Estacionariedad débil

Detección en series electrofisiológicas

Julio Cesar Enciso Alva

Neuroscience Short Course

6 de julio de 2017

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

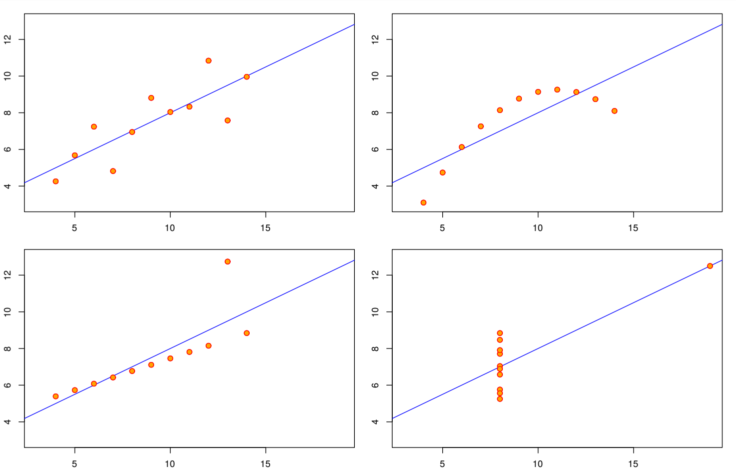
Conceptos

Ejemplo práctico

El estudio y diagnóstico de una gran cantidad de enfermedades depende de nuestra habilidad para registrar y analizar señales electrofisiológicas.

Se suele asumir que estas señales son complejas: no lineales, no estacionarias y sin equilibrio por naturaleza. Pero usualmente no se comprueban formalmente estas propiedades.

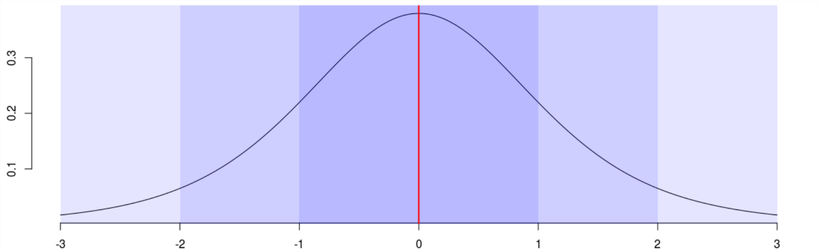
Motivación: formalidad



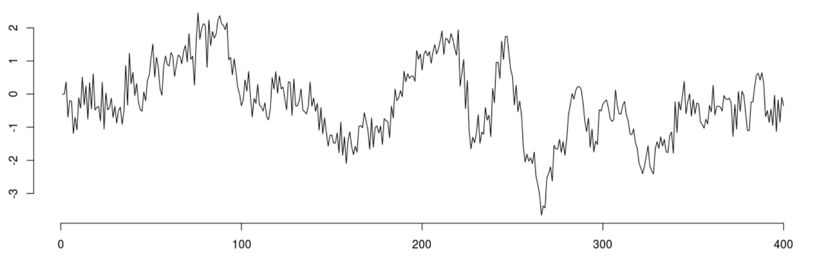
Conceptos

Conceptos

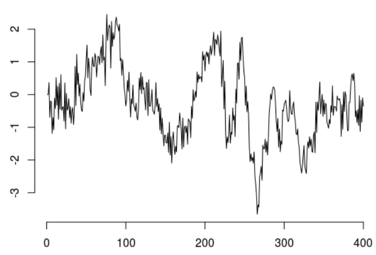
- Promedio (μ)
- Desviación estándar (σ^2)

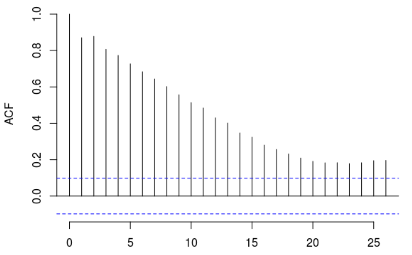


- Serie de tiempo $\{X(t)\}$

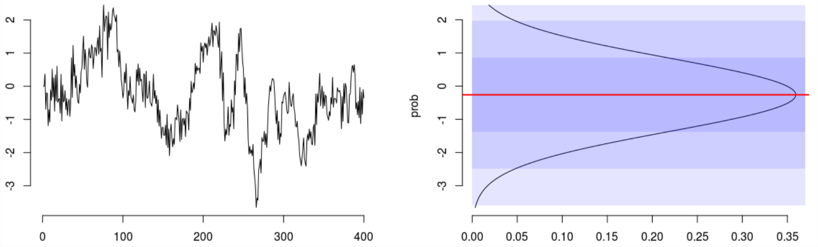


- Función de autocorrelación (ρ)

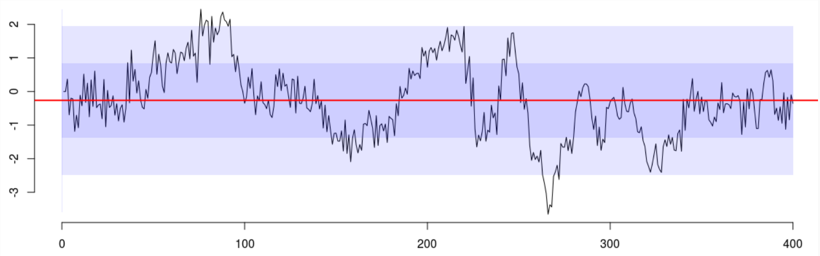




¿ Promedio y desviación estándar de una serie de tiempo ?



¿ Promedio y desviación estándar de una serie de tiempo ?



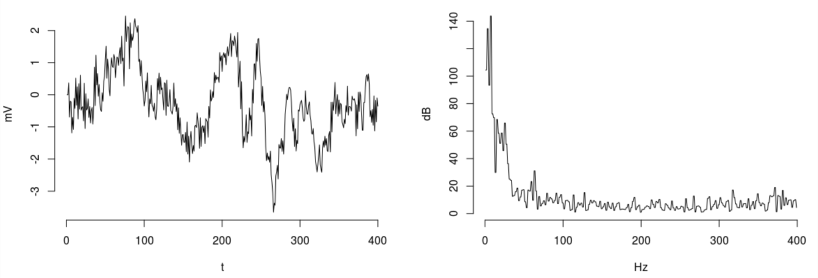
Definición (Estacionariedad débil)

Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles t, s se tiene que

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $\mathrm{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = \rho_X(s-t)$

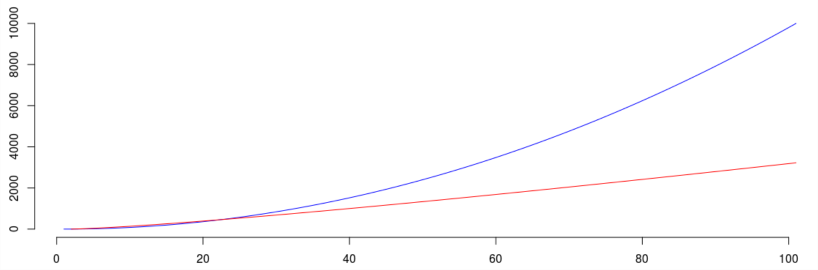
Con μ_X, σ_X^2 constantes, $\rho_X(\tau)$ únicamente depende de τ

Espectro de potencias: $f(\omega_j) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) e^{-i\omega_j t} dt$



Un atajo interesante

Cantidad de operaciones: $\mathcal{O}(N \log N)$ vs $\mathcal{O}(N^2)$



Espectro de potencias vs Autocorrelación

Teorema (Wiener-Khinchin)

Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea función de autocorrelación para algún proceso a tiempo continuo débilmente estacionario y estocásticamente continuo, $\{X(t)\}$, es que exista una función F tal que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Espectro de potencias para series no-estacionarias

Se considerarán procesos no-estacionarios de media cero y varianza finita que admitan una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t,\omega) e^{it\omega} dZ(\omega)$$

tal que

- $\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega), dZ(\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$
- $E\left[|dZ(\omega)|^2\right] = \mu(\omega)$

El espectro evolutivo fue definido por Priestley[1] como

$$f(t,\omega) = |A(t,\omega)|^2$$

[1] Maurice B Priestley. “Evolutionary spectra and non-stationary processes”. En: Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (1965), págs. 204-237.

Base de la prueba de Priestley-Subba Rao

Supóngase que puede expresarse a $\{X(t)\}$ como

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{i\omega t}\, d\xi(\omega)$$

$\{X(t)\}$ estacionario $\Rightarrow A(t, \omega)$ constante $\Rightarrow f(t, \omega)$ constante

Base de la prueba de Priestley-Subba Rao

Supóngase que puede expresarse a $\{X(t)\}$ como

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{i\omega t} \, d\xi(\omega)$$

$$\{X(t)\} \text{ estacionario} \Rightarrow A(t, \omega) \text{ constante} \Rightarrow f(t, \omega) \text{ constante}$$

Prueba de hipótesis para

$$H_0 : f(t, \bullet) \text{ no depende de } t$$

El estimador de doble ventana

Definición (Estimador de doble ventana)

$$\widehat{f}(t,\omega) = \int_{t-T}^{t} w_{T'}(u) |U(t-u,\omega)|^2 du$$

Donde $w_{T'}$, U, g, Γ son tales que

- $U(t,\omega) = \int_{t-T}^{t} g(u) X(t-u) e^{i\omega(t-u)} du$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$
- $w_\tau(t) \geqslant 0$ para cualesquiera t, τ
- $w_\tau(t) \to 0$ cuando $|t| \to \infty$, para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$ para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 dt < \infty$ para todo τ

Proposición

El estimador $\widehat{f}$ tiene las siguientes propiedades

- $E\left[\widehat{f}(t,\omega)\right] \approx f(t,\omega)$
- $\mathrm{Var}\left(\widehat{f}(t,\omega)\right) \approx \frac{C}{\tau} f^2(t,\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 \, d\theta$
- $\mathrm{Cov}\left(\widehat{f}(t_1,\omega_1), \widehat{f}(t_2,\omega_2)\right) \approx$
  $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) w_\tau(v) \mathrm{Cov}\left(|U(t_1-u,\omega_1)|^2, |U(t_2-u,\omega_2)|^2\right) du dv$

Estimador de doble ventana

Puede escribirse $Y(t,\omega) = \log\left(f(t,\omega)\right) + \varepsilon(t,\omega)$, donde

- $E\left[\varepsilon(t,\omega)\right] = 0$
- $\operatorname{Var}\left(\varepsilon(t,\omega)\right) \approx \dfrac{C}{\tau}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 \, d\theta =: \sigma^2$

Como f y Y dependen (o no) simultáneamente de t, se puede usar la siguiente prueba de hipótesis

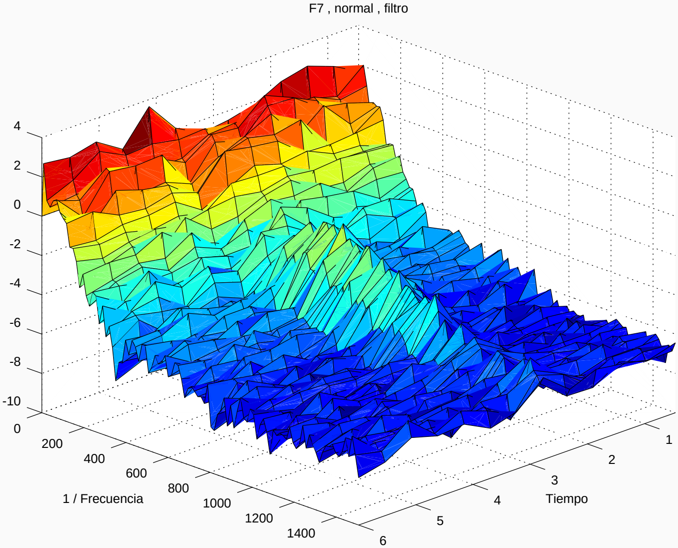
$$H_0 : \sum_{i=1}^{N} \left(Y(t,\omega_i) - \overline{Y}(\bullet,\omega_i)\right)^2 = 0$$

con $\overline{Y}(\bullet,\omega) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} Y(t_j,\omega)$

Resultados de la prueba PSR

```
Priestley-Subba Rao stationarity Test for datos
-----------------------------------------------
Samples used              : 3072
Samples available         : 3069
Sampling interval         : 1
SDF estimator             : Multitaper
  Number of (sine) tapers : 5
  Centered                : TRUE
  Recentered              : FALSE
Number of blocks          : 11
Block size                : 279
Number of blocks          : 11
p-value for T             : 0.4130131
p-value for I+R           : 0.1787949
p-value for T+I+R         : 0.1801353
```

Espectro estimado



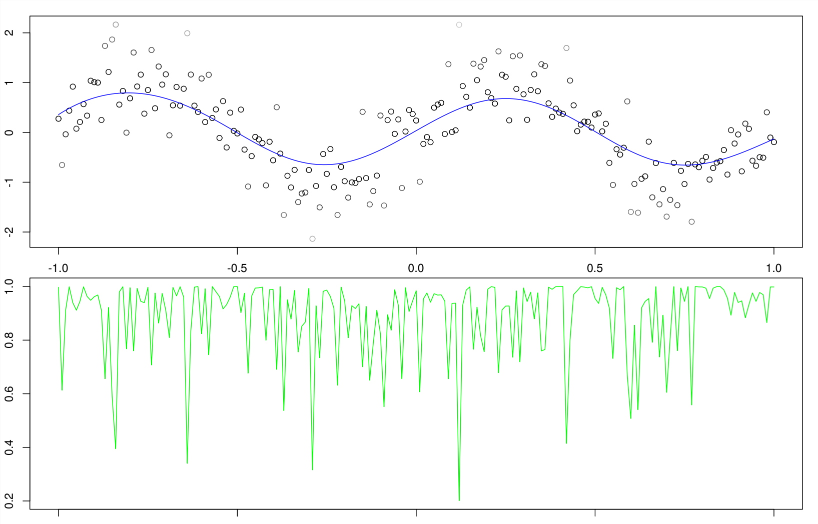
Descomposición clásica usando loess

Filtro no-paramétrico para generar las series de tiempo

$$X(t) = T(t) + S(t) + R(t)$$

Tales que:

- S Función periódica suave, comp. estacional
- T Función suave, tendencia
- R Residuo


2
1
0
-1
-2
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2

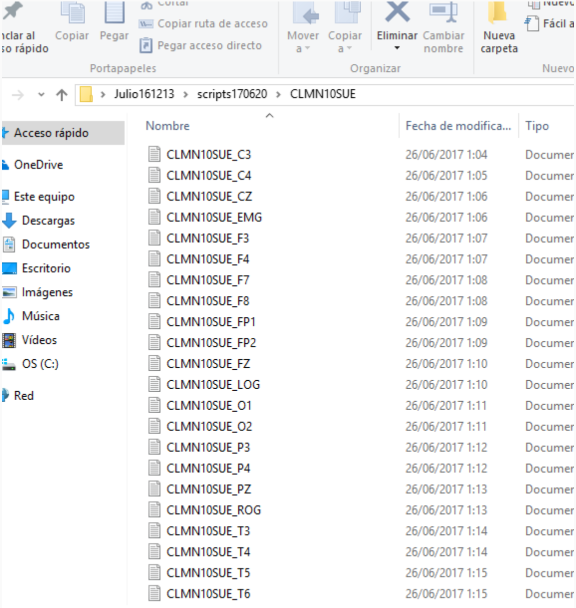
Ejemplo práctico

Software estadístico R

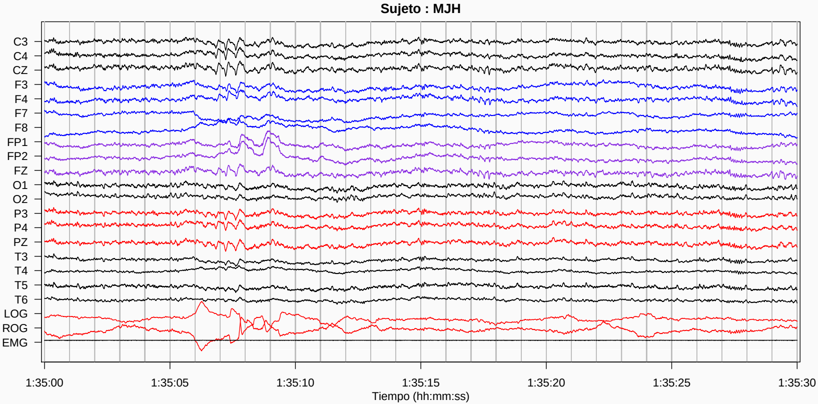
Lenguaje para cómputo estadístico y graficación; multi-plataforma (Linux, Windows, MacOS), de código abierto y acceso gratuito a través de su página ▸ Link

Por simplicidad, se usará la interfaz gráfica de RStudio ▸ Link

Datos: registros



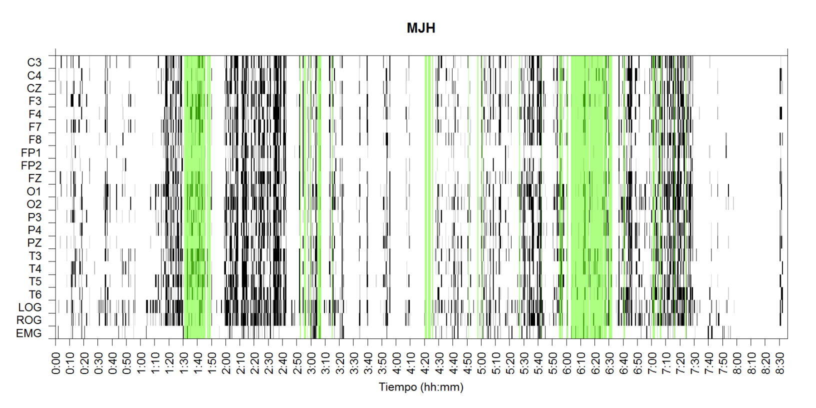
Graficación de los datos



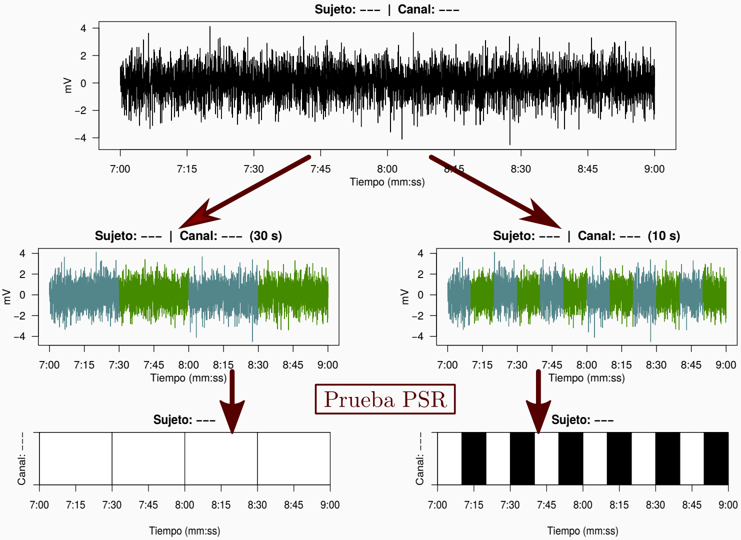
Resultados de la prueba PSR

```
Priestley-Subba Rao stationarity Test for datos
-----------------------------------------------
Samples used                : 3072
Samples available           : 3069
Sampling interval           : 1
SDF estimator               : Multitaper
  Number of (sine) tapers   : 5
  Centered                  : TRUE
  Recentered                : FALSE
Number of blocks            : 11
Block size                  : 279
Number of blocks            : 11
p-value for T               : 0.4130131
p-value for I+R             : 0.1787949
p-value for T+I+R           : 0.1801353
```

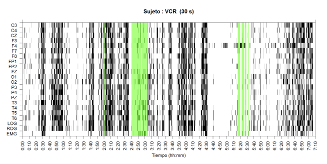
Disposición gráfica de los resultados

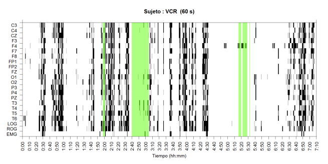


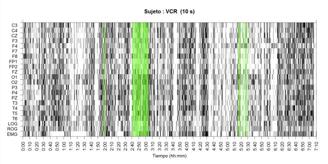
Efecto del tamaño de la época



Estacionariedad local[2]







[2] Bernard Allan Cohen y Anthony Sances. “Stationarity of the human electroencephalogram”. En: Medical and Biological Engineering and Computing 15.5 (1977), págs. 513-518.

Gracias por su atención