



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

Estacionariedad débil en registros  
polisomnográficos de adultos mayores,  
como marcador de posible deterioro  
cognitivo

**Presenta**

Julio Cesar Enciso Alva

**Dirección**

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres  
Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Pachuca, Hidalgo, Febrero de 2018  
México

# Resumen

En las últimas décadas ha aumentado la esperanza y calidad de vida, paralelamente se observa una mayor presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas a la edad, entre ellas la demencia. Anteriormente se ha reportado, para adultos mayores, correlaciones entre la presencia de deterioro cognitivo leve (PDC, considerado una etapa temprana de la demencia) y algunas propiedades del espectro de potencias calculado para registros de polisomnograma (PSG, observación conjunta de múltiples señales electrofisiológicas durante el sueño) [9]. En este trabajo se buscan marcadores para un diagnóstico de PDC, basados en cantidades dependientes del espectro de potencias para registros de actividad. En particular se estudia la estacionariedad débil, una cantidad que se ha propuesto como marcador de alteraciones neurológicas [14], pero que usualmente se desecha heurísticamente y sin una comprobación formal. Se concluye que hay conexiones entre los marcador reportados en la literatura para PDC y el marcador propuesto, basado en el estudio de la estacionariedad débil.



# Abstract

In the last decades, life expectancy and quality has increased, along with a greater presence of non-communicable diseases associated wth age, including dementia. It has previously been reported, in older adults, correlations between the presence of mild cognitive impairment (MCI, considered an early stage of dementia) and certain properties of the power spectrum of polysomnogram records (PSG, joint observation of multiple electrophysiologic signals during sleep) [9]. In this work we search for diagnostic markers of MCI, based quantities derived from the power spectrum of PSG records. In particular, weak stationarity is considered, a property that has been proposed as a marker of neurological alterations [14] but is usually discarded without any formal verification. It is found a connection between the MCI markers reported in the literature and the proposed marker, based on the study of weak stationarity.

La doctora Alejandra Rosales Lagarde propuso investigar el tema del sueño en el adulto mayor en el Área Académica de Gerontología de la UAEH, institución a la cual está comisionada de acuerdo al contrato con el programa Cátedras CONACYT con el número de investigadora 1411 y el proyecto número 2162, *Evaluación y diagnóstico de los aspectos biopsicosociales del adulto mayor y sus cuidadores primarios*.

De manera adicional, el presente estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080), Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalevskaya (2014); otorgados a la doctora Erika E. Rodríguez Torres.

# Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Erika Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo y centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por el permitirme el acceso y análisis de los registros de polisomnograma. Mi contribución con este trabajo luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>IX</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>XI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
0.1. Pregunta de investigación . . . . .	4
0.1.1. Hipótesis . . . . .	4
0.1.2. Objetivo general . . . . .	4
0.1.3. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1. Medidas . . . . .	7
1.1.1. Integración en espacios medibles . . . . .	8
1.2. Variables aleatorias . . . . .	9
1.2.1. Variables aleatorias continuas y discretas . . . . .	11
1.2.2. Valor esperado . . . . .	12
1.3. Estimación de parámetros . . . . .	13
1.4. Pruebas de hipótesis . . . . .	16
1.5. Procesos estocásticos . . . . .	18
1.6. Transformada de Fourier . . . . .	21
1.7. Otros resultados importantes . . . . .	24
<b>2. Espectro de potencias</b>	<b>29</b>
2.1. Función de densidad espectral . . . . .	30
2.2. Representación espectral . . . . .	30
2.2.1. Representación de procesos a tiempo discreto . . . . .	37

2.3. Efecto alias . . . . .	39
2.4. Filtros lineales . . . . .	41
2.4.1. Filtros de banda . . . . .	42
2.5. Estimadores . . . . .	43
<b>3. Espectro evolutivo</b>	<b>47</b>
3.1. Definición del espectro evolutivo . . . . .	47
3.2. Estimación del espectro evolutivo . . . . .	50
3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios . . . . .	50
3.3. Estimador de doble ventana . . . . .	56
3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	63
<b>4. Marco conceptual del problema</b>	<b>71</b>
4.1. Deterioro cognitivo . . . . .	72
4.2. Detección del deterioro cognitivo . . . . .	73
4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño . . . . .	74
4.4. Estudio del sueño a través de la polisomnografía . . . . .	75
4.4.1. Estructura del sueño . . . . .	78
<b>5. Metodología y resultados</b>	<b>81</b>
5.1. Características de los participantes . . . . .	81
5.1.1. Registro del polisomnograma . . . . .	82
5.2. Análisis de las características de los participantes . . . . .	85
5.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	86
5.4. Variabilidad dentro del sujeto . . . . .	91
<b>6. Discusión y conclusiones</b>	<b>95</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	96
6.2. Trabajo a futuro . . . . .	96
<b>A. Compilados gráficos</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>105</b>
<b>Glosario</b>	<b>113</b>

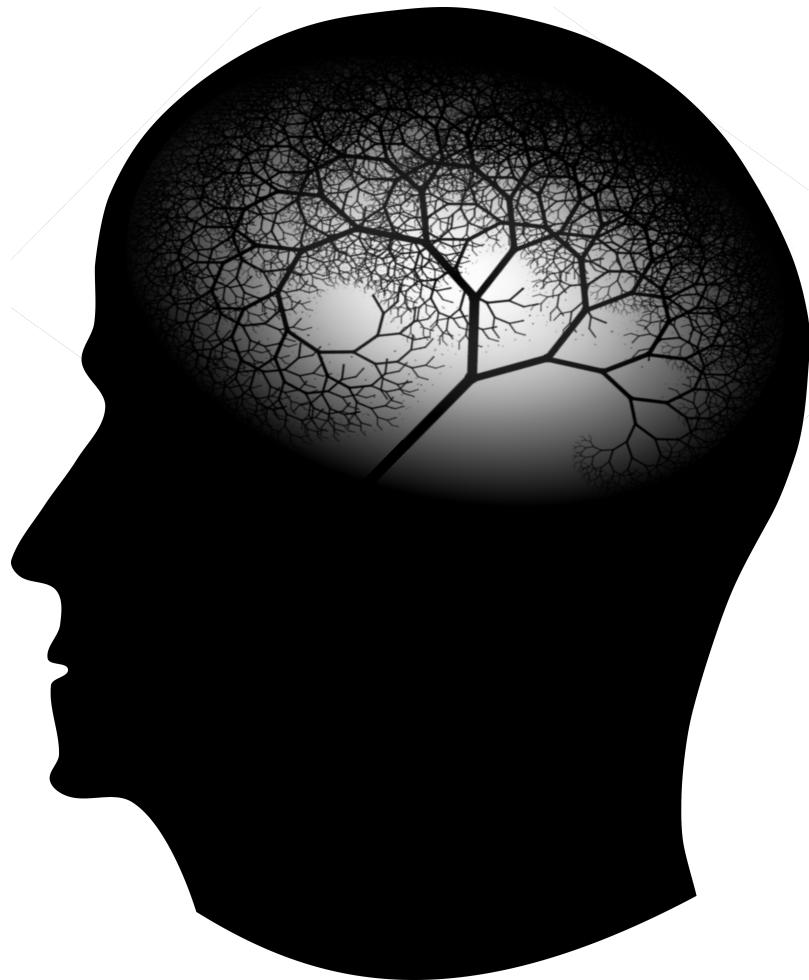
# Índice de figuras

1.	Estructura de la tesis . . . . .	6
3.1.	Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad. . . . .	69
4.1.	Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG . . . . .	76
4.2.	Colocación de electrodos según el sistema 10–20 . . . . .	77
4.3.	Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular	78
4.4.	Registro de polisomnograma durante sueño MOR . . . . .	80
5.1.	Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes	88
5.2.	Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana . . . . .	89
5.3.	Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana. . . . .	90
5.4.	Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos . . . . .	92
5.5.	Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.	93
5.6.	Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC. . . . .	94
A.1.	Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana	98
A.2.	Gráficos individuales para el sujeto VCR . . . . .	100



# Índice de cuadros

2.1. Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta) . . . . .	45
2.2. Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia) . . . . .	46
3.1. Estadísticos involucrados en la prueba PSR . . . . .	67
4.1. Generalidades sobre ondas cerebrales . . . . .	76
4.2. Criterios para la clasificación de etapas de sueño . . . . .	79
5.1. Puntajes de corte para la prueba Neuropsi . . . . .	82
5.2. Datos generales de los participantes . . . . .	83
5.3. Datos generales sobre los registros de PSG . . . . .	84
5.4. Variables independientes entre grupos . . . . .	86
5.5. Correlaciones entre variables independientes . . . . .	86



*“Creo que el conocimiento científico tiene  
propiedades fractales; que por mucho que aprendamos,  
lo que queda, por pequeño que parezca,  
es tan infinitamente complejo como el todo  
por el que empezamos.  
Ese, creo yo, es el secreto del universo.”*

ISAAC ASIMOV [4]

# Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo se ha incrementado la esperanza de vida y la calidad de vida. Desafortunadamente, también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad. En México el sector de la población con más de 60 años de edad, considerados en alto riesgo para este tipo de enfermedades, contempló a 10 millones de personas en 2010, y en 2015 dicha cifra creció a 12 millones [24, 25].

En este trabajo se destaca la demencia de entre las enfermedades asociadas con la edad. La demencia consiste en el desarrollo de déficits cognoscitivos suficientemente graves como para interferir en las actividades laborales y sociales. La demencia se considera irreversible y no se han identificado curas definitivas [26], debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas [31]. El deterioro cognitivo leve (PCL), considerado una etapa temprana de la demencia, se define como “*una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y que no cumple con criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia*” [61]. Por síndrome focal se entiende un daño en una estructura nerviosa específica y de causa conocida (como una hemorragia o una embolia) cuyo inicio sea inmediato y evidente; en cambio, el inicio del DCL es insidioso [55].

El DCL puede detectarse por medio de diversos métodos que pueden ser complementarios. La forma más sencilla de detectarlo es por la autopercepción de fallas en la memoria o por la percepción de otros; es común que estos criterios subjetivos lleven a falsos negativos o falsos positivos, ésto por la percepción personal del nivel *normal* de deterioro que se debe al envejecimiento. Otras posibilidades para la detección incluyen la entrevista clínica de un especialista, o la aplicación de cuestionarios sobre dificultades en la memoria. Métodos más objetivos aún corresponden al diagnóstico con pruebas neuropsicológicas. Los análisis genéticos, químicos, de

imágenes cerebral, entre otros, estudian el sistema nervioso central per se; dichas técnicas y otras, en combinación con las pruebas neuropsicológicas, permitirán diagnosticar más acertadamente el DCL y desentrañar los fenómenos neurobiológicos subyacentes.

En este sentido, en el presente trabajo se busca desarrollar métodos para determinar el DCL con base en mediciones de la actividad eléctrica cerebral, muscular y ocular; se mantiene presente que el fenómeno del deterioro cognitivo (más allá del DCL) no puede reducirse exclusivamente a tales mediciones. Las conclusiones sobre las señales electrofisiológicas deben ser contrastadas siempre con los resultados de evaluaciones neuropsicológicas y revisiones neurológicas.

En concreto se utilizarán registros de varias señales electrofisiológicas –electroencefalograma (EEG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG)–, técnica conocida como polisomnografía (PSG)<sup>1</sup>, obtenidas durante etapas específicas en el sueño del paciente. Conviene destacar que muchos de los marcadores para el DCL definidos con base en el EEG dependen efectivamente de su respectivo espectro de potencia. EEG está asociado al grado de actividad cerebral en términos de energía, entonces el espectro de potencias explica *cómo* es dicha actividad.

El presente trabajo toma parte en el problema metodológico de que las señales electrofisiológicas típicamente representan procesos no-lineales y no-estacionarios, y sin embargo suelen ser analizadas usando herramientas que suponen linealidad y estacionariedad. Se sabe que las señales biológicas son mayormente no estacionarias, pero en ventanas pequeñas de tiempo éstas son mayormente estacionarias. Además estudios previos han demostrado que señales mayores de 20 segundos pueden ayudar a inferir problemas neurológicos [14]. En el caso particular del espectro de potencias, es común que sea calculado usando la transformada de Fourier sobre segmentos cortos para evitar los *efectos* de la no-estacionariedad [27]. Es por ello que se buscan herramientas para verificar la estacionariedad débil (más detalles en la sección de métodos) en los registros electrofisiológicas, y con especial atención en la posibilidad de que puedan usarse como marcadores de deterioro cognitivo.

En este trabajo se definirá al Posible Deterioro Cognitivo Leve (PDCL) como una disminución de las funciones cognitivas del sujeto con respecto las típicas de su edad y nivel de educación. El desempeño de las funciones cognoscitivas es medido de acuerdo

---

<sup>1</sup>La PSG puede contener otro tipo de señales como electrocardiograma, niveles de oxígeno en la sangre, esfuerzo respiratorio, movimiento de las piernas, entre otras

a la prueba neuropsicológica Neuropsi [citar? ostrosky]. Se entiende el déficit en estas funciones como mediciones por debajo de la media menos 3 desviaciones estándar de las mediciones típicas para el grupo de edad y nivel de educación, según la validación de la prueba para México [citar].

## Antecedentes

El sueño MOR ha sido ampliamente relacionado con la consolidación de la memoria, así como con otras funciones cognitivas como la integración de conocimientos aprendidos durante la vigilia y las funciones ejecutivas [21, 22, 38, 54, 53, 69]. En el caso de adultos mayores, la correlación entre deterioro cognitivo y trastornos del sueño ha sido reportada por varios autores a partir de estudios poblacionales [2, 44, 60, 56]. Tal correlación era de esperarse ya que los procesos de atención y memoria, por ejemplo, dependen de los circuitos colinérgicos activados durante el sueño MOR [8]; y estos circuitos son propensos a degradación estructural tanto en el envejecimiento normal como en el patológico, y especialmente en el segundo [67].

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron el PDCL en adultos mayores del estado de Hidalgo con el método no lineal del Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia (DFA, por sus siglas en inglés), encontrando efectivamente que los sujetos con PDCL presentan mayor ruido browniano en varias regiones en comparación con los pacientes sin PDCL[74]. Adicionalmente, la sugerencia de que sujetos con alteraciones neurológicas y deterioro cognitivo exhiben estacionariedad débil en sus registros de EEG en mayor proporción (respecto a individuos sanos) fue sugerida anteriormente [14]; aquél análisis se refiere a su vez a trabajos anteriores sobre estacionariedad y normalidad en registros de EEG [39, 72, 29]. Los estudios referidos se enmarcan en un primer intento de verificar que los registros electrofisiológicos no pueden modelarse como señales *simples* (lo contrario a señales complejas).

El presente trabajo tiene el objetivo de identificar concretamente los posibles cambios en los registros de PSG debidos al PDCL. Siguiendo a Cohen [14], es posible predecir que en sujetos con PDCL habrá menores porcentajes de épocas estacionarias en comparación con sujetos controles, lo que puede deberse a una mayor cantidad de ondas lentas. Sin embargo, en esta tesis sólo se explorará si la primera condición se cumple, verificando el comportamiento estacionario de los registros.

En un estudio reciente, EEG de una noche polisomnografía de personas mayores

con y sin deterioro cognitivo según las evaluaciones con el Neuropsi analizó el porcentaje de estacionariedad. En sueño MOR el porcentaje fue menor que el del sueño NMOR y la vigilia, se obtuvo estacionariedad como un índice para comparar NMOR versus sueño MOR en ambos grupos [65].

## 0.1. Pregunta de investigación

¿Las series de tiempo de los registros de polisomnografía en adultos mayores son débilmente estacionarias? Si en efecto, son débilmente estacionarias ¿Ésta es distinta entre los sujetos con PDCL y sin PDCL?

### 0.1.1. Hipótesis

Existen diferencias en la estacionariedad débil de la actividad eléctrica cerebral, muscular u ocular en adultos mayores con PDCL respecto a individuos sanos. *presencia* deen registros de PSG.

### 0.1.2. Objetivo general

Buscar pruebas estadísticas formales para detectar si una serie de tiempo dada procede de un proceso estocástico débilmente estacionario. Usar tales pruebas sobre registros de PSG en adultos mayores para investigar si la presencia de más segmentos débilmente estacionarios se asocia con la condición de PDCL.

### 0.1.3. Objetivos específicos

- Estudiar la definición de estacionariedad para procesos estocásticos.
- Investigar cómo detectar, como prueba de hipótesis, si una serie de tiempo dada proviene de un proceso estocástico débilmente estacionario, y bajo qué supuestos es válida dicha caracterización.
- Establecer si los registros de PSG durante las etapas de sueño son débilmente estacionarios.
- Investigar si la presencia de segmentos estacionarios en los registros es diferente si la PSG corresponde a un individuo con PDCL.

El presente trabajo está conformado por 6 capítulos y un apéndice. El primer capítulo aborda conceptos preliminares como medida, integración, variables aleatorias, estimadores, pruebas de hipótesis, proceso estocásticos, espacios de Hilbert y la transformada de Fourier.

En el segundo capítulo se expone una serie de temas relacionados con la *estadística en el dominio espectral*, es decir, obtener el espectro de potencias de un proceso estocástico –particularmente de procesos débilmente estacionarios. Debido a la notoria relación mutua entre estos temas, se decidió ilustrar en la figura 1 la red de temas según dependen unos de otros.

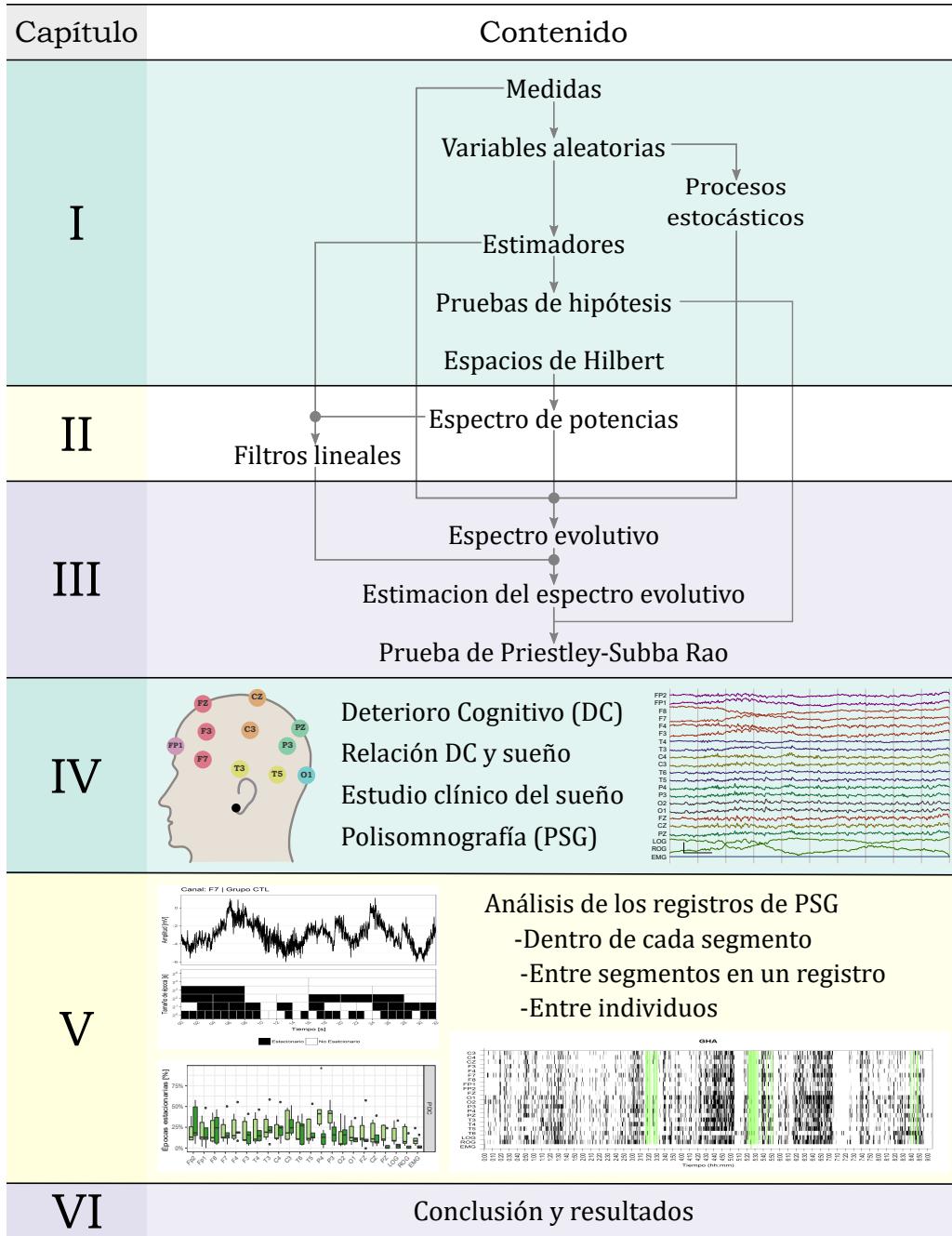
En el tercer capítulo se expone el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no estacionarios. Como el espectro evolutivo de un proceso débilmente estacionario se reduce al espectro de potencias, se describe una metodología para detectar estacionariedad débil.

En el cuarto capítulo se presentan conceptos preliminares de índole fisiológica como detección de deterioro cognitivo y su relación con el sueño. En particular se explora el estudio del sueño a través de la polisomnografía.

En el capítulo quinto describe cómo se aplica la metodología descrita en los capítulos anteriores. Los registros son divididos en segmentos, llamados *épocas*, que son analizadas en tres niveles:

- Se prueba la homogeneidad de cada época
- Se estudian las características de las distintas épocas dentro

En el capítulo sexto se discuten los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones.



**Figura 1:** Se ilustra gráficamente las dependencias (qué temas hay que entender antes que otros) respecto a los tópicos de matemáticas, ésto debido a que se relacionan de forma relativamente confusa. Los tópicos sobre fisiología son expuesto de forma más *lineal*, de modo que las dependencias se sobreentiendan.

# Capítulo 1

## Preliminares

El lector interesado puede revisar mayores detalles sobre teoría de la medida, probabilidad y estadística en los libros “*Probability for Statisticians*” por Galen R. Shorack [68] y “*Statistical Theory*” por Bernard W. Lindgren [32].

### 1.1. Medidas

**Definición 1.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto y sea  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$ . Se dice que  $\mathcal{U}$  es una  **$\sigma$ -álgebra** si cumple

- $\Omega \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U}$
- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde  $A^C$  es el complemento de  $A$  en  $U$

Los elementos de una  $\sigma$ -álgebra se denominan **conjuntos medibles**.

**Definición 1.2.** Sea  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subseteq \Omega$  una familia de subconjuntos. Se define a  $\sigma(\mathcal{A})$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$ , como la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a  $\mathcal{A}$

En el contexto de la probabilidad, es particularmente importante la  $\sigma$ -álgebra de Borel, definida como

$$\mathcal{B} = \sigma (\{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (1.1)$$

Este tipo de  $\sigma$ -álgebras puede definirse sencillamente para algún subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_A = \sigma(\{(-\infty, a] \cap A \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (1.2)$$

**Definición 1.3.** Sea  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una  $\sigma$ -álgebra definida en  $\Omega$ . El par  $(\Omega, \mathcal{U})$  será referido como **espacio de medida**. Por nomenclatura,  $\Omega$  es referido como espacio muestral y  $\mathcal{U}$  como  $\sigma$ -álgebra de sucesos.

**Definición 1.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio de medida. Se dice que una función  $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una **medida** si cumple que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  son tales que  $A_n \cap A_m = \emptyset \Leftrightarrow m \neq n$ , entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Donde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x\} \cup \{\infty\}$  y  $\emptyset$  es el conjunto vacío. La terna  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  será referida como **espacio de medida**.

**Definición 1.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida. Se dice que  $\mu$  es  **$\sigma$ -finita** si existen una familia de conjuntos medibles  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

- $\mu(A_n) < \infty$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

**Definición 1.6.** Considérese el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , con  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel. Se define la medida de Lebesgue,  $\mu_L$ , la medida en el espacio mencionado tal que

$$\mu_L([a, b]) = b - a \quad (1.3)$$

para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$

### 1.1.1. Integración en espacios medibles

**Definición 1.7.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función medible no-negativa. Sea  $A \in \mathcal{U}$  un conjunto arbitrario y  $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}$  el conjunto de las

particiones de  $A$  en una cantidad finita de conjuntos medibles. Se define la **integral de  $f$  respecto a  $\mu$  en el conjunto  $A$**  como

$$\int_A f(x)\mu(x) := \sup_{\mathcal{C}_A} \left[ \sum_{j=1}^n f(\lambda)\mu(E_m) \right] \quad (1.4)$$

Donde  $\mathcal{C}_A = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

**Definición 1.8.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función medible. Se definen las funciones  $f^+$  y  $f^-$  como

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \\ f^-(x) &= -\min(f(x), 0) \end{aligned}$$

Se dice que  $f$  es integrable en  $A$  respecto a  $\mu$  si cumple que  $\int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$  y  $\int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$ ; si así fuere, se define

$$\int_A f(\lambda)d\mu(\lambda) := \int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) - \int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (1.5)$$

**Proposición 1.1.** Sean  $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$  espacios medibles y  $\mu$  una medida sobre el primero. Una función  $g$  es integrable en  $A \in \mathcal{U}_2$  respecto a  $\mu_f$  si y sólo si  $g \circ f$  es integrable en  $f^{-1}(A)$  respecto a  $\mu$ . En dado caso, se satisface que

$$\int_A g(\lambda)d\mu_f(\lambda) = \int_{f^{-1}(A)} g \circ f(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (1.6)$$

## 1.2. Variables aleatorias

Si una medida  $\mu$  es acotada en todo el espacio de eventos se dice que es una **medida finita** (no confundir con  $\sigma$ -finita). Una medida de probabilidad puede entenderse como un caso particular de medida finita sobre los reales.

**Definición 1.9.** El espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  se dice un **espacio de probabilidad** si satisface que  $P(\Omega) = 1$

**Definición 1.10.** Sean  $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$  dos espacios medibles. Se dice que una función  $f : \omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es **medible** si para todo  $A \in \mathcal{U}_2$   $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_1$

**Definición 1.11.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio medible y  $(I, \mathcal{B}_I, P)$  un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función medible  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_I$  entre estos espacios

Siendo  $X$  una variable aleatoria, intuitivamente se puede definir la función de densidad de probabilidad de un conjunto medible  $A \in \mathcal{B}$  como

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \quad (1.7)$$

**Definición 1.12.** Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$  un espacio de probabilidad. La **función de probabilidad acumulada**,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , se define como

$$F(x) := P((-\infty, x])$$

Por comodidad, se define una notación alterna para la función de probabilidad acumulada de  $X$  como

$$P_X(x \leq x) := F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \quad (1.8)$$

Si se puede definir una función de densidad de probabilidad para  $X$ , entonces puede escribirse

$$P(x \in A) = \int_A f_X(\lambda) d\lambda \quad (1.9)$$

Una función de probabilidad acumulada satisface las siguientes propiedades

- Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$
- Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} F(x) + P(\{x\})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Conviene considerar las funciones que satisface las condiciones anteriores, referidas simplemente como **función de distribución**, pero que no necesariamente provienen de un espacio de probabilidad. Naturalmente, una función de distribución  $F$  puede inducir una medida  $\mu$ .

**Proposición 1.2.** *Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de distribución; se puede construir una medida  $\mu_F$  sobre el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tal que la función de probabilidad acumulada asociada al espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$  es exactamente  $F$ . La medida  $\mu_F$  será referida como la **medida inducida** por  $F$ .*

### 1.2.1. Variables aleatorias continuas y discretas

**Definición 1.13.** *Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **absolutamente continua** si para cualquier  $\varepsilon > 0$  arbitrario existe un  $\delta > 0$  y una familia de intervalos,  $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| < \delta \quad (1.10)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \quad (1.11)$$

Se dice que una medida de probabilidad  $P$  es **continua** si su función de probabilidad acumulada es absolutamente continua.

Si una medida de probabilidad  $F$  es absolutamente continua, entonces existe una función  $f$  tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (1.12)$$

Se dice que  $f$  es la **función de densidad de probabilidad**.

Sea  $P$  una medida de probabilidad, se define su **soporte** como

$$\mathcal{D}_P = \{x \in \mathbb{R} | P(\{x\}) > 0\} \quad (1.13)$$

Se dice que una medida de probabilidad,  $P$ , es **discreta** si su soporte es numerable.

Si una medida de probabilidad  $F$  es discreta, entonces existe una finito o infinito numerable  $Q_F = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$F(x) = \sum_{n \leq x} q_n F(q_n) \quad (1.14)$$

Es posible construir una función de densidad de probabilidad para  $F$  como

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in Q_F \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.15)$$

Naturalmente es posible construir medidas de probabilidad que no sean ni continuas ni discretas. Por ejemplo, considérese la función de Cantor  $K$  que puede ser definida iterativamente como

$$K_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}K_n(3x - 2) + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.16)$$

con  $K_0(x) = x$  y  $K := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$

**Proposición 1.3.** *La función de Cantor es continua pero no es absolutamente continua*

Luego entonces, puede construirse la siguiente función de distribución

$$F_K = \begin{cases} K(x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

la cual no es ni continua ni discreta. Por simplicidad, en el presente trabajo únicamente se considerarán variables aleatorias que son continuas o discretas.

### 1.2.2. Valor esperado

**Definición 1.14.** *Sea  $X$  una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ . Si  $P$  es integrable en  $\Omega$  respecto a  $P$ , entonces se define el **valor esperado** de  $X$  como*

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\omega} X(\lambda) dP(\lambda) \quad (1.18)$$

**Proposición 1.4.** *Sea  $X$  una variable aleatoria y  $g$  una función medible en el espacio edible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Entonces  $g(X)$  es una variable aleatoria cuyo valor esperado es*

$$\mathbb{E}[g(x)] = \int_{\Omega} [g(X)](\lambda) dP(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP(x) \quad (1.19)$$

**Definición 1.15.** *Sea  $X$  una variable aleatoria, se definen su media  $\mu_X$  y varianza*

$\sigma_X^2$  como

$$\mu_X := E[X] \quad (1.20)$$

$$\sigma_X^2 := E[(X - \mu_X)^2] \quad (1.21)$$

Por definición, no hay garantía que una variable aleatoria arbitraria tenga media o varianza bien definidas.

Naturalmente la notación  $\mu_X$  únicamente se usa cuando no hay confusión con la notación para medidas. Así mismo, conviene mencionar ejemplos de variables aleatorias para las cuales no está bien definida su media o varianza.

? Ejemplos

**Definición 1.16.** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias. Se define su **covarianza** como

$$\text{Cov}(X, Y) := E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_X(x) dP_Y(y) \quad (1.22)$$

**Definición 1.17.** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias. Se define su **coeficiente de correlación de Pearson** como

$$\rho(X, Y) := \sqrt{\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \quad (1.23)$$

### 1.3. Estimación de parámetros

Es común que se conozca cierta información de estos fenómenos que permita suponer que se comportan como variables aleatorias con cierta forma. Por ejemplo, ?. Conviene destacar el caso de fenómenos que son *forzados* a seguir una distribución conocida; por ejemplo, la metodología para aplicar la prueba Neuropsi [49] ha sido diseñada de tal forma que los puntajes siguen una distribución normal para cada segmento poblacional.

En este tipo de escenarios se puede hablar de una función de distribución  $f(\bullet; \theta)$  que depende de un parámetro  $\theta \in \Omega$ , donde  $\Omega$  se conoce como **espacio de parámetros**; el objetivo consiste en deducir el valor de  $\theta$  a partir de los datos recabados.

**Definición 1.18.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Una **muestra de  $X$  de tamaño  $N$**  es una colección de variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  tales que son independientes y que comparten la misma distribución de  $X$

**Proposición 1.5.** Sea  $X$  una variable aleatoria que admite una función de densidad  $f_X$ , y sea  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  una muestra. La función de densidad de probabilidad conjunta para el vector  $[X_1, X_2, \dots, X_N]$  es

$$f_{[X_1, \dots, X_N]}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N f(x_j) \quad (1.24)$$

Mientras no se indique lo contrario, las variables aleatorias en la muestra no están ordenadas.

**Proposición 1.6.** Sea  $X$  una variable aleatoria,  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  una muestra y  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  un conjunto de observaciones. Se define la **función de distribución muestral** como

$$F_{X;N}(x) := \frac{1}{N} \sum_{x_j \leq x} 1 \quad (1.25)$$

**Proposición 1.7.** Si el tamaño de una muestra de  $X$  se vuelve arbitrariamente grande, la función de distribución muestral converge en probabilidad a  $F$ , la función de probabilidad acumulada de  $X$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{X;N} = F_X \quad (1.26)$$

**Definición 1.19.** Un **estadístico** es una función de las observaciones en una muestra

Ejemplo en pagina 112 del libro de lindgren. Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , sea  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_j$ , entonces

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad (1.27)$$

**Teorema 1.1** (Cramér-Rao). Sea  $\hat{\theta}$  un estimador insesgado de  $\theta$ . Si la función de verosimilitud asociada al estimador,  $L$ , es diferenciable, entonces

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left( \text{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} L(X; \theta) \right] \right)^{-2} \quad (1.28)$$

La igualdad se alcanza si y sólo si existe una función positiva  $k$  tal que puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(X; \theta) = k(\theta) [\hat{\theta}(X) - \theta] \quad (1.29)$$

**Definición 1.20.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $X_1, \dots, X_N$  una muestra de tamaño  $N$ . Un estimador  $\hat{\theta}$  es **suficiente** si la distribución de la variable  $X|\hat{\theta}$  no depende de  $\theta$

**Teorema 1.2.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende del parámetro  $\theta$ . Un estadístico  $\hat{\theta}$  es suficiente si y sólo si existen funciones  $g$  y  $h$  tales que

$$f_X(\bullet; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h_X(\bullet) \quad (1.30)$$

**Definición 1.21.** El **error de media cuadrática** para el estimador  $\hat{\theta}$  se define como

$$EMC(\hat{\theta}) := E \left[ (\hat{\theta} - \theta)^2 \right] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (E[\theta] - \theta^2) \quad (1.31)$$

**Definición 1.22.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $X_1, \dots, X_N$  una muestra de tamaño  $N$ . Un estimador  $\hat{\theta}$  es **insesgado** si cumple que

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (1.32)$$

Se puede hablar del **sesgo** del estimador  $\hat{\theta}$  como  $E[\hat{\theta}] - \theta$

**Definición 1.23.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $\{\hat{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de estimadores definidos para muestras de  $X$  de tamaño arbitrario. La familia de estimadores se dice **consistente** si para cualquier  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (1.33)$$

**Definición 1.24.** Así como en la definición anterior, se dice que a familia de estimadores converge en media cuadrática si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = 0 \quad (1.34)$$

Si esto se cumple, se dice que la familia de estimadores es **consistente en media cuadrática**

**Proposición 1.8.** Si  $\hat{\theta}_n$  es una familia de estimadores consistente en media cuadrática, entonces es consistente

**Proposición 1.9. COROLARIO** Una condición suficiente para que una familia sea consistente en media cuadrática es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n] = \theta \quad (1.35)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0 \quad (1.36)$$

## 1.4. Pruebas de hipótesis

Una hipótesis es una afirmación sobre algún aspecto desconocido. Es tarea común en la estadística el decidir si alguna afirmación puede sostenerse a partir de la información proporcionada por un conjunto de observaciones. A partir de la aplicación masiva de pruebas neuropsicológicas a un grupo de adultos mayores uno puede preguntarse, por ejemplo, si hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas, o si la edad de los participantes está correlacionada con su desempeño en tareas de memoria. En la tabla ... se muestran los datos sobre una simulación (artificial) de dicho escenario.

Una herramienta de uso común para producir estas decisiones es la **pruebas de hipótesis**, la cual consiste en dos afirmaciones complementarias, es decir, tales que exactamente una de ellas es verdadera; tales afirmaciones son referidas como *hipótesis*, y deben elegirse de forma que sean equivalentes a la decisión que se busca. Usualmente la primera de las hipótesis (hipótesis nula,  $H_0$ ) representa la afirmación más general o que se cree verdadera por omisión, mientras que la segunda hipótesis (hipótesis alternativa,  $H_A$ ) se tomará como verdadera si existe suficiente información para rechazar la veracidad de la primera. El enfoque de prueba de significancia es tomar un estadístico  $\hat{\theta}$  y evaluarlo sobre los datos, posteriormente se analiza qué tan diferente es el valor observado del típico cuando la hipótesis nula es verdadera.

Los estadísticos de prueba suele ser un estadístico construido para tener una distribución conocida salvo unos pocos parámetros fáciles de estimar. La interpretación usual es que, si  $H_0$  es verdadera entonces  $\hat{\theta}$  puede no tener el valor predicho debido a factores ajenos al fenómeno estudiado, en consecuencia se suele hablar de una región de rechazo en el espacio de estados (ver más adelante). Bajo esta interpretación, un

valor de  $\hat{\theta}$  dentro de la región de rechazo significa que los datos representan evidencia para rechazar  $H_0$ ; un no-rechazo no significa precisamente que  $H_0$  sea verdadera, sino que las observaciones no representan evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ .

**Definición 1.25.** *En una prueba de hipótesis, rechazar  $H_0$  cuando es verdadero es un **error del tipo I**. Así mismo, aceptar  $H_0$  cuando es falsa es un **error del tipo II**.*

La naturaleza e interpretación de los estadísticos de prueba suelen ser muy particulares de las situaciones bajo las cuales son definidos. Una forma típica de normalizar los diferentes estadísticos es a través del *p*-valor, definido como la probabilidad de que ocurra un valor extremo del estadístico de prueba; el *p*-valor suele interpretarse como la *fuerza* de la evidencia contra  $H_0$ .

**Definición 1.26.** *Sea  $\hat{\theta}$  un estadístico de prueba. El **p**-*valor* asociado al  $\hat{\theta} = \theta_0$  es la probabilidad  $P(\hat{\theta} > \theta_0)$*

Una **prueba de significancia** se entiende como una pruebas de hipótesis para algunos *p*-valores predefinidos, usualmente 0.05, 0.01, 0.005, entre otros. Un error común, pero muy extendido, es interpretar al *p*-valor como la probabilidad de obtener  $H_0$ .

**Definición 1.27.** *Dada una muestra poblacional y dos afirmaciones complementarias  $H_0$  y  $H_A$ , una **prueba de hipótesis** es una regla de decisión que asigna a cada punto del espacio de estados una acción del conjunto Aceptar  $H_0$ , rechazar  $H_A$ , Rechazar  $H_0$ , aceptar  $H_A$ .*

*Al conjunto del espacio muestral donde se rechaza  $H_0$  se le denomina **región crítica**.*

Una propiedad deseable para un estadístico de prueba es poder acotar los errores de tipo I y de tipo II; para ello, para alguna región crítica arbitraria  $\mathcal{C}$  se define el **nivel de significancia** de la prueba como

$$\alpha := \sup_{\theta \in H_0} p(\mathcal{C} | \theta) \quad (1.37)$$

Ejemplo: Retomando los datos de la tabla ..., considérese la pregunta *¿Los hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas neuropsicológicas?*. En este ejemplo se supone que los puntajes de los hombres en la prueba siguen

una distribución normal con media  $\mu_H$  y varianza 1, y similarmente para las mujeres con media  $\mu_M$  y varianza 1. Como hipótesis nula se elige la posibilidad de que en promedio ambos grupos (hombre y mujeres) obtengan el mismo puntaje en la prueba, es decir

$$H_0 : \mu_H = \mu_M \quad (1.38)$$

y como hipótesis alternativa está la posibilidad de que los puntajes sean diferentes

$$H_A : \mu_H \neq \mu_M \quad (1.39)$$

## 1.5. Procesos estocásticos

**Definición 1.28.** Un **proceso estocástico**  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es una colección de variables aleatorias indexadas en el conjunto  $\mathcal{T}$

$$\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}} := \{X(t) | t \in \mathcal{T}\} \quad (1.40)$$

**Definición 1.29.** Si en un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  ocurre que  $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$ , se dice que es un **proceso estocástico en  $\mathbb{R}$** . Por notación, el índice  $t$  es referido como **tiempo**, mientras que  $\mathcal{T}$  será el conjunto de **tiempos admisibles**.

Por simplicidad sobre las condiciones del presente trabajo, sólo se trabajará con dos familias de procesos estocásticos en  $\mathbb{R}$ : si  $\mathcal{T}$  es un intervalo o si es parte de una *malla* de puntos equiespaciados. La primera familia se reserva para modelar las señales electrofisiológicas per se, mientras que el segundo se usa para modelar los registros de estas mismas señales. La distinción se debe a la naturaleza puntual del proceso de registro

**Definición 1.30.** Se dice que un proceso estocástico en  $\mathbb{R}$  es a **tiempo continuo** si existen  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tales que

$$\mathcal{T} = (a, b) \quad (1.41)$$

Así mismo, se dice que un proceso estocástico en  $\mathbb{R}$  es a **tiempo discreto** si existen  $t_0, \Delta_X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  tales que

$$\mathcal{T} = \{t_0 + t \in \mathbb{R} | t \cdot \Delta_t \in \mathbb{Z}\} \quad (1.42)$$

Por notación,  $\Delta_X$  es referida como *frecuencia de muestreo*.

Conviene destacar que el nombre *frecuencia de muestreo* hace referencia al proceso de registro, que algunos autores usan como equivalente a *muestreo*; esta terminología entra claramente en conflicto con las muestras de una variable aleatoria. En lo siguiente se evita llamar muestreo al proceso de registro, pero se conservará el término *frecuencia de muestro*.

Cabe mencionar una cuestión similar con los términos *tiempo continuo* y *tiempo discreto*; cabe resaltar que no guardan ninguna analogía con las variables aleatorias discretas y continuas, ni con los espectro de potencias puramente continuos o puramente discretos (ver más adelante ?). El uso de estos términos se debe principalmente a que se encuentran ampliamente extendidos en la literatura sobre análisis de señales.

Los elementos que componen a un proceso estocástico serán referidos como:  
 $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  Todo el proceso

- |            |                                                                         |
|------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $X(t)$     | Una de las variable aleatoria que componen al proceso, en el tiempo $t$ |
| $x(t)$     | Una realización de $X(t)$                                               |
| $F_{X(t)}$ | FPA para $X(t)$                                                         |

La estacionariedad es un indicativo de la *homogeneidad* de un proceso; un proceso *muy* estacionario sería aquél cuya variable aleatoria que tiene distribuciones conjuntas que no cambian con el tiempo. La definición 1.31 representa con exactitud tales requerimientos, pero se le considera *innecesariamente fuerte*; una definición común es 1.32.

**Definición 1.31** (Estacionariedad fuerte). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice fuertemente estacionario si para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  y cualquier  $\tau$  tal que  $t_i + \tau \in \mathcal{T}$ , se cumple que*

$$F_{[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]} \equiv F_{[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)]}$$

Donde  $F_{[v_1, v_2, \dots, v_N]}$  es la FPA conjunta para el vector  $[v_1, v_2, \dots, v_N]$

**Definición 1.32** (Estacionariedad de orden  $m$ ). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice estacionario de orden  $m$  si, para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  y cualquier  $\tau$  tal que  $t_i + \tau \in \mathcal{T}$ , se cumple que*

$$\mathbb{E}[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2)\cdots X^{m_n}(t_n)] = \mathbb{E}[X^{m_1}(t_1 + \tau)X^{m_2}(t_2 + \tau)\cdots X^{m_n}(t_n + \tau)]$$

para cualesquiera enteros  $m_1, m_2, \dots, m_n$  tales que  $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq m$

Cabe mencionar que la definición 1.32 no es equivalente a la definición 1.31, ni aún cuando  $m \rightarrow \infty$ ; sin embargo permite asegurar que los *momentos* ( $E[X^k]$  para algún  $k$ ) del proceso sean invariantes en el tiempo, y éstos suelen encontrarse asociados a cantidades físicas.

Como un ejemplo muy particular conviene destacar la energía, que suele ser asociada con el segundo momento (definición 1.43). Dicha conexión motiva a escoger una definición de estacionariedad que permita analizar la energía del proceso: la estacionariedad débil.

**Definición 1.33** (Estacionariedad débil). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice débilmente estacionario si existen constantes  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  y una función  $R : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tales que, para cualesquiera  $t, s \in T$  se cumple*

- $E[X(t)] = \mu$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = R(s - t)$

**Proposición 1.10.** *Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si es estacionario de orden 2.*

La proposición anterior deja en claro que la estacionariedad débil puede entenderse como una *estabilidad* en los momentos conjuntos de orden al menos dos, condición suficiente para trabajar con la media y la varianza del proceso. Sin embargo, en ocasiones se requerirán condiciones más fuertes sobre los procesos. Como ejemplo, cuando se quiere obtener la varianza para un estimador del espectro de potencias, se necesita que la serie sea estacionaria de orden 4.

En el marco del modelo de series electrofisiológicas, conviene suponer que los registros corresponden a procesos a tiempo continuo que son continuos de alguna forma; se ha elegido la continuidad en media cuadrática.

Cuando una señal electrofisiológica se modela como un proceso estocástico, es necesario suponer que su media y varianza son finitas en todo momento. Esto se debe a que existen umbrales *naturales* en los que ocurren las mediciones, fuera de los cuales la vida misma es imposible; este comentario aplica también sobre la energía

dentro del sistema. Más aún, la actividad eléctrica cerebral y muscular presentan una actividad característica del estado de reposo (*actividad basal*) de la cual no se alejan mucho el resto del tiempo; esta suerte de media intuitiva es referida como *línea base*, y se refleja dentro del modelado con la insistencia heurística de tratar a los procesos como si tuvieran media cero.

**Observación 1.1.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso débilmente estacionario y  $R$  su función de autocovarianza. Si  $R$  es continua en 0 entonces es continua en todo  $\mathbb{R}$ .*

**Definición 1.34** (Continuidad estocástica en media cuadrática). *Un proceso a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática, en un tiempo admisible  $t_0$  si*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} [(X(t) - X(t_0))^2] = 0$$

**Proposición 1.11.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario, y sea  $R$  su función de autocovarianza. El proceso es estocásticamente continuo si y sólo si  $R$  es continua en 0.*

## 1.6. Transformada de Fourier

Para exponer formalmente lo que es la transformada de Fourier, conviene mencionar los espacios de las **series  $p$ -sumables** ( $\ell^p$ ), y las **funciones  $p$ -integrables** sobre un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  ( $L_I^p$ ).

$$\begin{aligned} \ell^p &:= \left\{ s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^p < \infty \right\} \\ L_I^p &:= \left\{ S : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |S(t)|^p dt < \infty \right\} \end{aligned}$$

Estos conjuntos admiten las operaciones suma (+), producto ( $\cdot$ ) y multiplicación por escalares de la manera usual. Para el caso particular  $p = 2$ , los conjuntos  $\ell^2$  y

$L_I^2$  admiten los siguientes productos internos:

$$\begin{aligned}\langle s, z \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(n)} \\ \langle S, Z \rangle &= \int_I S(t) \overline{Z(t)} dt\end{aligned}$$

Usando dichos productos internos, junto con las normas y métricas que inducen, los conjuntos  $\ell^2$  y  $L_I^2$  tienen estructura de *espacio de Hilbert*.

Las definiciones anteriores revelan cómo  $\ell^2$  y  $L_I^2$  son *muy* parecidos, luego entonces se puede definir la transformada de Fourier como una conexión natural entre ellos.

**Definición 1.35** (Serie de Fourier). *Sea  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función periódica con periodo  $2T$  y tal que  $S \in L_{[-T,T]}^2$ . Se dice que  $A$  es la serie de Fourier para  $S$  si satisface*

$$A(n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t) e^{-i|n|t/2T} dt$$

**Definición 1.36** (Transformada de Fourier). *Sean  $S$  y  $A$  como en la definición 1.35. Se le llama transformada de Fourier a la función  $\mathcal{F}_T : L_{[-T,T]}^2 \rightarrow \ell^2 : S \mapsto A$*

Puede interpretarse a  $A$  como las *coordenadas* de  $S$  en  $L_{[-T,T]}^2$ , usando una base de funciones ortonormales  $\{e^{i|n|t/2T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ; esta base en particular es conocida como la **base de Fourier**. Cabe mencionar las siguientes propiedades de  $\mathcal{F}_T$

- Es lineal,  $\mathcal{F}_T[cS + Z] = c\mathcal{F}_T[S] + \mathcal{F}_T[Z]$
- **No** es invertible, aunque se le suele definir una pseudoinversa como

$$\mathcal{F}_T^{\text{inv}} : \ell^2 \rightarrow L_{[-T,T]}^2 : A \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n) e^{i|n|t/2T}$$

Se define, de manera pragmática, la **energía disipada** y la **potencia** de una función  $S$  en un intervalo  $[a, b]$  como

$$\begin{aligned}\text{energía}[S]_{[a,b]} &= \int_a^b |S(t)|^2 dt \\ \text{potencia}[S]_{[a,b]} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b |S(t)|^2 dt\end{aligned}\tag{1.43}$$

Es evidente que la energía y potencia están relacionadas a la norma en  $L^2_{[-T,T]}$  inducida por su producto interno. Dicha relación junto a las propiedades *agradables* de  $\mathcal{F}_T$  pueden ser usadas para conectar la energía con la norma en  $\ell^2$  (teorema 1.3): la energía disipada por una función equivale a la suma de las energías disipada por cada una de sus *componentes* en la base de Fourier. Conviene, entonces, definir una función que *desglose* estos *aportes*.

**Teorema 1.3** (Parseval). *Sea  $S \in L^2_{[-T,T]}$ , y sea  $A = \mathcal{F}[S]$ . Se cumple que*

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2$$

Un elemento que será de crucial importancia en el desarrollo posterior es la **convolución** (\*), una tercera operación binaria en estos espacios y definida como

$$\begin{aligned} [s * z](\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau - n)} \\ [S * Z](\tau) &= \int_I S(t) \overline{Z(\tau - t)} \end{aligned}$$

donde  $\bar{c}$  es el conjugado complejo de  $c$ .

**Teorema 1.4.** *Sean  $f, g \in \ell^2$ , las cuales poseen una transformada de Fourier de la forma*

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\ G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt \end{aligned}$$

*Entonces*

$$F(\omega) \overline{G(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt \quad (1.44)$$

*donde*

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) du \quad (1.45)$$

*Demostración.* Nótese que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(u-t) du \right] dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u-t)} g(u-t) du \right] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \overline{G(\omega)} du \\
&= \overline{G(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) du \\
&= \overline{G(\omega)} F(\omega)
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
[s * z](\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau-n)} \\
[S * Z](\tau) &= \int_I S(t) \overline{Z(\tau-t)} dt
\end{aligned}$$

**Teorema 1.5.** COROLARIO. Usando  $f \equiv g$  en el teorema anterior

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad (1.46)$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-t) du \quad (1.47)$$

## 1.7. Otros resultados importantes

Los siguientes teoremas y proposiciones se refieren a propiedades únicamente de los objetos descritos en el capítulo. Aunque no son una consecuencia clara de los resultados expuestos anteriormente, son una base importante de algunos resultados que se expondrán en capítulos posteriores.

El teorema de Isserlis es una identidad relativamente poco conocida sobre los

cuartos momentos de una distribución multinormal; el caso particular de cuatro variables será usado para calcular la covarianza de algunos estimadores del espectro de potencias.

**Proposición 1.12.** *Sea  $g$  una función cuando menos dos veces derivable cuyo dominio es  $\mathcal{D}_g$ , y sea  $X$  una variable aleatoria real tal que  $P(X \notin \mathcal{D}) = 0$ . Pueden usarse las siguientes aproximaciones*

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx g(\mathbb{E}[X]) \quad (1.48)$$

$$\text{Var}(g(X)) \approx \text{Var}(X) [g'(\mathbb{E}[X])]^{-2} \quad (1.49)$$

*Demostración.* Usando polinomio de Taylor de grado 2 para  $g$ , alrededor de  $\mathbb{E}[X]$  y evaluada en  $X$

$$g(X) = g(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X]) g'(\mathbb{E}[X]) + \frac{(X - \mathbb{E}[X])^2}{2} g''(\xi) \quad (1.50)$$

donde la variable aleatoria  $\xi$  satisface  $|\xi| \leq |X - \mathbb{E}[X]|$ . La aproximación, con una obvia pérdida, consiste en considerar que  $\frac{1}{2} (X - \mathbb{E}[X])^2 g''(\xi) \approx 0$ .

$$g(X) \approx g(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X]) g'(\mathbb{E}[X]) \quad (1.51)$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X)] &\approx \mathbb{E}[g(\mathbb{E}[X])] + \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X]) g'(\mathbb{E}[X])] \\ &= g(\mathbb{E}[X]) \end{aligned}$$

Lo cual consiste en la primera parte del resultado. Por otro lado, se elevan ambos lados al cuadrado

$$\begin{aligned} [g(X)]^2 &\approx [g(\mathbb{E}[X])]^2 + 2g(\mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X]) g'(\mathbb{E}[X]) \\ &\quad + (X - \mathbb{E}[X])^2 [g'(\mathbb{E}[X])]^2 \end{aligned} \quad (1.52)$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [[g(X)]^2] &\approx \mathbb{E} [[g(\mathbb{E}[X])]^2] + 2g(\mathbb{E}[X])\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]g'(\mathbb{E}[X]) \\ &\quad + \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}[X])^2] [g'(\mathbb{E}[X])]^2 \\ &= [g(\mathbb{E}[X])]^2 + \text{Var}(X)[g'(\mathbb{E}[X])]^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\text{Var}(g(X)) = \mathbb{E} [[g(X)]^2] - [g(\mathbb{E}[X])]^2 \approx \text{Var}(X)[g'(\mathbb{E}[X])]^2 \quad (1.53)$$

de donde se sigue la segunda parte del resultado.  $\square$

**Proposición 1.13.** *COROLARIO. Si se usa el teorema anterior con  $g = \log$  se obtiene*

$$\mathbb{E} [\log(X)] \approx \log(\mathbb{E}[X]) \quad (1.54)$$

$$\text{Var}(\log(X)) \approx \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^2} \quad (1.55)$$

**Definición 1.37.** *Se dice que un vector aleatorio  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$  sigue una distribución multinormal si su función de densidad conjunta tiene la forma*

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |C|}} \exp\left(-\frac{\vec{x} C^{-1} \vec{x}^\top}{2}\right) \quad (1.56)$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ . El vector  $\mu \in \mathbb{R}^d$  será referido como vector de medias, y la matriz  $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$  como matriz de covarianza.

**Teorema 1.6** (Isserlis). *Sea  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  un vector aleatorio siguiendo una distribución multinormal con media cero y matriz de covarianza finita. Se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3] \quad (1.57)$$

**Proposición 1.14.** *Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita. Se define un producto interno entre dos variables aleatorias arbitrarias,*

$U$  y  $V$ , como

$$\langle U, V \rangle := E[U, \bar{V}] \quad (1.58)$$

Usando la suma y productos usuales de variables aleatorias, junto al producto interno descrito, el espacio  $\mathcal{R}$  tiene la estructura de espacio de Hilbert.

**Proposición 1.15.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso débilmente estacionario y  $R$  su función de autocorrelación. Se cumple que  $R$  es una función positiva definida.*

**Teorema 1.7** (Bochner). *Sea  $f$  una función real arbitraria. Una condición suficiente y necesaria para que  $f$  sea definida positiva es que exista una función real  $F$  monótonamente creciente, continua por la derecha y acotada tal que puede escribirse*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (1.59)$$



# Capítulo 2

## Espectro de potencias

Existe una larga tradición para entender y modelar las señales electrofisiológicas en términos de *ondas y frecuencias*, ya que fundamentalmente son fenómenos eléctricos [27]. En este capítulo se expone el enfoque *usual* en cuanto a modelar las señales electrofisiológicas como procesos estocásticos a los cuales se puede definir un *espectro de potencias*. El espectro de potencias es entendido como una generalización para el módulo de la transformada de Fourier; conserva algunas de sus propiedades, como el ser una norma inducida por un producto interno, así como la interpretación asociada como distribución de *energía*.

En la sección 2.1 se define el espectro de potencias para procesos estocásticos débilmente estacionarios y se establecen condiciones de existencia; la discusión sobre unicidad se ubica en la sección 2.2, donde se define una forma de representar al proceso en términos de su espectro. Finalmente, la sección 2.5 trata sobre la estimación del espectro de un proceso a partir de una realización del mismo; se aborda el enfoque de obtener una versión *suavizada* del espectro en aras de que los estimadores sean consistentes.

Un hecho que conviene reiterar es que todos los temas son expuestos dos veces: para procesos estocásticos a tiempo continuo y para aquellos a tiempo discreto; Cabe mencionar que en este capítulo se trata únicamente el caso de procesos estocásticos *débilmente estacionarios*, mientras que en el siguiente se explora una familia más general de procesos estocásticos. Dentro del contexto global del presente trabajo, el capítulo entero pudiera etiquetarse como el estudio de un caso particular salvo por simplicidad expositiva.

## 2.1. Función de densidad espectral

La forma más *natural* de definir un espectro de potencias para un proceso estacionario es a través de la transformada de Fourier de sus realizaciones. Tal enfoque no funciona en general, pues no se puede garantizar que las realizaciones arbitrarias admitan una transformada de Fourier (ni aún de Fourier-Stieltjes). Se define entonces el espectro en base a un límite de subcolecciones de la realización, de modo que éstas sí admitan una transformada de Fourier.

**Definición 2.1** (Función de densidad espectral, tiempo continuo). *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso estacionario a tiempo continuo. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] \quad (2.1)$$

[? ejemplos: ruido rosa esta bien definido, proceso oscilatorio no esta definido, ruido blanco no esta definido]

**Definición 2.2** (Función de densidad espectral, tiempo discreto). *Sea  $\{X(t)\}_{t/\Delta_t \in \mathbb{Z}}$  un proceso estacionario a tiempo discreto. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2N} \left| \sum_{n=-N}^N X(n\Delta_t) e^{-i\omega n\Delta_t} \right|^2 \right] \quad (2.2)$$

## 2.2. Representación espectral

**Teorema 2.1.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso continuo de media cero, débilmente estacionario, y que admite una función de densidad espectral  $h$ , sea  $R$  su función de autocovarianza. Entonces*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

*Demostración.* Usando que  $h = \lim_{T \rightarrow \infty} G_T$ , nótese que

$$\begin{aligned}|G_T(\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] d\tau \\&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] d\tau\end{aligned}$$

Esta integral puede verse como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la serie truncada,  $\widehat{R}_T$

$$\begin{aligned}\widehat{R}_T(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \\&= \begin{cases} \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T X(u) X(u - |\tau|) du & , |\tau| \leq T \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases}\end{aligned}$$

Así entonces

$$\begin{aligned}h(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2T} |G_T(\omega)|^2 \right] \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{2T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{R}_T(\tau) d\tau \right] \\&= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} E \left[ \widehat{R}_T(\tau) \right] d\tau\end{aligned}$$

Para esto, si  $|\tau| \leq 2T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\widehat{R}_T(\tau)] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T X(u) X(u - \tau) du \right] \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T \mathbb{E} [X(u) X(u - \tau)] du \\
&= \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T R(\tau) du \\
&= \frac{1}{2T} \left( 1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) R(\tau)
\end{aligned}$$

pero si  $|\tau| > 2T$  entonces  $\widehat{R}_T = 0$ . Luego entonces

$$\begin{aligned}
h(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{i\omega t} \left( 1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) R(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

con

$$g_T = \begin{cases} 1 - |\tau|/2T & , |\tau| \leq 2T \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para establecer el límite anterior nótese que para cualesquiera  $\tau, T$  se cumple que  $0 \leq g_\tau \leq 1$ , entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g_T(\tau)| |R(\tau)| d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau
\end{aligned}$$

Para cada  $\omega$ , el módulo de  $\int_{-T}^T e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau$  es monótonamente creciente y acotado, luego entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se

tiene que

$$\begin{aligned}
h(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) \right] R(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} R(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

□

Es posible definir una **función de espectro integrado**,  $H$ , como

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 \tau} - e^{i\omega_1 \tau}}{i\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Usando que  $h$  es una función simétrica tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = \sigma_X^2$ , entonces puede escribirse

$$H(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_1 \tau} - 1}{i\tau} R(\tau) d\tau = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

Conviene remarcar que el teorema 2.1 sólo aplica si el proceso admite una función de densidad espectral, y en consecuencia no es claro si el espectro integrado queda bien definido para procesos que no admiten una densidad espectral. Por ejemplo, considérese el proceso  $P$  definido como

El siguiente teorema permite establecer condiciones generales para las cuales se puede definir un espectro de potencias para un proceso estacionario.

**Teorema 2.2** (Wiener-Khintchine). *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función  $F$  que tenga las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Como notación, el factor  $dF$  será referido como la función de espectro integrado normalizado para el proceso.

Una vez definido y probada la existencia de la función de espectro integrado normalizado  $dF$ , se define la **función de espectro integrado**  $dH$  (sin el adjetivo *normalizado*) como  $dH := \sigma_X^2 dF$ .

Una vez establecidas las condiciones de existencia para el espectro de potencias de un proceso débilmente estacionario, una pregunta muy natural es sobre la unicidad. Cuando se discutió la transformada de Fourier para funciones en  $L^2$ , se dejó en claro que es un operador invertible salvo por su núcleo (definición ?).

Se mostró que la transformada de Fourier puede ser parameterizada en módulo y argumento, siendo el primero es equivalente (salvo una función invertible) al espectro. El espectro de un proceso estacionario fue definido como

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|G_T(\omega)|^2]$$

$$G_T(\omega) = \int_{-T}^T e^{i\omega t} X(t) dt$$

la componente  $G_T$  cumple intuitivamente el papel de la transformada de Fourier, pero es omitida para demostrar más fácilmente la existencia del espectro  $h$ . Contemplando la parametrización de la transformada de Fourier, ¿puede definirse algo equivalente al argumento para un proceso estacionario? [? mejorar redacción]

**Teorema 2.3.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Existe un proceso ortogonal  $\{Z(\omega)\}$  tal que, para todo tiempo  $\omega$  admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso  $\{Z(t)\}$  tiene las siguientes propiedades para todo  $\omega$

- $\mathbb{E}[dZ(\omega)] = 0$

- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde  $dH(\omega)$  el espectro integrado de  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

*Demostración.* Se mostró anteriormente que  $\mathcal{R}$ , el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita, tiene la estructura de espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle U, V \rangle := \text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}[U, \bar{V}] \quad (2.7)$$

Ahora bien, un proceso débilmente estacionario  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  puede verse como una curva en  $\mathcal{R}$  indexada por  $t \in \mathcal{T}$ . Por el teorema de Winer-Khintchine, existe un proceso ortogonal  $dH$  tal que puede escribirse

$$\langle X(t), X(s) \rangle = R(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (2.8)$$

De manera más general, puede hablarse de una familia de funciones  $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  (anteriormente se usó  $\phi_t(\omega) = e^{i\omega t}$ ) y escribir

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) \overline{\phi_s(\omega)} dH(\omega) \quad (2.9)$$

Usando la familia de funciones  $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  puede construirse un segundo espacio de Hilbert,  $\mathcal{H}_\phi$ , como las combinaciones lineales de estas funciones. A este segundo espacio se le define el producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) \quad (2.10)$$

Posteriormente se define un mapeo  $M : \mathcal{H}_\phi \rightarrow \mathcal{R}$  como

$$M[\phi_t] := X(t) \quad (2.11)$$

el cual se extiende linealmente para cualesquiera coeficientes  $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$  y tiempos admisibles  $t_1, t_2, \dots \in \mathcal{T}$

$$M \left[ \sum_i c_i \phi_{t_i} \right] = \sum_i c_i M[\phi_{t_i}] \quad (2.12)$$

Trivialmente,  $M$  conserva productos internos; basta notar que

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H \quad (2.13)$$

Ahora, para trabajar con las funciones  $\phi$  conviene descomponerlas en una base más *sencilla*, como límite de funciones simples. Para ello, se define una función indicadora

$$I(\omega; \omega_0, \omega_f) := \begin{cases} 1 & , \omega_0 \leq \omega < \omega_f \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.14)$$

Luego, sea  $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$  una partición del intervalo  $[-n, n]$ , con  $n \gg N$ . Entonces, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\phi_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[ \inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega) \right] \quad (2.15)$$

Usando tal representación para las funciones  $\phi$ 's, se define a  $Z$  como

$$Z(\omega_f) - Z(\omega_0) = M[I(\omega; \omega_f, \omega_0)] \quad (2.16)$$

Luego entonces, aplicando  $M$  a ambos lados de la expresión 2.15 se obtiene

$$\begin{aligned} M[\phi_t(\omega)] &= M \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[ \inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega) \right] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N M[I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i)] \left[ \inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (Z(\omega_i) - Z(\omega_{i-1})) \left[ \inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \end{aligned}$$

El resultado que se busca queda establecido porque  $M[\phi_t] = X(t)$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \quad (2.17)$$

□

### 2.2.1. Representación de procesos a tiempo discreto

La existencia de espectros para procesos a tiempo discreto es dada por el teorema

**Teorema 2.4** (Wold). *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  débilmente estacionario es que exista una función  $F$  con las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\pi) = 0$
- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

*Demostración.* Por simplicidad, supóngase que  $\Delta_X = 1$ . A tiempo discreto, la función de autocovarianza adquiere la forma de una secuencia  $\{R(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}$ . Se define una función  $R_C$  que es igual a  $R$  pero cuyo dominio es  $\mathbb{R}$ , de la forma

$$R_C(\tau) = (1 - \tau + \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor) + (s - \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor + 1) \quad (2.18)$$

Se demuestra en Priestley 1963 [?] que existe un proceso estacionario cuya función de autovarianza es  $R_C$ , luego entonces por el teorema 2.2 existe una función de distribución  $Q$  tal que

$$R_C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \quad (2.19)$$

Dado que  $R$  y  $R_C$  son iguales cuando  $\tau$  es entero, se puede considerar la siguiente

manipulación con  $\tau \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{2s+1\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2\pi s)\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente se puede definir a  $F$ , la función de densidad descrita por el teorema, usando

$$dF(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \quad (2.20)$$

El que  $F$  sea monótonamente se deduce de que  $Q$  lo es. Como  $dQ$  es simétrica, puede definirse convenientemente que  $F(-\pi) = 0$  y  $F(\pi) = 1$  con base a que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dQ(\omega) = 1 \quad (2.21)$$

□

En virtud del teorema de Wold, se puede obtener una variante del teorema 2.3 para procesos a tiempo discreto cambiando el intervalo de integración.

**Teorema 2.5.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo discreto, débilmente estacionario y de media 0. Existe un proceso ortogonal  $\{Z(\omega)\}$  tal que, para todo tiempo  $\omega$  admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso  $\{Z(t)\}$  tiene las siguientes propiedades para todo  $\omega$

- $\mathbb{E}[dZ(\omega)] = 0$
- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde  $dH(\omega)$  el espectro integrado de  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

La demostración es completamente análoga, reemplazando el teorema de Winer-Khintchine por el de Wold. Como notación, las representaciones en los teoremas 2.3 y 2.5 son referidas como **representaciones de Wold-Cramér**.

## 2.3. Efecto alias

Hasta ahora se han tratado por separado los procesos a tiempo discreto y a tiempo continuo. Una vez expuestos algunos resultados importantes, se procede a explorar la familia de los procesos a tiempo discreto generados como subcolección de algún proceso a tiempo continuo. Dicha familia se vuelve importante porque se ha decidido modelar a las señales electrofisiológicas como procesos a tiempo continuo, pero sólo se pueden obtener registros de ellas a tiempo discreto.

Este tópico es relevante desde el punto de vista práctico, ya que existe una amplia variedad de condiciones técnicas bajo las cuales se suelen efectuar los registros. La AASM establece un mínimo de 128 puntos por segundo (Hz) para registrar el polisomnograma, pero la frecuencia de muestreo usualmente es decidida dependiendo del fenómeno a observar y las características del aparato de registro a usarse. Siguiendo esta idea, conviene hablar del posible efecto de obtener registros con una mayor o menor cantidad de puntos por unidad de tiempo

Considérese un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario,  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ , y sea  $\Delta_t \in \mathbb{R}$  arbitrario. Se construye al proceso  $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$Y(n) = X(n\Delta_t) \quad (2.22)$$

En virtud del teorema 2.3,  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.23)$$

Luego entonces puede reescribirse

$$\begin{aligned}
Y(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{(2k-1)\pi/\Delta_t}^{(2k+1)\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t})n \Delta_t} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Con base a lo anterior, puede definirse para  $\omega \in [-\pi/\Delta_t, \pi/\Delta_t]$

$$dZ_Y(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \tag{2.25}$$

En base al teorema 2.3, se define para  $|\omega| \leq \pi/\Delta_t$

$$\begin{aligned}
dH_Y(\omega) &= E[|dZ_Y(\omega)|^2] \\
&= E\left[\left|\sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)\right|^2\right] \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} E[|dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)|^2] \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} dH_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

En el segundo paso se usa que  $\{dZ_X\}$  es un proceso ortogonal de media cero. Antes de poder declarar que  $dH_Y$  es el espectro integrado del proceso discretizado, conviene hacer el cambio de variable  $\omega^* := \omega \Delta_t$

$$\begin{aligned}
dH_Y(\omega^*) &= dH_Y(\omega \Delta_t) \frac{d\omega^*}{d\omega} \\
&= \frac{1}{\Delta_t} dH_Y(\omega \Delta_t)
\end{aligned}$$

donde  $|\omega^*| \leq \pi$ . Si  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  posee un espectro puramente continuo –de manera

equivalentemente, si  $dH_X$  es absolutamente continua– entonces puede escribirse

$$h_Y(\omega^*) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \quad (2.27)$$

con  $|\omega| \leq \pi$ . Así entonces  $h_Y$  puede entenderse como una versión *colapsada* de  $h_X$ , fenómeno conocido como **efecto alias**.

## 2.4. Filtros lineales

**Definición 2.3.** Se dice que un operador  $\mathcal{L}_g : L^2 \rightarrow L^2$  es un **filtro lineal** si puede escribirse de la forma

$$\mathcal{L}_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du \quad (2.28)$$

para alguna función  $g \in L^2$  que es referida como **función de respuesta**.

Naturalmente, los filtros lineales son funciones lineales. Son continuos en la identidad aditiva de  $L^2$ , y por tanto son continuos en todo  $L^2$ . Como los filtros lineales son funciones lineales y continuas, entonces son funciones medibles bajo la medida de Lebesgue. Se puede hablar de la composición de un filtro lineal  $\mathcal{L}_g$  con un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ , es decir, definir un proceso de la forma

$$Y(t) = \mathcal{L}_g[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \quad (2.29)$$

Los procesos generados como en 2.29, usualmente referidos como *procesos filtrados*, son comunes en el análisis de señales. En este trabajo serán usados para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias. Para ello, conviene describir la relación entre el espectro de un proceso y el de su *versión filtrada*.

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario. Usando el teorema de representación espectral [?], puede escribirse

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.30)$$

Ahora bien, escribiendo al proceso  $\{Y(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} dZ_X(\omega) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} du \right] dZ_X(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Gamma(\omega) dZ_X(\omega) \end{aligned}$$

donde  $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} du$  será referida como la **función de transferencia** asociada al filtro. Luego entonces

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega) &= E [|dZ_Y(\omega)|^2] \\ &= E [|\Gamma(\omega) dZ_X(\omega)|^2] \\ &= |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega) \end{aligned}$$

Se concluye que si ambos procesos tengan FDE bien definidas, se cumple que

$$h_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 h_X(\omega) \quad (2.31)$$

Conviene notar que la relación 2.31 era de esperarse como una generalización del teorema [fourier ?].

#### 2.4.1. Filtros de banda

Como se mencionó, los filtros lineales tienen múltiples aplicaciones en el análisis de señales, además de la estimación del espectro de potencias. Conviene destacar, aún como comentario, la familia de filtros lineales cuya función de transferencia es de la forma

$$\Gamma_{\omega_0}^*(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.32)$$

este tipo de filtros son referidos como *filtros pasa bajas*. Análogamente, un *filtro pasa altas* tiene una la misma forma cambiando la condición por  $|\omega| \geq \omega_0$ .

Cuando se aplica un filtro pasa bajas a un proceso, el efecto producido suele

interpretarse como la *eliminación de los componentes de frecuencia* mayores a  $\omega_0$ . Tal efecto es deseable si, por ejemplo, se desea estudiar la actividad alfa en el lóbulo frontal (7–12 Hz) pero se espera la interferencia de actividad muscular en el rostro (típicamente  $> 100$  Hz); bastaría construir un filtro pasabajas con  $\omega_0 = 100$  Hz.

[?] escribir la forma que debería tener  $g$

Este tipo de pre-procesamiento garantiza, por ejemplo, que en los registros no hay ruido inducido por la corriente eléctrica (120 Hz); en general, el uso de filtros pasa bajas y pasa bajas garantiza heurísticamente la eliminación de una variedad de ruidos comunes. En el presente texto no se exploran con más detalles este tipo de filtros y sus efectos, el lector interesado puede dirigirse al libro “*Medical Instrumentation. Applications and Design*” por John G. Webster [76].

## 2.5. Estimadores

El objetivo de esta sección es calcular el espectro de potencias de un proceso a partir de una realización del mismo; en el contexto del presente trabajo, las palabras *observación* y *registro* serán usadas como sinónimos. Con vista en la expresión 2.2, un estimador *natural* para el espectro sería el *periodograma*.

**Definición 2.4.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso débilmente estacionario a tiempo discreto, cuyo espectro es puramente continuo y cuya frecuencia de muestreo es  $\Delta_X = 1$ . Sea  $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$  una realización de longitud  $N$ . El **periodograma**,  $I_N$ , es un estimador definido como*

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (2.33)$$

**Proposición 2.1.** *El periodograma ( $I_N$ ) es un estimador insesgado para el espectro de potencias ( $h$ ), es decir*

$$\mathbb{E}[I_N(\omega)] = h(\omega) \quad (2.34)$$

**Proposición 2.2.** *La familia de estimadores  $\{I_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  satisface que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = [h(\omega)]^2 \quad (2.35)$$

Se puede demostrar que  $E[I_N(\omega)] = h(\omega)$ , de modo que es un estimador **insesgado**. Sin embargo, también se demuestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = (h(\omega))^2$$

de modo que es un estimador **inconsistente**, lo cual lo descalifica para usarse en la práctica. Para entender por qué el periodograma es inconsistente, conviene escribirlo como

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}^*(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.36)$$

donde  $\hat{R}^*$  es un estimador para la función de autocovarianza,  $R$ , definido como

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) \quad (2.37)$$

Así mismo, la misma expresión puede interpretarse como que el periodograma es una suma ponderada de los valores de  $\hat{R}^*$ ; mientras más grande es  $\tau$ , menos parejas de puntos cuya distancia es  $\tau$ , y entonces  $\hat{R}^*$  tiene mayor varianza cuanto mayor sea  $\tau$ .

Dado que la inconsistencia del periodograma es porque el periodograma es construido usando estimadores con varianza elevada, la solución natural es evitar tales componentes. Para ello, escójase una función de pesos,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , defínase

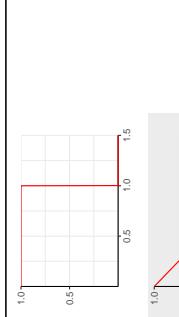
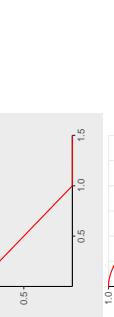
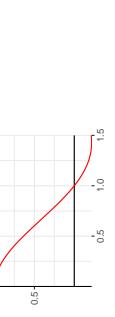
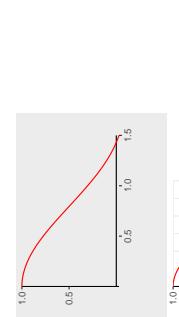
$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau) \hat{R}^*(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2.38)$$

Resulta ilustrativo reescribir a  $\hat{h}$  en términos del periodograma

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) \Gamma(\omega - \theta) d\theta$$

donde  $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} du$ . Se puede demostrar que este tipo de estimadores son asintóticamente insesgado y consistentes.

**Cuadro 2.1:** Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta)

Nombre	$k(u),  u  \leq \pi$	Bosquejo
Bartlett	1	
Fejér	$1 -  u $	
Daniell	$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{(\pi u)^2} \left[ \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \right]$	
Cosenoidal	$\cos(\pi u)$	

**Cuadro 2.2:** Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia)

Nombre	$K(\theta)$	Bosquejo
Bartlett	$\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\theta}$	
Fejer	$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right]^2$	
Daniell	$1/2\pi$ , si $ \theta  \leq \pi$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{4\pi} [1 - (\theta/\pi)]$ , si $ \theta  \leq \pi$	
Cosenoidal	$d$	

# Capítulo 3

## Espectro evolutivo

En esta sección se introduce el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no-estacionarios cuya estructura cambia lentamente en el tiempo. Esta definición en particular fue presentada por Maurice Priestley en 1965 [57]; la información del presente capítulo puede revisarse con mayor detalle en su libro “*Spectral Analysis and Time Series*” [58], particularmente en el capítulo 11.

Es importante mencionar que la sección 3.1 representa la parte central de este capítulo, describiendo un objeto matemático bien definido que lida con un problema que roza la vaguedad; es por ello que viene acompañado de una discusión que podría ser omitida dentro del contexto global del trabajo, pero que tiene repercusiones importantes en el uso práctico del espectro evolutivo. Por ejemplo, en la sección 3.2 se discute sobre las condiciones bajo las cuales es  *posible* estimar el espectro evolutivo del proceso, mientras que la sección 3.3 parte de tales condiciones para describir cómo efectuar la estimación.

Finalmente, en la sección 3.4 se describe una aplicación aparentemente menor del espectro evolutivo, pero que constituye una parte central en el presente trabajo: la detección de estacionariedad débil a partir del espectro evolutivo.

### 3.1. Definición del espectro evolutivo

Considérese un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  que, por simplicidad, tiene media cero y varianza finita en todo momento, es decir

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0, \quad \text{Var}(X^2(t)) < \infty$$

Se define el *núcleo de covarianza* para el proceso como

$$R(s, t) := \mathbb{E} \left[ \overline{X(t)} X(s) \right] \quad (3.1)$$

Conviene recordar el caso de un proceso estacionario, en el cual el núcleo de covarianza  $R(t, s)$  puede verse como función de la variable  $|t - s|$ , y en virtud del teorema de Winer-Khintchine acepta una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (3.2)$$

donde  $H$  es el espectro integrado del proceso y tiene las propiedades de una función de distribución sobre  $\mathbb{R}$ . Como consecuencia,  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.3)$$

donde  $Z$  es un proceso estocástico que satisface

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = dH(\omega_1)\delta(\omega_1, \omega_2) \quad (3.4)$$

En general, se espera tener una generalización que conserve las propiedades anteriores. Con vista a la ecuación 3.2, puede restringirse la atención a procesos no-estacionarios que acepten una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (3.5)$$

Para alguna medida  $\mu$  definida en  $\mathbb{R}$  y alguna familia de funciones  $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ ; debido a la interpretación que se le va a dar a este tipo de funciones, la variable  $t \in \mathbf{F}$  será referida como un índice. Una condición a satisfacer es que  $\text{Var}(X^2(t)) = R(t, t) < \infty$ , para lo cual cada  $\phi \in \mathbf{F}$  debe ser cuadrado integrable con respecto a  $\mu$ , es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\omega; t) d\mu(\omega) < \infty \quad (3.6)$$

Se puede demostrar t(4.11.12) que bajo estas condiciones el proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega; t) dZ(\omega) \quad (3.7)$$

donde el proceso  $Z$  satisface que

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = \mu(\omega_1)\delta(\omega_1, \omega_2) \quad (3.8)$$

Se puede demostrar (Parzen 1959) que si un proceso admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia de funciones  $\mathbf{F}$ , entonces tiene admite múltiples representaciones usando diferentes familias de funciones.

Para dar a estas representaciones la interpretación de espectro, conviene usar una familia de funciones que conserve algunas propiedades de los senos y cosenos; por ejemplo, las funciones oscilatorias

**Definición 3.1.** Una función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice **oscilatoria** si admite una representación de la forma

$$\phi(t) = A(t)e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

donde  $A$  es de la forma

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dK(\omega) \quad (3.10)$$

y donde  $|dK(\omega)|$  tiene un único máximo global en  $\omega = 0$

Si una función  $\phi$  es oscilatoria como en la definición 3.1, entonces puede entenderse como una función senoidal *modulada* por una función  $A$ ; no se permite que la función  $A$  sea predominantemente periódica.

Como se mencionó, las expresiones 3.5 y 3.7 pueden ser interpretadas como espectro si se usa una familia  $\mathbf{F}$  de funciones oscilatorias.

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(\omega; s)} A(\omega; t) e^{i\omega(t-s)} d\mu(\omega) \quad (3.11)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega; t) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.12)$$

**Definición 3.2.** Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso oscilatorio y  $\mathbf{F}$  una familia de funciones oscilatorias de la forma  $\phi(\omega; t) = A(\omega; t)e^{i\omega t}$ . Sea  $\mu$  tal que satisface las condiciones

anteriores. Se define al **espectro evolutivo** del proceso respecto a la familia  $\mathbf{F}$  como

$$dH(t, \omega) := |A(\omega; t)|^2 d\mu(\omega) \quad (3.13)$$

**Proposición 3.1.** Si un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es débilmente estacionario, entonces su espectro de potencias  $h$  y su espectro evolutivo  $h^*$  satisfacen, para todo  $t \in \mathcal{T}$ , que

$$h^*(\omega, t) = h(\omega) \quad (3.14)$$

## 3.2. Estimación del espectro evolutivo

En el capítulo anterior se mostró un estimador consistente para el espectro de potencias de un proceso estacionario; dicho estimador usaba la transformada de Fourier discreta, *suavizada* por un filtro lineal (también referido como función ventana). El objetivo de esta sección es aclarar algunos teoremas que permitan usar una técnica similar, la cual requiere imponer algunas condiciones más fuertes que ser oscilatorios.

### 3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso oscilatorio, no necesariamente estacionario, y sea  $g \in L_I^2$ ; se construye al proceso  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  como<sup>1</sup>

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) du \quad (3.15)$$

Entonces puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.16)$$

donde  $\Gamma_t$  es la **función de transferencia generalizada** para  $g$  con respecto a la

---

<sup>1</sup>En el texto de Priestley se considera un filtro de la forma  $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) e^{-i\omega_0(t-u)} du$  para algún  $\omega_0$  constante. Por simplicidad se considera únicamente el caso  $\omega_0 = 0$

familia  $\mathbf{F}$ , y que es definida como

$$\Gamma_t(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du \quad (3.17)$$

Un caso particular muy interesante ocurre cuando  $A$ , como función de  $\omega$ , varía lentamente en comparación de  $g$ , la cual decrece rápidamente a 0; en tal caso podría decirse que  $\Gamma_\bullet \approx \Gamma$

**Definición 3.3.** Una familia de funciones  $\mathbf{F}$  se dice **semi-estacionaria** si, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| < \infty \quad (3.18)$$

En cuyo caso se define su **ancho de banda característico**

$$B_{\mathbf{F}} := \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| \right]^{-1} \quad (3.19)$$

**Definición 3.4.** Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in T}$  se dice **semi-estacionario** si admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia semi-estacionaria

**Definición 3.5.** Se dice que una función  $u$  es **pseudo- $\delta$  de orden  $\varepsilon$**  con respecto a la función  $v$  si, para cualquier  $k$  existe un  $\varepsilon << 1$  tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx \right| < \varepsilon \quad (3.20)$$

De manera similar, se define el **ancho de banda** para  $g$  como

$$B_g := \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \quad (3.21)$$

Supóngase que  $g$  está normalizada de modo que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| d\omega = 1 \quad (3.22)$$

con  $\Gamma$  la función de respuesta para  $g$ .

**Teorema 3.1.** Sea  $\mathbf{F}$  una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico

co  $B_{\mathbf{F}}$ , y sea  $g$  una función normalizada como en 3.22 y cuyo ancho de banda es  $B_g$ . Entonces, para cualesquiera  $t, \omega \in \mathbb{R}$  se cumple que  $e^{i\omega t}dK(\omega)$  es una función pseudo- $\delta$  de orden  $B_g/B_{\mathbf{F}}$  con respecto a  $g$

*Demostración.* Suponiendo que  $\Gamma$  sea una vez derivable, su expansión de Taylor alrededor de  $k$  es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\theta + k) dK(\omega) = \Gamma(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega)$$

para algún  $\nu \in (0, \theta)$ . Respecto al segundo sumando, puede observarse que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |\Gamma'(k + \nu)| |dK(\omega)| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] |dK(\omega)| \\ &\leq \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \end{aligned}$$

Usando la conexión entre  $g$  y  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} g(u) du \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{d\omega} e^{i\omega u} g(u) \right) du \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega u} g(u) du \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \\
&\leq \left[ \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} iue^{i\omega u} g(u) du \right| \right] B_{\mathbf{F}}^{-1} \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \right] \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} B_g
\end{aligned}$$

□

Con el teorema anterior a la mano se puede declarar formalmente la idea de que  $A$  varía más lentamente que  $g$

**Teorema 3.2.** *Sea  $\mathbf{F}$  una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico  $B_{\mathbf{F}}$ , sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario, y sea  $g$  un filtro normalizado como en 3.22 y cuya función de transferencia generalizada con respecto a  $\mathbf{F}$  es  $\Gamma_{\bullet}$ . Si  $g$  es elegida de tal modo que  $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$ , entonces para cualesquiera  $t, \omega$  se cumple que*

$$|\Gamma_t(\omega) - A(\omega; t)\Gamma(\omega)| < \varepsilon \quad (3.23)$$

*Demostración.* Por la mera definición de  $\Gamma_{\bullet}$  (expresión 3.17) se sabe que

$$\Gamma_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du$$

Si se sustituye a  $A$  en términos de  $dK$  (ver definición 3.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t-u)} dK(\theta) \right] e^{i\omega u} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\theta t} e^{i(\omega-\theta)u} dK(\theta) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i(\omega-\theta)u} du \right] dK(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta)
\end{aligned}$$

Usando el lema 3.1 junto al hecho que  $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$ , se puede escribir que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\
&= \left| \Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\
&= |\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) A(\omega; t)|
\end{aligned}$$

En el último renglón se ha reemplazado nuevamente a  $A$  en términos de  $dK$

**Teorema 3.3.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso semi-estacionario con ancho de banda característico  $B_X$ , sea  $g$  un filtro normalizado como en 3.22 y cuyo ancho de banda es  $B_g$  y cuya función de respuesta es  $\Gamma$ . Sea  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso definido como 3.16.*

*Sea  $\mathbf{F}^*$  una familia semi-estacionaria cuyo ancho de banda característico es  $B_X$  o es muy parecido a  $B_X$  (lo cual es posible por cómo se definió  $B_X$ ). Se cumple que*

$$\mathbb{E} [|Y(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 dH^*(\omega; t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.24)$$

donde  $H^*$  es el espectro integrado respecto a la familia  $\mathbf{F}^*$  y  $\mathcal{O}(\epsilon)$  es un término que puede hacerse arbitrariamente pequeño si  $B_g$  es suficientemente pequeño respecto a  $B_X$

*Demostración.* Usando la expresión 3.16 para este caso particular, puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) A^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \quad (3.25)$$

donde  $\omega_\bullet^*$ ,  $A^*$  y  $Z^*$  están definidos respecto a la familia  $\mathbf{F}^*$ . Nótese que, debido a que los  $dZ$ 's son ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \mathbb{E} \left[ \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \right] \\ &= \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Si se elige a  $g$  de modo que  $\frac{B_g}{B_X} < \varepsilon$ , en virtud del teorema 3.2 puede escribirse

$$\Gamma_t^*(\omega; t) = A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t) \quad (3.26)$$

con  $|R(\omega, t)| < \varepsilon$ . Luego entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) \overline{R(\omega; t)} d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

El cuarto sumando satisface claramente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) < \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^*(\omega) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.27)$$

Respecto al segundo sumando, nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) &< \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| |R(\omega; t)| d\mu^*(\omega) \\ &< \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Una cota similar puede hallarse para el tercer sumando. Falta demostrar que la cota permanece finita cuando  $B_g \rightarrow 0$ , lo cual debería lograrse definicendo el conjunto

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} \mid |\Gamma(\omega)| |A^*(\omega; t)| \leq 1\} \quad (3.28)$$

y luego, claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) = \int_{\Omega} \mu^*(\omega) + \int_{\Omega^C} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \quad (3.29)$$

el primer sumando es clarametne finito y no depende de  $g$ , mientras que el segundo debería ser finito [?] ya que  $\Gamma$  está normalizada.  $\square$

### 3.3. Estimador de doble ventana

Para esta sección se considera un proceso a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  y una muestra del mismo de longitud  $T$  (o equivalentemente un proceso  $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ ), suficientemente larga. El objetivo en esta sección es construir un estimador para el espectro evolutivo  $dH(\omega; t)$ . Por simplicidad, se supondrá que la medida  $\mu$  es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y entonces puede escribirse

$$h(\omega, t) := dH(\omega; t) \quad (3.30)$$

Para efectuar la estimación del espectro se hará uso del teorema 3.2, para lo cual se necesita un filtro  $g$  normalizado según 3.22 y cuyo anho de banda,  $B_g$ , satisface

$$B_g \ll B_X \ll T \quad (3.31)$$

Se construye entonces a  $U$ , una versión filtrada de  $X$  usando a  $g$

$$U(t) = \int_{t-T}^t g(u)X(t-u)du \quad (3.32)$$

Bajo la condición 3.31, la integral que define a  $U$  puede extenderse a todo  $\mathbb{R}$  sin cambiar mucho su valor (excepto cerca de 0 y  $T$ ), e incluso se llega a ser exacta si  $g$  es 0 fuera de un intervalo pequeño alrededor de 0. Entonces, en virtud del teorema 3.3 aplica de manera aproximada, y entonces se cumple que

$$\mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t)d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.33)$$

**Proposición 3.2.** *Dadas las condiciones, y si  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es un proceso normal cuyo que admite un espectro evolutivo uniformemente continuo, se tiene que*

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t)d\omega \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.34)$$

*Demostración.* Por conveniencia se obtendrá una expresión aproximada para la covarianza de  $U$ , a partir de la cual se deducirá su varianza. Para ello, por definición puede escribirse para  $t, s \in \mathcal{T}$  y  $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2) = \mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] - \mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] \mathbb{E} [|U(\lambda; s)|^2]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] &= \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\lambda}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\ &\quad \times \mathbb{E} [X(t-u)X(t-v)X(s-w)X(s-z)] dudvdwdz \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si para cada  $t$   $X(t)$  sigue una distribución normal, entonces en virtud del teorema 1.6 puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [X(t-u)X(t-v)X(t-w)X(t-z)] &= R(t-u, t-v)R(s-w, s-z) \\ &\quad + R(t-u, s-z)R(t-v, s-w) \\ &\quad + R(t-u, s-w)R(t-v, s-z) \end{aligned}$$

Reemplazando sobre la expresión anterior, puede escribirse

$$\mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] = \mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] \mathbb{E} [|U(\lambda; s)|^2] + S_1 + S_2 \quad (3.36)$$

donde

$$S_1 = \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\ \times R(t-u, s-z)R(t-v, s-w) dudvdwdz$$

Se define a  $S_2$  de manera similar, intercambiando  $w$  y  $z$ . Estas expresiones, de apariencia innecesariamente complicada, pueden interpretarse como la *interferencias* de la covarianza entre los puntos  $(\omega, t)$  y  $(\lambda, s)$ . Para ello, nótese que

$$\text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.37)$$

Cabe mencionar que es conveniente que las cantidades  $S_1$  y  $S_2$  sean pequeñas.

Sea ha elegido a  $g$  de forma que  $B_g \ll B_X$  con el objetivo de que  $U$  tenga un sesgo pequeño, en virtud del teorema [?]. Este teorema puede ser usado nuevamente si  $S_1$  y  $S_2$  son reescritas en cierta forma *adecuada*, para lo cual la autocovarianza debe ser vista como

$$R(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p-q)} A(\omega; p) \overline{A(\omega; q)} d\mu(\omega) \quad (3.38)$$

Así pues, reemplazando esta expresión sobre (?) se obtiene

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\
&\quad \times R(t-u, s-z) R(t-v, s-w) dudvdwdz \\
&= \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\
&\quad \times \left( \int \int_{\mathbb{R}^2} \left[ e^{-i\theta(s-z-t+u)} A(\theta; t-u) \overline{A(\theta; s-z)} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[ e^{-i\phi(s-w-t+u)} A(\phi; t-v) \overline{A(\phi; s-w)} \right] d\theta d\phi \right) dudvdwdz \\
&= \int \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} \\
&\quad \times \left[ A(\theta; t) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) \overline{A(\theta; t)} \right] d\theta d\phi \\
&= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right] \\
&\quad \times \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right]
\end{aligned}$$

Donde  $\Gamma_*$  es la función de transferencia generalizada

$$\Gamma_*(\kappa; t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{A(\omega; t-u)}{A(\omega; t)} e^{-i\kappa u} du \quad (3.39)$$

Usando el teorema [?], se puede decir que  $|\Gamma(\bullet; t, \lambda) - \Gamma(\bullet)| \leq B_g/B_X$ . Así entonces

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right| \\
&\quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right| \\
&\leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)| |\Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi)| |A(\phi; t) A(\phi; s)| d\phi \right] \\
&\quad \times \left[ \int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta)| |\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)| |A(\theta; t) A(\theta; t)| d\theta \right] \\
&\leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t) A(\phi; s)| d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)
\end{aligned}$$

La misma cota puede hallarse para  $S_2$ . En lo inmediato, conviene analizar el caso

$\omega = \lambda$  y  $t = s$ , de donde se obtiene

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) = \text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\omega; t)|^2) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)$$

pero en este caso particular, la cota obtenida puede reducirse a

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 |A(\phi; t)|^2 d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \end{aligned}$$

□

En el teorema anterior puede interpretarse que  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi$  es una versión *suavizada* de  $h$ . Bajo este comentario, el resultado obtenido es muy análogo a la estimación del espectro en un proceso estacionario (teorema ??). Siguiendo dicha analogía, se sabe que  $U$  puede *modificarse* para generar estimadores consistentes; para lo cual se usa una segunda función de ventana  $w_\tau$ . Por estética y comodidad, las condiciones sobre  $w_\tau$  serán presentadas junto a las propiedades de la ventana  $g$ ; todas ellas en la definición

**Definición 3.6.** *El estimador de doble ventana es un estimador para  $h$  definido como*

$$\hat{h}(\omega, t) = \int_{T-t}^t w_\tau(u) |U(\omega, t-u)|^2 du \quad (3.40)$$

donde la función  $g$  satisface

- $B_g \ll B_X \ll T$
- $g(t) \rightarrow 0$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$

con  $\Gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g(t) dt$ . Así mismo, la función  $w_\tau$  satisface

- $w_\tau(t) \geq 0$  para cualesquiera  $t, \tau$
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , para todo  $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$  para todo  $\tau$

- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(t))^2 dt < \infty$  para todo  $\tau$
- $\exists C \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\tau}(\lambda)|^2 d\lambda = C$

donde  $W_{\tau}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_{\tau}(t) dt$ .

El supuesto sobre que  $w_{\tau}$  decaiga rápidamente lejos de 0 permite reemplazar el intervalo de integración que define a  $\widehat{h}$  por  $\mathbb{R}$  (excepto cerca de 0).

**Proposición 3.3.** *El estimador de doble ventana satisface*

$$\mathbb{E} [\widehat{h}(\omega, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.41)$$

donde

$$\bar{h}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) h(\omega, t-u) du \quad (3.42)$$

*Demostración.* De manera relativamente sencilla puede verificarse que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\widehat{h}(\omega, t)] &= \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |U(t-u)|^2 du \right] \\ &= \int_{T-t}^t w_{\tau}(u) \mathbb{E} [|U(t-u)|^2] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) h(\omega, t-u) du \right] d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \end{aligned}$$

□

A diferencia de  $U$ , el estimador de doble ventana no es consistente salvo en caso que  $\bar{h}$  sea parecido a  $h$ ; como  $\bar{h}$  es una versión suavizada, que el estimador sea sesgado depende de que  $B_{w_{\tau}}$  sea pequeño en comparación a  $B_X$ .

**Proposición 3.4.** *El estimador de doble ventana satisface*

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\tau}(\omega)|^2 d\omega \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.43)$$

donde

$$\tilde{h}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\omega_0, t) (w_{\tau}(u))^2 du}{\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(u))^2 du} \quad (3.44)$$

*Demostración.* Como en el caso del estimador  $U$ , será conveniente calcular la covarianza de  $\hat{h}$  y posteriormente deducir la varianza. Se escribe para  $t, s \in \mathcal{T}$  y  $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov}(\hat{h}(\omega, t), \hat{h}(\lambda, s)) = E[\hat{h}(\omega, t)\hat{h}(\lambda, s)] - E[\hat{h}(\omega, t)]E[\hat{h}(\lambda, s)] \quad (3.45)$$

Hecho el trabajo previo, es claro que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{h}(\omega, t), \hat{h}(\lambda, s)) &= \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) \text{Cov}(|U(\omega; t-u)|^2, |U(\lambda; s-v)|^2) dudv \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) [S_1 + S_2] dudv + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= T_1 + T_2 \end{aligned}$$

usando, por comodidad

$$T_1 = \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) [S_1] dudv \quad (3.46)$$

y similarmente para  $T_2$ ;  $S_1$  es como en la expresión (?), evaluado en los puntos  $(t-u, \omega), (s-v, \lambda)$

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t-u, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s-v, \phi) \overline{A(\phi; t-u)} A(\phi; s-v) d\phi \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_*(\theta + \omega; t-u, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s-v, \theta)} \overline{A(\theta; t-u)} A(\theta; s-v) d\theta \right] \end{aligned}$$

con  $\Gamma_*$  es la función de transferencia generalizada;  $S_2$  se define de manera similar. Se

usará el teorema (?) para acotar la covarianza, comenzando por el primer sumando

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) [S_1] dudv \\
&\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |S_1| dudv \\
&\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \\
&\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)| d\phi \right]^2 dudv + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\
&\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |\Gamma(\theta + \omega)| |\Gamma(\theta + \lambda)| \\
&\quad \times \left[ \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)| dudv \right] d\phi d\theta + \mathcal{O}(B_g/B_X)
\end{aligned}$$

□

Aún más, si se usa la propiedad de en el límite de  $\tau W_\tau$  se puede escribir

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \frac{C}{\tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.47)$$

Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que  $\tilde{h} \approx h$  y  $\tilde{h}^2 \approx h^2$ . Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas  $w_\tau$  y  $W_\tau$  sean más cercanas a funciones tipo  $\delta$  de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $E[\hat{h}(t, \omega)] \approx h(t, \omega)$
- $\text{Var}(\hat{h}(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta$

### 3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao

La prueba de estacionariedad propuesta por Priestley y Subba Rao [59] consiste en probar si el espectro evolutivo de un proceso dado puede reducirse a un espectro de potencias; en otras palabras, se prueba la hipótesis de que el espectro evolutivo

efectivamente cambia en el tiempo. Naturalmente, la prueba debe construirse sobre una única realización del proceso.

El procedimiento consiste en estimar el espectro evolutivo del proceso para algunos tiempos y frecuencias, usando en particular el estimador de doble ventana; dichos puntos deben ser tales que los estimadores sean aproximadamente no-correlacionados. Posteriormente se calcula el logaritmo de la estimación obtenida con el fin de *estabilizar* la varianza. Finalmente, como parte central, se efectúa un ANOVA de dos vías para verificar si se puede afirmar que el espectro estimado tiene –estadísticamente– el mismo valor en los diferentes puntos a través del tiempo. Cabe destacar que este último paso tiene una interpretación poco convencional, y es que los estimadores tienen (por diseño) ciertas propiedades

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso semi-estacionario y sea  $\{x_t\}_{t=0,\dots,N}$  un conjunto de observaciones, cuya frecuencia de muestreo es  $\Delta_t = 1$  por simplicidad. Usando esta información se construye el estimador de doble ventana,  $\hat{h}$ ; para ello se eligen las funciones ventana  $g_\kappa$  y  $w_\tau$  que, por simplicidad, son ventanas de escalamiento con parámetros  $\kappa$  y  $\tau$ . Sus funciones de transferencia serán  $\Gamma_\kappa$  y  $W_\tau$ , respectivamente.

Bajo las condiciones descritas en la sección anterior, se satisface que

$$\begin{aligned} E[\hat{h}(t, \omega)] &\approx h(t, \omega) \\ \text{Var}(\hat{h}(t, \omega)) &\approx \frac{C}{N} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma^4(\theta)| d\theta \end{aligned}$$

donde  $C = \lim_{T \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)| d\lambda$ . Como se mencionó, se propone la cantidad

$$Y(t, \omega) = \log(\hat{h}(t, \omega)) \quad (3.48)$$

en virtud de la proposición (?), se cumple que

$$E[Y(t, \omega)] \approx \log(h(t, \omega)) \quad (3.49)$$

$$\text{Var}(Y(t, \omega)) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

Cabe destacar que la varianza de  $Y$  no es independiente de  $h$  en el sentido formal, sino que sólo es *aproximadamente independiente* pues depende en mayor medida

de la forma de  $\widehat{h}$  que del mismo  $h$ . Esto era de esperarse, ya que el estimador de doble ventana fue diseñado para exagerar el *peso* de la información local al grado de obtener versiones suavizadas del espectro evolutivo. Adicionalmente, se suele decir intuitivamente que el logaritmo *estabiliza* la varianza. En otra dirección, la varianza aproximadamente constante de  $Y$  sugiere que puede escribirse como

$$Y(t, \omega) = \log(h(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega) \quad (3.52)$$

Debido a la naturaleza naturalmente discreta de los datos, conviene construir una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias, equiespaciado en el tiempo por  $\Delta_t$  y en las frecuencias por  $\Delta_\omega$ . Si dichas distancias son suficientemente grandes como para que se cumplan las condiciones en 3.53, entonces los valores de  $Y$  sobre la cuadrícula serán aproximadamente no-correlacionados.

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^2 |\Gamma_\kappa(\theta + \Delta_\omega)|^2 d\theta \approx 0 \\ & \frac{1}{\Delta_t} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |w_\tau(t)| dt \approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t + \Delta_t, \omega + \Delta_\omega)) \approx 0 \quad (3.53)$$

Así entonces, sea  $\{(t_i, \omega_j) \in \mathcal{T} \times [-\pi, \pi] | i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\}$  la cuadrícula descripta, con  $|t_i - t_{i+1}| = \Delta_t$  y  $|\omega_j - \omega_{j+1}| = \Delta_\omega$ . Se define el estimador

$$Y_{i,j} = \log(\widehat{h}(t_i, \omega_j)) \quad (3.54)$$

el cual puede escribirse como

$$Y_{i,j} \approx \log(h(t_i, \omega_j)) + \varepsilon_{i,j} \quad (3.55)$$

donde

$$\text{E}[\varepsilon_{i,j}] \approx 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{i,j}) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta [\delta(i, i_0) \delta(j, j_0)] \quad (3.57)$$

Una vez definido a  $Y$ , un estimador adecuado para detectar la estacionariedad débil, conviene escribir explícitamente las condiciones para tal detección. Con base

a la proposición (?), si el proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es débilmente estacionario **entonces**

$$h(t_0, \omega_j) = h(t_1, \omega_j) = \cdots = h(t_I, \omega_j) , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.58)$$

condición que puede reescribirse en términos de  $Y$  como

$$\mathbb{E}[Y_{0,j}] = \mathbb{E}[Y_{1,j}] = \cdots = \mathbb{E}[Y_{I,j}] , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.59)$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{0,j}] = \mathbb{E}[\varepsilon_{1,j}] = \cdots = \mathbb{E}[\varepsilon_{I,j}] , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.60)$$

Sin embargo, la expresión en 3.60 puede deducirse directamente de las propiedades de  $Y$  en caso de que la expresión en 3.59 es cierta. En consecuencia, rechazar 3.60 implica rechazar 3.59, lo cual aporta evidencia para rechazar 3.58; si se rechaza 3.58 entonces puede rechazarse que el proceso sea estacionario, pero un no-rechazo no garantiza que el proceso sea estacionario.

El objetivo de la prueba puede fijarse en decidir si puede rechazarse la condición en 3.60, en cuyo caso se podrá concluir que el proceso **no** es débilmente estacionario. Con base a la expresión en 3.59, la prueba puede formularse en términos de un ANOVA de dos factores, el cual parte de un modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (3.61)$$

donde  $\varepsilon$  es como en la expresión 3.55. Dentro del contexto, las cantidades involucradas pueden interpretarse como

$\mu$  Promedio de  $h$  sobre tiempo y frecuencia

$\alpha$  Efecto al variar el tiempo

$\beta$  Efecto al variar la frecuencia

$\gamma$  Efecto no lineal de tiempo y frecuencia (*interacción*)

La diferencia entre  $\gamma$  y  $\varepsilon$  consiste en que (por diseño) se conocen la media y varianza de  $\varepsilon$ ; en contraparte, no se ha supuesto nada sobre  $\gamma$ .

**Cuadro 3.1:** Estadísticos involucrados en la prueba PSR

Descripción	Estadístico	Gr. de libertad
Efecto tiempo	$S_T = J \sum_{i=1}^I (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$I - 1$
Efecto frecuencia	$S_F = I \sum_{j=1}^J (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$J - 1$
Interacción	$S_{I+R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2$	$(I - 1)(J - 1)$
Total	$S_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$IJ - 1$
Prom. tiempo	$Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	
Prom. frecuencia	$Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$	
Prom. general	$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	

Ahora bien, la expresión 3.59 uede formularse como hipótesis para contrastarse contra  $H_0$ , de la forma

$$H_A : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j} \quad (3.62)$$

Por simplicidad, conviene considerar, como paso intermedio, una prueba de hipótesis *encadenada*

$$H_{A_0} : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j} \quad (3.63)$$

Como es usual con los ANOVA, se definen las sumas de cuadrados dentro de los grupos y entre los grupos (cuadro 3.1), las cuales siguen distribuciones  $\chi^2$ . Al probar  $H_0$  contra  $H_{\text{inter}}$  se usa el estadístico de prueba  $S_{I+R}/\sigma^2$ , mientras que al probar  $H_{\text{inter}}$  contra  $H_A$  se usa  $S_T/\sigma^2$ .

---

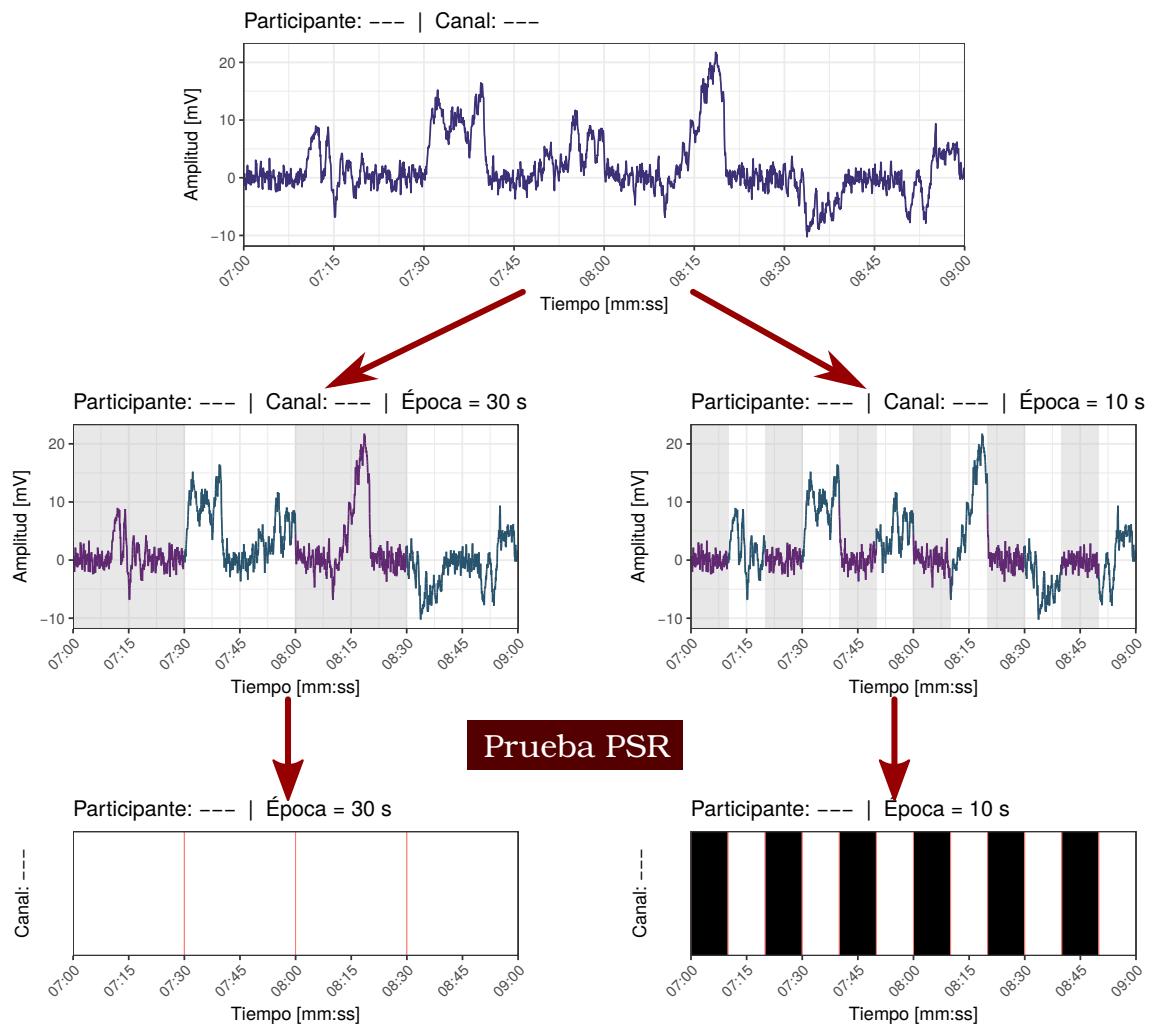
**Algoritmo 1:** Prueba de Priestley-Subba Rao

---

**Datos:**  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$   
**Resultado:** p-valores para  $S_{I+R}$ ,  $S_T$ ,  $S_F$

1  $X \leftarrow (x_1, x_2, \dots, x_N)$   
2 **para**  $i = 1, \dots; j = 1, \dots$  **hacer**  
3    $U[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T g(u)X[t-u] \exp(-i\omega_j u)$   
4 **para**  $i = 1, \dots; j = 1, \dots$  **hacer**  
5    $\hat{h}[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T w_\tau(u) |U[i-u, j]|^2$   
6  $Y \leftarrow \log \hat{h}$   
7 **para**  $i = 1, \dots, I$  **hacer**  
8    $Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$   
9 **para**  $j = 1, \dots, J$  **hacer**  
10    $Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$   
11  $Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$   
12 **si**  $S_{I+R} > 0$  **entonces**  
13   Aceptar  $H_0$   
14   **devolver**  
15 **si**  $S_T > 0$  **entonces**  
16   Aceptar  $H_1$   
17   **devolver**  
18 Aceptar  $H_2$

---



**Figura 3.1:** Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.



# Capítulo 4

## Marco conceptual del problema

Para poder identificar marcadores significativos para el diagnóstico del deterioro cognitivo, es posible usar la técnica de electroencefalografía, que es usada para medir cierto tipo de actividad cerebral y que posiblemente esté asociada al deterioro cognitivo. En esta sección se presenta el deterioro cognitivo en adultos mayores, con énfasis en su caracterización.

En el presente capítulo se responden, en ese orden, las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el deterioro cognitivo?
- ¿Por qué los adultos mayores son propensos al DC?
- ¿Cómo detectar el DC en adultos mayores?
- ¿Por qué se cree que hay relación entre el sueño y el DC?
- Clínicamente, ¿qué es el sueño y cómo se estudia?

Responder a estas preguntas lleva a tomar temas de psicología, psicometría y fisiología del sistema nervioso. En cuanto a la última pregunta conviene decir de antemano que existe una gran variedad de técnicas para estudiar el sueño, tanto objetivas (electroencefalografía, resonancia magnética, tomografía) como subjetivas (...?). En el presente trabajo es usada la polisomnografía compuesta por electroencefalograma, electromiograma y electrooculograma; debido a ello, se describen únicamente dichas técnicas.

## 4.1. Deterioro cognitivo

La **demencia** es, según el Manual diagnóstico y estadístico de trastornos mentales, en su quinta versión (DSM-V, por sus siglas en inglés)

“Un síndrome que consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo. Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente.”[35]

Cuando un sujeto presenta cambios marcados en su conducta, es relativamente fácil identificar la demencia; caso contrario es el diagnóstico temprano de la misma, el cual es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome [31].

Considerando a los **adultos mayores** –entendidos como individuos de 60 años o más– conviene mencionar que el envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [50].

Al momento de diagnosticar deterioro cognitivo en adultos mayores, deben tenerse en cuenta el envejecimiento normal y la posible **pseudodemencia depresiva**, ya que presentan características similares. La pseudodemencia depresiva se define como “*un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo*” [35], aunque no se suele considerar como un tipo de demencia.

Así mismo, para realizar un diagnóstico temprano se considerará como etapa precursora de la demencia al **deterioro cognitivo leve**, definido como

“Una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia.”[61]

Para uso del presente trabajo se define operativamente el **probable deterioro cognitivo leve** como en diagnóstico positivo de deterioro cognitivo leve en base a únicamente los resultados de pruebas neuropsicológicas –y muy en particular de la prueba Neuopsi. Un diagnóstico *formal* requerirá, además, la detección efectiva de

alteraciones en el sistema nervioso central; la decisión sobre qué afecciones consisten una prueba *irrefutable* de un deterioro cognitivo leve corresponde a un equipo de especialistas médicos, y es omitido debido a las limitaciones del presente trabajo. Una forma de entender la intención de obtener marcadores para el diagnóstico del PDC es pensarlos como una condición *necesaria pero no suficiente* para el deterioro cognitivo leve.

## 4.2. Detección del deterioro cognitivo

En otros países, el deterioro cognitivo leve (DCL) ha sido medido por el Instituto Nacional de Enfermedades Neurológicas y Comunicativas y la Asociación de Stroke / Alzheimer's Disease and Related Disorders o NINCDS ADRDA criterio [40]. Sin embargo, las pruebas neuropsicológicas empleadas en estos estudios todavía no se han validado en México debido en parte a la alta tasa de analfabetismo entre los adultos mayores, que en México asciende al 25.6 % [15]. En cambio, en estudios epidemiológicos, el Examen Cognitivo Transcultural (CCCE) y otras pruebas se han utilizado [63]. El CCCE muestra una prevalencia del 28.7 % de deterioro cognitivo sin demencia (DCSD) que aumenta con la edad y disminuye con un nivel educativo más alto [41]. La prueba de Neuropsi, desarrollada en la UNAM, también ha distinguido claramente entre sujetos normales, con deterioro cognitivo y demenciales [47, 1, 45]. En el presente estudio, una puntuación de 3 desviaciones estándar por debajo de la media en la prueba de Neuropsi se consideró una indicación de Probable DC (PDC).

En psicología los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [3]. Es a través de estas herramientas que se declaran formalmente las deficiencias cognitivas o conductuales, así como su severidad y clasificación.

En el estudio realizado por Vázquez-Tagle en 2016 [74] se investigó el deterioro cognitivo en el estado de Hidalgo, para lo cual se aplicó la siguiente batería de pruebas neuropsicológicas:

- Estado cognoscitivo general
  - Evaluación Neuropsicológica (**Neuropsi**) [48]
  - Mini Mental State Examination (**MMSE**) [75]

- Detectar pseudodemencia depresiva y ansiedad
  - Escala breve para la detección de ansiedad del anciano (**SATS**) [73]
  - Escala de Depresión Geriátrica (**GDS**) [77]
- Detectar cambios en la vida cotidiana
  - Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (**KATZ**) [66]

### 4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño

La época del sueño de Movimientos Oculares Rápidos (MOR) ha demostrado ser un indicador del DC en los adultos mayores. En otros estudios, se ha encontrado una mayor potencia absoluta y relativa en frecuencias lentas, en regiones laterales [9] y menos atonía muscular [12].

Los estudios anteriores han incluido análisis lineales del Electroencefalograma (EEG) o del Electromiograma (EMG), pero el Electrooculograma (EOG) no se ha considerado como un posible marcador de deterioro cognitivo. Los tres indicadores de sueño MOR aparecen generalmente en orden consecutivo. Al ingresar a esta etapa, los husos y las ondas lentas de alta amplitud están ausentes, el EEG tiene abundantes frecuencias beta y gamma [71, 34], hay una abrupta pérdida de voltaje que ocurre en un intervalo menos de 2 segundos [64], y, luego, aparecen los movimientos oculares (MOR) característicos [23].

El sueño MOR se ha asociado durante mucho tiempo con las funciones cognitivas [46]; citado en [18]. El sueño MOR desempeña un papel en la consolidación de la memoria [37, 21, 22, 54, 52, 53, 70]. Después de tareas complejas, hay reactivaciones de circuitos neuronales durante MOR sleep [36]. La Potenciación a Largo Plazo (LTP) solo ocurre durante la vigilia y el sueño MOR, y, dependiendo de su fase theta del hipocampo, la LTP puede mejorarse o inhibirse [51].

El sueño MOR mejora la memoria y los procesos de atención mediante las entradas colinérgicas [7] a través de pontine [20] y las estructuras del basales del cerebro anterior [6]. Durante el envejecimiento normal y especialmente durante el envejecimiento patológico, los procesos de atención y memoria se vuelven más vulnerables, y las neuronas colinérgicas son las más afectadas [67]. El envejecimiento afecta a varias

estructuras anatómicas que resultan en la pérdida de un eje dendrítico en las neuronas corticales que muestran una degradación en su complejidad fractal estructural [33].

#### 4.4. Estudio del sueño a través de la polisomnografía

Usualmente estos registros de EEG muestran una actividad oscilatoria continua y cambiante, cuya frecuencia se considera entre 0.5 y 100 Hz. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad mental mostrando diferencias claras durante vigilia y sueño, o durante quietud y concentración [13].

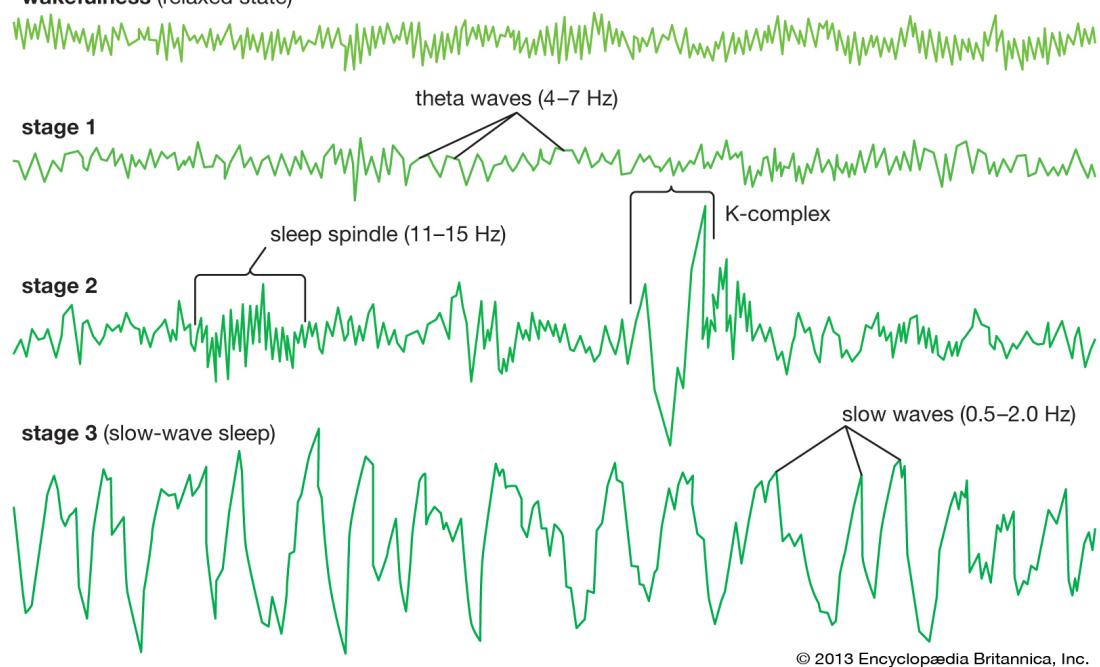
Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, también muestran patrones relativamente organizados conocidos como **ondas cerebrales**. Las ondas cerebrales más comunes y estudiadas se tipifican en cuatro grupos según su *frecuencia*: alfa, beta, gamma, delta, theta. En la figura 4.1 se representa un arquetipo visual de cada tipo de onda.

Para realizar el registro se en una forma estandarizada y comparable, se definen arreglos llamados **montajes**, entendidos como el conjunto de (1) los sitios donde se colocan los electrodos de registro y (2) la manera en que los electrodos de registro están conectados entre sí.

En el trabajo de Vázquez Tagle [74] se usa un montaje *referencial*, en el cual los electrodos se conectan en paralelo con un electrodo de referencia cuya actividad eléctrica es constante y negligible (lóbulos de las orejas, electrodos cortocircuitados A1, A2); los electrodos fueron colocados según el **Sistema 10–20** [30]. Dicho sistema define los sitios según una cuadrícula construida respecto a distancias relativas entre varios puntos de referencia: el *inion*, protuberancia en la región posterior del cráneo, el *nasión*, unión del hueso frontal y los huesos nasales, y el *punto preauricular*, ubicado arriba del cartílago que protege el canal auditivo.

Debido a que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y a que disparan de manera asíncrona, además de que el cerebro se encuentra cubierto por las muchas capas descritas anteriormente, las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente. A ello hay que añadir la difusión generada por las meninges, el líquido encefalorraquídeo y

**Electroencephalogram (EEG) showing typical brain waves of sleep and wakefulness**  
**wakefulness (relaxed state)**

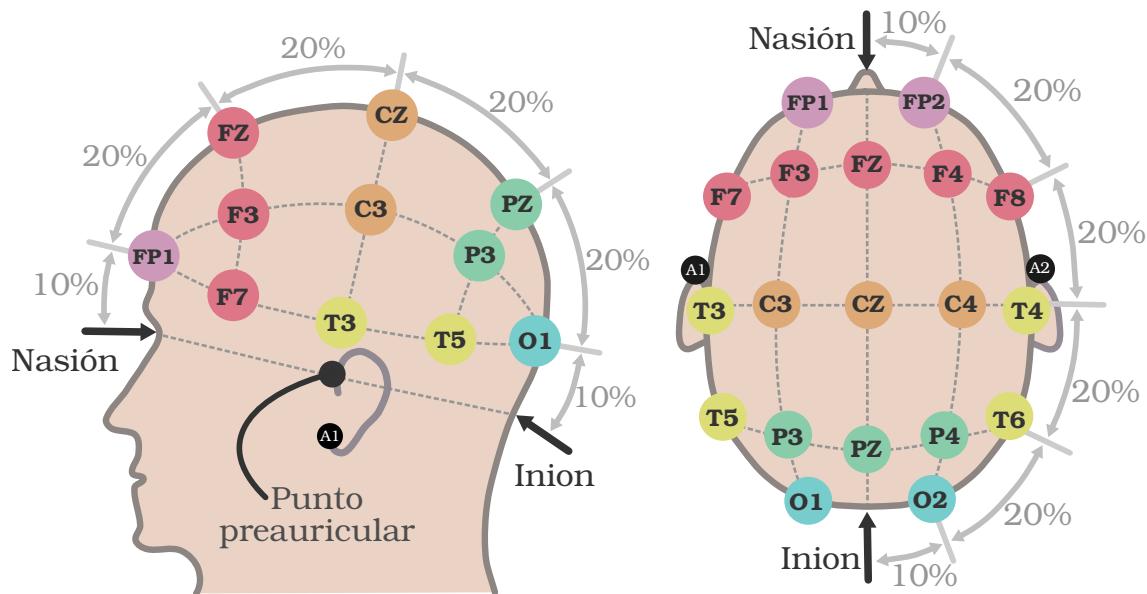


**Figura 4.1:** Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG. Imagen tomada de Encyclopædia Britannica, versión en línea [10].

**Cuadro 4.1:** Generalidades sobre ondas cerebrales

Tipo de onda	Frecuencia [Hz]	Ubicación usual	Condiciones usuales
Delta	0.5 – 3.5		Síndromes focales. Sueño profundo en infantes
Theta	3.5 – 7	P, T	Durante estrés emocional En infantes
Alfa	7 – 12	F, P, O	Vigilia en reposo con ojos cerrados
Beta	12 – 30	P, F	Actividad mental en adultos
Gamma	30 – 100		

Se abrevian los lóbulos cerebrales: F=frontal, P=parietal, T=temporal, O=occipital.



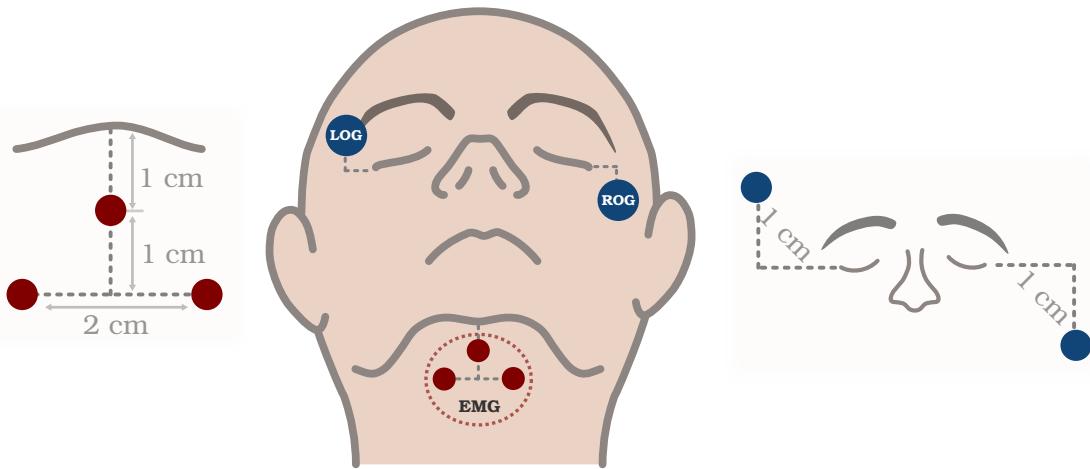
**Figura 4.2:** Colocación de electrodos según el sistema 10–20

el cráneo.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendido como señales que son registradas de manera no deseada; como ejemplo, los músculos faciales medianamente contraídos generan campos eléctricos con frecuencia de 100 Hz. Este tipo de ruido *persistentes* son eliminados usando un filtro que *elimine* los componentes de frecuencia específicos. Los ruidos de duración corta son referidos como **artefactos**; como ejemplo, pestañear voluntariamente durante un episodio de quietud mental interrumpe las ondas alfa por cerca de dos segundos.

Adicionalmente al registro del EEG, la PSG contempla el registro de algunas otras *variables fisiológicas* como respiración, ritmo cardíaco, temperatura, entre otros. En el estudio por Vázquez Tagle y colaboradores, el registro de PSG incluyó registros de actividad ocular (**electrooculograma**, EOG) y tono muscular (**electromiograma**, EMG), según las recomendaciones de la AASM para clasificar las etapas de sueños. La ubicación estos últimos electrodos es ilustrada en la figura 4.3.

Para interpretar los registros de EOG (canales LOG, ROG) se puede entender al ojo como una batería cuyos polos son la retina y la pupila, y que genera pequeñas variaciones en el campo eléctrico cuando se mueve; el registro consiste en la proyección del movimiento sobre el eje que forman los electrodos. Los registros de EMG (canal EMG) admiten una interpretación más *sencilla*, ya que los músculos son activados



**Figura 4.3:** Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular

directamente por señales eléctricas: el tono muscular es la actividad muscular basal, y se relaciona con la velocidad con que los músculos pueden *salir* del reposo.

#### 4.4.1. Estructura del sueño

Se entiende al sueño como un proceso vital, con una estructura característica, y que en el ser humano presenta las siguientes propiedades [11]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma
3. Inmovilidad y relajación muscular
4. Periodicidad típica circadiana (diaria)
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, además de que genera una *deuda* acumulativa

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas por noche [17]. Paralelamente el sueño no es un proceso homogéneo, sino que tiene una estructura por etapas con rasgos electroencefalográficos y fisiológicos distintivos.

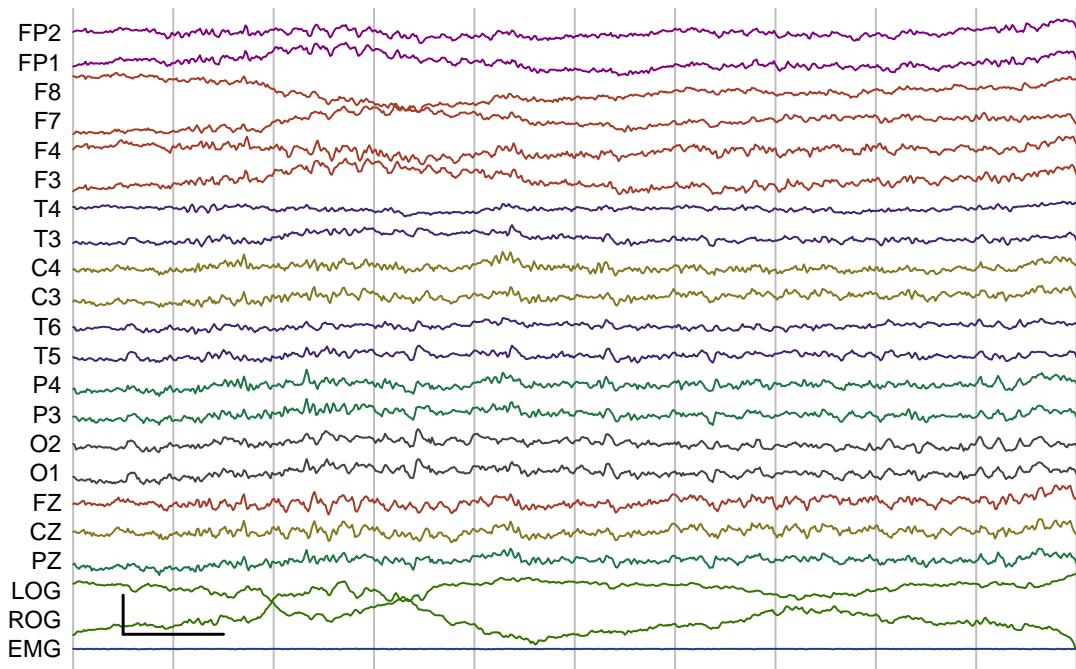
**Cuadro 4.2:** Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
Vigilia	W	Ritmo alfa en > 50 % de la época en la región occipital	No	Alto
NMOR 1	N1	Cambio de alfa por AABFM, attenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	<W
NMOR 2	N2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	<W, >R
NMOR 3	N3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 µV) en > 20 % de la época. Husos de sueño	No	<N2, ≈R
MOR	R	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas 'saw-tooth'	MOR's	Bajo

Se abrevia AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

Para su estudio, el sueño se divide en dos etapas: N y R. La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K; en base a ello se divide en las sub-fases N1, N2, N3.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye (excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres), la frecuencia cardíaca y respiratoria se vuelve irregular, y el sujeto exhibe movimientos oculares rápidos (MOR); en base a lo cual la fase R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante el estado de alerta; estos patrones no interrumpen el sueño sino que, contrariamente, incrementan el umbral para estímulos externos, motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante el sueño MOR se producen la mayoría de las ensoñaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensoñaciones [62].



**Figura 4.4:** Registro de polisomnograma durante sueño MOR. Marca de calibración: vertical, 10  $\mu$ V, horizontal, 1 segundo

# Capítulo 5

## Metodología y resultados

### 5.1. Características de los participantes

Los sujetos fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia* bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años
- Diestros (mano derecha dominante)
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales
- No usar medicamentos o sustancias para dormir
- Firma de consentimiento informado
- Voluntario para el registro de PSG

Un total de 14 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Estos participantes fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MMSE), descartar cuadros depresivos (GDS, SATS) y cambios en la vida cotidiana (KATZ). En base a las pruebas se determinó que, objetivamente, 10 de los voluntarios no padecen depresión ni ansiedad, además de que no presentan afectaciones significativas en la vida diaria.

Para su análisis, los 10 participantes se dividieron en dos grupos en base a su estado cognoscitivo: control (CTL) y con Probable Deterioro Cognitivo (PDC). Para esta clasificación se dio mayor atención al puntaje de Neuropsi, estandarizado según

**Cuadro 5.1:** Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

Escolaridad	Edad	Sano		Deterioro cognitivo		
		Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
Nula	16 – 30	92	60	45	30	14
	31 – 50	95	68	54	41	28
	51 – 65	91	59	44	28	13
	66 – 85	76	48	34	20	6
1 – 4 años	16 – 30	105	73	58	42	27
	31 – 50	105	81	69	58	46
	51 – 65	98	77	67	57	47
	66 – 85	90	61	46	32	18
5 – 9 años	16 – 30	114	102	97	86	75
	31 – 50	118	106	101	90	79
	51 – 65	111	98	91	79	67
	66 – 85	97	80	72	56	39
10 – 24 años	16 – 30	115	103	98	87	77
	31 – 50	113	102	97	88	78
	51 – 65	102	93	88	80	72
	66 – 85	92	78	72	59	46

Fuente: Ardila y Ostrosky [3]

edad y escolaridad (cuadro 5.1). El puntaje de MMSE se le otorgó menos importancia como clasificador debido a que tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de deterioro cognitivo leve [3], y baja especificidad para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [49]. Cabe mencionar que se entiende por especificidad a la probabilidad de un verdadero negativo, es decir que un individuo sin deterioro cognitivo obtenga un resultado de no-deterioro.

### 5.1.1. Registro del polisomnograma

Para llevar a cabo el registro, los adultos mayores participantes fueron invitados a acudir a las instalaciones del Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, ubicado dentro del Instituto de Ciencias de la Salud (ICSa) dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y

**Cuadro 5.2:** Datos generales de los participantes

	Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SATS	KATZ	GDS
<b>Grupo CTL</b>								
VCR	F	59	12	107	29	21	0	3
MJH	F	72	9	113	30	18	0	0
JAE	F	78	5	102	28	19	0	5
GHA	M	65	9	107.5	30	23	0	7
MFGR	F	67	11	115	30	18	0	
$\hat{\mu}$		68.2	9.2	108.9	29.4	19.8	0.0	3.0
$\hat{\sigma}$		7.2	2.7	5.2	0.9	2.2	0.0	3.0
<b>Grupo PDC</b>								
CLO	F	68	5	81	28	22	1	6
RLO	F	63	9	90	29	20	0	3
RRU	M	69	9	85	27	10	0	3
JGZ	M	65	11	87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8	96	29		0	2
$\hat{\mu}$		67.6	8.4	87.8	27.4	18.0	0.2	3.0
$\hat{\sigma}$		3.4	2.2	5.6	1.8	5.4	0.4	1.9

se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran siesta ese día.

Para efectuar el registro se usó un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic Mexicana). El protocolo de PSG incluye:

- 19 electrodos de EEG, colocadas siguiendo las coordenadas del Sistema Internacional 10–20
- 2 electrodos de EOG para movimientos oculares horizontales y verticales
- 2 electrodos de EMG colocados en los músculos submentonianos

Los electrodos para registro de EEG fueron montados usando los lóbulos auriculares como referencia común; se mantuvo por debajo de  $50 \mu\Omega$ .

Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron filtradas analógicamente usando filtros de paso de banda: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Debido a dificultades técnicas el registro se efectuó a razón de 512 puntos por segundo (Hz) para algunos

**Cuadro 5.3:** Datos generales sobre los registros de PSG

Frecuencia de muestreo [Hz ]	Total		MOR*			%
	Puntos	Tiempo	Puntos	Tiempo		
<b>Grupo CTL</b>						
VCR	200	5166000	7:10:30	438000	0:36:30	8.48
MJH	512	15851520	8:36:00	1950720	1:03:30	12.31
JAE	512	13931520	7:33:30	2626560	1:25:30	18.85
GHA	200	6558000	9:06:30	330000	0:27:30	5.03
MFGR	200	4932000	6:51:00	570000	0:47:30	11.56
$\hat{\mu}$			7:51:30		0:52:06	11.25
$\hat{\sigma}$			0:57:36		0:23:00	5.13
<b>Grupo PDC</b>						
CLO	512	14499840	7:52:00	2027520	1:06:00	13.98
RLO	512	12994560	7:03:00	1520640	0:49:30	11.70
RRU	200	2484000	3:27:00	228000	0:19:00	9.18
JGZ	512	18539520	10:03:30	506880	0:16:30	2.73
AEFP	512	14699520	7:58:30	629760	0:20:30	4.28
$\hat{\mu}$			7:16:48		0:34:18	8.38
$\hat{\sigma}$			2:24:43		0:22:14	4.79

\*Dado que el sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos

participantes, mientras que se usó 200 Hz para otros; en ambos casos se cumple la recomendación de la AASM de al menos 128 Hz. Los registros digitalizados fueron almacenados en formato de texto bajo la codificación ASCII.

Los registros fueron segmentados en ventanas de 30 segundos de duración, referidas como *épocas*, para su estudio posterior *fuera de línea*. Usando los criterios de la AASM, cada una de las épocas fueron clasificadas según la etapa de sueño como MOR o NMOR. Dicha clasificación fue llevada a cabo por expertos en sueño de ICSa.

## 5.2. Análisis de las características de los participantes

Previo al análisis de la estacionariedad, se corroboró la hipótesis de que las variables independientes son estadísticamente iguales entre los grupos CTL y PDC. Las comparaciones usando la prueba  $t$  de Welch (cuadro 5.4) indican que efectivamente la hipótesis se cumple salvo para los puntajes de Neuropsi.

Se evalúo si pudieran existir relaciones entre las variables que se presumen independientes. Usando la prueba de correlación de Spearman (cuadro 5.5) se encontró sólo hay correlaciones monotónicas entre los siguientes pares de variables:

- Edad y Escolaridad
- Puntaje en Neuropsi y Puntaje en Mini Mental-State Examination (MMSE)
- Tiempo de MOR (en segundos) y Tiempo en MOR (porcentaje)

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas, y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Algunos autores han sugerido que un bajo nivel de escolaridad es un factor de riesgo para padecer deterioro cognitivo, en base a estudios horizontales de larga escala [42]. En el presente trabajo se ignora este dato, en vista de que no se pudieron relacionar el nivel de escolaridad de los participantes con su desempeño en pruebas neuropsicológicas.

La relación entre los puntajes en Neuropsi y en MMSE era de esperarse, ya que ambas pruebas miden parámetros similares y tienen contenidos independientes. Cabe mencionar el curioso fenómeno en que (1) los puntajes de MMSE tienen estadísticamente las mismas medias grupales, (2) los puntajes de MMSE están fuertemente correlacionados con los puntajes de Neuropsi, y (3) los puntajes de Neuropsi tienen estadísticamente medias grupales diferentes. Se confirma que la prueba MMSE tiene menor sensibilidad que la prueba Neuropsi para detectar deterioro cognitivo.

Era por demás obvia la relación entre la cantidad total de sueño MOR, con su proporción respecto a todo el sueño. Sin embargo, conviene mencionar que la cantidad de sueño MOR no es afectada por ninguna de las otras variables independientes;

**Cuadro 5.4:** Variables independientes entre grupos

	Grupo CTL		Grupo PDC		t de Welch		
	Media	(DE)	Media	(DE)	p	t	ν
Edad	68.2	(7.2)	67.6	(3.4)	0.8746	0.16	6.11
Escolaridad	9.2	(2.7)	8.4	(2.2)	0.6201	0.52	7.69
Neuropsi	108.9	(5.2)	87.8	(5.6)	<b>0.0003</b>	6.17	7.94
MMSE	29.4	(0.9)	27.4	(1.4)	0.0706	0.16	6.11
Sueño [s]	7:51:30	(0:57:36)	7:16:48	(2:24:43)	0.6836	0.50	5.24
MOR [s]	0:52:06	(0:23:00)	0:34:18	(0:22:14)	0.2486	1.24	7.99
MOR [%]	11.3	(5.1)	8.4	(4.8)	0.3871	0.91	7.96

DE=Desviación Estándar

**Cuadro 5.5:** Correlaciones entre variables independientes

	1	2	3	4	5	6
1 Edad	•					
2 Escolaridad	-0.7134*	•				
3 Neuropsi	-0.2432	0.3776	•			
4 MMSE	-0.1063	0.1812	0.8477***	•		
5 Sueño [s]	0.0486	-0.0944	0.0545	0.0374	•	
6 MOR [s]	0.2796	-0.5035	0.1879	0.2618	-0.1515	•
7 MOR [%]	0.3709	-0.5287	0.0182	0.0748	-0.3578	1****

Niveles de significancia: \* $<.05$  , \*\* $<.01$  , \*\*\* $<.005$  , \*\*\*\* $<.001$

luego entonces las cantidades que fueron estudiadas (estacionariedad, espectro de potencias) no tienen correlaciones sesgadas con las demás variables.

### 5.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao

Se fragmentaron los registros en ventanas de 30 segundos de duración, sin traslape. Cada una de estas ventanas fue sometida a la prueba de PSR, y se clasificó como *estacionaria en el sentido de PSR* si fue posible rechazar ( $p < 0.05$ ) la hipótesis de no-estacionariedad. Los resultados obtenidos (una lista de las épocas que son estacionarias) se guardaron en archivos de texto para su posterior análisis. Debido a

la gran variabilidad entre el tiempo que los participantes pasaron en sueño MOR, se decidió basar las comparaciones en proporciones de épocas; por ejemplo, se calculó la proporción de épocas MOR que son estacionarias para todos los participantes.

Como análisis exploratorio se graficaron en el tiempo las épocas, en todos los canales, como se muestra en la figura 5.1. Este tipo de gráficos *revelan* cierto tipo de *bloques* de épocas estacionarias o no-estacionarias. Heurísticamente se puede afirmar que éstos patrones son independientes de la prueba de PSR, y anteriormente se reportó que estos patrones suelen coincidir con la aparición de sueño MOR. Más adelante se ofrece una discusión al respecto.

En otro ámbito, se replicó la metodología usada por McEwen [39] para contrastar la afirmación de que las series de tiempo *suficiente cortas* son estacionarias. Este procedimiento consistió en repetir la clasificación de épocas variando el tamaño de ventana; los tamaños de ventana se tomaron de la forma  $30 \times 2^n$  segundos, para comparar con el tamaño de época recomendado por la AASM.

Usando la clasificación de épocas estacionarias, obtenida para diferentes tamaños de ventana, se construyeron más gráficos sobre la ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. Estos nuevos gráficos, como el de la figura 5.3, refuerzan heurísticamente la hipótesis de que los patrones son significativos fisiológicamente.

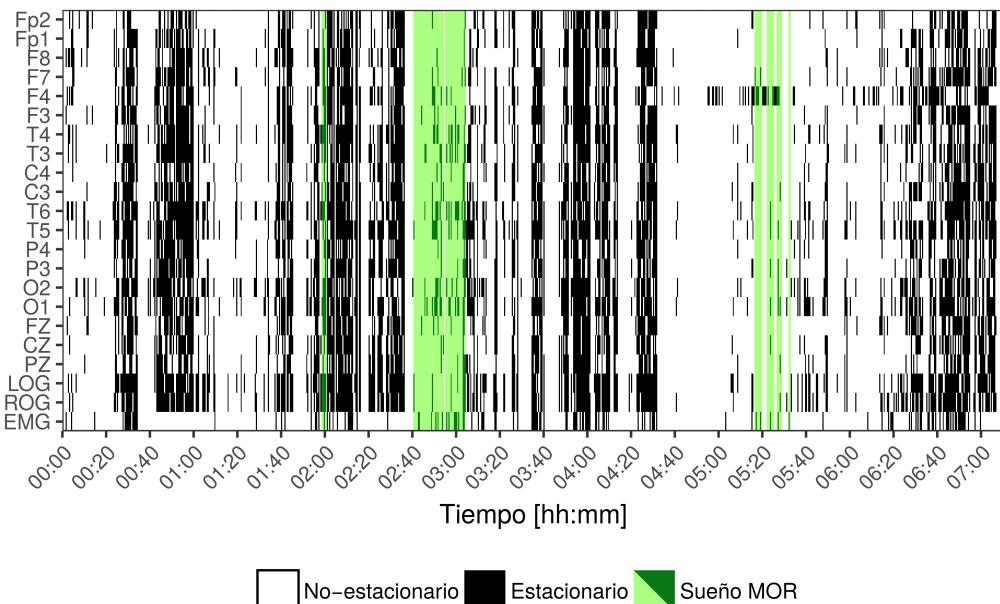
En base a resultados previos usando esta técnica, se espera que el comportamiento de los patrones visuales obedezca al fenómeno de **estacionariedad local**; esta característica, descrita por Dahlhaus [19], implica que un proceso puede ser aproximado a trozos *ensamblando* procesos estacionarios. Esta caracterización del EEG ha sido usada anteriormente de manera fructífera pero problemática [5, 28]. Dentro del modelo para registros de PSG, la estacionariedad local significa que el PSG no es formalmente homogéneo *pero* puede entenderse como varios segmentos homogéneos. En un sentido más general, es coherente pensar que el PSG se componga tanto de segmentos homogéneos como de *eventos puntuales* y artefactos.

En la figura 3.1 se muestra esquemáticamente cómo el tamaño de las ventanas puede influir para su clasificación como estacionarias/homogéneas.

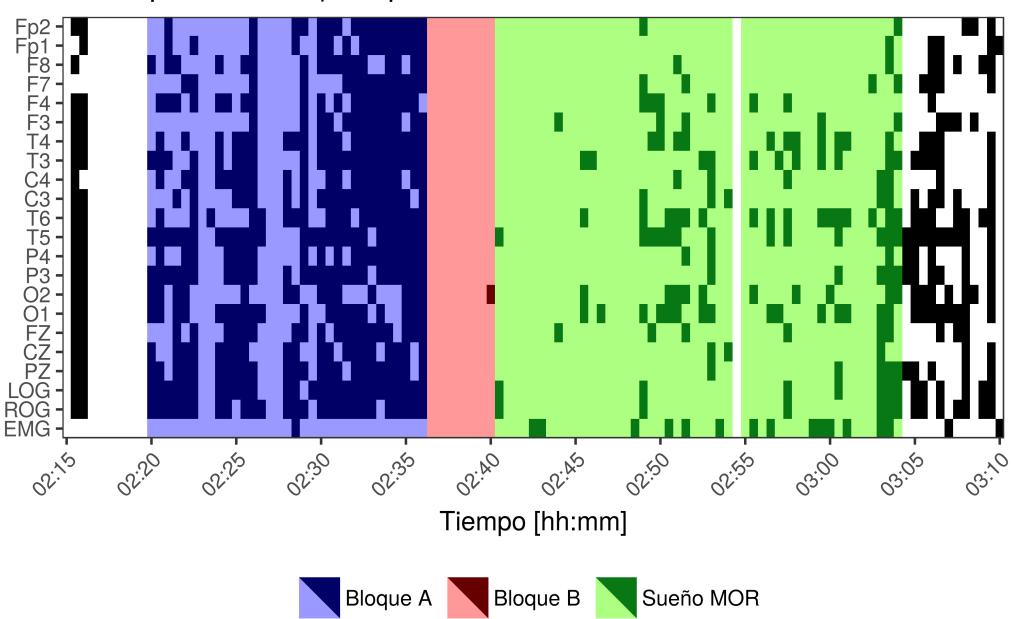
Entonces, se propone que los registros de PSG se comportan como procesos localmente estacionarios; más aún, se propone que esta característica cambia cualitativamente en adultos mayores con PDC, para los cuales el *nivel de homogeneidad* del PSG es muy similar durante MOR y NMOR.

Cabe destacar que la aplicación *per se* de la prueba fue efectuada usando el

Participante: VCR | Grupo: CTL

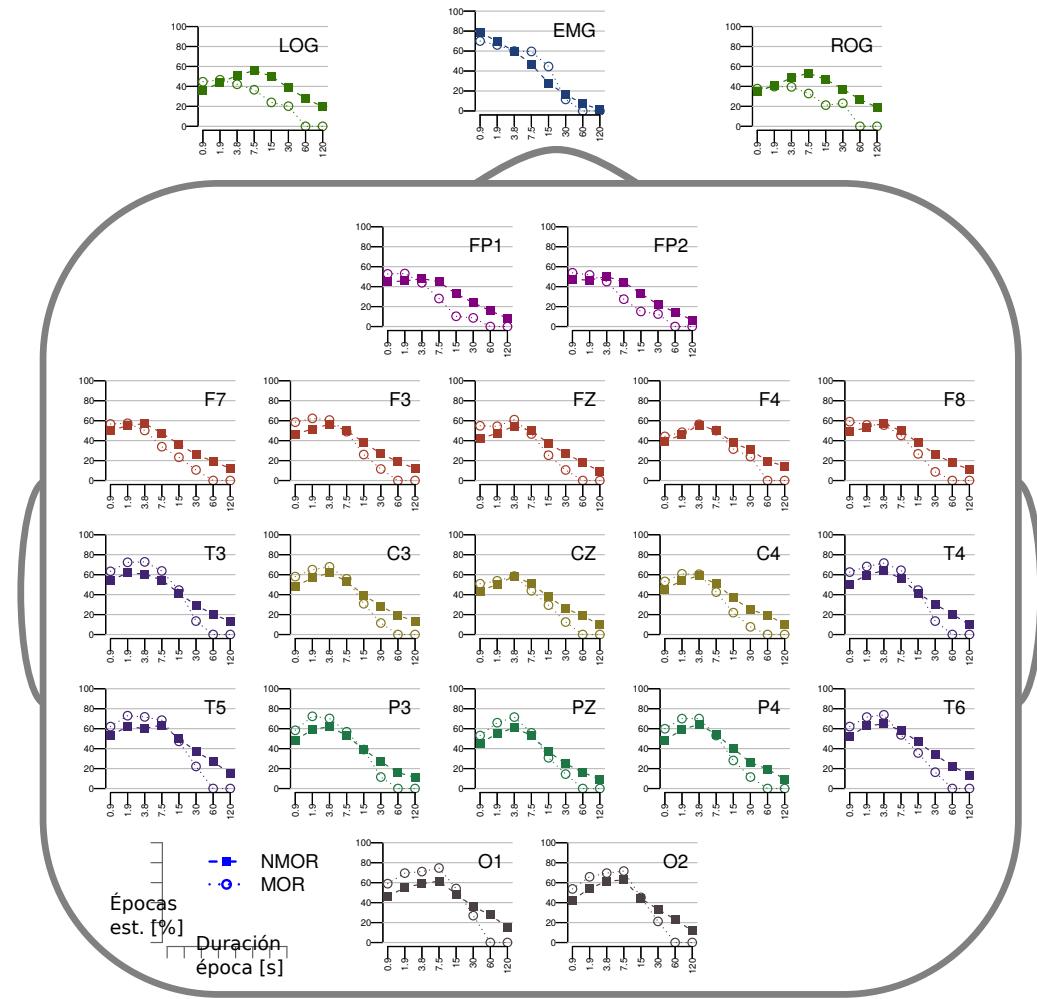


Participante: VCR | Grupo: CTL



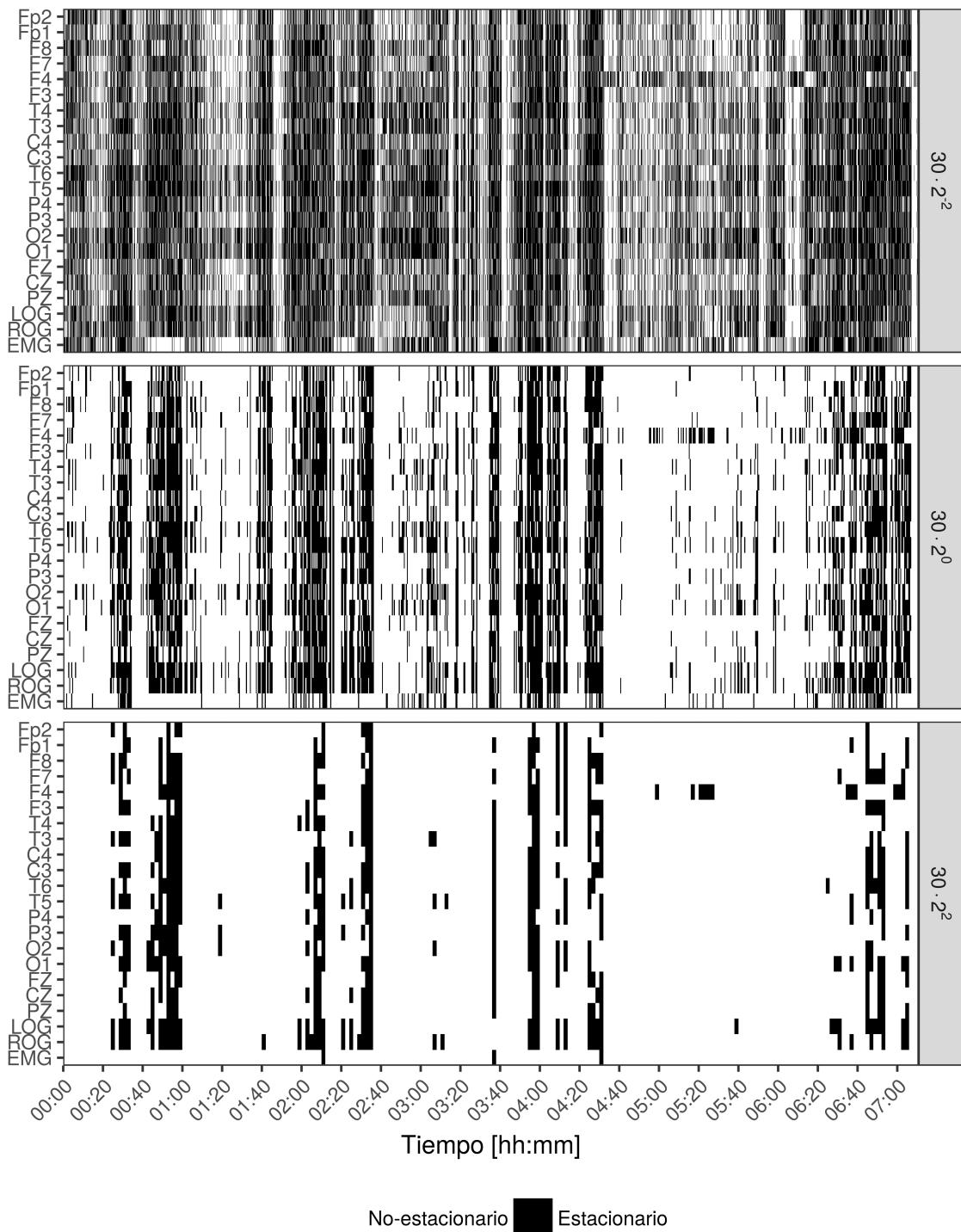
**Figura 5.1:** Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes.  
**Arriba:** Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. **Abajo:** Patrón de bloques relacionado con el sueño MOR

### Sujeto VCR | Grupo Nn



**Figura 5.2:** Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana

Participante: VCR | Grupo: CTL



**Figura 5.3:** Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana.

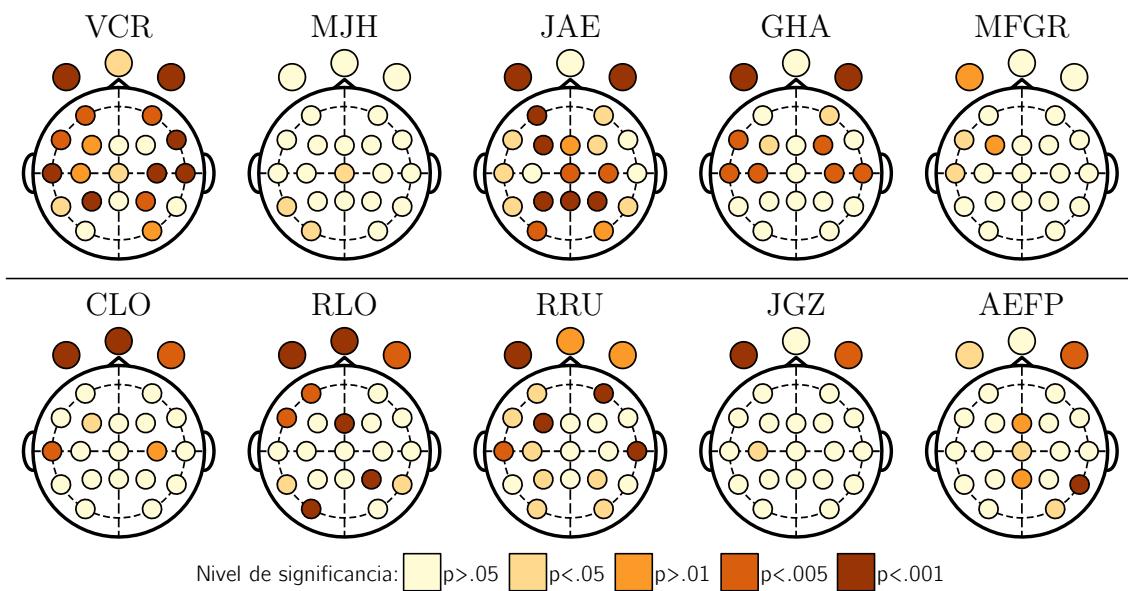
software estadístico R. En particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete `fractal` [16] bajo la función `stationarity`.

## 5.4. Variabilidad dentro del sujeto

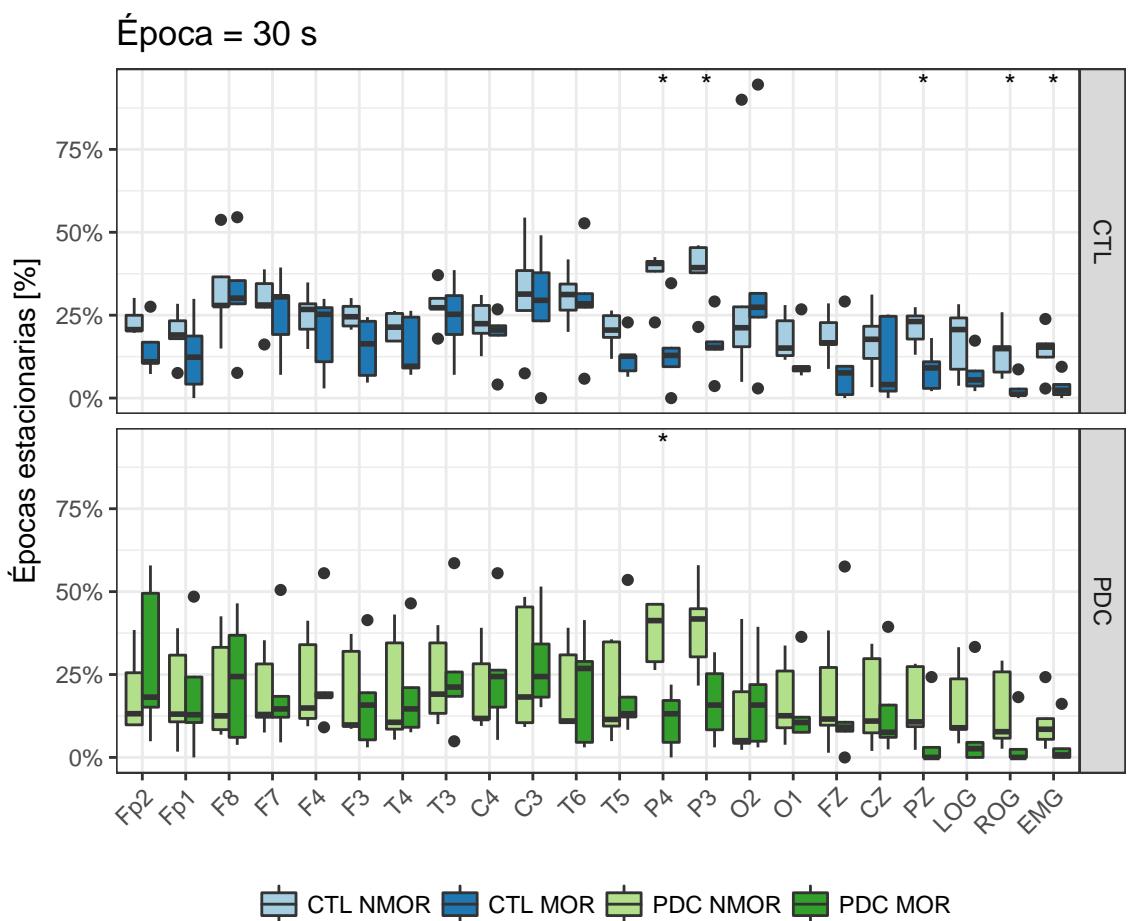
Se sometió a prueba la hipótesis de que durante sueño MOR ocurre en mayor medida la estacionariedad débil, en comparación con el sueño NMOR. Para ello, se compararon el porcentaje de épocas estacionarias en el sentido de PSR, ocurridas durante sueño MOR y NMOR. La comparación fue efectuada usando la prueba  $\chi^2$  de Pearson. Se encontró de manera consistente que los canales ROG y LOG presentaron diferencias significativas ( $p < 0.05$ ) entre sueño MOR y NMOR, lo cual puede explicarse por los movimientos oculares rápidos característicos del sueño MOR. En los canales que corresponden al EEG no se encontraron patrones consistentes y claros entre los sujetos (ver figura 5.4).

Se repitió la comparación a un nivel grupal, usando la prueba  $U$  de Mann-Whitney. Se encontraron diferencias significativas para el grupo CTL en los canales P3, P4, PZ, ROG y EMG; en el grupo PDC se observaron tales diferencias sólo en P4. Las proporciones muestran tendencias que, quizás, resultaron no ser significativas por el tamaño pequeño de la muestra: los canales P3 y PZ podrían ser diferentes también para individuos del grupo PDC, y el canal LOG podría ser diferente durante sueño MOR y NMOR. Así mismo se hipotetiza que para el grupo CTL, en todos los canales, el sueño MOR es presenta menor cantidad de épocas estacionarias.

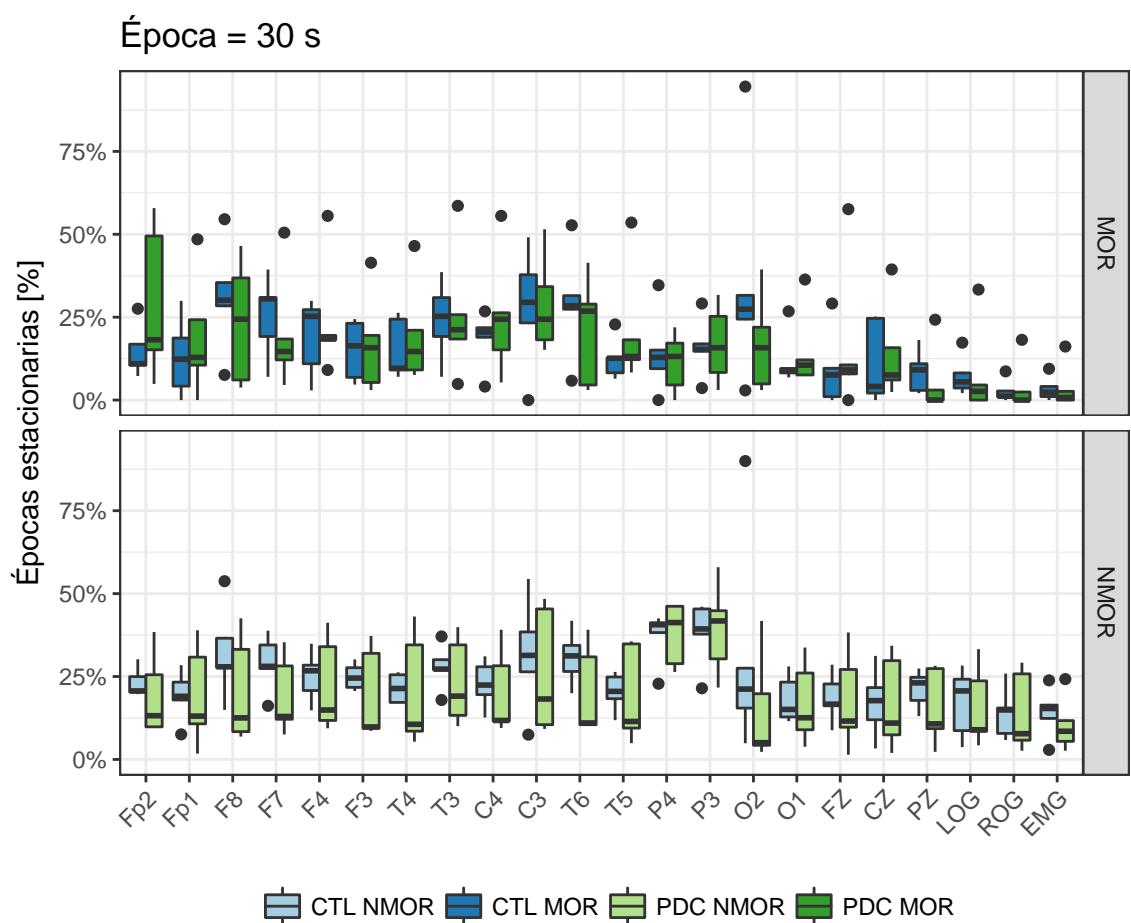
Se concluye que no se puede establecer diferencias entre las medias grupales para esta cantidad (proporción de épocas estacionarias, medidas en el sentido de PSR), debido a la gran variabilidad entre sujetos.



**Figura 5.4:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos



**Figura 5.5:** Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.



**Figura 5.6:** Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC.

# Capítulo 6

## Discusión y conclusiones

Una práctica común en el análisis de señales electrofisiológicas es el suponer que una serie de tiempo *suficientemente* corta pueda considerarse estacionaria, cuando menos en el sentido débil; anteriormente se ha señalado que se trata de un efecto de muestras pequeñas [43], y paralelamente se han incorporado a los diseños experimentales motivos para mantener este supuesto [27].

Este trabajo parte de la hipótesis de que adultos mayores con PDC presentan en mayor medida estacionariedad débil en sus registros de PSG; al comparar sujetos de los grupo Nn (control) y Mn (PDC), no se observaron cambios significativos en la porción de tiempo durante la cual el registro de PSG se comporta como débilmente estacionario. Esto puede interpretarse como que los cambios en la corteza cerebral durante el deterioro cognitivo, no provocan que la señal se vuelva más *simple* en el sentido de *volverse* estacionaria.

Comparando grupalmente la cantidad de épocas estacionarias durante MOR y NMOR, se encontró que en el grupo Nn había diferencias significativas en sitios de la región frontal y que no eran presentes en el grupo Mn; para poder establecer una relación con el PDC haría falta un mayor grupo muestral, o bien nuevos registros de PSG para los mismos sujetos, o incluso analizar registros de EEG durante otro tipo de actividades y confirmar las diferencias encontradas.

Cabe destacar que la evidencia aportada indica que el PSG es un conjunto de señales que se comportan como no-estacionarias durante la mayor parte del sueño, lo cual confirma el supuesto usual de que las señales de origen biológico son por naturaleza no-estacionarias.

## 6.1. Conclusiones

Se concluye que es posible la ocurrencia de fragmentos arbitrariamente cortos de registros de PSG que no son débilmente estacionarios. Paralelamente, la presencia de estos fragmentos se ve influida por el estado de actividad del cerebro. Como consecuencia directa de este fenómeno, es posible limitar los efectos *distorsivos* de la no-estacionariedad, para lo cual basta un diseño experimental que distinga adecuadamente el estado de actividad a estudiar.

En otro ámbito, es en principio posible usar la proporción de estacionariedad (*densidad* de ventanas estacionarias en el sentido de PSR) en el EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Para ello, falta investigar las características particulares de la etapa que se busca identificar, así como otras etapas cercanas en el tiempo.

## 6.2. Trabajo a futuro

Una vez que se ha identificado un marcador para el PDC usando un grupo de laboratorio, conviene automatizar los análisis para su uso clínico sobre un público más general. Un uso más amplio de la técnica asegura una mayor población para poder estudiar la efectividad y sensibilidad de la prueba Y más que eso, se espera que puedan ser sinceramente beneficiosos para los pacientes. Siguiendo el protocolo usual, los marcadores presentados no serán usados como único recurso para generar un diagnóstico clínico, sino como un apoyo a las herramientas existentes.

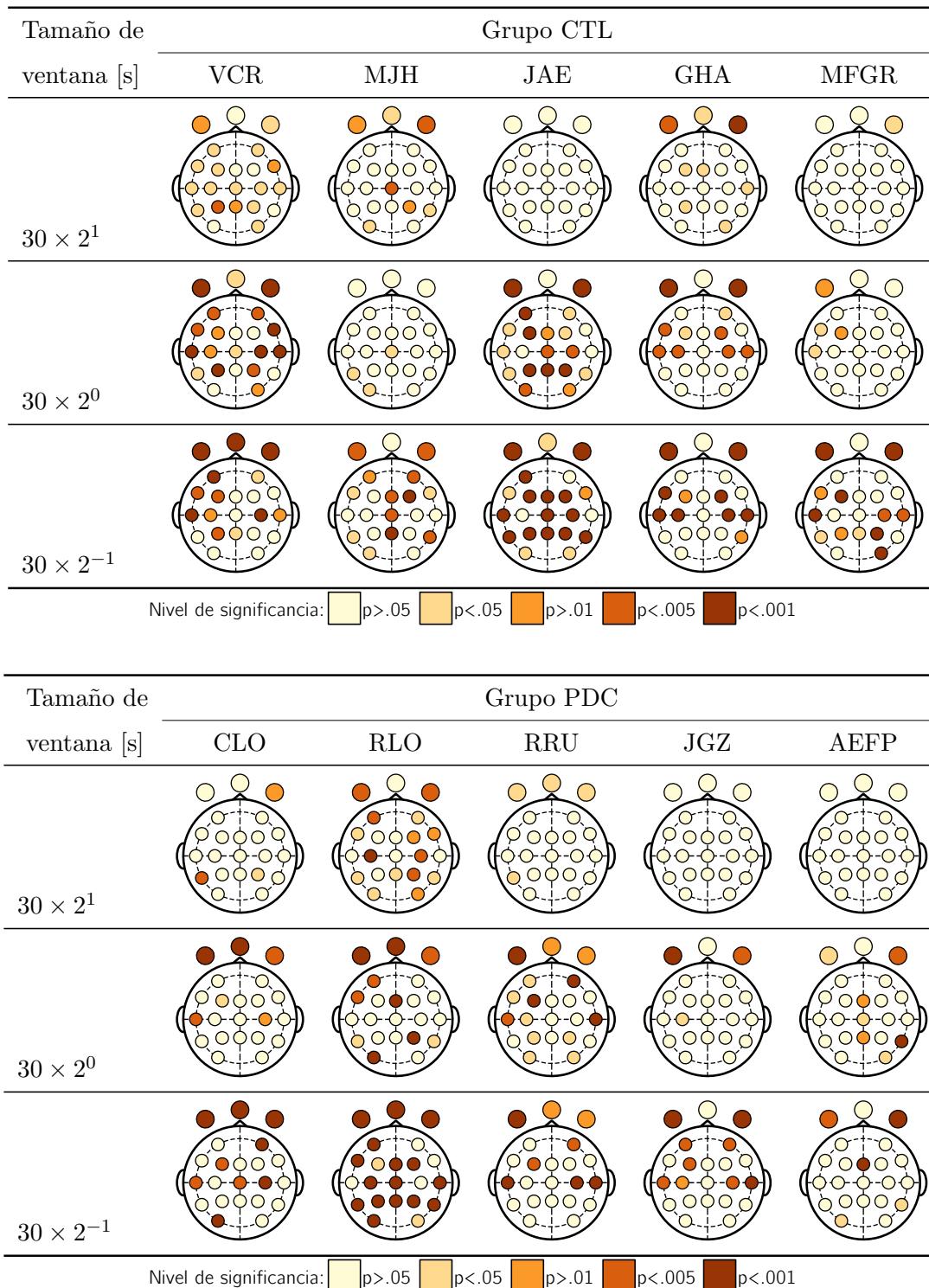
El uso de marcadores basados en registros de PSG –basados en el EEG en general– aporta una base fisiológica al diagnóstico de deterioro cognitivo, misma que no es posible usando únicamente pruebas neuropsicológicas. Conviene destacar que, de entre las herramientas para el registro fisiológico del sistema nervioso central, las técnicas electrofisiológicas son las más económicas y menos invasivas; generar marcadores basados en ellas facilita su uso por el público general como herramienta diagnóstica, sobre todo en ausencia de síntomas.

# Apéndice A

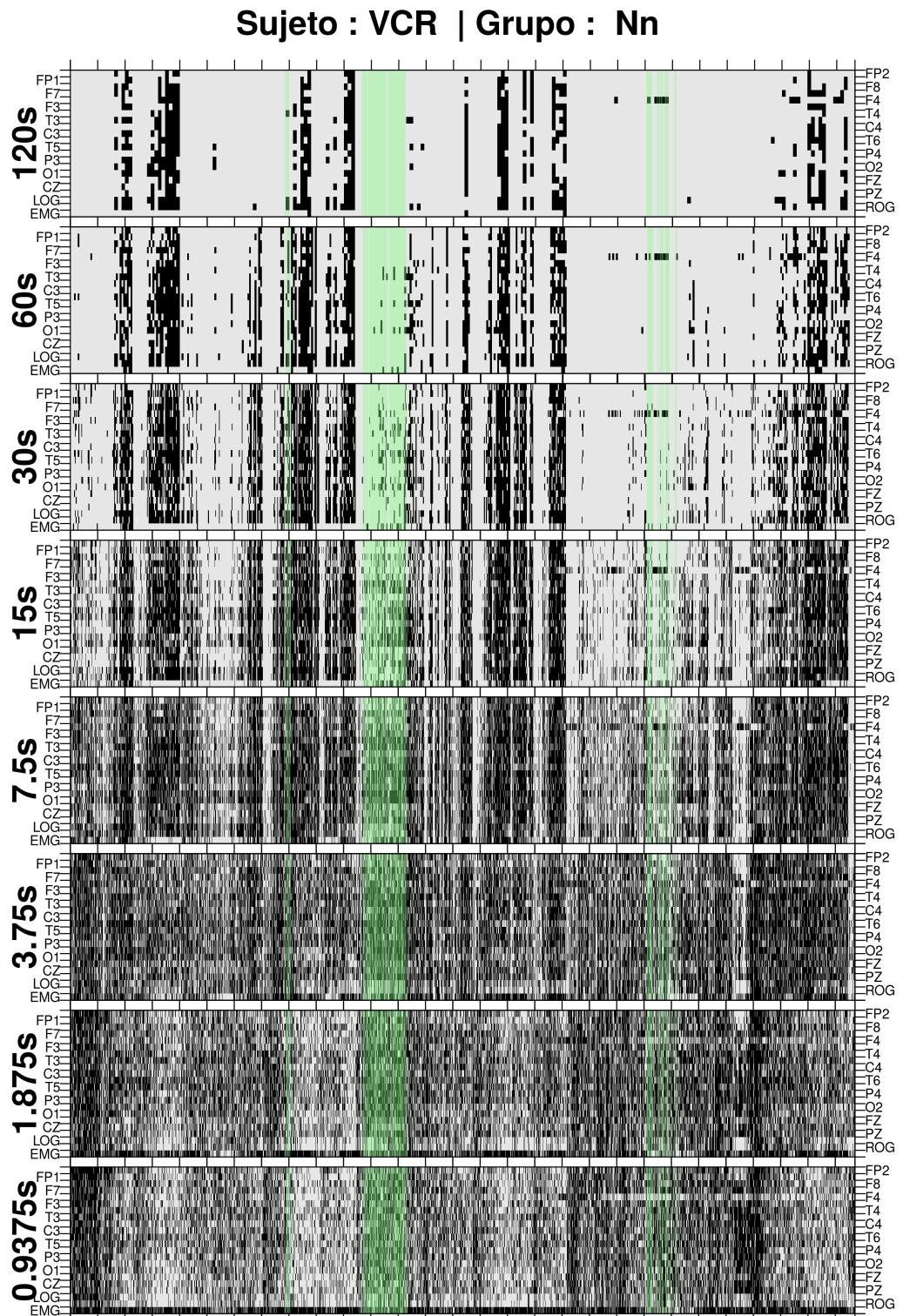
## Compilados gráficos

En este apéndice se muestran los compilados gráficos mencionados en la parte de resultados, y que representan la distribución temporal y pseudo-espacial de las ocurrencia de épocas PSG dentro de los registros para cada paciente.

Primeramente se presentan los compilados gráficos en los que se ha destacado el sueño MOR; posteriormente se presentan los mismos gráficos resaltando los patrones visuales propuestos, que parecen estar relacionados con la aparición de sueño MOR.

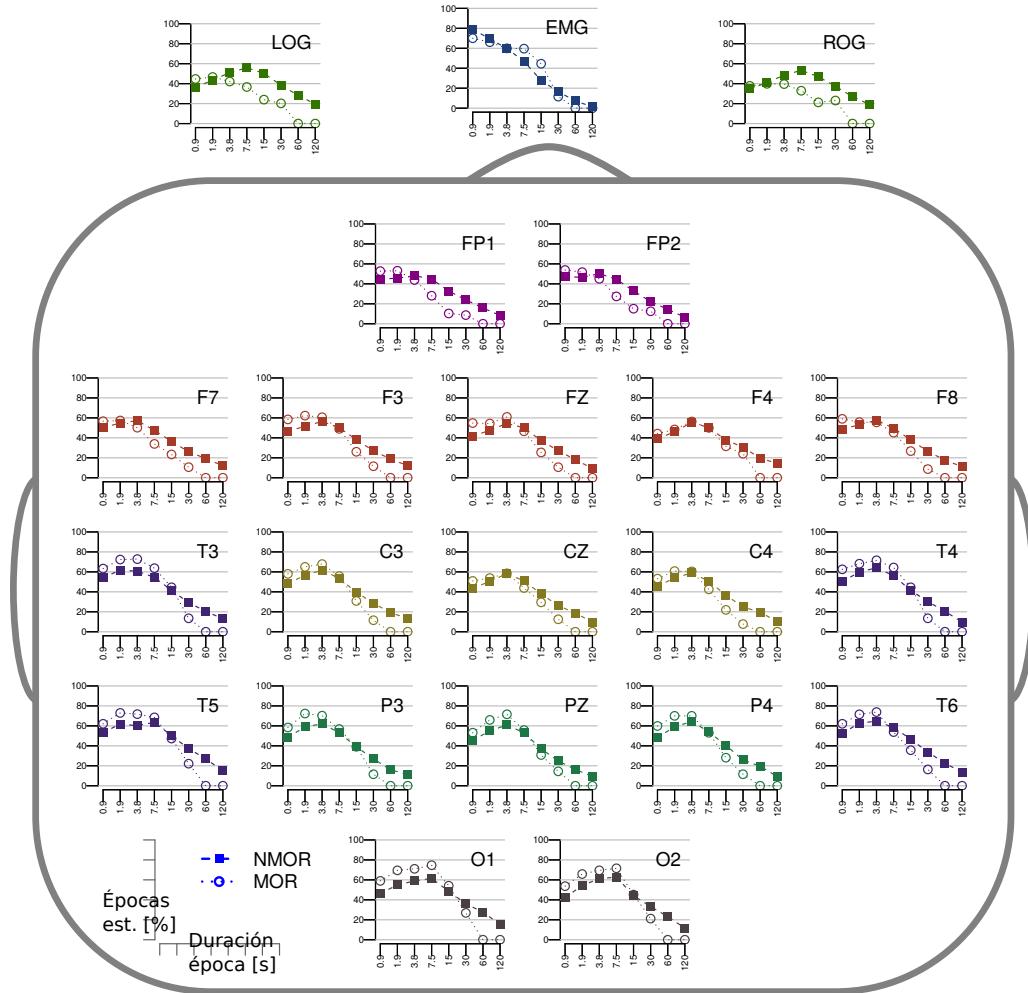


**Figura A.1:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana



(a) Épocas estacionarias usando diferentes tamaños de ventana

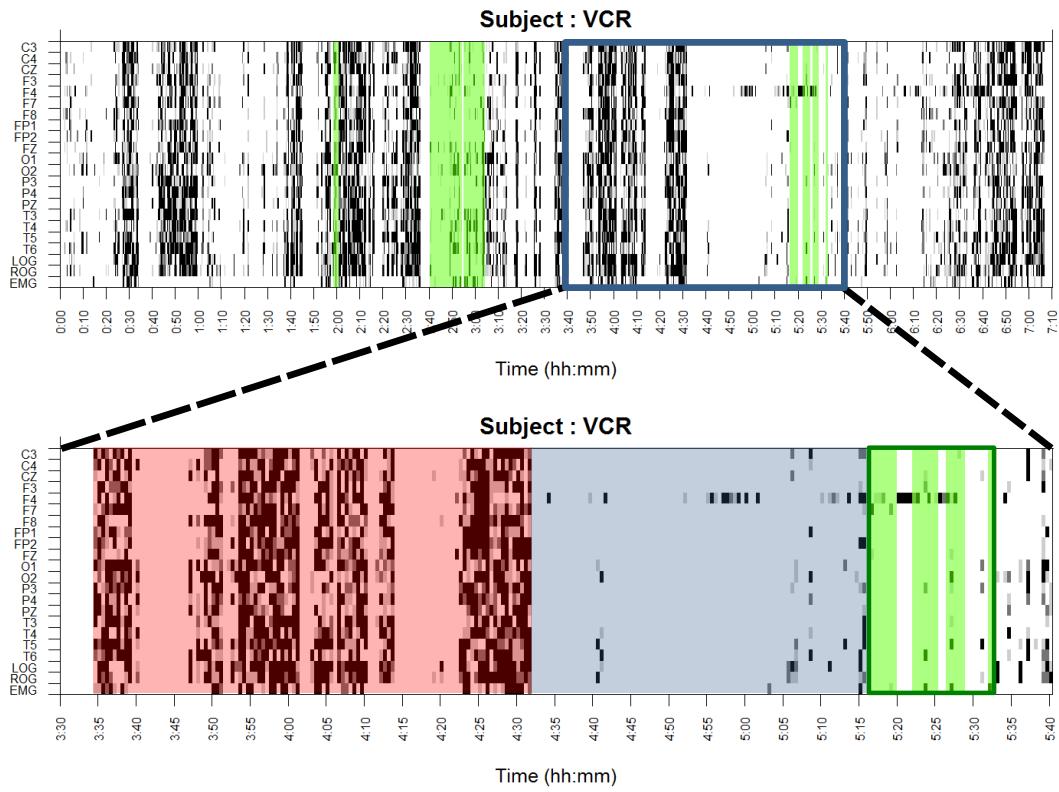
### Sujeto VCR | Grupo Nn



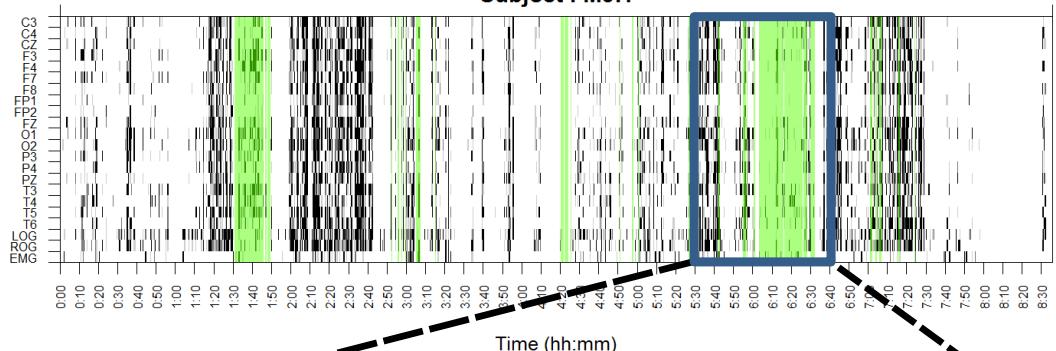
(b) Resumen de épocas estacionarias según tamaño de ventana

**Figura A.2:** Gráficos individuales para el sujeto VCR

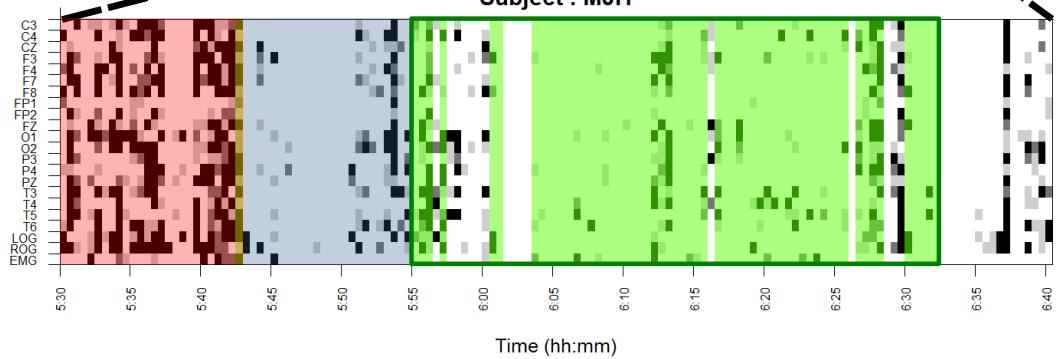
## Patrones visuales



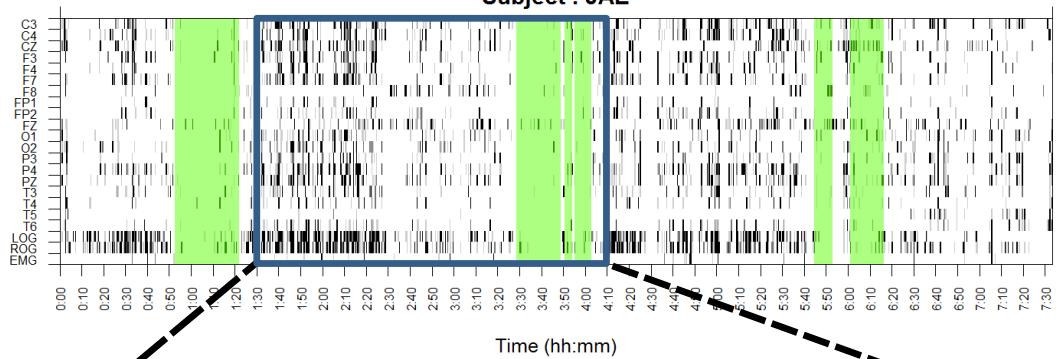
**Subject : MJH**



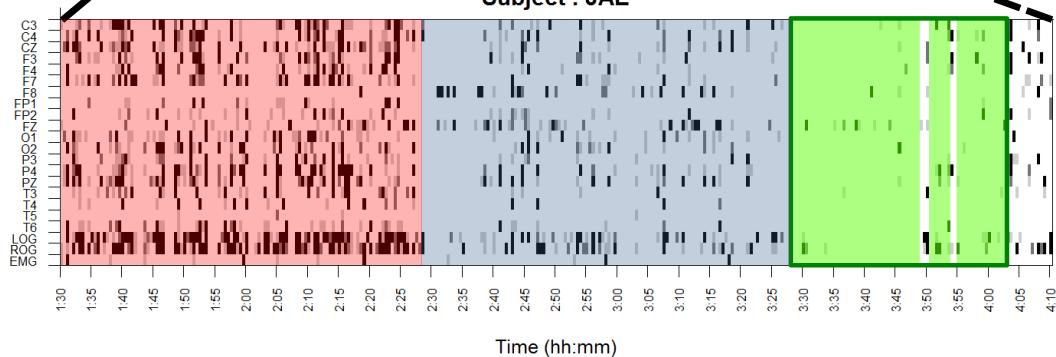
**Subject : MJH**



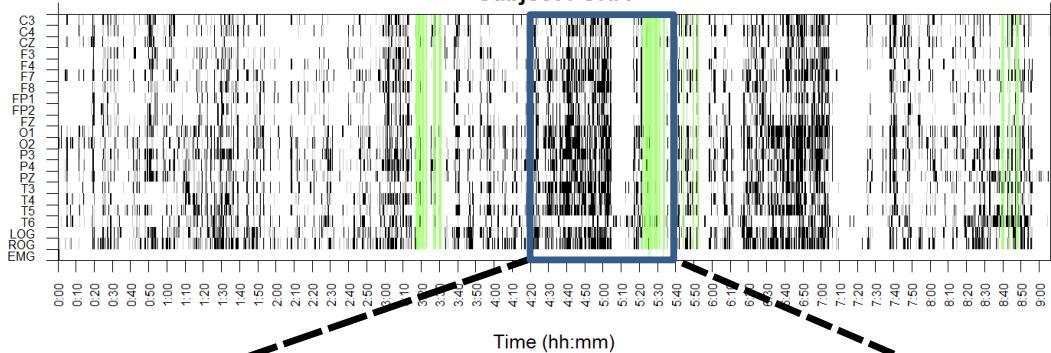
**Subject : JAE**



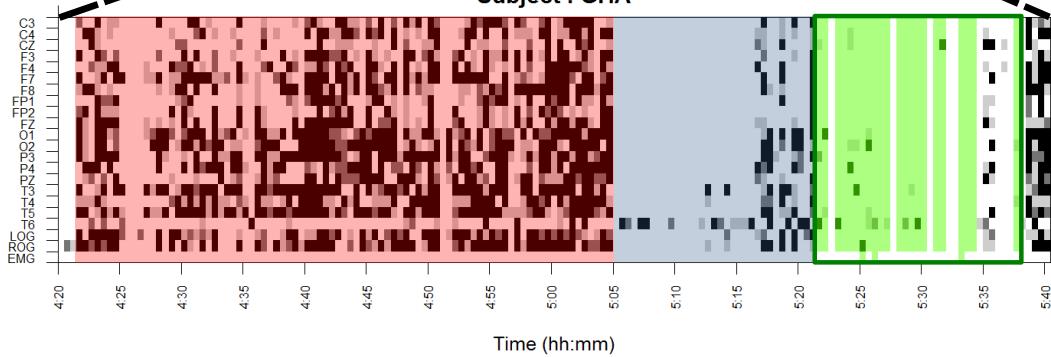
**Subject : JAE**



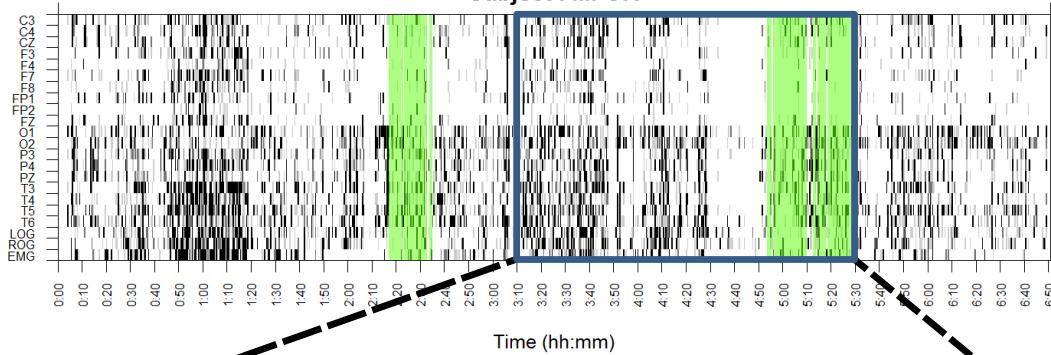
**Subject : GHA**



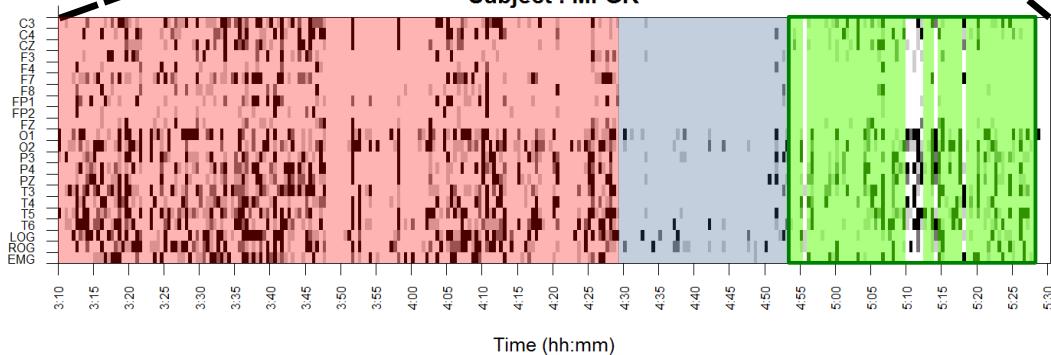
**Subject : GHA**



**Subject : MGFR**



**Subject : MGFR**





# Bibliografía

- [1] Abrisqueta-Gómez, J., Ostrosky-Solis, F., Bertolucci, P. H. F. y Bueno, O. F. A.: *Applicability of the Abbreviated Neuropsychologic Battery (NEUROPSI) in Alzheimer Disease Patients.* Alzheimer Disease & Associated Disorders, 22(1):72–78, 2008. [4.2](#)
- [2] Amer, M. S., Hamza, S. A., El Akkad, R. M. y Abdel Galeel, Y. I. I.: *Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes?* Aging & Mental Health, 17(7):788–792, 2013. [\(document\)](#)
- [3] Ardila, A. y Ostrosky, F.: *Guía para el diagnóstico neuropsicológico.* Florida: American Board of Professional Neuropsychology, 2012. [4.2, 5.1, 5.1](#)
- [4] Asimov, I.: *Memorias.* Ediciones B, 1994. [\(document\)](#)
- [5] Barlow, J. S.: *Methods of Analysis of Nonstationary EEGs, with Emphasis on Segmentation Techniques: A Comparative Review.* Journal of Clinical Neurophysiology, 2(3):267–304, 1985. [5.3](#)
- [6] Blake, M. G. y Boccia, M. M.: *Basal Forebrain Cholinergic System and Memory.* Curr Top Behav Neurosci., 2017. [4.3](#)
- [7] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H<sub>15</sub> 2 O PET study.* Brain, 120:1173–1197, 1997. [4.3](#)
- [8] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H<sub>2</sub> (15) O PET study.* Brain: a journal of neurology, 120(7):1173–1197, 1997. [\(document\)](#)

- [9] Brayet, P., Petit, D., Frauscher, B., Gagnon, J. F., Gosselin, N., Gagnon, K., Rouleau, I. y Montplaisir, J.: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment*. Clinical EEG and Neuroscience, 47(2):134–141, 2016. ([document](#)), 4.3
- [10] Britannica The Editors of Encyclopædia: *Electroencephalography*. <https://www.britannica.com/science/electroencephalography>. Revisado: 2017-11-15. 4.1
- [11] Carrillo-Mora, P., Ramírez-Peris, J. y Vázquez, K. Magaña: *Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario*. Revista de la Facultad de Medicina, 56(4):5–15, 2013. 4.4.1
- [12] Chen, P., Wu, D., Chen, C., Chi, N. y Kang, J.H. and Hu, C.: *Rapid eye movement sleep atonia in patients with cognitive impairment*. J Neurol Sci, 15:34–37, 2011. 4.3
- [13] Clark, Jr., J. W.: *The Origin of Biopotentials*. En Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*, cap. 4, págs. 126–188. Wiley, Estados Unidos, 4<sup>a</sup> ed., 2009. 4.4
- [14] Cohen, B. A. y Sances, A.: *Stationarity of the human electroencephalogram*. Medical and Biological Engineering and Computing, 15(5):513–518, 1977. ([document](#))
- [15] CONAPO: *Proyecciones de población de México 2000-2050 (Projections about the population of Mexico 2000-2050)*. Consejo Nacional de Población, México., 2010. 4.2
- [16] Constantine, W. y Percival, D.: *fractal: Fractal Time Series Modeling and Analysis*, 2016. <https://CRAN.R-project.org/package=fractal>, R package version 2.0-1. 5.3
- [17] Contreras, S. A.: *Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud*. Revista Médica Clínica Las Condes, 24(3):341–349, 2013. 4.4.1
- [18] Corsi, M.: *Psicofisiología del sueño*. Trillas, México, 1983. 4.3

- [19] Dahlhaus, R. y cols.: *Fitting time series models to nonstationary processes*. The annals of Statistics, 25(1):1–37, 1997. [5.3](#)
- [20] Datta, S., Mavanji, V., Ulloor, J. y Patterson, E.: *Activation of phasic pontine-wave generator prevents rapid eye movement sleep deprivation-induced learning impairment in the rat: a mechanism for sleep-dependent plasticity*. Journal of neuroscience, 24:1416–1427, 2004. [4.3](#)
- [21] Fishbein, W.: *Disruptive effects of rapid eye movement sleep deprivation on long-term memory*. Physiology & Behavior, 6(4):279–282, 1971. ([document](#)), [4.3](#)
- [22] Fishbein, W. y Gutwein, B. M.: *Paradoxical sleep and memory storage processes*. Behavioral Biology, 19(4):425–464, 1977. ([document](#)), [4.3](#)
- [23] Iber, C., Ancoli-Israel, S., Chesson, A., Quan, S. F. y cols.: *The AASM manual for the scoring of sleep and associated events: rules, terminology and technical specifications*, vol. 1. American Academy of Sleep Medicine Westchester, IL, 2007. [4.3](#)
- [24] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, INEGI: *Censo de Población y Vivienda 2010*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/>. Revisado: 2017-11-15. ([document](#))
- [25] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, INEGI: *Encuesta Intercensal 2015*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/especiales/intercensal/>. Revisado: 2017-11-15. ([document](#))
- [26] Instituto Nacional de Geriatría y Secretaría de Salud: *Plan de acción Alzheimer y otras demencias. México, 2014*, 2014. México. ([document](#))
- [27] Kaiser, D. A.: *QEEG: State of the Art, or State of Confusion*. Journal of Neurotherapy, 4(2):57–75, 2000. ([document](#)), [2, 6](#)
- [28] Kaplan, A. Y.: *The problem of segmental description of human electroencephalogram*. HUMAN PHYSIOLOGY C/C OF FIZIOLOGIIA CHELOVEKA, 25:107–114, 1999. [5.3](#)

- [29] Kawabata, N.: *A Nonstationary Analysis of the Electroencephalogram*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-20(6):444–452, 1973. ([document](#))
- [30] Klem, G., Lüders, H. O., Jasper, H. H. y Elger, C.: *The ten-twenty electrode system of the International Federation*. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 52:3–6, 1999. ([Suplemento](#)). [4.4](#)
- [31] Knopman, D. S., DeKosky, S. T., Cummings, J., Chui, H., Corey-Bloom, J., Relkin, N., Small, G., Miller, B. y Stevens, J.: *Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (An Evidence-based Review) Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology*. *Neurology*, 56(9):1143–1153, 2001. ([document](#)), [4.1](#)
- [32] Lindgren, B. R.: *Statistical Theory*. Chapman & Hall, 4<sup>a</sup> ed., 1993. [1](#)
- [33] Lipsitz, L. A. y Goldberger, A.: *Loss of complexity and aging, potential applications of fractals and chaos theory to senescence*. *Journal of the American Medical Association*, 267(13):1806–1809 doi:10.1001/jama.1992.03480130122036, 1992. [4.3](#)
- [34] Llinás, R. y Ribary, U.: *Coherent 40 Hz oscillation characterizes dream state in humans*. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 90:2078–2081 (?), 1993. [4.3](#)
- [35] Lopez, C. A.: *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-5*. Editorial medica panamericana, 2014. [4.1](#)
- [36] Louie, K. y Wilson, M.: *Temporally structured replay of awake hippocampal ensemble activity during rapid eye movement sleep*. *Neuron*, 29:145–156, 2001. [4.3](#)
- [37] Lucero, M.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat*. *Brain research*, 20:319–322, 1970. [4.3](#)
- [38] Lucero, M. A.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat*. *Brain Research*, 20(2):319–322, 1970. ([document](#))

- [39] McEwen, J. A. y Anderson, G. B.: *Modeling the Stationarity and Gaussianity of Spontaneous Electroencephalographic Activity*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-22(5):361–369, 1975. ([document](#)), 5.3
- [40] McKhann, G., Drachman, D., Folstein, M., Katzman, R., Price, D. y Stadlan, E.: *Clinical diagnosis of Alzheimer's disease: report of the NINCDS-ADRDA Work group under the auspices of Department of Health and Human Services Task Force on Alzheimer's disease*. Neurology, 34:939–944, 1984. 4.2
- [41] Mejía-Arango, S. y Gutiérrez-Robledo, L.: *Prevalence and incidence rates of dementia and cognitive impairment no dementia in the Mexican population: data from the Mexican Health and Aging Study*. J. Aging Health, 23:1050–1074., 2011. 4.2
- [42] Mejía-Arango, S., Jaimes-Miguel, A., Villa, A., Ruiz-Arregui, L. y Gutiérrez-Robledo, L.: *Deterioro cognoscitivo y factores asociados en adultos mayores en México*. Salud Pública de México, 49:S475–S481, 2007. 5.2
- [43] Melard, G. y Schutter, A. H. d.: *Contributions to evolutionary spectral theory*. Journal of Time Series Analysis, 10(1):41–63, 1989. 6
- [44] Miyata, S., Noda, A., Iwamoto, K., Kawano, N., Okuda, M. y Ozaki, N.: *Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults*. Journal of Sleep Research, 22(5):535–541, 2013. ([document](#))
- [45] Montes-Rojas, J., Gutiérrez-Gutiérrez, L., Silva-Pereyra, J., García-Ramos, G. y Río Portilla, Y. del: *Perfil cognoscitivo de adultos mayores de 60 años con y sin deterioro cognoscitivo*. Rev Chil Neuropsicol, 7:121–126, 2012. 4.2
- [46] Moruzzi, G.: *Active processes in the brain stem during sleep. Harvey Lectures, 58, 233-297, in María Corsi.* (1983). Psicofisiología del sueño (Psychophysiology of sleep)., 1963. 4.3
- [47] Ostrosky-Solís, F., Ardila, A. y Rosselli, M.: *Neuropsi: A brief neuropsychological test battery in Spanish with norms by age and educational level*. Journal of the International Neuropsychological Society, 5:413–433, 1999. 4.2
- [48] Ostrosky-Solís, F., Gómez, M. E., Villaseñor, E. M., Roselli, M., Ardila, A. y Pineda, D.: *Neuropsi: Atención y Memoria*. Manual Moderno, 2<sup>a</sup> ed., 2003. 4.2

- [49] Ostrosky-Solís, F., López-Arango, G. y Ardila, A.: *Sensitivity and Specificity of the Mini-Mental State Examination in a Spanish-Speaking Population*. Applied Neuropsychology, 7(1):25–31, 2000. [1.3](#), [5.1](#)
- [50] Park, D. C. y Reuter-Lorenz, P.: *The Adaptive Brain: Aging and Neurocognitive Scaffolding*. Annual Review of Psychology, 60:173–196, 2009. [4.1](#)
- [51] Pavlides, C., Greenstein, Y., Grudman, M. y Winson, J.: *Long-term potentiation in the dentate gyrus is induced preferentially on the positive phase of theta-rhythm*. Brain research, 439:383–387, 1988. [4.3](#)
- [52] Pearlman, C.: *REM sleep deprivation impairs latent extinction in rats*. Physiology and behavior, 11:233–237, 1973. [4.3](#)
- [53] Pearlman, C. y Becker, M.: *REM sleep deprivation impairs bar-press acquisition in rats*. Physiology & Behavior, 13(6):813–817, 1974. ([document](#)), [4.3](#)
- [54] Pearlman, C. A.: *Latent learning impaired by REM sleep deprivation*. Psychonomic Science, 25(3):135–136, 1971. ([document](#)), [4.3](#)
- [55] Petersen, R. C., Doody, R., Kurz, A., Mohs, R. C., Morris, J. C., Rabins, P. V., Ritchie, K., Rossor, M., Thal, L. y Winblad, B.: *Current concepts in mild cognitive impairment*. Archives of neurology, 58(12):1985–1992, 2001. ([document](#))
- [56] Potvin, O., Lorrain, D., Forget, H., Dubé, M., Grenier, S., Préville, M. y Hudon, C.: *Sleep Quality and 1-Year Incident Cognitive Impairment in Community-Dwelling Older Adults*. SLEEP, 35(4):491–499, 2012. ([document](#))
- [57] Priestley, M. B.: *Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27(2):204–237, 1965. [3](#)
- [58] Priestley, M. B.: *Spectral Analysis and Time Series*, vol. 1, 2. Academic Press, 1981. [3](#)
- [59] Priestley, M. B. y Subba Rao, T.: *A Test for Non-stationarity of Time-series*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 31(1):140–149, 1969. [3.4](#)

- [60] Reid, K. J., Martinovich, Z., Finkel, S., Statsinger, J., Golden, R., Harter, K. y Zee, P. C.: *Sleep: A Marker of Physical and Mental Health in the Elderly*. The American Journal of Geriatric Psychiatry, 14(10):860–866, 2006. ([document](#))
- [61] Robles, A., Del Ser, T., Alom, J., Peña-Casanova, J. y Neurología Grupo Asesor del Grupo de Neurología de la Conducta y Demencias de la Sociedad Española de: *Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de Alzheimer*. Neurología, 17(1):17–32, 2002. ([document](#)), 4.1
- [62] Rosales-Lagarde, A.: *La relación sueños-cerebro y sus modelos*. Ludus Vitalis, 22(41):311–331, 2016. 4.4.1
- [63] Rosales-Lagarde, A., Martínez-Alcalá, C. y Pliego-Pastrana, P.: *Analysis of Neuropsychological Tests and functions to Diagnose Mild Cognitive Impairment in Mexico*. Alzheimerś and Dementia,, 12(supplement):746, 2016. 4.2
- [64] Rosales-Lagarde, A., Río-Portilla, Y. del, Guevara, M. A. y Corsi-Cabrera, M.: *Caída abrupta del tono muscular al entrar a sueño MOR en el ser humano*. Salud Mental, 31:117–123, 2009. 4.3
- [65] Rosales-Lagarde, A., Rodríguez-Torres, E., Enciso-Alva, J., Martínez-Alcalá, C., Vázquez-Tagle, G., Tetlalmatzi-Montiel, M., Viveros, J. y López-Noguerola, J. S.: *STATIONARITY DURING REM SLEEP IN OLD ADULTS*. Alzheimerś and Dementia, 13(7, Supplement):P723 – P724, 2017, ISSN 1552-5260. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1552526017311706>, 2017 Abstract Supplement. ([document](#))
- [66] Roumec, B., Gismondi, M., Gomez, A. M. y Sousa, L.: *Escala por interro-gatorio de las actividades de la vida diaria: validación y correlación con escalas de severidad de deterioro cognitivo en pacientes con demencia tipo Alzheimer*. Neurología Argentina, 6(3):137–141, 2014. 4.2
- [67] Schliebs, R. y Arendt, T.: *The cholinergic system in aging and neuronal degeneration*. Behavioural Brain Research, 221(2):555–563, 2011. ([document](#)), 4.3

- [68] Shorack, G. R.: *Probability for Statisticians*. Springer texts in statistics. Springer, 1<sup>a</sup> ed., 2000. [1](#)
- [69] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. SLEEP, 14(4):325–330, 1991. [\(document\)](#)
- [70] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. Sleep, 14:325–330, 2001. [4.3](#)
- [71] Steriade, M. y Amzica, F.: *Intracortical and corticothalamic coherency of fast spontaneous oscillations*. Proc. Natl. Acad. Sci., 93:2533–2538 ??, 1996. [4.3](#)
- [72] Sugimoto, H., Ishii, N., Iwata, A., Suzumura, N. y Tomita, T.: *On the stationarity and normality of the electroencephalographic data during sleep stages*. Computer Programs in Biomedicine, 8(3–4):224–234, 1978. [\(document\)](#)
- [73] Vargas Terrez, B. E., Villamil Salcedo, V., Rodríguez Estrada, C., Pérez Romero, J. y Cortés Sotres, J.: *Validación de la escala Kessler 10 (K-10) en la detección de depresión y ansiedad en el primer nivel de atención. Propiedades psicométricas*. Salud Mental, 34(4):323–331, 2011. [4.2](#)
- [74] Vázquez-Tagle Gallegos, G. R., García-Muñoz, V., Rosales-Lagarde, A., Rodríguez Torres, E., Martínez-Alcalá, C. y Reséndiz-Flores, O.: *Correlación inter-hemisférica durante el sueño MOR del Adulto Mayor con Deterioro Cognitivo*, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México. [\(document\)](#), [4.2](#), [4.4](#)
- [75] Velasco, S. L., Ayuso, L. L., Contador, I. y Pareja, F. B.: *Versiones en español del Minimental State Examination (MMSE). Cuestiones para su uso en la práctica clínica*. Revista de Neurología, 61(8):363–371, 2015. [4.2](#)
- [76] Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*. Wiley, Estados Unidos, 4<sup>a</sup> ed., 2009. [2.4.1](#)
- [77] Yesavage, J. A., Brink, T. L., Rose, T. L., Lum, O., Huang, V., Adey, M. y Leirer, V. O.: *Development and Validation of a Geriatric Depression Screening Scale: A Preliminary Report*. Journal of Psychiatric Research, 17(1):37–49, 1982. [4.2](#)

# Glosario

## **AABFM:** Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

Actividad de amplitud relativamente baja ( $< 10 \mu\text{V}$ ), visualmente desorganizada. No tiene una forma senoidal clara.

## **AASM:** American Academy of Sleep Medicine

Sociedad estadounidense dedicada al estudio de la *Medicina del sueño* (relativo al diagnóstico y tratamiento de trastornos del sueño). En dicha área, los estándares establecidos por esta organización se encuentran ampliamente difundidos.

## **DCL:** Deterioro Cognitivo Leve

Conjunto de deficiencias cognitivas *objetivas*, respecto a un estado anterior, que no cumplen los criterios para ser clasificadas como demencia. Para ello se entiende que una deficiencia es objetiva si puede confirmarse usando pruebas neuropsicológicas, en contraposición al reporte subjetiva por parte del individuo.

## **EEG:** Electroencefalografía

Lectura de la actividad eléctrica en la corteza cerebral, la cual se origina por la actividad postsináptica de las neuronas en dicha región. En el presente trabajo, el término EEG se limita a registros obtenidos mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo del individuo, siendo que otros autores también engloban registros obtenidos con microelectrodos insertos en el cerebro por ejemplo.

## **EMG:** Electromiografía

Lectura de la actividad eléctrica en las fibras musculares, la cual se origina por el reclutamiento y activación de fibras musculares por parte del sistema nervioso. En el presente trabajo, se limita el uso del EMG para distinguir la mayor o menor presencia de *tono muscular*, fenómeno característico de fibras musculares en actividad latente.

## **EOG:** Electrooculografía

**MOR:** [Sueño de] Movimientos Oculares Rápidos

Etapa de sueño nombrada con base la presencia típica de movimientos oculares rápidos. También se le conoce como *sueño paradójico* debido a que la actividad cerebral es similar a la vigilia pese a ser la etapa más profunda del sueño. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase R*.

**NMOR:** [Sueño] No-MOR

Contempla el sueño fuera de la etapa MOR, presentando características radicalmente diferentes. Pese a su definición negativa, se divide en sub-etapas con características distintivas claras. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase N*.

**PSG:** Polisomnografía

Registro conjunto durante el sueño de varias señales electrofisiológicas u otros indicadores fisiológicos.

**PDC:** Posible Deterioro Cognitivo [Leve]

Diagnóstico positivo para deterioro cognitivo usando únicamente los resultados de pruebas neuropsicológicas, y en particular las usadas en el presente trabajo. Debido a los estándares cautelosos de la psicología clínica, para otorgar el diagnóstico de *deterioro cognitivo leve* no puede otorgarse deben tomarse en cuenta varios estudios complementarios, como imagenología del cerebro por ejemplo.

## Catálogo de funciones comunes

**Delta de Kroneker ( $\delta$ )**

Usada para facilitar la descripción de productos ortogonales.

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

**H de Heavyside ( $H$ )** Usada para facilitar la descripción de *ondas cuadradas*.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

**O mayúscula de Landau ( $\mathcal{O}$ )**

Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones y  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  arbitrario. Se dice que  $f$  es *de orden  $g$  alrededor de  $x_0$*  si existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

en cuyo caso se dice  $f = \mathcal{O}(g)$