Recherche opérationnelle: Programmation Linéaire
2. $n > 2$ dimensions: résolution par méthode du Simplexe

Sandra U. Ngueveu

INP-ENSEEIHT / LAAS-CNRS
sandra.ngueveu@toulouse-inp.fr - ngueveu@laas.fr

2019/2020

Résolution de PL de $n > 2$ variables par Simplexe

Systèmes de m équations à n inconnues (rappel)

Soit un système de m équations à n inconnues. Si les m équations sont linéairement indépendantes, alors on sait qu'il admet :

- soit 0 solution, en particulier lorsque $m > n$
- soit une seule solution ($\Leftrightarrow m = n$)
- soit une infinité de solutions ($\Leftrightarrow m < n$)

Algorithme 1 Pivot de Gauss pour résoudre un système de n équations à n inconnues

1: **POUR** $i = 1$ à n **FAIRE**
2:     $pivot = a_{ii}$
3:     Diviser tous les termes de la ligne i par le pivot
4:     Mettre à 0 les termes a_{ki} de toutes les autres lignes $k \neq i$, par combinaison linéaire
5: **FIN POUR**

Application

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

PL dont la solution est triviale

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{PL1}) \quad \max 3x_1 + 2x_2 \\ \quad \text{s.c.} \\ \qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ \qquad 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ \qquad 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}$$

PL dont la solution est triviale

$$
(\text{PL2}) \quad \max 33 - \tfrac{5}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4 \\
\text{s.c.} \\
\left.\begin{array}{l}
x_1 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 12 \\
x_5 - \frac{7}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Triviale (\textit{Laquelle}?)}
$$

Principes sous-jacents

PL dont la solution est triviale

$$
\left.\begin{array}{l}
(\text{PL1}) \quad \max 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.c.} \\
2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\
3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}
$$

$\Updownarrow$ En fait il s'agit du même problème !

$$
(\text{PL2}) \quad \max 33 - \tfrac{5}{4}x_3 - \tfrac{1}{4}x_4 \\
\text{s.c.} \\
\left.\begin{array}{l}
x_1 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 12 \\
x_5 - \frac{7}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 3 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Triviale (\textit{Laquelle}?)}
$$

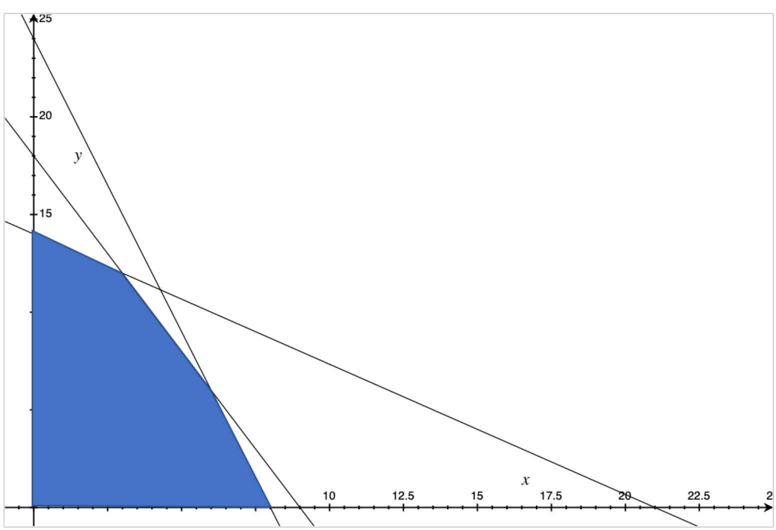
PL dont la solution est triviale

$$\left.\begin{array}{ll} (\text{PL1}) & \max 3x_1 + 2x_2 \\ \quad \text{s.c.} & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Solution Optimale Pas Evidente}$$

Comment passer de (PL1) à (PL2)

1. Remplacer la 1ère contrainte par $\frac{3}{4}L_1 - \frac{1}{4}L_2$
2. Remplacer la 2ème contrainte par $-\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2$
3. Remplacer la 3ème contrainte par $-\frac{7}{4}L_1 + \frac{1}{4}L_2 + L_3$
4. Faire disparaître x_1 et x_2 de la fonction-objectif (en remplaçant par x_3 et x_4 en se servant des contraintes-égalités)

Lien entre forme canonique et sommets de polyèdre



sommet de polyèdre $\Leftrightarrow$ $n - m$ variables nulles

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)

Algorithme de base

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.
- Les $n - m$ vars restantes sont appelées variables libres ou variables hors base.

Algorithme de base

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.
- Les $n - m$ vars restantes sont appelées variables libres ou variables hors base.
- Si les valeurs des vars libres sont connues, alors on peut en déduire celles des vars de base

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.
- Les $n - m$ vars restantes sont appelées variables libres ou variables hors base.
- Si les valeurs des vars libres sont connues, alors on peut en déduire celles des vars de base
- Les solutions où toutes les variables libres sont nulles sont appelées solutions de base.

Algorithme de base

Concepts de base

Propriété 1

Si toutes les contraintes sont exprimées sous forme d'égalités, il y a problème d'optimisation si et seulement si $m < n$ et que les m équations sont linéairement indépendantes (voir slide 3).

Dans ce cas (le seul que nous considérerons désormais) :

- On peut choisir m variables et exprimer ces variables en fonction des $n - m$ vars restantes. (En faisant comme s'il s'agissait d'un système de m équations à m inconnues)
- Un choix de ces m variables est une base et les m variables sont appelées variables de base.
- Les $n - m$ vars restantes sont appelées variables libres ou variables hors base.
- Si les valeurs des vars libres sont connues, alors on peut en déduire celles des vars de base
- Les solutions où toutes les variables libres sont nulles sont appelées solutions de base.

Propriété 2

Si un programme linéaire admet une solution optimale, alors il existe une solution optimale qui est une solution de base.

Tirant partie de cette propriété, le simplexe ne se concentre que sur des solutions de base.

Concepts de base

Principe

Le simplexe consiste à se déplacer de base réalisable en base réalisable de telle sorte que chaque solution de base soit meilleure que la précédente jusqu'à trouver une solution optimale.

Pour cela il faut :

- connaitre une première solution de base réalisable
- savoir passer d'une base à une autre
- savoir reconnaitre une solution de base optimale

La manipulation se fait à l'aide de tableaux :

$$\left.\begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \textit{modele initial} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 42 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 24 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ \textit{forme standard} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
z	-3	-2	0	0	0	0
x_3	2	1	1	0	0	18
x_4	2	3	0	1	0	42
x_5	3	1	0	0	1	24

tableau du simplexe

Connaitre une première solution de base réalisable

Propriété 3

Dans un tableau du simplexe, les colonnes des variables de base, plus la colonne $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})^T$, doivent former une matrice identité $I^{\{m+1\}}$.

Les variables ajoutées lors de la transformation d'inéquations en équations sont souvent de bonnes candidates à la base initiale.

Connaitre une première solution de base réalisable

Remplissage du 1er tableau du simplex, à partir de la forme standard

- la ligne-objectif est remplie des coefs de la fonction-obj multipliés par -1
- chaque colonne, sauf la dernière, correspond à une variable
- la dernière colonne contient les termes de droite (tjrs positifs)
- chaque ligne correspond à une contrainte et ne contient qu'une var de base (pour pouvoir former la matrice identité)
- on peut associer à chaque contrainte la var de base qu'elle contient

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base $\Leftrightarrow$ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est éjectée de la base et remplacée par 1 var libre.

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base ⇔ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est éjectée de la base et remplacée par 1 var libre.

Choix de la variable (libre) entrante x_e

- Seules sont candidates les vars dont les colonnes ont un terme négatif dans la ligne-objectif (Pourquoi ?)
- Choix empirique : choisir la colonne j ayant le coef le plus négatif dans la ligne-objectif

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base ⇔ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est éjectée de la base et remplacée par 1 var libre.

Choix de la variable (de base) sortante x_s

- Pour garantir que la nouvelle base reste réalisable, seules sont candidates les vars de base ayant un coef positif dans la colonne de la var entrante déjà identifiée
- Règle du ratio : choisir la var de base (ligne) conduisant au plus petit ratio entre la colonne b et la colonne de la variable entrante

Savoir passer d'une base à une autre

Changer de base ⇔ échanger des vars de base avec des vars actuellement libres.

Simplexe opère 1 chgmt par itération : 1 var est éjectée de la base et remplacée par 1 var libre.

Application du changement de base

- Faire rentrer x_e et sortir x_s et faire ressortir la matrice identité pour les nvelles vars de base
- Exécution : appliquer des combinaisons linéaires entre la ligne de x_s et les autres lignes pour faire apparaître l'identité sur la nouvelle base

Savoir reconnaitre une solution de base optimale

Propriété

Lors du choix de la variable entrante, s'il n'existe aucun terme négatif dans la ligne-objectif, alors la solution courante est optimale.

Lire le tableau final du simplexe

- valeur des variables de la solution optimale
- coût optimal

Application

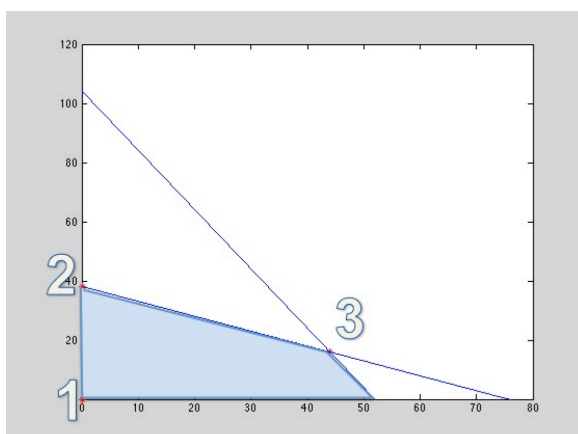
Illustration 2D

Changements de base successifs au cours des itérations du Simplexe

$$(\mathrm{PL1}) \quad \max 6x_1 + 11x_2$$

s.c.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 104 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 76 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Cas particuliers

Multiples solutions

Solution non bornée

Dégénérescence

Cas particuliers

Que faire s'il n'existe pas de sol de base évidente pour le problème (P) ?

$$\left.\begin{array}{l} \max 6x_1 + 11x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 \leq 104 \\ x_1 + 2x_2 \geq 76 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \textit{modele initial} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max 6x_1 + 11x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 104 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 76 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ \textit{forme standard} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

?

tableau du simplexe

Cas particuliers

Que faire s'il n'existe pas de sol de base évidente pour le problème (P) ?

$$\left.\begin{array}{l} \max 6x_1 + 11x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 \leq 104 \\ x_1 + 2x_2 \geq 76 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ \textit{modele initial} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \max 6x_1 + 11x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 104 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 76 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ \textit{forme standard} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ?$$

tableau du simplexe

$\Rightarrow$ Introduire des variables artificielles.

Illustration et Cas particuliers

Cas particuliers

Que faire s'il n'existe pas de sol de base évidente pour le problème (P) ?

$\Rightarrow$ Introduire des variables artificielles.

Pour que le problème résultant soit équivalent à (P), il faut que les variables artificielles soient toutes nulles.

Cas particuliers

Que faire s'il n'existe pas de sol de base évidente pour le problème (P) ?

$\Rightarrow$ Introduire des variables artificielles.

Pour que le problème résultant soit équivalent à (P), il faut que les variables artificielles soient toutes nulles.

1. Méthode de pénalisation

- Principe : Introduire dans la fonction-obj un terme de pénalisation $-Mx_a$ pour chaque var artificielle x_a, pour obtenir le problème pénalisé (PP).
- Si la sol optimale $S_{(PP)}$ n'utilise aucune var artificielle, alors $S_{(PP)}$ est aussi une solution optimale de (P). Sinon, (P) n'a aucune solution.
- Lors du simplexe, si ttes les vars x_a deviennent hors base, alors la base est constituée uniqmt des vars d'origine. On peut donc éliminer les vars artificielles avt de continuer.

Cas particuliers

Que faire s'il n'existe pas de sol de base évidente pour le problème (P) ?

$\Rightarrow$ Introduire des variables artificielles.

Pour que le problème résultant soit équivalent à (P), il faut que les variables artificielles soient toutes nulles.

2. Méthode à 2 phases

1. rechercher une var de base constituées des vars non artificielles
   - Résoudre le PL avec comme fonction-objectif : $\min \sum x_a = \max - \sum x_a$
   - Trouver une base sans var artificielle et donc réalisable pour le pb initial
2. démarrer simplexe avec la base réalisable trouvée
   - Résoudre le problème initial à partir de la base trouvée (comme dans la méthode à pénalisation)

Méthode du Simplexe duale

Principe

$$\left.\begin{array}{l} \max -6x_1 - 11x_2 \\ \text{s.c.} \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 104 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -76 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
z	6	11	0	0	0
	2	1	1	0	104
	−1	−2	0	1	−76

tableau de simplexe dual

Méthode du simplexe duale

Déroulement

1. Sélectionner une variable sortante
   - Parmi les variables de valeur négative, faire sortir celle qui a la valeur la plus négative

2. Sélectionner une variable entrante
   - Candidates : Vars dont le coefficient est strictement négatif à la ligne de la var sortante
   - si aucune telle var existe, alors pb non réalisable
   - si plusieurs variables, prendre celle qui a le plus petit ratio entre la ligne-objectif et la ligne de la var sortante

Méthode du simplexe duale

Avantages, Inconvénients, alternatives

Avantages

Inconvénients

Alternatives

Résumé de ce qui a été vu

- Résolution de PL à $n \geq 2$ variables par la méthode du Simplexe
- Cas particuliers et variantes

Aperçu du prochain cours

- Analyse de sensibilité
- Dualité