Rapport Évaluation de performances de réseaux

Morgane Cadeau, Morgan Canas, Lucas Lafage, William Mateille, Raphael Sombstay

Novembre 2019

Contents

Comparaison de files d'attente

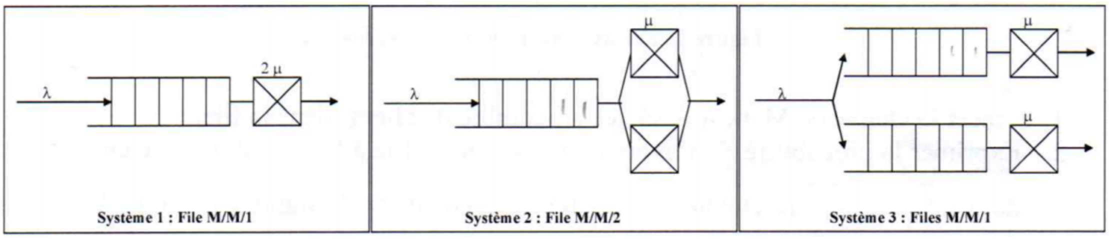

Figure 1: Schéma des différents systèmes

Temps moyen de réponse du système 1

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\rho} \text{ donc}$$

$$E[L] = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{1}{\frac{2\mu-\lambda}{2\mu}} = \frac{\lambda}{2\mu} * \frac{2\mu}{2\mu-\lambda}$$

$$\boldsymbol{E[L] = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}}$$

Calcul du temps moyen de réponse du système

$$E[R] = \frac{E[L]}{\lambda}$$

$$E[R] = \frac{\lambda}{2\mu-\lambda} * \frac{1}{\lambda}$$

$$\boldsymbol{E[R] = \frac{1}{2\mu - \lambda}}$$

Temps moyen de réponse du système 2

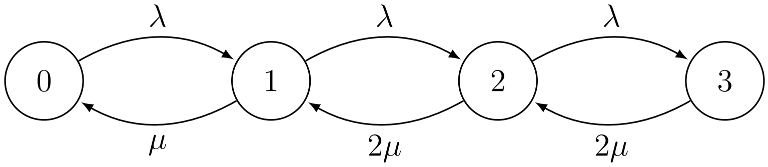

Figure 2: Chaîne de Markov du système de 0 à 3 clients

On peut donc en déduire la chaîne de Markov du système pour n clients :

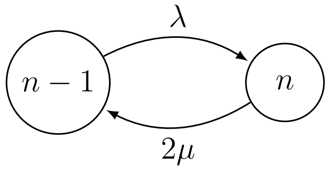

Figure 3: Chaîne de Markov du système pour n clients

Utilisation de la méthode des coupes afin de déterminer π_n selon π_0

$$\pi_0 \lambda = \pi_1 \mu$$

$$\boldsymbol{\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0}$$

$$2\mu\pi_2 = \lambda\pi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu}\pi_0$$

$$\boldsymbol{\pi_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \pi_0}$$

$$2\mu\pi_3 = \lambda\pi_2 = \frac{\lambda^3}{2\mu^2}\pi_0$$

$$\boldsymbol{\pi_3 = \frac{\lambda^3}{4\mu^3} \pi_0}$$

$$\text{On a donc } \pi_n = \frac{\lambda}{2\mu}\pi_{n-1}$$

$$\text{On en déduit que } \boldsymbol{\pi_n = \frac{\lambda^n}{2^{n-1}\mu^n} \pi_0}$$

$$\text{Or } \rho = \frac{\lambda}{2\mu} \text{ donc } \boldsymbol{\pi_n = 2\rho^n \pi_0}$$

Calcul de π_0 grâce à la somme des probabilités

$$\pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$$

$$\pi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i$$

$$\pi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} 2\rho^i \pi_0$$

$$\pi_0 = 1 - 2\pi_0 \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 1 - 2\pi_0 \rho \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i$$

$$\pi_0 = 1 - 2\pi_0 \rho \left(\frac{1}{1-\rho}\right) \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$$

$$\pi_0 = 1 - \frac{2\rho}{1-\rho}\pi_0$$

$$\Rightarrow 1 = \pi_0 + \frac{2\rho}{1-\rho}\pi_0$$

$$1 = \pi_0 \left(1 + \frac{2\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1-\rho+2\rho}{1-\rho}\pi_0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

La valeur de π_0 nous permet de déduire π_n

$$\boldsymbol{\pi_n = 2\rho^n \frac{1-\rho}{1+\rho}}$$

Calcul du nombre moyen de clients dans la file

$$E[L] = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$$
$$E[L] = \sum_{i=0}^{\infty} i2\rho^i \frac{1-\rho}{1+\rho}$$
$$E[L] = 2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i$$
$$\Rightarrow E[L] = 2\left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right) \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \text{ car } \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$
$$E[L] = \frac{2\rho}{(1+\rho)(1-\rho)}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{E[L] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}}$$

Calcul du temps moyen de réponses du système 2

$$E[R] = \frac{E[L]}{\lambda}$$
$$E[R] = \frac{2\rho}{\lambda(1-\rho^2)} = \frac{2\lambda}{2\mu\lambda(1-\rho^2)}$$
$$\boldsymbol{E[R] = \frac{1}{\mu(1-\rho^2)}}$$

Nombre moyen de passages d'un client et temps de rponse moyen dans chacune des 2 files du système 3

On peut appliquer le théorème de Jackson car toutes les hypothèses sont respectées

- Arrivées selon un processus de poisson de débit λ
- Chaque file a 1 seul serveur, un service exponentiel de paramètre μ, une capacité infinie est est FIFO

Calcul de la charge ρ

$$e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda$$
$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} = \boldsymbol{\frac{\lambda}{2\mu}}$$

Calcul du nombre moyen de passages d'un client dans chacune des 2 files

$$E[L_i] = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \text{ et on sait que } \rho_1 = \rho_2$$
$$E[L_1] = E[L_2] = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{2\mu}}{\frac{2\mu-\lambda}{2\mu}}$$
$$E[L_1] = E[L_2] = \frac{\lambda}{2\mu} \times \frac{2\mu}{2\mu-\lambda}$$
$$\boldsymbol{E[L_1] = E[L_2] = \frac{\lambda}{2\mu-\lambda}}$$

Calcul du temps moyen de réponse du système

$$E[R_i] = \frac{E[L_i]}{\lambda e_i} \text{ et on sait que } E[L_1] = E[L_2] \text{ et } e_1 = e_2$$
$$E[R_1] = \frac{E[L_1]}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{2\mu-\lambda} \times \frac{1}{\frac{1}{2}\lambda}$$
$$E[R_1] = \frac{2}{2\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\frac{1}{2}\lambda}$$

Or $E[L_1] = E[L_2]$ et $\lambda_1 = \lambda_2$ donc

$$\boldsymbol{E[R_1] = E[R_2] = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}}$$

$$E[R] = e_1 E[R_1] + e_2 E[R_2]$$

$$E[R] = \frac{1}{2\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda\right)} + \frac{1}{2\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda\right)}$$

$$\boldsymbol{E[R] = \frac{2}{2\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu - \frac{1}{2}\lambda}}$$

Classement des 3 systèmes en fonction de leurs performances respectives

	Temps moyen de réponse	Temps de réponse pour $\mu = 1$ et $\lambda = 1$
Système 1	$\frac{1}{2\mu-\lambda}$	1
Système 2	$\frac{1}{\mu(1-\rho^2)}$	$\frac{4}{3}$
Système 3	$\frac{1}{\mu-\frac{1}{2}\lambda}$	2

Figure 4: Tableau de comparaison des performances des 3 systèmes

Le système 1 est le plus efficace car son temps de réponse est plus faible pour la même valeur de μ et de λ entre les 3 systèmes.

Ce résultat était prévisible car le système 1 a un serveur 2 fois plus rapide que les autres systèmes. Ainsi, s'il n'y a qu'un client, ce système est plus rapide que le système 2.

Performances si on a un système 3 bis où les clients se dirigent vers la file la moins remplie

Dans ce cas là, le système 3 bis serait plus performant que le système 3 car le temps de réponse serait inférieur. Cependant, le système 2 aurait tout de même un temps moyen de réponse supérieur à celui du système 2.

Le classement serait donc le suivant :

1. Système 1
2. Système 2
3. Système 3 bis
4. Système 4

Montrer que $N(t) = (N1(t), N2(t))$ est markovien et construire la chaîne de Markov pour des files inférieures ou égales à 3

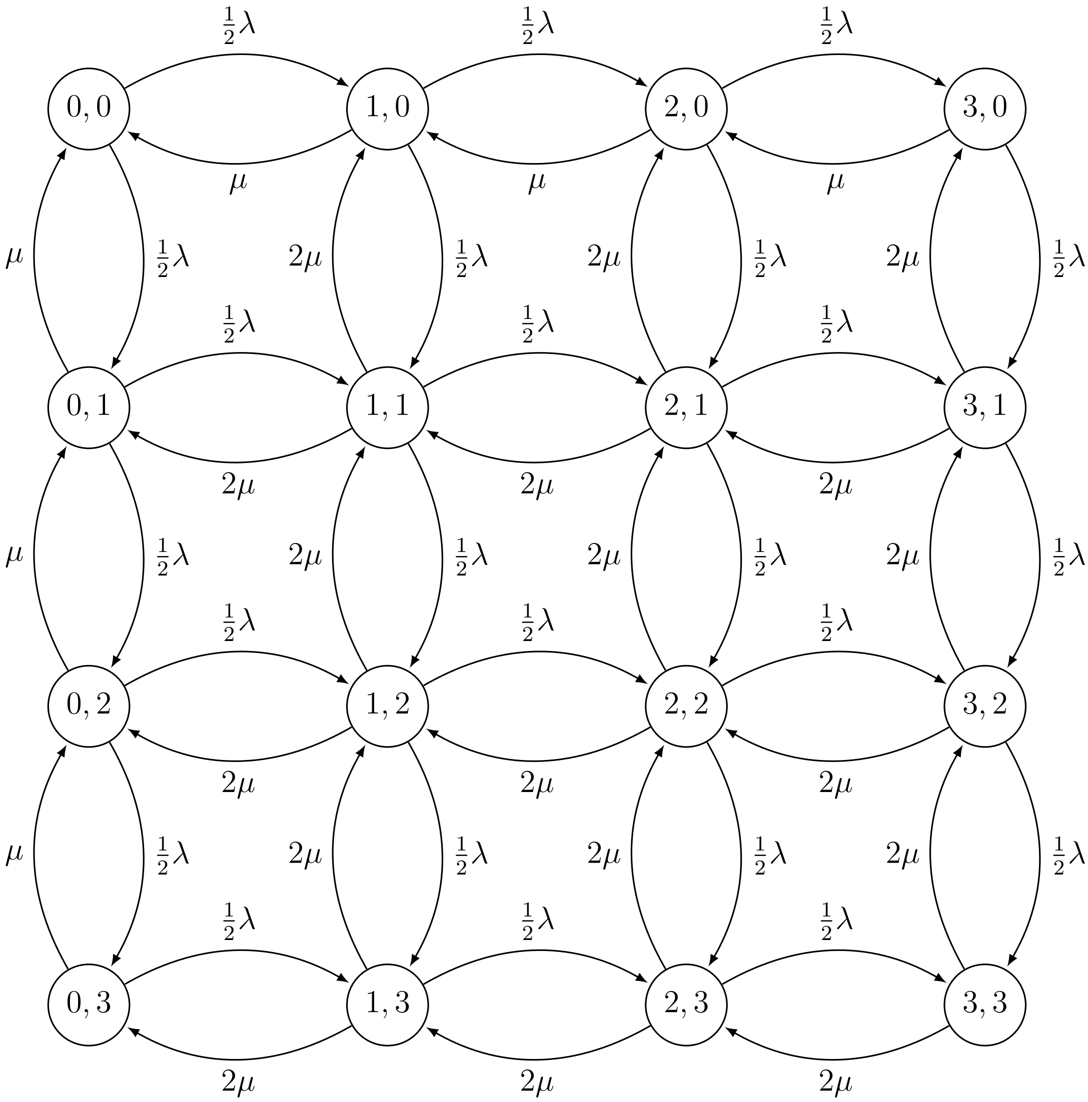

Figure 5: Chaîne de Markov pour des files de longueur inférieures à 3

C'est un processus Markovien car on n'a pas besoin de connaître N pour trouver $N + 1$. On peut calculer les probabilités suivantes :

$$\text{Probabilité d'une arrivée dans la file : } P(N_1(t+dt) = j+1/N_1(t) = j) = \frac{1}{2}\lambda dt + o(dt)$$

$$\text{Probabilité d'un départ de file : } P(N_1(t+dt) = j-1/N_1(t) = j) = \mu dt + o(dt)$$

File avec arrivées découragées

Unité de transmission de paquets