Chapitre 2

Chaînes de Markov à temps discret

2.1 Etude d'une Chaîne de Markov à Temps Discret

Soit une chaîne de Markov à trois états : 1, 2 et 3.
Les probabilités de transition de l'état 1 vers les états 2 et 3 sont respectivement $1-p$ et p.
La probabilité de transition de l'état 2 vers l'état 1 est 1.
Les probabilités de transition de l'état 3 vers les états 2 et 3 sont respectivement α et $1-\alpha$.
1- Pour quelles valeurs du couple (α, p) cette chaîne est-elle irréductible et apériodique ?
2- Pour (α, p) vérifiant ces conditions, déterminer les probabilités d'état à l'équilibre.
3- En régime permanent, pour quelles valeurs de (α, p) les trois états sont-ils équiprobables ?
4- Calculer le temps moyen de premier retour en 2.

2.2 Processus de naissance et de mort

Soit une chaîne de Markov infinie dont les états sont numérotés à partir de 0.
La probabilité de transition de l'état n à $n+1$ est p.
La probabilité de transition de l'état n à $n-1$ est q.

Démontrer qu'il faut avoir $p < q$ pour que les états soient récurrents non nuls. On utilisera un théorème vu en cours et on effectuera des coupes pour trouver rapidement la solution.

2.3 Modèles de trafic sur un lien

On considère un lien transportant des cellules de longueur constante. Compte tenu du synchronisme global, on modélise le trafic sous forme d'une chaîne de Markov à temps discret.
1- Trafic de Bernoulli
On suppose que les cellules sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque unité de temps on a une probabilité p qu'il y ait une cellule et $1-p$ qu'il n'y en ait pas. Si l'on note $Z(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a une cellule à l'instant t et 0 sinon, on a $P[Z(t)=1] = p$ et $P[Z(t)=0] = 1-p$ pour toutes les valeurs de t.
a- Modéliser ce processus sous forme d'une chaîne de Markov à deux états.
b- Calculer les probabilités des états, le débit de cellules et les deux premiers moments du temps séparant deux cellules successives.
2- Trafic Bursty Geometric
On suppose que le trafic comporte des silences et des rafales. Pendant les silences il n'y a pas de cellule sur le lien ; pendant les rafales, il y a une cellule à chaque unité de temps. On note $X(t)$ la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on est dans une rafale à l'instant t et 0 dans un silence. On suppose que $P[X(t+1)=1/X(t)=1] = p$ et $P[X(t+1)=0/X(t)=0] = q$.
a- Montrer que l'on peut représenter le processus $(X(t))$ par une chaîne de Markov.