



**Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería**

Estacionariedad débil en registros
polisomnográficos de adultos mayores,
como posible marcador de deterioro
cognitivo

Presenta

Julio Cesar Enciso Alva

Dirección

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Pachuca, Hidalgo, junio de 2017
México

Acrónimos

AASM	American Association of Sleep Medicine
EEG	Electroencefalografía
EMG	Electromiografía
EOG	Electrooculografía
FDE	Función de Densidad Espectral
MOR	[Etapa de sueño con] Movimientos Oculares Rápidos
NMOR	[Etapa de sueño] No-MOR
PSG	Polisomnografía
PDC	Posible Deterioro Cognitivo
PSR	[Prueba de] Priestley-Subba Rao

Índice general

1. Preeliminares	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Justificación	2
1.3. Pregunta de investigación	3
1.3.1. Hipótesis	3
1.3.2. Objetivo general	3
1.3.3. Objetivos específicos	3
1.4. Conceptos	4
1.4.1. Fisiología	4
1.4.2. Sueño	7
1.4.3. Matemáticas	10
A. Detalles	29
A.1. Variables aleatorias	29
A.2. Notas sobre la estacionariedad	31
A.3. Transformada Rápida de Fourier	34
A.4. Efecto del filtro STL	35
Bibliografía	36

Capítulo 1

Preeliminares

1.1. Antecedentes

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron la epidemiología del deterioro cognitivo en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo, encontrando una correlación entre una menor eficiencia del sueño¹ y la presencia de deterioro cognitivo [34]. En un segundo trabajo por García-Muñoz y colaboradores [12] se analizaron registros polisomnográficos (PSG) para detectar posibles cambios en la conectividad funcional del cerebro² en adultos mayores con posible deterioro cognitivo (PDC), reportando un mayor exponente de Hurst para registros de PSG en adultos mayores con PDC [12]. El exponente de Hurst, calculado a través del algoritmo *Detrended Fluctuation Analysis*, está relacionado con las correlaciones de largo alcance y la estructura fractal de una serie de tiempo, siendo que un mayor exponente está asociado con señales cuya función de autocorrelación decrece más lentamente [30]. Con base a que en aquellos trabajos se ha supuesto que los registros de PSG son no-estacionarios, en este trabajo se pretende verificar si efectivamente estas señales se pueden considerar con tal característica.

El supuesto de estacionariedad es básico en el estudio de series de tiempo, y usual-

¹Porcentaje de tiempo de sueño, respecto al tiempo en cama

²Se suele hablar de **conectividad funcional** cuando las señales registradas en dos lugares están estadísticamente 'muy' interrelacionadas; este término se contrapone al de **conectividad anatómica**, que se refiere a conexiones físicas

mente se acepta o rechaza sin un tratamiento formal; es de particular importancia, por ejemplo, para calcular el espectro de potencias a partir de registros. La idea de que sujetos con PDC exhiben estacionariedad débil en sus registros de EEG en mayor proporción, respecto a individuos sanos, fue sugerida por Cohen [8], quien a su vez se refiere a trabajos anteriores sobre estacionariedad y normalidad en registros de EEG [18, 33, 17].

1.2. Justificación

Los avances médicos del último siglo se han traducido en un incremento tanto en la esperanza de vida como en la calidad de la misma. De acuerdo a la Encuesta Intercensal 2015 realizada por INEGI [1], se estima que en México habitan cerca de 12,500,000 adultos mayores, lo que representa un 10.4 % de la población. Lamentablemente, también se ve incrementada la presencia de enfermedades no-transmisibles, de entre las cuales destacamos la demencia. El cuidado de enfermedades crónicas en la población de edad avanzada representa un gran peso económico y de recursos humanos, que recae sobre el sistema de salud y los familiares de los afectados; por ello, cobra importancia un diagnóstico temprano del deterioro cognitivo que disminuya el riesgo de su avance irreversible a demencia.

Todavía son incipientes las investigaciones para identificar los factores de riesgo modificables asociados a la demencia [10]; recientemente, los trastornos del sueño han sido señalados como posiblemente relacionados con el deterioro cognitivo durante la vejez [2, 19, 23]. Concretamente, una duración menor del sueño nocturno y una mala eficiencia del mismo, en personas mayores, se relaciona con una peor ejecución en tareas de memoria [28]. Las afectaciones relativas al sueño en personas mayores podrían ser más problemáticas que para otros grupos de edad [23].

1.3. Pregunta de investigación

¿Es posible que la caracterización de registros de PSG como series de tiempo débilmente estacionarias, pueda ser usada como un marcador en el diagnóstico clínico de PDC en adultos mayores?

1.3.1. Hipótesis

Existen diferencias en la conectividad funcional del cerebro en adultos mayores con PDC, respecto a sujetos sanos, y es posible detectar estas diferencias como una mayor o menor 'presencia' de estacionariedad débil en registros de PSG durante el sueño profundo.

1.3.2. Objetivo general

Deducir, a partir de pruebas estadísticas formales, la presencia de estacionariedad débil en registros de PSG para adultos mayores con PDC, así como individuos control.

1.3.3. Objetivos específicos

- Estudiar la definición de estacionariedad para procesos estocásticos y sus posibles consecuencias dentro de un modelo para los datos considerados
- Investigar en la literatura cómo detectar si es plausible que una serie de tiempo dada sea una realización para un proceso estocástico débilmente estacionario, y bajo qué supuestos es válida esta caracterización
- Usando los análisis hallados en la literatura, determinar si las series de tiempo obtenidas a partir de los datos considerados provienen de procesos débilmente estacionarios. Revisar si la información obtenida en los diferentes sujetos muestra diferencias entre sujetos con y sin PDC

1.4. Conceptos

Se exponen los conceptos que usados en un estilo de *glosario comentado*. Por comodidad la exposición se divide en dos subsecciones marcadamente diferentes: fisiología y matemáticas. En la primera se menciona el deterioro cognitivo en adultos mayores a nivel de población, aunque el énfasis es sobre el sistema nervioso a nivel de organismo. La segunda subsección se centra en herramientas matemáticas usadas para analizar los registros obtenidos, entendidas no como técnicas sino como objetos abstractos definidos formalmente; conforme se van presentando estos objetos, se comenta sobre su papel en la modelación de los fenómenos fisiológicos descritos.

Cabe advertir que las dos partes son diferentes no sólo en temas sino también en un sentido epistémico: mientras en la primera subsección se mencionan afirmaciones basadas en datos experimentales, acompañadas de citas pertinentes; en la segunda subsección se mencionan definiciones y afirmaciones que son formalmente verdaderas y demostrables en el sistema axiomático usual, presentando en un apéndice del presente texto algunas de las demostraciones o bien referencias sobre las faltates³.

1.4.1. Fisiología

Adulto Mayor. Individuo de 60 años o más que habite un país en vías de desarrollo, o 65 años en países desarrollados [13].

El envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [20, 22].

La funcionalidad durante la vejez se relaciona con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [21, 32].

INCLUIR SOBRE DETERIORO COGNITIVO: QUIZA DESDE LA INTRODUCCION DE NEUROPSI

³Este caso se reservó para casos especialmente extensos y tediosos, como la derivación de formas aproximadas para las varianzas de ciertos estimadores

En la escala clínica del deterioro cognitivo, en este trabajo se han analizado sujetos que lo padecen en un grado leve; más aún, en el transcurso de este escrito será referido como Posible Deterioro Cognitivo, amén de los esfuerzos vertidos para el mejoramiento de los individuos afectados.

Deterioro cognitivo leve. Síndrome caracterizado por una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia [29].

DECIR POR QUE SE DEBERIA RELACIONAR EL SUENO Y EL DETERIORO COGNITIVO

Si bien es perfectamente posible definir el sueño sin necesidad de hablar del electroencefalograma, conviene hablar primero de éste debido a la forma en que son tipificadas clínicamente las diferentes etapas del sueño.

Electroencefalograma (EEG). Registro de las fluctuaciones en potenciales eléctricos en el cerebro.

En cualquiera de tales sitios, el registro representa una superposición de potenciales de campo producidos por una amplia variedad de generadores de corriente dentro de un medio conductor volumétrico: los elementos neuronales generan, cada cual, corrientes que son conducidas y disipadas a través del espacio en el cerebro.

UNA MEJOR DESCRIPCION DE ESTE FENOMENO

Debido a que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas con respecto a la superficie, y a que disparan de manera asíncrona, el aporte neto de estos campos al potencial registrado es negligible bajo condiciones normales.

El registro de los electrodos (los canales) son referidos como un **montaje**: El sistema más usado para la colocación de los electrodos con fines clínicos es el *International Federation 10–20 system*, propuesto por la International Federation of EEG Societies [16, 15], mostrado en la figura 1-1.

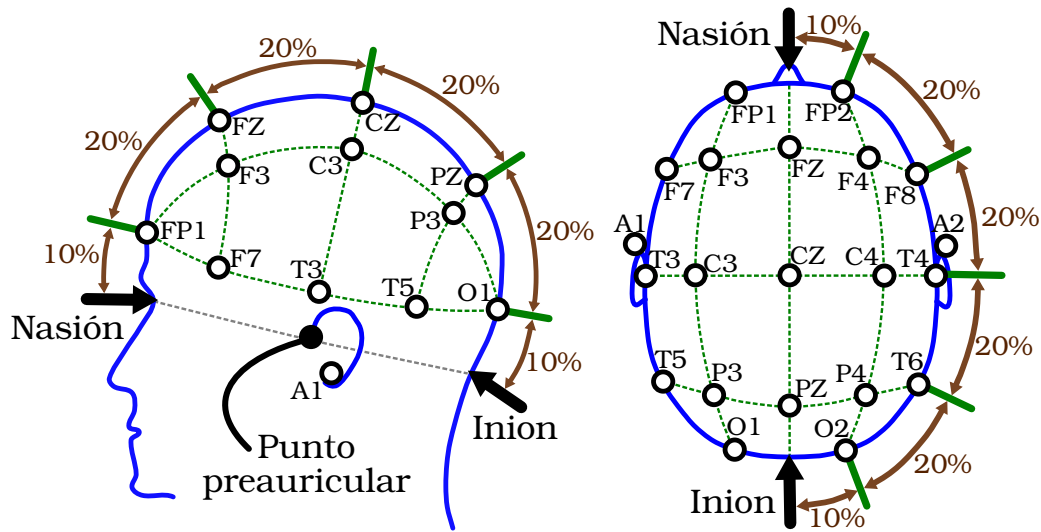


Figura 1-1: Colocación de electrodos según el sistema 10–20. En el cráneo, el **inión** es una protuberancia craneal, mientras que el **nasión** es la unión del hueso frontal y los huesos nasales; el **punto preauricular** se ubica arriba del cartílago llamado tragus, que protege el canal auditivo [3].

Usualmente el EEG muestra una actividad oscilatoria continua y cambiante, cuya frecuencia varía entre 0.5 y 100 Hz [6]. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad cerebral; por ejemplo, hay diferencias claras durante vigilia y sueño. En general la frecuencia del EEG incrementa cuando hay un altos grados de actividad cerebral, lo cual se debe a que las ondas se vuelven más asíncronas, y entonces la magnitud del potencial integrado de superficie decrece (a pesar de la alta actividad cortical). Aunque la mayor parte del tiempo el EEG es irregular y no muestra patrones claros, es común que muestre ondas cerebrales relativamente organizadas llamadas **ondas cerebrales** que, para su estudio, han sido clasificadas en cuatro grandes grupos: alfa, beta, gamma, delta. Estos grupos son ilustrados en la figura 1-2.

Ondas alfa. Frecuencias entre 8 y 13 Hz. Ocurren en sujetos despiertos en un estado de quietud del pensamiento. Aparecen más frecuentemente en la región occipital, pero también pueden ser registradas en las regiones frontal y parietal.

Ondas beta. Frecuencias de 14 a 30 Hz. Normalmente se registran en las regiones parietal y frontal.

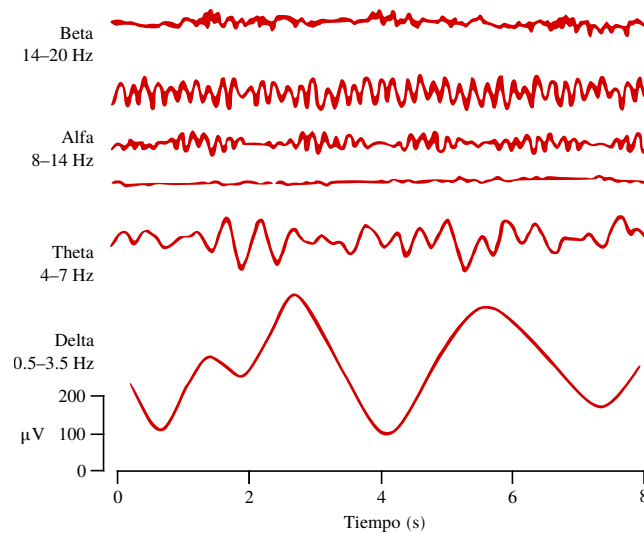


Figura 1-2: Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG. Reconstruido de *EEG Signal Processing*, por S. Sanei y J. A. Chambers [31]

Ondas theta. Frecuencias entre 4 y 7 Hz. Ocurren principalmente en las regiones parietal y temporal

Ondas delta. Incluye todas las ondas del EEG con frecuencias menores a 3.5 Hz. Ocurren generalmente en el sueño profundo en infantes, y después de enfermedades orgánicas serias del cerebro.

Cabe mencionar que el espectro de frecuencias del potencial de campo producido por músculos faciales medianamente contraídos incluye componentes de frecuencia que bien cuadran en el rango usual del EEG (0.5–100 Hz); cuando estas señales 'contaminan' el registro de EEG, son referidas como **artefactos**. La variedad de artefactos conocidos es muy basta, al grado de considerarse a la detección de éstos como un paso previo inevitable.

1.4.2. Sueño

El sueño del ser humano, según criterios polisomnográficos (electroencefalograma, electrooculograma y electromiograma) se divide fundamentalmente en sueño REM (R) (rapid eye movement) y en sueño No REM (NREM)

El sueño normal se divide en dos etapas principales: MOR (fase R) y NMOR (fase N), que se diferencian por sus rasgos electroencefalográficos y una serie de características fisiológicas, y de los cuales obtienen sus nombres. Cabe mencionar que la nomenclatura acerca de las fases del sueño ha sido recientemente modificada por la American Association of Sleep Medicine (AASM) en 2007 [15], de modo que en este trabajo se usarán ambas nomenclaturas siempre que sea posible, por fines de compatibilidad.

Sueño Proceso vital cíclico complejo y activo, compuesto por varias fases y que posee una estructura interna característica, con diversas interrelaciones en los sistemas hormonales y nerviosos [11]. El sueño en el ser humano se puede caracterizar por las siguientes propiedades[4]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos
2. Fácilmente reversible (lo cual lo diferencia de otros estados patológicos como el estupor y el coma)
3. Inmovilidad y relajación muscular
4. Periodicidad típica circadiana (diaria)
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, además de que genera una 'deuda' acumulativa

Durante el sueño MOR (fase R), ocurre que las ondas lentas y amplitud alta son reemplazadas por ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad en el EEG durante el estado de alerta. La presencia de estos patrones irregulares no interrumpen el sueño, sino que incrementan el umbral para los estímulos externos; este comportamiento es referido como 'sueño paradójico'. Durante esta etapa de sueño, el sujeto exhibe movimientos oculares rápidos (MOR), razón por la cual recibe su nombre característico. Durante el sueño MOR se producen la mayoría de las ensoñaciones (referidos coloquialmente como sueños), y la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus

ensoñaciones [5]. Físicamente el tono de todos los músculos disminuye (con excepción de los músculos respiratorios y los esfínteres vesical y anal), así mismo la frecuencia cardíaca y respiratoria se vuelve irregular.

El sueño fuera de la etapa MOR es referido como no-MOR (NMOR, fase N), y es dividido en etapas según la 'profundidad' del sueño, entendida en términos de la actividad cerebral registrada. En el sueño profundo se observan ondas delta muy irregulares, y junto con ellas ocurren trenes cortos de ondas, parecidas a las alfa, y que son referidas como *husos de sueño*. El ritmo alfa y los husos de sueño están sincronizados en el sueño y la somnolencia, en contraste con la actividad irregular, desincronizada y de bajo voltaje registrada en estado de alerta. A grosso modo, la clasificación de etapas del sueño según la AASM se basa en las siguientes características [14]:

Vigilia (W) Presencia de ritmo alfa continuo con máxima amplitud sobre regiones de la corteza parieto-occipital. Tono muscular relativamente alto y ausencia de movimientos oculares.

Fase 1 (N1) Corresponde con la somnolencia o el inicio del sueño ligero, en ella es muy fácil despertarse. Presencia intermitente de ondas alfa en menos del 50 % de la época, actividad de frecuencias mezcladas y bajo voltaje, además de movimientos oculares lentos y algunas ondas agudas. La actividad muscular disminuye paulatinamente, pueden observarse sacudidas musculares súbitas que a veces coinciden con una sensación de caída.

Fase 2 (N2) Se caracteriza por patrones específicos de actividad cerebral conocidos como husos de sueño y complejos K. Puede aparecer hasta un 20 % de ondas lentas (ritmo delta). Ausencia de actividad ocular y tono muscular bajo. La temperatura, la frecuencia cardíaca y respiratoria disminuyen paulatinamente.

Fases 3 (N3) Predominan ondas de frecuencias muy bajas (< 2 Hz) con amplitudes superiores a $75 \mu V$ en más del 20 % y menos del 50 % de la época. Pueden también aparecer complejos K y husos de sueño de forma esporádica. Ausencia de actividad ocular y tono muscular bajo.

Fase 4 (N4) La fase más profunda del sueño NMOR y referido como 'sueño de ondas lentas', pues hay presencia de éstas ondas en más del 50 % de la época. Las demás características son similares a las de la fase 3.

Fase MOR (R) Presencia de actividad EEG de baja amplitud y frecuencias entremezcladas (theta-alfa-beta) similar a la observada en el estado de vigilia activa con ojos abiertos.

Un adulto joven pasa aproximadamente entre 70–100 minutos en el sueño NMOR para después entrar al sueño MOR, el cual puede durar entre 5–30 min; este ciclo se repite cada hora y media. En los ancianos se va fragmentando el sueño nocturno con frecuentes episodios de despertar, se reduce mucho el porcentaje de sueño en fase 4, pero se mantiene constante el porcentaje de sueño MOR. Adicionalmente, muchos adultos mayores dormitan durante el día varias siestas cortas [4].

La edad es un factor decisivo para la cantidad de horas de sueño. El recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas por noche. En otras palabras, es fisiológico que el número de horas dormidas vaya disminuyendo progresivamente a lo largo de la vida, pudiendo existir una diferencia de hasta 16 horas como promedio entre la niñez y la edad adulta. En los ancianos, el número de horas de diferencia entre las horas de sueño propias v/s las horas de sueño de la niñez, es aún mayor

[9]

1.4.3. Matemáticas

A continuación se expondrán de forma concreta los objetos abstractos usados, dejando los detalles formales pertinentes como apéndice. En particular, se definirá lo que es un proceso estocástico dando por sentado que es conocido el concepto de variable aleatoria (definición 15).

Definición 1 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ es una familia de variables aleatorias reales, indexadas por $t \in T$.*

Respecto al conjunto T que indexa a un proceso estocástico, y que será referido como *tiempo*, conviene introducir dos grandes grupos para los mismos

- *A tiempo continuo* si T es un intervalo cerrado
- *A tiempo discreto* si T es de la forma $\{t_0 + n\delta | n \in U \subseteq \mathbb{Z}\}$

Los procesos a tiempo discreto contemplan conjuntos finitos e infinitos de puntos en el tiempo. No se manejan discutirá sobre otros tipos de tiempo en este trabajo.

Como notación, se usará $\{X(t)\}_{t \in T}$ para el proceso estocástico y $X(t)$ para una de las variables aleatorias que lo componen; de la misma manera $x(t)$ es una realización de $X(t)$ y $F_{X(t)}$ es la función de probabilidad acumulada para $X(t)$.

Para modelar las señales que componen el polisomnograma (PSG) se asume que éstas constituyen un fenómeno predominantemente estocástico⁴ a tiempo continuo, pero que no es registrable sino en un conjunto finito de puntos en el tiempo; esta forma de entender a los datos permitirá asumir algunas propiedades que serán descritas más adelante.

El cuerpo central de este trabajo es averiguar sin este modelo de tipo estocástico para los datos permite la hipótesis de que los procesos estocásticos involucrados son estacionarios, cuando menos en un sentido débil. Anteriormente se mencionó por qué parece conveniente verificar este supuesto y cuáles sería sus implicaciones, a continuación se define formalmente y se discute el cómo se pudiera confirmar.

Definición 2 (Estacionariedad débil) *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles⁵ t, s se tiene que*

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = \rho_X(s - t)$

⁴Cabe aclarar que tal enfoque no implica suponer una completa aleatoriedad, sino que

⁵El término *tiempos admisibles* significa que la definición es la misma para diferentes tipos de tiempo, bajo las restricciones pertinente

Donde μ_X , σ_X^2 son constantes, $\rho_X(\tau)$ es una función que únicamente depende de τ

A continuación (definición 3) se presenta un tipo de regularidad que se supone para las señales registradas en el EEG: continuidad de algún tipo.

Adicionalmente se supondrá que las señales en el electroencefalograma (EEG) son continuas, cuando menos en el sentido de media cuadrática

Definición 3 (Continuidad estocástica en media cuadrática) *Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}$ es estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática, en un tiempo admisible t_0 si y sólo si*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E[(X(t) - X(t_0))^2] = 0$$

Espectro de potencias para procesos estocásticos

Definición 4 (Serie de Fourier) *Sea k una función real periódica (con periodo $2T$) tal que $\int_{-T}^T |k(t)| dt < \infty$. Se le llamará 'serie de Fourier para la función k ' a la sucesión (A_n) , calculada de la siguiente manera*

$$A_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T k(t) e^{-int/2T} dt$$

Definición 5 (Transformada de Fourier) *Sea P_T el espacio de las funciones periódicas con periodo $2T$ que tienen una serie de Fourier bien definida. Existe una función \mathfrak{F} que mapea cada función a su respectiva serie de Fourier, y ésta será referida como la transformada de Fourier*

Como se mencionó, en este trabajo se suponen conocidas las propiedades de las series de Fourier (según la definición 4), de entre las cuales se destacan las siguientes:

- Las series de Fourier son cuadrado-sumables⁶

⁶Una sucesión (S_n) se dice cuadrado-integrable si cumple que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |S_n|^2 < \infty$. El conjunto de estas series es denotado por ℓ^2

- La transformada de Fourier, \mathfrak{F} , no es invertible en general. Es común definir una pseudoinversa como $\mathfrak{F}_{\text{inv}} : (A_n) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n e^{int/2T}$
- Los conjuntos P_T y ℓ^2 , con la suma y producto usuales, tienen la estructura de espacio vectorial. Más aún, usando las respectivas normas $\|k\| = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) dt$ y $\|(A_n)\|_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |S_n|^2 < \infty$, ambos son espacios de Hilbert.

La transformada de Fourier goza de una interpretación física muy extendida, según la cual toda señal periódica puede verse como la superposición (suma) de señales seno-iales ortogonales de diferentes frecuencias⁷; suponiendo previamente que las señales se suman y multiplican por escalares de la manera usual. Esta afirmación es equivalente a que el conjunto de funciones con una serie de Fourier bien definida, tiene estructura de espacio vectorial y admite una base ortonormal de funciones senoidales (referida como la base de Fourier). La interpretación física adquiere mayor relevancia cuando se exhibe el concepto de energía disipada (definición 6) en conjunto con el el teorema 1, ya que permite formular la siguiente interpretación: la energía disipada por una señal periódica puede verse como la suma de la energía disipada por sus componentes en la base de Fourier (usualmente referidos como **componentes de frecuencias**). La función que 'desglosa' estos componentes se conoce como espectro de potencias (definición 7).

Definición 6 (Energía de una señal) *Sea k una función real que modela una señal. La energía disipada por k en el intervalo de tiempo $[a, b]$ está dada por*

$$\text{Energía}_{[a,b]} = \int_a^b |k(t)|^2 dt$$

Teorema 1 (Relación de Parseval) *Sea k una función periódica (de periodo $2T$)*

⁷De manera pragmática, en el presente trabajo la palabra 'frecuencia' se usará para referirse a la cantidad q en expresiones del tipo e^{iqt}

que admite una serie de Fourier bien definida, (A_n) . Se cumple que

$$\int_T^T k^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n|^2$$

Definición 7 (Espectro de potencias) Sea P_T el espacio de las funciones periódicas con periodo $2T$ que tienen una serie de Fourier bien definida. Se le llama espectro de potencias a la función $h : P_T \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida como

$$h_k(\omega) = \begin{cases} |A_i|^2 & , \text{ si } \omega = \frac{n}{2T} \text{ con } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

donde (A_n) es la serie de Fourier de k

Es importante mencionar que la energía, entendida como la integral de una forma cuadrática, es un concepto común a varias ramas de la física y las ingenierías; en cambio, en economía o en epidemiología, por ejemplo, no hay una motivación clara para usar el concepto de energía según 6.

Definición 8 (Integral de Fourier) Sea k una función tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)| dt < \infty$. Se le llamará 'integral de Fourier para la función k ' a la función $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ calculada de la siguiente manera

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{-i\omega t} dt$$

Definición 9 (Transformada de Fourier-Stieltjes) Se dice que una función real A es la transformada de Fourier-Stieltjes de una función k si ésta puede expresarse casi en todas partes como

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dF(\omega)$$

siendo que la integral está definida en el sentido de Stieltjes

Por simplicidad, el enfoque la definición que se aborda considera un proceso débilmente estacionario, $\{X(t)\}$, y posteriormente una realización particular, $x(t)$; como no hay garantía que x tenga una transformada de Fourier bien definida (o alguna de las generalizaciones presentadas previamente), se procede a aproximarla por una serie de funciones que sí las tienen. Así entonces, para cada $T > 0$ se define a x_T como

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & , -T \leq t \leq T \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Posteriormente se define a G_T ; bien puede entenderse como una transformada de Fourier para una función extendida periódicamente, y de modo que el espacio entre frecuencias se vuelven infinitesimal, o bien puede verse como una integral de Fourier (claramente bien definida) para una serie convergente de funciones.

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt$$

Sin la garantía de que $x(t)$ tenga una integral de Fourier bien definida, no hay garantía que G_T converja cuando $T \rightarrow \infty$. Recuperando el concepto de energía disipada, ligado a $|G_T(\omega)|^2$, se puede construir una explicación física para la divergencia de G_T : un sistema que disipa 'niveles constantes' de energía (porque $\text{Var}(X(t))$ es constante) puede disipar una cantidad infinita de energía durante un tiempo infinito. Conviene, entonces, usar el tamaño de los intervalos sobre los cuales se define G_T , de modo que se converja a una 'densidad' de energía disipada: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}$. Tal expresión se puede adaptar al proceso per se como en la definición 10.

Definición 10 (Función de densidad espectral (FDE)) Sea $\{X(t)\}$ un proceso estocástico en tiempo continuo, débilmente estacionario. Se define la función de densidad espectral (FDE) para $\{X(t)\}$ como

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{E} \left[\frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right]$$

Conviene mencionar que la convergencia de la FDE está garantizada casi en todas partes, pero la función resultante puede no ser suficiente para explicar adecuadamente al proceso; por ejemplo, un proceso periódico, con periodo T , tendrá una FDE que es cero en todos sus puntos salvo en los múltiplos enteros de T . Este fenómeno es similar al caso de variables aleatorias discretas, que no poseen una función de densidad de probabilidad bien definida en todos sus puntos. Conviene definir una versión 'integral' de la FDE (definición 11).

Definición 11 (Función de espectro integrado) Sea $\{X(t)\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, débilmente estacionario. Se define la función de espectro integrado para $\{X(t)\}$ como

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} h(\lambda) d\lambda$$

Donde h es la función de densidad espectral para $\{X(t)\}$

Si la FDE, h , está bien definida en todos sus puntos, entonces la función de espectro integrado (H) satisface que $H' = h$ y se dirá que el proceso tiene un **espectro puramente continuo**; si H tiene una forma escalonada, con escalones rectos, se dirá que es un **espectro puramente discreto**. Como es de esperarse, cada tipo de proceso tiene características diferentes y se puede estudiar mejor con herramientas diferentes; para el caso de procesos con un espectro mixto (ninguno de los anteriores), se exhiben herramientas que los reducen a estos casos 'puros'.

Cabe destacar que, por como se definió la FDE integrada, ésta es una función positiva, no-decreciente, y que en $-\infty$ vale 0; esta observación será importante.

Estimación de la función de densidad espectral

Anteriormente se definió espectro de potencias para procesos débilmente estacionarios con segundos momentos finitos (definición 10); sin embargo, aquella definición es sumamente ineficiente dentro de la estimación pues requiere valores esperados sobre todo del proceso. A continuación se muestran dos teoremas respecto a la FDE facilitarán su estimación.

Teorema 2 (Wiener-Khinchin) *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}$ débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función F que tenga las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Teorema 3 (Wold) *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(t)\}$ débilmente estacionario es que exista una función F con las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\pi) = 0$
- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Una observación interesante sobre estos teoremas es el caso $\tau = 0$

$$\rho(0) = \int_{-A}^{+A} dF(\omega) = F(A) - F(-A)$$

donde A vale ∞ o π según sea el caso discreto o continuo. Si R es la función de autocovarianza del proceso, entonces la ecuación anterior se traduce en que

$$R(0) = \sigma^2 (F(A) - F(-A)) = \sigma^2 F(A)$$

donde σ^2 es la varianza del proceso. Esta observación adquiere importancia porque la FDE integrada (H), por definición, satisface el papel de F salvo por la condición $F(\infty) = 1$; si se puede garantizar que $H(\infty) < \infty$ entonces puede ser normalizada para satisfacer tal condición y, más aún, si tal fuera el caso entonces $H(\infty) = \sigma^2$. Una consecuencia muy fuerte de este comentario es que, como se ha establecido previamente que sólo se considerarán procesos con segundos momentos finitos, entonces la FDE de los procesos considerados siempre es acotada.

Como corolario, se puede afirmar que la FDE de un proceso (débilmente estacionario y de varianza finita) es la transformada de Fourier-Stieltjes de la función de autocovarianza. Esto implica que el estimador más 'natural' para la FDE es la transformada de Fourier (discreta) de la función de autocorrelación (estimada); esta función se conoce como *periodograma*.

Conviene introducir estimadores para la función de autocovarianza de un proceso débilmente estacionario, $\{X(t)\}$, a partir de un conjunto de N observaciones equiespaciadas en el tiempo con separación Δt ; se denotará a estas observaciones como x_1, x_2, \dots, x_N . Como se cumple la siguiente propiedad para la función de autocovarianza, R , por definición

$$R(\tau) = E[X(n\Delta t)X(n\Delta t + \tau)] \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

el estimados estándar para R está dado por la siguiente expresión

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$$

Se puede demostrar que \hat{R} es un estimador insesgado⁸ y consistente⁹ para R ; sin embargo conviene introducir un estimador diferente para R

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$$

Se puede demostrar que \hat{R}^* tiene las siguientes propiedades:

- $E[\hat{R}^*(\tau)] = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R(\omega)$
- $\text{Var}(\hat{R}^*(\tau)) \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (R^2(r) + R(r - \tau)R(r + \tau))$
- $\text{Cov}(\hat{R}^*(\tau), \hat{R}^*(\tau + \nu)) \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\rho(r)\rho(r + \nu) + \rho(r - \tau)\rho(r + \tau + \nu))$

Las aproximaciones para la varianza y covarianza se vuelven exactas si el proceso sigue una distribución normal en todos los tiempos.

Bajo estas consideraciones, se exhibe formalmente el periodograma (definición 12); si bien la expresión con que se escribe es fácil de interpretar (la transformada de Fourier discreta para la señal) y es eficiente computacionalmente, es conveniente ligarla con la función de autocovarianza (teorema 4).

Definición 12 (Periodograma) Sean x_1, x_2, \dots, x_N observaciones de un proceso estocástico de media cero y varianza finita. Se llama periodograma a la función $I_N : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ calculada como

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x_t \right|^2$$

Teorema 4 Sean x_1, x_2, \dots, x_N observaciones de un proceso estocástico de media

⁸Un estimador para el parámetro θ , $\hat{\theta}$, se dice **insesgado** si $E[\hat{\theta}] = \theta$

⁹Un estimador para el parámetro θ que depende de N observaciones, $\hat{\theta}_N$, se dice **consistente** si $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$

cero y varianza finita. Se puede calcular el periodograma para estos datos como

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}^*(r) \cos(r\omega)$$

Donde \widehat{R}^* es el estimador para la función de autocovarianza del proceso, calculado como $\widehat{R}(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$

Se puede demostrar que el periodograma es un estimador insesgado de la FDE para los procesos considerados; sin embargo, si el proceso tuviera un espectro puramente continuo, ocurre que $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = h^2(\omega)$, con h la FDE del proceso: el periodograma, en general, no es consistente. En parte esto ocurre porque el periodograma depende de los estimadores para la función de autocovarianza, \widehat{R} , evaluada en todos los puntos posibles: para calcular \widehat{R} en valores muy altos se requieren puntos muy alejados, los cuales son menos abundantes e implican una mayor varianza.

Si efectivamente el periodograma aumenta su varianza cuando incluye las 'colas' de la función de autocovarianza, entonces una solución es evitarlas, multiplicando por una función de pesos. Tales consideraciones dan origen a estimadores de la forma

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \lambda(s) \widehat{R}^*(s) e^{i\omega s}$$

donde la función de pesos, λ , es referida como **ventana de retrasos**. Para estudiar las propiedades estos estimadores, conviene reescribirlos en función del periodograma

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$

donde W es la transformada de Fourier finita de λ

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \lambda(s) e^{-is\theta}$$

Cabe destacar la forma que adopta \widehat{h} como la convolución $I_N * W$, que bien puede entenderse como que W es una función de pesos en el 'dominio de las frecuencias'; por

ello, W es referida como **ventana de retrasos**. En la tabla 1.1 hay una lista corta de algunas funciones tipo ventana. Estos estimadores son consistentes y sesgados, aunque son asintóticamente insesgados.

Filtros lineales

Como herramienta auxiliar en la estimación de la FDE, conviene considerar procesos del tipo $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du$, referidos como 'filtrados'. Históricamente los filtros se originan como circuitos físicos que, por diseño, son de ayuda en la 'cancelación' analógica de componentes de frecuencia (ver más adelante). Los filtros, aplicados a proceso débilmente estacionarios, afectan su FDE de manera 'simple' (teorema 5); por otro lado, permiten interpretar a procesos autorregresivos (AR) y de medias móviles (MA) como versiones filtradas de procesos ruido blanco; más aún, si los procesos filtrados pueden tener la forma¹⁰ $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-u)dG(u)$, entonces es posible manejar el operador retraso ($B[Y](t) = Y(t) - Y(t-1)$).

Teorema 5 *Sea $\{X(t)\}$ un proceso débilmente estacionario que admite una representación de Wold-Cramér. Sea g una función real con $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)| du < \infty$, y sea $\{Y(t)\}$ un proceso definido de la siguiente forma:*

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du$$

Entonces, se cumple la siguiente relación

$$h_X(\omega) = h_Y(\omega) |\Gamma(\omega)|^2$$

donde h_X y h_Y son las respectivas FDE de $\{X(t)\}$ y $\{Y(t)\}$, y $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega u}du$.

En el teorema 5, la función g es referida como **función de respuesta**; tal nombre tiene sentido si $\{X(t)\}$ no fuera un proceso, sino un 'impulso unitario' (una función

¹⁰La integral está definida en el sentido de Stieltjes

Algunas funciones tipo ventana

	Ventana de retrasos	Ventana en las frecuencias
P. truncado	$\lambda(s) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } s \leq M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$	$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((M + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)} =: D_M(\theta)$
Bartlet	$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - s /M & , \text{ si } s \leq M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$	$W(\theta) = \frac{1}{2\pi M} \left(\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 =: F_M(\theta)$
Daniell	$\lambda(s) = \frac{\sin(\pi s/M)}{\pi s/M}$	$W(\theta) = \begin{cases} M/2\pi & , \text{ si } \theta \leq \pi/M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$
Tukey-Hanning	$\lambda(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi s/M)) & , \text{ si } s \leq M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$	$W(\theta) = \frac{1}{4} D_M\left(\theta - \frac{\pi}{M}\right) + \frac{1}{2} D_M(\theta) + \frac{1}{4} D_M\left(\theta + \frac{\pi}{M}\right)$
Parzen	$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - 6(s/M)^2 + 6(s /M)^3 & , \text{ si } s \leq M/2 \\ 2(1 - s /M)^3 & , \text{ si } M/2 \leq s \leq M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$	$W(\theta) = \frac{3}{8\pi M^3} \left(\frac{\sin(M\theta/4)}{1/2 \sin(\theta/2)} \right)^4 (1 - 2/3 \sin(\theta/2)^2)$
Bartlet-Priestley	$\lambda(s) = \frac{3M^2}{(\pi s)^2} \left(\frac{\sin(\pi s/M)}{\pi s/M} - \cos(\pi s/M) \right)$	$W(\theta) = \begin{cases} \frac{3M}{4\pi} \left(1 - \left(\frac{M\theta}{\pi} \right)^2 \right) & , \text{ si } \theta \leq \pi/M \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$

Cuadro 1.1: Ejemplos de algunas ventanas que suavizan el periodograma, formando estimadores consistente de la FDE para el caso de espectro puramente continuo. Las funciones F_M y D_M toman, respectivamente, los nombres de *núcleo de Fejer* y *Núcleo de Dirichlet* de orden M

tipo δ de Dirac¹¹). La función Γ es referida como **función de transferencia**, nombre motivado de manera similar al considerar a $\{X(t)\}$ una 'señal' senoidal ($X(t) = e^{i\omega t}$); la conexión se vuelve más clara si se interpreta esta segunda señal como función tipo δ de Dirac en el dominio de las frecuencias. Respecto a la 'cancelación' de frecuencias basta decir que, en teoría, se puede construir a g de modo que Γ sea 0 fuera de un intervalo cerrado y 1 dentro del mismo; este efecto es referido como **filtro de banda**.

Representación de Wold-Cramér

Como consecuencia de los teoremas 2 y 3, los procesos débilmente estacionarios pueden ser caracterizados usando directamente la FDE (sin usar la función de autocorrelación). Esta representación existe en virtud del teorema 6, cuya demostración no será incluida en este trabajo; el lector interesado en tan imponente teorema puede referirse a [26].

¹¹La función $\delta_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función δ de Dirac si puede verse como la función de distribución de masa para una medida finita que es cero para todo conjunto que no contenga a x

Teorema 6 Sea $\{X(t)\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo débilmente estacionario de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Entonces, existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir¹²

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $E[dZ(\omega)] = 0$
- $E[|dZ(\omega)|^2] = dH(\omega)$
- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$

Donde $dH(\omega)$ la FDE integrada de $\{X(t)\}$

En virtud del teorema de Wold, se puede tener una variante del teorema 6 para procesos a tiempo discreto, razón por la cual tal representación es referida como **representación de Wold-Cramér**.

Prueba de Priestley-Subba Rao

Esta técnica fue presentada por Priestley y Subba Rao en 1969 [27], y consiste en estimar el espectro local del proceso en varios puntos en el tiempo y las frecuencias, para luego probar la hipótesis de que el espectro cambia en el tiempo; la explicación presente es más bien somera, los detalles formales que se omiten en el presente texto (la existencia del proceso evolutivo para cierto tipo de procesos, las propiedades de los estimadores usados) pueden encontrarse son tomadas de [25] y [24].

Se pre-supone que los datos pueden entenderse como una cantidad finita de observaciones provenientes de un proceso estocástico a tiempo continuo que, para todos los tiempos, tiene media cero y varianza finita, además de ser estocásticamente continuo y tener un espectro puramente continuo. Si bien son numerosas las condiciones, no se ha supuesto que el proceso sea estacionario; además, se ha argumentado porqué los que

¹²La integral se encuentra definida en el sentido de media cuadrática.

conviene ver a los registros de PSG como observaciones de procesos, estocásticamente continuos, con valor esperado y varianzas finitas. El tener media cero y espectro puramente continuo serán 'forzadas' numéricamente, estimando del proceso su media y componente periódica mediante regresión lineal adaptativa; en particular, se utiliza el algoritmo *Seasonal-Trend decomposition using Loess* (STL), propuesto por Cleveland y colaboradores [7].

Por brevedad, se mostrará sólo someramente una condición extra para los procesos a considerar: tener una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{it\omega} dZ(\omega)$$

donde $\{dZ(\omega)\}$ es un proceso ortogonal ($\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$). Este objeto, que bien puede entenderse como una representación de Wold-Cramér que puede cambiar en el tiempo, fue introducida por Priestley [25] como el **espectro evolutivo**; es amplia e interesante la discusión sobre qué procesos admiten un espectro evolutivo, pero se omite en el presente trabajo por motivos de tiempo.

Respecto a la estimación del espectro local se usa el **estimador de doble ventana**, técnica introducida por Priestley [27] y que requiere dos funciones, w_τ y g , que funcionan como ventana de retrasos y como filtro lineal, respectivamente. En cuando a g , se define a $\Gamma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iu\omega} du$ y se les pide que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$$

Cabe mencionar que las ventanas espectrales mostradas en la tabla 1.1 bien pueden cumplir las propiedades requeridas para ser filtros. Posteriormente se define el estimador U con el objetivo de asignar pesos en el tiempo para estimar a la FDE

$$U(t, \omega) = \int_{t-T}^t g(u) X(t-u) e^{i\omega(t-u)} du$$

Bajo el entendido que la función Γ converge a una función tipo δ de Dirac, puede considerarse que $E[|U(t, \omega)|^2] \approx f_t(\omega)$; sin embargo, se demuestra en [24] que

$\text{Var}(|U(t, \omega)|^2) \rightarrow 0$. Debido a ello se usa una segunda función tipo ventana, de forma similar al periodograma. Se considera la función W_τ , ventana de retrasos, y su respectiva ventana espectral w_τ ; deben satisfacer las siguientes propiedades:

- $w_\tau(t) \geq 0$ para cualesquiera t, τ
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$ para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 dt < \infty$ para todo τ
- $\exists C$ tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^t |W_\tau(\lambda)|^2 d\lambda = C$

Cabe mencionar que todas las ventanas mostradas en 1.1 satisfacen las propiedades anteriores. Finalmente, se define el estimador \hat{f} para las FDE normalizada, f_t , como

$$\hat{f}(t, \omega) = \int_{t-T}^t w_{T'}(u) |U(t-u, \omega)|^2 du$$

Fue demostrado por Priestley [25] que los estimadores de doble ventana son asintóticamente insesgados y consistentes, y propone las siguientes aproximaciones:

- $E[\hat{f}(t, \omega)] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t, \omega + \theta) |\Gamma(\theta)|^2 d\theta$
- $\text{Var}(\hat{f}(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} (\bar{f}^2(\omega)) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

donde las funciones \tilde{f} y \bar{f} son versiones 'suavizadas' de la FDE normalizada, f , y están definidas de la siguiente manera

$$\tilde{f}(t, \omega + \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} W_\tau(u) f(t-u, \omega + \theta) du$$

$$\bar{f}^2(t, \omega) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t-u, W_\tau^2(u)) du}{\int_{-\infty}^{\infty} (W_\tau(u))^2 du}$$

Como W_τ funciona como ventana espectral, converge a una función tipo δ de Dirac; luego \tilde{f} es aproximadamente la convolución $\tilde{f}(t, \omega + \theta) \approx \delta_t * f(\bullet, \omega + \theta)$. Una

aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que $\tilde{f} \approx f$ y $\tilde{f}^2 \approx f^2$. Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas w_τ y W_τ sean más cercanas a funciones tipo δ de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $E \left[\hat{f}(t, \omega) \right] \approx f(t, \omega)$
- $\text{Var} \left(\hat{f}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{\tau} f^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

A continuación se exhiben expresiones para la covarianza del estimador, en el caso particular de un proceso aproximadamente normal

$$\text{Cov} \left(\hat{f}(t_1, \omega_1), \hat{f}(t_2, \omega_2) \right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) w_\tau(v) \text{Cov} \left(|U(t_1 - u, \omega_1)|^2, |U(t_2 - u, \omega_2)|^2 \right) dudv$$

la covarianza será negligible en tanto w_τ se comporte como una función δ de Dirac, con un pico más delgado que $|\omega_1 - \omega_2|$. El mismo efecto se logra si $|U(t_1 - u, \omega_1)|^2$ y $|U(t_2 - u, \omega_2)|^2$ son no-correlacionados, pero por brevedad sólo se citará de [25] que basta que Γ sea una función δ de Dirac, cuyo ancho sea menor a $|t_1 - t_2|$.

Un dato sumamente importante para la estimación de la FDE es cómo la varianza del estimador \hat{f} depende 'multiplicativamente' de la verdadera FDE. Una interpretación sobre este hecho, difundida dentro de las ingenierías, es sobre la 'modulación' de ondas, que puede verse como una 'multiplicación de ondas', y que motiva el uso de la 'transformación logarítmica'. Formalmente, se introduce el siguiente estimador

$$Y(t, \omega) = \log \left(\hat{f}(t, \omega) \right)$$

Se puede demostrar que Y tiene las siguientes propiedades:

- $E[Y(t, \omega)] \approx \log(f(t, \omega))$
- $\text{Var}(Y(T, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

más aún, el estimador Y puede ser representado de la siguiente forma

$$Y(t, \omega) = \log(f(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega)$$

donde las variables $\varepsilon(t, \omega)$ satisfacen que

- $E[\varepsilon(t, \omega)] = 0$
- $\text{Var}(\varepsilon(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

Priestley [26] destaca que la transformación logarítmica tiene la propiedad de hacer que el estimador Y tenga una distribución 'más cercana' a la normal, y que en la práctica bien puede considerarse que las variables ε 's tienen distribución normal con media 0 y varianza σ^2 . Es destacable que las variables ε 's comparten la misma media y varianza, además de que son aproximadamente no-correlacionadas.

La prueba de Priestley-Subba Rao, como se mencionó, funciona calculando el estadístico Y sobre varios puntos en el tiempo y la frecuencia, y luego revisando si se puede afirmar que el vector $(Y(t, \omega_1), Y(t, \omega_2), \dots, Y(t, \omega_N))$ es constante en el tiempo; de forma concreta se maneja la siguiente aproximación

$$\sum_{i=1}^N (Y(t, \omega_i) - \bar{Y}(\bullet, \omega_i))^2 \sim \sigma^2 \chi^2(N)$$

donde $\sigma^2 = \text{Var}(\varepsilon(t, \omega))$, y $\bar{Y}(\bullet, \omega) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Y(t_j, \omega)$. Con tal caracterización se puede usar una prueba ANOVA de manera relativamente fácil.

Apéndice A

Detalles

Se exponen varios de los conceptos expuestos como preeliminares pero con las formalidades pertinentes; cabe mencionar que todos estos resultados no son originales del presente trabajo, razón por la cual fueron omitidos anteriormente.

A.1. Variables aleatorias

Un primer motivo para esta sección es enfatizar que formalmente una variable aleatoria se concibe no como un recuento de eventos sino como una función de medida. Esta segunda caracterización es relevante para varios resultados utilizados, por lo que conviene no omitirla.

Antes de poder definir formalmente las variable aleatoria, debe definirse las medidas.

Definición 13 (σ -álgebra) Sea U un conjunto y \mathcal{U} una colección de subconjuntos de U . Se dice que \mathcal{U} es una σ -álgebra si cumple que

- $U \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U}$ implica que $A^C \in \mathcal{U}$
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son conjuntos tales que $A_i \in \mathcal{U}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde A^C es el complemento $\{u \in U | u \notin A\}$

Por simplicidad, en este trabajo sólo se usarán medidas para conjuntos de números reales derivadas de la σ -álgebra de Borel, que es definida como la σ -álgebra más pequeña que contiene a los intervalos abiertos¹.

Definición 14 (Medida) Sea U un conjunto y \mathcal{U} una σ -álgebra definida en U . Se dice que una función $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^*$ es una medida si cumple que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \geq 0$ para cualquier $A \in \mathcal{U}$
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son conjuntos disjuntos a pares y tales que $A_i \in \mathcal{U}$, entonces
$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Donde \mathbb{R}^* designa a los 'reales extendidos' $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Definición 15 (Medida de probabilidad en \mathbb{R}) Sea \mathcal{B} la sigma álgebra de Borel definida para \mathbb{R} , se dice que una función $P : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ es una **medida de probabilidad** si cumple que

- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier $A \in \mathcal{B}$
- Si $A, B \in \mathcal{B}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\mathbb{R}) = 1$

Una forma de entender mejor una variables aleatoria es a partir de su función de probabilidad acumulada (FPA), que a su vez caracteriza a la variable: es equivalente referirse a una variable aleatoria o a su FPA.

Definición 16 (Función de Probabilidad Acumulada) Sea

$$F_X(x) = P((-\infty, x])$$

¹Si una σ -álgebra contiene a todos los intervalos abiertos, entonces debe contener a todos los elementos de la σ -álgebra de Borel

A.2. Notas sobre la estacionariedad

En el texto se presentó la estacionariedad débil (definición 7) como la característica a verificar en los registros de estudio, aunque cabe ahondar un poco sobre por qué la versión *débil*. La estacionariedad formaliza el que las características de un proceso estocástico no cambien en el tiempo, lo cual permite caracterizarlo a partir de sus realizaciones; la definición 17 presenta una condición suficiente para ello.

Definición 17 (Estacionariedad fuerte) *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ es fuertemente estacionario si, para cualquier conjunto de tiempos admisibles t_1, t_2, \dots, t_n y cualquier τ tal que los tiempos $t_i + \tau$ son admisibles; se cumple que*

$$F_{(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))} \equiv F_{(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau))}$$

Donde $F_{(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))}$ es la función de probabilidad acumulada conjunta para el vector $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$

Tal definición es problemática en el problema tratado, ya que requiere estimar para cada tiempo

Definición 18 (Estacionariedad de orden m) *Un proceso estocástico $\{X(t)\}$ se dice estacionario de orden m si, para cualquier conjunto de tiempos admisibles t_1, t_2, \dots, t_n y cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$E[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2) \cdots X^{m_n}(t_n)] = E[X^{m_1}(t_1 + \tau)X^{m_2}(t_2 + \tau) \cdots X^{m_n}(t_n + \tau)]$$

Para cualesquiera enteros m_1, m_2, \dots, m_n tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$

Para entender mejor la definición 18 y sus limitaciones frente a la estacionariedad fuerte, considérense tres procesos: $\{X(t)\}$ fuertemente estacionario, $\{Y_1(t)\}$ estacionario de orden 1, y $\{Y_2(t)\}$ estacionario de orden 2. Luego

- Las medias² $\mu_{X(t)}$, $\mu_{Y_1(t)}$ y $\mu_{Y_2(t)}$ no dependen de t

²La media de una variable aleatoria V se define como $\mu_V := E[V]$

- Las varianzas³ $\text{Var}(Y_1(t))$ y $\text{Var}(Y_2(t))$ no dependen de t , pero no se puede garantizar lo mismo para $\text{Var}(X(t))$
- El coeficiente de asimetría⁴ $\gamma_{X(t)}$ no depende de t , pero no se puede garantizar lo mismo para $\gamma_{Y_1(t)}$ ni para $\gamma_{Y_2(t)}$

Cabe mencionar que hay una relación de contención clara en familia de los conjuntos de procesos estacionarios de orden finito (si un proceso es estacionario de orden m , entonces es estacionario de orden n para todo $n \leq m$); es posible definir procesos estacionarios de orden 'infinito' según 18, que intuitivamente serían fuertemente estacionarios. De manera pragmática, en este trabajo no se discuten tales interrogantes, sino que se usará únicamente la definición correspondiente al caso $m = 2$, referida como estacionariedad débil o de orden 2, y repetida en la definición 19.

Definición 19 (Estacionariedad débil) *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in T}$ es débilmente estacionario si, para cualesquiera tiempos admisibles⁵ $t, s, t + \tau, s + \tau$, se cumple que*

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)] \quad y \quad \mathbb{E}[X(t)X(s)] = \mathbb{E}[X(t + \tau)X(s + \tau)]$$

Más aún, parece conveniente exhibir una caracterización equivalente para los procesos débilmente estacionarios, pero que tiene una interpretación más sencilla.

Teorema 7 *Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles t, s se tiene que*

- $\mathbb{E}[X(t)] = \mu_X$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = \rho_X(s - t)$

³La varianza de una variable aleatoria V se define como $\text{Var}(V) := \mathbb{E}[(V - \mu_V)^2]$

⁴El coeficiente de asimetría para una variable aleatoria V se define como $\gamma_V = \frac{\mathbb{E}[(V - \mu_V)^3]}{\text{Var}(V)^{3/2}}$

⁵El término *tiempos admisibles* indica que para tiempo discreto o continuo la afirmación es la misma, bajo las restricciones pertinentes

Donde μ_X , σ_X^2 son constantes, $\rho_X(\tau)$ es una función que únicamente depende de τ

Cabe comentar sobre la existencia de procesos que son fuertemente estacionarios pero que no son estacionarios de ningún orden: por ejemplo, un proceso de variables aleatorias independientes con distribución de Cauchy⁶. Una condición suficiente para que un proceso fuertemente estacionario sea estacionario de orden m es que tenga sus primeros m momentos bien definidos. Con respecto a las señales registradas en el EEG, entendidas como procesos estocásticos, se espera que tengan (cuando menos) segundos momentos bien definidos; más adelante se presentan argumentos, desde una interpretación física, sobre por qué se espera que ocurra lo anterior.

Como ejemplos, un proceso ruido blanco (definición 20) no es estocásticamente continuo, mientras que un proceso de Wiener (definición 21) sí lo es.

Definición 20 (Proceso ruido blanco) *Se dice de un proceso estocástico $\{R(t)\}$ que cumple, para cualesquiera tiempos admisibles t y s , las siguientes propiedades:*

- $E[R(t)] = 0$
- $\text{Cov}(R(t), R(s)) = 0 \Leftrightarrow t \neq s$

Definición 21 (Proceso de Wiener) *Se dice de un proceso estocástico $\{W(t)\}$ que cumple, para cualesquiera tiempos admisibles t y s (con $s > t$) las siguientes propiedades:*

- $W(0) = 0$ ($W(0)$ es constante)
- $W(s) - W(t)$ es independiente de $W(u)$, para todo $u < t$ admisible
- $W(s) - W(t) \sim N(0, |t - s|)$ (los incrementos tienen distribución normal)

⁶Una variable aleatoria tiene distribución de Cauchy si su función de probabilidad acumulada es de la forma $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+y^2} dy$

Una forma natural de pensar en la definición 3 es que, si $|t - t_0|$ es muy pequeño, entonces $X(t)$ y $X(t_0)$ difieren muy poco entre sí (como variables aleatorias). Es destacable que si un proceso es estocásticamente continuo en un intervalo, sus realizaciones solamente se pueden garantizar continuas casi en todas partes ⁷ en ese intervalo.

En la definición 9, si F es derivable en todas partes entonces F' cumple el mismo papel que la integral de Fourier; en cambio, si k es una función periódica entonces F toma una forma escalonada cuyos aumentos coinciden con la serie de Fourier para k . Más aún, existen funciones que no son ni periódicas ni absolutamente sumables pero poseen una transformada de Fourier-Stieltjes, como $k(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$, $k(x) = \cos(x) + (1 + x^2)^{-1}$.

Teorema 8 (Descomposición de Lebesgue) *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada, con I un intervalo. Entonces pueden hallarse funciones $f_j, f_c, f_a : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

- $f = f_j + f_c + f_a$
- $f_j = \sum_{y \leq x} f(x - 0) + f(x + 0)$
- f_a es absolutamente continua⁸ en I
- f_c es una función singular⁹ en I

Estas funciones son únicas excepto por constantes, y en conjunto son llamados la descomposición de Lebesgue de f

A.3. Transformada Rápida de Fourier

Como se mostró en el texto, la transformada de Fourier es un operador clave para la definición y el estudio del *dominio de las frecuencias*. Sin embargo, su aplicación a

⁷Una propiedad se cumple **casi en todas partes** si se cumple en un conjunto cuyo complemento tiene medida cero

⁸Para que una función sea absolutamente continua, basta que sea de variación acotada y que mapee conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero

⁹Una función es singular si es continua, de variación acotada y no-constante, y se cumple que tiene derivada cero casi en todas partes

series de tiempo grandes se ve dificultada porque es un proceso lento: si se toma una serie de tiempo $\{s_n\}_{n=0,\dots,N}$ y se calcula su transformada finita de Fourier según su definición

$$\mathfrak{F}_s(\omega) = \sum_{n=0}^N s_n e^{i\omega n}$$

entonces para cada frecuencia ω se requerirán N multiplicaciones y $N - 1$ sumas, siendo que usualmente se analizan las frecuencias de la forma $\omega_k = 2\pi k/N$ con $k = 0, 1, \dots, N/2$. Usando la notación de Landau (definición 22) se deduce que obtener la transformada discreta de Fourier de una serie de tiempo de longitud N , usando este método, ocupa un tiempo de orden $\mathcal{O}(N^2)$.

Definición 22 (Orden \mathcal{O}) Sean f, g dos funciones en \mathbb{R} con $g(x) \neq 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Se dice que $f = \mathcal{O}(g)$, que f tiene orden g , si existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

El algoritmo presentado por transformada Rápida de Fourier (TRF)

A.4. Efecto del filtro STL

En el texto se menciona al filtro STL como un algoritmo para eliminar los efectos de tendencias deterministas sobre los registros, con lo cual se puede argumentar que los registros tienen valor esperado cero y que admiten una representación de Wold-Cramér. Sin embargo, se omitió una descripción más adecuada por motivos narrativos.

El algoritmo, introducido por Cleveland y colaboradores en 1990 [7] toma sus siglas del inglés *Seasonal-Trend decomposition based on Loess* (descomposición en tendencia y periodicidad basada en loess)

Bibliografía

- [1] INEGI. Encuesta Intercensal 2015. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/especiales/intercensal/>. Revisado: 2017-05-21.
- [2] M. S. Amer, S. A. Hamza, R. M. El Akkad, and Y. I. Abdel Galeel. Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes? *Aging & mental health*, 17(7):788–792, 2013.
- [3] N. Butkov and T. L. Lee-Chiong. *Fundamentals of sleep technology*. Lippincott Williams & Wilkins, 2007.
- [4] P. Carrillo-Mora, J. Ramírez-Peris, and K. Magaña Vázquez. Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario. *Revista de la Facultad de Medicina*, 56(4):5–15, 2013.
- [5] S. Chokroverty. *Sleep disorders medicine: basic science, technical considerations, and clinical aspects*. Elsevier Health Sciences, 2009.
- [6] J. W. Clark Jr. The origin of biopotentials. *Medical instrumentation: application and design*, 3:121–182, 1998.
- [7] R. B. Cleveland, W. S. Cleveland, J. E. McRae, and I. Terpenning. STL: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess. *Journal of Official Statistics*, 6:3–73, 1990.
- [8] B. A. Cohen and A. Sances. Stationarity of the human electroencephalogram. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 15(5):513–518, 1977.
- [9] S. A. Contreras. Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud. *Revista Médica Clínica Las Condes*, 24(3):341–349, 2013.

- [10] I. N. de Geriatria / Secretaría de Salud. Plan de acción alzheimer y otras demencias. méxico, 2014, 2014. México.
- [11] A. Fernández Conde and E. Vázquez Sánchez. El sueño en el anciano. atención de enfermería. *Enfermería Global*, 10:1–17, 2007.
- [12] V. García-Muñoz, E. Rodríguez Torres, O. Reséndiz-Flores, G. R. Vázquez-Tagle Gallagos, and A. Rosales-Lagarde. El color del ruido durante el sueño mor en el adulto mayor con deterioro cognitivo, 2016. XLIX Congreso Nacional Sociedad Matemática Mexicana. Aguascalientes, México.
- [13] E. M. Hita Yáñez. *Caracterización de las alteraciones del sueño en personas mayores con deterioro cognitivo leve*. Tesis doctoral, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, España, 2014.
- [14] T. Hori, Y. Sugita, E. Koga, S. Shirakawa, K. Inoue, S. Uchida, H. Kuwahara, M. Kousaka, T. Kobayashi, Y. Tsuji, et al. Proposed supplements and amendments to ‘a manual of standardized terminology, techniques and scoring system for sleep stages of human subjects’, the rechtschaffen & kales (1968) standard. *Psychiatry and clinical neurosciences*, 55(3):305–310, 2001.
- [15] C. Iber, S. Ancoli-Israel, A. Chesson, S. F. Quan, et al. *The AASM manual for the scoring of sleep and associated events: rules, terminology and technical specifications*, volume 1. American Academy of Sleep Medicine Westchester, IL, 2007.
- [16] H. H. Jasper. The ten twenty electrode system of the international federation. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 10:371–375, 1958.
- [17] N. Kawabata. A nonstationary analysis of the electroencephalogram. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, [revisar]:444–452, 1973.
- [18] J. A. McEwen and G. B. Anderson. Modeling the stationarity and gaussianity of spontaneous electroencephalographic activity. *IEEE transactions on Biomedical Engineering*, [revisar]:361–369, 1975.
- [19] S. Miyata, A. Noda, K. Iwamoto, N. Kawano, M. Okuda, and N. Ozaki. Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults. *Journal of sleep research*, 22(5):535–541, 2013.

- [20] H. Navarrete and I. Rodríguez-Leyva. La demencia. ¿subdiagnosticada o ignorada? *Revista Mexicana de Neurociencias*, 4:11–12, 2003.
- [21] M. M. Ohayon, M. A. Carskadon, C. Guilleminault, and M. V. Vitiello. Meta-analysis of quantitative sleep parameters from childhood to old age in healthy individuals: developing normative sleep values across the human lifespan. *SLEEP*, 27:1255–1274, 2004.
- [22] D. C. Park and P. Reuter-Lorenz. The adaptive brain: Aging and neurocognitive scaffolding. *Annual of Revised Psychology*, 60:173–196, 2009.
- [23] O. Potvin, D. Lorrain, H. Forget, M. Dube, S. Grenier, M. Preville, and C. Hudon. Sleep quality and 1-year incident cognitive impairment in community-dwelling older adults. *Sleep*, 35(4):491–499, 2012.
- [24] M. Priestley. Design relations for non-stationary processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 228–240, 1966.
- [25] M. B. Priestley. Evolutionary spectra and non-stationary processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 204–237, 1965.
- [26] M. B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*, volume 1,2. Academic Press, 1981.
- [27] M. B. Priestley and T. S. Rao. A test for non-stationarity of time-series. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 1(31):140–149, 1969.
- [28] K. J. Reid, Z. Martinovich, S. Finkel, J. Statsinger, R. Golden, K. Harter, and P. C. Zee. Sleep: a marker of physical and mental health in the elderly. *The American journal of geriatric psychiatry*, 14(10):860–866, 2006.
- [29] A. Robles, T. Del Ser, J. Alom, J. Peña Acasanova, and [et al]. Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de alzheimer. *Neurología*, 17(1):17–32, 2002.
- [30] E. E. Rodríguez, E. Hernández-Lemus, B. A. Itzá-Ortiz, I. Jiménez, and P. Rudomín. Multichannel detrended fluctuation analysis reveals synchronized patterns of spontaneous spinal activity in anesthetized cats. *PLoS One*, 6(10):e26449, 2011.

- [31] S. Sanei and J. A. Chambers. *EEG signal processing*. John Wiley & Sons, 2007.
- [32] C. Sanhueza Guzmán. *Programa de entrenamiento cerebral en adultos mayores sin deterioro cognitivo: atención, memoria y funciones ejecutivas*. PhD thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2014.
- [33] H. Sugimoto, N. Ishii, A. Iwata, N. Suzumura, and T. Tomita. On the stationarity and normality of the electroencephalographic data during sleep stages. *Computer programs in biomedicine*, 8(3-4):224–234, 1978.
- [34] G. R. Vázquez-Tagle Gallegos, V. García-Muñoz, A. Rosales-Lagarde, E. Rodríguez Torres, C. Martínez-Alcalá, and O. Reséndiz-Flores. Correlación inter-hemisférica durante el sueño mor del adulto mayor con deterioro cognitivo, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México.