# Estacionariedad débil

## Detección en series electrofisiológicas

Julio Cesar Enciso Alva

6 de julio de 2017

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

# Introducción

# Motivación

El estudio y diagnóstico de una gran cantidad de enfermedades depende de nuestra habilidad para registrar y analizar señales electrofisiológicas.

Se suele asumir que estas señales son complejas: no lineales, no estacionarias y sin equilibrio por naturaleza. Pero usualmente no se comprueban formalmente estas propiedades.

**Definición (Estacionariedad débil)**

*Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles $t$, $s$ se tiene que*

- $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mu_X$
- $\mathrm{Var}\left(X(t)\right) = \sigma_X^2$
- $\mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = \rho_X(s - t)$

*Con $\mu_X$, $\sigma_X^2$ constantes, $\rho_X(\tau)$ únicamente depende de $\tau$*

# Conceptos

**Definición (Función de densidad espectral (SDF))**

*Sea $\{X(t)\}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, débilmente estacionario*

$$h(\omega) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T}\right]$$

*Donde* $G_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} X(t) e^{-i\omega t} dt$

**Teorema (Wiener-Khinchin)**

*Una condición suficiente y necesaria para que $\rho$ sea función de autocorrelación para algún proceso a tiempo continuo débilmente estacionario y estocásticamente continuo, $\{X(t)\}$, es que exista una función $F$ tal que*

- *Es monótonamente creciente*
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$
- *Para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

# Espectro evolutivo

Se consideran procesos no-estacionarios, estocásticamente continuos, de media cero y varianza finita, y que admitan una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t,\omega) e^{it\omega} dZ(\omega)$$

tal que

- $\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega), dZ(\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$
- $\mathrm{E}\left[|dZ(\omega)|^2\right] = \mu(\omega)$

El **espectro evolutivo** fue definido por Priestley[1] como

$$f(t,\omega) = |A(t,\omega)|^2$$

[1] Maurice B Priestley. "Evolutionary spectra and non-stationary processes". En: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* (1965), págs. 204-237.

## Definición (Estimador de doble ventana)

*Se define a $\widehat{f}$, estimador para la $f$, como*

$$\widehat{f}(t,\omega) = \int_{t-T}^{t} w_{T'}(u)|U(t-u,\omega)|^2 du$$

- $U(t,\omega) = \int_{t-T}^{t} g(u)X(t-u)e^{i\omega(t-u)}du$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$
- $w_\tau(t) \geq 0$ *para cualesquiera* $t$, $\tau$
- $w_\tau(t) \to 0$ *cuando* $|t| \to \infty$, *para todo* $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t)dt = 1$ *para todo* $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 \, dt < \infty$ *para todo* $\tau$
- $\exists C$ *tal que* $\lim_{\tau\to\infty} \tau \int_{-\infty}^{t} |W_\tau(\lambda)|^2 \, d\lambda = C$