

Estacionariedad débil

Detección en series electrofisiológicas

Julio Cesar Enciso Alva

Neuroscience Short Course

6 de julio de 2017

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

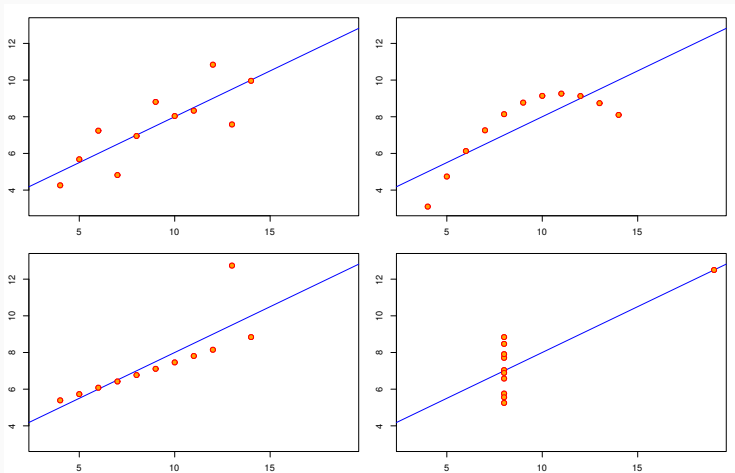
Conceptos

Ejemplo práctico

El estudio y diagnóstico de una gran cantidad de enfermedades depende de nuestra habilidad para registrar y analizar señales electrofisiológicas.

Se suele asumir que estas señales son complejas: no lineales, **no estacionarias** y sin equilibrio por naturaleza. Pero usualmente no se comprueban formalmente estas propiedades.

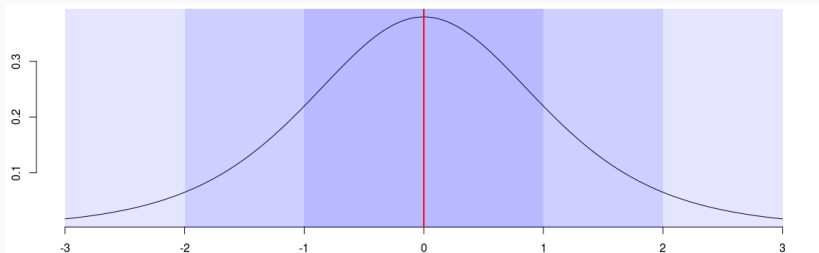
Motivación: formalidad



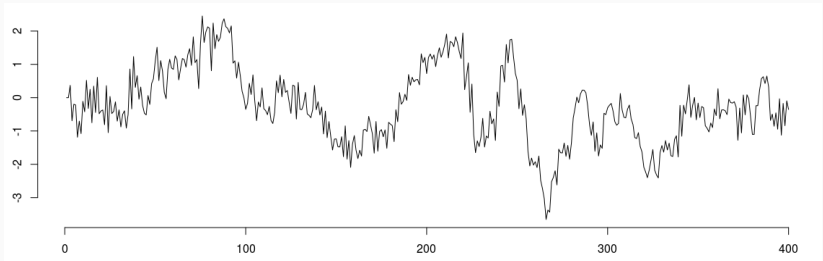
Conceptos

Conceptos

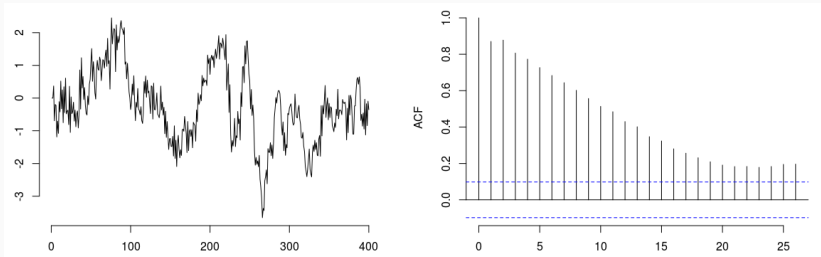
- Promedio (μ)
- Desviación estándar (σ^2)



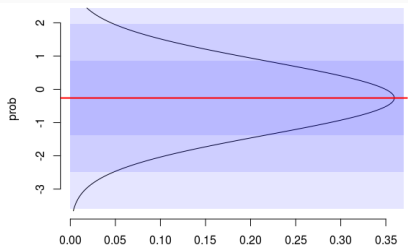
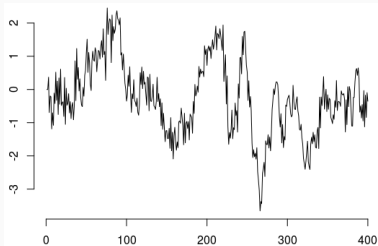
- Serie de tiempo $\{X(t)\}$



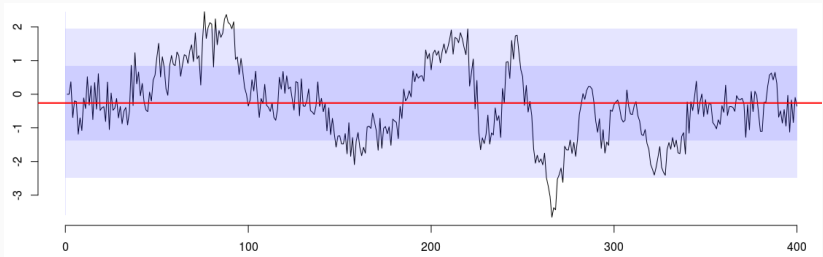
- Función de autocorrelación (ρ)



¿ Promedio y desviación estándar de una serie de tiempo ?



¿ Promedio y desviación estándar de una serie de tiempo ?



Definición (Estacionariedad débil)

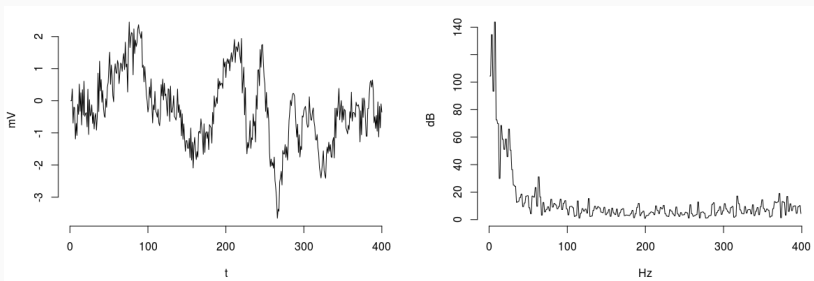
Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles t, s se tiene que

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = \rho_X(s - t)$

Con μ_X, σ_X^2 constantes, $\rho_X(\tau)$ únicamente depende de τ

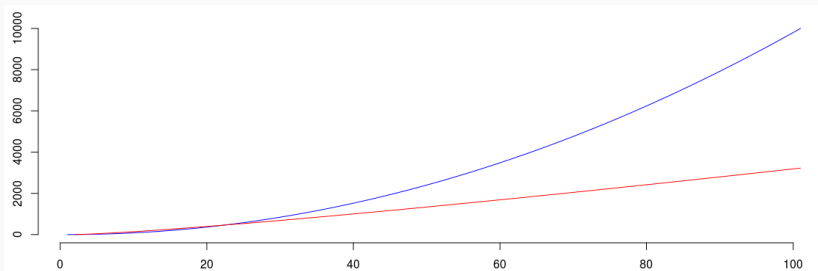
Un atajo interesante

Espectro de potencias: $f(\omega_j) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega_j t} dt$



Un atajo interesante

Cantidad de operaciones: $\mathcal{O}(N \log N)$ vs $\mathcal{O}(N^2)$



Teorema (Wiener-Khinchin)

Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea función de autocorrelación para algún proceso a tiempo continuo débilmente estacionario y estocásticamente continuo, $\{X(t)\}$, es que exista una función F tal que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Se considerarán procesos no-estacionarios **de media cero y varianza finita** que admitan una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{it\omega} dZ(\omega)$$

tal que

- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$
- $E[|dZ(\omega)|^2] = \mu(\omega)$

El espectro evolutivo fue definido por Priestley¹ como

$$f(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2$$

¹Maurice B Priestley. "Evolutionary spectra and non-stationary processes". En: Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (1965), págs. 204-237.

Supóngase que puede expresarse a $\{X(t)\}$ como

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{i\omega t} d\xi(\omega)$$

$\{X(t)\}$ estacionario $\Rightarrow A(t, \omega)$ constante $\Rightarrow f(t, \omega)$ constante

Supóngase que puede expresarse a $\{X(t)\}$ como

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{i\omega t} d\xi(\omega)$$

$\{X(t)\}$ estacionario $\Rightarrow A(t, \omega)$ constante $\Rightarrow f(t, \omega)$ constante

Prueba de hipótesis para

$$H_0 : f(t, \bullet) \text{ no depende de } t$$

Definición (Estimador de doble ventana)

$$\widehat{f}(t, \omega) = \int_{t-T}^t w_{T'}(u) |U(t-u, \omega)|^2 du$$

Donde $w_{T'}$, U , g , Γ son tales que

- $U(t, \omega) = \int_{t-T}^t g(u) X(t-u) e^{i\omega(t-u)} du$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$
- $w_{\tau}(t) \geq 0$ para cualesquiera t, τ
- $w_{\tau}(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(t) dt = 1$ para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(t))^2 dt < \infty$ para todo τ

Proposición

El estimador \hat{f} tiene las siguientes propiedades

- $E \left[\hat{f}(t, \omega) \right] \approx f(t, \omega)$
- $\text{Var} \left(\hat{f}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{\tau} f^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$
- $\text{Cov} \left(\hat{f}(t_1, \omega_1), \hat{f}(t_2, \omega_2) \right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) w_{\tau}(v) \text{Cov} \left(|U(t_1 - u, \omega_1)|^2, |U(t_2 - u, \omega_2)|^2 \right) dudv$

Puede escribirse $Y(t, \omega) = \log(f(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega)$, donde

- $E[\varepsilon(t, \omega)] = 0$
- $\text{Var}(\varepsilon(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta =: \sigma^2$

Como f y Y dependen (o no) simultáneamente de t , se puede usar la siguiente prueba de hipótesis

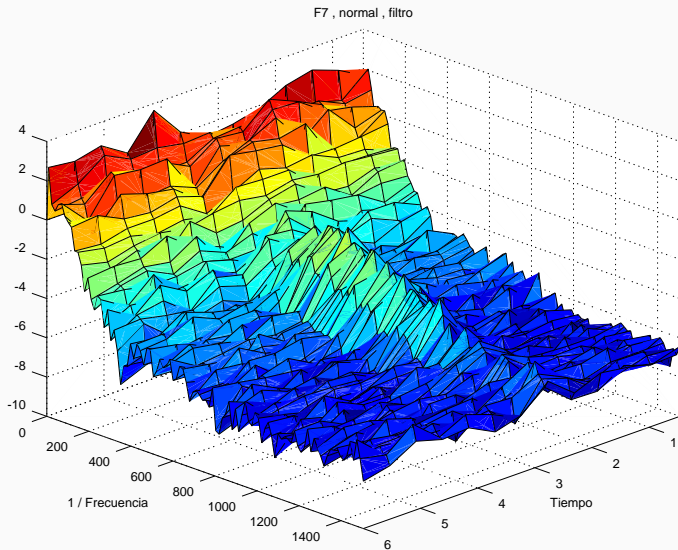
$$H_0 : \sum_{i=1}^N (Y(t, \omega_i) - \bar{Y}(\bullet, \omega_i))^2 = 0$$

$$\text{con } \bar{Y}(\bullet, \omega) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Y(t_j, \omega)$$

Priestley–Subba Rao stationarity Test for datos

Samples used	: 3072
Samples available	: 3069
Sampling interval	: 1
SDF estimator	: Multitaper
Number of (sine) tapers	: 5
Centered	: TRUE
Recentered	: FALSE
Number of blocks	: 11
Block size	: 279
Number of blocks	: 11
p-value for T	: 0.4130131
p-value for I+R	: 0.1787949
p-value for T+I+R	: 0.1801353

Espectro estimado



Filtro no-paramétrico para generar las series de tiempo

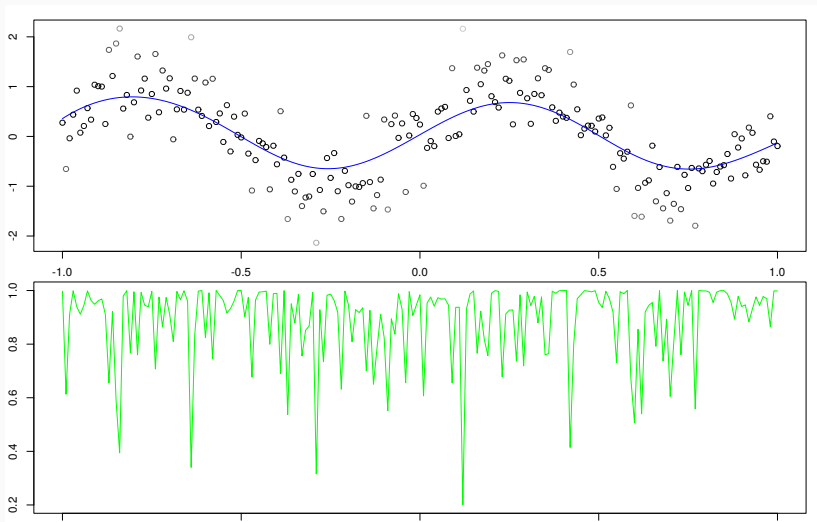
$$X(t) = T(t) + S(t) + R(t)$$

Tales que:

S Función periódica suave, comp. estacional

T Función suave, tendencia

R Residuo



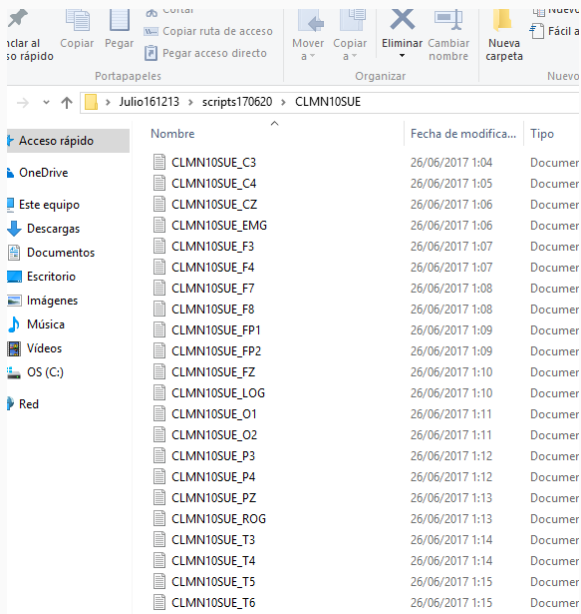
Ejemplo práctico

Lenguaje para cómputo estadístico y graficación; multi-plataforma (Linux, Windows, MacOS), de código abierto y acceso gratuito a través de su página [▶ Link](#)



Por simplicidad, se usará la interfaz gráfica de RStudio [▶ Link](#)

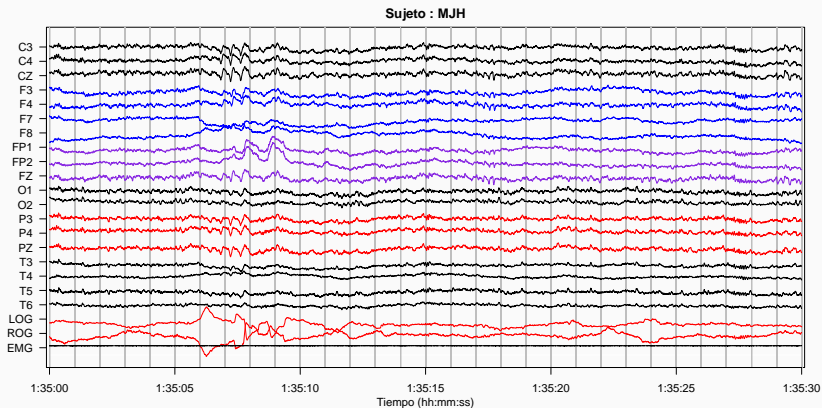
Datos: registros



The image shows a Windows File Explorer window. The address bar indicates the path: > Julio161213 > scripts170620 > CLMN10SUE. The left sidebar shows the 'Acceso rápido' (Quick access) section with links to OneDrive, Este equipo (This PC), Descargas (Downloads), Documentos (Documents), Escritorio (Desktop), Imágenes (Pictures), Música (Music), Vídeos (Videos), OS (C:), and Red (Network). The main area displays a list of files with columns for Nombre (Name), Fecha de modificación (Modification date), and Tipo (Type). All files are documents, and their names follow a pattern: CLMN10SUE_C3 through CLMN10SUE_T6. The modification dates range from 26/06/2017 1:04 to 26/06/2017 1:15.

Nombre	Fecha de modifica...	Tipo
CLMN10SUE_C3	26/06/2017 1:04	Documen
CLMN10SUE_C4	26/06/2017 1:05	Documen
CLMN10SUE_CZ	26/06/2017 1:06	Documen
CLMN10SUE_EMG	26/06/2017 1:06	Documen
CLMN10SUE_F3	26/06/2017 1:07	Documen
CLMN10SUE_F4	26/06/2017 1:07	Documen
CLMN10SUE_F7	26/06/2017 1:08	Documen
CLMN10SUE_F8	26/06/2017 1:08	Documen
CLMN10SUE_FP1	26/06/2017 1:09	Documen
CLMN10SUE_FP2	26/06/2017 1:09	Documen
CLMN10SUE_FZ	26/06/2017 1:10	Documen
CLMN10SUE_LOG	26/06/2017 1:10	Documen
CLMN10SUE_O1	26/06/2017 1:11	Documen
CLMN10SUE_O2	26/06/2017 1:11	Documen
CLMN10SUE_P3	26/06/2017 1:12	Documen
CLMN10SUE_P4	26/06/2017 1:12	Documen
CLMN10SUE_PZ	26/06/2017 1:13	Documen
CLMN10SUE_ROG	26/06/2017 1:13	Documen
CLMN10SUE_T3	26/06/2017 1:14	Documen
CLMN10SUE_T4	26/06/2017 1:14	Documen
CLMN10SUE_T5	26/06/2017 1:15	Documen
CLMN10SUE_T6	26/06/2017 1:15	Documen

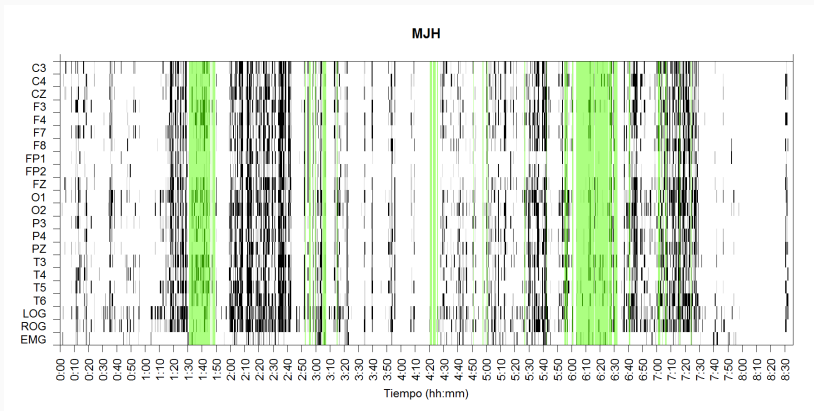
Graficación de los datos



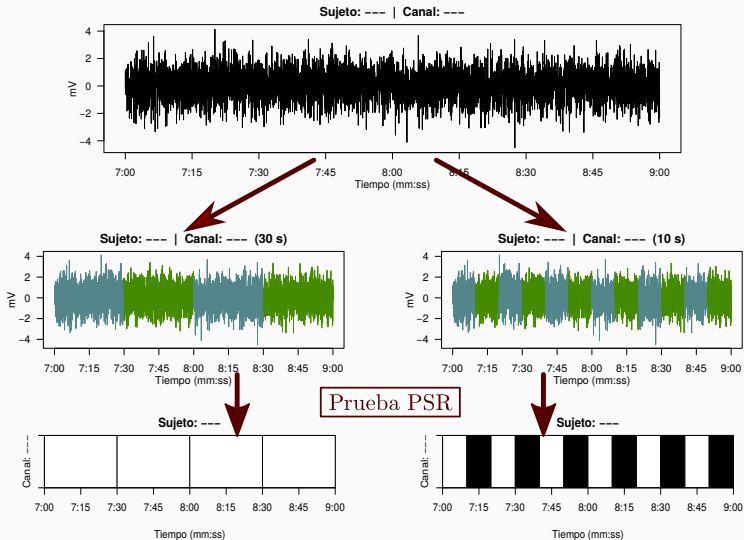
Priestley–Subba Rao stationarity Test for datos

Samples used	: 3072
Samples available	: 3069
Sampling interval	: 1
SDF estimator	: Multitaper
Number of (sine) tapers	: 5
Centered	: TRUE
Recentered	: FALSE
Number of blocks	: 11
Block size	: 279
Number of blocks	: 11
p-value for T	: 0.4130131
p-value for I+R	: 0.1787949
p-value for T+I+R	: 0.1801353

Disposición gráfica de los resultados

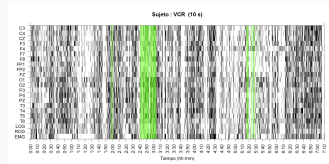
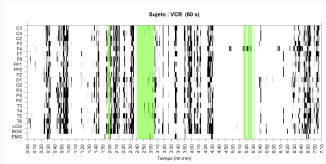
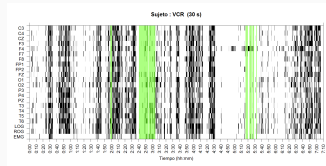


Efecto del tamaño de la época



Efecto del tamaño de la época

Estacionariedad local²



²Bernard Allan Cohen y Anthony Sances. “Stationarity of the human electroencephalogram”. En: Medical and Biological Engineering and Computing 15.5 (1977), págs. 513-518.

Gracias por su atención
