



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Estacionariedad débil en registros
polisomnográficos de adultos mayores,
como marcador de posible deterioro
cognitivo

Presenta

Julio Cesar Enciso Alva

Dirección

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. Mayo de 2018

Resumen

La demencia es una enfermedad no-transmisible asociada a la edad, y el deterioro cognitivo leve (DCL) se considera una etapa temprana de la demencia en adultos mayores. Se han reportado varios marcadores para el DCL usando registros de polisomnografía (PSG), muchos de ellos usando el espectro de potencias; entre ellos destaca el papel de la etapa de sueño denominada MOR. En particular, para este estudio se consideran registros de PSG obtenidos con 19 electrodos para actividad eléctrica cerebral (electroencefalografía, EEG), 2 para movimientos oculares (electrooculografía, EOG) y 2 para actividad muscular (electromiografía, EMG). En este trabajo se buscan marcadores del DCL basados en la homogeneidad del espectro de potencias en los registros de PSG, identificada usando pruebas de estacionariedad débil. La estacionariedad está ligada a la complejidad de la actividad cerebral, pero usualmente se deshecha debido a las complicaciones que implica considerarla. Se fragmentaron los registros de PSG durante el sueño MOR, y se usó la cantidad de fragmentos estacionarios; se encontró que hay diferencias estadísticamente significativas para esta cantidad en el EEG en ambos hemisferios de la región frontal, así como en el EOG, entre sujetos con y sin DCL y al transitar entre etapas de sueño. Estos resultados son consistentes, por un lado con las características distintivas del sueño MOR, y por otro con el papel de la región frontal del cerebro en la toma de decisiones y consolidación de la memoria. Los resultados presentados, usando la estacionariedad débil, confirman que esta característica posee información relevante respecto a la estructura del sueño y su deterioro durante el DCL; un estudio más profundo de los fenómenos asociados permitirá usarla eficientemente como un marcador DCL.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Abstract

Dementia is a non-communicable disease associated with age, and Mild Cognitive Impairment (MCI) is considered an early stage of dementia in Older Adults. There are a variety of tracers for MCI using polysomnographic (PSG) records, many of them derived from the power spectrum; among them, is highlighted the importance of the sleep stage referred as REM. In this study in particular, we consider PSG registers obtained with 19 electrodes for electrical brain activity (electroencephalography, EEG), 2 for eyes movement (electrooculography, EOG) and 2 for muscle activity (electromyography, EMG). In this work, diagnostic markers of MCI were searched using the power spectrum homogeneity for the PSG registers, which is identified using weak stationarity tests. Stationarity is associated with the complexity of brain activity, but is usually discarded because of the complications implied by using it. PSG registers at REM sleep stage were fragmented, and the amount of such stationary fragments was used; statistical differences were found for this quantity on the EEG at both hemispheres at frontal regions, and also for the EOG, both between subjects with and without DCL and between different sleep stages. These results are consistent both with the characteristics of REM sleep and the function of frontal regions of the brain in decision making and memory consolidation. The results presented, using weak stationarity, confirm that this characteristic contains relevant information about sleep structure and its deterioration during MCI; a further study of the associated phenomena will make possible to use it as an effective tracer for MCI.

La doctora Alejandra Rosales Lagarde propuso investigar el tema del sueño en el adulto mayor en el Área Académica de Gerontología de la UAEH, institución a la cual está comisionada de acuerdo al contrato con el programa Cátedras CONACYT con el número de investigadora 1411 y el proyecto número 2162, *Evaluación y diagnóstico de los aspectos biopsicosociales del adulto mayor y sus cuidadores primarios*.

Se agradece a la Lic. Martha Hernández Rojo, del Instituto de Atención a los Adultos Mayores del Estado de Hidalgo (IAAMEH) y a la Mtra. Patricia Padilla del Centro Gerontológico Integral de Punta Azul en Mineral de la Reforma, Hidalgo, por las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo y a los adultos mayores que participaron en él.

De manera adicional, el presente estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080), Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalévskaya (2014); otorgados a la doctora Erika E. Rodríguez Torres.

Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además de darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Erika Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo al centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por permitirme el acceso y análisis a los registros de polisomnografía. Mi contribución con esta tesis luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.


Índice general

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Índice de figuras

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Índice de cuadros



frase.png

*“Creo que el conocimiento científico tiene
propiedades fractales; que por mucho que aprendamos,
lo que queda, por pequeño que parezca,
es tan infinitamente complejo como el todo
por el que empezamos.
Ese, creo yo, es el secreto del universo.”*

ISAAC ASIMOV [?]

Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo se han incrementado tanto la esperanza como la calidad de vida. Desafortunadamente, también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad. En México el sector de la población con más de 60 años de edad (considerados en alto riesgo para este tipo de enfermedades) contempló a 10 millones de personas en 2010, y en 2015 dicha cifra creció a 12 millones [?, ?]. En este trabajo se destaca la demencia entre las enfermedades asociadas con la edad.

La demencia consiste en el desarrollo de deficiencias cognoscitivas (especialmente en atención y memoria) suficientemente graves como para interferir en las actividades del individuo. Hasta el momento se considera que la demencia es irreversible y no se han identificado curas [?], debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El deterioro cognitivo leve (DCL), una etapa temprana de la demencia, se entiende como el desarrollo de deficiencias cognoscitivas *objetivas* que no son lo suficientemente graves para calificarse como demencia.

Existen varios métodos para detectar el DCL, como la autopercepción por parte del paciente, pruebas neuropsicológicas, análisis genéticos, químicos o de imagenología cerebral. Las pruebas neuropsicológicas son usadas en el presente trabajo; se definen como *muestras* de algún comportamiento de interés, obtenidas bajo protocolos estandarizados y calificados de forma objetiva. Debido a la naturaleza parcialmente subjetiva de las pruebas neuropsicológicas, en este trabajo se destaca la técnica de polisomnografía (PSG) que consiste en el registro conjunto de varias señales electrofi-

siológicas durante el sueño. De manera concreta, será analizada una PSG compuesta por registros de electroencefalografía (EEG), electrooculografía (EOG) y electromiografía (EMG), para medir actividad eléctrica cerebral, tono muscular y movimientos oculares, respectivamente. Se decidió usar la PSG porque es una técnica relativamente barata y no invasiva –en relación al tipo de información que se obtiene–, y porque en la literatura hay una gran cantidad de reportes sobre marcadores para el DCL usando la EEG.

Se han encontrado, por ejemplo, asociaciones entre el DCL en adultos mayores con la *presencia* de algunos tipos de ondas cerebrales [?, ?, ?]. Conviene destacar que algunos reportes indican que los mejores predictores del DCL son los obtenidos durante el sueño (incluso sólo el EEG) en comparación con los obtenidos durante la vigilia [?].

Antecedentes

Se considera que la técnica de EEG fue inventada en la década de 1920 por el fisiólogo Hans Berger, quien adicionalmente descubrió que la EEG es *sensible* a algunos cambios en la actividad mental del participante, como la atención sostenida o el parpadeo voluntario. Desde entonces se estableció que hay una *conexión* entre los fenómenos eléctricos en el cerebro y el funcionamiento de la mente.

Los fenómenos eléctricos en el cerebro que dan origen al EEG se consideran comprendidos en sus *niveles* más básicos: cada neurona genera un potencial eléctrico estable a través de su membrana celular, debido al intercambio de iones con el medio extracelular. Las perturbaciones en estos potenciales se transmiten a través de la membrana, e inducen perturbaciones similares en neuronas cercanas; la morfología de las neuronas permite que formen *redes* para la transmisión de impulsos eléctricos, las cuales se extienden por todo el sistema nervioso.

A partir del mecanismo para la transmisión de impulsos eléctricos, sin embargo, no es muy claro cómo funciona el sistema nervioso central como un todo –o cómo deja de funcionar, como en el caso del DCL. Es necesario considerar que las neuronas no se distribuyen ni forman conexiones de forma aleatoria u homogénea dentro del sistema nervioso, sino que obedecen a un tipo de *organización* que influye en su funcionalidad. Más aún, la existencia de múltiples niveles de organización en la actividad cerebral la han colocado como un *paradigma* de complejidad.

Bajo este contexto se entiende a la complejidad no como complicación, sino como la presencia de características *emergentes*, es decir, que están presentes en un sistema pero no en sus componentes: una neurona individual no exhibe (cualitativamente) el mismo comportamiento eléctrico que todo el cerebro [?]. La complejidad puede describirse informalmente con la frase “el todo es más que [simplemente] la suma de las partes”, entendiendo que la organización es parte de un sistema.

En su célebre libro “*Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*”, el matemático Norbert Wiener propuso que, debido a la gran complejidad de la actividad cerebral, el comportamiento del EEG roza la aleatoriedad; entonces es posible estudiar estos fenómenos usando herramientas de estadística, ignorando parcialmente los procesos físicos y biológicos subyacentes [?]. Con base a tal comentario, surge históricamente la pregunta sobre hasta qué punto es posible modelar efectivamente al EEG como señales aleatorias con propiedades *simples* e independientes de los complejos procesos subyacentes. Por ejemplo, pueden mencionarse varios trabajos pioneros donde se investiga si los registros de EEG siguen una distribución normal, si son estacionarios, y si su espectro de potencias es *estable* en el tiempo [?, ?, ?, ?]; en dichos trabajos se demuestra experimentalmente que el EEG puede considerarse estacionario si se usan segmentos de hasta 20 segundos, e incluso se sugiere que esta cantidad puede cambiar para personas con alguna daño neuronal.

Es sumamente interesante el contraste entre la complejidad *innata* del EEG, y la posibilidad de señalar segmentos cuyo comportamiento es relativamente simple. Se ha propuesto que esta característica refleja el comportamiento hipotético de la actividad cerebral como la *orquestración* de múltiples estados de actividad, cada uno con características distintivas, los cuales se alternan entre sí logrando una gran heterogeneidad global [?]. En el caso de la estacionariedad, se usará la formalización para este comportamiento descrita por Dahlhaus, referida como estacionariedad local [?].

Respecto al supuesto de estacionariedad local en el EEG, cabe destacar que la verificación formal de estacionariedad ha caído en desuso; en cambio, se suelen usar fragmentos de EEG *suficientemente pequeños* para poder suponer estacionariedad [?]. Sin embargo, se ha mostrado que las pruebas de estacionariedad pueden ser útiles, por ejemplo, para segmentar de forma *fisiológicamente relevante* registros de EEG [?] y de magnetoencefalografía¹ [?], o como apoyo a otras técnicas [?].

¹La técnica de magnetoencefalografía (MEG) consiste en el registro de actividad eléctrica del

Bajo el supuesto de estacionariedad local, en el presente trabajo se explora la hipótesis en que el DCL afecte a la organización de la actividad cerebral. De manera concreta, se realizaron análisis de estacionariedad en segmentos de PSG para comprobar si hay cambios entre individuos con y sin DCL. Previamente, se han mostrado resultados que sugieren es posible observar tales cambios [?].

Para detectar la estacionariedad se ha usado la prueba descrita por Priestley y Subba Rao [?], ya que se ha señalado como una de las más rápidas hasta la fecha [?], y porque puede ser interpretada de forma relativamente sencilla en términos de un espectro de potencias cambiante en el tiempo.

El presente trabajo es un paso en el desarrollo de una metodología para determinar el DCL con base en registros de PSG en adultos mayores, como un marcador que respalde a los resultados de pruebas neuropsicológicas.

Pregunta de investigación y objetivos

Los registros de PSG en adultos mayores, modelados como procesos estocásticos, ¿pueden considerarse como débilmente estacionarios? ¿Dicha caracterización es afectada si el individuo presenta probable DCL (PDCL)?

Objetivos

Estudiar sobre pruebas estadísticas para detectar si una realización dada proviene de un proceso estocástico débilmente estacionario. Usar tales pruebas sobre registros de PSG en adultos mayores con y sin PDCL; bajo el supuesto de estacionariedad local, revisar qué factores podrían influir en los resultados obtenidos. Investigar si hay una relación entre la presencia de PDCL y la clasificación de los procesos estocásticos referidos como débilmente estacionarios.

Acerca de la estructura del texto

Debido al enfoque aplicado del presente trabajo, la exposición de temas fue pensada considerando a dos tipos de lectores: aquellos interesados principalmente en los objetos matemáticos involucrados, y quienes prefieren ver los mismos objetos como cerebro, a través de perturbaciones en campos magnéticos artificiales.

herramientas y buscan entender su funcionamiento. El orden en que se presentan está pensado especialmente para el primer tipo de lectores, mientras que para el segundo tipo de lectores se ha preparado en la figura ?? un *mapa* del texto, pero principalmente de los temas sobre matemáticas.


El primer capítulo se incluye con la finalidad de lograr un texto autocontenido, y en él se exponen una serie de temas preliminares aunque sin gran detalle. Entre los temas más importantes se encuentran procesos estocásticos, estacionariedad débil, estimadores, pruebas de hipótesis, y la transformada de Fourier.

El segundo capítulo funciona como un preludio al tercer capítulo, pero que se consideró útil para facilitar la exposición. El tema principal es el espectro de potencias, una generalización de la transformada de Fourier para procesos estocásticos débilmente estacionarios; adicionalmente se discute sobre su estimación.

En el tercer capítulo se define el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para una familia de procesos que no son débilmente estacionarios. Al final se expone una aplicación aparente menor del espectro evolutivo, pero que es fundamental para el resto del presente trabajo: la prueba de Priestley Subba-Rao. Esta prueba verifica –como prueba de hipótesis– si el espectro evolutivo de un proceso puede reducirse a un espectro de potencias; en otras palabras, si un proceso es débilmente estacionario.

El objetivo del cuarto capítulo es describir el DCL y cómo se detecta, qué es el sueño y cómo se analiza (en particular usando la PSG), y mencionar la relación entre el sueño y el DCL. Para ello se presentan algunos conceptos de psicología, psicometría, fisiología y electrofisiología.

En el capítulo quinto se describe cómo se utilizó la prueba de estacionariedad débil para estudiar los registros de polisomnografía. En el capítulo sexto se discuten los resultados obtenidos, y se concluye que la técnica utilizada es un marcador diagnóstico para el DCL; se reportan algunos hallazgos incidentales.



./estructura_texto_v2.pdf

Figura 1: Se ilustra gráficamente las *dependencias* respecto a los tópicos de matemáticas, es decir, los temas que deben discutirse antes que otros. El resto del texto (incluyendo los tópicos de fisiología) son expuestos de forma más *secuencial*, por lo que no se consideró necesario ilustrar sus dependencias.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Este capítulo se incluye con el objetivo de lograr un texto autocontenido y accesible, para lo cual se expone una serie de temas que en lo posterior serán considerados como *conocidos*. Dentro del contexto del presente trabajo, la lectura de este capítulo es opcional, para lo cual se recomienda revisar el diagrama de relaciones entre temas (cuadro ??) como guía de lectura. La secuencia de lectura sugerida por el autor es, naturalmente, según se ha ordenado el texto de principio a fin.

Con la intención de no hacer el presente texto innecesariamente extenso, los temas del presente capítulo se exponen sin muchos detalles; se omiten comentarios importantes y demostraciones de teoremas fuertes, pero sólo en caso de que no *im-pacten* de manera directa a los resultados centrales del presente trabajo. Esta falla planificada es *compensada* citando material donde el lector puede encontrar dichos faltantes. Cabe destacar que los temas *centrales* en el presente texto se distribuyen entre los capítulos 2 y 3.

De manera general, el lector interesado en mayores detalles sobre teoría de la medida, probabilidad y estadística puede referirse a los libros “*Probability for Statisticians*” por Galen R. Shorack [?], y “*Statistical Theory*” por Bernard W. Lindgren [?]. Así mismo, en el contexto de procesos estocásticos, es recomendable la exposición sobre espacios de Hilbert en el libro “*Stationary Stochastic Processes: Theory and Applications*” por Georg Lindgren [?].

1.1. Medidas

Definición 1.1. Sea Ω un conjunto y sea \mathcal{U} una familia de subconjuntos de Ω . Se dice que \mathcal{U} es una **σ -álgebra** si cumple que

$$\text{I)} \quad \Omega \in \mathcal{U}$$

$$\text{II)} \quad A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U}$$

$$\text{III)} \quad \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$$

Donde A^C es el complemento de A en Ω . Los elementos de \mathcal{U} se denominan **conjuntos medibles**.

Definición 1.2. Sea Ω un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ una familia de subconjuntos. Se define a $\sigma(\mathcal{A})$, la **σ -álgebra generada por \mathcal{A}** , como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{A} .

Ejemplo 1.1. En el contexto de la probabilidad, es particularmente importante la σ -álgebra de Borel, \mathcal{B} , definida como

$$\mathcal{B}_A := \sigma \left(\{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \right) \quad (1.1)$$

En general pueden definirse σ -álgebras similares de forma sencilla para algún subconjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}$, como

$$\mathcal{B}_A := \sigma \left(\{(-\infty, a] \cap A \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \right) \quad (1.2)$$

Definición 1.3. Sea Ω un conjunto y \mathcal{U} una σ -álgebra definida en Ω . El par (Ω, \mathcal{U}) será referido como **espacio de medida**. Por nomenclatura, Ω es referido como espacio muestral y \mathcal{U} como σ -álgebra de sucesos.

Definición 1.4. Sea (Ω, \mathcal{U}) un espacio de medida. Se dice que una función $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una **medida** si cumple que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ son tales que $A_n \cap A_m = \emptyset \Leftrightarrow m \neq n$, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \quad (1.3)$$

Donde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} \cup \{\infty\}$ y \emptyset es el conjunto vacío. La terna $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ será referida como **espacio de medida**.

Ejemplo 1.2. Considérese el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, con \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel. Se define la medida de Lebesgue, μ_L , la medida en el espacio mencionado que satisface

$$\mu_L([a, b]) = b - a \quad (1.4)$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Por simplicidad, en lo posterior se dará por entendido que el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_L)$ es usual siempre que se hable de medidas en \mathbb{R} o alguno de sus subconjuntos.

Ejemplo 1.3. Considérese el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, con \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel. Se define la medida discreta, μ_D , como

$$\mu_D(A) = \sigma_{n \in A} 1 \quad (1.5)$$

1.1.1. Integración en espacios medibles

Definición 1.5. Sea $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ dos espacios de medida. Se dice que una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una **función medible** si cumple que

$$U \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_1 \quad (1.6)$$

donde $f^{-1}(U) = \{u \in \Omega_1 \mid f(u) \in U\}$.

Definición 1.6. Sea (Ω, \mathcal{U}) un espacio de medida, sea $C \in \mathcal{U}$ un conjunto medible arbitrario, sea $n \in \mathbb{N}$. Una **partición** de C es una familia de conjuntos $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subseteq \mathcal{U}$ que satisface las siguientes condiciones:

- $E_i \cap E_j = \emptyset \Leftarrow i \neq j$
- $\cup_{i=1}^n E_i = C$

Definición 1.7. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Sea $A \in \mathcal{U}$ un conjunto arbitrario, y sea $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}$ el conjunto de las

particiones de A . Se define la **integral de f respecto a μ en A** como

$$\int_A f(x)\mu(x) := \sup_{\mathcal{C}_A} \left[\sum_{i=1}^N f_i f(\lambda)\mu(E_i) \right] \quad (1.7)$$

donde $\{E_1, E_2, \dots, E_N\}$ es una partición arbitraria de A y $f_i = \inf_{t \in E_i} f(t)$.

Definición 1.8. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Se definen las funciones f^+ y f^- como

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \\ f^-(x) &= -\min(f(x), 0) \end{aligned}$$

Se dice que f es **integrable en A respecto a μ** si cumple que $\int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$ y $\int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$; si así fuere, se define

$$\int_A f(\lambda)d\mu(\lambda) := \int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) - \int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (1.8)$$

Proposición 1.1. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida, sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ funciones integrables en A con respecto a μ , y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se cumple que la función $[\alpha f + \beta g]$ es integrable en A con respecto a μ , y

$$\int_A [\alpha f + \beta g](\lambda)\mu(\lambda) = \alpha \int_A f(\lambda)\mu(\lambda) + \beta \int_A g(\lambda)\mu(\lambda) \quad (1.9)$$

Proposición 1.2. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. La función $\mu_f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$, definida como

$$\mu_f(A) := \int_A f(\lambda)\mu(\lambda) \quad (1.10)$$

es una medida para el espacio medible (Ω, \mathcal{U}) . En tal caso, se dice que μ_f es la **medida inducida por f** .

Proposición 1.3. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible con μ_f su medida inducida, y sea $A \in \mathcal{U}$ arbitrario. Si una función $g : \Omega \rightarrow$

\mathbb{R}_+ es integrable en A respecto a μ_f , entonces se cumple que

$$\int_A g(\lambda) d\mu_f(\lambda) = \int_{f^{-1}(A)} g(\lambda) f(\lambda) d\mu(\lambda) \quad (1.11)$$

Como notación, este hecho será escrito como

$$d\mu_f(\bullet) = f(\bullet) d\mu(\bullet) \quad (1.12)$$

1.2. Variables aleatorias

Si una medida μ es acotada en todo el espacio de eventos se dice que es una **medida finita**. Una medida de probabilidad puede entenderse como un caso particular de medida finita sobre \mathbb{R} .

Definición 1.9. El espacio de medida (Ω, \mathcal{U}, P) se dice un **espacio de probabilidad** si satisface que $P(\Omega) = 1$.

Definición 1.10. Sea (Ω, \mathcal{U}) un espacio medible y (I, \mathcal{B}_I, P) un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_I$.

Definición 1.11. Una **variable aleatoria real** es un caso particular de variable aleatoria entre el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_L)$ consigo mismo.

Definición 1.12. Sea X una variable aleatoria real. Su **función de probabilidad acumulada**, $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, se define como

$$F_X(x) := P((-\infty, x])$$

Como notación alternativa, puede escribirse como

$$\text{Prob}(X \leq x) := F_X(x) \quad (1.13)$$

Proposición 1.4. Sea X una variable aleatoria real y F su función de probabilidad acumulada. F satisface las siguientes propiedades:

- Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$

- Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} F(x) + P(\{x\})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Definición 1.13. Sea X una variable aleatoria real y F su función de probabilidad acumulada. Si existe una función f tal que puede escribirse

$$P(x \in A) = \int_A f_X(\lambda) d\lambda \quad (1.14)$$

entonces se dice que f es la **función de densidad de probabilidad** de X .

Conviene destacar a las funciones que satisface las propiedades de una función de distribución pero que no necesariamente están asociadas a ninguna variable aleatoria real. Este tipo de funciones, referidas como **funciones de distribución**, merecen especial atención porque pueden inducir variables aleatorias.

Proposición 1.5. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución; se puede construir una medida μ_F sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que la función de probabilidad acumulada asociada al espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ es exactamente F . La medida μ_F será referida como la **medida inducida** por F .

Así entonces, es perfectamente posible definir variables aleatorias especificando su respectiva función de probabilidad acumulada, o su función de densidad de probabilidad cuando ello sea posible. Para dicho fin conviene introducir la notación $X \sim Y$ para dos variables aleatorias que tienen la misma función de probabilidad acumulada.

Ejemplo 1.4. Se dice que una variable aleatoria real X es degenerada en $z \in \mathbb{R}$, lo cual se denota por $X \sim D(z)$, si su función de probabilidad acumulada es de la forma

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < z \\ 1 & , z \leq x \end{cases} \quad (1.15)$$

Ejemplo 1.5. Se dice que una variable aleatoria real X sigue una distribución uniforme con parámetros $a, b \in \mathbb{R}$, lo cual se denota por $X \sim \text{unif}(a, b)$ si su función de

densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.16)$$

Ejemplo 1.6. Se dice que una variable aleatoria real X sigue una distribución normal con parámetros $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, lo cual se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su función de probabilidad acumulada es de la forma

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1.17)$$

Ejemplo 1.7. Se dice que una variable aleatoria real X sigue una distribución χ^2 con parámetro $\nu \in \mathbb{R}_+$, lo cual se denota por $X \sim \chi^2(\nu)$, si su función de distribución de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \left[2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)\right]^{-1} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} & , 0 < x \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.18)$$

donde $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la función gamma, definida como

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (1.19)$$

Ejemplo 1.8. Se dice que una variable aleatoria real X sigue una distribución F de Fisher con parámetros $m, n \in \mathbb{N}$, lo cual se denota por $X \sim F(m, n)$, si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{B(m/2, n/2)} \left[\frac{mx}{mx+n} \right]^{m/2} \left[1 - \frac{mx}{mx+n} \right]^{n/2} x^{-1} \quad (1.20)$$

donde $B : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función beta, definida como

$$B(m, n) := 2 \int_0^{\pi/2} [\cos(\theta)]^{2x-1} [\sin(\theta)]^{2y-1} d\theta \quad (1.21)$$

Antes de pasar a otro tema, y con vista al teorema ??, conviene extender a la

notación descrita para funciones de distribución.

Definición 1.14. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución y sea μ_F su medida inducida. Sea $A \in \mathcal{B}$ arbitrario y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable respecto a μ_F . Se define, como notación

$$\int_A g(x) dF(x) := \int_A g(x) d\mu_F(x) \quad (1.22)$$

Así mismo, si existe una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d\mu_F(\bullet) = f(\bullet) d\mu_L(\bullet)$, será escrito como

$$dF(\bullet) = f(\bullet) \quad (1.23)$$

La notación anterior puede extenderse sin problemas para funciones más generales, y será usada de forma extensa en los capítulos 2 y 3.

1.2.1. Variables aleatorias continuas y discretas

Definición 1.15. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **absolutamente continua** si para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta_\varepsilon > 0$ y una familia de intervalos, $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| < \delta_\varepsilon \quad (1.24)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \quad (1.25)$$

Proposición 1.6. Sea X una variable aleatoria real, y sea F_X su función de densidad de probabilidad. Si F_X es absolutamente continua, entonces X admite una función de densidad de probabilidad.

Definición 1.16. Sea X una variable aleatoria real, y sea F_X su función de densidad de probabilidad. Se dice que X es una **variable aleatoria real continua** si su F_X es absolutamente continua; por simplicidad se dirá simplemente que X es continua.

Definición 1.17. Sea X una variable aleatoria real, y sea P_X su medida asociada. Su **soporte** es el conjunto de puntos individuales con medida positiva, es decir

$$\mathcal{D}_X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid P(\{x\}) > 0 \right\} \quad (1.26)$$

Si ocurre que $P(\mathcal{D}_X) = 1$, entonces se dice que X es una **variable aleatoria real discreta**; por simplicidad se dirá simplemente que X es discreta.

Proposición 1.7. Sea X una variable aleatoria discreta y F_X su función de probabilidad acumulada. Entonces F_X es discontinua en el conjunto $Q_X = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$; en consecuencia, F_X puede escribirse como

$$F_X(x) = \sum_{n \leq x} q_n F(q_n) \quad (1.27)$$

Es posible construir una función de densidad de probabilidad para F como

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in Q_F \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.28)$$

Ejemplo 1.9. Usando los ejemplos previos sobre variables aleatorias:

- $X \sim B(p)$ es una variable aleatoria discreta con $\mathcal{D}_X = \{0, 1\}$
- $X \sim D(z)$ es una variable aleatoria discreta con $\mathcal{D}_X = \{z\}$
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es una variable aleatoria continua

Ejemplo 1.10. Naturalmente, es posible que existan variables aleatorias que no son ni continuas ni discretas. A continuación se construirá una variable aleatoria de este tipo usando a la función de Cantor, la cual es continua pero no es absolutamente continua.

La función de Cantor, K , puede construirse iterativamente definiendo a $K_0(x) = x$ y para $n > 0$

$$K_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2}K_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & , \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}K_n(3x - 2) + \frac{1}{2} & , \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x \end{cases} \quad (1.29)$$

finalmente, se define $K := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$. Este proceso se ilustra esquemáticamente en la figura ??, la cual da una idea intuitiva de las propiedades de esta función.

Para fines de este ejemplo, conviene notar que la función de Cantor cumple las condiciones de una función de distribución, de modo que puede construirse una variable aleatoria cuya función de probabilidad acumulada sea precisamente K . Tal variable aleatoria no es discreta porque K es continua (y en consecuencia su soporte es el conjunto vacío), y no es continua porque K no es uniformemente continua.

Para fines del presente trabajo, siempre que se usen variables aleatorias para modelar algún fenómeno físico, se supondrá que son continuas o discretas; ésto bajo el argumento de que los comportamientos *patológico* similares a los mostrados en el ejemplo anterior son poco probables en el mundo real.

1.2.2. Valor esperado

Definición 1.18. Sea X una variable aleatoria real y sea P su medida asociada. Se define el **valor esperado** de X como

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\lambda) dP(\lambda) \quad (1.30)$$

Proposición 1.8. Sea X una variable aleatoria real, y sea g una función medible en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$. Entonces $g(X)$ es una variable aleatoria cuyo valor esperado es

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} [g(X)](\lambda) dP(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP(x) \quad (1.31)$$

Definición 1.19. Sea X una variable aleatoria real. Si las siguientes cantidades están bien definidas

$$\mu_X := E[X] \quad (1.32)$$

$$\sigma_X^2 := E[(X - \mu_X)^2] \quad (1.33)$$

entonces se dice que μ_X es la **media**¹ de X , y σ^2 es su **varianza**.

Ejemplo 1.11. Usando los ejemplos previos sobre variables aleatorias:

- $X \sim B(p) \Rightarrow \mu_X = p$ y $\sigma_X^2 = p(1 - p)$

- $X \sim D(z) \Rightarrow \mu_X = z$ y $\sigma_X^2 = 0$

¹La notación μ_X únicamente es usada cuando no hay confusión con la notación para medidas.

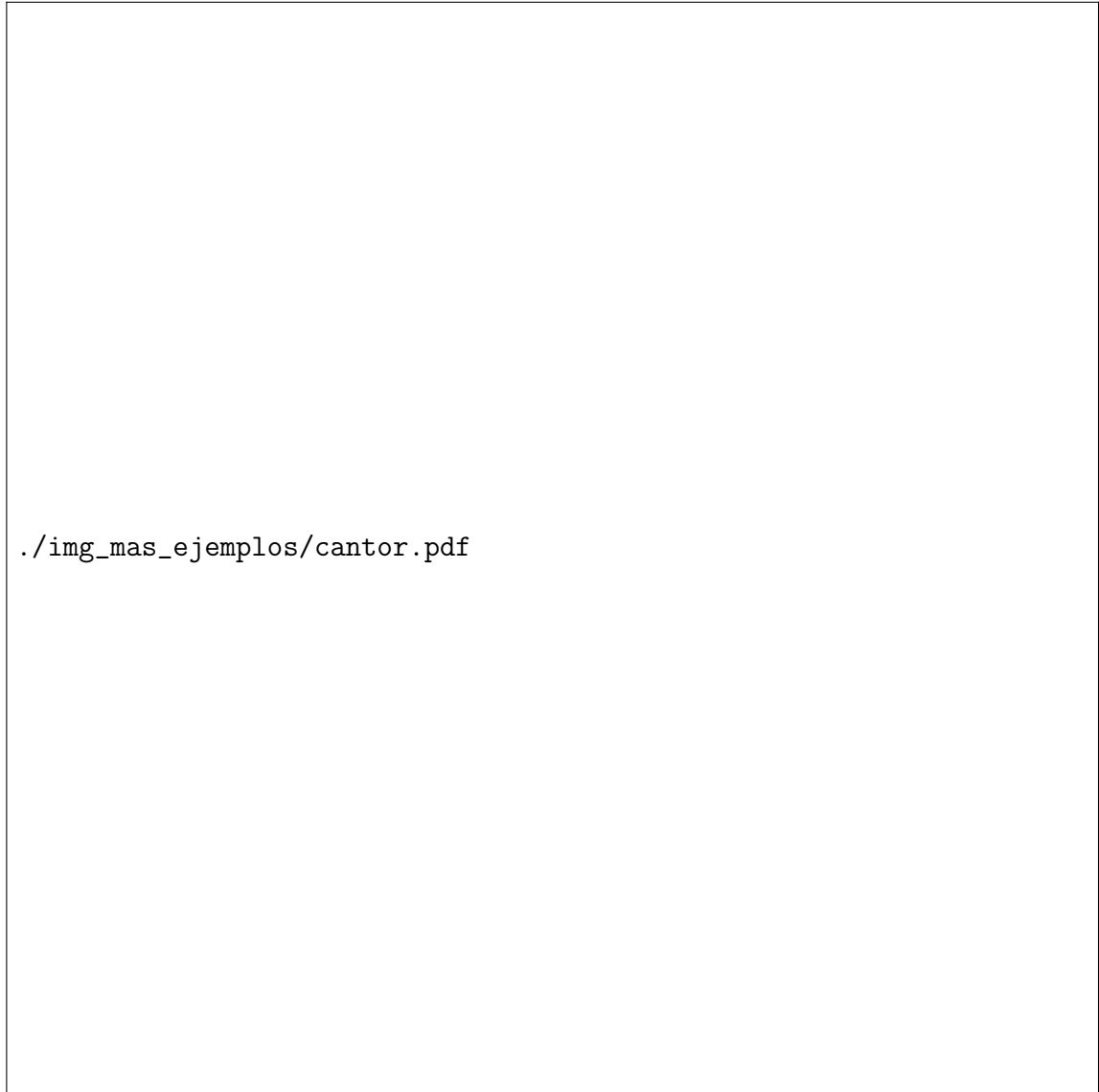


Figura 1.1: Algunos pasos en la *construcción iterativa* de la función de Cantor, que es creciente, acotada y continua pero no absolutamente continua. En el texto, la función de Cantor es usado para construir medidas con propiedades patológicas.

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mu_X = \mu \text{ y } \sigma_X^2 = \sigma^2$

Ejemplo 1.12. Se dice entonces que una variable aleatoria real X sigue una distribución de Cauchy si su función de distribución de probabilidad es de la forma

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2} \quad (1.34)$$

Es relativamente fácil verificar que la cantidad $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ no converge a un número real, y entonces se dice que la media de X no está bien definida.

Definición 1.20. Sean X, Y dos variables aleatorias, cuyas medidas asociadas son P_X y P_Y , y sea $P_{[X,Y]}$ la medida asociada al vector $[X, Y]$. Se define la **covarianza** entre X y Y como

$$\text{Cov}(X, Y) := E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{[X,Y]}(x, y) \quad (1.35)$$

1.2.3. Vectores aleatorios

El concepto de variable aleatoria real es sólo un caso particular de variable aleatoria (definición ??), el cual puede usarse para otros conjuntos de interés. A continuación se presenta el caso de \mathbb{R}^n para algún $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.21. Se llama **vector aleatorio** a una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Se define a \mathcal{B}^n , la σ -álgebra de Borel n -dimensional, como

$$\mathcal{B}^n := \sigma \left(\left\{ (-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \cdots \times (-\infty, a_n] \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \right) \quad (1.36)$$

Por notación, el vector aleatorio n -dimensional \mathbf{X} será referido como

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n] \quad (1.37)$$

esta notación de vectores con *símbolos gruesos* será usada durante el texto, extendida igualmente para realizaciones y otros vectores similares.

Ejemplo 1.13. Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$ sigue una **distribución multinormal** si su función de probabilidad acumulada conjunta tiene

la forma

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |C|}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}C^{-1}\mathbf{x}^\top}{2}\right) \quad (1.38)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. El vector $\mu \in \mathbb{R}^d$ será referido como vector de medias, y la matriz $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ como matriz de covarianza.

1.3. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se definen formalmente como variables aleatorias cuyo espacio muestral es un espacio de funciones. Intuitivamente es posible definir los procesos estocásticos como una *concatenación* de variables aleatorias, es decir, un conjunto de variables aleatorias indexadas sobre algún conjunto arbitrario. Sin embargo, indexar un conjunto infinito de variables aleatorias representa un problema técnico en el cuanto a definir al proceso estocástico como espacio de probabilidad, especialmente al definir la medida de probabilidad asociada.

Debido a las limitaciones del presente trabajo, el tema se expone de manera parcial bajo un enfoque formal; la exposición se basa en aquella presentada por Kolmogorov [?], de modo que el lector interesado debe dirigirse a dicho texto.

Primeramente se define a $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, el conjunto de funciones con dominio en \mathcal{T} y codominio en \mathbb{R} , el cual será usado como espacio de eventos². A modo de *intervalos generalizados* se definen los conjuntos de la forma

$$I([t_1, a_1, b_1], \dots, [t_N, a_N, b_N]) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mid f(t_i) \in (a_i, b_i], i = 1, \dots, N \right\} \quad (1.39)$$

Es relativamente fácil extender la familia de estos intervalos por uniones e intersecciones finitas. Es un tanto más interesante definir una σ -álgebra generada por éstos conjuntos, pero tal parte se omite en el presente trabajo. En el texto por Kolmogorov se explora con mayor detalle la existencia de dicha σ -álgebra –y por tanto, la existencia de procesos estocásticos.

Definición 1.22. Un **proceso estocástico** $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es una colección de variables aleatorias indexadas por el símbolo $t \in \mathcal{T}$.

²Se puede definir análogamente a $\mathbb{C}^{\mathcal{T}}$, o espacios más generales

Definición 1.23. Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un **proceso estocástico en \mathbb{R}** si cumple que $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. Por notación, el índice t es referido como **tiempo**, mientras que \mathcal{T} es el conjunto de **tiempos admisibles**.

Por simplicidad, durante el presente trabajo sólo se usarán dos familias de procesos estocásticos en \mathbb{R} : si \mathcal{T} es un intervalo, o si es parte de una *mall*a. La primera familia se reserva para modelar las señales electrofisiológicas, mientras que la segunda se usará para modelar los registros de estas mismas señales. La distinción consiste en que las señales electrofisiológicas sólo pueden ser registradas digitalmente en un conjunto finito de puntos en el tiempo; la atención del texto recae en ambos grupos de procesos, en espera que sus características sean similares de algún modo.

Definición 1.24. Se dice que un proceso estocástico en \mathbb{R} es **a tiempo continuo** si existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que

$$\mathcal{T} = (a, b) \tag{1.40}$$

Así mismo, se dice que un proceso estocástico en \mathbb{R} es **a tiempo discreto** si existen $t_0, \Delta_X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que

$$\mathcal{T} = \{t_0 + t \in \mathbb{R} \mid t \cdot \Delta_X \in \mathbb{Z}\} \tag{1.41}$$

Por notación, Δ_X es referida como *frecuencia de muestreo*.

Conviene destacar que el nombre *frecuencia de muestreo* hace referencia al proceso de registro, que algunos textos es referido como *muestreo*; esta terminología entra claramente en conflicto con las muestras de una variable aleatoria. En lo siguiente se evita llamar muestreo al proceso de registro, pero se conservará el término frecuencia de muestro.

Cabe mencionar que hay un conflicto similar con los términos *tiempo continuo* y *tiempo discreto*; estos términos no guardan ninguna analogía con las variables aleatorias discretas y continuas, ni con los espectro de potencias puramente continuos o puramente discretos (ver el capítulo siguiente). Estos términos se usan porque se encuentran muy extendidos en la literatura sobre análisis de señales.

Para facilitar la referencia de procesos estocásticos, los elementos que lo componen son denotados como:

$\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ Todo el proceso.

$X(t)$ Variable aleatoria en el proceso, para el tiempo $t \in \mathcal{T}$.

$x(t)$ Una observación de $X(t)$, para el tiempo $t \in \mathcal{T}$.

$F_{X(t)}$ Función de probabilidad acumulada para $X(t)$.

1.3.1. Estacionariedad débil

De forma general, la estacionariedad significa que *algunas* propiedades de un proceso sean *invariantes* en el tiempo; la decisión sobre qué características deben ser invariantes, y en qué sentido, conlleva a diferentes definiciones. Por ejemplo, en la definición ?? se pide que todas las variables que integra al proceso sigan una distribución común, así como todas variables conjuntas con algunas características.

Definición 1.25. *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **fuertemente estacionario** si para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ y cualquier τ tal que $t_i + \tau \in \mathcal{T}$, se cumple que*

$$F_{[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]} \equiv F_{[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)]}$$

con $F_{[v_1, v_2, \dots, v_N]}$ es la función de probabilidad acumulada para el vector $[v_1, v_2, \dots, v_N]$.

En el contexto del presente trabajo la estacionariedad fuerte se considera *innecesariamente fuerte*, en cuanto a que es difícil de verificar y porque se usarán hipótesis más débiles. Se decidió conveniente una definición que garantice que los momentos puedan ser estimados, para lo cual deben ser constantes en el tiempo. La motivación principal para ello es el siguiente: si se modela una señal como proceso estocástico, entonces los momentos están asociados con variables físicas relevantes. En particular, el segundo momento está asociado con la *energía* (definición ??).

Definición 1.26. *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **estacionario de orden m** si, para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ y cualquier τ tal que $t_i + \tau \in \mathcal{T}$, se cumple que*

$$\mathbb{E} [X^{m_1}(t_1) X^{m_2}(t_2) \cdots X^{m_n}(t_n)] = \mathbb{E} [X^{m_1}(t_1 + \tau) X^{m_2}(t_2 + \tau) \cdots X^{m_n}(t_n + \tau)]$$

para cualesquiera enteros m_1, m_2, \dots, m_n tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$.

1.3. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

La definición ?? es conveniente tomando en cuenta que para estudiar la energía de un proceso (asociada al segundo momento) requerirá poner condiciones adicionales; por ejemplo, para estimar la varianza de la energía en un proceso, a partir de observaciones, se requiere que el proceso sea estacionario de orden 4. En el otro sentido, siempre que sea posible se usará la menor cantidad de hipótesis, para lo cual se presenta una definición más particular y *débil* de estacionariedad.

Definición 1.27. *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **débilmente estacionario** si existen constantes $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ y una función $R : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tales que, para cualesquiera $t, s \in \mathcal{T}$ se cumple*

- $E[X(t)] = \mu$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = R(|s - t|)$

Proposición 1.9. *Para que un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ sea débilmente estacionario es suficiente y necesario que sea estacionario de orden 2.*

El que un proceso sea débilmente estacionario implica la existencia de una media y varianza características del proceso, es decir, que son comunes a todas las variables aleatorias que lo componen. Además, se implica la existencia de una función referida como *autocovarianza*.

Definición 1.28. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico sobre \mathbb{R} . Su **función de autocovarianza** es una función $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$R(t, s) = E \left[\left(X(t) - E[X(t)] \right) \overline{\left(X(s) - E[X(s)] \right)} \right] \quad (1.42)$$

para cualesquiera tiempos admisibles $s, t \in \mathcal{T}$.

Como las señales electrofisiológicas son modeladas como procesos estocásticos, conviene traducir algunas de sus características en propiedades para los procesos estocásticos. Por ejemplo, se sabe que las señales representan variaciones en campos eléctricos, y entonces se puede afirmar sin duda que dicha cantidad es finita en todo momento; lo mismo se puede afirmar sobre la energía. En base a ello, los procesos estocásticos que modelan señales electrofisiológicas deben tener energía y varianza

finitas en todo momento. Más aún, la actividad eléctrica cerebral y muscular presentan durante el reposo una actividad característica, referida como *actividad basal* o *línea base*, que es relativamente cercana a una constante en todo momento (ver figura ??). El fenómeno de línea base entra en el modelado como el supuesto de que las señales son procesos estacionarias de orden 1; por simplicidad, se puede considerar que la media de estos procesos es 0.

Una segunda característica de las señales que se traduce es la continuidad: las señales representan fenómenos eléctricos que cambian de manera *suave* en el tiempo. El aspecto de los registros con *picos* se explica porque el cambio es suave, pero es muy rápido respecto a la tasa de registro.

Proposición 1.10. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocovarianza. Si R es continua en 0 entonces es continua en todo \mathbb{R} .*

Demostración. Supóngase que R es continua en 0. Tómese a $t_0 \in \mathcal{T}$ arbitrario para verificar que R es continua en t_0 , y tómense s, h tales que $s, s+t, s+t+h \in \mathcal{T}$. Usando la desigualdad de Schwarz, puede escribirse que

$$\begin{aligned} [R(t_0 + h) - R(t_0)]^2 &= \left(\mathbb{E} [X(s+t_0+h)X(s)] - \mathbb{E} [X(s+t_0)X(s)] \right)^2 \\ &= \left(\mathbb{E} [X(s) [X(s+t_0+h) - X(s+t_0)]] \right)^2 \\ &\leq \mathbb{E} [(X(s))^2] \mathbb{E} [(X(s+t_0+h) - X(s+t_0))^2] \\ &\leq 2\sigma_X^2 [\sigma_X^2 - R(h)] \end{aligned}$$

Entonces, puede afirmarse que

$$|R(t_0 + h) - R(t_0)| \leq \sqrt{2\sigma_X^2} \sqrt{R(0) - R(h)}$$

Como R es continua en 0, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} (R(0) - R(h)) = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} (R(t_0 + h) - R(t_0)) = 0$$

de donde se concluye que R es continua en t_0 , para cualquier $t_0 \in \mathcal{T}$. ■

Definición 1.29. *Un proceso a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **estocásticamente continuo**, en el sentido de media cuadrática, en el tiempo $t_0 \in \mathcal{T}$*

si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} \left[(X(t) - X(t_0))^2 \right] = 0$$

Por simplicidad, y porque es la única definición de su tipo usada en el presente trabajo, la continuidad estocástica en media cuadrática será referida simplemente como *continuidad estocástica*.

Proposición 1.11. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario y de media cero, y sea R su función de autocovarianza. El proceso es estocásticamente continuo en $t_0 \in \mathcal{T}$ si y sólo si R es continua en 0.*

Demostración. Para cualquier $t \in \mathcal{T}$, puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(X(t) - X(t_0))^2 \right] &= \text{Var} (X(t)) + \text{Var} (X(t_0)) - 2\text{Cov} (X(t), X(t_0)) \\ &= 2 \left(\sigma_X^2 - R(t - t_0) \right) \\ &= 2 (R(0) - R(t - t_0)) \end{aligned}$$

Así entonces, la condición para continuidad estocástica puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} \left[(X(t) - X(t_0))^2 \right] = 0 &\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} (R(0) - R(t - t_0)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0} R(\tau) = R(0) \end{aligned}$$

■

Definición 1.30. *Se dice que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es **definida positiva** si para cualesquiera $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N z_n z_m f(x_m - x_n) \leq 0 \quad (1.43)$$

Proposición 1.12. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocorrelación. Se cumple que R es una función positiva definida.*

Demostración. Sean $t_1, t_2, \dots, t_N \in \mathcal{T}$, $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se construye

la variable aleatoria W como

$$W = \sum_{n=1}^N z_n X(t_n) \quad (1.44)$$

Ahora, nótese que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}(W) \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N z_m z_n \text{Cov}(X(t_m), X(t_n)) \\ &= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N z_m z_n R(t_m - t_n) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.14. Un proceso oscilante es un proceso estocástico $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ definido como

$$S(t) = \cos(t + \phi) \quad (1.45)$$

donde $\phi \sim \text{unif}(-\pi, \pi)$. Es muy notable que el proceso esté caracterizado por una única variable aleatoria y que sus realizaciones siempre son funciones suaves, contrario al estereotipo para estas funciones.

Su valor esperado puede ser calculado fácilmente

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[\cos(t + \phi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + \phi) d\phi = 0 \quad (1.46)$$

Similarmente para la función de autocovarianza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t)S(s)] &= \mathbb{E}[\cos(t + \phi) \cos(s + \phi)] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\cos(t - s) + \frac{1}{2}\cos(t + s + 2\phi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\cos(t - s) + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\cos(t + s + 2\phi)] \\ &= \frac{1}{2}\cos(t - s) \end{aligned}$$

Se concluye que $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es débilmente estacionario. Un segundo aspecto no-

1.3. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

torio en este ejemplo es que la función de autocovarianza es periódica, contrario al estereotipo de que las funciones autocorrelación siempre decaen exponencialmente.

Ejemplo 1.15. Un proceso ruido blanco es un proceso estocástico $\{\varepsilon(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ tal que si $t, s \in \mathbb{R}$ son diferentes entonces $\varepsilon(t)$ y $\varepsilon(s)$ son independientes. Se dice que el proceso ruido blanco es ‘normal’ si $\varepsilon(t) \sim N(0, 1)$. Por simplicidad, el término ruido blanco será usado de forma general para procesos normales estándar, con el fin de garantizar que son débilmente estacionarios.

La función de autocovarianza de un proceso ruido blanco es

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & , \tau = 0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.47)$$

Se concluye que el proceso ruido blanco es débilmente estacionario, pero no es estocásticamente continuo.

Antes de pasar a otro tema conviene mencionar enfáticamente que la covarianza es una medida de asociación lineal entre variables aleatorias, pero **no** puede usarse como medida de independencia. Como se muestra en el siguiente ejemplo, es perfectamente posible generar variables cuya covarianza es cero pero que no son independientes.

Ejemplo 1.16. Sea $\{\varepsilon(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un proceso ruido blanco normal estándar, a tiempo discreto. Se construye al proceso $\{\nu(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\nu(n) = \varepsilon(n)\varepsilon(n-1) \quad (1.48)$$

Es relativamente fácil notar que el proceso es de media 0. La función de autocovarianza del proceso, R , admite tres casos relevantes

- Si $\tau = 0$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E} [\nu(n)^2] = \mathbb{E} [\varepsilon(n)^2 \varepsilon(n-1)^2] = \mathbb{E} [\varepsilon(n)^2] \mathbb{E} [\varepsilon(n-1)^2] = 1 \quad (1.49)$$

- Si $|\tau| = 1$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E} [\nu(n)\nu(n+1)] = \mathbb{E} [\varepsilon(n)^2 \varepsilon(n-1)\varepsilon(n+1)] = \mathbb{E} [\varepsilon(n)^2] \mathbb{E} [\varepsilon(n-1)] \mathbb{E} [\varepsilon(n+1)] = 0 \quad (1.50)$$

- Si $|\tau| > 1$, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$

$$E [\nu(n)\nu(n + \tau)] = E [\nu(n)] E [\nu(n + \tau)] = 0 \quad (1.51)$$

Claramente $\{\nu(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es un proceso ruido blanco, ya que se compone de variables aleatorias que no son independientes. Sin embargo, su función de autocovarianza es la misma que para un proceso ruido blanco, mostrando que se compone de variables que no están asociadas linealmente.

1.3.2. Integración y procesos estocásticos

La integral, según las definiciones ?? y ??, puede extenderse intuitivamente respecto a un proceso estocástico. Este tema no será explorado con mayor detalle en el presente texto, sino que sólo será usado para construir algunos ejemplos. Para ello se define al proceso de Wiener, un proceso estocástico con algunas propiedades peculiares que serán de gran utilidad.

Ejemplo 1.17. *Un proceso de Wiener es un proceso estocástico $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que satisface las siguientes propiedades para cualesquiera $t, s, \in \mathbb{R}$*

- $W(0) \sim D(0)$
- $[W(t) - W(s)] \sim N(0, |t - s|)$
- $[W(t) - W(s)]$ es independiente de $W(u)$ para $u < \min\{t, s\}$

Es relativamente fácil notar que $E [W(t)] = 0$ y $E [(W(t))^2] = t$, de donde se deduce que el proceso de Wiener no es débilmente estacionario.

Así entonces, sea $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso de Wiener, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Sean $t_1, t_2, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ una partición arbitraria de $[a, b]$, es decir que satisfacen

$$a < t_1 < t_2 < \dots < t_N < b \quad (1.52)$$

entonces se define la variable aleatoria

$$\sum_{i=2}^N \left[\sup_{\lambda \in [t_{i-1}, t_i]} f(\lambda) \right] [W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (1.53)$$



Figura 1.2: Ejemplos de realizaciones para algunos procesos estocásticos. **A.** Proceso oscilante, del cual se grafican tres realizaciones diferentes. **B.** Proceso Ruido Blanco. **C.** Proceso de Wiener. **D.** Proceso medias móviles a tiempo continuo con parámetro $A = 1/4$.

Si la colección de variables aleatorias converge en media cuadrática entonces se dice que

$$\int_a^b f(t) dW(t) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^N \left[\sup_{\lambda \in [t_{i-1}, t_i]} f(\lambda) \right] [W(t_i) - W(t_{i-1})] \right) \quad (1.54)$$

Proposición 1.13. Sea $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso de Wiener, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Entonces

$$\mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW(t) \right] = 0 \quad (1.55)$$

Demostración. Sea $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$, el cual satisface las siguientes propiedades

- $\mathbb{E} [\Delta W_i] = 0$
- $\mathbb{E} [(\Delta W_i)^2] = t_i - t_{i-1}$
- Si $i < j$ entonces ΔW_i y ΔW_j son independientes

Entonces, nótese que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t) dW(t) \right] &= \mathbb{E} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^N f_i \Delta W_i \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^N f_i \mathbb{E} [\Delta W_i] \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde $f_i = \sup_{\lambda \in [t_{i-1}, t_i]} f(\lambda)$. ■

Proposición 1.14. Sea $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso de Wiener, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario, y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Entonces

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dW(t) \right)^2 \right] = \int_a^b [f(t)]^2 dt \quad (1.56)$$

Demostración. Sea $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$, como en la demostración anterior. Nótese que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dW(t) \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=2}^N f_i \Delta W_i \right) \right)^2 \right] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=2}^N f_i \Delta W_i \right)^2 \right] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N \sum_{j=2}^N f_i f_j \mathbb{E} [\Delta W_i \Delta W_j] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N f_i^2 \mathbb{E} [(\Delta W_i)^2] \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^N f_i^2 (t_i - t_{i-1}) \\
 &= \int_a^b [f(t)]^2 dt
 \end{aligned}$$

donde $f_i = \sup_{\lambda \in [t_{i-1}, t_i]} f(\lambda)$. ■

Ejemplo 1.18. Sea $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso de Wiener y sea $A \in \mathbb{R}_+$ arbitrario. Se define a $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, un proceso medias móviles tiempo continuo con parámetro A , como

$$Y(t) = \frac{1}{A} \int_{t-A/2}^{t+A/2} dW(u) \quad (1.57)$$

Con base a la proposición ??, se deduce que

$$\mathbb{E} [Y(t)] = 0 \quad (1.58)$$

Así mismo, usando la proposición ?? se deduce la función de autocovarianza

$$\begin{aligned}
E[Y(t)Y(s)] &= E\left[\left(\frac{1}{A}\int_{\Omega_t} dW(u)\right)\left(\frac{1}{A}\int_{\Omega_s} dW(v)\right)\right] \\
&= \frac{1}{A^2}E\left[\left(\int_{\Omega_t\cap\Omega_s^C} dW(u) + \int_{\Omega_t\cap\Omega_s} dW(u)\right)\left(\int_{\Omega_s\cap\Omega_t^C} dW(v) + \int_{\Omega_t\cap\Omega_s} dW(v)\right)\right] \\
&= \frac{1}{A^2}E\left[\int_{\Omega_t\cap\Omega_s^C} dW(u)\right]E\left[\int_{\Omega_s\cap\Omega_t^C} dW(v)\right] \\
&\quad + \frac{1}{A^2}E\left[\int_{\Omega_t\cap\Omega_s^C} dW(u)\right]E\left[\int_{\Omega_t\cap\Omega_s} dW(v)\right] \\
&\quad + \frac{1}{A^2}E\left[\int_{\Omega_t\cap\Omega_s} dW(u)\right]E\left[\int_{\Omega_s\cap\Omega_t^C} dW(v)\right] \\
&\quad + \frac{1}{A^2}E\left[\left(\int_{\Omega_t\cap\Omega_s} dW(u)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{A^2}\max\{A - |t - s|, 0\}
\end{aligned}$$

donde $\Omega_t = [t - A/2, t + A/2]$ y similarmente para Ω_s . En particular, el proceso de medias móviles a tiempo continuo es débilmente estacionario. Por simplicidad, este proceso será referido simplemente como proceso medias móviles.

1.4. Estimación de parámetros

Hasta ahora se ha hablado de las variables aleatorias y procesos estocásticos únicamente como objetos definidos formalmente. En el contexto del presente trabajo, dichos objetos son usados para modelar fenómenos físicos, es decir que se espera que ciertos fenómenos presenten comportamientos similares a cierto tipo de variables aleatorias. En esta sección se aborda el problema formal de *recuperar* información sobre estos objetos en base a las observaciones obtenidas del fenómeno estudiado, las cuales son interpretadas como *huellas* de estos objetos aleatorios.

Considérese a X , una variable aleatoria entre los espacios medibles $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$. Para poder *conectar* a X con el fenómeno estudiado, Ω_1 debe incluir to-

1.4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

das los estados posibles del sistema bajo las condiciones de estudio; mientras, Ω_2 es típicamente un conjunto *basado* en \mathbb{R} suficientemente general para cuantificar *adecuadamente* a las mediciones hechas sobre el sistema. Con un conjunto basado en \mathbb{R} se engloba informalmente al mismo \mathbb{R} , alguno de sus subconjuntos, a \mathbb{C} , a \mathbb{R}^n para algún $n \in \mathbb{N}$, o incluso a \mathbb{R}^T , entre otros.

En concreto, se considera el problema en que la variable aleatoria modelo, X , admite una función de probabilidad acumulada $F(\bullet; \theta)$ que depende de un parámetro $\theta \in \Theta$, donde Θ es referido como **espacio de parámetros**. El objetivo es deducir el valor de θ a partir de las observaciones recabadas.

Definición 1.31. Sea X una variable aleatoria real. Una **muestra de X de tamaño N** es una colección de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ tales que son independientes y comparten la misma distribución que X . Mientras no se indique lo contrario, las variables aleatorias en la muestra no están ordenadas.

Proposición 1.15. Sea X una variable aleatoria continua, sea f_X su función de densidad de probabilidad, y sea $\{X_1, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N . La función de densidad de probabilidad conjunta para el vector $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]$ es

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N f(x_j) \quad (1.59)$$

Definición 1.32. Sea X una variable aleatoria y sea $\{X_1, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N . Un **estadístico** es una función $\hat{\theta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ evaluada en la muestra.

Si se pretende que el valor del estadístico sea parecido a un parámetro θ , entonces se dice que el estadístico $\hat{\theta}$ es un **estimador** de θ .

Definición 1.33. Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ , y sea $\{X_1, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N . Se dice que un estimador $\hat{\theta}$ es **insesgado** si cumple que

$$\mathbb{E} \left[\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_N) \right] = \theta \quad (1.60)$$

Definición 1.34. Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ , sea $\{X_1, \dots\}$ una muestra de tamaño infinito. Considérese a $\left\{ \hat{\theta}_N \right\}_{N \in \mathbb{N}}$, una familia de estimadores definidos para muestras de tamaño arbitrario. Dicha familia de

estimadores se dice **consistente** si para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \hat{\theta}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) - \theta \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad (1.61)$$

Definición 1.35. Considérese a $\{\hat{\theta}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, una familia de estimadores como en la definición anterior. Se dice que dicha familia de estimadores converge en media cuadrática si cumplen que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\hat{\theta}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) - \theta \right)^2 \right] = 0 \quad (1.62)$$

Si esto se cumple, se dice que la familia de estimadores es **consistente en media cuadrática**

Proposición 1.16. Si $\{\hat{\theta}_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ es una familia de estimadores consistente en media cuadrática, entonces es consistente.

Corolario 1.17. Una condición suficiente para para que una familia sea consistente en en media cuadrática es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\hat{\theta}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) \right] = \theta \quad (1.63)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\hat{\theta}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) \right) = 0 \quad (1.64)$$

Ejemplo 1.19. Sea $X \sim N(\mu, 1)$, y sea $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N . El estadístico \bar{X}_N , definido como

$$\bar{X}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (1.65)$$

será usado como estimador para el parámetro μ . De forma relativamente fácil puede verificarse que

- $E \left[\bar{X}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) \right] = \mu$
- $\text{Var} \left(\bar{X}_N(X_1, X_2, \dots, X_N) \right) = 1/N$

Entonces \bar{X}_N es un estimador insesgado que satisface $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\bar{X}_N \right) = 0$; se deduce que es consistente en media cuadrática.

En base a la proposición ??, se puede deducir que $\bar{X}_N \sim N\left(\mu, \frac{1}{N}\right)$

Teorema 1.18 (Límite central). Sea $\{X_1, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N de una variable aleatoria con distribución normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Defínase la variable aleatoria Y_N como

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \quad (1.66)$$

Entonces $\{Y_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una distribución normal $N(0, 1)$.

1.5. Pruebas de hipótesis

En el lenguaje coloquial, una hipótesis es una afirmación sobre algún aspecto desconocido. Una tarea común en el análisis de datos es decidir si alguna hipótesis dada puede *sostenerse* a partir de la información proporcionada por un conjunto de observaciones. Una herramienta de uso común para producir estas decisiones es la **prueba de hipótesis**, la cual consiste en dos afirmaciones complementarias (es decir, tales que exactamente una de ellas es verdadera) y una *regla* para decidir entre ambas a partir de las observaciones consideradas.

Dichas afirmaciones complementarias son referidas como *hipótesis*; éstas deben elegirse de forma que el decidir entre una u otra hipótesis sea equivalente a la decisión que se busca tomar. Usualmente una hipótesis representa la afirmación más general o que se cree verdadera por omisión (hipótesis nula, H_0), mientras que la otra hipótesis se tomará como verdadera si existe suficiente información para rechazar la veracidad de la primera (hipótesis alternativa, H_A).

Usualmente una regla de decisión involucra un **estadístico de prueba**, $\hat{\theta}$; una vez que $\hat{\theta}$ es calculado para las observaciones obtenidas, su valor se compara con el valor *típico* que tendría si H_0 fuera cierta, y en base a ello se formula la decisión. Los estadísticos de prueba suelen construirse para tener una distribución conocida y preferiblemente sencilla, la cual es determinada por unos pocos parámetros fáciles de estimar usando las observaciones.

La interpretación usual es que, si H_0 es verdadera entonces $\hat{\theta}$ puede no tener el valor predicho debido a factores ajenos al fenómeno estudiado, en consecuencia se suele hablar de una región de rechazo en el espacio de estados (ver más adelante). Bajo esta interpretación, un valor de $\hat{\theta}$ dentro de la región de rechazo significa que

los datos representan evidencia para rechazar H_0 ; un no-rechazo no significa precisamente que H_0 sea verdadera, sino que las observaciones no representan evidencia suficiente para rechazar H_0 .

Definición 1.36. *En una prueba de hipótesis, rechazar H_0 cuando es verdadero es un **error del tipo I**. Así mismo, aceptar H_0 cuando es falsa es un **error del tipo II**.*

La naturaleza e interpretación de los estadísticos de prueba suelen ser muy particulares de las situaciones bajo las cuales son definidos. Una forma típica de normalizar los diferentes estadísticos es a través del p -valor, definido como la probabilidad de que ocurra un valor extremo del estadístico de prueba; el p -valor suele interpretarse como la *fuerza* de la evidencia contra H_0 .

Definición 1.37. *Sea $\hat{\theta}$ un estadístico de prueba. El **p -valor** asociado al $\hat{\theta} = \theta_0$ es la probabilidad $P(\hat{\theta} \mid \theta_0)$*

Una **prueba de significancia** se entiende como una pruebas de hipótesis para algunos p -valores predefinidos, usualmente 0.05, 0.01, 0.005, entre otros. Un error común, pero muy extendido, es interpretar al p -valor como la probabilidad de obtener H_0 .

Definición 1.38. *Dada una muestra poblacional y dos afirmaciones complementarias H_0 y H_A , una **prueba de hipótesis** es una regla de decisión que asigna a cada punto del espacio de estados una acción del conjunto Aceptar H_0 , rechazar H_A , Rechazar H_0 , aceptar H_A .*

*Al conjunto del espacio muestral donde se rechaza H_0 se le denomina **región crítica**.*

Una propiedad deseable para un estadístico de prueba es poder acotar los errores de tipo I y de tipo II; para ello, para alguna región crítica arbitraria \mathcal{C} se define el **nivel de significancia** de la prueba como

$$\alpha := \sup_{\theta \in H_0} p(\mathcal{C} \mid \theta) \quad (1.67)$$

Algunas pruebas que serán usadas en el presente trabajo:

- Prueba de correlación de Spearman.

- Prueba de Wilcoxon-Mann-Whitney para diferencia de medias.
- prueba de proporciones χ^2 de Pearson.

1.5.1. ANOVA de una vía

Las ANOVA son un tipo de pruebas de hipótesis en las que se decide si varios grupos de observaciones tienen el mismo valor esperado. Estas pruebas suelen usarse para decidir si un factor determinado *afecta* a una cantidad de interés, interpretando el cambio en el valor esperado como una marca del *efecto* debido a dicho factor.

El acrónimo ANOVA proviene de sus siglas en inglés, *Analysis Of Variance* (análisis de varianza). Como su nombre indica, el procedimiento de un ANOVA consiste a grosso modo en los siguientes pasos:

1. Calcular la varianza muestral total, usando todas las observaciones.
2. Calcular las varianzas *grupales*, es decir, separando las observaciones en grupos.
3. Comparar las cantidades obtenidas, y decidir qué porción de la varianza total puede *explicarse* por la separación entre grupos.

La motivación para el procedimiento es que las medias grupales son desconocidas pero pueden ser estimadas a partir de los datos. Sin embargo, las cantidades obtenidas son meras estimaciones, así que deben considerarse las varianzas de tales estimadores. Intuitivamente, si la varianza es más grande que la diferencia –estimada– para las medias, entonces la evidencia no es suficiente para afirmar que las medias son diferentes. Es por esa razón que la varianza estimada ocupa un papel central.

El tema de ANOVA's es explorado en una gran cantidad de libros de estadística, por ejemplo, “*Análisis de varianza*” por Francisco Tejedor [?]. Por simplicidad, en este trabajo únicamente se expondrán algunos casos sencillos de ANOVA.

En el primer caso particular se consideran J grupos, para cada uno de ellos se han obtenido I observaciones; la i -ésima observación del j -ésimo grupo será denotada por $Y_{i,j}$. Por simplicidad se supondrá que las observaciones son independientes y que siguen distribuciones normales de la forma

$$Y_{i,j} \sim N(\mu + \mu_j, \sigma^2) \quad (1.68)$$

con μ la media de todas las observaciones, μ_j la media grupal del grupo j (las cuales satisfacen que $\sum_{j=1}^J \mu_j = 0$), y $\sigma \in \mathbb{R}$. Bajo estas condiciones, puede escribirse

$$Y_{i,j} = \mu + \mu_j + \varepsilon_{i,j} \quad (1.69)$$

donde $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$.

A partir de las observaciones, se construyen los estimadores $\hat{\mu}$ y $\hat{\mu}_j$ para la media total y las medias grupales, respectivamente, como

$$\hat{\mu}_j := \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j} \quad (1.70)$$

$$\hat{\mu} := \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j} \quad (1.71)$$

Así mismo, se construyen los estimadores S_T , S_I –para la varianza total y las grupales, respectivamente– y el residuo S_F , como

$$S_T := \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - \hat{\mu})^2 \quad (1.72)$$

$$S_I := \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - \hat{\mu}_j)^2 \quad (1.73)$$

$$S_F := I \sum_{j=1}^J (\hat{\mu}_j - \hat{\mu})^2 \quad (1.74)$$

los cuales cumplen que $S_T = S_I + S_F$.

Los estimadores S_T , S_I y S_F son referidos como **sumas de cuadrados**. Bajo la interpretación de μ_j como *efectos grupales*, el residuo S_F puede entenderse como la porción de la varianza total que no es *explicada* por la agrupación de las observaciones; en otras palabras, es la varianza adicional que aparece por juntar observaciones de grupos que, en principio, tienen medias diferentes.

Antes de formular la prueba de hipótesis, conviene destacar que las sumas de cuadrados siguen las siguientes distribuciones

$$\blacksquare \quad S_T / (IJ - 1) \sim \chi^2(IJ - 1)$$

1.5. PRUEBAS DE HIPÓTESIS

- $S_I/(IJ-J) \sim \chi^2(IJ-J)$
- $S_F/(J-1) \sim \chi^2(J-1)$

Ahora bien, se pueden formular formalmente las siguientes hipótesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_J = 0 \quad (1.75)$$

$$H_A : \mu_k \neq 0 \quad \text{para algún } k \in \{1, 2, \dots, J\} \quad (1.76)$$

Con base a las distribuciones de las sumas de cuadrados, se construye el siguiente estadístico de prueba

$$\widehat{F} = \frac{S_F/(J-1)}{S_I/(IJ-J)} \sim F(IJ-J, J-1) \quad (1.77)$$

el cual sigue una distribución F de Fisher con parámetros $IJ-J, J-1$.

1.5.2. ANOVA de dos vías

El procedimiento de una ANOVA puede extenderse para condiciones más generales, como que las varianzas grupales sean diferentes o que los diferentes grupos tengan cantidades diferentes de observaciones. Otro tipo de generalización ocurre cuando se usan dos clasificaciones simultáneas para las observaciones, lo cual implica el efecto simultáneo de dos factores sobre la misma variable de interés. En el presente trabajo, este tipo de clasificaciones serán usadas con diversos fines.

En esta clasificación se consideran I grupos en el primer factor y J grupos en el segundo factor; por comodidad, los factores serán referidos como A y B .

El modelo general entonces tiene la forma

$$Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (1.78)$$

donde α contiene las media grupales según el factor A , similarmente β para el factor B ; γ contiene las medias para las intersecciones de los grupos según ambos factores.

De forma similar al ANOVA de una vía, los *efectos grupales* deben ser tales que

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} = 0 \quad (1.79)$$

Así mismo, se definen sumas de cuadrados

$$S_A := J \sum_{i=1}^I (\alpha_i - \mu)^2 \quad (1.80)$$

$$S_B := I \sum_{j=1}^J (\beta_j - \mu)^2 \quad (1.81)$$

$$S_I := \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - \alpha_i - \beta_j + \mu)^2 \quad (1.82)$$

$$S_T := \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - \mu)^2 \quad (1.83)$$

1.6. Espacios de Hilbert

A grosso modo, un espacio de Hilbert es un conjunto de *vectores* en donde se ha definido un producto de vectores, el cual induce una métrica según la cual todas las sucesiones de vectores convergen. Es una estructura tan general que puede ser *inducida* sobre una gran variedad de conjuntos, tal como se hace en el siguiente capítulo.

Para poder definir adecuadamente estos objetos hay que definir, en ese orden, los siguientes conceptos: campo, espacio vectorial, producto interno, norma, métrica. Debido a los fines de este trabajo, se da una clara preferencia a algunos casos particulares en detrimento de una exploración completa del tema.

Definición 1.39. Sea un conjunto \mathcal{R} , y sean $+: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$, $\times: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ dos operaciones binarias. Se dice que la tupla $(\mathcal{R}, +, \times)$ es un **campo** si cumple las siguientes propiedades:

- Las operaciones son conmutativas: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$ se cumple que

$$+(x, y) = +(y, x) \quad \times(x, y) = \times(y, x)$$

- Las operaciones son asociativas: para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{R}$ se cumple que

$$+(x, +(y, z)) = +(+(x, y), z) \quad \times(x, \times(y, z)) = \times(\times(x, y), z)$$

- Existen $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{R}$ tales que, para cualquier $x \in \mathcal{R}$, se cumple que

$$+(x, \mathbf{0}) = x \quad \times (x, \mathbf{1}) = x$$

- Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $y \neq \mathbf{0}$, existen $-x, {}^1/y \in \mathcal{R}$ tales que

$$+(x, -x) = \mathbf{0} \quad \times (y, {}^1/y) = \mathbf{1}$$

- Para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{R}$ se cumple que

$$\times (x, +(y, z)) = +(\times (x, y), +(x, z))$$

Por comodidad, se procede a escribir $x + y := +(x, y)$, y análogamente para \times .

Naturalmente las tuplas $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, usando la suma y multiplicación usuales, son campos; en el presente trabajo, estos serán los únicos campos considerados.

Definición 1.40. Sean un conjunto \mathcal{V} , un campo $(\mathcal{R}, +_{\mathcal{R}}, \times_{\mathcal{R}})$, y dos operaciones $+_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V}$, $\times_{\mathcal{V}} : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathcal{R}, \cdot)$ es un **espacio vectorial** si cumple las siguientes características:

- La operación $+_{\mathcal{V}}$ es conmutativa y asociativa: para cualesquiera $u, v, w \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$u +_{\mathcal{V}} v = v +_{\mathcal{V}} u \quad u +_{\mathcal{V}} (v +_{\mathcal{V}} w) = (u +_{\mathcal{V}} v) +_{\mathcal{V}} w$$

- Existe $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ tal que, para cualquier $u \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$u +_{\mathcal{V}} \mathbf{e} = u$$

- Para cualquier $u \in \mathcal{V}$ existe un $-u \in \mathcal{V}$ tal que

$$u +_{\mathcal{V}} -u = \mathbf{e}$$

- La operación $\times_{\mathcal{R}}$ es asociativa con $\times_{\mathcal{V}}$: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $u \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$x \times_{\mathcal{V}} (y \times_{\mathcal{V}} u) = (x \times_{\mathcal{R}} y) \times_{\mathcal{V}} u$$

- El neutro de $\times_{\mathcal{R}}$, $\mathbf{1}$, también es neutro para $\times_{\mathcal{V}}$: para cualquier $u \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$\mathbf{1} \times_{\mathcal{V}} u = u$$

- Las operaciones $\times_{\mathcal{R}}$, $\times_{\mathcal{V}}$ son mutuamente distributivas: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $u, v \in \mathcal{V}$ se cumple que

$$\begin{aligned} x \times_{\mathcal{V}} (u +_{\mathcal{V}} v) &= (x \times_{\mathcal{V}} v) +_{\mathcal{V}} (x \times_{\mathcal{V}} u) \\ (x +_{\mathcal{R}} y) \times_{\mathcal{V}} u &= (x \times_{\mathcal{V}} u) +_{\mathcal{V}} (y \times_{\mathcal{V}} u) \end{aligned}$$

Por simplicidad de notación, de aquí en adelante se omitirán los subíndices en las operaciones cuando se hable de espacios vectoriales; bajo esta línea de pensamiento, se usará un mismo símbolo para sumas y multiplicaciones definidas en diferentes conjuntos, pero sólo si se sobreentiende que las operaciones están correctamente definidas.

Ejemplo 1.20. Primeramente se define a L^2 , el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, como

$$L^2 := \left\{ S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1.84)$$

El conjunto L^2 admite una suma y producto por escalar definidas como

$$[S + Z](t) = S(t) + Z(t) \quad (1.85)$$

$$[x \cdot S](t) = xS(t) \quad (1.86)$$

para cualesquiera $S, Z \in L^2$, $x \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces la tupla $(L^2, \mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Para verificarlo, conviene notar que la suma y producto por escalar definidos para L^2 comparten propiedades con la suma y multiplicación de \mathbb{C} ; sin embargo, hay que verificar que efectivamente son operaciones bien definidas en L^2 . Con ese fin, sean

$S, Z \in L^2$, $x \in \mathbb{C}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |[xS + Z](t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |xS(t) + Z(t)|^2 dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} [|xS(t)| + |Z(t)|]^2 dt \\ &\leq |x|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} |Z(t)|^2 dt \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\max\{S(t), Z(t)\}|^2 dt < \infty \end{aligned}$$

Es fácil verificar que puede definirse un neutro aditivo para L^2 como $\mathbf{0}(t) = 0$.

Definición 1.41. Sea $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times)$ un espacio vectorial. Una función $\|\bullet\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice una **norma** si satisface las siguientes condiciones:

- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{e}$
- $\|xu\| = |x| \|u\|$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{V}$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{V}$

Si así fuere, se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \|\bullet\|)$ es un **espacio normado**.

Ejemplo 1.21. Se puede definir una norma para L^2 , el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, de la siguiente manera:

$$\|S\| = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt \tag{1.87}$$

para cualquier $S \in L^2$. Entonces la tupla $(L^2, \mathbb{C}, +, \cdot, \|\bullet\|)$ es un espacio normado.

Para fines del trabajo, conviene destacar que una norma puede ser utilizada para definir una métrica en un espacio normado.

Definición 1.42. Sea \mathcal{X} un conjunto arbitrario. Se dice que una función $d : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una **métrica** si satisface las siguientes condiciones:

- $d(x, y) = d(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{X}$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{X}$

Si así fuere, se dice que la tupla (\mathcal{X}, d) es un **espacio métrico**.

Proposición 1.19. Sea $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \|\bullet\|)$ un espacio normado. Defínase la función $d : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(u, v) = \|u - v\| \quad (1.88)$$

Entonces d es una métrica, que será referida como la **métrica inducida**.

Ejemplo 1.22. La norma exhibida en el ejemplo ?? induce una siguiente métrica para L^2 de la siguiente manera:

$$d(S, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t) - Z(z)|^2 dt \quad (1.89)$$

Como ejemplo, puede definirse una métrica alternativa para L^2 como

$$d_A(S, Z) = \max_{t \in \mathbb{R}} |S(t) - Z(z)| \quad (1.90)$$

Definición 1.43. Sea $(\mathcal{V}, \mathbb{C}, +, \times)$ un espacio vectorial. Una función $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathcal{V}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ se dice un **producto interno** si satisface las siguientes propiedades:

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para cualesquiera $u, v \in \mathcal{V}$
- $\langle xu + v, w \rangle = x \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para cualesquiera $u, v, w \in \mathcal{V}$
- $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}_+$ para cualquier $u \in \mathcal{V}$
- $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{e}$

Si así fuere, se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un **espacio con producto interno**.

Proposición 1.20. Sea $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ un espacio con producto interno. Defínase la función $\|\bullet\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \quad (1.91)$$

Entonces $\|\bullet\|$ es una norma, que será referida como la **norma inducida**.

Ejemplo 1.23. La norma exhibida en el ejemplo ?? es inducida por el producto interno para L^2 definido de la siguiente manera:

$$\langle S, Z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \overline{Z(t)} dt \quad (1.92)$$

como ejemplo, un segundo producto interno puede ser definido como

$$\langle S, Z \rangle_A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} S(t) \overline{Z(t)} dt \quad (1.93)$$

Puede notarse inmediatamente que si en un espacio con producto interno se induce una norma, entonces esa misma norma puede usarse para inducir una métrica. Tal concatenación de construcciones es favorable para algunos fines, ya que la métrica resultante tiene una *buena conexión* con el producto interno.

Como se dijo, el objetivo de definir métricas es poder hablar de convergencia en espacios vectoriales, motivo por el cual se define un tipo de convergencia.

Definición 1.44. Sea (\mathcal{X}, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ es una **sucesión de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \quad (1.94)$$

Definición 1.45. Se dice que el espacio con producto interno $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un **espacio de Hilbert** si, para cualquier sucesión de Cauchy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \mathcal{V} \quad (1.95)$$

Las sucesiones de Cauchy se definen respecto a la métrica inducida por el producto interno.

1.6.1. Transformada de Fourier

En los ejemplos anteriores se definió a L^2 , el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, y se le definió un producto interno para *darle estructura* como espacio de Hilbert. De manera completamente análoga, a continuación se definen al conjuntos

ℓ^2 de las series cuadrado-sumables:

$$\ell^2 := \left\{ s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 < \infty \right. \right\} \quad (1.96)$$

el cual admite el producto interno definido como

$$\langle s, z \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(n)} \quad (1.97)$$

De manera similar se define al conjunto L_T^2 de las funciones cuadrado-integrables y periódicas con periodo $2T$:

$$L_T^2 := \left\{ S : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C} \left| \forall t \in \mathbb{R}, S(t) = S(t + 2T); \int_{-T}^T |S(t)|^2 dt < \infty \right. \right\} \quad (1.98)$$

el cual admite el producto interno definido como

$$\langle S, Z \rangle = \int_I S(t) \overline{Z(t)} dt \quad (1.99)$$

Una vez definidos estos espacios, es perfectamente posible definir la transformada de Fourier (en su *versión clásica*). La interpretación asociada y su contexto serán descritos posteriormente.

Definición 1.46. La **transformada de Fourier** es una función $\mathcal{F}_T : L_T^2 \rightarrow \ell^2$ tal que, para cualesquiera $S \in L_T^2, n \in \mathbb{Z}$, satisface

$$\mathcal{F}_T[S](n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t) e^{-i|n|t/2T} dt \quad (1.100)$$

La serie $\mathcal{F}_T[S]$ es referida como los **coeficientes de Fourier** para S .

De la definición anterior puede decirse que claramente \mathcal{F}_T depende de T , lo cual se discutirá posteriormente. También destaca que es una **función lineal**, es decir, para cualesquiera $S, Z \in L_T^2, x \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\mathcal{F}_T[xS + Z] = x\mathcal{F}_T[S] + \mathcal{F}_T[Z] \quad (1.101)$$

además de que la función idénticamente cero es mapeada a la sucesión idénticamente cero ($\mathcal{F}_T[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$). A la luz del comentario anterior, conviene investigar al **núcleo** de \mathcal{F}_T , el conjunto de elementos que son mapeados a la sucesión idénticamente cero.

$$\text{núcleo}(\mathcal{F}_T) = \left\{ N \in L_T^2 \mid \mathcal{F}_T[N] = \mathbf{0} \right\} \quad (1.102)$$

$$= \left\{ N \in L_T^2 \mid \int_{-T}^T |N(t)|^2 dt = 0 \right\} \quad (1.103)$$

Así entonces, es evidente que el operador \mathcal{F}_T no es invertible. Se puede definir, sin embargo, al operador pseudo-inverso $\mathcal{F}_T^{\text{inv}} : \ell^2 \rightarrow L_T^2$ como

$$\mathcal{F}_T^{\text{inv}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n) e^{i|n|t/2T} \quad (1.104)$$

Una vez descrito el núcleo de \mathcal{F}_T es perfectamente posible buscar subconjuntos de L_T^2 donde la restricción de \mathcal{F}_T sí sea invertible.

Se puede interpretar a $\mathcal{F}_T[f]$, los coeficientes de Fourier para f , como las *instrucciones* para *armar* a f a partir de funciones senoidales con periodo $2T$. En otras palabras, se ha usado al conjunto de funciones $\left\{ e^{int/2T} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, referido como la **base de Fourier**, como una base para L_T^2 . En el presente trabajo no se hablará más sobre el tema en un sentido formal, de forma que el lector interesado debe dirigirse a [?].

En un sentido más laxo, lo descrito anteriormente suele interpretarse como que las funciones periódicas (señales) pueden obtenerse como confluencia de señales cosenoidales. Escribir una señal dada como una suma de *componentes de frecuencia* ayuda a estudiar cómo se distribuye su *energía*.

Definición 1.47. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $a < b$, y sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. La **energía disipada** por la función f en el intervalo de tiempo $[a, b]$ es

$$\text{energía}_{[a,b]}[f] = \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1.105)$$

Similarmente, la **potencia** de la función f en el intervalo de tiempo $[a, b]$ es

$$\text{potencia}_{[a,b]}[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (1.106)$$

Como *corolario* de la definición anterior, para cualquier $s \in L^2$ puede escribirse $\text{energía}_{[-T,T]}[S] = \|S\|^2$. Esta *conexión* puede usarse para *caracterizar* a la energía disipada de una función usando su transformada de Fourier.

Teorema 1.21 (Parseval). *Sea $S \in L_T^2$, y sea $A = \mathcal{F}_T[S]$. Se cumple que*

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2$$

El teorema de Parseval puede interpretarse como que $\|S\| = \|\mathcal{F}_T[S]\|$. Se puede construir una interpretación más *atrayente* entendiendo a las funciones como señales: la energía disipada por una señal es la suma de la energía disipada por cada uno de sus *componentes de frecuencia*, es decir, los elementos de la base de Fourier en los que puede ser descompuesta la señal. Dentro de esta interpretación, tiene sentido preguntarse si algunos componentes de frecuencia son más importantes que otros, en el sentido que tengan asociada una mayor energía disipada.

Antes de pasar a otro tema conviene hablar sobre la convolución (representada como $*$), una tercera operación binaria definida en L_T^2 como

$$[S * Z](\tau) = \int_{-T}^T S(t) \overline{Z(\tau - t)} dt \quad (1.107)$$

esta misma construcción puede repetirse³ para ℓ^2 como

$$[s * z](\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau - n)} \quad (1.108)$$

La convolución toma interés en este contexto por su interesante relación con \mathcal{F}_T .

Teorema 1.22. *Sean $f, g \in L_T^2$. Entonces, se cumple que*

$$\mathcal{F}_T[f * g] = (\mathcal{F}_T[f]) \overline{(\mathcal{F}_T[g])} \quad (1.109)$$

³Más aún, la convolución puede construirse de manera *parecida* para muchos otros conjuntos de funciones, razón por la cual no se le encuadra formalmente como una única definición.

Demostración. Nótese que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_T[f * g](n) &= \int_{-T}^T [f * g](t) e^{-i|n|t/2T} dt \\
 &= \int_{-T}^T \left[\int_{-T}^T f(u) g(u-t) du \right] e^{-i|n|t/2T} dt \\
 &= \int_{-T}^T \int_{-T}^T f(u) g(u-t) e^{-i|n|t/2T} dt du \\
 &= \int_{-T}^T f(u) \left[\int_{-T}^T g(u-t) e^{i|n|(u-t)/2T} dt \right] e^{-i|n|u/2T} du \\
 &= \int_{-T}^T f(u) \left[\int_{-T}^T \overline{g(u-t)} e^{-i|n|(u-t)/2T} dt \right] e^{-i|n|u/2T} du \\
 &= \int_{-T}^T f(u) \overline{[\mathcal{F}_T[\bar{g}](n)]} e^{-i|n|u/2T} du \\
 &= \overline{[\mathcal{F}_T[\bar{g}](n)]} \int_{-T}^T f(u) e^{-i|n|u/2T} du \\
 &= \overline{[\mathcal{F}_T[\bar{g}](n)]} \mathcal{F}_T[f](n)
 \end{aligned}$$

■

Teorema 1.23. Sean $f, g \in L_T^2$. Entonces, se cumple que

$$\mathcal{F}_T[f \bar{g}] = (\mathcal{F}_T[f]) * (\mathcal{F}_T[g]) \quad (1.110)$$

Corolario 1.24. Sean $f, g \in L_T^2$. Entonces, se cumple que

$$|\mathcal{F}_T[f * g]|^2 = |\mathcal{F}_T[f]|^2 |\mathcal{F}_T[\bar{g}]|^2 \quad (1.111)$$

$$|\mathcal{F}_T[f \bar{g}]|^2 = \left| (\mathcal{F}_T[f]) * (\mathcal{F}_T[g]) \right|^2 \quad (1.112)$$

El teorema ?? es una motivación para teoremas parecidos, los cuales son usados extensamente en los capítulos siguientes para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias; ver las secciones ?? y ??.

1.6.2. Transformada de Fourier-Stieltjes

Una vez descrita la terminología sobre espacios de Hilbert, y habiendo definido la transformada de Fourier dentro de este contexto, es relativamente sencillo definir algunos otros espacios de funciones que admiten generalizaciones de la transformada de Fourier. Por ejemplo, retomando al conjunto L^2 (las funciones cuadrado-integrables sobre \mathbb{R}) puede definirse el operador $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}[S](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1.113)$$

para cualesquiera $S \in L^2, \omega \in \mathbb{R}$. El operador $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ será referido como la **transformada de Fourier generalizada**.

Como un segundo ejemplo puede considerarse al conjunto ℓ_T^2 de las sucesiones periódicas con periodo $2T$ y cuadrado-sumables, definido como

$$\ell_T^p := \left\{ s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall t \in \mathbb{Z}, s(t) = s(t + 2T); \sum_{n=-T}^T |s(n)|^2 < \infty \right\} \quad (1.114)$$

El espacio ℓ_T^2 admite como productos internos a aquél definido para ℓ^2 , si se restringe apropiadamente. Para ℓ_T^2 puede definirse al operador \mathcal{F}_T^d como

$$\mathcal{F}_T^d[s](n) = \sum_{k=-T}^T s(k)e^{-i|n|k/2T} \quad (1.115)$$

para cualesquiera $s \in \ell_T^2, n \in \mathbb{Z}$. El operador \mathcal{F}_T^d es referido como la **transformada discreta de Fourier**.

Como se dijo, es posible listar una gran cantidad de espacios con productos internos, que admiten la estructura de espacio de Hilbert y alguna generalización de la transformada de Fourier que satisfaga los teoremas descritos anteriormente. Por fines de concreitud, sólo se expondrá a fondo una versión *suficientemente general* para los fines del presente trabajo, y que es usada ampliamente en los siguientes capítulos: la transformada de Fourier-Stieltjes.

Primeramente se define a $L_{\mathbb{R}}^2$, el conjunto de las funciones que son periódicas o

son cuadrado integrables, como

$$L^2_{\mathbb{R}} = L^2 \cup \left[\bigcup_{T \in \mathbb{R}_+} L^2_T \right] \quad (1.116)$$

Por cómo se definió, para función en $f \in L^2_{\mathbb{R}}$ existe una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que la siguiente igualdad se cumple casi en todas partes

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dF(\omega) \quad (1.117)$$

con la integral definida en el sentido de Stieltjes. Naturalmente, el par f y F cumplirá un papel similar a la transformada de Fourier, aunque falta decir algunos comentarios antes. La expresión ?? es claramente cierta porque:

- si $f \in L^2$, entonces puede usarse

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}[f](\lambda) d\lambda$$

- si $f \in L^2_T$ para algún T , entonces puede usarse F

$$F(\omega) = \text{sgn}(\omega) \sum_{n=0}^{\lfloor |\omega|/2T \rfloor} \mathcal{F}_T[f](n)$$

donde $\text{sgn}(\omega)$ es el signo de ω : +1, -1, 0.

Notablemente $L^2_{\mathbb{R}}$ no es un espacio de Hilbert pues no es *cerrado ante sumas*, es decir, porque no hay garantía de que la suma de dos elementos arbitrarios de $L^2_{\mathbb{R}}$ sea un elemento de $L^2_{\mathbb{R}}$. Además, hay que definirle un producto interno.

Respecto al primer objetivo, puede definirse a S^2 como el conjunto más pequeño que es cerrado ante sumas y que contiene a $L^2_{\mathbb{R}}$ —similar a las σ -álgebras generadas por conjuntos arbitrarios. Su producto interno es más *delicado*, ya que debería ser *compatible* con cada uno de los L^2_T . Con el fin de ser concreto, para cualesquiera $f, g \in S^2$ se define

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(u)g(u) du \quad (1.118)$$

Definición 1.48. La *transformada de Fourier-Stieltjes* es un operador $\mathcal{F}_S : S^2 \rightarrow L^2$ tal que $F = \mathcal{F}_S[f]$ es una función que satisface

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dF(\omega) \quad (1.119)$$

Proposición 1.25. Sea $f \in S^2$ arbitraria. Entonces se cumple que

$$\mathcal{F}_S[f](\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.120)$$

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 2

Espectro de potencias

Con base a los comentarios del capítulo anterior, en este capítulo se define una generalización de la transformada de Fourier para procesos estocásticos. Por simplicidad expositiva, en este capítulo se expone únicamente el caso de procesos débilmente estacionarios, mientras que el caso de procesos no-estacionarios se discute en el próximo capítulo.

De forma general, este capítulo se incluye por simplicidad expositiva: los temas son discutidos sin lujo de detalle, y los teoremas corresponden a casos particulares de aquellos expuestos en el capítulo siguiente. Bajo esta línea de pensamiento, la lectura del capítulo es altamente recomendable porque se explican los siguientes hechos:

- El espectro de potencias existe siempre que la función de autocovarianza admita una representación de *cierta forma* (teoremas ?? y ??).
- Bajo las mismas condiciones, estos procesos admiten una *representación espectral* (teoremas ?? y ??), la cual será usada para demostrar algunos teoremas.
- El *efecto alias*, el cual *conecta* al espectro de potencias de un espectro y el de cualquier versión discretizada del mismo.
- La construcción de estimadores consistentes para el espectro de potencias usando *funciones de ventana*.

2.1. Espacios de variables aleatorias

Como se comentó en la sección ??, existe una amplia gamma de espacios de Hilbert para los cuales se pueden definir operadores que generalizan a la transformada de Fourier. En el contexto del presente trabajo es particularmente importante el *espectro de potencias*, una de estas generalizaciones para procesos estocásticos.

Para definir formalmente el espectro de potencias de esa forma, primero conviene definir un espacio de Hilbert que contenga a los procesos estocásticos.

Proposición 2.1. *Sea \mathcal{A} el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita. Se define un producto interno entre dos variables aleatorias arbitrarias, U y V , como*

$$\langle U, V \rangle := E[U, \bar{V}] \quad (2.1)$$

Usando la suma y productos usuales de variables aleatorias, junto al producto interno descrito, el espacio \mathcal{A} tiene la estructura de espacio de Hilbert.

Demostración. Basta con interpretar algunas propiedades de las variables aleatorias:

- Es posible sumar variables aleatorias, aún si la variable resultante tiene una distribución degenerada.
- El neutro aditivo es la variable con distribución degenerada $D(0)$.
- Si todas las variables tienen media cero, la covarianza es una función bilineal.

■

Merece especial atención la métrica inducida en el espacio de las variables aleatorias de media cero y varianza finita, \mathcal{A} ; el criterio de convergencia para variables aleatorias, según dicha métrica, es precisamente la convergencia en media cuadrática.

Es también muy interesante notar que los procesos estocásticos pueden interpretarse como *curvas* en \mathcal{A} indexadas por el tiempo. La condición de continuidad estocástica se traduce en que tales curvas sean continuas.

Así mismo es muy notable la interpretación que adquiere la función de autocovarianza, tomando en cuenta que la covarianza es el producto interno del espacio; ya antes se demostró que la función de autocovarianza es una función definida positiva (proposición ??), así que es posible inducirle una representación al estilo de la transformada de Fourier usando el siguiente teorema.

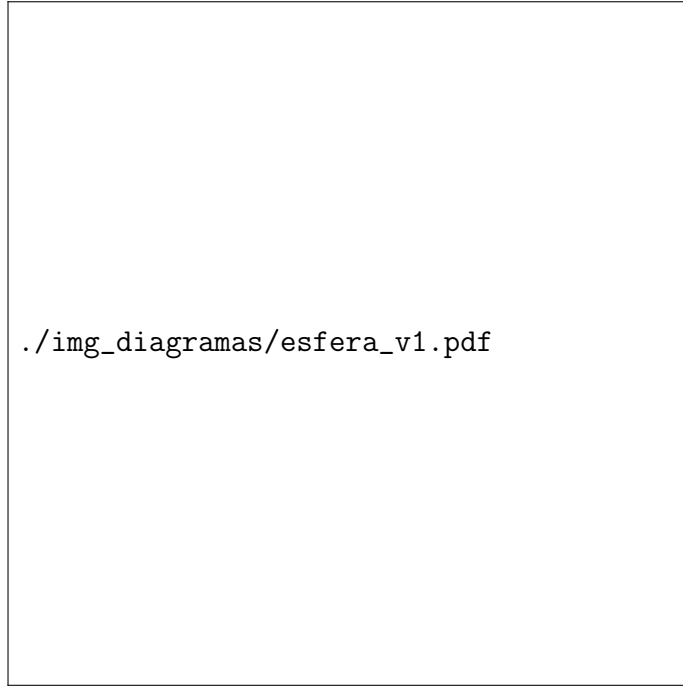


Figura 2.1: Topología esperada para un proceso estocástico débilmente estacionario y estocásticamente continuo, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, dentro del conjunto de variables aleatorias con varianza finita, \mathcal{A} . El objetivo de esta ilustración es visualizar algunos *elementos* de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ dentro del contexto de \mathcal{A} como un espacio de Hilbert. Por ejemplo $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ está contenido en una esfera de radio σ_X^2 y centro en una variable aleatoria con distribución degenerada $D(0)$.

Teorema 2.2 (Bochner). *Sea f una función real arbitraria. Una condición suficiente y necesaria para que f sea definida positiva es que exista una función real F monótonamente creciente, continua por la derecha y acotada tal que puede escribirse*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (2.2)$$

La estructura del espacio \mathcal{A} no será explorada de forma más profunda en el presente trabajo, sino que sólo es usada para exponer el contexto del teorema de Bochner; este último será usado para definir al espectro de potencias.

2.2. Función de densidad espectral

Una vez definido el espacio \mathcal{A} se procede a definir una primera versión del espectro de potencias; en concreto, se usará una forma similar a la transformada de Fourier-Stieltjes (definición ??).

Definición 2.1. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico en los reales, débilmente estacionario, con media 0 y varianza finita. Se define su **función de densidad espectral**, h , como

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} d\mu(t) \right|^2 \right] \quad (2.3)$$

con μ siendo la medida de Lebesgue si el proceso es a tiempo continuo, y la medida discreta si el proceso es a tiempo discreto.

Ejemplo 2.1. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ el proceso oscilante descrito anteriormente.

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} d\mu(t) &= \int_{-T}^T \cos(t + \phi) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-T}^T \frac{1}{2} \left[e^{i(t+\phi)} + e^{-i(t+\phi)} \right] e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{i\phi} \int_{-T}^T e^{-i(\omega-1)t} dt + \frac{1}{2} e^{-i\phi} \int_{-T}^T e^{-i(\omega+1)t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{i\phi} \frac{e^{-i(\omega-1)T} - e^{i(\omega-1)T}}{-i(\omega-1)} + \frac{1}{2} e^{-i\phi} \frac{e^{-i(\omega+1)T} - e^{i(\omega+1)T}}{-i(\omega+1)} \\ &= e^{i\phi} \frac{\text{sen}((\omega-1)T)}{\omega-1} + e^{-i\phi} \frac{\text{sen}((\omega+1)T)}{\omega+1} \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} d\mu(t) \right|^2 &= \frac{1}{4} \left| e^{i\phi} \frac{\text{sen}((\omega-1)T)}{(\omega-1)T} + e^{-i\phi} \frac{\text{sen}((\omega+1)T)}{(\omega+1)T} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\text{sen}((\omega-1)T)}{(\omega-1)T} \right)^2 + \left(\frac{\text{sen}((\omega+1)T)}{(\omega+1)T} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen}((\omega-1)T)}{(\omega-1)T} \right) \left(\frac{\text{sen}((\omega+1)T)}{(\omega+1)T} \right) \cos(2\phi) \end{aligned}$$

De la forma relativamente simple de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, se deduce que

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} d\mu(t) \right|^2 \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin((\omega - 1)T)}{\omega - 1} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\sin((\omega + 1)T)}{\omega + 1} \right)^2$$

Si $\omega \notin \{-1, 1\}$ entonces

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} d\mu(t) \right|^2 \right] = 0 \quad (2.4)$$

en caso contrario vale 0, ya que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Entonces, la función de densidad espectral para el proceso oscilante es

$$h(\omega) = \begin{cases} 1/\pi & , x \in \{-1, 1\} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.5)$$

La definición ?? produce información consistente con el comportamiento de los procesos, sin embargo tiene varios problemas con implicaciones prácticas. Primeramente está que para calcularse requiere el valor esperado sobre todo el espacio de eventos de un proceso estocástico, lo cual en general puede ser complicado.

Con vista al ejemplo, puede decirse que la función de densidad espectral obtenida no es una función de ‘densidad’ en el mismo sentido que una función de densidad de probabilidad. Continuando con ejemplo, uno quisiera definir una función de espectro integrado, H , como

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) d\omega \quad (2.6)$$

una definición que falla con el ejemplo descrito. A continuación se presenta un teorema que establece formalmente la existencia de las funciones de espectro integrado, en concordancia con la definición ??.

Teorema 2.3 (Wiener-Khintchine). *Una condición suficiente y necesaria para que R sea una función de autocovarianza para algún proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función H que tenga las siguientes propiedades*

- Monótonamente creciente

- $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} H(\omega) = 0$
- $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} H(\omega) < \infty$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dH(\omega)$$

Como notación, H será referido como la **función de espectro integrado** para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. Adicionalmente, si H es absolutamente continua, se define a h , la **función de densidad espectral** como

$$h(\omega)d\omega := dH(\omega) \tag{2.7}$$

2.3. Representación espectral

En el teorema ?? se definió la función de densidad espectral en términos de la función de autocorrelación de un proceso. Una pregunta natural es si se podría obtener la misma función en términos del proceso en sí. Dicha interrogante se deriva de la pregunta sobre si el proceso puede *reconstruirse* a partir de su espectro.

La respuesta, afirmativa salvo unicidad, conduce directamente a una forma de representar al proceso en base a su espectro, conocida como **representación de Wold-Cramér**. Dicha representación será usada con fluidez durante el resto de este capítulo, y como una motivación fuerte para el siguiente capítulo.

Teorema 2.4. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $E[dZ(\omega)] = 0$

$$\blacksquare \text{ Cov} (dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

Demostración. Se mostró anteriormente que \mathcal{R} , el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita, tiene la estructura de espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle U, V \rangle := \text{Cov} (U, V) = \mathbb{E} [U, \bar{V}] \quad (2.8)$$

Ahora bien, un proceso débilmente estacionario $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ puede verse como una *curva* en \mathcal{R} indexada por $t \in \mathcal{T}$. Por el teorema de Wiener-Khintchine, existe un proceso ortogonal dH tal que puede escribirse

$$\langle X(t), X(s) \rangle = R(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (2.9)$$

De manera más general, puede hablarse de una familia de funciones $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ (anteriormente se usó $\phi_t(\omega) = e^{i\omega t}$) y escribir

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) \overline{\phi_s(\omega)} dH(\omega) \quad (2.10)$$

Usando la familia de funciones $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ puede construirse un segundo espacio de Hilbert, \mathcal{H}_ϕ , como las combinaciones lineales de estas funciones. A este segundo espacio se le define el producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) \quad (2.11)$$

Posteriormente se define un mapeo $M : \mathcal{H}_\phi \rightarrow \mathcal{R}$ como

$$M[\phi_t] := X(t) \quad (2.12)$$

el cual se extiende linealmente para cualesquiera coeficientes $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$ y tiempos admisibles $t_1, t_2, \dots \in \mathcal{T}$

$$M \left[\sum_i c_i \phi_{t_i} \right] = \sum_i c_i M [\phi_{t_i}] \quad (2.13)$$

2.3. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

Trivialmente, M conserva productos internos; basta notar que

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H \quad (2.14)$$

Ahora, para trabajar con las funciones ϕ conviene descomponerlas en una base más *sencilla*, como límite de funciones simples. Para ello, se define una función indicadora

$$I(\omega; \omega_0, \omega_f) := \begin{cases} 1 & , \omega_0 \leq \omega < \omega_f \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.15)$$

Luego, sea $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$ una partición del intervalo $[-n, n]$, con $n \gg N$. Entonces, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\phi_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \quad (2.16)$$

Usando tal representación para las funciones ϕ 's, se define a Z como

$$Z(\omega_f) - Z(\omega_0) = M [I(\omega; \omega_f, \omega_0)] \quad (2.17)$$

Luego entonces, aplicando M a ambos lados de la expresión ?? se obtiene

$$\begin{aligned} M [\phi_t(\omega)] &= M \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N M [I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i)] \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (Z(\omega_i) - Z(\omega_{i-1})) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \end{aligned}$$

El resultado que se busca queda establecido porque $M[\phi_t] = X(t)$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \quad (2.18)$$



Cabe destacar que el uso de integrales respecto a un proceso estocástico es conforme a las usadas en la sección ??.

Bajo el contexto de espacios de Hilbert, es muy importante notar el proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es ortogonal, es decir que está compuesto por variables aleatorias no-correlacionadas. Este hecho ayuda a interpretar de forma más *natural* a $|dZ|^2$ como un espectro de potencias.

2.3.1. Representación de procesos a tiempo discreto

La existencia de espectros para procesos a tiempo discreto es dada por el teorema

Teorema 2.5 (Wold). *Una condición suficiente y necesaria para que R sea una función de autocovarianza de algún proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ débilmente estacionario es que exista una función H con las siguientes propiedades*

- Monótonamente creciente
- $\lim_{\omega \rightarrow -\pi} F(\omega) = 0$
- $\lim_{\omega \rightarrow +\pi} F(\omega) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dH(\omega)$$

Demostración. Por simplicidad, supóngase que $\Delta_X = 1$. A tiempo discreto, la función de autocovarianza adquiere la forma de una secuencia $\{R(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}$. Se define una función R_C que es igual a R pero cuyo dominio es \mathbb{R} , de la forma

$$R_C(\tau) = (1 - \tau + \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor) + (s - \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor + 1) \quad (2.19)$$

Fue demostrado por Priestley [?] que existe un proceso estacionario cuya función de autocovarianza es R_C , luego entonces por el teorema ?? existe una función de distribución Q tal que

$$R_C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \quad (2.20)$$

2.3. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

Dado que R y R_C son iguales cuando τ es entero, se puede considerar la siguiente manipulación con $\tau \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{2s+1\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega) \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2\pi s)\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
 &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right]
 \end{aligned}$$

Finalmente se puede definir a F , la función de densidad descrita por el teorema, usando

$$dF(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \quad (2.21)$$

El que F sea monótonamente se deduce de que Q lo es. Como dQ es simétrica, puede definirse convenientemente que $F(-\pi) = 0$ y $F(\pi) = 1$ con base a que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dQ(\omega) = 1 \quad (2.22)$$

■

Teorema 2.6. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo discreto, débilmente estacionario y de media 0. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $E [dZ(\omega)] = 0$
- $\text{Cov} (dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

La demostración es completamente análoga a la del teorema ??, reemplazando al teorema de Wiener-Khintchine por el de Wold.

2.4. Efecto alias

Hasta ahora se han tratado por separado los procesos a tiempo discreto y a tiempo continuo. Una vez expuestos algunos resultados importantes, se procede a explorar la familia de los procesos a tiempo discreto generados como subcolección de algún proceso a tiempo continuo. Dicha familia se vuelve importante porque se ha decidido modelar a las señales electrofisiológicas como procesos a tiempo continuo, pero sólo se pueden obtener registros de ellas a tiempo discreto.

Este tópico es relevante desde el punto de vista práctico, ya que existe una amplia variedad de condiciones técnicas bajo las cuales se suelen efectuar los registros. La AASM establece un mínimo de 128 puntos por segundo (Hz) para realizar las polisomnografías, pero la frecuencia de muestreo usualmente es decidida dependiendo del fenómeno a observar y las características del aparato de registro a usarse. Siguiendo esta idea, conviene hablar del posible efecto de obtener registros con una mayor o menor cantidad de puntos por unidad de tiempo

Considérese un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, y sea $\Delta_t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Se construye al proceso $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$Y(n) = X(n\Delta_t) \tag{2.23}$$

En virtud del teorema ??, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \tag{2.24}$$

Luego entonces puede reescribirse

$$\begin{aligned}
 Y(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{(2k-1)\pi/\Delta_t}^{(2k+1)\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)n\Delta_t} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Con base a lo anterior, puede definirse para $\omega \in [-\pi/\Delta_t, \pi/\Delta_t]$

$$dZ_Y(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \tag{2.26}$$

En base al teorema ??, se define para $|\omega| \leq \pi/\Delta_t$

$$\begin{aligned}
 dH_Y(\omega) &= \mathbb{E} \left[|dZ_Y(\omega)|^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \right|^2 \right] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[\left| dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \right|^2 \right] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} dH_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

En el segundo paso se usa que $\{dZ_X\}$ es un proceso ortogonal de media cero. Antes de poder declara que dH_Y es el espectro integrado del proceso discretizado, conviene hacer el cambio de variable $\omega^* := \omega \Delta_t$

$$\begin{aligned}
 dH_Y(\omega^*) &= dH_Y(\omega \Delta_t) \frac{d\omega^*}{d\omega} \\
 &= \frac{1}{\Delta_t} dH_Y(\omega \Delta_t)
 \end{aligned}$$

donde $|\omega^*| \leq \pi$. Si $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ posee un espectro puramente continuo –de manera

equivalentemente, si dH_X es absolutamente continua— entonces puede escribirse

$$h_Y(\omega^*) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \quad (2.28)$$

con $|\omega| \leq \pi$. Así entonces h_Y puede entenderse como una versión *colapsada* de h_X , fenómeno conocido como **efecto alias**.

2.5. Filtros lineales

Definición 2.2. Se dice que un operador $\mathcal{L}_g : L^2 \rightarrow L^2$ es un **filtro lineal** si puede escribirse de la forma

$$\mathcal{L}_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(t - u) du \quad (2.29)$$

para alguna función $g \in L^2$ que es referida como **función de respuesta**.

Naturalmente, los filtros lineales son funciones lineales. Son continuos en la identidad aditiva de L^2 , y por tanto son continuos en todo L^2 . Como los filtros lineales son funciones lineales y continuas, entonces son funciones medibles bajo la medida de Lebesgue. Se puede hablar de la composición de un filtro lineal \mathcal{L}_g con un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, es decir, definir un proceso de la forma

$$Y(t) = \mathcal{L}_g[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t - u) du \quad (2.30)$$

Los procesos generados como en ??, usualmente referidos como *procesos filtrados*, son comunes en el análisis de señales. En este trabajo serán usados para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias. Para ello, conviene describir la relación entre el espectro de un proceso y el de su *versión filtrada*.

Teorema 2.7. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, estocásticamente continuo, débilmente estacionario, de media cero y varianza finita; sea H_X su función de espectro integrado. Sea \mathcal{L}_g un filtro lineal, con g su función de respuesta. Defínase al proceso $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ como

$$Y(t) = \mathcal{L}_g[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t - u) du \quad (2.31)$$

Entonces H_Y , la función de espectro integrado de $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, satisface

$$dH_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega) \quad (2.32)$$

donde $\Gamma(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i(\omega-u)}du$ será referida como la **función de transferencia** asociada a \mathcal{L}_g .

Demostración. Usando el teorema ??, para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ puede escribirse

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.33)$$

Análogamente para $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} dZ_X(\omega) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega(-u)} du \right] dZ_X(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Gamma(\omega) dZ_X(\omega) \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega) &= E \left[|dZ_Y(\omega)|^2 \right] \\ &= E \left[|\Gamma(\omega) dZ_X(\omega)|^2 \right] \\ &= |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega) \end{aligned}$$

Más aún, si $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ admite una función de densidad espectral h_X , entonces $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ también, y ambos satisfacen

$$h_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 h_X(\omega) \quad (2.34)$$

■

Conviene notar que el teorema anterior era de esperarse como una generalización

del teorema ??; ésto considerando que la función de transferencia es la transformada generalizada de Fourier para la función de respuesta, y que h_X, h_Y son –en cierto sentido– los módulos de las transformadas de Fourier para los procesos.

2.5.1. Filtros de banda

Como se mencionó, los filtros lineales tienen múltiples aplicaciones en el análisis de señales, además de la estimación del espectro de potencias. Conviene destacar, aún como comentario, la familia de filtros lineales cuya función de transferencia es de la forma

$$\Gamma_{\omega_0}^*(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.35)$$

este tipo de filtros son referidos como *filtros pasa bajas*. Análogamente, un *filtro pasa altas* tiene una la misma forma cambiando la condición por $|\omega| \geq \omega_0$. Los *filtros pasa bandas* combina un filtro pasa bajas con ω_f y un filtro pasa bajas en $\omega_0 < \omega_f$.

De manera concreta, en base al teorema ?? puede construirse un filtro lineal \mathcal{L} cuya función de transferencia sea $\Gamma_{\omega_0}^*$.

Ejemplo 2.2. Sea \mathcal{L} un filtro pasa bandas con $\omega_0 = 7, \omega_f = 10$. La función de respuesta para \mathcal{L} es

$$g(t) = \frac{\text{sen}(10\pi t)}{t} - \frac{\text{sen}(7\pi t)}{t} \quad (2.36)$$

y su función de transferencia es

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} 1 & , 7 \leq \omega \leq 10 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.37)$$

Se construye al proceso $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ en la expresión ??, aplicando el filtro \mathcal{L} a un proceso ruido blanco. En virtud del teorema ?? la función de densidad espectral para $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es Γ , y su función de autocovarianza es g .

Este proceso será usado en ejemplos posteriores, así que será denominado ‘proceso tipo alfa’ para facilitar la referencia; el nombre se debe a la analogía con las ondas cerebrales alfa, como se describen en la sección ?. En la figura ?? se ilustra la apariencia de este proceso, su función de covarianza y su función de densidad

2.5. FILTROS LINEALES

espectral.

El efecto de un filtro pasa bajas suele interpretarse como la *eliminación* de los *componentes de frecuencia* mayores a ω_0 . Tal efecto es deseable si, por ejemplo, se desea estudiar la eléctrica en el lóbulo frontal de la corteza cerebral, pero se espera interferencia por la actividad muscular en el rostro¹. Para este fin, es conveniente usar un filtro pasa bajas con $\omega_0 = 100$ Hz, que es la frecuencia típica de la actividad muscular. En general, el uso de estos filtros garantiza heurísticamente la eliminación de una variedad de ruidos (señales que son registradas incidentalmente, pero no son de interés) como la corriente eléctrica o la actividad muscular.

En el presente texto no se exploran con más detalles este tipo de filtros y sus efectos; el lector interesado puede dirigirse al libro “*Medical Instrumentation. Applications and Design*” por John G. Webster [?].

¹Para una explicación completa ver la sección ??.



Figura 2.2: Apariencia del proceso tipo alfa, descrito en el ejemplo ?? . **A.** Una realización del proceso, H , construida a partir de una realización del proceso ruido blanco. **B.** Función de autocorrelación, R , construida analíticamente. **C.** Función de densidad espectral, h , construida analíticamente.

2.6. Estimadores

Definición 2.3. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario a tiempo discreto, que admite una función de densidad espectral y cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_X = 1$. Sea $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$ una realización de longitud N . El **periodograma**, I_N , es un estimador definido como

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (2.38)$$

Con vista en la definición ??, el periodograma es un estimador muy *natural* para dicha función. Conviene explorar su propiedades estadísticas que, lamentablemente, no son enteramente satisfactorias.

Proposición 2.8. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario a tiempo discreto que admite una función de densidad espectral h . El periodograma, I_N , es un estimador insesgado para h .

Proposición 2.9. La familia de estimadores $\{I_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = [h(\omega)]^2 \quad (2.39)$$

Para entender por qué el periodograma es inconsistente, conviene escribirlo como

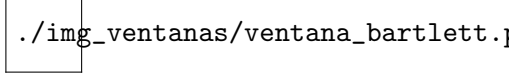
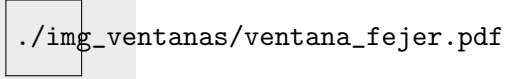
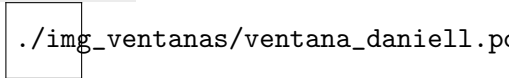
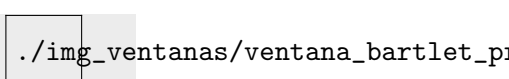
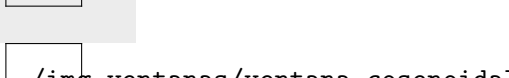
$$I_N(\omega) = 2 \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}^*(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.40)$$

donde \hat{R}^* es un estimador para la función de autocovarianza, R , definido como

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) \quad (2.41)$$

Así mismo, la misma expresión puede interpretarse como que el periodograma es una suma ponderada de los valores de \hat{R}^* ; mientras más grande es τ , menos parejas

Cuadro 2.1: Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta)

Nombre	$k(u), u \leq \pi$	Bosquejo
Bartlett	1	
Fejer	$1 - u $	
Daniell	$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{(\pi u)^2} \left[\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \right]$	
Cosenoidal	$\cos(\pi u)$	

de puntos cuya distancia es τ , y entonces \hat{R}^* tiene mayor varianza cuanto mayor sea τ .

Dado que la inconsistencia del periodograma es porque el periodograma es construido usando estimadores con varianza elevada, la solución natural es evitar tales componentes. Para ello, escójase una función de pesos, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defínase






$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau) \hat{R}^*(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2.42)$$

Resulta ilustrativo reescribir a \hat{h} en términos del periodograma

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) \Gamma(\omega - \theta) d\theta$$

donde $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} du$. Se puede demostrar que este tipo de estimadores son asintóticamente insesgado y consistentes.

Cuadro 2.2: Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia)

Nombre	$K(\theta)$	Bosquejo
Bartlett	$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta}$	 ./img_ventanas/ventana_2_bartlett.pdf
Fejer	$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\text{sen}(\theta/2)}{\theta/2} \right]^2$	 ./img_ventanas/ventana_2_fejer.pdf
Daniell	$1/2\pi$, si $ \theta \leq \pi$	 ./img_ventanas/ventana_2_daniell.pdf
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{4\pi} \left[1 - (\theta/\pi) \right]$, si $ \theta \leq \pi$	 ./img_ventanas/ventana_2_bartlet_priestle
Cosenoidal	d	 ./img_ventanas/ventana_2_bartlett.pdf

CAPÍTULO 3

Espectro evolutivo

El espectro evolutivo es una generalización para espectro de potencias (definido a detalle en el capítulo anterior) pero para procesos estocásticos que no son débilmente estacionarios. Se usa la definición tal cual fue presentada por Maurice B. Priestley en la década de 1960 [?, ?, ?]; para el lector interesado en el tema es igualmente recomendable el libro “*Spectral Analysis and Time Series*” del mismo autor [?], particularmente el capítulo 11.

En cuanto a estructura, este capítulo se compone de 3 secciones dedicadas únicamente al espectro evolutivo –definirlo, dar condiciones para estimarlo, construir estimadores consistentes– y otras dos sobre las implicaciones de la estacionariedad sobre el espectro evolutivo.

Conviene destacar de manera especial que el espectro evolutivo de un proceso débilmente estacionario es equivalente a su espectro de potencias (teorema ??). Este hecho es *usado* en la sección ?? para construir un *detector* de estacionariedad débil: la prueba de estacionariedad débil de Priestley y Subba Rao. La construcción de dicha prueba, así como su uso en registros electrofisiológicos, constituyen el punto central del presente trabajo.

3.1. Definición de espectro evolutivo

La idea de un espectro de potencias que cambia en el tiempo, lo que sea que eso signifique, implica una gran cantidad de problemas teóricos con implicaciones prácticas. Como motivación, lo mínimo que se espera de un espectro cambiante en el tiempo, es que posea las características importantes del espectro de potencias.

La existencia del espectro de potencias es garantizada por los teoremas de Wiener-Khintchine y de Wold (teoremas ?? y ??) para los procesos estocásticos débilmente estacionarios, estocásticamente continuos, con media 0 y varianza finita. En ambos teoremas se establece que el espectro integrado, H , cumple la ecuación

$$R(\tau) = \int_{\Omega} e^{i\omega\tau} dH(\omega) \quad (3.1)$$

donde R es la función de autocorrelación del proceso, y Ω es \mathbb{R} o $[-\pi, \pi]$ dependiendo si el proceso es a tiempo continuo o a tiempo discreto.

Con vista a ambos teoremas, de aquí en adelante únicamente serán considerados los procesos estocásticos de media 0, varianza finita y estocásticamente continuos –aunque no necesariamente sean débilmente estacionarios.

Definición 3.1. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico en los reales. Su **núcleo de covarianza** se define, para cualesquiera tiempos admisibles $t, s \in \mathcal{T}$, como

$$R(s, t) := E \left[\overline{\left(X(t) - E[X(t)] \right)} \left(X(s) - E[X(s)] \right) \right] \quad (3.2)$$

La letra R será usada para denotar al núcleo de covarianza siempre y cuando no haya confusión con la función de autocovarianza. Bajo esta línea de pensamiento, la ecuación ?? puede escribirse como

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (3.3)$$

donde se ha usado $\phi(\omega; t) = e^{i\omega t}$ y $\mu = H$, por generalidad. La motivación para usar funciones ϕ 's diferentes a las exponenciales complejas, es en principio por incertidumbre y generalidad. Conviene mencionar que en la demostración del teorema

de Wiener-Khintchine quedó claro que el espectro puede ser definido usando otras familias de funciones.

Con vista en la expresión ??, parece conveniente pensar en los proceso estocásticos que admitan una representación similar para alguna familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$. Dado que únicamente se están considerando procesos estocásticos de varianza finita, se pondrá como condición que cada $\phi(\bullet; t) \in \mathbf{F}$ satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\omega; t) d\mu(\omega) < \infty \quad (3.4)$$

Ejemplo 3.1. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso de Wiener, el cual se sabe que no es débilmente estacionario. Como se mostró anteriormente, su núcleo de covarianza es de la forma

$$R(t, s) = \min\{t, s\} \quad (3.5)$$

Considérese a la familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$, definidas como

$$\phi(\omega; t) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq \omega \leq t \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

No es difícil verificar que $R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu_L(\omega)$, con μ_L la medida de Lebesgue. Intuitivamente, la familia \mathbf{F} no tiene las mismas propiedades que la base de Fourier; este comentario será formalizado a continuación.

Definición 3.2. Una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **oscilatoria** si admite una representación de la forma

$$\phi(t) = A(t)e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

donde A es de la forma

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dK(\omega) \quad (3.8)$$

y donde $|dK(\omega)|$ tiene un único máximo global en $\omega = 0$.

Ejemplo 3.2. La función $\phi(t) = e^{i\omega t}$ es oscilatoria. Basta considerar $A \equiv 1$, la cual

3.1. DEFINICIÓN DE ESPECTRO EVOLUTIVO

puede expresarse como en la expresión ?? usando

$$K(\omega) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq \omega \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.9)$$

donde $|dK|$ tiene un máximo en 0. Conviene notar que, en principio, puede expresarse a ϕ de forma alternativa como

$$\phi(t) = e^{i\lambda t} e^{i(\omega-\lambda)t} \quad (3.10)$$

en este caso $A_2(t) = e^{i\lambda t}$, la cual tiene una representación de la forma ?? usando

$$K_2(\omega) = \begin{cases} 1 & , \lambda \leq \omega \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.11)$$

la cual no tiene un máximo global en $\omega = 0$. La condición del máximo global indica que A no es predominantemente una función cosenoidal, sino que sólo ‘modula’ a ϕ .

Ejemplo 3.3. La función $\phi(t) = e^{i\omega t} e^{-|t|}$ es oscilatoria, usando $A(t) = e^{-|t|}$. Para ello, A puede escribirse en la forma ?? con

$$K(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\omega} \frac{1}{1 + \lambda^2} d\lambda \quad (3.12)$$

Como $|dK(\omega)| = \frac{1}{\pi} (1 + \omega^2)^{-1}$ tiene un máximo absoluto en 0, se concluye la prueba. Este ejemplo es más ilustrativo del papel modulador de A .

Ejemplo 3.4. La función $\phi(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}$ es oscilatoria, usando $A(t) = e^{-t^2/2}$. Para ello, A puede escribirse en la forma ?? con

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\lambda^2/2} d\lambda \quad (3.13)$$

Como $|dK(\omega)| = e^{-\lambda^2/2}$ tiene un máximo absoluto en 0, se concluye la prueba.

Definición 3.3. Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **oscilatorio** si su núcleo

3.1. DEFINICIÓN DE ESPECTRO EVOLUTIVO

de covarianza acepta una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (3.14)$$

para alguna familia de funciones oscilatorias $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ y alguna función μ . Como referencia, si un proceso es oscilatorio para alguna familia \mathbf{F} , se dirá que dicha familia está ‘asociada’ al proceso.

Definición 3.4. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio, y sea $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ una familia de funciones oscilatorias asociadas al proceso. Por simplicidad, las funciones en \mathbf{F} serán escritas de la forma $\phi(\omega; t) = A(\omega; t)e^{i\omega t}$. Se define a H , el **espectro evolutivo integrado respecto a la familia \mathbf{F}** como

$$dH(\omega; t) := |A(\omega; t)|^2 d\mu(\omega) \quad (3.15)$$

donde μ es como en la definición ???. Si H es absolutamente continua se define h , el **espectro evolutivo respecto a la familia \mathbf{F}** , como

$$h(\omega; t) = dH(\omega; t) \quad (3.16)$$

Ejemplo 3.5. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso tipo alfa, como se definió en el ejemplo ??. Ahora, se construye al proceso $\{Y_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ como

$$Y_1(t) = X(t)e^{-|t|} \quad (3.17)$$

El núcleo de covarianza para $\{Y_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es

$$R_1(t, s) = \left[\frac{\sin(10\pi(t-s))}{(t-s)} - \frac{\sin(7\pi(t-s))}{(t-s)} \right] e^{-|t|} e^{-|s|} \quad (3.18)$$

Como se probó en el ejemplo ?? las funciones $\phi(\omega; t) = e^{i\omega t} e^{-|t|}$ son oscilatorias.



Figura 3.1: Proceso tipo alfa, con algunas modificaciones descritas en los ejemplos ?? y ?. **A.** Una realización del proceso tipo alfa, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$. **B.** Una realización del proceso $Y_1(t) = X(t)e^{-|t|}$. **C.** Una realización del proceso $Y_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

R_1 admite una representación en términos de dichas funciones, ya que

$$\begin{aligned} R_1(t, s) &= R^*(t - s) \begin{bmatrix} e^{-|t|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-|s|} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-|t|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-|s|} \end{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH_*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} e^{-|t|} e^{i\omega t} \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} e^{-|s|} e^{i\omega s} \end{bmatrix}} dH_*(\omega) \end{aligned}$$

donde H_* es la función de espectro integrado para X . Entonces, el espectro evolutivo para Y_1 , con respecto a la familia, es

$$dH_1(\omega; t) = e^{-2|t|} dH_*(\omega) \quad (3.19)$$

Ejemplo 3.6. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un proceso tipo alfa, como se definió en el ejemplo ???. Ahora, se construye al proceso $\{Y_2(t)\}_{\mathbb{R}}$ como

$$Y_2(t) = X(t)e^{-t^2/2} \quad (3.20)$$

El núcleo de covarianza para $\{Y_2(t)\}_{\mathbb{R}}$ es

$$R_2(t, s) = \left[\frac{\sin(10\pi(t-s))}{(t-s)} - \frac{\sin(7\pi(t-s))}{(t-s)} \right] e^{-t^2/2} e^{-s^2/2} \quad (3.21)$$

De forma análoga al ejemplo anterior, el ejemplo ?? se demostró que las funciones de la forma $\phi(\omega; t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}$ son oscilatorias. R_2 admite una representación en términos de dichas funciones como

$$R_2(t, s) = \begin{bmatrix} e^{-t^2/2} \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} e^{-s^2/2} \end{bmatrix}} dH_*(\omega) \quad (3.22)$$

donde H_* es la función de espectro integrado para X . Entonces, el espectro evolutivo para Y_2 , con respecto a la familia, es

$$dH_2(\omega; t) = e^{-t^2} dH_*(\omega) \quad (3.23)$$

3.1. DEFINICIÓN DE ESPECTRO EVOLUTIVO

Proposición 3.1. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, débilmente estacionario, estocásticamente continuo, de media cero y varianza finita. Entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso oscilatorio. Más aún, la función de espectro integrado para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, H_* , y su espectro evolutivo integrado con respecto a la familia $\{e^{i\omega t}\}$, H , cumplen que

$$dH(\omega; t) = dH_*(\omega) \quad (3.24)$$

Demostración. Sea R el núcleo de covarianza para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ y sea R^* su función de autocorrelación. En virtud del teorema ??, y porque el proceso es débilmente estacionario puede escribirse

$$R(s, t) = R^*(t - s) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{[e^{i\omega s}]} [e^{i\omega t}] dH_*(\omega) \quad (3.25)$$

Previamente se mostró que las funciones de la forma $\phi(t) = e^{i\omega t}$ son oscilatorias, de donde se obtiene que $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso oscilatorio. De manera similar a los ejemplos anteriores, se deduce que el espectro evolutivo de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es

$$dH(\omega; t) = dH_*(\omega) \quad (3.26)$$

con lo cual se termina de demostrar la proposición. ■

Antes de pasar al siguiente tema, conviene mostrar dos resultados que generalizan resultados presentados en capítulos anteriores: sobre la continuidad estocástica y sobre la representación espectral.

Proposición 3.2. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico a tiempo continuo y R su núcleo de covarianza. Si R es continuo en el conjunto $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es estocásticamente continuo.

Proposición 3.3. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, estocásticamente continuo, y sea R su núcleo de covarianza. Si R admite una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (3.27)$$

entonces $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega; t) dZ(\omega) \quad (3.28)$$

donde $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un proceso estocástico tal que

$$\text{Cov}(Z(t), Z(s)) = \delta(t, s) \mu(\omega) \quad (3.29)$$

con δ la función delta de Kronecker.

La primera proposición se demuestra de forma similar a la proposición ??, aunque en este caso la implicación sólo es en una dirección. La segunda proposición se demuestra de forma análoga al teorema ??, reemplazando la participación del teorema de Wiener-Khintchine por el supuesto de que el núcleo de covarianza admite la representación descrita.

3.2. Estimación del espectro evolutivo

En el capítulo anterior —específicamente en la sección ??— se exhibió un estimador consistente para la función de densidad espectral en procesos débilmente estacionarios, referido como *estimador de ventana*. Dicho estimador se construye multiplicado al periodograma por una función con ciertas características, referida como *ventana de retrasos*; se demostró que el estimador es insesgado para una *versión suavizada* de la función de densidad espectral, siendo para ello un factor determinante la forma de la ventana de retrasos. En esta sección se exhibe un estimador similar para el espectro evolutivo; se presentan algunos teoremas sobre las propiedades de estos estimadores, así como algunas restricciones sobre los procesos para los cuales el estimador es *útil*.

3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios

Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio, y sea \mathcal{L} un filtro lineal cuya función de respuesta es $g \in L_I^2$. Se construye al proceso $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ como¹

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \quad (3.30)$$

Entonces puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(\omega)e^{i\omega t}dZ(\omega) \quad (3.31)$$

donde Γ_{\bullet} es la **función de transferencia generalizada** para g con respecto a la familia \mathbf{F} , y que es definida como

$$\Gamma_t(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u}du \quad (3.32)$$

Conviene destacar el caso particular cuando A , como función de ω , varía *lenta-mente* en comparación de g ; en tal caso podría decirse que $\Gamma_{\bullet} \approx \Gamma$ (un resultado similar al teorema ??), con lo cual las consideraciones de la sección ?? serían aproximadamente válidas incluso para procesos no-estacionarios.

Definición 3.5. Una familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ se dice **semi-estacionaria** si, para todo $t \in \mathcal{T}$, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK_t(\omega)| < \infty \quad (3.33)$$

donde $\phi(\omega; t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dK_t(\omega)$. Si así fuere, se define el **ancho de banda característico** de \mathbf{F} como

$$B_{\mathbf{F}} := \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| \right]^{-1} \quad (3.34)$$

Ejemplo 3.7. La familia de funciones $\{\phi(t) = e^{i\omega t}\}$ es semi-estacionaria. Usando

¹En el texto de Priestley se considera un filtro de la forma $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)e^{-i\omega_0(t-u)}du$ para algún ω_0 constante. Por simplicidad se considera únicamente el caso $\omega_0 = 0$

a K como en el ejemplo ??, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK_t(\omega)| = 0 \quad (3.35)$$

El ancho de banda característico de la familia no está bien definido como un número real, pero si se usa a $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, su ancho de banda es ∞ .

Ejemplo 3.8. La familia de funciones $\{\phi(t) = e^{i\omega t} e^{-|t|}\}$ **no** es semi-estacionaria. Usando a K_1 como en el ejemplo ??, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK_t(\omega)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{1 + \omega^2} d\omega \not\leq \infty \quad (3.36)$$

Ejemplo 3.9. La familia de funciones $\{\phi(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}\}$ es semi-estacionaria. Usando a K_2 como en el ejemplo ??, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK_t(\omega)| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2} d\omega = \frac{1}{2} \quad (3.37)$$

El ancho de banda característico para esta familia de funciones es 2.

Definición 3.6. Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **semi-estacionario** si su núcleo de covarianza, R , admite una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (3.38)$$

para alguna familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ que es semi-estacionaria, y alguna función μ .

Sea \mathcal{C}_X la clase de las familias semi-estacionarias para las cuales el núcleo de covarianza de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ admite una representación de la forma ???. Se define a B_X , el **ancho de banda característico para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$** , como

$$B_X := \sup_{\mathbf{F} \in \mathcal{C}_X} B_{\mathbf{F}} \quad (3.39)$$

Proposición 3.4. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estocástico a tiempo continuo, débilmente estacionario, estocásticamente continuo, de media cero y varianza finita. En-

3.2. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

tonces $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso semi-estacionario, cuyo ancho de banda característico es $B_X = \infty$.

Demostración. En el ejemplo ?? se demostró que todos los procesos con las características descritas son oscilatorios, y que tienen asociada a la familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi(t) = e^{i\omega t}\}$. En el ejemplo ?? se demostró que esa familia tiene un ancho de banda característico $B_{\mathbf{F}} = \infty$. Entonces es inmediato que el ancho de banda característico para $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es $B_X = \infty$. ■

Definición 3.7. Sea \mathcal{L} un filtro lineal, con g su función de respuesta y Γ su función de transferencia. Su **ancho de banda**, B_g , es

$$B_g := \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \quad (3.40)$$

Por simplicidad de referencia, en lo siguiente se dirá que \mathcal{L} está normalizada si cumple que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| d\omega = 1 \quad (3.41)$$

Definición 3.8. Se dice que una función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es **pseudo- δ de orden ε** con respecto a la función $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ si, para cualquier $k \in \mathbb{R}$ existe un $\varepsilon \ll 1$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \right| < \varepsilon \quad (3.42)$$

Teorema 3.5. Sea \mathbf{F} una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico $B_{\mathbf{F}}$, y sea g una función normalizada como en ?? y cuyo ancho de banda es B_g . Entonces, para cualesquiera $t, \omega \in \mathbb{R}$ se cumple que $e^{i\omega t} dK(\omega)$ es una función pseudo- δ de orden $B_g/B_{\mathbf{F}}$ con respecto a g

Demostración. Suponiendo que Γ sea una vez derivable, su expansión de Taylor alrededor de k es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\theta + k) dK(\omega) = \Gamma(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega)$$

para algún $\nu \in (0, \theta)$. Respecto al segundo sumando, puede observarse que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) \right| \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |\Gamma'(k + \nu)| |dK(\omega)| \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] |dK(\omega)| \\
 &\leq \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right]
 \end{aligned}$$

Usando la conexión entre g y Γ

$$\begin{aligned}
 \Gamma'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} g(u) du \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d\omega} e^{i\omega u} g(u) \right) du \\
 &= i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega u} g(u) du
 \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \\
 &\leq \left[\sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} i u e^{i\omega u} g(u) du \right| \right] B_{\mathbf{F}}^{-1} \\
 &\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \right] \\
 &\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} B_g
 \end{aligned}$$

■

Con el teorema anterior a la mano se puede declarar formalmente la idea de que A varía más lentamente que g .

3.2. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

Teorema 3.6. *Sea \mathbf{F} una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico $B_{\mathbf{F}}$, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, y sea g un filtro normalizado como en ?? y cuya función de transferencia generalizada con respecto a \mathbf{F} es Γ_{\bullet} . Si g es elegida de tal modo que $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, entonces para cualesquiera t, ω se cumple que*

$$|\Gamma_t(\omega) - A(\omega; t)\Gamma(\omega)| < \varepsilon \quad (3.43)$$

Demostración. Por la mera definición de Γ_{\bullet} (expresión ??) se sabe que

$$\Gamma_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u} du$$

Si se sustituye a A en términos de dK (ver la definición de función oscilatoria)

$$\begin{aligned} \Gamma_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t-u)} dK(\theta) \right] e^{i\omega u} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\theta t} e^{i(\omega-\theta)u} dK(\theta) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i(\omega-\theta)u} du \right] dK(\theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta) \end{aligned}$$

Usando el lema ?? junto al hecho que $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, se puede escribir que

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\ &= \left| \Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\ &= |\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega)A(\omega; t)| \end{aligned}$$

En el último renglón se ha reemplazado nuevamente a A en términos de dK ■

Teorema 3.7. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso semi-estacionario con ancho de banda característico B_X , sea g un filtro normalizado como en ?? y cuyo ancho de banda es B_g y cuya función de respuesta es Γ . Sea $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso definido como ??. Sea \mathbf{F}^* una familia semi-estacionaria cuyo ancho de banda característico es B_X o es muy parecido a B_X (lo cual es posible por cómo se definió B_X). Se cumple que

$$\mathbb{E} \left[|Y(t)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 dH^*(\omega; t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.44)$$

donde H^* es el espectro integrado respecto a la familia \mathbf{F}^* y $\mathcal{O}(\varepsilon)$ es un término que puede hacerse arbitrariamente pequeño si B_g es pequeño respecto a B_X .

Demostración. Usando la expresión ?? para este caso particular, puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) A^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \quad (3.45)$$

donde ω^* , A^* y Z^* están definidos respecto a la familia \mathbf{F}^* . Nótese que, debido a que los dZ 's son ortogonales

$$\mathbb{E} \left[|Y(t)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega)$$

Si se elige a g de modo que $\frac{B_g}{B_X} < \varepsilon$, en virtud del teorema ?? puede escribirse

$$\Gamma_t^*(\omega; t) = A^*(\omega; t) \Gamma(\omega) + R(\omega; t) \quad (3.46)$$

con $|R(\omega, t)| < \varepsilon$. Luego entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[|Y(t)|^2 \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) \overline{R(\omega; t)} d\mu^*(\omega) + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega)
 \end{aligned}$$

El cuarto sumando satisface claramente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) < \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^*(\omega) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.47)$$

Respecto al segundo sumando, nótese que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) &< \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| |R(\omega; t)| d\mu^*(\omega) \\
 &< \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega)
 \end{aligned}$$

Una cota similar puede hallarse para el tercer sumando. Falta demostrar que la cota permanece finita cuando $B_g \rightarrow 0$, lo cual debería lograrse definiendo el conjunto

$$\Omega = \left\{ \omega \in \mathbb{R} \mid |\Gamma(\omega)| |A^*(\omega; t)| \leq 1 \right\} \quad (3.48)$$

y luego, claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) = \int_{\Omega} \mu^*(\omega) + \int_{\Omega^c} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \quad (3.49)$$

el primer sumando es claramente finito y no depende de g , mientras que el segundo debería ser finito ya que Γ está normalizada. ■

3.3. Estimador de doble ventana

Para esta sección se considera un proceso a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ y una muestra del mismo de longitud T (o equivalentemente un proceso $\{X(t)\}_{t \in [l, T]}$), suficientemente larga. El objetivo en esta sección es construir un estimador para el espectro evolutivo $dH(\omega; t)$. Por simplicidad, se supondrá que la medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y entonces puede escribirse

$$h(\omega, t) := dH(\omega; t) \quad (3.50)$$

Para efectuar la estimación del espectro se hará uso del teorema ??, para lo cual se necesita un filtro g normalizado según ?? y cuyo ancho de banda, B_g , satisface

$$B_g \ll B_X \ll T \quad (3.51)$$

Bajo estas condiciones se construye U aplicando a X un filtro lineal cuya función de respuesta es g

$$U(t) = \int_{t-T}^t g(u)X(t-u)du \quad (3.52)$$

Bajo la condición ??, la integral que define a U puede extenderse a todo \mathbb{R} sin cambiar mucho su valor (excepto cerca de 0 y T), e incluso se llega a ser exacta si g es 0 fuera de un intervalo pequeño alrededor de 0. Entonces, en virtud del teorema ?? aplica de manera aproximada, y entonces se cumple que

$$\mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.53)$$

El teorema de Isserlis es una identidad relativamente poco conocida sobre los cuartos momentos de una distribución multinormal; el caso particular de cuatro variables será usado para calcular la covarianza de algunos estimadores del espectro de potencias.

Teorema 3.8 (Isserlis). *Sea $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ un vector aleatorio siguiendo una distribución multinormal con media cero y matriz de covarianza finita. Se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3] \quad (3.54)$$

Proposición 3.9. *Dadas las condiciones, y si $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso normal que admite un espectro evolutivo uniformemente continuo, se tiene que*

$$\text{Var} \left(|U(\omega; t)|^2 \right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t) d\omega \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.55)$$

Demostración. Por conveniencia se obtendrá una expresión aproximada para la covarianza de U , a partir de la cual se deducirá su varianza. Para ello, por definición puede escribirse para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov} \left(|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2 \right) = \mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2 \right] - \mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 \right] \mathbb{E} \left[|U(\lambda; s)|^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2 \right] &= \iiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[X(t-u)X(t-v)X(s-w)X(s-z) \right] dudvdwdz \end{aligned} \quad (3.56)$$

Si para cada t $X(t)$ sigue una distribución normal, entonces en virtud del teorema ?? puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[X(t-u)X(t-v)X(t-w)X(t-z) \right] &= R(t-u, t-v)R(s-w, s-z) \\ &\quad + R(t-u, s-z)R(t-v, s-w) \\ &\quad + R(t-u, s-w)R(t-v, s-z) \end{aligned}$$

Reemplazando sobre la expresión anterior, puede escribirse

$$\mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2 \right] = \mathbb{E} \left[|U(\omega; t)|^2 \right] \mathbb{E} \left[|U(\lambda; s)|^2 \right] + S_1 + S_2 \quad (3.57)$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= \iiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\ &\quad \times R(t-u, s-z)R(t-v, s-w)dudvdwdz \end{aligned}$$

Se define a S_2 de manera similar, intercambiando w y z . Estas expresiones, de apa-

riencia innecesariamente complicada, pueden interpretarse como las *interferencias* de la covarianza entre los puntos (ω, t) y (λ, s) . Para ello, nótese que

$$\text{Cov} \left(|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2 \right) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.58)$$

Cabe mencionar que es conveniente que las cantidades S_1 y S_2 sean pequeñas.

Sea ha elegido a g de forma que $B_g \ll B_X$ con el objetivo de que U tenga un sesgo pequeño, en virtud del teorema [?]. Este teorema puede ser usado nuevamente si S_1 y S_2 son reescritas en cierta forma *adecuada*, para lo cual la autocovarianza debe ser vista como

$$R(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p-q)} A(\omega; p) \overline{A(\omega; q)} d\mu(\omega) \quad (3.59)$$

Así pues, reemplazando esta expresión sobre (?) se obtiene

$$\begin{aligned} S_1 &= \iiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\ &\quad \times R(t-u, s-z) R(t-v, s-w) dudvdwdz \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\ &\quad \times \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left[e^{-i\theta(s-z-t+u)} A(\theta; t-u) \overline{A(\theta; s-z)} \right] \right. \\ &\quad \left. \left[e^{-i\phi(s-w-t+u)} A(\phi; t-v) \overline{A(\phi; s-w)} \right] d\theta d\phi \right) dudvdwdz \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} \\ &\quad \times \left[A(\theta; t) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) \overline{A(\theta; t)} \right] d\theta d\phi \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right] \\ &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right] \end{aligned}$$

Donde Γ_* es la función de transferencia generalizada

$$\Gamma_*(\kappa; t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{A(\omega; t-u)}{A(\omega; t)} e^{-i\kappa u} du \quad (3.60)$$

3.3. ESTIMADOR DE DOBLE VENTANA

Usando el teorema [?], se puede decir que $|\Gamma(\bullet; t, \lambda) - \Gamma(\bullet)| \leq B_g/B_X$. Así entonces

$$\begin{aligned}
|S_1| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right| \\
&\quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right| \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)| |\Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi)| |A(\phi; t) A(\phi; s)| d\phi \right] \\
&\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta)| |\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)| |A(\theta; t) A(\theta; t)| d\theta \right] \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t) A(\phi; s)| d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)
\end{aligned}$$

La misma cota puede hallarse para S_2 . En lo inmediato, conviene analizar el caso $\omega = \lambda$ y $t = s$, de donde se obtiene

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) = \text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\omega; t)|^2) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)$$

pero en este caso particular, la cota obtenida puede reducirse a

$$\begin{aligned}
|S_1| &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 |A(\phi; t)|^2 d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)
\end{aligned}$$

■

En el teorema anterior puede interpretarse que $\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi$ es una versión *suavizada* de h . Bajo este comentario, el resultado obtenido es muy análogo a la estimación del espectro en un proceso estacionario (teorema ??). Siguiendo dicha analogía, se sabe que U puede *modificarse* para generar estimadores consistentes; para lo cual se usa una segunda función de ventana w_τ . Por estética y comodidad, las condiciones sobre w_τ serán presentadas junto a las propiedades de la ventana g ; todas ellas en la definición

Definición 3.9. *El estimador de doble ventana es un estimador para h definido*

como

$$\widehat{h}(\omega, t) = \int_{T-t}^t w_\tau(u) |U(\omega, t-u)|^2 du \quad (3.61)$$

donde la función g satisface

- $B_g \ll B_X \ll T$
- $g(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$

con $\Gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g(t) d\lambda$. Así mismo, la función w_τ satisface

- $w_\tau(t) \geq 0$ para cualesquiera t, τ
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$ para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 dt < \infty$ para todo τ
- $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)|^2 d\lambda = C$

donde $W_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_\tau(t) d\lambda$.

El supuesto sobre que w_τ decaiga rápidamente lejos de 0 permite reemplazar el intervalo de integración que define a \widehat{h} por \mathbb{R} (excepto cerca de 0).

Proposición 3.10. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\mathbb{E} [\widehat{h}(\omega, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.62)$$

donde

$$\bar{h}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) h(\omega, t-u) du \quad (3.63)$$

Demostración. De manera relativamente sencilla puede verificarse que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\widehat{h}(\omega, t) \right] &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |U(t-u)|^2 du \right] \\
 &= \int_{T-t}^t w_{\tau}(u) \mathbb{E} \left[|U(t-u)|^2 \right] du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \right] du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) h(\omega, t-u) du \right] d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X)
 \end{aligned}$$

■

A diferencia de U , el estimador de doble ventana no es consistente salvo en caso que \bar{h} sea parecido a h ; como \bar{h} es una versión suavizada, que el estimador sea sesgado depende de que $B_{w_{\tau}}$ sea pequeño en comparación a B_X .

Proposición 3.11. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\text{Var} (V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |W_{\tau}(\omega)|^2 d\omega \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.64)$$

donde

$$\tilde{h}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\omega_0, t) (w_{\tau}(u))^2}{\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(u)) du} \quad (3.65)$$

Demostración. Como en el caso del estimador U , será conveniente calcular la covarianza de \widehat{h} y posteriormente deducir la varianza. Se escribe para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov} \left(\widehat{h}(\omega, t), \widehat{h}(\lambda, s) \right) = \mathbb{E} \left[\widehat{h}(\omega, t) \widehat{h}(\lambda, s) \right] - \mathbb{E} \left[\widehat{h}(\omega, t) \right] \mathbb{E} \left[\widehat{h}(\lambda, s) \right] \quad (3.66)$$

Hecho el trabajo previo, es claro que

$$\begin{aligned}
 \text{Cov} \left(\widehat{h}(\omega, t), \widehat{h}(\lambda, s) \right) &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \text{Cov} \left(|U(\omega; t - u)|^2, |U(\lambda; s - v)|^2 \right) dudv \\
 &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) [S_1 + S_2] dudv + \mathcal{O} \left(B_g/B_X \right) \\
 &= T_1 + T_2
 \end{aligned}$$

usando, por comodidad

$$T_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) [S_1] dudv \quad (3.67)$$

y similarmente para T_2 ; S_1 es como en la expresión (?), evaluado en los puntos $(t - u, \omega), (s - v, \lambda)$

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t - u, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s - v, \phi) \overline{A(\phi; t - u)} A(\phi; s - v) d\phi \right] \\
 &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_*(\theta + \omega; t - u, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s - v, \theta)} A(\theta; t - u) \overline{A(\theta; s - v)} d\theta \right]
 \end{aligned}$$

con Γ_* es la función de transferencia generalizada; S_2 se define de manera similar. Se usará el teorema * para acotar la covarianza, comenzando por el primer sumando

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) [S_1] dudv \\
 &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |S_1| dudv \\
 &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \\
 &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t - u) A(\phi; s - v)| d\phi \right]^2 dudv + \mathcal{O} \left(B_g/B_X \right) \\
 &\leq \iint_{\mathbb{R}^2} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |\Gamma(\theta + \omega)| |\Gamma(\theta + \lambda)| \\
 &\quad \times \left[\iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |A(\phi; t - u) A(\phi; s - v)| dudv \right] d\phi d\theta + \mathcal{O} \left(B_g/B_X \right)
 \end{aligned}$$

■

Aún más, si se usa la propiedad en el límite de τW_τ se puede escribir

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \frac{C}{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.68)$$

Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que $\tilde{h} \approx h$ y $\tilde{h}^2 \approx h^2$. Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas w_τ y W_τ sean más cercanas a funciones tipo δ de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $E[\hat{h}(t, \omega)] \approx h(t, \omega)$
- $\text{Var}(\hat{h}(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta$

3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao

La prueba de estacionariedad usada en el presente trabajo, fue propuesta por Priestley y Subba Rao en la década de 1960 [?]. Dicha prueba consiste en probar estadísticamente si el espectro evolutivo de un proceso dado puede reducirse a un espectro de potencias, como en el teorema ??, lo cual es equivalente a probar si el proceso es débilmente estacionario. El procedimiento consiste en los siguientes pasos:

1. Estimar el espectro evolutivo en algunos puntos en tiempo y frecuencia.
2. Calcular el logaritmo para *estabilizar* al estimador.
3. Efectuar una ANOVA de dos vías para verificar si el espectro cambia en el tiempo.

El primer paso, está sujeto a todas las restricciones descritas anteriormente en el presente capítulo. Por notación, sea $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$ un proceso semi-estacionario a tiempo discreto, de media cero y varianza finita cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_t = 1$; y sea $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$ un conjunto de N observaciones. Usando esta información se calcula para estos datos el estimador de doble ventana, \hat{h} ; para ello se eligen las funciones ventana g_κ y w_τ que, por simplicidad, son ventanas de escalamiento con parámetros κ y τ . Sus funciones de transferencia serán Γ_κ y W_τ , respectivamente.

Proposición 3.12. *Sea g una función cuando menos dos veces derivable cuyo dominio es \mathcal{D}_g , y sea X una variable aleatoria real tal que $P(X \notin \mathcal{D}) = 0$. Pueden usarse las siguientes aproximaciones*

$$E[g(X)] \approx g(E[X]) \quad (3.69)$$

$$\text{Var}(g(X)) \approx \text{Var}(X) [g'(E[X])]^2 \quad (3.70)$$

Demostración. Se construye para g su polinomio de Taylor de grado 2 alrededor de $E[X]$, y éste es evaluado en X

$$g(X) = g(E[X]) + (X - E[X]) g'(E[X]) + \frac{(X - E[X])^2}{2} g''(\xi) \quad (3.71)$$

donde la variable aleatoria ξ satisface $|X - \xi| \leq |X - E[X]|$. La aproximación, con una obvia pérdida, consiste en considerar que $\frac{1}{2} (X - E[X])^2 g''(\xi) \approx 0$.

$$g(X) \approx g(E[X]) + (X - E[X]) g'(E[X]) \quad (3.72)$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados

$$E[g(X)] \approx E[g(E[X])] + E[(X - E[X]) g'(E[X])] = g(E[X]) \quad (3.73)$$

Lo cual confirma la primera parte del resultado. Para verificar la segunda parte del mismo, se elevan ambos lados al cuadrado

$$\begin{aligned} [g(X)]^2 &\approx [g(E[X])]^2 + 2g(E[X]) (X - E[X]) g'(E[X]) \\ &\quad + (X - E[X])^2 [g'(E[X])]^2 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Posteriormente se toma el valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned} E[g(X)]^2 &\approx E\left[[g(E[X])]^2\right] + 2g(E[X]) E[X - E[X]] g'(E[X]) \\ &\quad + E[(X - E[X])^2] [g'(E[X])]^2 \\ &= [g(E[X])]^2 + \text{Var}(X) [g'(E[X])]^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\text{Var} (g(X)) = \text{E} \left[[g(X)]^2 \right] - \left[g(\text{E}[X]) \right]^2 \approx \text{Var} (X) \left[g'(\text{E}[X]) \right]^2 \quad (3.75)$$

de donde se obtiene la segunda parte del resultado. ■

Corolario 3.13. *Si se usa el teorema anterior con $g = \log$ se obtiene*

$$\text{E} [\log(X)] \approx \log (\text{E}[X]) \quad (3.76)$$

$$\text{Var} (\log(X)) \approx \frac{\text{Var} (X)}{(\text{E}[X])^2} \quad (3.77)$$

Considerando las propiedades de \hat{h} descritas en las proposiciones ?? y ??, y usando la aproximación del corolario ??, se define al estimador Y como

$$Y(t, \omega) = \log \left(\hat{h}(t, \omega) \right) \quad (3.78)$$

el cual satisface las siguientes propiedades

$$\text{E} [Y(t, \omega)] \approx \log (h(t, \omega)) \quad (3.79)$$

$$\text{Var} (Y(t, \omega)) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^4 d\theta \quad (3.80)$$

Cabe destacar que la varianza de Y no es independiente de h , sino que sólo es *aproximadamente independiente*; en otras palabras, la varianza de Y es afectada de forma más notoria por la forma del estimador que por la forma de la cantidad a estimar. La *forma* que tiene la varianza de Y –aproximadamente constante– sugiere que puede escribirse como

$$Y(t, \omega) = \log \left(\hat{h}(t, \omega) \right) + \varepsilon(t, \omega) \quad (3.81)$$

Debido a la naturaleza discreta de los datos, conviene construir una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias, equiespaciado en el tiempo por Δ_t y en las frecuencias por Δ_{ω} . Si dichas distancias son suficientemente grandes como para que se cumplan las condiciones en ??, entonces los valores de Y sobre la cuadrícula serán

aproximadamente no-correlacionados.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^2 |\Gamma_{\kappa}(\theta + \Delta_{\omega})|^2 d\theta &\approx 0 \\ \frac{1}{\Delta_t} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |w_{\tau}(t)| dt &\approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t + \Delta_t, \omega + \Delta_{\omega})) \approx 0 \quad (3.82)$$

Así entonces, sea $\{(t_i, \omega_j) \in \mathcal{T} \times [-\pi, \pi] | i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\}$ la cuadrícula descrita, con $|t_i - t_{i+1}| = \Delta_t$ y $|\omega_j - \omega_{j+1}| = \Delta_{\omega}$. Se construye una versión discretizada del estimador Y como

$$Y_{i,j} := \log(\hat{h}(t_i, \omega_j)) \quad (3.83)$$

la cual satisface la versión discretizada de la expresión ??

$$Y_{i,j} \approx \log(h(t_i, \omega_j)) + \varepsilon_{i,j} \quad (3.84)$$

donde

$$\text{E}[\varepsilon_{i,j}] \approx 0 \quad (3.85)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{i,j}) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^4 d\theta [\delta(i, i_0) \delta(j, j_0)] \quad (3.86)$$

Una vez descrito formalmente el efecto del logaritmo como estabilizador de \hat{h} , conviene describir el efecto de la estacionariedad débil sobre Y . Con base en la proposición ??, si el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es débilmente estacionario **entonces**

$$h(t_1, \omega_j) = h(t_2, \omega_j) = \dots = h(t_I, \omega_j) \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.87)$$

condición que puede reescribirse en términos de Y como

$$\text{E}[Y_{1,j}] = \text{E}[Y_{2,j}] = \dots = \text{E}[Y_{I,j}] \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.88)$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$\text{E}[\varepsilon_{1,j}] = \text{E}[\varepsilon_{2,j}] = \dots = \text{E}[\varepsilon_{I,j}] \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.89)$$

Sin embargo, la expresión en ?? puede deducirse directamente de las propiedades

Cuadro 3.1: Sumas de cuadrados en la prueba PSR

Descripción	Estadístico	Gr. de libertad
Efecto tiempo	$S_T = J \sum_{i=1}^I \hat{\alpha}_i^2$	$I - 1$
Efecto frecuencia	$S_F = I \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j^2$	$J - 1$
Interacción	$S_{I+R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(Y_{i,j} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j - \hat{\mu} \right)^2$	$(I - 1)(J - 1)$
Total	$S_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(Y_{i,j} - \hat{\mu} \right)^2$	$IJ - 1$
Prom. general	$\hat{\mu} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	
Prom. tiempo	$\hat{\alpha}_i = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j} - \hat{\mu}$	
Prom. frecuencia	$\hat{\beta}_j = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j} - \hat{\mu}$	

de Y en caso de que la expresión en ?? es cierta. En consecuencia, rechazar ?? implica rechazar ??, lo cual aporta evidencia para rechazar ??; si se rechaza ?? entonces puede rechazarse que el proceso sea estacionario, pero un no-rechazo no garantiza que el proceso sea estacionario.

El objetivo de la prueba puede fijarse en decidir si puede rechazarse la condición en ??, en cuyo caso se podrá concluir que el proceso **no** es débilmente estacionario. Con base a la expresión en ??, la prueba puede formularse en términos de un ANOVA de dos vías (ver sección ??); para ello, se propone como hipótesis nula que Y sigue el modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (3.90)$$

donde ε es como en la expresión ??; se consideran a los parámetros α, β, γ normalizados de forma que

$$\sum_{i=1}^I \alpha_i = \sum_{j=1}^J \beta_j = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \gamma_{i,j} = 0 \quad (3.91)$$

En la tabla ?? se muestran las sumas de cuadrados asociadas al ANOVA. Dentro del contexto de la estimación del espectro evolutivo, los parámetros involucradas pueden interpretarse como

μ Promedio de Y sobre tiempo y frecuencia.

α Efecto lineal sólo del tiempo, $\frac{\partial}{\partial t} Y - \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} Y$.

β Efecto lineal sólo de la frecuencia, $\frac{\partial}{\partial \omega} Y - \frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} Y$.

γ Efecto lineal de tiempo y frecuencia, $\frac{\partial^2}{\partial t \partial \omega} Y$.

Ahora bien, la expresión ?? puede formularse como hipótesis para contrastarse contra H_0 , de la forma

$$H_A : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j} \quad (3.92)$$

Por simplicidad conviene considerar, como paso intermedio, una segunda prueba de hipótesis con una hipótesis *intermedia encadenada*

$$H_{A_0} : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j} \quad (3.93)$$

Para la prueba de hipótesis H_0 vs H_{A_0} se usa el siguiente estadístico de prueba

$$\frac{S_{I+R}/(I-1)(J-1)}{S_0/(IJ-1)} \sim F((I-1)(J-1), IJ-1) \quad (3.94)$$

En caso de que se rechace a H_0 , se procede a realizar la prueba de hipótesis H_{A_0} vs H_A , para lo cual se usa el siguiente estadístico de prueba

$$\frac{S_T/(I-1)}{S_0/(IJ-1)} \sim F(I-1, IJ-1) \quad (3.95)$$

Si se rechazan H_0 y H_{A_0} (en ese orden), y se acepta H_A , entonces puede decirse que el registro corresponda a una observación de un proceso débilmente estacionario; por simplicidad, se dirá simplemente que la observación *es* estacionaria.

Es importante enfatizar que, en el contexto de la estimación del espectro evolutivo, los resultados de la ANOVA adquieren una interpretación un tanto diferente a la usual: cuando el estadístico de prueba ocurre en la región de rechazo entonces se acepta que el *efecto* del tiempo es estadísticamente significativo, y en consecuencia se acepta H_0 y se rechaza H_{A_0} . En el contraste de H_{A_0} contra H_A ocurre lo mismo.

Lo más común es rechazar la hipótesis nula –típicamente interpretada como un efecto negligible para un factor de interés– si el estadístico de prueba supera un cierto valor umbral; en el caso de la prueba de PSR tal situación se invierte porque su hipótesis nula es un modelo general del cual se desean *eliminar* ciertas variables cuyo efecto es negligible. Todo este asunto se resuelve sencillamente reportando, el lugar del p -valor para el estadístico de prueba, el complemento a 1 de dicho valor.

Cabe mencionar que en gran parte del trabajo se usará la implementación de la

prueba de PSR hecha por Constantine y Percival para el lenguaje de programación R [?]. En la siguiente subsección se muestra el uso de la prueba de PSR sobre dos ejemplos, y se compara la implementación en R.

3.4.1. Ejemplos

El procedimiento de la prueba de PSR será usado primeramente en un proceso estocástico construido analíticamente para exhibir algunas características de interés (estacionariedad local); por fines ilustrativos se fingen desconocidas estas propiedades. Posteriormente será usado un fragmento arbitrario de registro de PSG para una derivación arbitraria; esto con el fin de mostrar el método sobre un conjunto de datos con propiedades desconocidas.

Como primer ejemplo se construye al proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ como

$$Z(t) = \frac{1}{\sqrt{\psi(t)}} \int_{t-\psi(t)/2}^{t+\psi(t)/2} dW(u) \quad (3.96)$$

donde $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un proceso de Wiener y la función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es como sigue

$$\psi(t) = \frac{1}{2} (\tanh(t) + 1) \quad (3.97)$$

El que el proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sea construido de forma parecida a un proceso medias móviles sugiere que tiene propiedades similares, con algunas *complicaciones* debido a que depende del tiempo. En particular se usarán las mismas técnicas para calcular su valor esperado y núcleo de covarianza; con respecto al valor esperado:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(t)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}} \int_{t-\psi(t)/2}^{t+\psi(t)/2} dW(u) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\psi(t)}} \int_{t-\psi(t)/2}^{t+\psi(t)/2} \mathbb{E}[dW(u)] = 0 \end{aligned}$$

posteriormente, respecto al núcleo de covarianza:

$$\begin{aligned}
 R(t, s) &= E [Z(t)Z(s)] \\
 &= E \left[\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}\sqrt{\psi(s)}} \int_{t-\psi(t)/2}^{t+\psi(t)/2} dW(u) \int_{s-\psi(s)/2}^{s+\psi(s)/2} dW(v) \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\psi(t)\psi(s)}} E \left[\int_{\Omega_t \cap \Omega_s} du \right] \\
 &= \max \left\{ \frac{\psi(t) + \psi(s) - 2|t - s|}{2\sqrt{\psi(t)\psi(s)}}, 0 \right\}
 \end{aligned}$$

donde $\Omega_t = [t - \psi(t)/2, t + \psi(t)/2]$, y similarmente para Ω_s . Con base a lo anterior, se puede deducir trivialmente que $\text{Var}(Z(t)) = R(t, t) = 1$.

Se concluye que el proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es de media 0 y varianza finita, pero no es débilmente estacionario porque no admite una función de autocorrelación. Como su núcleo de covarianza es continuo en la diagonal $t = s$, el proceso es estocásticamente continuo. Por simplicidad expositiva, se supondrá *sin más* que $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es un proceso semi-estacionario.

En la figura ?? se muestra una realización de $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$; el proceso fue discretizado usando $\Delta_Z = 1/1000$ en el intervalo $[-3.5, 3.5]$, y posteriormente se reescaló el tiempo para usar $\Delta_Z = 1$. Conviene mencionar que este proceso fue construido para exhibir un comportamiento muy particular, que es *visible* en su realización y en su núcleo de covarianza:

- Si $0 \ll t$, entonces $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es aproximadamente un proceso medias móviles.
- Si $0 \gg t$, entonces $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es aproximadamente un proceso ruido blanco.

Una vez expuestas las características del proceso $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, pero no su espectro evolutivo, se procede a aplicarle la prueba de PSR.

Primer ejemplo

Como primer paso se calcula el estimador de doble ventana, \hat{h} , según la definición ??; este estimador será calculado en una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias. para una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias. De manera concreta

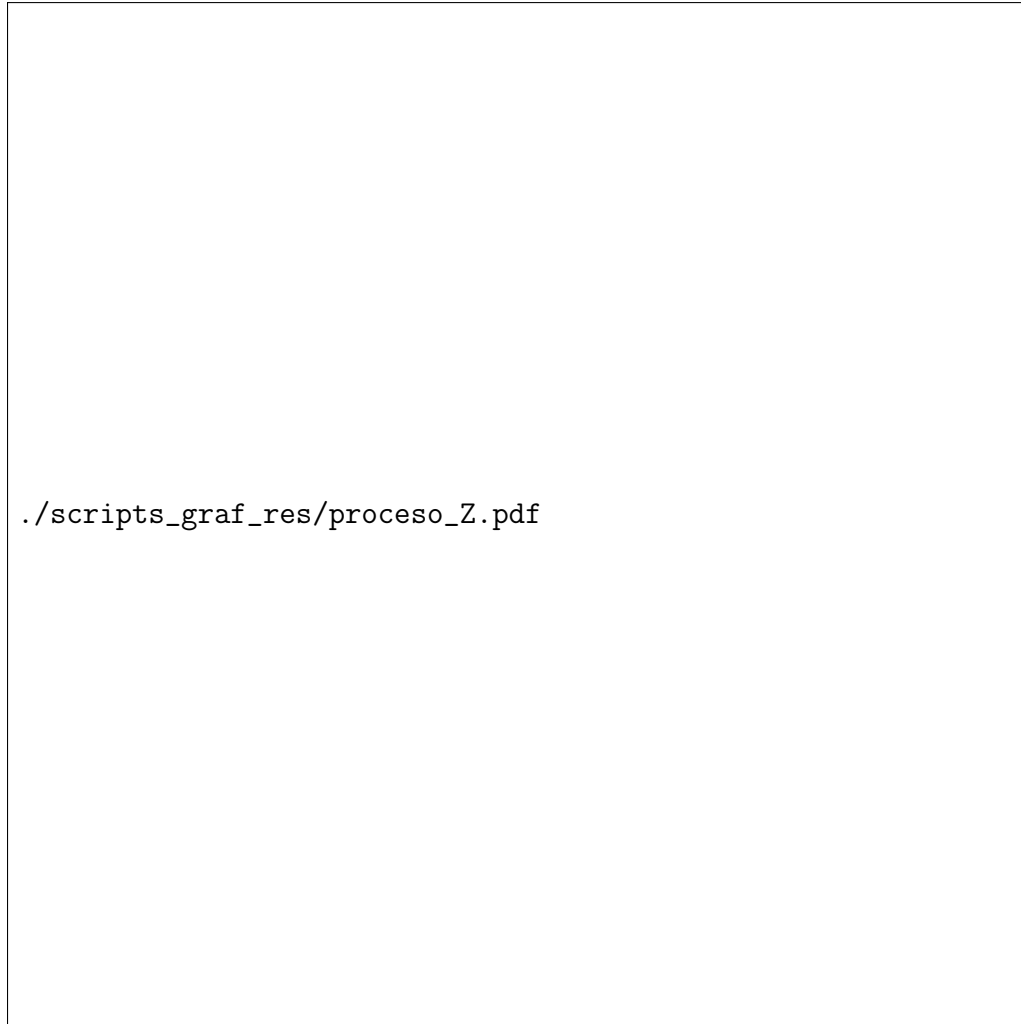


Figura 3.2: Realización del proceso estocástico $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, usado para ejemplificar el procedimiento de la prueba de PSR. Las regiones sombreadas indican la segmentación usada para dicha prueba.

en este ejemplo, la malla es construida usando $\Delta_t = 1000$ y $\Delta_\omega = 50$, con un total de 35 puntos. Por simplicidad, conviene escribir nuevamente la expresión para \hat{h}

$$\hat{h}(\omega, t) = \sum_{u=T-t}^t w_\tau(u) |U(\omega, t-u)|^2 \quad (3.98)$$

donde

$$U(t) = \sum_{u=T-t}^t g(u) X(t-u) \quad (3.99)$$

En este ejemplo particular, se usa la ventana de Bartlett-Priestley, k_{BP} , para cubrir el papel de g y w_τ ; esta función es tomada del cuadro ?? y escalada adecuadamente.

$$g_\tau(u) = w_\kappa(u) = \frac{1}{G_{BP}} k_{BP}(u/500) \quad (3.100)$$

donde

$$k_{BP}(u) = \begin{cases} \frac{3}{(\pi u)^2} \left[\frac{\text{sen}(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \right] & , |u| \leq 1 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (3.101)$$

$$G_{BP} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[k_{BP}(u/500) \right]^2 du \quad (3.102)$$

Bajo estas instrucciones es claro cómo calcular los valores de \hat{h} y $Y = \log(\hat{h})$; estos valores se muestran en el cuadro ?. Con fines de claridad, en la figura ? se enfatiza esquemáticamente la interpretación que tienen dichas cantidades.

A partir de los datos del cuadro ? efectúa el ANOVA de dos vías usando los estimadores descritos en el cuadro ?. Primeramente se calcula el promedio global $\hat{\mu} = -9.345$; posteriormente se calculan $\hat{\alpha}_i$ y β_j para $i = 1, \dots, 7$ y $j = 1, \dots, 6$, respectivamente. Después se calculan las sumas de cuadrados, estas últimas reportadas en el cuadro ?. Finalmente se calculan los estadísticos de prueba

$$F_{I+R} = \frac{S_{I+R}/(I-1)(J-1)}{S_0/(IJ-1)} = 0.589 \quad (3.103)$$

$$F_T = \frac{S_T/(I-1)}{S_0/(IJ-1)} = 0.112 \quad (3.104)$$

Se calcula el p-valor de los estadísticos de prueba comparándolos con las distri-

3.4. PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

Cuadro 3.2: Promedios del estimador Y para el primer ejemplo

	Frecuencia ω_i						$\hat{\alpha}_i$
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	
$i = 1$	-4.504	-5.328	-8.623	-6.393	-8.953	-9.340	2.155
$i = 2$	-1.418	-7.526	-8.463	-11.453	-9.392	-9.381	1.406
$i = 3$	-1.315	-9.812	-10.681	-11.370	-12.126	-11.837	-0.179
$i = 4$	1.462	-9.852	-10.176	-10.732	-11.823	-11.880	0.511
$i = 5$	-1.159	-11.056	-12.269	-14.145	-12.297	-12.965	-1.304
$i = 6$	0.221	-10.473	-11.111	-12.568	-13.392	-14.044	-0.883
$i = 7$	-2.713	-11.255	-12.739	-13.670	-13.560	-12.373	-1.707
$\hat{\beta}_j$	7.998	0.016	-1.235	-2.131	-2.304	-2.344	

Cuadro 3.3: ANOVA de la prueba PSR para el primer ejemplo

Efecto		GL	Total	Promedio	F	p	$1 - p$
S_T	Tiempo	6	73.834	12.306	0.589	0.26290	0.73710
S_F	Frecuencia	5	565.891	113.178	5.420	0.99935	0.00065
S_{I+R}	Interacción	30	70.247	2.342	0.112	0.00000	1.00000
S_0	Total	34	709.972	20.882			

GL = Grados de libertad

buciones de los estadísticos: F de Fisher con $(6, 34)$ y $(30, 34)$ grados de libertad, respectivamente. Como se mencionó, la decisión de la prueba de PSR en base a los p-valores es *opuesta* a los ANOVA usuales: como hay suficiente información para afirmar que $F_{I+R} \neq 0$, entonces se acepta que el proceso es no-estacionario. Cabe recalcar que la decisión sobre estacionariedad se hace aún sin consultar a F_T .

Para el análisis anterior se usó una cantidad muy baja de puntos con el fin de ilustrar claramente cómo son procesados estos datos. Una versión más realista requiere usar la mayor cantidad de puntos posibles en el tiempo y las frecuencias, pero que sean tales que se cumplan las aproximaciones usadas; en principio no existen criterios para hallar estos parámetros de forma óptima, al menos no si las propiedades de los datos son desconocidas.

En la implementación del comando `stationarity` se sugiere que el número de bloques sea $\lfloor \log_2(N) \rfloor$, con N el número total de puntos considerados y $\lfloor \bullet \rfloor$ la función parte entera, y $\Delta_\omega = 6$.



Figura 3.3: Algunos pasos en el cálculo de Y , el logaritmo del estimador de doble ventana, sobre la malla de puntos $\{t_1, t_2, \dots, t_I\} \times \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J\}$. **A.** Realización del proceso estocástico $\{Z(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, fragmentada en bloques de longitud Δ_t . Los puntos en el i -ésimo bloque son usados para calcular $Y_{i,j}$ en los puntos $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J$. **B.** Estimador Y , calculado para los bloques definidos anteriormente. Por fines expositivos se grafica a $Y(t_i, \bullet)$ para diferentes valores de ω , y posteriormente se marcan con puntos los valores correspondientes a la malla.

Cuadro 3.4: Promedios del estimador Y para el segundo ejemplo

	Frecuencia ω_i						$\hat{\alpha}_i$
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	
$i = 1$	-0.858	-9.903	-11.987	-12.942	-11.632	-11.962	-0.616
$i = 2$	1.709	-10.475	-11.567	-12.401	-12.267	-13.068	-0.413
$i = 3$	3.701	-8.860	-9.321	-10.844	-11.392	-12.501	1.062
$i = 4$	3.236	-9.175	-10.387	-12.345	-14.106	-12.106	0.118
$i = 5$	1.474	-10.461	-11.116	-12.332	-12.835	-13.399	-0.513
$i = 6$	1.442	-9.301	-10.257	-10.947	-12.500	-11.852	0.362
$\hat{\beta}_j$	11.049	-0.431	-1.508	-2.704	-3.190	-3.216	

Segundo ejemplo

Como segundo ejemplo se usa un fragmento arbitrario de registro de PSG; en particular se ha usado una época² de 30 segundos de duración, correspondiente a la derivación Fp2 registrada en el participante MHJ durante sueño MOR; en la sección ?? se explica a detalle el significado de estos términos. El registro fue efectuado usando una frecuencia de muestreo de 512 Hz ($\Delta_X = 1/512$), de modo que se contemplan 15,360 puntos; éstos mismos puntos son graficados en la figura ??.

Cabe destacar que este fragmento de registro no fue elegido para representar alguna característica en particular sino, más bien, el comportamiento general de los registros de PSG durante sueño MOR.

El estimador Y es calculado de la misma forma que en el ejemplo anterior; en esta ocasión simplemente se reportan los resultados en las tablas ?? y ?. Para estos datos se calcula que $\hat{\mu} = -9.265$; aunque este dato no se reporta en las tablas, efectivamente es importante.

Tras revisar los estadísticos de prueba se decide, como se esperaba intuitivamente, que el fragmento de registro es no-estacionario.

²La palabra ‘época’ es usada como sinónimo de ‘fragmento de registro’ por concordancia con la literatura sobre registros electrofisiológicos.

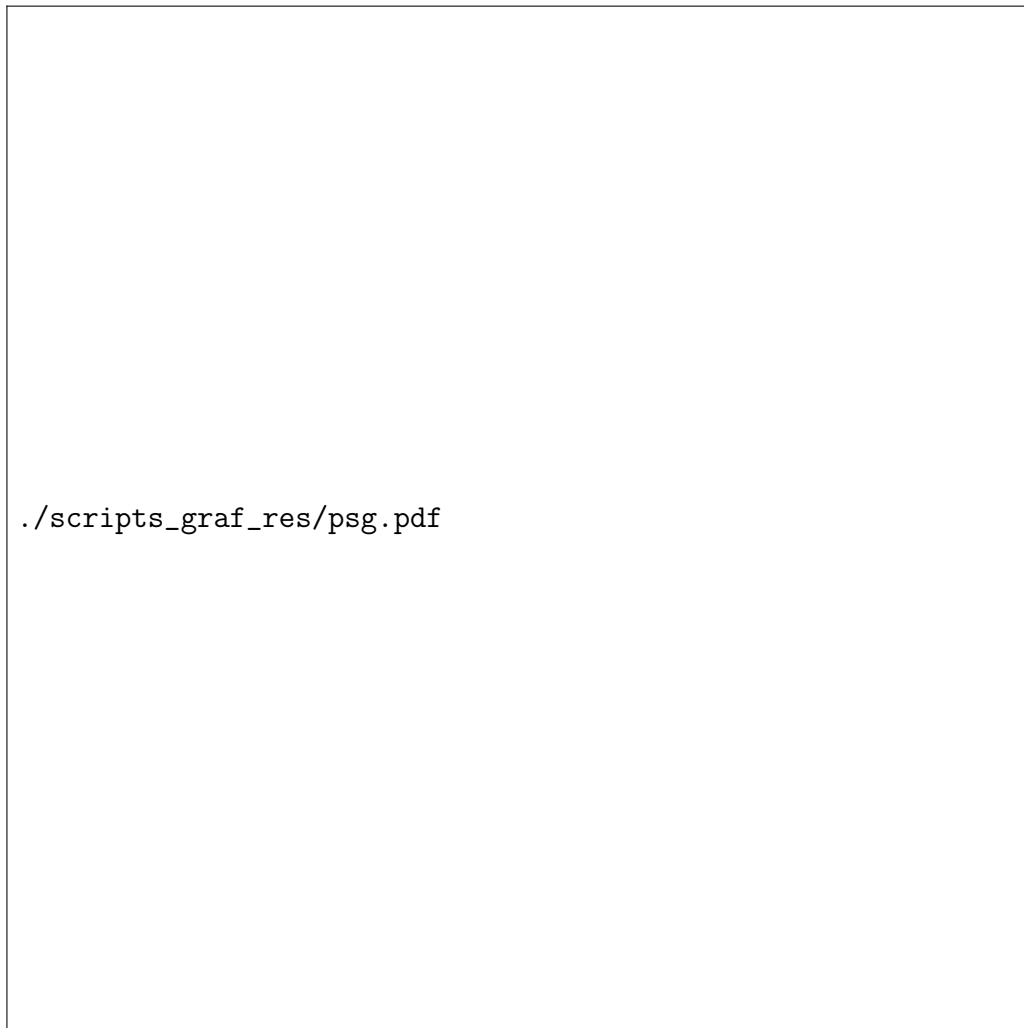


Figura 3.4: Fragmento de registro de PSG, usado para ejemplificar el procedimiento de la prueba de PSR. El fragmento, referido como época, corresponde a 30 segundos registradas con una frecuencia de muestreo de 512 Hz; posteriormente fue reindexado.

Cuadro 3.5: ANOVA de la prueba PSR para el segundo ejemplo

Efecto		GL	Total	Promedio	F	p	$1 - p$
S_T	Tiempo	5	12.520	2.504	0.093	0.00721	0.99279
S_F	Frecuencia	5	914.235	182.847	6.774	0.99984	0.00016
S_{I+R}	Interacción	25	17.998	0.720	0.027	0.00000	1.00000
S_0	Total	35	944.753	26.993			

GL = Grados de libertad

3.5. Estacionariedad local

Conviene destacar que el objetivo central del presente trabajo es utilizar las herramientas descritas anteriormente (en especial la prueba de PSR) sobre registros de PSG en adultos mayores. Para que los análisis sean significativos, desde el punto de vista fisiológico, deben resaltarse algunos *comportamientos* esperados; en otras palabras, algunas propiedades de estas señales se deben considerar conocidas a priori, con base a lo que se ha reportado en la literatura. De forma particular, se ha propuesto que el cerebro es un mecanismo con una gran *complejidad* asociada [?].

Bajo este contexto se entiende a la complejidad como la presencia de características propias de un conjunto de elementos, que inducen estados independientes de los elementos individuales, pero que dependen *críticamente* de parámetros macroscópicos. Un ejemplo sencillo es la solidificación del agua, que depende principalmente de la temperatura y permite múltiples estados de equilibrio macroscópicos (la forma del hielo) que no están determinados por las partículas de agua; cerca de la temperatura de congelamiento el agua pasa de líquido a sólido, sin permitir estados intermedios.

La complejidad del cerebro se deduce de la existencia de múltiples niveles de organización, que corresponden a comportamientos cualitativamente diferentes –los cuales deben ser modelado usando herramientas que respeten tales diferencias. Como ejemplo pueden mencionarse los campos eléctricos inducidos por neuronas individuales y por grandes conjuntos de neuronas; estos dos fenómenos están estrechamente relacionados de manera intuitiva, pero cualitativamente son abismalmente diferentes. En el libro “*Mathematical Foundations of Neuroscience*”, por G. Bard Ermentrout [?], se describe a detalle cómo los potenciales para neuronas pueden modelarse satisfactoriamente mediante el sistema de ecuaciones diferenciales de Hodgkin–Huxley; en contraparte, los *potenciales de campo* responden mejor al sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas Wilson–Cowan.

Para el caso muy concreto del EEG, se ha propuesto la complejidad de la actividad eléctrica cerebral se traduce en la orquestación de múltiples estados de actividad a lo largo del tiempo [?]. En otras palabras, el EEG es una señal compleja que está formada por una gran variedad de fragmentos *simples*; en concreto, se espera que estos fragmentos sean débilmente estacionarios. Concordando con la definición formal hecha sobre el tema por Rainer Dahlhaus [?], este fenómeno será referido como estacionariedad local.

Bajo el supuesto de la estacionariedad local el EEG es un fenómeno globalmente heterogéneo pero localmente homogéneo; en consecuencia el EEG es globalmente no-estacionario, pero es posible segmentarlo en fragmentos que son débilmente estacionarios. Dentro de esta línea de pensamiento se espera que los fragmentos de EEG débilmente estacionarios –o que clasifiquen como estacionarios según la prueba de PSR, en concreto– se *agrupen* replicando algún nivel de organización.

De manera pragmática y de acuerdo a los protocolos (ver más adelante), los registros de PSG son segmentados en ventanas sin traslape con una duración fija decidida a priori. Así entonces, se espera que el efecto de la estacionariedad local se más notorio al cambiar el tamaño de tales segmentos; este procedimiento se ilustra en la figura ??, así como el efecto esperado sobre la clasificación de estacionariedad.

Cabe destacar que bajo este supuesto, surge la pregunta sobre hasta qué punto es posible es posible modelar efectivamente al EEG como señales aleatorias con propiedades *simples*. En varios trabajos pioneros [?, ?, ?, ?] se demuestra experimentalmente que el EEG puede considerarse estacionario si se usan segmentos de hasta 20 segundos, e incluso se sugiere que esta cantidad puede cambiar para personas con daños neuronales. Esta pregunta es explorada en el presente trabajo repitiendo la prueba de PSR para diferentes tamaños de ventana. Es importante considerar, debido a la –posible– variabilidad en el tiempo, el efecto de tomar una cantidad menor de puntos es cualitativamente diferente al efecto de, por ejemplo, considerar una frecuencia de muestreo menor.

Por ejemplo, considérese al primer ejemplo de la sección anterior, el proceso $\{Z(t)\}$, que es aproximadamente un proceso ruido blanco para $t \ll 0$ y aproximadamente un proceso medias móviles para $t \gg 0$; este proceso es localmente estacionario por diseño. En la figura ?? se efectúa esta clasificación repetida para diversos tamaños de ventana, revelando que los fragmentos pequeños son clasificados como estacionarios. Este efecto era de esperarse por la descripción de estacionariedad local: un fenómeno que es globalmente heterogéneo pero que está *compuesto* por fragmentos homogéneos.

Posteriormente se replica este análisis para los registros de PSG en el total de su duración. Los tamaños de ventana se tomaron de la forma 30×2^n segundos, por compatibilidad con las ventanas de 30 segundos (recomendación protocolaria de la AASM); para más detalles sobre el procedimiento, ver la sección ?. Conviene mencionar que esta metodología es similar a aquella usada por McEwen en 1975 [?].

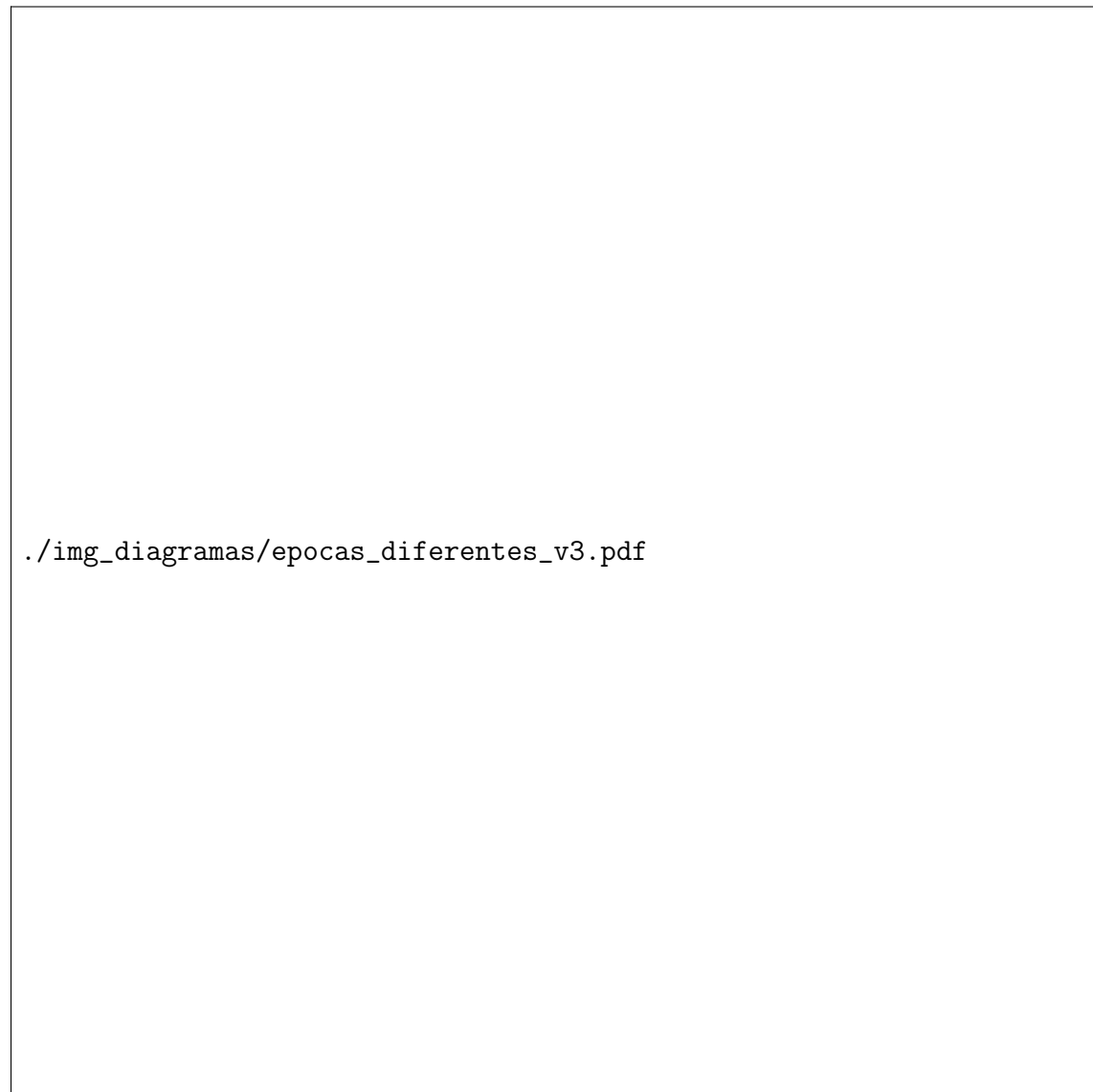


Figura 3.5: Efecto esperado del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad, bajo el supuesto de estacionariedad local. Suponiendo que la señal es heterogénea, pero que está *compuesta* por múltiples fragmentos homogéneo de duración corta, entonces al disminuir el tamaño de ventana se espera *hallar* con mayor frecuencia estos fragmentos homogéneos. Adaptado de [?].



Figura 3.6: Efecto de la estacionariedad local sobre la clasificación repetida de estacionariedad, según la prueba de Prieslley-Subba Rao, usando diferentes tamaños de ventana. En la parte superior se muestra a la señal usada ejemplo, una realización para un proceso estocástico localmente estacionario cuyas propiedades se describen en el texto. En la parte inferior se muestran las ventanas usadas para segmentar la señal, las cuales fueron coloreadas según si tal fragmento de señal fue clasificado como estacionario. Puede notarse cómo la señal es efectivamente estacionaria, pero algunos fragmentos pequeños son clasificados como estacionarios.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 4

Deterioro cognitivo y sueño

En este capítulo se exponen varios temas para poder entender adecuadamente al sujeto de estudio (registros de PSG en adultos mayores), así como el contexto y la motivación para su estudio (el Posible Deterioro Cognitivo Leve, PDCL, en adultos mayores). Se responden, de manera muy breve, las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el Deterioro Cognitivo Leve y cómo se diagnostica?
- Clínicamente, ¿qué es el sueño y cómo se estudia?
- ¿Cómo se relacionan el Deterioro Cognitivo Leve y el sueño?

Para simplificar la exposición, se considera a la Electroencefalografía como a la técnica principal para el estudio de la actividad cerebral; con la misma intención, se describe primero al sueño (desde el punto de vista clínico) y posteriormente su posible utilidad como marcador para el DCL.

El lector interesado en una exposición amplia sobre técnicas para el estudio del cerebro, puede referirse al libro *“Medical Instrumentation. Applications and Design”* por John Webster [?]; en contraparte, para obtener más información sobre el EEG es recomendable el libro *“Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields”* por Ernst Niedermeyer [?]. Para indagar más sobre las pruebas neuropsicológicas y su uso diagnóstico, se recomienda el libro *“Guía para*

el diagnóstico neuropsicológico” por Ardila y Ostrosky [?]. Si se desean revisar a detalle los protocolos para registrar la PSG, o aquellos para clasificar las etapas de sueño, debe consultarse el Manual de la AASM [?]. Para aprender más sobre el sueño, así como los procesos fisiológicos y psicológicos asociados, puede consultarse el libro *“Psicofisiología del sueño”* de Corsi-Cabrera [?].

4.1. Deterioro Cognitivo Leve

El envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [?]. Como consecuencia, los **adultos mayores** son especialmente propensos al deterioro cognitivo; por precisión, en lo siguiente se usará el término *adulto mayor* para referirse a individuos con 60 o más de edad años. Cabe destacar que la funcionalidad del adulto mayor no depende meramente de la edad, sino que está relacionada con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [?].

La **demencia**, considerada como el estado más grave del deterioro cognitivo, es definida en el Manual Diagnóstico y Estadístico de Trastornos Mentales (DSM-V, por sus siglas en inglés y la versión consultada) como sigue:

“Un síndrome que consiste en el desarrollo de déficits cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo.

Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente.”[?]

Hasta el momento se considera que la demencia es irreversible, y no se han identificado curas [?]. Debido a ello, ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El diagnóstico temprano es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome [?].

Bajo esta línea de pensamiento se considera al **Deterioro Cognitivo Leve** (DCL) como una etapa precursora de la demencia, y que es definida como sigue:

“Una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia.” [?]

Para fines de la definición anterior, se entiende por *síndrome focal* al daño en una estructura nerviosa específica, cuya causa es conocida (como una hemorragia o una embolia) y cuyo inicio sea inmediato y evidente.

El DCL puede detectarse por medio de diversos métodos, que pueden ser complementarios entre sí. La forma de detección más simple es la percepción de fallas en la memoria por parte del individuo o de otro. La percepción subjetiva del deterioro cognitivo *esperado* por el envejecimiento provoca que esta forma de detección sea poco fiable. Una alternativa más formal consiste en la entrevista clínica de un especialista, la aplicación de cuestionarios sobre dificultades en la memoria, o incluso el uso de pruebas neuropsicológicas.

En psicología, los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [?]. Se considera que a través de estas herramientas es posible declarar objetivamente las deficiencias cognitivas o conductuales de los individuos, así como su severidad y características.

De forma auxiliar para el diagnóstico del DCL, se pueden efectuar análisis genéticos, químicos, de imágenes cerebral, entre otros que estudien el sistema nervioso central. Se espera que dichas técnicas, en combinación con las pruebas neuropsicológicas, permitan diagnosticar más acertadamente el DCL y desentrañar los fenómenos neurológicos subyacentes.

Un referente ampliamente usado para el diagnóstico del DCL son los criterios para Alzheimer de la NINCDS–ADRDA, propuestos por el *National Institute of Neurological and Communicative Disorders and Stroke* y la *Alzheimer’s Disease and Related Disorders Association* [?]. Dichos criterios proporcionan protocolos para diagnosticar el Alzheimer y algunas enfermedades relacionadas (entre ellas el DCL), así como afecciones que generan síntomas similares. Desafortunadamente, las pruebas neuropsicológicas contempladas por los criterios de la NINCDS–ADRDA todavía no han sido *validadas* en México, es decir que su efectividad para generar diagnósticos acertados no ha sido verificada para la población mexicana.

Otra prueba neuropsicológica ampliamente extendida es el Mini-Mental State Examination (MMSE), propuesta por Folstein en 1975 [?]. Sin embargo se ha repor-

tado que, en la población mexicana, la prueba MMSE tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de DCL en general, y baja especificidad para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [?]. Para fines del comentario anterior, se entiende por *sensibilidad* a la probabilidad de obtener verdaderos positivos, y por *especificidad* a la probabilidad de obtener verdaderos negativos.

Una tercera opción, a la cual se ha dado gran peso en el presente trabajo, es la prueba neuropsicológica Neuropsi, desarrollada por Ostrosky y colaboradores en la Universidad Autónoma de México (UNAM) [?]. La prueba Neuropsi ha sido validada para diversos grupos poblacionales en México, y se ha confirmado su utilidad para distinguir individuos con diverso grado de deterioro cognitivo.

En el contexto de la detección del DCL, es muy importante realizar un diagnóstico diferencial con respecto a la **pseudodemencia depresiva**, una afección que puede confundirse con el deterioro cognitivo. De acuerdo al manual DSM-V, pseudodemencia depresiva se define como “*un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo*” [?]. Bajo esta línea de pensamiento resulta conveniente decir que, como parte del diseño experimental, se han omitido participantes con síndromes focales, retraso mental, bipolaridad, esquizofrenia, entre otros trastornos de atención y memoria ajenos al deterioro cognitivo. Con base a lo anterior, se omite una discusión más extensa de dicho tipo de afecciones; el lector interesado puede referirse al Manual DSM-V [?].

4.1.1. Probable Deterioro Cognitivo Leve

En el presente trabajo se delimita al DCL por fines de precisión, usando para ello las pruebas neuropsicológicas. Se define operativamente al **Posible Deterioro Cognitivo Leve** (PDCL) como sigue:

“Una disminución significativa de las funciones cognitivas del sujeto con respecto las típicas de su edad y nivel de educación.”

Para fines de la definición anterior, el desempeño de las funciones cognoscitivas en un individuo es medido usando la prueba Neuropsi [?]; se considera que hay un déficit cognoscitivo *significativo* si la puntuación obtenida es menor al umbral predefinido para su grupo de edad y nivel de escolaridad. El umbral recomendado para la prueba Neuropsi debe calcularse como la media menos 3 desviaciones estándar

de los puntajes típicos para individuos de cada grupo de edad y nivel de escolaridad; estos parámetros fueron estimados para la población mexicana por Ostrosky-Solís y colaboradores [?]. En el cuadro ??, bajo la etiqueta *Deterioro cognitivo* se recaban los *puntajes de corte* usados para declarar el PDCL.

La palabra ‘*probable*’ en el PDCL hace alusión a que no constituye un diagnóstico *irrefutable* del DCL. En este sentido, el PDCL puede interpretarse como una condición *necesaria pero no suficiente* para el DCL.

4.1.2. Pruebas neuropsicológicas utilizadas

Dentro del contexto del presente trabajo, conviene describir las pruebas que fueron usadas para detectar el PDCL en adultos mayores. Según la descripción que se dio del DCL, para efectuar su diagnóstico debe verificarse que el individuo cumpla las siguientes características:

1. Que presente un déficit en una o varias funciones cognitivas, pero que éste no cumpla los criterios suficientes para demencia.
2. Que los déficits cognoscitivos detectados no correspondan a síndromes focales,
3. Que el individuo no presente una afección que, sin estar relacionada con el deterioro cognitivo, genere síntomas similares.

Para explorar y en su caso excluir a los sujetos de la investigación, las condiciones 2 y 3 fueron investigadas mediante entrevistas con los participantes y con los resultados de las pruebas que se mencionarán a continuación.

- Short Anxiety Screening Test (SAST)
Evaluación corta para detectar trastornos depresivos y ansiosos. [?]
- Geriatric Depression Scale (GDS)
Evaluación corta para detectar cuadros depresivos en adultos mayores. [?]
- Mini-Mental State Examination (MMSE)
Evaluación escrita relativamente rápida. Permite detectar el deterioro cognitivo, pero no proporciona *muchos* detalles al respecto [?].
- Evaluación Neuropsicológica (Neuropsi)
Evaluación extensiva sobre múltiples dominios. [?]

- Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (KATZ)
Evaluación de la independencia del individuo para realizar tareas básicas de la vida diaria. [?]

4.2. Estudio clínico del sueño

El sueño en el ser humano se considera como un estado de actividad, con propiedades características, y que influye de manera importante en la vigilia. De manera operativa, puede caracterizarse según la siguientes propiedades:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos.
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma.
3. Inmovilidad y relajación muscular.
4. Periodicidad típica circadiana (diaria).
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada.
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, las cuales se *acumulan* en tanto persista la privación de sueño.

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas.

En 1953 Asierinsky y Kleitman reportaron que existen patrones de actividad cerebral marcadamente diferentes durante el sueño, para lo cual usaron la técnica de electroencefalografía (EEG). Con base a dichos estudios, el sueño se divide tradicionalmente en las etapas N y R, también referidas como NMOR y MOR; dichas etapas se distinguen en cuanto cómo se ve el EEG registrado en dichas etapas, así como los procesos fisiológicos que se llevan a cabo en el cerebro. Por simplicidad expositiva, se describen primeramente las características de las fases de sueño según criterios del EEG, y posteriormente se describe la técnica del EEG y sus protocolos. Las características descritas corresponden, a los criterios establecidos por la *American Society of Sleep Medicine* (AASM) [?]; en el cuadro ?? puede encontrarse una exposición más concreta y apegada al Manual de la AASM.

Cuadro 4.1: Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa de sueño		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
W	Vigilia	Ritmo alfa en > 50 % de la época en la región occipital	No	Alto
N1	NMOR 1	Cambio de alfa por AABFM, atenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	<W
N2	NMOR 2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	<W, >R
N3	NMOR 3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 μ V) en > 20 % de la época. Husos de sueño	No	<N2, \approx R
R	MOR	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas agudas	Rápidos	Bajo

AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye, excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres; por *tono muscular* se entiende a la contracción pasiva de los músculos durante el reposo, la cual permite una respuesta voluntaria rápida. En esta fase de sueño las frecuencias cardíaca y respiratoria se vuelven irregulares. El individuo exhibe Movimientos Oculares Rápidos (MOR), razón por la cual la fase R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante al estado de alerta. Estos patrones de actividad cerebral no interrumpen el sueño sino que incrementan el umbral para estímulos externos (qué tan fuerte debe ser un estímulo para afectar al individuo), motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante la fase R se produce la mayoría de las ensoñaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensoñaciones [?].

La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K. Con base en la mayor o menor presencia de estas características, se definen las sub-fases N1, N2, N3. Tradicionalmente se le refiere como **sueño no-MOR** (o NMOR).

4.2.1. Electroencefalografía

La técnica de electroencefalografía consiste en medir la actividad postsináptica (transmisión de impulsos) entre neuronas en la corteza cerebral, lo cual se logra mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo. La corteza cerebral es la capa más exterior del cerebro, y está formada por una fina capa de neuronas piramidales (denominadas así por su forma) altamente conectadas entre sí. Típicamente se asocia a la corteza cerebral con las funciones cognitivas superiores [?]. Conviene enfatizar que el término EEG usualmente se usa para referirse a registros hechos mientras el paciente realiza alguna actividad o se encuentra despierto y en reposo; el registro del EEG durante el sueño, adicional al registro de otras señales, es referido como polisomnografía.

Usualmente los registros de EEG muestran una actividad oscilatoria continua y cambiante, su frecuencia se considera entre 0.5 y 100 Hz. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad mental, mostrando diferencias claras durante vigilia y sueño, o durante quietud y concentración. Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, suele mostrar patrones relativamente organizados, conocidos como **ondas cerebrales**; de forma tradicional, éstos se dividen en cinco grupos (referidos como **bandas**) según su *frecuencia*:

- Delta, 0.5–3.5 Hz
- Theta, 3.5–7 Hz
- Alfa, 7–12 Hz
- Beta, 12–30 Hz
- Gamma, 30–100 Hz

Conviene destacar que diferentes autores han usado límites ligeramente diferentes para las bandas; de la misma forma algunos autores han incluido o excluido bandas, así como subdivisiones de éstas.

Adicionalmente a las ondas cerebrales, en el EEG pueden encontrarse *eventos* visiblemente diferentes de su entorno, con una duración corta (< 1 s) y *formas* características. Dos ejemplos importantes son los **husos de sueño** y los **complejos K**, definidos de manera visual y por su contexto fisiológico [?]; ambos tipos de ondas

son típicas de la etapa N2 y son usadas para distinguirlo, aunque no se consideran ritmos ni pertenecen a las *bandas* descritas anteriormente. En la figura ?? se representa un arquetipo visual de cada una de las etapas, incluyendo los husos de sueño y complejos K.

Para realizar el registro del EEG en una forma estandarizada y comparable, deben indicarse los lugares donde se colocan los electrodos y la forma en que éstos están conectados. En el contexto del presente trabajo, los electrodos fueron ubicados usando las coordenadas del **Sistema 10–20** [?]. En dicho sistema los sitios se ubican en una *cuadrícula* de distancias relativas (medidas en porcentajes), construida respecto a varios puntos del cráneo cuyas posiciones son aproximadamente *constantes* entre individuos:

- El *inion*, un abultamiento en la región posterior del cráneo.
- El *nasión*, la unión del hueso frontal y los huesos nasales del cráneo.
- El *punto preauricular*, arriba del cartílago *tragus* que protege el canal auditivo.

Aunque es perfectamente posible describir textualmente la construcción de las coordenadas en el sistema 10–20, se consideró que es más sencillo mostrarlos gráficamente en la figura ?. En la misma imagen se muestran, de forma esquemática, los lóbulos de la corteza cerebral que dan nombre a las locaciones en el sistema: Frontopolar, Frontal, Temporal, Parietal, Occipital. Si bien no existe un lóbulo central, los electrodos ‘C’ se suelen asociar al surco central; de forma similar, los electrodos ‘A’ corresponden a los lóbulos auriculares (de las orejas), los cuales no presentan una actividad eléctrica importante y son usados como referencia neutra. Los electrodos se etiquetan con números pares en el lado izquierdo, números pares en el derecho y ‘Z’ o punto ‘zero’ en el eje central.

Para hablar sobre la forma en que se conectan los electrodos entre sí, se denota a un par de electrodos como una **derivación** (también referida como *canal*), mientras que el conjunto de derivaciones es un **montaje**. En el contexto del presente trabajo se utilizó un montaje *monopolar* (o también llamado *referencial*) en cual se forman las derivaciones conectando en paralelo a cada electrodo con sus respectivos electrodos auriculares cortocircuitados y se usó como tierra a un electrodo colocado en la parte frontal media.



Figura 4.1: Ejemplos arquetípicos de ondas cerebrales encontradas en registros de EEG durante el sueño. Imagen tomada del libro “*Biological psychology: An introduction to behavioral, cognitive, and clinical neuroscience*” por Rosenzweig y colaboradores [?].

./img_diagramas/cabeza_proporcionada_color_v4.pdf

./img_diagramas/cerebro_1020_v5.pdf

Es importante mencionar que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y que disparan de manera asíncrona, de modo que un periodo de gran actividad cerebral bien puede ser visto en el EEG como una actividad desorganizada y de baja amplitud. En otra perspectiva, el cerebro se encuentra cubierto por las capas meninges, por el líquido encefalorraquídeo, el cráneo y el cuero cabelludo; en suma, los campos eléctricos generados en la corteza cerebral son *víctimas* de una gran difusión espacial. Es por ello que las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendiendo con ello a las señales que son registradas de manera no deseada.

Por ejemplo, los músculos faciales generan campos eléctricos con una frecuencia aproximada de 100 Hz; este tipo de ruidos *persistentes* (referido como *ruido de fondo*) son eliminados usando filtros de banda. En contraparte, los ruidos esporádicos de corta duración, típicamente son señalados *a mano* y provocan que el segmento de registro sea invalidado; por ejemplo, el deslizamiento de un electrodo sobre el cuero cabelludo.

Como comentario, cabe mencionar que el término EEG suele usarse independientemente de la cantidad y posición de electrodos usados para el registro: se pueden usar sólo algunas derivaciones del sistema 10–20, se pueden hacer cambios como el uso de la nariz como referencia neutral, o se pueden añadir más electrodos como en el sistema 10–10 [?].

4.2.2. Polisomnografía

La técnica de PSG consiste en el registro simultáneo durante el sueño de múltiples variables *variables fisiológicas* como respiración, ritmo cardíaco, temperatura, entre otros. La decisión sobre las señales que componen la PSG depende del problema específico que será estudiado. Para ayudar en la clasificación de etapas de sueño, en el contexto del presente trabajo se usó una PSG con registros de actividad ocular, tono muscular y actividad cerebral (EEG).

La actividad ocular es registrada usando la electrooculografía (EOG), una técnica que explota el comportamiento del ojo como un dipolo cuyos polos son la retina y la pupila; los movimientos del ojo inducen variaciones en el campo eléctricos generados por los electrodos de registro. El registro del EOG incluye una derivación para cada

ojo, LOG y ROG, conectado con el electrodo auricular cortocircuitado. Así como con el EEG, la ubicación de los electrodos para EOG se indican en la figura ???. Cabe mencionar que el registro de EOG debe ser interpretado como el movimiento del ojo, proyectado sobre el eje formado por los electrodos de registro.

El tono muscular es vigilado usando la técnica de electromiografía (EMG), la cual *observa* la actividad eléctrica producida por las fibras musculares. Su registro contempla una derivación (EMG) con tres electrodos que actúan eléctricamente como tierra, fase y neutro; la ubicación de estos electrodos se indica en la figura ??. De forma parecida a esta figura, aunque en los músculos del mentón, en el presente trabajo se colocaron dos electrodos referenciados bipolarmente. En el contexto del presente trabajo, se espera observar la *casi desaparición* del tono muscular para la detección del sueño MOR.

A modo de comentario, en la figura ?? se muestra parte de un registro de PSG durante sueño MOR exhibiendo las características descritas previamente.

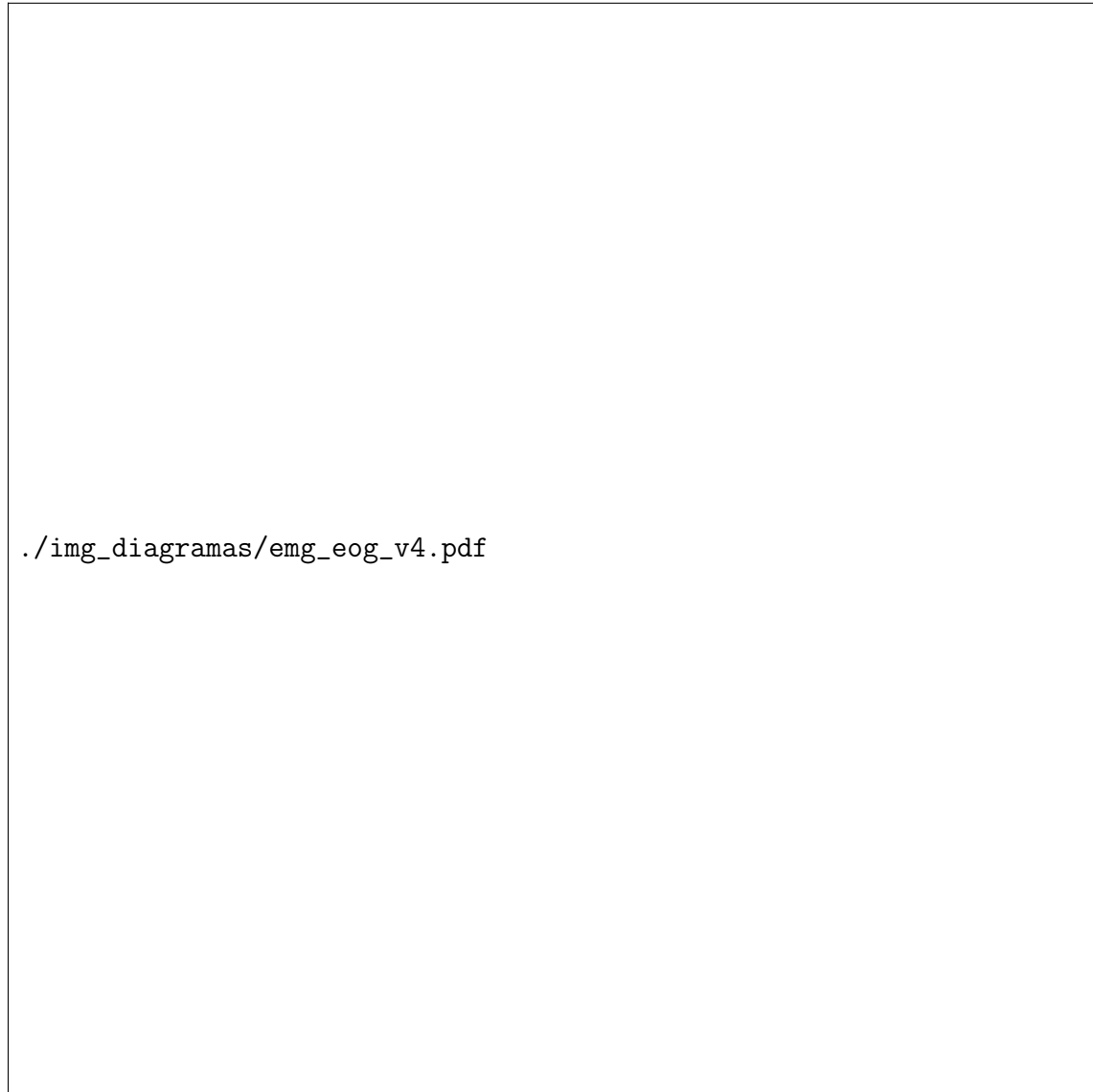


Figura 4.3: Colocación de electrodos para el registro de electrooculografía en ambos ojos (LOG, ROG) y electromiografía (EMG). Las líneas punteadas son paralelas al eje medial, y las líneas discontinuas son perpendiculares al mismo. La línea de referencia para EMG inicia en el punto medial en la barbilla.

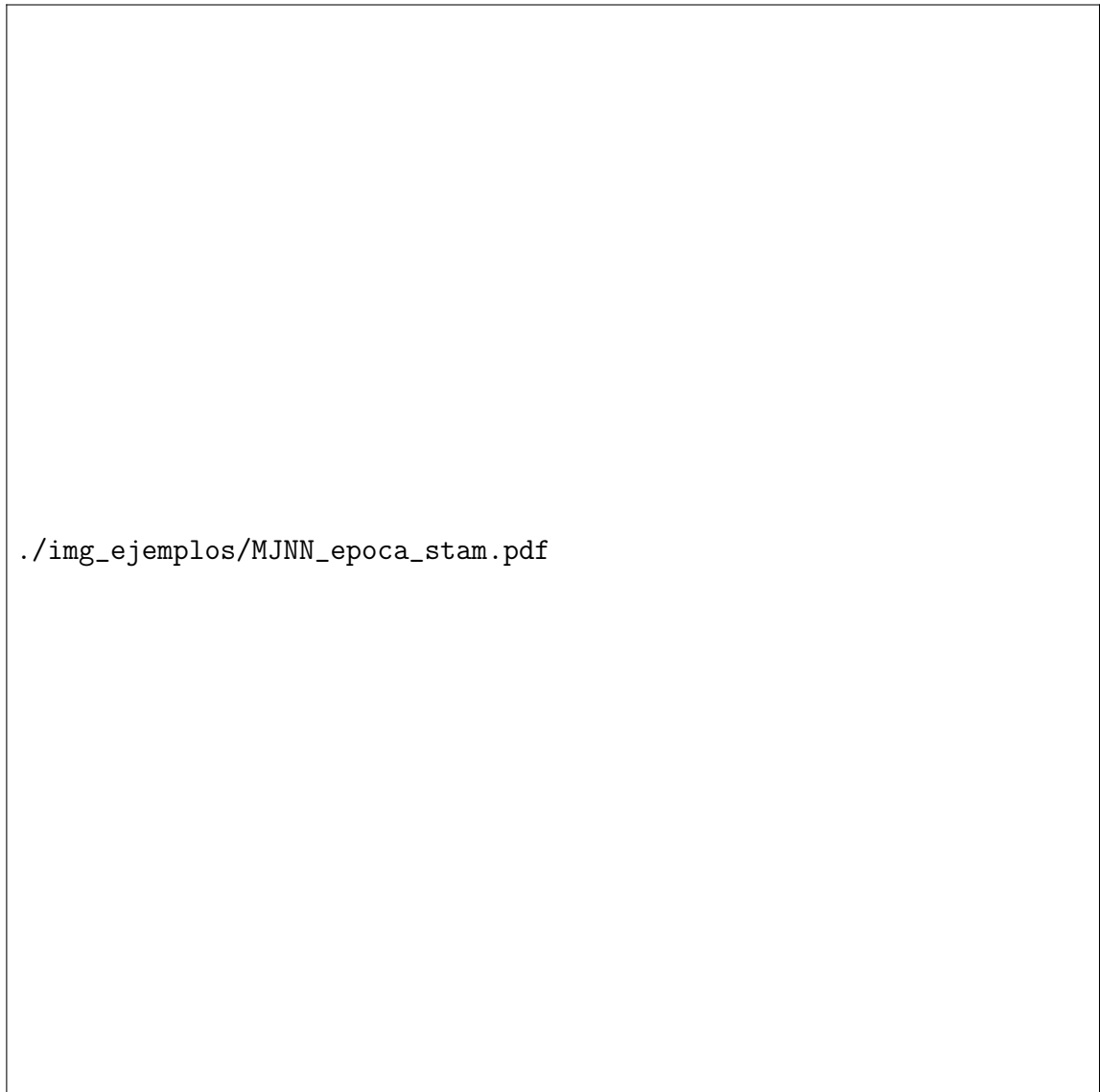


Figura 4.4: Registro de PSG durante sueño MOR. En el margen izquierdo se indica la derivación representada; aunque la mayoría corresponden al EEG, en la porción inferior se contempla al EOG y EMG. Para más detalles sobre la ubicación de las derivaciones, ver el texto y la figura ???. Marca de calibración: vertical, 10 μ V, horizontal, 1 segundo.

4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño

Durante el envejecimiento ocurren diversos cambios fisiológicos y psicológicos que conllevan a modificaciones en el estilo de vida, y particularmente en la rutina de sueño. Hay una vasta cantidad de estudios que han explorado la posible relación entre trastornos del sueño y marcadores *biológicos* de daño neuronal (como la presencia de proteína β -amiloide, marcador de la enfermedad de Alzheimer) o marcadores de actividad cerebral anómala; la tendencia es considerar que los trastornos del sueño contribuyen en el proceso de deterioro cognitivo, o bien que pueden predecirlo con cierto grado de exactitud [?].

Tradicionalmente se considera que el sueño MOR desempeña un papel importante en la cognición, particularmente en la consolidación de la memoria [?]. Se ha reportado que los periodos de aprendizaje inducen una mayor duración del sueño MOR y densidad de movimientos oculares rápidos, y también que la privación del sueño MOR se asocia con deficiencias en tareas de memoria [?, ?].

Se ha propuesto que el mecanismo neurológico asociado a la consolidación de la memoria no es exclusivo del sueño MOR, sino que el conjunto de procesos involucrados se *distribuyen* durante las diferentes etapas del sueño; la porción del proceso ocurrida en sueño MOR corresponde a la *asimilación* de información [?].

Anatómicamente, la consolidación de la memoria está relacionada con el sistema colinérgico¹ en la parte anterior del cerebro [?]. Esto es destacable ya que los circuitos colinérgicos son particularmente vulnerables a degradación estructural durante el envejecimiento y sobre todo en presencia de patologías [?].

¹Circuitos neuronales que usan la acetilcolina como neurotransmisor principal.

CAPÍTULO 5

Metodología y resultados

El presente trabajo surge a partir de una colaboración con el Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, del Instituto de Ciencias de la Salud de la UAEH a cargo de la Dra. Alejandra Rosales Lagarde. Esta colaboración permitió el acceso a los registros obtenidos en un estudio comenzado por la Dra. Rosales y por Vázquez-Tagle durante los años de 2014 a 2017 [?]. Dicha investigación se centró en el estudio del deterioro cognitivo en adultos mayores del estado de Hidalgo, y consideró registros de PSG para evaluar parámetros relacionados al sueño y en especial al sueño MOR. El presente trabajo tiene como objetivo particular analizar con mayor detalle dichos registros.

En este capítulo se describe primeramente la metodología seguida para obtener los registros de PSG. Posteriormente se describe la metodología usada para analizar los registros de PSG, usando las herramientas descritas en el capítulo ??.

Los registros de PSG fueron segmentados en ventanas de 30 segundos, referidas como **épocas**. El análisis de los registros de PSG se llevó a cabo a tres niveles:

- Dentro de cada época.
- Entre las diferentes épocas en un registro.
- Entre los diferentes participantes.

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

El análisis a nivel de época contempla su clasificación según etapa de sueño (limitada a MOR y NMOR), y su clasificación como estacionarias o no estacionarias (usando la prueba de PSR). El uso de épocas como unidades de estudio se justifica por la gran heterogeneidad del sueño nocturno; paralelamente, destaca el supuesto fisiológico de que las etapas de sueño son *parecidas* entre los humanos. En suma, los registros de PSG para un sólo individuo pueden interpretarse como una población de épocas.

El análisis a nivel de registro surge de considerar la heterogeneidad del sueño pero usando al registro entero como unidad de estudio. El tomar las épocas junto con su estructura temporal reveló algunos patrones interesantes de actividad.

Para el análisis entre participantes (divididos en grupos), varias de las características descritas fueron *colapsadas* para constituir características *simples*. Debido a las características de la muestra (ver más adelante), los resultados obtenidos no pueden extrapolarse a la población en general. Los resultados obtenidos, entonces, se presentan como *indicios*.

Los resultados en los tres tipos de análisis fueron repetidos usando la clasificación de estacionariedad obtenida para diferentes tamaños de ventana. Bajo el supuesto de estacionariedad local es, en principio, posible que la estimación de varias características se vea afectada por el tamaño de ventana utilizado; este efecto es cualitativamente diferente que el de la cantidad de puntos considerados. Para mayor información sobre el efecto esperado por la estacionariedad local, ver sección ??.

5.1. Características de los participantes

Los participantes fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia* bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años.
- Diestros (mano derecha dominante).
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales.
- No usar medicamentos o sustancias para dormir.
- Firma de consentimiento informado.

- Terminar el estudio de forma voluntaria en lo que corresponde a la aplicación de pruebas y el registro de la PSG.

Un total de 16 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Con el fin de detectar el DCL en estos pacientes, éstos fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MMSE), detectar cambios en su vida cotidiana (KATZ) y descartar cuadros ansiosos y depresivos (SAST, GDS); para más detalles ver capítulo anterior, sección ???. En la tabla ?? se reportan los puntajes obtenidos por los participantes en dichas pruebas; estos datos deben ser interpretados según los *puntajes de corte* de cada prueba, que se incluyen en el apéndice ??. Se determinó que 11 de los voluntarios no padecen depresión o ansiedad, ni presentan afectaciones significativas en la vida diaria; el participante MGG presenta un cuadro depresivo, pero fue incluido en ausencia de afecciones cognitivas objetivas y porque el sueño presentó una arquitectura de sueño normal, de acuerdo a una experta en neurofisiología quien analizó todos los registros. Cabe señalar que los pacientes con depresión suelen tener una latencia al sueño MOR más corta y en esta paciente fue normal. Debido a motivos técnicos, sólo 9 participantes fueron considerados para el presente trabajo; se reportan únicamente los datos relativos a esos participantes.

Con base en el diagnóstico de PDCL, los 9 participantes fueron divididos en dos grupos: PDCL y CTRL. Es importante mencionar que, bajo las condiciones muestrales, el grupo CTRL no puede fungir satisfactoriamente como grupo control; una descripción más adecuada sería *grupo sin PDCL*.

5.1.1. Registro del polisomnograma

Para efectuar el registro de la PSG, los participantes acudieron a las instalaciones del Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran siesta ese día. Bajo estas condiciones experimentales se garantiza que los registros son representativos del sueño nocturno de cada participante.

El registro per se fue efectuado usando un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Cuadro 5.1: Datos generales de los participantes

	Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SAST	KATZ	GDS
Grupo CTRL								
MJH	F	72	9	113	30	18	0	0
JAЕ	F	78	5	102	28	19	0	5
MGG	F	61	9	114	28	29	1	14
EMT	F	50	22	117	30	15	0	4
$\hat{\mu}$		65.3	11.3	111.5	29.0	20.3	0.3	5.8
$\hat{\sigma}$		12.4	7.4	6.6	1.2	6.1	0.5	5.9
Grupo PDCL								
CLO	F	68	5	81	28	22	1	6
RLO	F	63	9	90	29	20	0	3
JGZ	M	65	11	87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8	96	29		0	2
PCM	M	71	9	111	28	20	0	10
$\hat{\mu}$		68.0	8.4	93.0	27.8	20.5	0.2	4.4
$\hat{\sigma}$		4.1	2.2	11.4	1.6	1.0	0.4	3.6

Mexicana). El montaje de la PSG incluyó los siguientes electrodos¹:

- 19 electrodos de EEG colocadas según el Sistema Internacional 10–20.
- 2 electrodos de EOG para movimientos oculares.
- 2 electrodos de EMG para medir el tono muscular en los músculos del mentón.

Los electrodos para EEG fueron conectados en paralelo usando como referencias los lóbulos de las orejas cortocircuitadas; la impedancia se mantuvo por debajo de 50 $\mu\Omega$. Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron *pasado* filtros analógicos pasa bandas: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Los registros fueron digitalizados con una frecuencia de muestreo de 512 puntos por segundos (Hz), y posteriormente almacenados en formato de texto.

Como se mencionó anteriormente, los registros fueron segmentados en segmentos de 30 segundos, referidas como **épocas**; en lo posterior se usará la palabra ‘época’ como un caso particular de la ventana. Cada una de las épocas fue clasificada como

¹Para más detalles ver el capítulo anterior, particularmente la sección ??

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Cuadro 5.2: Datos generales sobre los registros de PSG

	TTS		MOR*		
	Épocas	Min.	Épocas	Min.	%
Grupo CTL					
MJH	1032	516	127	63.5	12.31
JAE	904	452	171	85.5	18.92
MGG	1024	512	166	83	16.21
EMT	552	276	47	23.5	8.51
$\hat{\mu}$	878.0	439.0	128.0	63.9	13.99
$\hat{\sigma}$	225.1	112.5	57.3	28.7	4.55
Grupo PDC					
CLO	944	472	132	66	13.98
RLO	840	420	99	49.5	11.79
JGZ	1200	600	34	17	2.83
AEFP	952	476	41	20.5	4.31
PCM	752	376	59	29.5	7.85
$\hat{\mu}$	937.6	468.8	73.0	36.5	8.15
$\hat{\sigma}$	168.1	84.1	41.5	20.8	4.75

*El sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos.

TTS= Tiempo Total de sueño. El porcentaje de sueño MOR se calcula respecto al TTS.

MOR o NMOR; la clasificación fue llevada a cabo por dos expertos de ICSA y una neurofisióloga de la UNAM, y bajo los estándares de la AASM.

Por simplicidad técnica, los registros fueron truncados para poder considerar épocas completas; algunos datos al final de cada registro fueron omitidos, aunque representan una cantidad negligible de tiempo. Cabe mencionar que cada época de 30 segundos, a una frecuencia de 512 Hz, representa un total de 15,360 puntos.

En la tabla ?? se describe la duración de los registros, así como la cantidad de tiempo del registro clasificado como sueño MOR. La cantidad de tiempo en vigilia registrado es negligible (< 5 minutos por cada participante), de modo que ésta no es reportada; con una pérdida mínima de generalidad, se puede afirmar que los registros fuera del sueño MOR corresponden a sueño NMOR.

5.2. CARACTERÍSTICAS MUESTRALES

Cuadro 5.3: Variables independientes entre grupos

	Grupo CTRL		Grupo PDCL		WMW	
	Media	(DE)	Media	(DE)	p	W
Edad	65.3	12.4	68.0	4.1	0.905	9.0
Escolaridad	11.3	7.4	8.4	2.2	0.797	11.5
Neuropsi	111.5	6.6	93.0	11.4	0.032	19.0
MMSE	29.0	1.2	27.8	1.6	0.366	14.0
SATS	20.3	6.1	20.5	1.0	0.301	4.0
GDS	5.8	5.9	4.4	3.6	0.905	11.0
TTS [min]	439.0	112.5	468.8	84.2	1.000	10.0
MOR [min]	63.9	28.7	36.5	20.8	0.190	16.0
MOR [%]	14.0	4.5	8.2	4.8	0.111	17.0

WMW=Prueba de Wilcoxon–Mann–Whitney, DE=Desviación Estándar, TTS=Tiempo Total de Sueño.

5.2. Características muestrales

Previo a los análisis de los registros de PSG, se corroboró si los dos grupos de participantes efectivamente se *comportan* como grupos estadísticamente diferentes. Con dicho objetivo, se aplicaron pruebas U de Wilcoxon-Mann-Whitney (WMW) entre los dos grupos, para todas las variables consideradas. De lo anterior se exceptúa al puntaje de la prueba KATZ, ya que es un parámetro cualitativo. Se concluye que las mediciones son parecidas en ambos grupos para todas las variables observadas, excepto para el puntaje en la prueba Neuropsi; ello era de esperarse ya que el puntaje en Neuropsi fue usado para designar a los participantes en los grupos. Los resultados de estas pruebas se reportan en la tabla ??.

Se verificó si hay correlaciones entre las variables consideradas, lo cual podría afectar la interpretación de los resultados posteriores. Para ello se aplicó la prueba de correlación de Spearman a cada par de variables; la prueba de Spearman estima la correlación entre variables, y se prueba la hipótesis de que la correlación es diferente de cero. Estos resultados se reportan en el cuadro ??.

Sólo se encontraron correlaciones significativas entre dos pares de variables: edad y escolaridad, y tiempo en MOR *medido* en segundos y en porcentaje.

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas,

Cuadro 5.4: Prueba de correlación de Spearman (estimación y p-valor)

	<i>Escolaridad</i>	<i>Neuropsi</i>	<i>MMSE</i>	<i>SAST</i>	<i>GDS</i>	<i>Sueño [min]</i>	<i>MOR [min]</i>	<i>MOR [%]</i>
Edad	-0.699 (0.04)	-0.267 (0.49)	-0.079 (0.84)	-0.171 (0.69)	-0.233 (0.55)	0.200 (0.61)	0.183 (0.64)	0.100 (0.81)
Escol.		0.437 (0.24)	0.194 (0.62)	-0.366 (0.37)	-0.254 (0.51)	-0.044 (0.91)	-0.586 (0.10)	-0.525 (0.15)
Neuropsi			0.501 (0.17)	-0.415 (0.31)	0.200 (0.61)	-0.267 (0.49)	0.150 (0.71)	0.200 (0.61)
MMSE				-0.628 (0.09)	-0.378 (0.32)	-0.316 (0.41)	-0.070 (0.86)	0.018 (0.96)
SATS					0.610 (0.11)	0.317 (0.44)	0.293 (0.48)	0.195 (0.64)
GDS						-0.433 (0.25)	0.517 (0.16)	0.467 (0.21)
Sueño [min]							-0.050 (0.91)	-0.067 (0.88)
MOR [min]								0.983 (0.00)

5.3. ANÁLISIS A NIVEL DE ÉPOCA

y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Una segunda hipótesis para esta correlación es la contribución del participante EMT, quien tiene una edad menor y un nivel de educación mayor al resto de los participantes. Para contrastar la segunda hipótesis se calculó nuevamente la prueba de Spearman pero retirando los datos de EMT: se halló una correlación estimada de 0.179 con un p-valor asociado de 0.672, que no permite rechazar el que la correlación sea diferente de cero.

Se descarta entonces la hipótesis del efecto generacional, cuando menos para el grupo de participantes considerados, y se acepta que la correlación es debida a valores atípicos. Se concluye que, usando los datos recabados, no se puede obtener información relevante sobre el efecto del nivel de educación ni la edad sobre el PDCL, ni con los marcadores del PSG que se describirán más adelante.

Intuitivamente era de esperarse la correlación entre el tiempo en MOR y el porcentaje de sueño que es MOR. Sin embargo, la hipótesis de que el sueño tenga una *estructura característica* —y por tanto, que las etapas de sueño aparezcan en proporciones similares en varios individuos— es ajena a los supuestos estadísticos. Con base a este resultado, en adelante se usará el porcentaje de MOR como *sustituto* del tiempo real de MOR porque (1) dichas variables están fuertemente correlacionadas, y (2) porque el porcentaje permite comparar intuitivamente características de registros con duraciones muy diferentes.

5.3. Análisis a nivel de época

Como se mencionó anteriormente, los registros fueron fragmentados en ventanas de 30 segundos, referidas como épocas, para su clasificación en las etapas de sueño. De manera independiente, cada una de estas épocas fue sometida a la prueba de estacionariedad de Priestley–Subba Rao (PSR) para investigar si es estacionaria en el sentido de homogeneidad espectral; para más detalles ver la sección ??.

Con base en la prueba de PSR, cada una de las épocas consideradas fue clasificada como *estacionaria* si fue rechazada la hipótesis de no–estacionariedad con un nivel de significancia $p < 0.05$. La aplicación per se de la prueba de PSR fue efectuada usando el software estadístico R; en particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete `fractal` bajo la función `stationarity` [?].

Con cada época clasificada según etapa de sueño (MOR o NMOR) y según es-

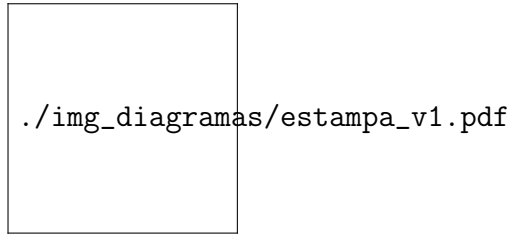


Figura 5.1: Representación minimalista de los electrodos considerados en el registro de PSG; para más detalles ver las secciones ?? y ?. Esta forma de ordenar las gráficas será usada en gráficos posteriores.

tacionariedad, se procedió primeramente a revisar cómo están relacionadas ambas características. Para ello se planteó la hipótesis de que la cantidad de épocas estacionarias es diferente en MOR y NMOR.

Debido a que la cantidad de épocas en NMOR es considerablemente mayor a las épocas en MOR, y con base en las observaciones de la sección anterior, se usaron proporciones en lugar del total de épocas. Para simplificar la notación, las proporciones de épocas clasificadas como estacionarias en MOR y NMOR serán referidas como p_{MOR} y p_{NMOR} , respectivamente; es decir

$$p_{MOR} = \frac{\# \text{ épocas estacionarias en MOR}}{\# \text{ épocas en MOR}} \quad (5.1)$$

y similarmente para p_{NMOR} . Dado que las clasificaciones según etapa de sueño (MOR/NMOR) y estacionariedad (sí/no) son dicotómicas, la hipótesis $p_{MOR} \neq p_{NMOR}$ fue probada usando la prueba χ^2 de Pearson; dicha prueba fue repetida para todas las derivaciones consideradas.

Los resultados obtenidos se reportan en el apéndice ??, y en la figura ?? se muestra de forma esquemática en qué derivaciones se encontraron diferencias significativas.

Efecto de la estacionariedad local

Se procedió a repetir la clasificación de estacionariedad pero usando ventanas de diferentes tamaños. Los tamaños de ventana se eligieron de la forma 30×2^n segundos por *compatibilidad*, ya que el protocolo de la AASM sugiere usar épocas de 30 segundos para identificar el sueño MOR) y por motivos técnicos. El tamaño de

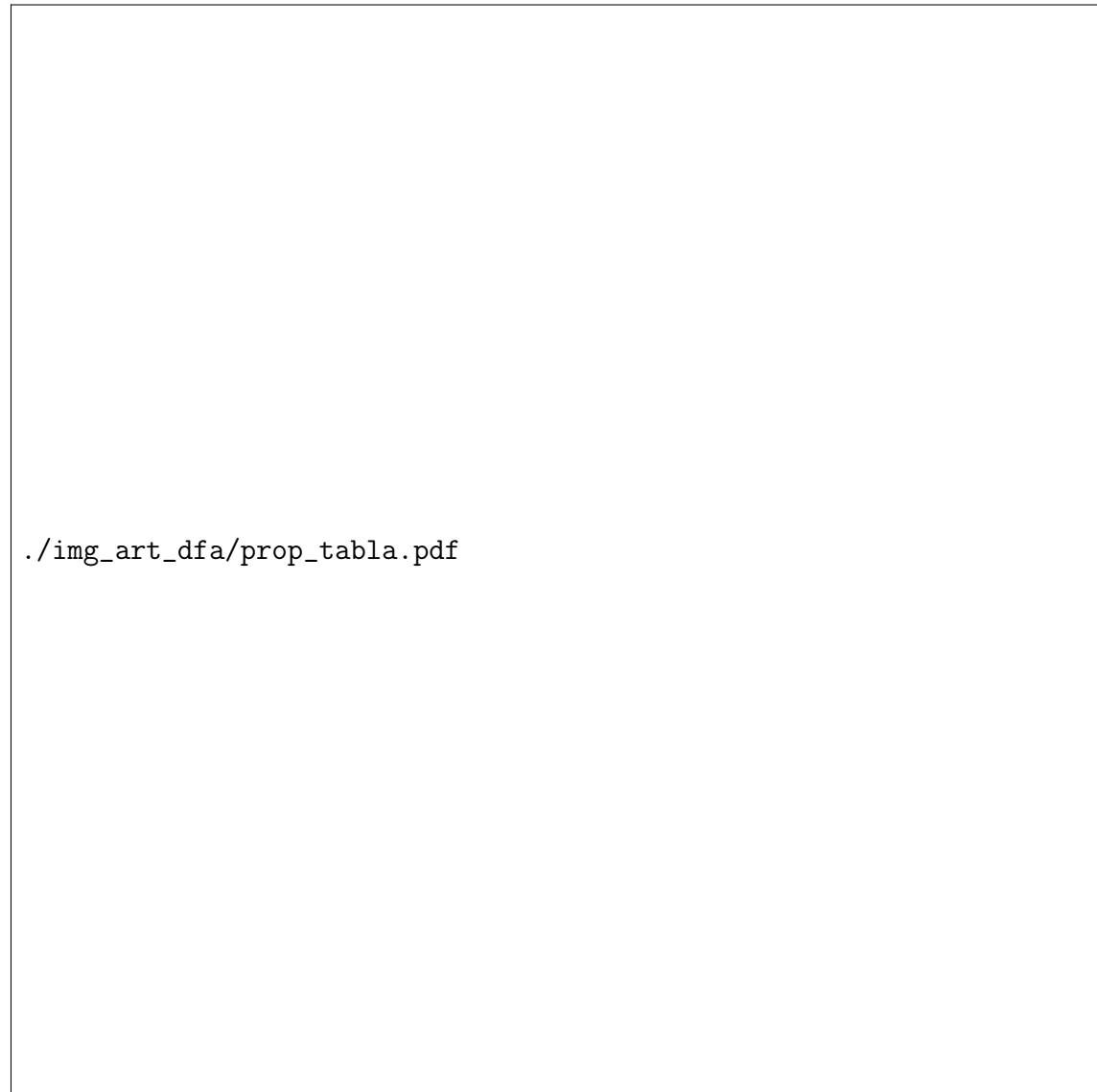


Figura 5.2: Derivaciones para las cuales la proporción de épocas clasificadas como estacionarias fue significativamente diferente en MOR y NMOR. En la parte superior se representa al grupo CTRL y en la parte inferior al grupo PDCL. Para esta figura se usaron épocas de 30 segundos de duración. La posición de los círculos representa a las derivaciones, en correspondencia con la figura ??.

ventana más pequeño fue de $30/32$ segundos para poder utilizar la prueba de PSR de forma confiable, mientras que el tamaño más grande fue de 120 segundos tomando en cuenta que ventanas más grandes serían demasiado heterogéneas para considerarse como unidades de estudio fiables.

En la figura ?? se muestran únicamente las proporciones estimadas de épocas estacionarias para MOR y NMOR (p_{MOR} y p_{NMOR}) para un participante; los gráficos construidos para todos los participantes pueden encontrarse en el apéndice ?. Usando épocas de mayor duración, se encuentra que una proporción menor de éstas son clasificadas como estacionarias; sin embargo, usar épocas de menor duración no garantiza el efecto contrario. Dicho fenómeno *apoya* la hipótesis de estacionariedad local en los registros de PSG en adultos mayores, aunque no representa evidencia suficiente para relacionarlo con el PDCL.

En resumen, no se pudo identificar una conexión clara entre el PDCL y las características de las épocas como unidades autónomas. Debido a ello se consideran otros niveles de organización sobre los registros: los registros como un conjunto de épocas distribuidas en el tiempo con *cierta estructura*, y al individuo como unidad en la variabilidad de dichas estructuras. En particular sobre el último, si se supone que las cantidades descritas en esta sección son características *representativas* de cada participante, entonces tiene sentido intentar verificar similitudes con otros participantes o correlaciones con otras observaciones.



Figura 5.3: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.

5.4. Análisis a nivel de registro

Con el fin de explorar cómo se relacionan las épocas estacionarias con la *estructura del sueño*, se procedió a *graficar* la estacionariedad. Para efectuar lo anterior se consideró una cuadrícula, con una fila por cada derivación y una columna por cada época analizada (se registró el mismo número de épocas para cada derivación); sobre la cuadrícula el espacio correspondiente a cada época fue coloreado a según la clasificación de la época como estacionaria. Se procedió similarmente para ilustrar la clasificación según etapa de sueño. En la figura ?? se ejemplifica este tipo de gráficos, además de otros detalles a mencionarse.

Los gráficos obtenidos mediante este procedimiento mostraron algunas regularidades que merecen especial atención: *bloques emergentes* de épocas que comparten clasificación como estacionarias (o como no-estacionarias). Estos bloques identificados visualmente se extienden entre diversas derivaciones; puede verse un ejemplo de ello en la figura ?. Debido a la forma en que se efectuó la clasificación de estacionariedad (usando la prueba de PSR) puede garantizarse que estos patrones emergentes no son producidos por la clasificación per se. Se hipotetiza que estos *patrones de estacionariedad* corresponden a las diferentes etapas de sueño.

Dentro del contexto del PDCL en adultos mayores, estos patrones de estacionariedad no serán definidos formalmente ni estudiados detalladamente; se presentan como un hallazgo incidental y como verificación empírica de las capacidades de la técnica descrita para distinguir características que varían en el tiempo.

Efecto de la estacionariedad local

El procedimiento de graficación se repitió para las clasificaciones de estacionariedad obtenidas usando diferentes tamaños de ventana, con el fin de verificar si la presencia de los bloques podría atribuirse al tamaño de ventana usado. Se encontró que los patrones aparecen con mayor o menor *nitidez* en los gráficos obtenidos usando diferentes tamaños de ventana, tal como se ilustra en la figura ?.



Figura 5.4: Distribución en el tiempo de las ventanas clasificadas como estacionarias, considerando diferentes tamaños de ventana. Cada ventana fue representada en una cuadrícula según su derivación (margen izquierdo) y momento (margen inferior) de procedencia; posteriormente fue *coloreada* según su clasificación como estacionaria. Dado que la clasificación de estacionariedad se repitió usando diversos tamaños de ventana, en el margen derecho se indica el tamaño de la ventana en segundos. En la parte inferior se representan las mismas épocas en su clasificación según etapa de sueño.

5.5. Análisis a nivel de grupo

Para fines de esta subsección, se ha supuesto que las proporciones de épocas estacionarias durante MOR y NMOR (p_{MOR} y p_{NMOR}) son características intrínsecas de cada individuo. En otras palabras, si se repite el registro de PSG para el mismo individuo y bajo condiciones similares, y se realiza el mismo procedimiento de segmentación y clasificación de épocas, entonces se espera que las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR} serán las mismas. Este supuesto se basa en que las fases de sueño son *casi indistinguibles* entre diferentes individuos con características similares, y más aún entre diferentes jornadas de sueño para el mismo individuo.

Con base a los resultados de la subsección anterior, se puede afirmar intuitivamente que la metodología descrita *percibe* parte de algunas fases (o subfases) de sueño, las cuales son comunes entre individuos. Sin embargo, aun si tales observaciones fueran verificadas rigurosamente, el supuesto de que p_{MOR} y p_{NMOR} son características individuales debería ser verificado por separado. Debido a las limitaciones del presente trabajo —especialmente el tamaño muestral reducido y la limitación de un registro por participante— el supuesto será usado como tal, y no se verificará debido a la falta de datos. En consecuencia, los resultados en la presente subsección se presentan como *indicios*, con la idea de explorarlos en trabajos futuros.

Entonces bien, las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR} , calculadas por separado para todos los participante y todas las derivaciones consideradas, fueron tratados como características que se distribuyen de forma aproximadamente normal sobre las poblaciones que representan los grupos CTRL y PDCL. Se efectuó un ANOVA de dos vías para observar los cambios sobre p_{MOR} y p_{NMOR} debidos al grupo y la etapa de sueño, cuyos resultados se muestran en el cuadro ???. Se encontró que no hay interacciones significativas entre los factores de etapa y grupo para ninguna derivación; así mismo se encontró que hay diferencias significativas para las derivaciones Fp2, F7, LOG y ROG que pueden ser explicadas por el *efecto* de la etapa de sueño, y de forma similar para las derivaciones LOG y ROG con el efecto de ‘grupo’.

Las diferencias para LOG y ROG, debidas al efecto de ‘etapa de sueño’, puede explicarse perfectamente por la presencia característica de movimientos oculares rápidos en el sueño MOR. Este resultado es consistente con una de las tres características que determinan al sueño MOR: atonía muscular, movimientos oculares rápidos y actividad en el EEG de amplitud baja y frecuencias mixtas. Paralelamente

5.5. ANÁLISIS A NIVEL DE GRUPO

estos resultados sugieren que este procedimiento podría ser usado para identificar de forma objetiva y automatizada parte del sueño MOR; en el presente trabajo se expone como preliminar, y requiere de un estudio más riguroso para su uso clínico.

Las diferencias en Fp2 y F7 requieren una explicación más cautelosa, ya que el efecto es significativo en la región frontal, la cual típicamente es asociada con la toma de decisiones; sin embargo, la *significancia* es débil y no es consistente sobre la región frontal. Para explorar más a fondo los resultados de la ANOVA, en la figura ?? se han graficado (como diagramas de caja) los valores p_{MOR} y p_{NMOR} muestrales; se observa que, intuitivamente, las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR} son muy diferentes entre grupos y entre etapas, pero que posiblemente no resultan significativas debido a la gran variabilidad dentro de las categorías. En principio, es posible justificar dicha falla por el tamaño reducido del grupo muestral.

Con respecto a las diferencias entre grupos para las derivaciones LOG y ROG, puede decirse que recientemente se ha sugerido que es posible detectar diferencias entre sujetos con y sin DCL usando registros de –entre otras derivaciones– movimientos oculares [?].

Cuadro 5.5: ANOVA para los efectos Grupo y Etapa de sueño sobre las cantidades P_{MOR} y P_{NMOR} .

	CTRL				PDCL				ANOVA					
	NMOR		MOR		NMOR		MOR		Grupo		Etapa		G×E	
	M	DE	M	DE	M	DE	M	DE	F	p	F	p	F	p
Fp2	17.2	4.0	6.3	5.8	10.6	8.4	3.7	7.0	2.08	.171	7.51	.016	0.40	.537
Fp1	17.5	9.0	9.1	11.5	10.8	10.5	4.5	7.7	1.53	.237	2.48	.138	0.05	.829
F8	19.3	7.6	14.7	13.3	12.5	7.8	8.9	14.0	1.43	.252	0.60	.453	0.01	.918
F7	19.0	5.0	7.7	7.6	12.6	9.6	5.5	10.6	1.09	.314	4.81	.046	0.25	.621
F4	20.0	5.5	16.2	14.5	14.4	12.5	15.2	15.1	0.30	.595	0.04	.836	0.14	.716
F3	19.9	4.0	14.4	9.9	15.1	13.8	17.1	23.0	0.02	.890	0.03	.858	0.27	.610
T4	22.4	7.6	21.2	17.1	16.2	7.8	26.2	19.0	0.01	.926	0.57	.461	0.71	.414
T3	27.2	6.6	28.1	14.8	18.7	9.5	24.5	20.7	0.79	.390	0.28	.603	0.13	.726
C4	29.4	7.9	23.2	15.9	16.9	12.4	25.6	18.8	0.53	.481	0.09	.772	1.15	.301
C3	25.5	5.4	24.8	11.5	18.8	12.2	25.0	18.0	0.28	.604	0.27	.614	0.31	.585
T6	31.5	10.5	24.1	15.1	17.0	9.3	25.0	21.0	0.94	.349	0.03	.871	1.20	.292
T5	29.4	16.7	33.7	23.1	22.2	14.9	32.0	17.8	0.27	.612	0.74	.403	0.10	.755
P4	25.8	6.0	20.1	13.4	15.8	10.0	22.7	19.4	0.33	.576	0.04	.843	0.95	.345
P3	25.6	9.7	22.7	13.8	18.7	10.1	28.6	19.0	0.01	.939	0.42	.526	0.93	.350
O2	27.2	7.8	24.3	18.1	18.3	11.2	25.5	21.0	0.26	.615	0.13	.721	0.47	.506
O1	27.8	9.5	29.1	20.9	17.5	11.7	25.3	20.6	0.81	.383	0.40	.539	0.17	.685
FZ	23.4	3.1	24.2	10.9	16.8	13.9	21.5	17.8	0.55	.469	0.24	.634	0.10	.758
CZ	22.5	6.2	18.7	11.1	16.4	12.0	17.8	12.7	0.46	.510	0.03	.865	0.24	.633
PZ	22.9	4.9	17.6	10.0	16.0	11.9	23.0	17.7	0.02	.904	0.07	.797	1.06	.321
LOG	50.5	10.3	22.9	13.2	34.3	8.9	9.4	9.6	9.10	.009	28.19	.000	0.08	.786
ROG	54.2	14.9	30.5	17.3	34.2	17.1	14.3	13.3	5.89	.029	8.53	.011	0.07	.800
EMG	15.1	8.2	16.2	9.4	6.8	7.4	13.9	16.6	0.99	.337	0.68	.423	0.31	.588

M=media muestral; DE=Desviación estándar; G×E=interacción Grupo y Etapa



Figura 5.5: Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR y para todas las derivaciones. Los puntos representan valores *atípicos*, según su definición para diagramas de caja. Los asteriscos indican en qué derivaciones se hallaron *efectos* significativos usando una ANOVA de dos factores: ‘etapa de sueño’ y ‘grupo’; el efecto de ‘etapa de sueño’ fue significativo para Fp2, F7, LOG y ROG, mientras que el efecto ‘grupo’ fue significativo para LOG y ROG. La posición de cada gráfico se corresponden con aquellos de la figura ??.

CAPÍTULO 6

Discusión y Conclusiones

Como se discutió en la sección ??, la base de este trabajo es la hipótesis de que el cerebro es un sistema complejo, cuya actividad se comporta como una secuencia organizada de fragmentos de actividad *simple*. Tal característica es referida como **estacionariedad local**, y la hipótesis descrita es que la actividad cerebral es localmente estacionaria.

En el presente trabajo la ‘hipótesis de estacionariedad local’ fue manejada como un supuesto, y se hipotetizó de que el DCL –o más en concreto, el PDCL– *afecta* la organización de la actividad cerebral respecto a la forma en que aparecen fragmentos de actividad simple. De forma concreta, se decidió usar a la estacionariedad débil para declarar que los registros analizados son simples; de forma aún más concreta, se usó la prueba de estacionariedad débil de Priestley y Subba Rao para declarar si los registros analizados son débilmente estacionarios.

Conviene comentar que se eligió usar la estacionariedad débil porque es una cantidad *sencilla*, que se usualmente se asume pero no se verifica, y porque una gran cantidad de métodos de análisis la usan (esto será discutido más adelante).

Para facilitar la notación, se definieron las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR} , que representan la proporción de épocas durante las cuales los fragmentos de registro de PSG (sinónimo de épocas) *son* débilmente estacionarios¹ durante MOR y NMOR,

¹Los registros de PSG son interpretados como observaciones de procesos estocásticos semi-

respectivamente; en otras palabras

$$p_{\text{MOR}} = \frac{\# \text{ épocas estacionarias en MOR}}{\# \text{ épocas en MOR}} \quad (6.1)$$

y similarmente para p_{NMOR} . Estas cantidades son usadas debido a que la cantidad de épocas en MOR y NMOR son considerablemente diferentes, y así mismo son diferentes la cantidad de épocas en MOR y NMOR para los diferentes participantes.

Al probar la hipótesis $p_{\text{MOR}} \neq p_{\text{NMOR}}$ a nivel grupal (para lo cual se supuso que estas cantidades se distribuyen normalmente), se encontró que hay diferencias significativas para las derivaciones Fp2, F7, LOG y ROG que pueden ser explicadas por el *efecto* de la etapa de sueño, y de forma similar para las derivaciones LOG y ROG con el efecto de ‘grupo’.

Se describió una metodología con la cual, usando la clasificación de estacionariedad, se identificaron patrones de actividad que parecen *responder* a las etapas de sueño. Este enfoque no fue explorado más a fondo, pero proporciona evidencia *a favor* de la hipótesis de estacionariedad local.

Las diferencias halladas en LOG y ROG pueden ser explicadas por las características del sueño MOR, ya que los movimientos oculares rápidos son una característica distintiva del sueño MOR –y que le dan nombre.

Por otro lado, las diferencias en Fp2 y F7 son *prometedoras* porque el lóbulo frontal se asocia típicamente a funciones cognitivas; el nivel de significancia es débil, pero ello puede ser debido a que la muestra es relativamente pequeña. Por ejemplo, en [?] se usa un número ligeramente mayor de individuos junto otro método de análisis, obteniéndose resultados similares.

En necesario mencionar que hay una vasta cantidad de estudios que han explorado la posible relación entre trastornos del sueño y marcadores de daño neuronal o de actividad cerebral anómala [?]. De manera generalizada, dichos estudios han sido criticados por deficiencias metodológicas; entre ellos se encuentra el uso de grupos muestrales muy reducidos, de la auto-percepción por los pacientes como parámetro de medición, o incluso de pruebas neuropsicológicas con baja sensibilidad como el MMSE [?].

estacionarios (ver definición ??); se dice que un fragmento de registro de PSG es débilmente estacionario si se puede rechazar la hipótesis de no-estacionariedad usando la prueba de Priestley–Subba Rao (ver sección ??).

Vale la pena mencionar que, como contramedida ante el efecto de grupos reducidos, se suele otorgar cierto *prestigio* a las llamadas *técnicas objetivas*, es decir, aquellas que son independientes del examinador. La denominación de ‘técnicas objetivas’ engloba, por ejemplo, a todos los registros electrofisiológicos y sus respectivos análisis cuantitativos (en contraparte a los análisis cualitativos); también es importante que se excluye la auto-percepción de deficiencias cognoscitivas, y las encuestas que no son suficientemente *formales*. Como consecuencia de lo anterior, se suele considerar que es posible extraer información fiable de grupos pequeños si se usan herramientas de análisis objetivas; como ejemplo está la revisión hecha por Yan Ma [?], donde predominan grupos relativamente pequeños.

Cabe destacar, como comentario, que la evidencia aportada *apoya* a la hipótesis de estacionariedad local y confirma el supuesto usual de que las señales de origen biológico son por naturaleza no-estacionarias; este resultado es importante para trabajos posteriores usando registros de PSG.

6.1. Conclusiones

Se ha reportado que los cambios debidos al DCL están asociados con cambios en la estructura del sueño, y en particular en la etapa MOR. Los resultados obtenidos indican que la clasificación de fragmentos de PSG como estacionarios responde a los cambios entre etapas de sueño, en particular al MOR y también entre los grupos.

Sin embargo, tampoco puede descartarse su utilidad para dicho fin, ya que muestra diferencias significativas para los patrones de actividad cerebral en la región frontal de la corteza cerebral, la cual se considera fisiológicamente relevante y tradicionalmente es asociada con la toma de decisiones.

Respecto a la hipótesis de estacionariedad local (presentada en la sección ??), la información recabada sugiere que dicha hipótesis se verifica para registros de PSG en adultos mayores. Se hipotetiza que éste fenómeno explica los resultados favorables en dirección a la detección del PDCL *usando*, y que un mejor entendimiento de dicho fenómeno podría usarse para optimizar la metodología descrita.

El hallazgo de patrones emergentes de estacionariedad (ver sección ??) sugiere que, en principio, es posible usar la clasificación de estacionariedad en registros de EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Esta posibilidad es interesante, pero va más allá de los objetivos del presente trabajo.

6.2. Trabajo futuro

Los resultados obtenidos son *prometedores* y preliminares para declarar marcadores clínicos para el PDCL basados en la metodología descrita. En el contexto de la colaboración con el Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, la metodología será automatizada para poder analizar el total de registros obtenidos en el estudio por Vázquez Tagle y colaboradores. Con base en los resultados obtenidos con un número mayor de participantes, se decidirá si se inicia un nuevo estudio para *validar* la metodología descrita.

De manera general, el uso de marcadores basados en registros de PSG aporta una base objetiva al diagnóstico del deterioro cognitivo, y complementa los resultados más subjetivos de pruebas neuropsicológicas; esta afirmación permanece válida para una gran variedad de señales electrofisiológicas y de trastornos mentales. Conviene destacar que las técnicas basadas en el EEG son relativamente poco *invasivas*, de bajo costo y fácil acceso, con relación a la calidad de la información obtenida y en comparación con otras técnicas para la observación del sistema nervioso central. Entonces, generar marcadores diagnósticos tempranos basados en el EEG facilita su acceso para el público en general, en especial para detectar etapas tempranas del deterioro cognitivo.

En otro ámbito, los patrones emergentes de estacionariedad serán explorados en trabajos futuros.

APÉNDICE A

Puntajes para pruebas neuropsicológicas

En psicología los instrumentos de medición comunes son las pruebas neuropsicológicas, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [?]. Para fines del presente trabajo, fueron usadas varias pruebas neuropsicológicas con el fin de identificar el PDCL (posible deterioro cognitivo leve) en adultos mayores, además de otras afecciones relacionadas al diagnostico del PDCL. Concretamente, fueron usadas las siguientes pruebas:

- Short Anxiety Screening Test (SAST).
- Geriatric Depression Scale (GDS).
- Mini-Mental State Examination (MMSE).
- Evaluación Neuropsicológica (Neuropsi).
- Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (KATZ).

Para más información, ver sección ???. A continuación se presentan únicamente los *puntajes de corte*, puntajes para los cuales la evidencia aportada por las pruebas es indicativa de alguna característica. Este material fue retirado del texto principal para facilitar su lectura.

Cuadro A.1: Puntajes de corte para las pruebas SAST y GDS

Prueba	Puntaje	Indicación
SAST	> 24	Positivo para ansiedad
	22 – 24	No es conclusivo
	< 22	Negativo para ansiedad
GDS	0 – 4	Normal
	5 – 8	Depresión leve
	9 – 11	Depresión moderada
	12 – 15	Depresión severa
Fuente: Yesavage [?], Sinoff [?]		

Cuadro A.2: Puntuación para la prueba KATZ

Actividad	Descripción
1 Baño	Se baña sólo, o con ayuda para lavarse una parte del cuerpo.
2 Vestido	Se viste totalmente sin ayuda.
3 Retrete	Sin ayuda.
4 Movilidad	Entra y sale de la cama.
5 Continencia	Control de esfínteres.
6 Alimentación	Lleva la comida del plato a la boca.
Fuente: Katz [?]. Se puntúa la dependencia para cada actividad.	

Cuadro A.3: Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

Edad	Escolaridad	Sano		Deterioro cognitivo		
		Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
31 – 50	Nula	95	68	54	41	28
	1 – 4	105	81	69	58	46
	5 – 9	118	106	101	90	79
	10 – 24	113	102	97	88	78
51 – 65	Nula	91	59	44	28	13
	1 – 4	98	77	67	57	47
	5 – 9	111	98	91	79	67
	10 – 24	102	93	88	80	72
66 – 85	Nula	76	48	34	20	6
	1 – 4	90	61	46	32	18
	5 – 9	97	80	72	56	39
	10 – 24	92	78	72	59	46

Fuente: Ardila y Ostrosky [?]

Cuadro A.4: Puntajes de corte para la prueba MMSE

Edad	Nivel de estudios	Máximo	Deterioro
45 – 49	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
50 – 54	Elemental	23	18
	Primario	27	21
	Medio	28	22
	Superior	29	23
55 – 59	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
60 – 64	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
65 – 69	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
70 – 74	Elemental	22	17
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
75 – 79	Elemental	21	16
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
80 – 84	Elemental	20	16
	Primario	25	20
	Medio	25	20
	Superior	27	21

Fuente: Folstein [?]

APÉNDICE B

Cuadros y figuras adicionales

En este apéndice se muestran mayores detalles sobre los resultados obtenidas durante los análisis descritos en el capítulo ???. Este material fue excluido del texto principal con el fin de agilizar su lectura y enfatizar la interpretación de los resultados en el contexto del PDCL, más que la forma en que fueron calculados.

B.1. Total de épocas estacionarias

En esta subsección se reporta el total de segmentos de PSG clasificados como estacionarios, usando la prueba de PSR. La clasificación se efectuó de manera independiente para todas las derivaciones, y que la misma clasificación se repitió usando diferentes tamaños de ventana; se reportan todos los valores obtenidos.

Adicionalmente se reporta los resultados de aplicar la prueba χ^2 de Pearson para proporciones, usada para verificar si las proporciones de épocas estacionarias durante MOR y NMOR (p_{MOR} y p_{NMOR}) son diferentes.

Cuadro B.1: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante MJH (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	19401	2495	****	10125	1249	****	4664	559	****	1710	209	*
Fp1	19529	2451	****	10308	1229	****	4593	551	****	1626	201	
F8	19241	2762		10434	1396	**	4930	644	*	1844	266	
F7	18978	2679		10580	1406	***	5075	653	***	1900	258	
F4	18211	2609		10331	1539	****	4970	755	***	1908	333	****
F3	18546	2665		10494	1553	****	5093	806	****	1983	334	****
T4	19982	2935	****	10866	1594	***	5212	778	**	1981	314	**
T3	18556	2628		10457	1501		5190	790	****	2057	342	****
C4	18566	2735	****	10709	1605	****	5284	814	****	2100	342	****
C3	18236	2575		10553	1522		5194	798	****	2083	333	**
T6	18521	2696	**	10815	1581	**	5362	827	****	2138	364	****
T5	18274	2372	****	10160	1332	****	5297	790	**	2205	368	****
P4	18330	2709	****	10811	1599	****	5228	819	****	2087	336	***
P3	18336	2558		10665	1519		5260	796	****	2107	334	**
O2	16418	2228		10371	1469		5313	809	****	2192	371	****
O1	17477	2402		10431	1407	*	5519	822	***	2326	376	****
FZ	17630	2349	***	10375	1515	*	5070	804	****	1998	352	****
CZ	17430	2271	****	10255	1467		5144	776	***	2041	344	****
PZ	17775	2559		10683	1551	*	5359	800	***	2176	343	***
LOG	13116	1524	****	8658	1122	****	5146	608	****	2495	292	****
ROG	17253	2493		10092	1400		5650	734	****	2544	313	****
EMG	18803	1533	****	8600	697	****	3743	293	****	1551	204	
Total	28987	4055		14493	2031		7246	1016		3623	508	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.2: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante MJH (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	531	67		139	12		31	2		3	1	
Fp1	521	58		135	11		34	4		3	0	
F8	623	89		187	22		48	7		9	2	
F7	670	84		209	23		56	5		11	3	
F4	640	124	****	196	32		58	12		13	1	
F3	681	118	*	206	37		56	10		16	1	
T4	662	121	***	203	34		48	11		10	3	
T3	765	131	*	245	49	*	72	14		17	5	
C4	726	128	**	225	29		62	9		15	2	
C3	741	132	***	226	35		61	16		17	2	
T6	754	138	****	240	40		76	16		20	4	
T5	818	143	***	239	48	*	54	12		5	2	
P4	727	113		222	31		59	11		14	2	
P3	756	123		242	38		74	13		13	3	
O2	833	139	*	248	50	*	81	17		20	3	
O1	860	151	***	251	45		73	10		10	2	
FZ	732	129	**	211	38		56	13		10	1	
CZ	710	121	*	211	34		63	11		15	4	
PZ	768	119		231	31		60	9		12	3	
LOG	1045	118	***	373	44		137	18		39	9	
ROG	1015	114	***	342	37		105	16		34	5	
EMG	564	94		192	31		54	14		19	2	
Total	1811	254		905	127		436	80	0	225	33	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.3: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante JAE (1/2)

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	14507	4093	****	7993	1821		3721	706	****	1303	192	****
Fp1	14347	4030	****	7442	1742		3310	695	***	1120	193	****
F8	14793	3322	*	8005	1959	***	3566	932	****	1155	322	***
F7	14992	3985	****	8525	1850	****	4065	785	****	1539	232	****
F4	14058	4133	****	8343	1899		3940	772	****	1392	227	****
F3	14529	4344	****	8358	2026	**	4011	875	*	1523	326	
T4	15261	4044	****	8889	1908	****	4134	768	****	1492	227	****
T3	14658	4145	****	8701	2109	***	4065	945		1447	323	
C4	13674	3913	****	8764	1996		4343	937	***	1614	308	****
C3	14129	3998	****	9059	2105		4431	946	****	1666	336	***
T6	15741	4147	****	9437	2189		4544	903	****	1726	266	****
T5	13785	3086	*	6334	994	****	1968	97	****	582	4	****
P4	14443	3902	****	9373	2162		4610	986	****	1750	340	****
P3	15044	4011	****	9208	2018	****	4131	763	****	1383	208	****
O2	13915	3499	****	9107	2000	****	4439	787	****	1653	261	****
O1	14540	3799	****	9201	2099		4449	774	****	1580	239	****
FZ	15750	3093	****	9103	1969	****	4321	980		1618	369	
CZ	11678	3203	****	8483	1916		4324	909	****	1594	318	***
PZ	13278	3705	****	9006	2084		4470	955	****	1694	330	****
LOG	10156	3057	****	6869	1665	*	3924	856	*	1981	348	****
ROG	10691	3127	****	7337	1799	***	4214	892	****	2096	387	****
EMG	17994	1947	****	8299	776	****	3362	268	****	1126	100	****
Total	23583	5472		11791	2736		5895	1368		2947	684	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.4: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante JAE (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	375	29	****	91	4	***	13	0		2	0	
Fp1	280	27	****	43	2	*	9	0		1	0	
F8	292	71		64	14		13	3		0	0	
F7	504	36	****	131	5	****	35	0	*	3	1	
F4	387	45	****	88	7	*	20	0		3	0	
F3	486	84	*	119	13	*	29	2		2	0	
T4	415	48	****	93	7	**	18	0		1	0	
T3	448	80	*	132	12	***	38	6		7	0	
C4	561	83	****	151	11	****	44	1	*	6	1	
C3	551	93	***	152	18	*	42	2	*	4	2	
T6	533	63	****	147	10	****	38	1	*	7	0	
T5	140	2	****	55	0	***	17	0		0	1	
P4	551	87	****	160	8	****	34	0	*	5	0	
P3	396	39	****	109	5	****	38	4		7	2	
O2	518	58	****	119	12	*	30	3		5	1	
O1	472	40	****	110	13	*	31	3		4	1	
FZ	512	117		140	32		33	2		4	0	
CZ	529	91	**	111	14		30	5		2	0	
PZ	500	88	*	125	12	**	23	3		2	0	
LOG	859	110	****	313	22	****	102	3	****	17	7	*
ROG	913	142	****	334	29	****	88	4	****	13	5	
EMG	260	37	*	36	5		2	1		0	0	
Total	1473	342		736	171		365	88		201	25	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.5: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante MGG (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	17468	3349		9647	1329	****	4789	477	****	1860	105	****
Fp1	18103	3206	****	9605	1322	****	4848	459	****	1931	99	****
F8	18312	3500		9964	1396	****	4720	483	****	1794	114	****
F7	19079	3635		10101	1511	****	4983	561	****	1918	150	****
F4	17576	3784	****	9832	1670	****	4918	694	****	1952	209	****
F3	16864	3669	****	9486	1865		4859	887	*	1892	341	
T4	18998	4037	****	10424	1836	****	4828	734	****	1964	250	****
T3	19841	4439	****	10457	2144	****	5048	1003		2013	427	*
C4	17911	4024	****	10511	2036		5360	939	****	2318	367	****
C3	17949	4036	****	10240	2102	****	5329	962	***	2248	400	
T6	18922	4132	****	10985	2049	*	5398	907	****	2361	355	****
T5	19424	4383	****	10963	2237	****	5593	1105		2463	475	
P4	17529	4023	****	10926	2096		5527	961	****	2360	381	****
P3	17439	4114	****	10757	2161	****	5592	1014	***	2368	419	*
O2	15931	3801	****	10453	2013		5319	954	****	2278	351	****
O1	15395	3933	****	10166	2043	***	5300	975	*	2212	405	
FZ	15899	3496	****	9307	1856	*	4980	858	****	2063	321	****
CZ	15967	3479	****	9763	1930		5237	935	****	2261	372	****
PZ	15911	3830	****	10377	2062	*	5427	976	****	2237	359	****
LOG	11207	2626	****	7443	1240	****	4887	616	****	2523	257	****
ROG	13404	2993	****	8920	1513	****	5376	758	****	2755	326	****
EMG	14694	1424	****	7664	811	****	3585	392	****	1549	196	****
Total	27669	5312		13834	2656		6917	1328		3458	664	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.6: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante MGG (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	633	13	****	182	1	****	59	0	***	14	5	
Fp1	672	12	****	214	2	****	68	0	****	12	6	*
F8	617	18	****	184	2	****	60	0	***	17	5	
F7	669	31	****	197	2	****	53	0	***	3	4	*
F4	663	40	****	190	6	****	70	2	****	13	4	
F3	651	97	*	206	17	****	57	5		12	2	
T4	792	69	****	270	19	****	104	3	****	36	5	
T3	761	148		264	47		86	17		22	7	
C4	944	139	****	317	31	****	110	5	****	25	7	
C3	875	145		286	38	*	99	5	***	16	4	
T6	986	127	****	379	31	****	143	14	**	44	10	
T5	1053	201		397	80		159	23		57	12	
P4	906	115	****	298	25	****	112	3	****	28	3	
P3	951	152	*	329	40	***	118	9	***	29	4	
O2	833	120	****	280	17	****	105	7	***	22	7	
O1	830	122	***	269	30	***	82	10		22	4	
FZ	745	98	****	219	20	***	50	4		10	6	**
CZ	839	118	****	260	17	****	74	4	*	15	3	
PZ	833	115	****	243	19	****	71	6		21	4	
LOG	1244	87	****	535	17	****	208	3	****	68	12	
ROG	1314	121	****	581	34	****	219	5	****	68	14	
EMG	623	83	***	193	34		52	7		10	0	
Total	1729	332		864	166		425	90		230	27	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.7: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante EMT (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	9907	1022	****	5300	497		2660	232		1046	91	
Fp1	11327	1079		5800	512		2824	249		1152	100	
F8	11237	1223	****	6026	609	****	2914	299	***	1156	127	*
F7	9250	831		4370	333	****	1843	125	****	686	46	*
F4	9364	1124	****	5386	601	****	2677	312	****	1054	143	****
F3	9019	791		4753	358	****	2186	139	****	835	49	****
T4	9980	1109	****	5856	623	****	3058	325	****	1241	150	****
T3	11214	1242	****	6068	622	****	2935	307	****	1203	145	****
C4	11399	1217	****	6298	631	****	3136	308		1278	134	*
C3	9992	1064	****	5991	592	**	3158	304		1292	138	*
T6	10723	1175	****	6340	632	****	3173	305		1306	134	
T5	11933	1228	****	6638	661	****	3388	333	*	1442	149	*
P4	9854	1123	****	6075	627	****	3136	320	***	1280	152	****
P3	9921	1126	****	5959	627	****	3088	330	****	1264	148	****
O2	8671	1007	****	5871	575	*	3183	291		1411	139	
O1	10137	1193	****	6408	647	****	3385	330	*	1446	155	***
FZ	9317	1012	****	5741	600	****	3072	314	***	1291	156	****
CZ	8893	1002	****	5582	594	****	3029	321	****	1260	152	****
PZ	9278	1078	****	5864	634	****	3074	329	****	1215	145	****
LOG	6619	640		4368	357	***	2739	188	****	1405	89	****
ROG	8338	812		5366	446	***	3234	247	****	1640	125	****
EMG	11837	418	****	5634	238	****	2375	124	****	817	47	****
Total	16287	1504		8143	752		4071	376		2035	188	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.8: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante EMT (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	333	26		101	6		20	0		4	2	
Fp1	419	39		124	12		29	2		1	2	*
F8	421	49		135	15		36	7		7	3	
F7	215	15		63	4		17	1		7	1	
F4	397	54	***	123	15		39	6		10	1	
F3	272	18		85	5		23	1		4	1	
T4	431	62	****	119	20	*	35	3		8	1	
T3	454	59	***	168	18		49	7		16	4	
C4	503	52		180	21		59	10		12	3	
C3	436	53	*	118	18		35	3		6	3	*
T6	511	53		182	19		54	8		16	3	
T5	557	62		192	23		55	9		10	2	
P4	413	57	****	113	17		28	4		7	1	
P3	402	58	****	115	16		32	4		3	1	
O2	560	52		167	19		55	4		14	2	
O1	583	68	*	190	26	*	59	8		14	2	
FZ	469	54		131	17		34	7		6	1	
CZ	420	54	**	109	14		25	4		9	1	
PZ	411	52	*	106	13		29	3		4	2	
LOG	676	41	****	287	16	*	88	6		27	5	
ROG	790	66		337	26		136	9		52	7	
EMG	227	22		61	8		17	2		2	1	
Total	1017	94		508	47	0	250	27		128	10	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.9: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante CLO (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	17357	1892	****	8651	751	****	3319	265	****	1048	79	****
Fp1	15920	1629	****	7791	645	****	2900	232	****	956	60	****
F8	15130	2343	***	7737	1112	****	2813	417	*	923	151	
F7	15694	1727	****	7955	720	****	3204	275	****	1132	91	****
F4	14774	2381		8313	1215	****	3481	530		1142	189	
F3	14965	2679	****	8494	1393		3789	686	****	1401	268	**
T4	15644	2680	****	7792	1270		2716	511	****	937	195	***
T3	15835	2834	****	7904	1359	**	3709	706	****	1364	302	****
C4	14687	2784	****	7914	1353	*	3512	615	*	1215	239	***
C3	13715	2758	****	7845	1495	****	3792	750	****	1411	321	****
T6	15214	2852	****	8077	1321		3154	531		1074	189	
T5	16147	2987	****	7701	1281		3513	625	**	1260	258	****
P4	15131	3007	****	8977	1424		3772	638		1271	220	
P3	16256	3029	****	9283	1412	****	4449	680	*	1643	266	
O2	15902	2938	****	8225	1202	****	3062	542	*	1035	217	****
O1	13673	2602	****	8306	1232	****	3718	546	***	1233	188	
FZ	14825	2631	****	8455	1462	***	3834	717	****	1404	308	****
CZ	14449	2663	****	8681	1423		3983	670		1436	242	
PZ	14720	2729	****	9110	1366	****	4242	625	***	1482	228	
LOG	4506	678		4192	444	****	2846	227	****	1472	96	****
ROG	2731	481		3045	430	**	2211	297	***	1311	140	****
EMG	19223	3308	****	8211	1503	****	2861	662	****	794	273	****
Total	26004	4224		13002	2112		6501	1056		3250	528	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.10: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante CLO (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	301	22	****	69	1	**	16	0		3	0	
Fp1	249	19	***	63	0	***	18	0		2	0	
F8	263	38		69	6		24	1		4	0	
F7	342	32	***	87	4	*	25	0		4	0	
F4	338	53		89	10		20	1		4	0	
F3	416	79		94	14		18	0		3	0	
T4	308	59		94	7		27	1		7	0	
T3	491	133	****	155	34		38	13		10	0	
C4	359	68		93	11		30	1		7	0	
C3	454	115	****	107	20		24	0		5	0	
T6	341	49		84	6		26	0		6	0	
T5	444	102	***	148	20		42	2		10	0	
P4	330	58		70	7		20	1		6	0	
P3	537	78		121	12		33	2		3	0	
O2	288	55		61	6		16	0		3	0	
O1	312	40		68	5		15	0		2	0	
FZ	446	90		106	17		29	1		3	0	
CZ	417	64		102	10		29	1		7	0	
PZ	378	55		86	10		14	1		4	0	
LOG	624	31	****	214	6	****	61	0	***	16	0	
ROG	589	55	****	176	11	***	66	3	*	19	1	
EMG	174	92	****	41	29	****	7	4		0	0	
Total	1625	264		812	132		402	70		215	21	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.11: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante RLO (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	14496	2338	****	8048	1123	*	3951	544		1515	225	*
Fp1	14532	2304	****	8182	1146	**	4110	549		1693	238	
F8	15475	2491	****	8224	1220	****	3748	605	****	1331	253	****
F7	15459	2351	****	8462	1187	***	4083	579	*	1622	248	**
F4	14238	2400	****	8317	1214	****	4294	653	****	1756	292	****
F3	14011	2374	****	8380	1290	****	4395	675	****	1889	319	****
T4	16055	2480	****	8614	1296	****	4120	640	****	1613	315	****
T3	16686	2539	****	8807	1328	****	4037	645	****	1574	297	****
C4	14199	2361	****	8507	1270	****	4465	672	****	1913	308	****
C3	14241	2339	****	8547	1294	****	4481	660	****	1883	309	****
T6	15273	2408	****	8380	1276	****	3746	611	****	1519	281	****
T5	15350	2504	****	8709	1291	****	4286	659	****	1751	298	****
P4	13969	2291	****	8631	1277	****	4337	644	****	1750	288	****
P3	14937	2368	****	8873	1297	****	4456	646	****	1837	305	****
O2	13686	2227	****	8540	1286	****	4228	642	****	1737	292	****
O1	13952	2260	****	8513	1234	****	4182	593	*	1633	292	****
FZ	13600	2294	****	8184	1248	****	4441	674	****	1925	319	****
CZ	12993	2136	****	8017	1207	****	4278	639	****	1846	301	****
PZ	13530	2255	****	8663	1309	****	4556	664	****	1913	307	****
LOG	10095	1515	****	6978	894		4211	451	****	1991	202	****
ROG	10899	1540	***	7280	919		4021	462	****	1929	208	****
EMG	19511	1848	****	9193	990	****	3893	505		1485	239	****
Total	23904	3165		11952	1584		5976	792		2988	396	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.12: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante RLO (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	530	74		181	16		75	4		20	2	
Fp1	605	79		218	18		86	7		16	1	
F8	470	95	****	177	33		75	8		16	1	
F7	557	95	*	211	24		79	10		18	3	
F4	670	122	****	256	39		98	7		27	3	
F3	758	141	****	286	57	***	121	15		30	3	
T4	568	132	****	211	55	****	94	17		25	3	
T3	629	138	****	258	58	****	115	21		35	5	
C4	750	132	****	266	53	***	117	15		37	4	
C3	755	117		287	49		117	13		39	2	
T6	584	127	****	231	41		118	9		46	3	
T5	706	137	****	339	51		164	20		59	5	
P4	656	116	****	239	41		107	13		34	4	
P3	698	130	****	254	55	****	122	13		37	4	
O2	677	128	****	264	50	*	117	12		32	3	
O1	591	116	****	248	46	*	124	12		36	3	
FZ	788	136	****	291	48		122	10		38	4	
CZ	711	107		252	36		100	5	*	36	4	
PZ	747	120	*	258	46		113	13		35	4	
LOG	845	76	****	345	17	****	131	6	***	42	5	
ROG	856	75	****	335	25	***	143	7	***	48	3	
EMG	505	107	****	148	39	****	48	7		6	0	
Total	1494	198		747	99		371	52		193	18	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.13: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante JGZ (1/2)

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	22473	405	****	11187	144	****	4544	28	****	1476	5	****
Fp1	24354	516	****	12138	207	****	5128	57	****	1607	19	****
F8	25292	618	****	12276	211	****	5030	63	****	1623	13	****
F7	26345	654	****	12931	258	****	5665	90	****	1842	21	****
F4	24272	735	***	11966	340		5072	156		1728	59	
F3	24912	848	****	13264	433	****	6015	192	**	2061	78	***
T4	26346	803	****	13146	356		5574	124	****	1933	41	*
T3	28557	822		14248	373	**	6156	157		2252	56	
C4	25019	774	****	13174	404	***	5960	183		2119	76	**
C3	25606	826	****	13414	413	****	6016	205	****	2127	85	****
T6	26967	784		13737	370		5998	156		2051	48	
T5	27302	814	***	13630	407	*	5777	177		1960	68	*
P4	25865	815	****	13757	397		6056	173		2066	69	
P3	26275	841	****	13948	424	***	6221	204	****	2234	80	**
O2	26688	814	****	14283	416		6345	181		2271	64	
O1	25686	785	****	14384	388		6616	188		2401	77	
FZ	24179	771	****	13192	406	***	6186	192	*	2229	84	****
CZ	23969	696		13019	387		6021	184		2197	74	*
PZ	24627	780	****	13491	398		6127	182		2093	65	
LOG	19899	467	****	11246	237	****	6037	107	****	2741	39	****
ROG	20365	445	****	11923	235	****	6076	114	****	2740	42	****
EMG	26396	535	****	11252	179	****	4224	38	****	1327	10	****
Total	37598	1056		18799	528		9399	264		4699	132	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.14: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante JGZ (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	356	0	***	64	0		12	0		1	0	
Fp1	376	1	***	68	0		15	0		2	0	
F8	454	1	****	105	0		19	1		5	0	
F7	513	4	***	109	0		22	1		6	0	
F4	455	8		87	2		20	0		4	0	
F3	554	22		114	3		26	0		3	0	
T4	551	8		138	5		36	1		10	0	
T3	670	14		156	7		40	1		10	0	
C4	562	27	***	111	6		28	0		10	0	
C3	560	27	***	114	6		21	0		10	0	
T6	568	13		129	1		41	1		8	0	
T5	554	18		108	6		26	2		4	0	
P4	525	14		115	1		30	0		8	0	
P3	582	19		138	6		34	0		10	0	
O2	599	15		152	4		46	2		14	0	
O1	659	23		147	2		36	1		10	0	
FZ	674	30	**	126	8	*	23	1		5	0	
CZ	591	18		105	4		20	0		6	0	
PZ	510	15		100	3		23	0		6	0	
LOG	1089	10	****	339	0	****	85	2		18	0	
ROG	1094	13	****	356	1	***	105	3		28	0	
EMG	335	7		50	1		13	2		2	0	
Total	2349	66		1174	33		570	33		291	10	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.15: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante AEFP(1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	20416	750	****	9428	287	****	3523	84	****	939	22	****
Fp1	20488	824	****	9702	329	****	3737	90	****	953	20	****
F8	18772	764	****	7984	303	****	2016	69	*	448	14	
F7	20445	782	****	8978	260	****	2702	34	****	531	11	**
F4	19954	985	****	9462	407		3694	163		1048	37	
F3	17686	816		8794	298	****	2999	57	****	625	10	****
T4	19624	967	****	8973	478	****	3052	199	****	947	73	****
T3	19229	661	****	8645	199	****	2546	39	****	695	8	****
C4	20106	1029	****	10274	504	****	4562	228	*	1538	68	
C3	18638	887	***	9939	455		4522	211		1495	72	
T6	20968	1026	****	10827	517	**	4569	228	*	1584	81	
T5	19390	718	****	8929	241	****	3134	78	****	1028	28	***
P4	19538	890		10430	502	***	4628	224		1528	80	
P3	19538	890		10430	502	***	4628	224		1528	80	
O2	19851	957	****	10709	461		4662	186	*	1683	74	
O1	19210	809	**	9794	366	****	3729	108	****	1209	42	
FZ	19506	950	****	9540	400	*	3878	129	****	1024	29	**
CZ	19109	1006	****	9747	438		4377	195		1426	55	
PZ	19592	1005	****	10574	492		4643	202		1601	50	***
LOG	16723	614	****	10111	349	****	5374	175	****	2519	78	****
ROG	8949	274	****	4844	155	****	2058	63	****	752	25	
EMG	19759	709	****	7005	187	****	1828	40	****	435	11	
Total	29332	1309		14666	656		7333	328		3666	164	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.16: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante AEFP (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	189	5		24	0		7	0		0	0	
Fp1	177	2		24	1		11	0		0	1	
F8	130	2		39	0		26	0		3	1	
F7	110	3		21	0		14	0		2	0	
F4	172	11		18	1		8	1		0	0	
F3	80	4		13	0		8	0		0	0	
T4	344	29	****	87	10	**	35	6		6	0	
T3	324	5	*	92	2		66	2		22	1	
C4	313	17		45	5		18	3		6	1	
C3	332	15		90	2		42	3		9	0	
T6	437	26		96	11	**	48	3		6	0	
T5	381	21		96	10	*	53	5		9	5	****
P4	379	24		86	8		42	8	**	10	0	
P3	379	24		86	8		42	8	**	10	0	
O2	462	26		111	6		45	7	*	12	0	
O1	314	23	*	63	10	****	30	3		6	1	
FZ	148	3		16	0		8	2		1	0	
CZ	233	10		35	3		17	1		1	0	
PZ	329	19		49	6	*	22	1		3	0	
LOG	1045	31	***	378	9	*	117	4		35	2	
ROG	1243	40	****	531	13	***	246	4	****	92	9	
EMG	109	5		21	2		2	0		0	0	
Total	1833	82		916	41		450	28		225	14	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.17: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante PCM (1/2)

B.1. TOTAL DE ÉPOCAS ESTACIONARIAS

	E = 0.9375 s			E = 1.875 s			E = 3.75 s			E = 7.5 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	14507	1145	****	7286	501	****	3478	185	****	1322	60	****
Fp1	14717	1132	****	7329	452	****	3366	166	****	1172	51	****
F8	14988	1311		7838	597	****	3831	256	****	1529	96	****
F7	14883	1166	****	7319	436	****	3201	167	****	1188	45	****
F4	14008	1417	****	7691	701	***	3840	326		1556	132	
F3	14376	1383	****	7719	644		3708	279	***	1462	106	*
T4	15465	1430	****	8244	711		4054	358		1673	160	*
T3	14723	1278		6948	495	****	2955	195	****	1104	89	
C4	13990	1534	****	8067	804	****	4183	408	****	1771	189	****
C3	14195	1560	****	7912	777	****	3924	383	****	1626	175	****
T6	14937	1510	****	8361	789	****	4174	392	****	1732	181	****
T5	13468	1180		6220	441	****	2184	120	****	824	67	
P4	13909	1589	****	8219	812	****	4203	395	****	1723	184	****
P3	14063	1535	****	7761	757	****	3652	358	****	1497	174	****
O2	14000	1489	****	8081	766	****	4018	381	****	1691	164	*
O1	13245	1342	****	7269	643		3082	263		1261	126	*
FZ	13292	1431	****	7682	725	****	3913	359	*	1573	157	**
CZ	13508	1517	****	8005	783	****	4097	403	****	1709	173	***
PZ	13407	1598	****	8168	814	****	4204	404	****	1744	186	****
LOG	8803	671	***	5397	319	****	2895	141	****	1302	57	****
ROG	7731	715	*	4778	344	****	2385	106	****	1026	31	****
EMG	14417	36	****	6803	21	****	2836	10	****	876	2	****
Total	22218	1887		11109	944		5554	472		2777	236	

E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

Cuadro B.18: Épocas estacionarias según tamaño de ventana, y comparación de sus proporciones entre etapas de sueño; participante PCM (2/2)

	E = 15 s			E = 30 s			E = 60 s			E = 120 s		
	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p	N+W	R	p
Fp2	417	11	****	84	1	*	9	0		2	0	
Fp1	324	11	***	59	1		3	0		0	0	
F8	527	25	***	118	4		15	0		1	0	
F7	425	10	****	87	0	*	17	0		1	0	
F4	531	48		122	12		18	1		2	0	
F3	501	27	**	101	5		19	0		1	0	
T4	590	69	***	139	18		20	5		3	0	
T3	474	35		115	7		29	0		3	0	
C4	633	81	****	161	21		33	5		8	1	
C3	600	70	***	157	22	*	30	4		4	1	
T6	624	83	****	153	29	****	29	6		9	0	
T5	616	81	****	193	30	***	57	16	****	15	1	
P4	596	74	****	134	26	****	35	5		6	0	
P3	620	85	****	162	24	*	40	6		8	1	
O2	648	72	**	164	27	***	36	7		4	1	
O1	633	83	****	184	27	**	55	12	**	9	1	
FZ	547	54		134	13		27	0		3	0	
CZ	600	69	***	159	15		32	4		4	2	
PZ	609	81	****	147	22	*	29	3		5	1	
LOG	586	13	****	199	2	****	51	0		7	1	
ROG	376	5	****	113	2	*	26	0		10	0	
EMG	162	0	****	18	0		2	0		0	0	
Total	1388	118		694	59		346	30		178	10	

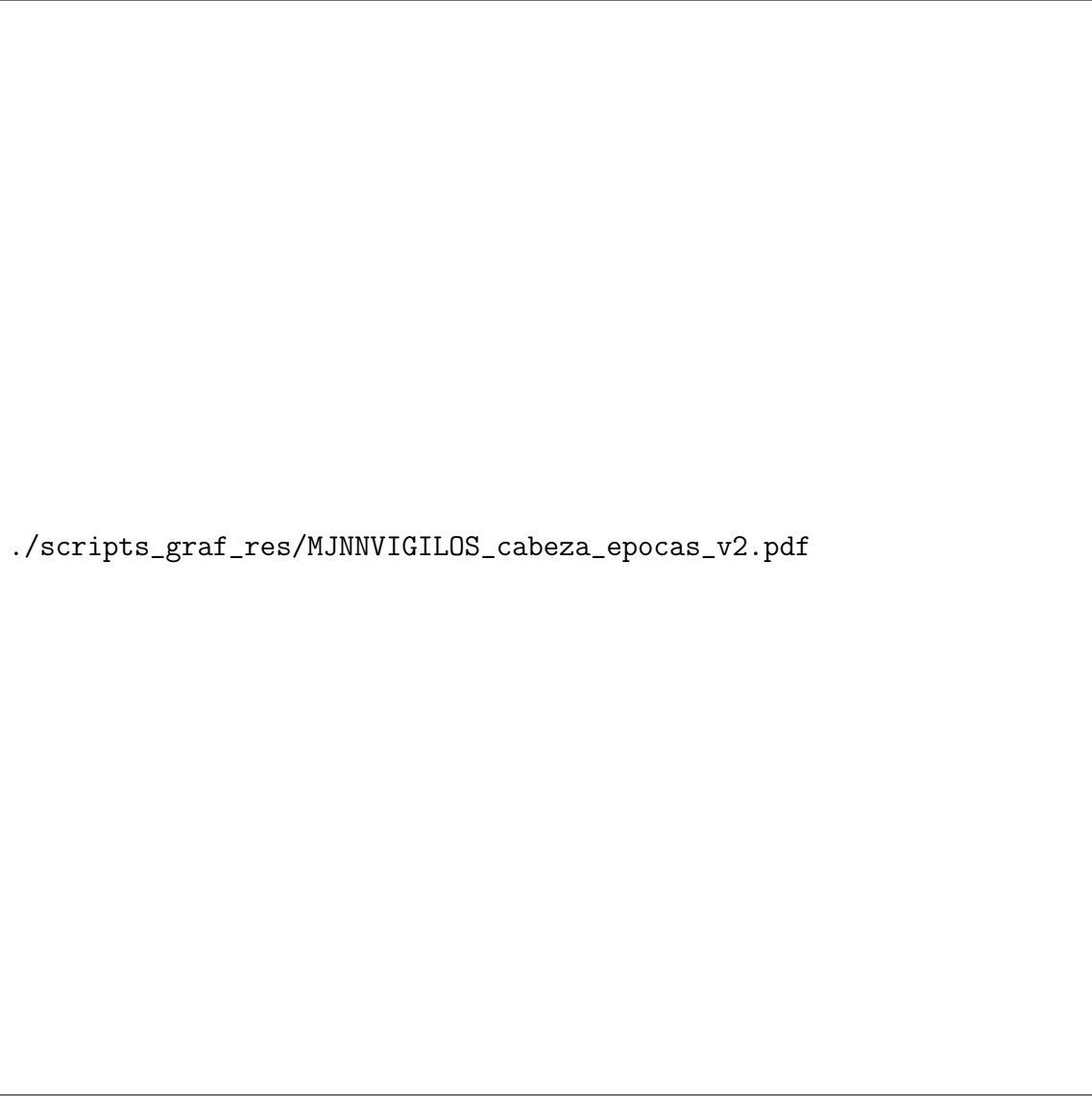
E=tamaño de ventana; N+W=NMOR y vigilia; R=MOR; p, significancia de la prueba χ^2 de Pearson entre las proporciones de ventanas estacionarias en N+W y R: *=0.05, **=0.01, ***=0.005, ****=0.001

B.2. Efecto del tamaño de ventana

En la sección ?? se planteó la idea de que las proporciones de épocas estacionarias durante MOR y NMOR (p_{MOR} y p_{NMOR}) pueden depender del tamaño de ventana utilizado. Esta idea nace de la hipótesis de estacionariedad local, descrita en la sección ??, según la cual los registros de PSG son efectivamente heterogéneos pero pueden verse como una colección de pequeños fragmentos homogéneos. Bajo la hipótesis de estacionariedad local, el algoritmo descrito debería ser afectado por el tamaño de ventana considerado.

En la figura ?? se representa el cambio en las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR} debido al cambio en el tamaño de ventana. Dicha figura fue *calculada* para un participante en particular, y en esta sección se muestra la *misma* figura para todos los participantes.

En la figura ?? se representan las épocas estacionarias en el tiempo, según la derivación a la cual corresponden. Durante la parte final del texto, se mencionó repetidamente que la apariencia de estos gráficos indican intuitivamente que la metodología descrita es *sensible* a algún tipo de actividad cerebral estructurada. Esta afirmación se basa particularmente en las gráficas de todos los sujetos en conjunto; dichos gráficos se muestran en la presente subsección. Conviene mencionar que estos gráficos fueron retirados del texto principal por ser muy *espaciosos*.




`./scripts_graf_res/MJNNVIGILOS_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.1: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.



`./scripts_graf_res/JANASUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.2: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.




`./scripts_graf_res/MGNA5SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.3: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.




`./scripts_graf_res/EMNNS_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.4: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.




`./scripts_graf_res/CLMN10SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.5: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.



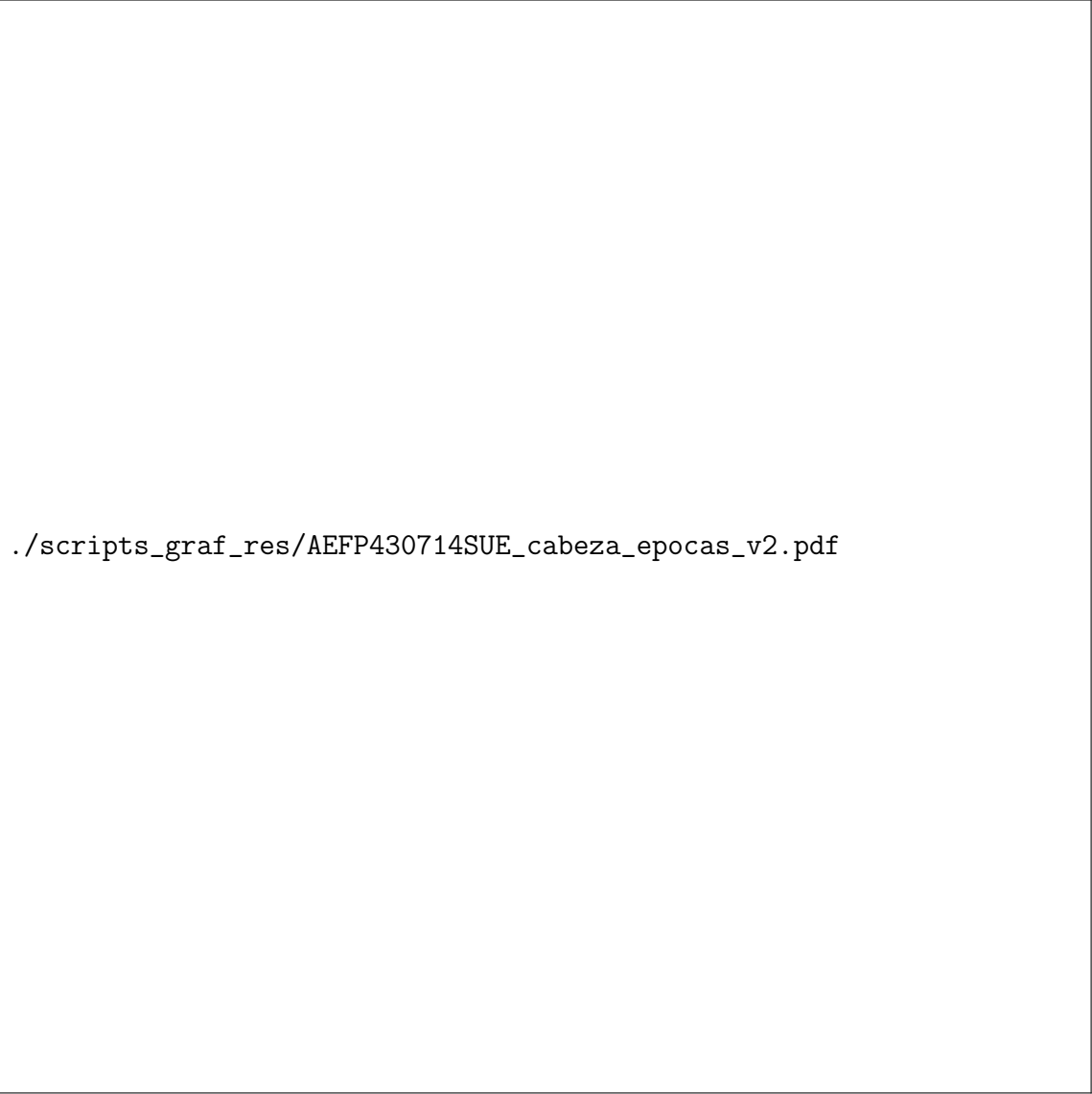
`./scripts_graf_res/RLMN10SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.6: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.



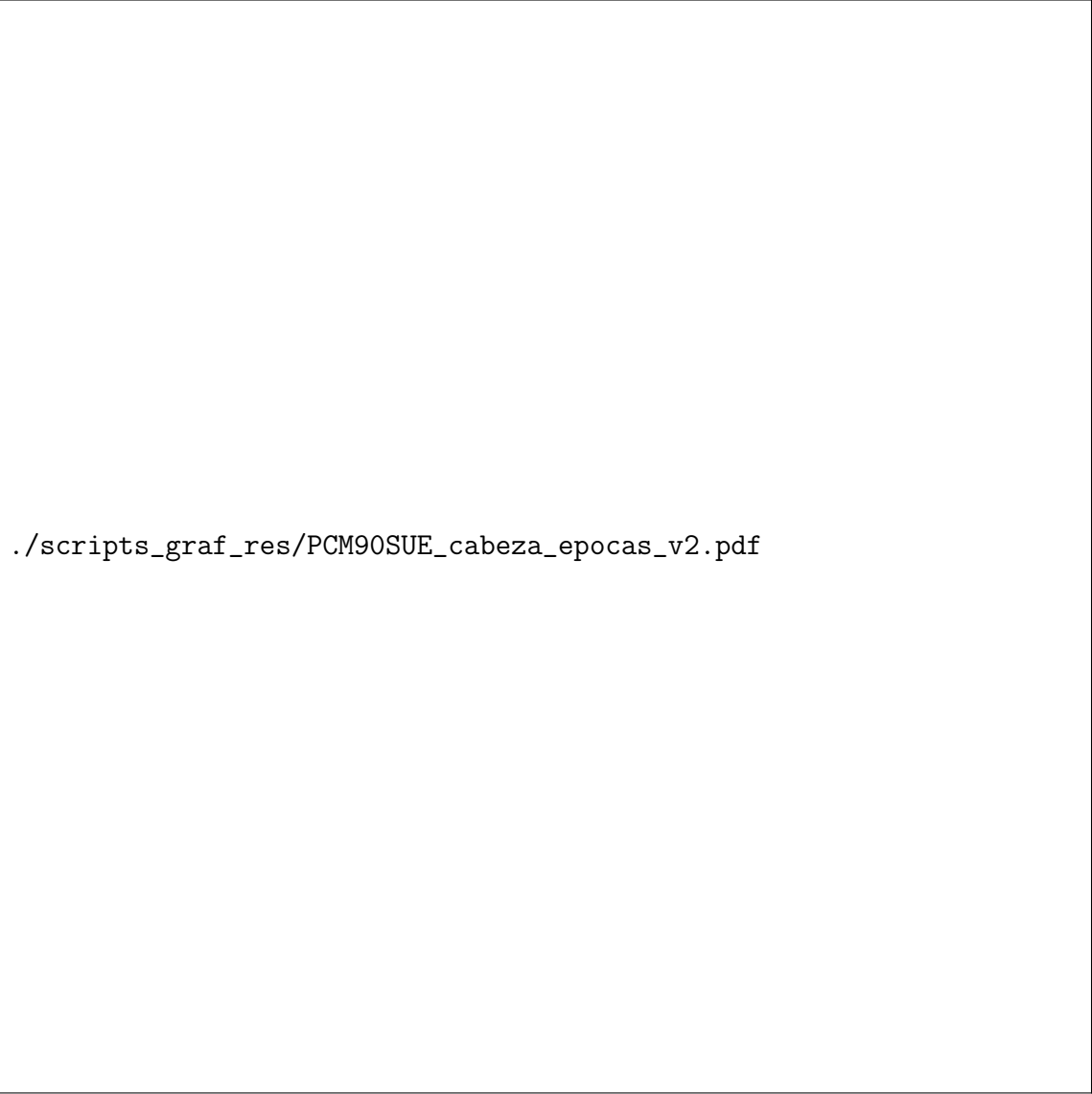
`./scripts_graf_res/JGMN6SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.7: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.



`./scripts_graf_res/AEFP430714SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.8: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.



`./scripts_graf_res/PCM90SUE_cabeza_epocas_v2.pdf`

Figura B.9: Cambio en la proporción de épocas estacionarias respecto al tamaño de ventana usado, durante MOR y NMOR. El análisis se repite en todas las derivaciones consideradas; la posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura ?? . Sea abrevia W = vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.