\rho}{1+\rho}\end{aligned}$$

La valeur de  $\pi_0$  nous permet de déduire  $\pi_n$

$$\pi_n = 2\rho^n \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$\begin{aligned}
 E[L] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \pi_i \\
 E[L] &= \sum_{i=0}^{\infty} i 2 \rho^i \frac{1-\rho}{1+\rho} \\
 E[L] &= 2 \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i \\
 \Rightarrow E[L] &= 2 \left( \frac{1-\rho}{1+\rho} \right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} i \rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\
 E[L] &= \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)} \\
 \Rightarrow \mathbf{E[L]} &= \frac{\mathbf{2\rho}}{\mathbf{1-\rho^2}}
 \end{aligned}$$

Calcul du temps moyen de réponses du système 2

$$\begin{aligned}
 E[R] &= \frac{E[L]}{\lambda} \\
 E[R] &= \frac{2\rho}{\lambda(1-\rho^2)} = \frac{2\lambda}{2\mu\lambda(1-\rho^2)} \\
 \mathbf{E[R]} &= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu(1-\rho^2)}}
 \end{aligned}$$

### 1.3 Nombre moyen de passages d'un client et temps de réponse moyen dans chacune des 2 files du système 3

On peut appliquer le théorème de Jackson car toutes les hypothèses sont respectées

- Arrivées selon un processus de poisson de débit  $\lambda$
- Chaque file a 1 seul serveur, un service exponentiel de paramètre  $\mu$ , une capacité infinie est est FIFO

Calcul de la charge  $\rho$

$$\begin{aligned}e_1 &= e_2 = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda \\ \rho_1 &= \rho_2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu}\end{aligned}$$

Calcul du nombre moyen de passages d'un client dans chacune des 2 files

$$\begin{aligned}E[L_i] &= \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \text{ et on sait que } \rho_1 = \rho_2 \\ E[L_1] &= E[L_2] = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{\frac{2\mu - \lambda}{2\mu}} \\ E[L_1] &= E[L_2] = \frac{\lambda}{2\mu} \times \frac{2\mu}{2\mu - \lambda} \\ \mathbf{E[L_1]} &= \mathbf{E[L_2]} = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}\end{aligned}$$

Calcul du temps moyen de réponse du système

$$\begin{aligned}E[R_i] &= \frac{E[L_i]}{\lambda e_i} \text{ et on sait que } E[L_1] = E[L_2] \text{ et } e_1 = e_2 \\ E[R_1] &= \frac{E[L_1]}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\lambda} \\ E[R_1] &= \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}\end{aligned}$$



Or  $E[L_1] = E[L_2]$  et  $\lambda_1 = \lambda_2$  donc

$$E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$$

$$E[R] = e_1 E[R_1] + e_2 E[R_2]$$

$$E[R] = \frac{1}{2(\mu - \frac{1}{2}\lambda)} + \frac{1}{2(\mu - \frac{1}{2}\lambda)}$$

$$E[R] = \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$$

#### 1.4 Classement des 3 systèmes en fonction de leurs performances respectives

	Temps moyen de réponse	Temps de réponse pour $\mu = 1$ et $\lambda = 1$
Système 1	$\frac{1}{2\mu - \lambda}$	1
Système 2	$\frac{1}{\mu(1 - \rho^2)}$	$\frac{4}{3}$
Système 3	$\frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}$	2

**Figure 4:** Tableau de comparaison des performances des 3 systèmes

Le système 1 est le plus efficace car son temps de réponse est plus faible pour la même valeur de  $\mu$  et de  $\lambda$  entre les 3 systèmes.

Ce résultat était prévisible car le système 1 a un serveur 2 fois plus rapide que les autres systèmes. Ainsi, s'il n'y a qu'un client, ce système est plus rapide que le système 2.

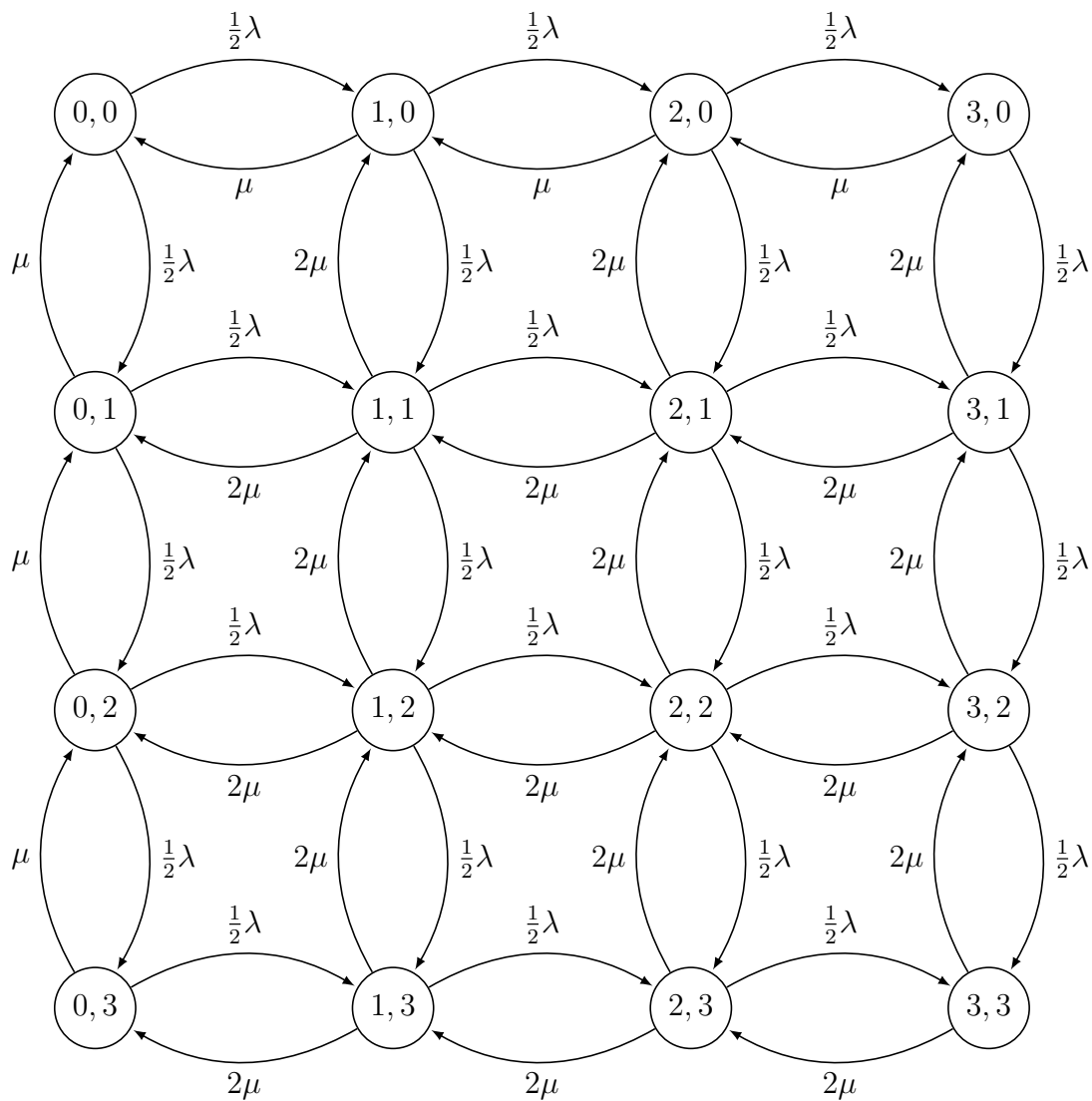
### **1.5 Performances si on a un système 3 bis où les clients se dirigent vers la file la moins remplie**

Dans ce cas là, le système 3 bis serait plus performant que le système 3 car le temps de réponse serait inférieur. Cependant, le système 2 aurait tout de même un temps moyen de réponse supérieur à celui du système 2.

Le classement serait donc le suivant :

1. Système 1
2. Système 2
3. Système 3 bis
4. Système 4

**1.6 Montrer que  $N(t) = (N_1(t), N_2(t))$  est markovien et construire la chaîne de Markov pour des files inférieures ou égales à 3**



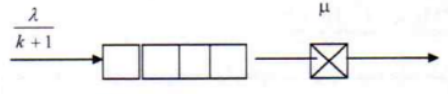
**Figure 5:** Chaîne de Markov pour des files de longueur inférieures à 3

C'est un processus Markovien car on n'a pas besoin de connaître  $N$  pour trouver  $N + 1$ . On peut calculer les probabilités suivantes :

Probabilité d'une arrivée dans la file :  $P(N_1(t + dt) = j + 1 / N_1(t) = j) = \frac{1}{2} \lambda dt + o(dt)$

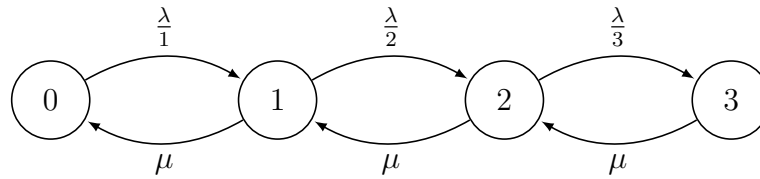
Probabilité d'un départ de file :  $P(N_1(t + dt) = j - 1 / N_1(t) = j) = \mu dt + o(dt)$

## 2 File avec arrivées découragées



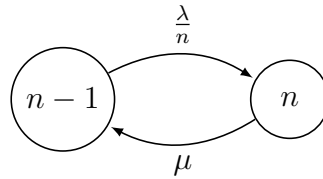
**Figure 6:** Schéma de la file avec arrivées découragées

### 2.1 Chaîne de Markov associée au nombre de clients dans la file



**Figure 7:** Chaîne de Markov du système de 0 à 3 clients

On peut donc en déduire la chaîne de Markov du système pour  $n$  clients :



**Figure 8:** Chaîne de Markov du système pour  $n$  clients

### 2.2 Probabilité $P_k$ d'avoir $k$ clients dans la file. Détermination de la condition de stabilité

Calcul de  $\pi_n$  par rapport à  $\pi_0$

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{\lambda^3}{6\mu^3} \pi_0 \\ \pi_n &= \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} = \frac{\rho^n}{n!} \pi_0\end{aligned}$$

Calcul de  $\pi_0$

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \\ \pi_0 &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \pi_0 \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} - 1 \right) \\ \pi_0 &= 1 - \pi_0 (e^\rho - 1) \\ \pi_0 &= 1 - e^\rho \pi_0 + \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{e^\rho}\end{aligned}$$

Condition de stabilité de la file

Le système est stable lorsque le débit d'entrée est inférieur au débit de sortie. Ici, le débit d'entrée est variable donc on prend sa valeur maximale lorsque  $k = 0$ . La condition de stabilité est donc  $\lambda < \mu$ .

### 2.3 Taux d'utilisation du serveur

$$\begin{aligned}U &= 1 - \pi_0 = 1 - \frac{1}{e^\rho} \\ U &= \frac{e^\rho - 1}{e^\rho}\end{aligned}$$

## 2.4 Nombre moyen $L$ de clients dans le système

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k + 0 \times \pi_0$$

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} \times \frac{1}{e^\rho}$$

$$L = \frac{1}{e^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!}$$

$$L = \frac{\rho}{e^\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$L = \frac{\rho}{e^\rho} \sum_{k-1=0}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$L = \frac{\rho}{e^\rho} \times e^\rho$$

$$\mathbf{L = \rho}$$

## 2.5 Débit moyen $\Lambda$ en sortie du système

$$S = \frac{1}{\mu}$$

$$\Lambda = \frac{U}{S} = U\mu = (1 - \pi_0)\mu$$

$$\mathbf{\Lambda = \frac{\mu(e^\rho - 1)}{e^\rho}}$$

## 2.6 Démonstration que le temps moyen de réponse de cette file est $R = \frac{\rho}{\mu(1-\pi_0)}$

$$L = R\Lambda$$

$$\Rightarrow R = \frac{L}{\Lambda} = \frac{\rho}{U\mu}$$

$$\text{Donc on retrouve } \mathbf{R = \frac{\rho}{(1 - \pi_0)\mu}}$$

### 3 Unité de transmission de paquets

#### 3.1 Notation de Kendall de la file

La file présentée a une arrivée de paquets qui suit une loi exponentielle, ceux-ci ont une longueur exponentiellement distribuée. Ainsi, leur temps de service suit une loi exponentielle. Enfin, il n'y a qu'un commutateur. La notation de Kendall de la file se note donc  $M/M/1$ .

#### 3.2 Nombre moyen de paquets dans la file et temps moyen de réponse

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda}{\mu C} \\ \mu C &= \frac{10000000}{1000} = 10000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda}\end{aligned}$$

##### 3.2.1 Charge de trafic à 0.6

$$\begin{aligned}\rho = 0.6 &= \frac{\lambda}{10000} \Rightarrow \lambda = 6000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} = \frac{6000}{10000 - 6000} \\ L &= \frac{3}{2} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda} = \frac{1}{10000 - 6000} = \frac{1}{4000} \\ R &= 0,25 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

### 3.2.2 Charge de trafic à 0.9

$$\begin{aligned}\rho = 0.9 &= \frac{\lambda}{10000} \Rightarrow \lambda = 9000 \\ L &= \frac{\lambda}{\mu C - \lambda} = \frac{9000}{10000 - 9000} \\ \mathbf{L} &= \mathbf{9} \\ R &= \frac{1}{\mu C - \lambda} = \frac{1}{10000 - 9000} = \frac{1}{1000} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{0,1.10^{-2}}\end{aligned}$$

## 3.3 Cas de paquets de longueur constante

### 3.3.1 Charge de trafic à 0.6

$$\begin{aligned}E[L] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)} = \frac{0,6(2 - 0,6)}{2(1 - 0,6)} \\ \mathbf{E[L]} &= \mathbf{1,05} \\ E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,6(2 - 0,6)}{2 \times 6000(1 - 0,6)} \\ \mathbf{E[R]} &= \mathbf{0,175ms}\end{aligned}$$

### 3.3.2 Charge de trafic à 0.9

$$\begin{aligned}E[L] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)} = \frac{0,9(2 - 0,9)}{2(1 - 0,9)} \\ \mathbf{E[L]} &= \mathbf{4,95} \\ E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,9(2 - 0,9)}{2 \times 6000(1 - 0,9)} \\ \mathbf{E[R]} &= \mathbf{0,55ms}\end{aligned}$$



## 4 Réseaux de commutateurs

### 4.1 Temps moyen de réponse

#### 4.1.1 Paquets de longueur exponentiellement distribuée

Calcul du temps moyen de réponse de chacune des files

**Switch 1 et 2**

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ car les files sont de la forme } M/M/1$$

$$\rho = 0,5 \text{ donc } \mu = 2\lambda$$

$$E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_1] = \mathbf{E}[\mathbf{R}_2] = \frac{1}{\lambda}$$

**Switch 3**

$$\lambda_{31} = 0,5\lambda + 0,5\lambda = \lambda \text{ donc } e_{31} = 1$$

$$\lambda_{32} = 0,5\lambda + 0,5\lambda = \lambda \text{ donc } e_{32} = 1$$

$$\rho_{31} = \frac{\lambda_{31}}{\mu_{31}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\rho_{32} = \frac{\lambda_{32}}{\mu_{32}} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$E[L_i] = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} = \frac{0,5}{1 - 0,5} = 1$$

$$E[R_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

On trouve donc les résultats suivants

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_{31}] = 1$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_{31}] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{L}_{32}] = 1$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{R}_{32}] = \frac{1}{\lambda}$$

Temps moyen de réponse de l'ensemble

$$\begin{aligned}
 E[R_3] &= 0,5E[R_{31}] + 0,5E[R_{32}] = \frac{1}{\lambda} \\
 E[R] &= 0,5E[R_1] + 0,5E[R_2] + E[R_3] \\
 \mathbf{E}[\mathbf{R}] &= \frac{2}{\lambda}
 \end{aligned}$$

#### 4.1.2 Paquets de taille constante

Calcul du temps moyen de réponse de chacune des files

**Switch 1 et 2**

$$\begin{aligned}
 E[R] &= \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)} = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)} \\
 \mathbf{E}[\mathbf{R}] &= \frac{3}{4\lambda}
 \end{aligned}$$

**Switch 3**

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}[\mathbf{R}_{31}] &= \frac{3}{4\lambda} \\
 \mathbf{E}[\mathbf{R}_{32}] &= \frac{3}{4\lambda}
 \end{aligned}$$

Temps moyen de réponse de l'ensemble

$$\begin{aligned}
 E[R_3] &= 0,5E[R_{31}] + 0,5E[R_{32}] = \frac{3}{4\lambda} \\
 E[R] &= 0,5E[R_1] + 0,5E[R_2] + E[R_3] \\
 \mathbf{E}[\mathbf{R}] &= \frac{3}{2\lambda}
 \end{aligned}$$

## 4.2 Temps moyen de réponse du schéma simplifié

### 4.2.1 Paquets de longueur exponentiellement distribuée

$$E[R] = \frac{1}{\mu - \lambda} \text{ et } \mu = 2\lambda$$

$$E[R_1] = \frac{1}{2\lambda - \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

On a  $\rho < 1$  donc  $\Lambda = \lambda$

$$E[R_1] = \frac{1}{2\lambda - \lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2]$$

$$E[R] = \frac{2}{\lambda}$$

### 4.2.2 Paquets de taille constante

$$E[R] = \frac{\rho(2 - \rho)}{2\lambda(1 - \rho)}$$

$$E[R_1] = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)}$$

$$E[R_1] = \frac{3}{4\lambda}$$

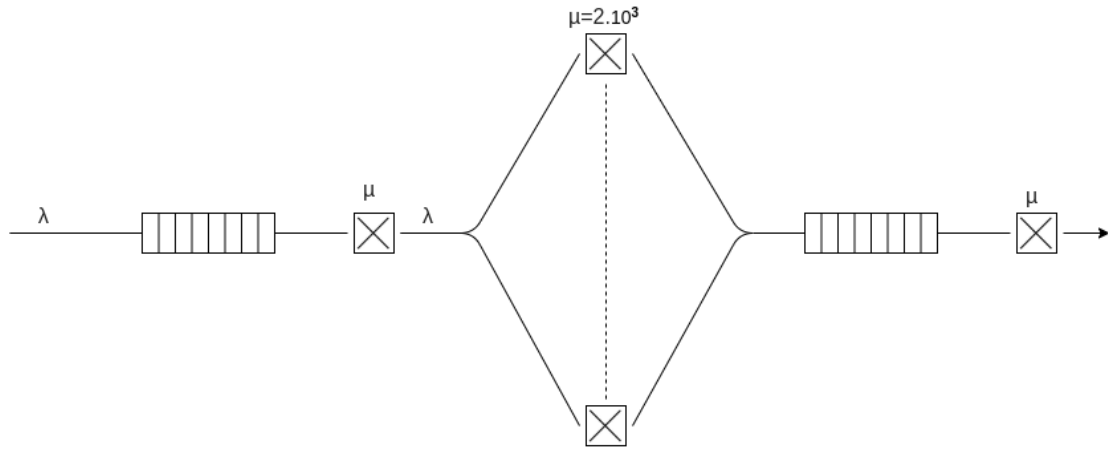
$$E[R_2] = \frac{0,5(2 - 0,5)}{2\lambda(1 - 0,5)}$$

$$E[R_2] = \frac{3}{4\lambda}$$

$$E[R] = E[R_1] + E[R_2] = \frac{3}{2\lambda}$$

On constate que le schéma simplifié est équivalent au schéma complet pour  $E[R]$ . En ce qui concerne la différence entre les paquets de taille constante et de longueur exponentiellement distribuée, on peut voir que le temps de réponse est légèrement supérieur pour des paquets de longueur exponentiellement distribuée.

### 4.3 Modélisation du nouveau système et temps moyen de réponse



**Figure 9:** Modélisation du nouveau système

Pour une file  $M/M/N$ , on sait que  $E[R] = \frac{1}{\mu}$

Or, on sait que  $E[R_{FileM/M/N}] = 0,5.10^{-3}$

Donc, on a  $0,5.10^{-3} = \frac{1}{\mu} \iff \mu = 2.10^3$

On a alors  $E[R_N] = E[R] + E[R_{FileM/M/N}]$

$$E[R_N] = \frac{2}{\lambda} + 0,5.10^{-3}s$$

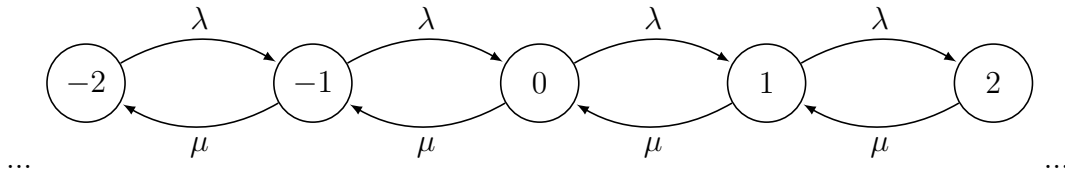
## 5 Économie d'énergie d'un serveur vidéo

### 5.1 Vérification que $\{Dt, t \geq 0\}$ constitue une chaîne de Markov

$$P(Dt(t+dt) = j+1 / Dt(t) = j) = \lambda dt + o(dt)$$

$$P(Dt(t+dt) = j-1 / Dt(t) = j) = \mu dt + o(dt)$$

On a donc un processus Markovien car le passage d'un état à un autre ne dépend pas des états précédents.



**Figure 10:** Chaîne de Markov du système

### 5.2 La chaîne n'est jamais ergodique

La chaîne n'est jamais ergodique car elle a un nombre infini d'état.

Si  $\lambda > \mu$ ,  $Dt$  va tendre vers  $+\infty$

Si  $\mu > \lambda$ ,  $Dt$  va tendre vers  $-\infty$

Si  $\lambda = \mu$ ,  $Dt$  va tendre vers 0

On ne pourra donc pas explorer toute la chaîne.

### 5.3 Valeurs de $Dt$ avec une capacité limitée $C$

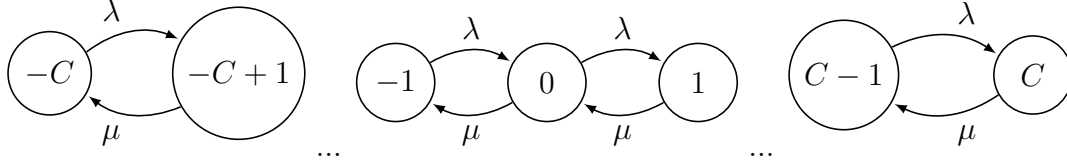
$$0 < Rt < C \text{ et } 0 < Vt < C$$

Donc la différence  $Dt$  est comprise entre  $-C$  et  $C$ .

$$Dt \in [-C; C]$$

## 5.4 Vérification que $\{Dt, t \geq 0\}$ constitue une chaîne de Markov avec une capacité limitée $C$

On ne change rien aux paramètres de départ. Les paquets arrivent toujours de manière poissonnienne, on a donc un processus Markovien.



**Figure 11:** Chaîne de Markov du système à temps continu

## 5.5 Probabilités stationnaires des états en fonction de $\rho$ et $C$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\pi_0 \lambda = \mu \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

$$\pi_1 = \rho \pi_0$$

$$\pi_0 \mu = \pi_{-1} \lambda \Rightarrow \pi_{-1} = \frac{\mu}{\lambda} \pi_0$$

$$\pi_{-1} = \rho^{-1} \pi_0$$

$$\pi_2 = \rho \pi_1 \Rightarrow \pi_2 = \rho^2 \pi_0$$

$$\pi_{-2} = \rho^{-1} \pi_{-1} \Rightarrow \pi_{-2} = \rho^{-2} \pi_0$$

On a donc  $\pi_k = \rho^k \pi_0$  pour  $\rho \neq 1$

Pour une file  $M/M/1/N$ , on sait que  $\pi_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{C+1}}$

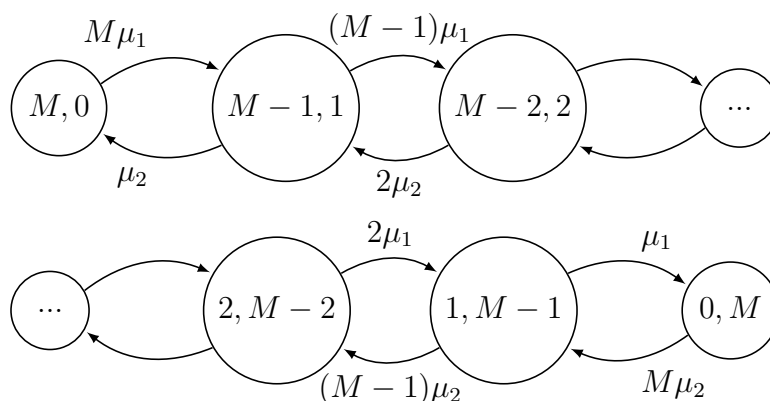
$$\text{On a donc } \pi_k = \rho^k \times \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{C+1}}$$

$$\text{Et si } \rho = 1, \text{ on a } \pi_k = \frac{1}{C+1}$$

## 6 Système cyclique-multiserveur

### 6.1 Établissement de la chaîne de Markov des taux de transition

On définit nos états de cette façon : (nb client file 1, nb client file 2)



**Figure 12:** Chaîne de Markov du système

### 6.2 Vérifions si la propriété PASTA s'applique dans ce système

Pour que la propriété PASTA s'applique, il faut que la probabilité d'état vue d'un client se présentant dans le système doit être égale à la probabilité d'état stationnaire.

Elle ne s'applique pas dans ce système car la probabilité d'état vue d'un client n'est pas égale à la probabilité d'état stationnaire car la probabilité d'arrivée varie selon l'état courant.

### 6.3 Détermination des $P_k$ et de la condition d'ergodicité du système

On utilise la technique des coupes :

$$\begin{aligned}\pi_{(1,M-1)} &= \frac{M\mu_2}{\mu_1} \pi_{(0,M)} \\ \pi_{(2,M-2)} &= \frac{(M-1)\mu_2}{2\mu_1} \pi_{(1,M-1)} \\ \pi_{(2,M-2)} &= \frac{(M-1)M\mu_2^2}{2\mu_1^2} \pi_{(0,M)} \\ \pi_{(3,M-3)} &= \frac{(M-2)\mu_2}{3\mu_1} \pi_{(2,M-2)} \\ \pi_{(3,M-3)} &= \frac{(M-2)(M-1)M\mu_2^3}{6\mu_1^3} \pi_{(0,M)}\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\pi_{(k,M-k)} &= \frac{\mu_2^k \times \frac{M!}{(M-k)!}}{k! \mu_1^k} \pi_{(0,M)} \\ \pi_{(k,M-k)} &= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^k \times \frac{M!}{k!(M-k)!} \pi_{(0,M)}\end{aligned}$$

Pour que la chaîne soit ergodique, il faut que la chaîne de markov ait un nombre fini d'états, qu'elle soit irréductible et apériodique. Dans notre cas, il faut donc que  $M$  soit fini pour avoir un nombre d'états fini.

### 6.4 Temps de réponse moyen

$$\begin{aligned}E[R_1] &= \frac{1}{\mu_1} \\ E[R_2] &= \frac{1}{\mu_2} \\ \text{Donc } E[R] &= \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\end{aligned}$$