Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Estacionariedad débil en registros polisomnográficos de adultos mayores, como marcador de posible deterioro cognitivo

Presenta

Julio Cesar Enciso Alva

Dirección

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. Abril de 2018

Resumen

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

Abstract

La doctora Alejandra Rosales Lagarde propuso investigar el tema del sueño en el adulto mayor en el Área Académica de Gerontología de la UAEH, institución a la cual está comisionada de acuerdo al contrato con el programa Cátedras CONACYT con el número de investigadora 1411 y el proyecto número 2162, *Evaluación y diagnóstico de los aspectos biopsicosociales del adulto mayor y sus cuidadores primarios.*

De manera adicional, el presente estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080), Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalévskaya (2014); otorgados a a la doctora Erika E. Rodríguez Torres.

Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Erika Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo y centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por el permitirme el acceso y análisis de los registros de polisomnograma. Mi contribución con este trabajo luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.

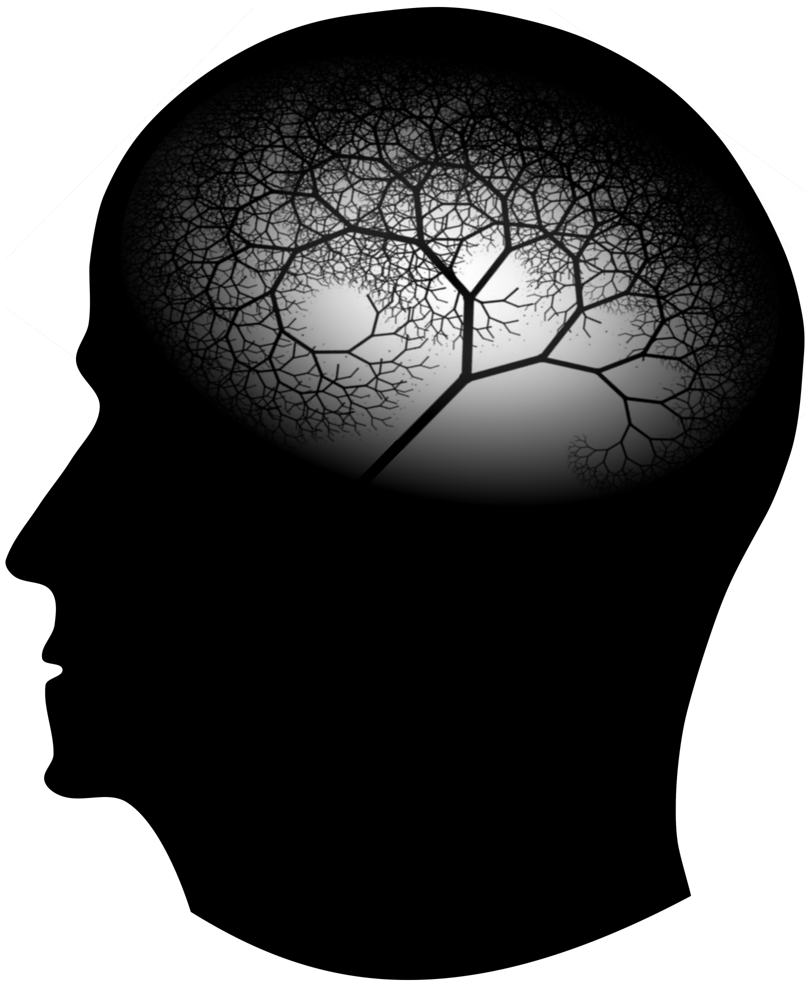
Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

Índice general

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

Índice de figuras

Índice de cuadros



"Creo que el conocimiento científico tiene
propiedades fractales; que por mucho que aprendamos,
lo que queda, por pequeño que parezca,
es tan infinitamente complejo como el todo
por el que empezamos.
Ese, creo yo, es el secreto del universo."

Isaac Asimov [4]

Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo se ha incrementado la esperanza de vida y la calidad de vida. Desafortunadamente, también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad. En México el sector de la población con más de 60 años de edad (considerados en alto riesgo para este tipo de enfermedades) contempló a 10 millones de personas en 2010, y en 2015 dicha cifra creció a 12 millones [25, 26]. En este trabajo se destaca la demencia de entre las enfermedades asociadas con la edad.

La demencia consiste en el desarrollo de deficiencias cognoscitivas (especialmente en atención y memoria) suficientemente graves para interferir en las actividades del individuo. Se considera que la demencia es irreversible, y no se han identificado curas definitivas [27], debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El deterioro cognitivo leve (DCL), una etapa temprana de la demencia, se entiende como el desarrollo de deficiencias cognoscitivas *objetivas* pero que no corresponden a daño físico del cerebro y no son lo suficientemente graves para calificarse como demencia.

Existen varios otros métodos alternativos para detectar –o definir– el DCL; desde la autopercepción por parte del paciente, hasta análisis genéticos, químicos y de imagenología cerebral. De entre estas técnicas se destaca a la polisomnografía (PSG), el registro conjunto de varias señales electrofisiológicas durante el sueño. En particular, se considera una PSG compuesta por registros de electroencefalograma (EEG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG) para medir, respectivamente, actividad eléctrica cerebral, tono muscular y movimientos oculares. El uso en particular de registros de PSG obedece principalmente a que (1) es una técnica relativamente barata y no invasiva, con relación al tipo de información que se obtiene, y (2) existe una cantidad moderadamente grande de marcadores para el DCL reportados usando la PSG.

Se ha encontrado, por ejemplo, correlaciones entre el DCL en adultos mayores con la *presencia* de ciertos tipos de ondas cerebrales [5, 52, 51]. Sin embargo, otros estudios sugieren que el EEG durante el sueño es un mejor predictor del DCL [buscar y citar Baryet ??].

En el presente trabajo se busca desarrollar métodos para determinar el DCL en base a registros de PSG en adultos mayores, como complemento a los resultados de pruebas neuropsicológicas. Se mantiene presente que el deterioro cognitivo (más allá del DCL) no puede reducirse exclusivamente a tales mediciones; las conclusiones obtenidas usando registros de señales electrofisiológicas deben ser contrastadas siempre con resultados de análisis complementarios.

Antecedentes

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron el PDCL en adultos mayores del estado de Hidalgo con el método no lineal del Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia (DFA, por sus siglas en inglés), encontrando efectivamente que los sujetos con PDCL presentan mayor ruido browniano en varias regiones en comparación con los pacientes sin PDCL[67].

En un estudio reciente, EEG de una noche polisomnografía de personas mayores con y sin deterioro cognitivo según las evaluaciones con el Neuropsi analizó el porcentaje de estacionariedad. En sueño MOR el porcentaje fue menor que el del sueño NMOR y la vigilia, se obtuvo estacionariedad como un índice para comparar NMOR versus sueño MOR en ambos grupos [59].

Pregunta de investigación y objetivos

Los registros de PSG en adultos mayores, modelados como procesos estocásticos, ¿pueden considerarse como débilmente estacionarios? ¿Dicha caracterización es afectada si el individuo presenta PDCL?

Objetivo general

Estudiar sobre pruebas estadísticas para detectar si una realización dada proviene de un proceso estocástico débilmente estacionario. Usar tales pruebas sobre registros de PSG en adultos mayores con y sin PDCL. Investigar si hay una relación entre la presencia de PDCL y la clasificación de los proceso estocásticos referidos como débilmente estacionarios.

Sobre la estructura del texto

Debido al enfoque aplicado del presente trabajo, esta porción del texto fue estructurada pensando en dos tipos de lectores: por un lado aquellos interesados principalmente en los objetos matemáticos involucrados y sus conexiones, y por otro lado quienes ven los mismos como herramienta y esperan entenderlos mejor. Los temas fueron ordenados pensando en el primer tipo de lector. Para el segundo tipo de lector, se ha preparado en la figura 1 un *mapa* del texto, pero principalmente de los temas sobre matemáticas.

En el primer capítulo se abordan varios temas preliminares sin lujo de detalles, con la finalidad de presentar un texto autocontenido; la finalidad del capítulo es definir formalmente los procesos estocásticos, espacios de Hilbert y estimadores.

En el segundo capítulo se definen los procesos estocásticos débilmente estacionarios, al conjunto de éstos se les da estructura de espacio de Hilbert, y finalmente se usa dicha estructura para definir el espectro de potencias como una generalización de la transformada de Fourier. Una porción importante del capítulo trata sobre la estimación efectiva del espectro de potencias a partir de observaciones dadas de un proceso estocástico.

En el tercer capítulo se define el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para una familia de procesos que no son débilmente estacionarios. Al final se expone una aplicación aparente menor del espectro evolutivo, pero que es fundamental para el resto del presente trabajo: la prueba de Priestley Subba-Rao. Esta prueba verifica –como prueba de hipótesis– si el espectro evolutivo de un proceso puede reducirse a un espectro de potencias; en otras palabras, si un proceso es débilmente estacionario.

En el cuarto capítulo se presentan conceptos de índole *fisiológica*: psicología, psicometría, electroficiología. El objetivo del capítulo es describir el DCL y cómo se detecta, describir qué es el sueño y como se analiza (en este caso a partir de la polisomnografía), y mencionar la relación entre el sueño y el DCL.

En el capítulo quinto se describe cómo se utilizó la prueba de estacionariedad débil para estudiar los registros de polisomnografía. En el capítulo sexto se discuten los resultados obtenidos, y se concluye que la técnica utilizada no es un marcador diagnóstico para el DCL; se reportan algunos hallazgos incidentales.

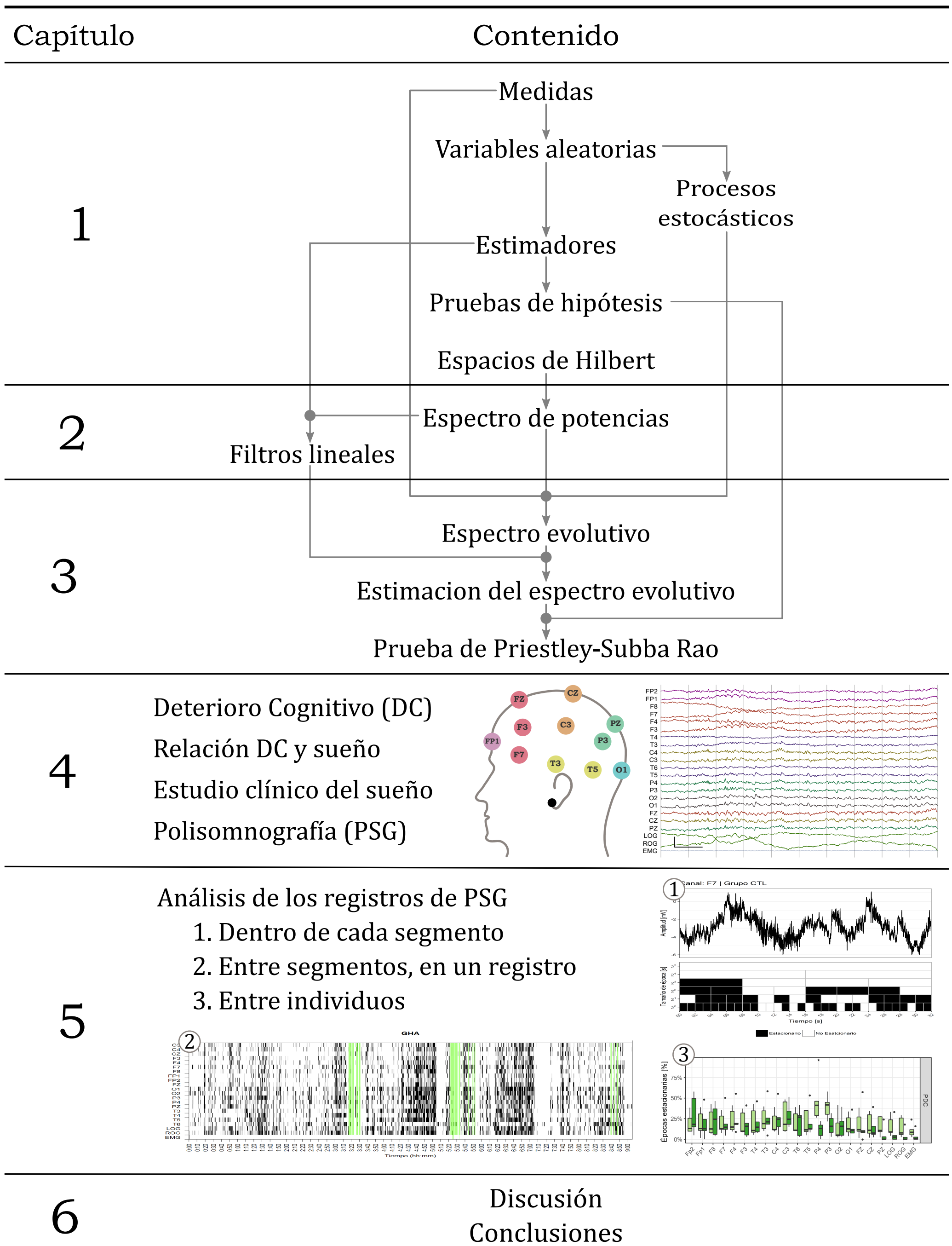


Figura 1: Se ilustra gráficamente las *dependencias* respecto a los tópicos de matemáticas, es decir, los temas que deben discutirse antes que otros. El resto del texto (incluyendo los tópicos de fisiología) son expuesto de forma más *secuencial*, por lo que no se consideró necesario ilustrar sus dependencias.

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

CAPÍTULO 1

Preliminares

El lector interesado puede revisar mayores detalles sobre teoría de la medida, probabilidad y estadística en los libros *“Probability for Statisticians”* por Galen R. Shorack [63] y *“Statistical Theory”* por Bernard W. Lindgren [33]. Redactar también [34].

1.1. Medidas

Definición 1.1. *Sea Ω un conjunto y sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de Ω. Se dice que $\mathcal{U}$ es una **σ-álgebra** si cumple*

- $\Omega \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U}$
- $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde A^C es el complemento de A en U

Los elementos de una σ-álgebra se denominan **conjuntos medibles**.

Definición 1.2. *Sea Ω un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ una familia de subconjuntos. Se define a $\sigma(\mathcal{A})$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$, como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{A}$*

En el contexto de la probabilidad, es particularmente importante la σ-álgebra de Borel, definida como

$$\mathcal{B} = \sigma\left(\{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}\right) \tag{1.1}$$

Este tipo de σ-álgebras puede definirse sencillamente para algún subconjunto $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_A = \sigma\left(\{(-\infty, a] \cap A \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}\right) \tag{1.2}$$

Definición 1.3. *Sea Ω un conjunto y $\mathcal{U}$ una σ-álgebra definida en Ω. El par $(\Omega,\mathcal{U})$ será referido como **espacio de medida**. Por nomenclatura, Ω es referido como espacio muestral y $\mathcal{U}$ como σ-álgebra de sucesos.*

Definición 1.4. *Sea $(\Omega,\mathcal{U})$ un espacio de medida. Se dice que una función $\mu : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ es una **medida** si cumple que*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ son tales que $A_n \cap A_m = \emptyset \Leftrightarrow m \neq n$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

*Donde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x\} \cup \{\infty\}$ y $\emptyset$ es el conjunto vacío. La terna $(\Omega,\mathcal{U},\mu)$ será referida como **espacio de medida**.*

Definición 1.5. *Sea $(\Omega,\mathcal{U},\mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es **σ-finita** si existen una familia de conjuntos medibles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

- $\mu\left(A_n\right) < \infty$
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$

Definición 1.6. *Considérese el espacio medible $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, con $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel. Se define la medida de Lebesgue, μ_L, la medida en el espacio mencionado tal que*

$$\mu_L([a, b]) = b - a \tag{1.3}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

1.1.1. Integración en espacios medibles

Definición 1.7. *Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \omega \to \mathbb{R}_+$ una función medible no-negativa. Sea $A \in \mathcal{U}$ un conjunto arbitrario y $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}$ el conjunto de las particiones de A en una cantidad finita de conjuntos medibles. Se define la* ***integral de f respecto a μ en el conjunto*** *A como*

$$\int_A f(x)\mu(x) := \sup_{\mathcal{C}_A}\left[\sum_{j=1}^{n} f(\lambda)\mu(E_m)\right] \tag{1.4}$$

Donde $\mathcal{C}_A = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$

Definición 1.8. *Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \omega \to \mathbb{R}_+$ una función medible. Se definen las funciones f^+ y f^- como*

$$f^+(x) = \text{máx}(f(x), 0)$$
$$f^-(x) = -\text{mín}(f(x), 0)$$

Se dice que f es integrable en A respecto a μ si cumple que $\int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$ y $\int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$; si así fuere, se define

$$\int_A f(\lambda)d\mu(\lambda) := \int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) - \int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) \tag{1.5}$$

Proposición 1.1. *Sean $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ espacios medibles y μ una medida sobre el primero. Una función g es integrable en $A \in \mathcal{U}_2$ respecto a μ_f si y sólo si $g \circ f$ es integrable en $f^{-1}(A)$ respecto a μ. En dado caso, se satisface que*

$$\int_A g(\lambda)d\mu_f(\lambda) = \int_{f^{-1}(A)} g \circ f(\lambda)d\mu(\lambda) \tag{1.6}$$

1.2. Variables aleatorias

Si una medida μ es acotada en todo el espacio de eventos se dice que es una **medida finita** (no confundir con σ-finita). Una medida de probabilidad puede entenderse como un caso particular de medida finita sobre los reales.

Definición 1.9. *El espacio de medida $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ se dice un* ***espacio de probabili-***

dad *si satisface que* $P(\Omega) = 1$

Definición 1.10. *Sean* $(\Omega_1,\mathcal{U}_1)$ *y* $(\Omega_2,\mathcal{U}_2)$ *dos espacios medibles. Se dice que una función* $f : \omega_1 \to \Omega_2$ *es* ***medible*** *si para todo* $A \in \mathcal{U}_2$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$

Definición 1.11. *Sea* $(\Omega,\mathcal{U})$ *un espacio medible y* $(I,\mathcal{B}_I,P)$ *un espacio de probabilidad. Una* ***variable aleatoria*** *es una función medible* $X : \Omega \to \mathcal{B}_I$ *entre estos espacios*

Siendo X una variable aleatoria, intuitivamente se puede definir la función de densidad de probabilidad de un conjunto medible $A \in \mathcal{B}$ como

$$P_X(A) = P\left(X^{-1}\left(A\right)\right) \tag{1.7}$$

Definición 1.12. *Sea* $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$ *un espacio de probabilidad. La* ***función de probabilidad acumulada****,* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$*, se define como*

$$F(x) := P\left((-\infty, x]\right)$$

Por comodidad, se define una notación alterna para la función de probabilidad acumulada de X como

$$P_X(x \leq x) := F_X(x) = P_X\left((-\infty, x]\right) \tag{1.8}$$

Si se puede definir una función de densidad de probabilidad para X, entonces puede escribirse

$$P(x \in A) = \int_A f_X(\lambda)d\lambda \tag{1.9}$$

Una función de probabilidad acumulada satisface las siguientes propiedades

- Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{x\to x^-} F(x) + P(\{x\})$
- $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

Conviene considerar las funciones que satisface las condiciones anteriores, referidas simplemente como **función de distribución**, pero que no necesariamente provienen de un espacio de probabilidad. Naturalmente, una función de distribución F puede inducir una medida μ.

Proposición 1.2. *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de distribución; se puede construir una medida μ_F sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que la función de probabilidad acumulada asociada al espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ es exactamente F. La medida μ_F será referida como la* ***medida inducida*** *por F.*

Así entonces, es perfectamente posible definir variables aleatorias especificando su respectiva función de probabilidad acumulada.

Cuando dos variables aleatorias X, Y tienen la misma función de densidad de probabilidad, se denota como

$$X \sim Y \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.1. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ p & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x \end{cases} \tag{1.11}$$

para algún $p \in [0, 1]$. Se dice entonces que X sigue una ***distribución de Bernaulli*** *con parámetro p, y se denota por $X \sim B(p)$.*

Ejemplo 1.2. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , z \leq x \end{cases} \tag{1.12}$$

para algún $p \in \mathbb{R}$. Se dice entonces que X sigue una ***distribución degenerada*** *con parámetro k, y se denota por $X \sim D(p)$.*

Ejemplo 1.3. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx \tag{1.13}$$

para algunos $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Se dice entonces que X sigue una ***distribución normal*** *con parámetros μ y σ^2, y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.*

1.2.1. Convergencia de variables aleatorias

Definición 1.13. *Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de probabilidad acumulada, correspondientes a la sucesión de variables aleatorias reales $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge en distribución*** *a una variable aleatoria X si, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{1.14}$$

donde F es la función de probabilidad acumulada de X.

Definición 1.14. *Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de probabilidad acumulada, correspondientes a la sucesión de variables aleatorias reales $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge en probabilidad*** *a una variable aleatoria X si, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1 \tag{1.15}$$

donde, para cada n, P es la medida de probabilidad para el vector $[X_n, X]$.

1.2.2. Variables aleatorias continuas y discretas

Definición 1.15. *Una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice* ***absolutamente continua*** *si para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ y una familia de intervalos, $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n| < \delta \tag{1.16}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \tag{1.17}$$

Se dice que una medida de probabilidad P es **continua** si su función de probabilidad acumulada es absolutamente continua.

Si una medida de probabilidad F es absolutamente continua, entonces existe una función f tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \tag{1.18}$$

Se dice que f es la **función de densidad de probabilidad**.

Sea P una medida de probabilidad, se define su **soporte** como

$$\mathcal{D}_P = \{x \in \mathbb{R} | P(\{x\}) > 0\} \tag{1.19}$$

Se dice que una medida de probabilidad, P, es **discreta** si su soporte es numerable.

Si una medida de probabilidad F es discreta, entonces existe una finito o infinito numerable $Q_F = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$F(x) = \sum_{n \leq x} q_n F(q_n) \tag{1.20}$$

Es posible construir una función de densidad de probabilidad para F como

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in Q_F \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \tag{1.21}$$

Naturalmente es posible construir medidas de probabilidad que no sean ni continuas ni discretas. Por ejemplo, considérese la función de Cantor K que puede ser definida iterativamente como

$$K_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} K_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} K_n(3x-2) + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \tag{1.22}$$

con $K_0(x) = x$ y $K := \lim_{n\to\infty} K_n$

Proposición 1.3. *La función de Cantor es continua pero no es absolutamente continua*

Luego entonces, puede construirse la siguiente función de distribución

$$F_K = \begin{cases} K(x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

la cual no es ni continua ni discreta. Por simplicidad, en el presente trabajo únicamente se considerarán variables aleatorias que son continuas o discretas.

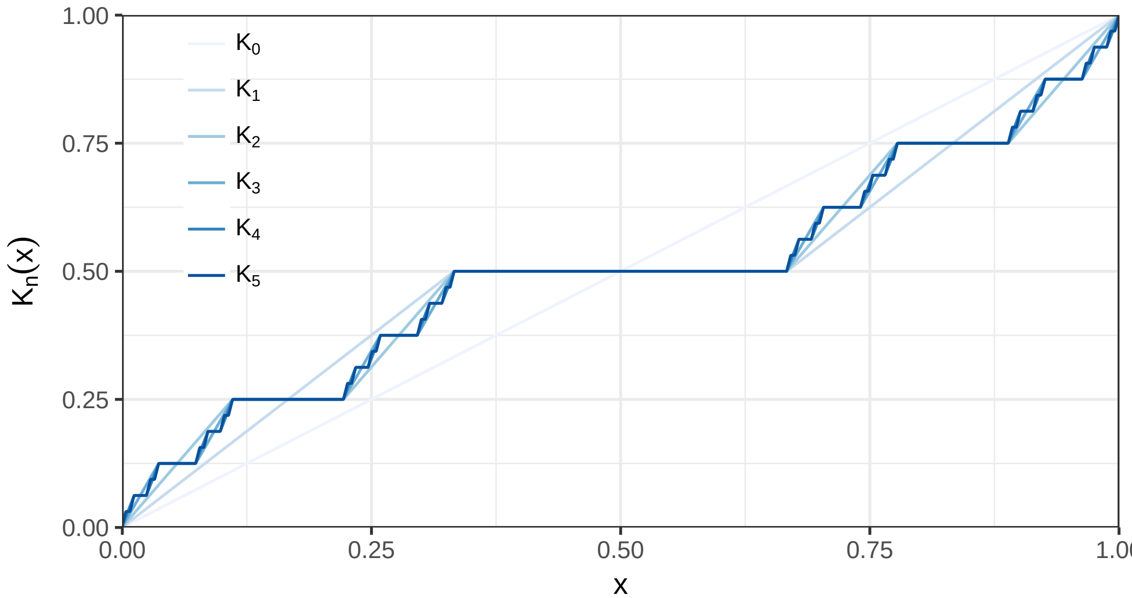


Figura 1.1: Algunos pasos en la *construcción iterativa* de la función de Cantor, que es creciente, acotada y continua pero no absolutamente continua. En el texto, la función de Cantor es usado para construir medidas con propiedades patológicas.

1.2.3. Valor esperado

Definición 1.16. *Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Si P es integrable en Ω respecto a P, entonces se define el* ***valor esperado*** *de X como*

$$\mathrm{E}[X] := \int_{\omega} X(\lambda) dP(\lambda) \tag{1.24}$$

Proposición 1.4. *Sea X una variable aleatoria y g una función medible en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Entonces $g(X)$ es una variable aleatoria cuyo valor esperado es*

$$\mathrm{E}[g(x)] = \int_{\Omega} [g(X)](\lambda) dP(\lambda) = \int_{R} g(x) dP(x) \tag{1.25}$$

Definición 1.17. *Sea X una variable aleatoria, se definen su media μ_X y varianza σ_X^2 como*

$$\mu_X := \mathrm{E}[X] \tag{1.26}$$

$$\sigma_X^2 := \mathrm{E}\left[(X - \mu_X)^2\right] \tag{1.27}$$

Por definición, no hay garantía que una variable aleatoria arbitraria tenga media o varianza bien definidas.

Naturalmente la notación μ_X únicamente se usa cuando no hay confusión con la notación para medidas. Así mismo, conviene mencionar ejemplos de variables aleatorias para las cuales no está bien definida su media o varianza.

? Ejemplos

Definición 1.18. *Sean X, Y dos variables aleatorias. Se define su* ***covarianza*** *como*

$$\operatorname{Cov}(X,Y) := \operatorname{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy dP_X(x) dP_Y(y) \tag{1.28}$$

Definición 1.19. *Sean X, Y dos variables aleatorias. Se define su* ***coeficiente de correlación de Pearson*** *como*

$$\rho(X,Y) := \sqrt{\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} \tag{1.29}$$

1.2.4. Vectores aleatorios

El concepto de variable aleatoria real (definición ?) puede extenderse trivialmente a conjuntos más generales *basados* en $\mathbb{R}$, como $\mathbb{R}^n$ para algún entero n; dicha generalización puede formalizarse fácilmente como otro caso particular.

Definición 1.20. *Se llama* ***vector aleatorio*** *a una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Se define a $\mathcal{B}^n$, la σ-álgebra de Borel n-dimensional, como*

$$\mathcal{B}^n := \sigma\left(\{(-\infty,a_1] \times (-\infty,a_2] \times \cdots \times (-\infty,a_n] \,|a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}\}\right) \tag{1.30}$$

Por notación, el vector aleatorio *n-dimensional* $\boldsymbol{X}$ será referido como

$$\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n] \tag{1.31}$$

esta notación para denotar vectores con *símbolos gruesos* será usada durante el texto, extendida igualmente para realizaciones y otros vectores similares.

Ejemplo 1.4. *Se dice que un vector aleatorio* $\boldsymbol{X} = [X_1, X_2, \cdots, X_d]$ *sigue una* ***distribución multinormal*** *si su función de probabilidad acumulada conjunta tiene la forma*

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |C|}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}C^{-1}\boldsymbol{x}^\intercal}{2}\right) \tag{1.32}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$*. El vector* $\mu \in \mathbb{R}^d$ *será referido como vector de medias, y la matriz* $C \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *como matriz de covarianza.*

1.3. Estimación de parámetros

Es común que se conozca cierta información de estos fenómenos que permita suponer que se comportan como variables aleatorias con cierta forma. Por ejemplo, ?.Conviene destacar el caso de fenómenos que son *forzados* a seguir una distribución conocida; por ejemplo, la metodología para aplicar la prueba Neuropsi [45] ha sido diseñada de tal forma que los puntajes siguen una distribución normal para cada segmento poblacional.

En este tipo de escenarios se puede hablar de una función de distribución $f(\bullet;\theta)$ que depende de un parámetro $\theta \in \Omega$, donde Ω se conoce como **espacio de parámetros**; el objetivo consiste en deducir el valor de θ a partir de los datos recabados.

Definición 1.21. *Sea* X *una variable aleatoria. Una* ***muestra de*** X ***de tamaño*** N *es una colección de variables aleatorias* $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ *tales que son independientes y que comparten la misma distribución de* X

Proposición 1.5. *Sea* X *una variable aleatoria que admite una función de densidad* f_X*, y sea* $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ *una muestra. La función de densidad de probabilidad conjunta para el vector* $[X_1, X_2, \ldots, X_N]$ *es*

$$f_{[X_1,\ldots,X_N]}(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{j=1}^{N} f(x_j) \tag{1.33}$$

Mientras no se indique lo contrario, las variables aleatorias en la muestra no están ordenadas.

Proposición 1.6. *Sea* X *una variable aleatoria,* $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ *una muestra y* $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ *un conjunto de observaciones. Se define la* ***función de distribu-***

ción muestral *como*

$$F_{X;N}(x) := \frac{1}{N}\sum_{x_j \leq x} 1 \tag{1.34}$$

Proposición 1.7. *Si el tamaño de una muestra de X se vuelve arbitrariamente grande, la función de distribución muestral converge en probabilidad a F, la función de probabilidad acumulada de X*

$$\lim_{N\to\infty} F_{X;N} = F_X \tag{1.35}$$

Definición 1.22. *Un* ***estadístico*** *es una función de las observaciones en una muestra*

Ejemplo en pagina 112 del libro de lindgren. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sea $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum X_j$, entonces

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{N}) \tag{1.36}$$

Teorema 1.8 (Cramér-Rao)**.** *Sea $\widehat{\theta}$ un estimador insesgado de θ. Si la función de verosimilitud asociada al estimador, L, es diferenciable, entonces*

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}\right) \geq \left(\mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}L(X;\theta)\right]\right)^{-2} \tag{1.37}$$

La igualdad se alcanza si y sólo si existe una función positiva k tal que puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(X;\theta) = k(\theta)\left[\widehat{\theta}(X) - \theta\right] \tag{1.38}$$

Definición 1.23. *Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y $X_1, \ldots, X_N$ una muestra de tamaño N. Un estimador $\widehat{\theta}$ es* ***suficiente*** *si la distribución de la variable $X|\widehat{\theta}$ no depende de θ*

Teorema 1.9. *Sea X una variable aleatoria que depende del parámetro θ. Un estadístico $\widehat{\theta}$ es suficiente si y sólo si existen funciones g y h tales que*

$$f_X(\bullet;\theta) = g(\widehat{\theta},\theta)h_X(\bullet) \tag{1.39}$$

Definición 1.24. *El* ***error de media cuadrática*** *para el estimador $\widehat{\theta}$ se define como*

$$EMC(\widehat{\theta}) := \mathrm{E}\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}\right) + \left(\mathrm{E}\left[\theta\right] - \theta^2\right) \tag{1.40}$$

Definición 1.25. *Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y $X_1, \ldots, X_N$ una muestra de tamaño N. Un estimador $\widehat{\theta}$ es* ***insesgado*** *si cumple que*

$$\mathrm{E}\left[\widehat{\theta}\right] = \theta \tag{1.41}$$

Se puede hablar del **sesgo** del estimador $\widehat{\theta}$ como $\mathrm{E}\left[\widehat{\theta}\right] - \theta$

Definición 1.26. *Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y $\left\{\widehat{\theta}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de estimadores definidos para muestras de X de tamaño arbitrario. La familia de estimadores se dice* ***consistente*** *si para cualquier $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{1.42}$$

Definición 1.27. *Así como en la definición anterior, se dice que a familia de estimadores converge en media cuadrática si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = 0 \tag{1.43}$$

Si esto se cumple, se dice que la familia de estimadores es ***consistente en media cuadrática***

Proposición 1.10. *Si $\widehat{\theta}_n$ es una familia de estimadores consistente en media cuadrática, entonces es consistente*

Proposición 1.11. *COROLARIO Una condición suficiente para para que una familia sea consistente en en media cuadrática es*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\widehat{\theta}_n\right] = \theta \tag{1.44}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\widehat{\theta}_n\right) = 0 \tag{1.45}$$

Teorema 1.12 (Límite central)**.** *Sea $\{X_1, \cdots, X_N\}$ una muestra de tamaño N de una variable aleatoria con distribución normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Defínase la variable aleatoria Y_N como*

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \tag{1.46}$$

Entonces $\{Y_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una distribución normal $N(0,1)$.

1.4. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se definen formalmente como variables aleatorias cuyo espacio muestral es un espacio de funciones. Intuitivamente es posible definir los procesos estocásticos como una *concatenación* de variables aleatorias, es decir, un conjunto de variables aleatorias indexadas sobre algún conjunto arbitrario. Sin embargo, indexar un conjunto infinito de variables aleatorias representa un problema técnico en el cuanto a definir al proceoso estocástico como espacio de probabilidad, especialmente al definir la medida de probabilidad asociada.

Debido a las limitaciones del presente trabajo, el tema se expone de manera parcial bajo un enfoque formal; la exposición se basa en aquella presentada por [Kolmogorov?], de modo que el lector interesado debe dirigirse a dicho texto.

Primeramente se define a $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, el conjunto de funciones con dominio en $\mathcal{T}$ y codominio en $\mathbb{R}$, el cual será usado como espacio de eventos[1]. A modo de *intervalos generalizados* se definen los conjuntos de la forma

$$I\left([t_1, a_1, b_1], \cdots, [t_N, a_N, b_N]\right) = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \;\middle|\; f(t_i) \in (a_i, b_i]\,,\, i = 1, \cdots, N \right\} \tag{1.47}$$

Es relativamente fácil extender la familia de estos intervalos por uniones e intersecciones finitas. Es un tanto más interesante definir una σ-álgebra generada por éstos conjuntos, pero tal parte se omite en el presente trabajo. En el texto por Kolmogorov se explora con mayor detalle la existencia de dicha σ-álgebra –y por tanto, la existencia de procesos estocásticos.

Definición 1.28. *Un* ***proceso estocástico*** $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *es una colección de variables aleatorias indexadas por el símbolo* $t \in \mathcal{T}$*.*

Definición 1.29. *Se dice que un proceso estocástico* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *es un* ***proceso estocástico en*** $\mathbb{R}$ *si cumple que* $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$*. Por notación, el índice* t *es referido como* ***tiempo****, mientras que* $\mathcal{T}$ *es el conjunto de* ***tiempos admisibles****.*

Por simplicidad, durante el presente trabajo sólo se usarán dos familias de procesos estocásticos en $\mathbb{R}$: si $\mathcal{T}$ es un intervalo, o si es parte de una *malla*. La primera familia se reserva para modelar las señales electrofisiológicas, mientras que la segunda se usará para modelar los registros de estas mismas señales. La distinción consiste

[1] Se puede definir análogamente a $\mathbb{C}^{\mathcal{T}}$, o espacios más generales

en que las señales electrofisiológicas sólo pueden ser registradas digitalmente en un conjunto finito de puntos en el tiempo; la atención del texto recae en ambos grupos de procesos, en espera que sus características sean similares de algún modo.

Definición 1.30. *Se dice que un proceso estocástico en $\mathbb{R}$ es* ***a tiempo continuo*** *si existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que*

$$\mathcal{T} = (a, b) \tag{1.48}$$

Así mismo, se dice que un proceso estocástico en $\mathbb{R}$ es ***a tiempo discreto*** *si existen $t_0, \Delta_X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que*

$$\mathcal{T} = \{t_0 + t \in \mathbb{R} \mid t \cdot \Delta_X \in \mathbb{Z}\} \tag{1.49}$$

Por notación, Δ_X es referida como frecuencia de muestreo.

Conviene destacar que el nombre *frecuencia de muestreo* hace referencia al proceso de registro, que algunos textos es referido como *muestreo*; esta terminología entra claramente en conflicto con las muestras de una variable aleatoria. En lo siguiente se evita llamar muestreo al proceso de registro, pero se conservará el término frecuencia de muestro.

Cabe mencionar que hay un conflicto similar con los términos *tiempo continuo* y *tiempo discreto*; estos términos no guardan ninguna analogía con las variables aleatorias discretas y continuas, ni con los espectro de potencias puramente continuos o puramente discretos (ver el capítulo siguiente). Estos términos se usan porque se encuentran muy extendidos en la literatura sobre análisis de señales.

Para facilitar la referencia de procesos estocásticos, los elementos que lo componen son denotados como:

$\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$	Todo el proceso
$X(t)$	Variable aleatoria en el proceso, para el tiempo t
$x(t)$	Una realización de $X(t)$
$F_{X(t)}$	Función de probabilidad acumulada para $X(t)$

1.4.1. Estacionariedad débil

De forma general, la estacionariedad significa que *algunas* propiedades de un proceso sean *invariantes* en el tiempo; la decisión sobre qué características deben ser invariantes, y en qué sentido, conlleva a diferentes definiciones. Por ejemplo, en la definición 1.31 se pide que todas las variables que integra al proceso sigan una distribución común, así como todas variables conjuntas con algunas características.

Definición 1.31. *Un proceso* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *se dice* ***fuertemente estacionario*** *si para cualesquiera* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ *y cualquier* τ *tal que* $t_i + \tau \in \mathcal{T}$*, se cumple que*

$$F_{[X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)]} \equiv F_{[X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots,X(t_n+\tau)]}$$

con $F_{[v_1,v_2,\ldots,v_N]}$ *es la función de probabilidad acumulada para el vector* $[v_1, v_2, \ldots, v_N]$*.*

En el contexto del presente trabajo la estacionariedad fuerte se considera *innecesariamente fuerte*, en cuanto a que es difícil de verificar y porque se usarán hipótesis más débiles. Se decidió conveniente una definición que garantice que los momentos puedan ser estimados, para lo cual deben ser constantes en el tiempo. La motivación principal para ello es el siguiente: si se modela una señal como proceso estocástico, entonces los momentos están asociados con variables físicas relevantes. En particular, el segundo momento está asociado con la *energía* (ver ??).

Definición 1.32. *Un proceso* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *se dice* ***estacionario de orden m*** *si, para cualesquiera* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$ *y cualquier* τ *tal que* $t_i + \tau \in \mathcal{T}$*, se cumple que*

$$\mathrm{E}\left[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2)\cdots X^{m_n}(t_n)\right] = \mathrm{E}\left[X^{m_1}(t_1+\tau)X^{m_2}(t_2+\tau)\cdots X^{m_n}(t_n+\tau)\right]$$

para cualesquiera enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ *tales que* $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$*.*

La definición 1.32 es conveniente tomando en cuenta que para estudiar la energía de un proceso (asociada al segundo momento) requerirá poner condiciones adicionales; por ejemplo, para estimar la varianza de la energía en un proceso, a partir de observaciones, se requiere que el proceso sea estacionario de orden 4. En el otro sentido, siempre que sea posible se usará la menor cantidad de hipótesis, para lo cual se presenta una definición más particular y *débil* de estacionariedad.

Definición 1.33. *Un proceso* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *se dice* ***débilmente estacionario*** *si existen constantes* $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ *y una función* $R : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ *tales que, para cualesquiera* $t, s \in T$ *se cumple*

- $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mu$

- $\mathrm{Var}\left(X(t)\right) = \sigma^2$
- $\mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = R(|s-t|)$

Proposición 1.13. *Para que un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ sea débilmente estacionario es suficiente y necesario que sea estacionario de orden 2.*

El que un proceso sea débilmente estacionario implica la existencia de una media y varianza características del proceso, es decir, que son comunes a todas las variables aleatorias que lo componen. Además, se implica la existencia de una función referida como *autocovarianza*.

Definición 1.34. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso estocástico sobre $\mathbb{R}$. Su **función de autocovarianza** es una función $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$R(t,s) = \mathrm{E}\left[\left(X(t) - \mathrm{E}\left[X(t)\right]\right) \overline{\left(X(s) - \mathrm{E}\left[X(s)\right]\right)}\right] \tag{1.50}$$

para cualesquiera tiempos admisibles $s, t \in \mathcal{T}$.

Como las señales electrofisiológicas son modeladas como procesos estocásticos, conviene traducir algunas de sus características en propiedades para los procesos estocásticos. Por ejemplo, se sabe que las señales representan variaciones en campos eléctricos, y entonces se puede afirmar sin duda que dicha cantidad es finita en todo momento; lo mismo se puede afirmar sobre la energía. En base a ello, los procesos estocásticos que modelan señales electrofisiológicas deben tener energía y varianza finitas en todo momento. Más aún, la actividad eléctrica cerebral y muscular presentan durante el reposo una actividad característica, referida como *actividad basal* o *línea base*, que es relativamente cercana a una constante en todo momento (ver figura 4.4). El fenómeno de línea base entra en el modelado como el supuesto de que las señales son procesos estacionarias de orden 1; por simplicidad, se puede considerar que la media de estos procesos es 0.

Una segunda característica de las señales que se traduce es la continuidad: las señales representan fenómenos eléctricos que cambian de manera *suave* en el tiempo, e idealmente son curvas derivables. El aspecto de los registros con *picos* se explica porque el cambio es suave, pero es muy rápido respecto a la tasa de registro.

Proposición 1.14. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocovarianza. Si R es continua en 0 entonces es continua en todo $\mathbb{R}$.*

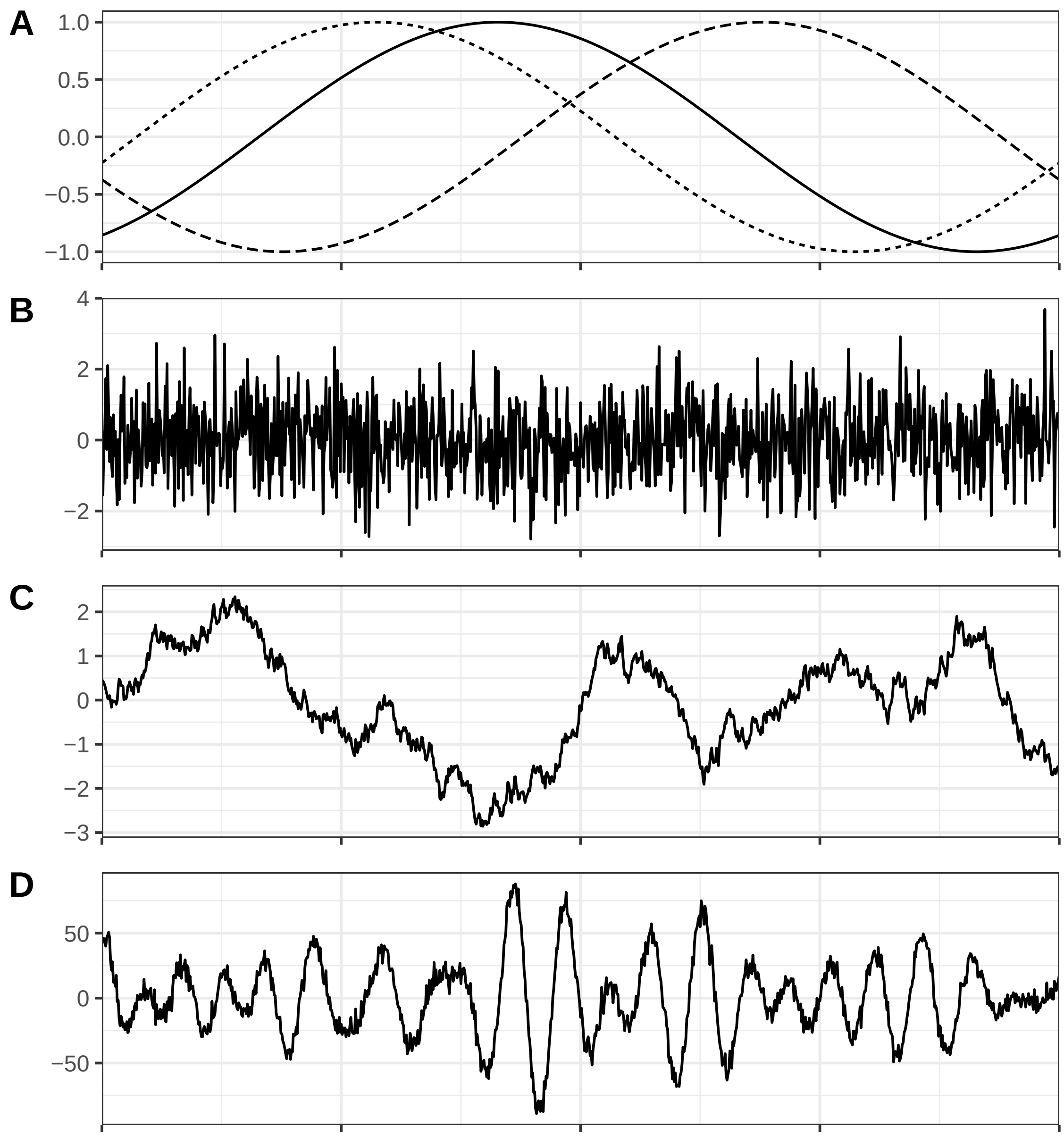


Figura 1.2: Realizaciones de algunos procesos débilmente estacionarios. **A.** Proceso oscilante, del cual se grafican tres realizaciones diferentes. **B.** Proceso ruido blanco. **C.** Proceso de medias móviles (MA). **D.** Proceso tipo alfa. **E.** Proceso ruido rosa.

Demostración. Supóngase que R es continua en 0. Tómese a $t_0 \in \mathcal{T}$ arbitrario para verificar que R es continua en t_0, y tómense s, h tales que $s, s+t, s+t+h \in \mathcal{T}$. Usando la desigualdad de Schwarz, puede escribirse que

$$\begin{aligned}
[R(t_0+h) - R(t_0)]^2 &= \left(\mathrm{E}\left[X(s+t_0+h)X(s)\right] - \mathrm{E}\left[X(s+t_0)X(s)\right]\right)^2 \\
&= \left(\mathrm{E}\left[X(s)\left[X(s+t_0+h) - X(s+t_0)\right]\right]\right)^2 \\
&\leq \mathrm{E}\left[(X(s))^2\right]\mathrm{E}\left[(X(s+t_0+h) - X(s+t_0))^2\right] \\
&\leq 2\sigma_X^2\left[\sigma_X^2 - R(h)\right]
\end{aligned}$$

Entonces, puede afirmarse que

$$|R(t_0+h) - R(t_0)| \leq \sqrt{2\sigma_X^2}\sqrt{R(0) - R(h)}$$

Como R es continua en 0, entonces

$$\lim_{h\to 0}(R(0) - R(h)) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}(R(t_0+h) - R(t_0)) = 0$$

de donde se concluye que R es continua en t_0, para cualquier $t_0 \in \mathcal{T}$. ■

Definición 1.35. *Un proceso a tiempo continuo* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *se dice* ***estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática****, en el tiempo* $t_0 \in \mathcal{T}$ *si*

$$\lim_{t\to t_0}\mathrm{E}\left[(X(t) - X(t_0))^2\right] = 0$$

Por simplicidad, y porque es la única definición de su tipo usada en el presente trabajo, la continuidad estocástica en media cuadrática será referida simplemente como *continuidad estocástica*.

Proposición 1.15. *Sea* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario y de media cero, y sea* R *su función de autocovarianza. El proceso es estocásticamente continuo en* $t_0 \in \mathcal{T}$ *si y sólo si* R *es continua en* 0.

Demostración. Para cualquier $t \in \mathcal{T}$, puede escribirse

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(X(t) - X(t_0))^2\right] &= \mathrm{Var}\,(X(t)) + \mathrm{Var}\,(X(t_0)) - 2\mathrm{Cov}\,(X(t), X(t_0)) \\
&= 2\left(\sigma_X^2 - R(t - t_0)\right) \\
&= 2\,(R(0) - R(t - t_0))
\end{aligned}
$$

Así entonces, la condición para continuidad estocástica puede reescribirse como

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0} \mathrm{E}\left[(X(t) - X(t_0))^2\right] = 0 &\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} (R(0) - R(t - t_0)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{\tau \to 0} R(\tau) = R(0)
\end{aligned}
$$

■

Definición 1.36. *Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **definida positiva** si para cualesquiera $x_{1,2}\,, \cdots, x_N \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2, \cdots, z_N \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$
\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} z_n z_m f(x_m - x_n) \leq 0 \tag{1.51}
$$

Proposición 1.16. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocorrelación. Se cumple que R es una función positiva definida.*

Demostración. Sean $t_1, t_2, \cdots, t_N \in \mathcal{T}$, $z_1, z_2, \cdots, z_N \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Se construye la variable aleatoria W como

$$
W = \sum_{n=1}^{N} z_n X(t_n) \tag{1.52}
$$

Ahora, nótese que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathrm{Var}\,(W) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} z_m z_n \mathrm{Cov}\,(X(t_m), X(t_n)) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} z_m z_n R(t_m - t_n)
\end{aligned}
$$

■

1.5. Pruebas de hipótesis

Una hipótesis es una afirmación sobre algún aspecto desconocido. Es tarea común en la estadística el decidir si alguna afirmación puede sostenerse a partir de la información proporcionada por un conjunto de observaciones. A partir de la aplicación masiva de pruebas neuropsicológicas a un grupo de adultos mayores uno puede preguntarse, por ejemplo, si hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas, o si la edad de los participantes está correlacionada con su desempeño en tareas de memoria. En la tabla ... se muestran los datos sobre una simulación (artificial) de dicho escenario.

Una herramienta de uso común para producir estas decisiones es la **pruebas de hipótesis**, la cual consiste en dos afirmaciones complementarias, es decir, tales que exactamente una de ellas es verdadera; tales afirmaciones son referidas como *hipótesis*, y deben elegirse de forma que sean equivalentes a la decisión que se busca. Usualmente la primera de las hipótesis (hipótesis nula, H_0) representa la afirmación más general o que se cree verdadera por omisión, mientras que la segunda hipótesis (hipótesis alternativa, H_A) se tomará como verdadera si existe suficente información para rechazar la veracidad de la primera. El enfoque de prueba de significancia es tomar un estadístico $\widehat{\theta}$ y evaluarlo sobre los datos, posteriormente se analiza qué tan diferente es el valor obrevado del típico cuando la hipótesis nula es verdadera.

Los estadísticos de prueba suele ser un estadístico construido para tener una distribución conocida salvo unos pocos parámetros fáciles de estimar. La interpretación usual es que, si H_0 es verdadera entonces $\widehat{\theta}$ puede no tener el valor predicho debido a factores ajenos al fenómeno estudiado, en consecuencia se suele hablar de una región de rechazo en el espacio de estados (ver más adelante). Bajo esta interpretación, un valor de $\widehat{\theta}$ dentro de la región de rechazo significa que los datos representan evidencia para rechazar H_0; un no-rechazo no significa precisamente que H_0 sea verdadera, sino que las observaciones no representan evidencia suficiente para rechazar H_0.

Definición 1.37. *En una prueba de hipótesis, rechazar H_0 cuando es verdadero es un **error del tipo I**. Así msimo, aceptar H_0 cuando es falsa es un **error del tipo II**.*

La naturaleza e intepretación de los estadísticos de prueba suelen ser muy particulares de las situaciones bajo las cuales son definidos. Una forma típica de normalizar los diferentes estadísticos es a través del p-valor, definido como la probabilidad de que ocurra un valor extremo del estadístico de prueba; el p-valor suele interpretarse como la *fuerza* de la evidencia contra H_0.

Definición 1.38. *Sea $\widehat{\theta}$ un estadístico de prueba. El* ***p-valor*** *asociado al $\widehat{\theta} = \theta_0$ es la probabilidad $P\left(\widehat{\theta}\right\rangle \theta_0)$*

Una **prueba de sinificancia** se entiende como una pruebas de hipótesis para algunos p-valores predefinidos, usualmente 0.05, 0.01, 0.005, entre otros. Un error común, pero muy extendido, es interpretar al p-valor como la probabilidad de obtener H_0.

Definición 1.39. *Dada una muestra poblacional y dos afirmaciones complementarias H_0 y H_A, una* ***prueba de hipótesis*** *es una regla de decisión que asigna a cada punto del espacio de estados una acción del conjunto Aceptar H_0, rechazar H_A, Rechazar H_0, aceptar H_A.*

Al conjunto del espacio muestral sonde se rechaza H_0 se le denomina ***región crítica****.*

Una propiedad deseable para un estadístico de prueba es poder acotar los errores de tipo I y de tipo II; para ello, para alguna región crítica arbitraria $\mathcal{C}$ se define el **nivel de significancia** de la prueba como

$$\alpha := \sup_{\theta \in H_0} p(\mathcal{C}|\theta) \tag{1.53}$$

Ejemplo: Retomando los datos de la tabla ..., considérese la pregunta *¿Los hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas neuropsicológicas?*. En este ejemplo se supone que los puntajes de los hombres en la prueba siguen una distribución normal con media μ_H y varianza 1, y similarmente para las mujeres con media μ_M y varianza 1. Como hipótesis nula se elige la posibilidad de que en promedio ambos grupos (hombre y mujeres) obtengan el mismo puntaje en la prueba, es decir

$$H_0 : \mu_H = \mu_M \tag{1.54}$$

y como hipótesis alternativa está la posibilidad de que los puntajes sean diferentes

$$H_A : \mu_H \neq \mu_M \tag{1.55}$$

1.6. Espacios de Hilbert

A grosso modo, un espacios de Hilbert es un conjunto de *vectores* en donde se ha definido un producto de vectores, el cual induce una métrica según la cual todas las sucesiones de vectores convergen. Es una estructura tan general que puede ser *inducida* sobre una gran variedad de conjuntos, tal como se hace en el siguiente capítulo.

Para poder definir adecuadamente estos objetos hay que definir, en ese orden, los siguientes conceptos: campo, espacio vectorial, producto interno, norma, métrica. Debido a los fines de este trabajo, se da una clara preferencia a algunos casos particulares en detrimento de una exploración completa del tema.

Definición 1.40. *Sea un conjunto $\mathcal{R}$, y sean $+ : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$, $\times : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ dos operaciones binarias. Se dice que la tupla $(\mathcal{R}, +, \times)$ un* ***campo*** *si cumple la siguientes propiedades:*

- *Las operaciones son conmutativas: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$ se cumple que*

$$+(x, y) = +(y, x) \qquad \times(x, y) = \times(y, x)$$

- *Las operaciones son asociativas: para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{R}$ se cumple que*

$$+(x, +(y, z)) = +(+(x, y), z) \qquad \times(x, \times(y, z)) = \times(\times(x, y), z)$$

- *Existen $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \mathcal{R}$ tales que, para cualquier $x \in \mathcal{R}$, se cumple que*

$$+(x, \mathbf{0}) = x \qquad \times(x, \mathbf{1}) = x$$

- *Para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $y \neq \mathbf{0}$, existen $-x, {}^1/_y \in \mathcal{R}$ tales que*

$$+(x, -x) = \mathbf{0}) \qquad \times(y, {}^1/_y) = \mathbf{1}$$

- *Para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{R}$ se cumple que*

$$\times(x, +(y, z)) = +(\times(x, y), +(x, z))$$

Por comodidad, se procede a escribir $x + y := +(x, y)$, y análogamente para $\times$.

Naturalmente las tuplas $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, usando la suma y multiplicación usuales, son campos; en el presente trabajo, estos serán los únicos campos considerados.

Definición 1.41. *Sean un conjunto $\mathcal{V}$, un campo $(\mathcal{R}, +_{\mathcal{R}}, \times_{\mathcal{R}})$, y dos operaciones $+_{\mathcal{V}} : \mathcal{V}^2 \to \mathcal{V}$, $\times_{\mathcal{V}} : \mathcal{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathcal{R}, \cdot)$ es un* ***espacio vectorial*** *si cumple las siguientes características:*

- *La operación $+_{\mathcal{V}}$ es conmutativa y asociativa: para cualesquiera $u, v, w \in \mathcal{V}$ se cumple que*

$$u +_{\mathcal{V}} v = v +_{\mathcal{V}} u \qquad u +_{\mathcal{V}} (v +_{\mathcal{V}} w) = (u +_{\mathcal{V}} v) +_{\mathcal{V}} w$$

- *Existe $\boldsymbol{e} \in \mathcal{V}$ tal que, para cualquier $u \in \mathcal{V}$ se cumple que*

$$u +_{\mathcal{V}} \boldsymbol{e} = u$$

- *Para cualquier $u \in \mathcal{V}$ existe un $-u \in \mathcal{V}$ tal que*

$$u +_{\mathcal{V}} -u = \boldsymbol{e}$$

- *La operación $\times_{\mathcal{R}}$ es asociativa con $\times_{\mathcal{V}}$: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $u \in \mathcal{V}$ se cumple que*

$$x \times_{\mathcal{V}} (y \times_{\mathcal{V}} u) = (x \times_{\mathcal{R}} y) \times_{\mathcal{V}} u$$

- *El neutro de $\times_{\mathcal{R}}$, $\mathbf{1}$, también es neutro para $\times_{\mathcal{V}}$: para cualquier $u \in \mathcal{V}$ se cumple que*

$$\mathbf{1} \times_{\mathcal{V}} u = u$$

- *Las operaciones $\times_{\mathcal{R}}$, $\times_{\mathcal{V}}$ son mutuamente dsitributivas: para cualesquiera $x, y \in \mathcal{R}$, $u, v \in \mathcal{V}$ se cumple que*

$$x \times_{\mathcal{V}} (u +_{\mathcal{V}} v) = (x \times_{\mathcal{V}} v) +_{\mathcal{V}} (x \times_{\mathcal{V}} v)$$
$$(x +_{\mathcal{R}} y) \times_{\mathcal{V}} u = (x \times_{\mathcal{V}} u) +_{\mathcal{V}} (y +_{\mathcal{R}} u)$$

Por simplicidad de notación, de aquí en adelante se omitirán los subíndices en las operaciones cuando se hable de espacios vectoriales; bajo esta línea de pensamiento, se usará un mismo símbolo para sumas y multiplicaciones definidas en diferentes conjuntos, pero sólo si se sobreentiende que las operaciones están correctamente definidas.

Ejemplo 1.5. *Primeramente se define a L^2, el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, como*

$$L^2 := \left\{ S : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \tag{1.56}$$

El conjunto L^2 admite una suma y producto por escalar definidas como

$$[S + Z](t) = S(t) + Z(t) \tag{1.57}$$

$$[x \cdot S](t) = xS(t) \tag{1.58}$$

para cualesquiera $S, Z \in L^2$, $x \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces la tupla $(L^2, \mathbb{C}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Para verificarlo, conviene notar que la suma y producto por escalar definidos para L^2 comparten propiedades con la suma y multiplicación de $\mathbb{C}$; sin embargo, hay que verificar que efectivamente son operaciones bien definidas en L^2. Con ese fin, sean $S, Z \in L^2$, $x \in \mathbb{C}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| [xS + Z]\,(t) \right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |xS(t) + Z(z)|^2 \, dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left[|xS(t)| + |Z(z)| \right]^2 dt \\ &\leq |x|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |Z(t)|^2 \, dt \\ &\quad + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\text{máx}\{S(t), Z(t)\}|^2 \, dt < \infty \end{aligned}$$

Es fácil verificar que puede definirse un neutro aditivo para L^2 como $\mathbf{0}(t) = 0$.

Definición 1.42. *Sea $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times)$ un espacio vectorial. Una función $\|\bullet\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ se dice una* ***norma*** *si satisface las siguientes condiciones:*

- $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \boldsymbol{e}$

- $\|xu\| = |x|\,\|u\|$ *para cualesquiera* $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{V}$
- $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para cualesquiera* $u, v \in \mathcal{V}$

Si así fuere, se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \|\bullet\|)$ *es un* ***espacio normado****.*

Ejemplo 1.6. *Se puede definir una norma para* L^2*, el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, de la siguiente manera:*

$$\|S\| = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 \, dt \tag{1.59}$$

para cualquier $S \in L^2$*. Entonces la tupla* $(L^2, \mathbb{C}, +, \cdot, \|\bullet\|)$ *es un espacio normado.*

Para fines del trabajo, conviene destacar que una norma puede ser utilizada para definir una métrica en un espacio normado.

Definición 1.43. *Sea* $\mathcal{X}$ *un conjunto arbitrario. Se dice que una función* $d : \mathcal{X}^2 \to \mathbb{R}_+$ *es una* ***métrica*** *si satisface las siguientes condiciones:*

- $d(x, y) = d(y, x)$ *para cualesquiera* $x, y \in \mathcal{X}$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para cualesquiera* $x, y, z \in \mathcal{X}$

Si así fuere, se dice que la tupla $(\mathcal{X}, d)$ *es un* ***espacio métrico****.*

Proposición 1.17. *Sea* $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \|\bullet\|)$ *un espacio normado. Defínase la función* $d : \mathcal{V}^2 \to \mathbb{R}$ *como*

$$d(u, v) = \|u - v\| \tag{1.60}$$

Entonces d *es una métrica, que será referida como la* ***métrica inducida****.*

Ejemplo 1.7. *La norma exhibida en el ejemplo 1.6 induce una siguiente métrica para* L^2 *de la siguiente manera:*

$$d(S, Z) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t) - Z(z)|^2 \, dt \tag{1.61}$$

Como ejemplo, puede definirse una métrica alternativa para L^2 *como*

$$d_A(S, Z) = \max_{t \in \mathbb{R}} |S(t) - Z(z)| \tag{1.62}$$

Definición 1.44. *Sea* $(\mathcal{V}, \mathbb{C}, +, \times)$ *un espacio vectorial. Una función* $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathcal{V}^2 \to \mathbb{C}$ *se dice un* ***producto interno*** *si satisface las siguientes propiedades:*

- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ *para cualesquiera* $u, v \in \mathcal{V}$
- $\langle xu + v, w \rangle = x \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para cualesquiera* $u, v, w \in \mathcal{V}$
- $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}_+$ *para cualquier* $u \in \mathcal{V}$
- $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \boldsymbol{e}$

Si así fuere, se dice que la tupla $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *es un* ***espacio con producto interno****.*

Proposición 1.18. *Sea* $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *un espacio con producto interno. Defínase la función* $\|\bullet\| : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *como*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \tag{1.63}$$

Entonces $\|\bullet\|$ *es una norma, que será referida como la* ***norma inducida****.*

Ejemplo 1.8. *La norma exhibida en el ejemplo 1.6 es inducida por el producto interno para* L^2 *definido de la siguiente manera:*

$$\langle S, Z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\overline{Z(t)}dt \tag{1.64}$$

como ejemplo, un segundo producto interno puede ser definido como

$$\langle S, Z \rangle_A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} S(t)\overline{Z(t)}dt \tag{1.65}$$

Puede notarse inmediatamente que si en un espacio con producto interno se induce una norma, entonces esa misma norma puede usarse para inducir una métrica. Tal concatenación de construcciones es favorable para algunos fines, ya que la métrica resultante tiene una *buena conexión* con el producto interno.

Como se dijo, el objetivo de definir métricas es poder hablar de convergencia en espacios vectoriales, motivo por el cual se define un tipo de convergencia.

Definición 1.45. *Sea* $(\mathcal{X}, d)$ *un espacio métrico. Se dice que una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ *es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon \tag{1.66}$$

Definición 1.46. *Se dice que el espacio con producto interno* $(\mathcal{V}, \mathbb{R}, +, \times, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ *es un* ***espacio de Hilbert*** *si, para cualquier sucesión de Cauchy* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$*, se cumple que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n \in \mathcal{V} \tag{1.67}$$

Las sucesiones de Cauchy se definen respecto a la métrica inducida por el producto interno.

1.6.1. Transformada de Fourier

En los ejemplos anteriores se definió a L^2, el conjunto de las funciones cuadrado-integrables, y se le definió un producto interno para *darle estructura* como espacio de Hilbert. De manera completamente análoga, a continuación se definen al conjuntos ℓ^2 de las series cuadrado-sumables:

$$\ell^p := \left\{ s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 < \infty \right\} \tag{1.68}$$

el cual admite el producto interno definido como

$$\langle s, z \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\overline{z(n)} \tag{1.69}$$

De manera similar se define al conjunto L_T^2 de las funciones cuadrado-integrables y periódicas con periodo $2T$:

$$L_T^p := \left\{ S : [-T, T] \to \mathbb{C} \;\middle|\; \forall t \in \mathbb{R}, S(t) = S(t + 2T); \int_{-T}^{T} |S(t)|^2 \, dt < \infty \right\} \tag{1.70}$$

el cual admite el producto interno definido como

$$\langle S, Z \rangle = \int_I S(t)\overline{Z(t)}dt \tag{1.71}$$

Una vez definidos estos espacios, es perfectamente posible definir la transformada de Fourier (en su *versión clásica*). La interpretación asociada y su contexto serán descritos posteriormente.

Definición 1.47. *La* ***transformada de Fourier*** *es una función* $\mathcal{F}_T : L^2_T \to \ell^2$ *tal que, para cualesquiera* $S \in L^2_T, n \in \mathbb{Z}$*, satisface*

$$\mathcal{F}_T[S](n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} S(t) e^{-i|n|t/2T} dt \tag{1.72}$$

La serie $\mathcal{F}_T[S]$ *es referida como los* ***coeficientes de Fourier*** *para* S*.*

De la definición anterior puede decirse que claramente $\mathcal{F}_T$ depende de T, lo cual se discutirá posteriormente. También destaca que es una **función lineal**, es decir, para cualesquiera $S, Z \in L^2_T$, $x \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\mathcal{F}_T[xS + Z] = x\mathcal{F}_T[S] + \mathcal{F}_T[Z] \tag{1.73}$$

además de que la función idénticamente cero es mapeada a la sucesión idénticamente cero ($\mathcal{F}_T[\mathbf{0}] = \mathbf{0}$). A la luz del comentario anterior, conviene investigar al **núcleo** de $\mathcal{F}_T$, el conjunto de elementos que son mapeados a la sucesión idénticamente cero.

$$\begin{aligned} \text{núcleo}(\mathcal{F}_T) &= \left\{ N \in L^2_T \;\middle|\; \mathcal{F}_T[N] = \mathbf{0} \right\} && (1.74) \\ &= \left\{ N \in L^2_T \;\middle|\; \int_{-T}^{T} |N(t)|^2 \, dt = 0 \right\} && (1.75) \end{aligned}$$

Así entonces, es evidente que el operador $\mathcal{F}_T$ no es invertible. Se puede definir, sin embargo, al operador pseudo-inverso $\mathcal{F}_T^{\text{inv}} : \ell^2 \to L^2_T$ como

$$\mathcal{F}_T^{\text{inv}}(t) = \sum_{n - \infty}^{\infty} A(n) e^{i|n|t/2T} \tag{1.76}$$

Una vez descrito el núcleo de $\mathcal{F}_T$ es perfectamente posible buscar subconjuntos de L^2_T donde la restricción de $\mathcal{F}_T$ sí sea invertible. Para los fines del presente texto, sólo se aborda un caso muy particular: cuando hay una cantidad finita de coeficientes de Fourier diferentes de cero.

El arquetipo para una función en L_T^2 son las funciones de la forma

$$\phi_n(t) = A_n \text{sen}\left({}^{\pi nt}/_{2T}\right) + B_n \cos\left({}^{\pi nt}/_{2T}\right) = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{1.77}$$

[completar??]

Se puede interpretar a $\mathcal{F}_T[f]$, los coeficientes de Fourier para f, como las *instrucciones* para *armar* a f a partir de funciones senoidales con periodo $2T$. En otras palabras, se ha usado al conjunto de funciones $\left\{e^{int/2T}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, referido como la **base de Fourier**, como una base para L_T^2. En el presente trabajo no se hablará más sobre el tema en un sentido formal, de forma que el lector interesado debe dirigirse a [??Friedman].

En un sentido más laxo, lo descrito anteriormente suele interpretarse como que las funciones periódicas (señales) pueden obtenerse como confluencia de señales cosenoidales. Escribir una señal dada como una suma de *componentes de frecuencia* ayuda a estudiar cómo se distribuye su *energía*.

Definición 1.48. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios con $a < b$, y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$. La **energía disipada** por la función f en el intervalo de tiempo $[a, b]$ es*

$$\textit{energía}_{[a,b]}[f] = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \tag{1.78}$$

*Similarmente, la **potencia** de la función f en el intervalo de tiempo $[a, b]$ es*

$$\textit{potencia}_{[a,b]}[f] = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 \, dt \tag{1.79}$$

Como *corolario* de la definición anterior, para cualquier $s \in L^2$ puede escribirse energía$_{[-T,T]}[S] = \|S\|$. Esta *conexión* puede usarse para *caracterizar* a la energía disipada de un función usando su transformada de Fourier.

Teorema 1.19 (Parseval)**.** *Sea $S \in L_T^2$, y sea $A = \mathcal{F}_T[S]$. Se cumple que*

$$\int_{-T}^{T} |S(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2$$

El teorema de Parseval puede interpretarse como que $\|S\| = \|\mathcal{F}_T[S]\|$. Se puede construir una interpretación más *atrayente* entendiendo a las funciones como señales: la energía disipada por una señal es la suma de la energía disipada por cada uno de sus *componentes de frecuencia*, es decir, los elementos de la base de Fourier en los que puede ser descompuesta la señal. Dentro de esta interpretación, tiene sentido preguntarse si algunos componentes de frecuencia son más importantes que otros, en el sentido que tengan asociada una mayor energía disipada.

Antes de pasar a otro tema conviene hablar sobre la convolución (representada como $*$), una tercera operación binaria definida en L^2_T como

$$[S * Z](\tau) = \int_{-T}^{T} S(t)\overline{Z(\tau - t)} d\tau \tag{1.80}$$

esta misma construcción puede repetirse[2] para ℓ^2 como

$$[s * z](\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\overline{z(\tau - n)} \tag{1.81}$$

La convolución toma interés en este contexto por su interesante relación con $\mathcal{F}_T$.

Teorema 1.20. *Sean $f, g \in L^2_T$. Entonces, se cumple que*

$$\mathcal{F}_T[f * g] = (\mathcal{F}_T[f])\,\overline{(\mathcal{F}_T[\overline{g}])} \tag{1.82}$$

[2] Más aún, la convolución puede construirse de manera *parecida* para muchos otros conjuntos de funciones, razón por la cual no se le encuadra formalmente como una única definición.

Demostración. Nótese que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_T[f*g](n) &= \int_{-T}^{T} [f*g](t) e^{-i|n|t/2T} dt \\
&= \int_{-T}^{T} \left[\int_{-T}^{T} f(u)g(u-t)du\right] e^{-i|n|t/2T} dt \\
&= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} f(u)g(u-t)e^{-i|n|t/2T} dtdu \\
&= \int_{-T}^{T} f(u) \left[\int_{-T}^{T} g(u-t)e^{i|n|(u-t)/2T} dt\right] e^{-i|n|u/2T} du \\
&= \int_{-T}^{T} f(u) \overline{\left[\int_{-T}^{T} \overline{g(u-t)}e^{-i|n|(u-t)/2T} dt\right]} e^{-i|n|u/2T} du \\
&= \int_{-T}^{T} f(u) \overline{[\mathcal{F}_T[\overline{g}](n)]} e^{-i|n|u/2T} du \\
&= \overline{[\mathcal{F}_T[\overline{g}](n)]} \int_{-T}^{T} f(u) e^{-i|n|u/2T} du \\
&= \overline{[\mathcal{F}_T[\overline{g}](n)]} \mathcal{F}_T[f](n)
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.21. *Sean $f, g \in L_T^2$. Entonces, se cumple que*

$$\mathcal{F}_T[f\,\overline{g}] = (\mathcal{F}_T[f]) * (\mathcal{F}_T[g]) \tag{1.83}$$

Demostración. Nótese que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ puede escribirse

$$\begin{aligned}
\left[(\mathcal{F}_T[f]) * (\mathcal{F}_T[g])\right](n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_T[f](k)\overline{\mathcal{F}_T[g](k-n)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T}^{T} f(u)e^{-i|n|u/2T} du\right] \overline{\left[\int_{-T}^{T} g(u)e^{-i|k-n|u/2T} du\right]} \\
&= 5
\end{aligned}$$

■

Corolario 1.22. *Sean $f, g \in L^2_T$. Entonces, se cumple que*

$$\left|\mathcal{F}_T[f * g]\right|^2 = \left|\mathcal{F}_T[f]\right|^2 \left|\mathcal{F}_T[\overline{g}]\right|^2 \tag{1.84}$$

$$\left|\mathcal{F}_T[f\, \overline{g}]\right|^2 = \left|(\mathcal{F}_T[f]) * (\mathcal{F}_T[g])\right|^2 \tag{1.85}$$

El teorema 1.22 es una motivación para teoremas parecidos, los cuales son usados extensamente en los capítulos siguientes para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias; ver las secciones 2.6 y 3.3.

1.6.2. Transformada de Fourier-Stieltjes

Una vez descrita la terminología sobre espacios de Hilbert, y habiendo definido la transformada de Fourier dentro de este contexto, es relativamente sencillo definir algunos otros espacios de funciones que admiten generalizaciones de la transformada de Fourier. Por ejemplo, retomando al conjunto L^2 (las funciones cuadrado-integrables sobre $\mathbb{R}$) puede definirse el operador $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}[S](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-i\omega t} dt \tag{1.86}$$

para cualesquiera $S \in L^2, \omega \in \mathbb{R}$. El operador $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ será referido como la **transformada de Fourier generalizada**.

Como un segundo ejemplo puede considerarse al conjunto ℓ^2_T de las sucesiones periódicas con periodo $2T$ y cuadrado-sumables, definido como

$$\ell^p_T := \left\{ s : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \forall t \in \mathbb{Z}, s(t) = s(t + 2T); \sum_{n=-T}^{T} \left|s(n)\right|^2 < \infty \right\} \tag{1.87}$$

El espacio ℓ^2_T admite como productos internos a aquél definido para ℓ^2, si se restringe apropiadamente. Para ℓ^2_T puede definirse al operador $\mathcal{F}^{\mathrm{d}}_T$ como

$$\mathcal{F}^{\mathrm{d}}_T[s](n) = \sum_{k=-T}^{T} s(k) e^{-i|n|k/2T} \tag{1.88}$$

para cualesquiera $s \in \ell^2_T, n \in \mathbb{Z}$. El operador $\mathcal{F}^{\mathrm{d}}_T$ es referido como la **transformada**

discreta de Fourier.

Como se dijo, es posible listar una gran cantidad de espacios con productos internos, que admiten la estructura de espacio de Hilbert y alguna generalización de la transformada de Fourier que satisfaga los teoremas descritos anteriormente. Por fines de concretitud, sólo se expondrá a fondo una versión *suficientemente general* para los fines del presente trabajo, y que es usada ampliamente en los siguientes capítulos: la transformada de Fourier-Stieltjes.

Primeramente se define a $L^2_{\mathbb{R}}$, el conjunto de las funciones que son periódicas o son cuadrado integrables, como

$$L^2_{\mathbb{R}} = L^2 \cup \left[\bigcup_{T \in \mathbb{R}_+} L^2_T \right] \tag{1.89}$$

Por cómo se definió, para función en $f \in L^2_{\mathbb{R}}$ existe una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que la siguiente igualdad se cumple casi en todas partes

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dF(\omega) \tag{1.90}$$

con la integral definida en el sentido de Stieltjes. Naturalmente, el par f y F cumplirá un papel similar a la transformada de Fourier, aunque falta decir algunos comentarios antes. La expresión 1.90 es claramente cierta porque:

- si $f \in L^2$, entonces puede usarse

$$F(\omega) = \int_0^{\omega} \mathcal{F}_{\mathbb{R}}[f](\lambda) d\lambda$$

- si $f \in L^2_T$ para algún T, entonces puede usarse F

$$F(\omega) = \text{sgn}(\omega) \sum_{n=0}^{\lfloor |\omega|/2T \rfloor} \mathcal{F}_T[f](n)$$

  donde sgn(ω) es el signo de ω: +1, -1, 0.

Notablemente $L^2_{\mathbb{R}}$ no es un espacio de Hilbert pues no es *cerrado ante sumas*, es decir, porque no hay garantía de que la suma de dos elementos arbitrarios de $L^2_{\mathbb{R}}$ sea un elemento de $L^2_{\mathbb{R}}$. Además, hay que definirle un producto interno.

La primera tarea es sencilla, pues puede usarse a S^2 como el conjunto más pequeño que es cerrado ante sumas y que contiene a $L^2_{\mathbb{R}}$ –similar a las σ-álgebras generadas por conjuntos arbitrarios.

?? TERMINAR DEFINIENDO FORMALMENTE A LA TR DE FOURIER-STIELTJES, SIN TANTO RODEO

CAPÍTULO 2

Espectro de potencias

Existe una larga tradición para entender y modelar las señales electrofisiológicas en términos de *ondas y frecuencias*, ya que fundamentalmente son fenómenos eléctricos [28]. En este capítulo se expone el enfoque *usual* en cuanto a modelar las señales electrofisiológicas como procesos estocásticos a los cuales se puede definir un *espectro de potencias*. El espectro de potencias es entendido como una generalización para el módulo de la transformada de Fourier; conserva algunas de sus propiedades, como el ser una norma inducida por un producto interno, así como la interpretación asociada como distribución de *energía*.

En la sección 2.2 se define el espectro de potencias para procesos estocásticos débilmente estacionarios y se establecen condiciones de existencia; la discusión sobre unicidad se ubica en la sección 2.3, donde se define una forma de representar al proceso en términos de su espectro. Finalmente, la sección 2.6 trata sobre la estimación del espectro de un proceso a partir de una realización del mismo; se aborda el enfoque de obtener una versión *suavizada* del espectro en aras de que los estimadores sean consistentes.

Un hecho que conviene reiterar es que todos los temas son expuestos dos veces: para procesos estocásticos a tiempo continuo y para aquellos a tiempo discreto; Cabe mencionar que en este capítulo se trata únicamente el caso de procesos estocásticos *débilmente estacionarios*, mientras que en el siguiente se explora una familia más general de procesos estocásticos. Dentro del contexto global del presente trabajo, el capítulo entero pudiera etiquetarse como el estudio de un caso particular salvo por simplicidad expositiva.

2.1. Espacios de variables aleatorias

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita. Se define un producto interno entre dos variables aleatorias arbitrarias, U y V, como*

$$\langle U, V\rangle := \mathrm{E}\left[U, \overline{V}\right] \tag{2.1}$$

Usando la suma y productos usuales de variables aleatorias, junto al producto interno descrito, el espacio $\mathcal{R}$ tiene la estructura de espacio de Hilbert.

Teorema 2.2 (Bochner)**.** *Sea f una función real arbitraria. Una condición suficiente y necesaria para que f sea definida positiva es que exista una función real F monótonamente creciente, continua por la derecha y acotada tal que puede escribirse*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \tag{2.2}$$

Corolario 2.3. *Usando $f \equiv g$ en el teorema anterior*

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \tag{2.3}$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u-t) du \tag{2.4}$$

2.2. Función de densidad espectral

La forma más *natural* de definir un espectro de potencias para un proceso estacionario es a través de la transformada de Fourier de sus realizaciones. Tal enfoque no funciona en general, pues no se puede garantizar que las realizaciones arbitrarias admitan una transformada de Fourier (ni aún de Fourier-Stieltjes). Se define entonces el espectro en base a un límite de subcolecciones de la realización, de modo que éstas sí admitan una transformada de Fourier.

Definición 2.1 (Función de densidad espectral, tiempo continuo)**.** *Sea* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *un proceso estacionario a tiempo continuo. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\left|\int_{-T}^{T} X(t)e^{-i\omega t}dt\right|^2\right] \tag{2.5}$$

[? ejemplos: ruido rosa esta bien definido, proceso oscilatorio no esta definido, ruido blanco no esta definido]

Definición 2.2 (Función de densidad espectral, tiempo discreto)**.** *Sea* $\{X(t)\}_{t/\Delta_t\in\mathbb{Z}}$ *un proceso estacionario a tiempo discreto. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2N}\left|\sum_{n=-N}^{N} X(n\Delta_t)e^{-i\omega n\Delta_t}\right|^2\right] \tag{2.6}$$

2.3. Representación espectral

Teorema 2.4. *Sea* $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ *un proceso continuo de media cero, débilmente estacionario, y que admite una función de densidad espectral* h*, sea* R *su función de autocovarianza. Entonces*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}R(\tau)d\tau \tag{2.7}$$

Demostración. Usando que $h = \lim_{T\to\infty} G_T$, nótese que

$$\begin{aligned}|G_T(\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} X_T(u)X_T(u-\tau)du\right]d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(u)X_T(u-\tau)du\right]d\tau\end{aligned}$$

Esta integral puede verse como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la serie truncada, $\widehat{R}_T$

$$
\begin{aligned}
\widehat{R}_T(\tau) &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(u)X_T(u-\tau)du \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2T}\int_{-T+|\tau|}^{T} X(u)X(u-|\tau|)du & ,|\tau| \leq T \\ 0 & ,\text{otro caso} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Así entonces

$$
\begin{aligned}
h(\omega) &= \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\left|G_T(\omega)\right|^2\right] \\
&= \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{2T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\widehat{R}_T(\tau)d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty} 2T\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathrm{E}\left[\widehat{R}_T(\tau)\right]d\tau
\end{aligned}
$$

Para esto, si $|\tau| \leq 2T$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\widehat{R}_T(\tau)\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} X_T(u)X_T(u-\tau)du\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T+|\tau|}^{T} X(u)X(u-\tau)du\right] \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T+|\tau|}^{T} \mathrm{E}\left[X(u)X(u-\tau)\right]du \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T+|\tau|}^{T} R(\tau)du \\
&= \frac{1}{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R(\tau)
\end{aligned}
$$

pero si $|\tau| > 2T$ entonces $\widehat{R}_T = 0$. Luego entonces

$$
\begin{aligned}
h(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} e^{i\omega t}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R(\tau)d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}g_T(t)R(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

con

$$g_T = \begin{cases} 1 - |\tau|/2T & , |\tau| \leq 2T \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.8}$$

Para establecer el límite anterior nótese que para cualesquiera τ, T se cumple que $0 \leq g_\tau \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g_T(\tau)| \, |R(\tau)| \, d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| \, d\tau \end{aligned}$$

Para cada ω, el módulo de $\int_{-T}^{T} e^{i\omega t} g_\tau(t) R(\tau) d\tau$ es monótonamente creciente y acotado, luego entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que

$$\begin{aligned} h(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\lim_{T\to\infty} g_T(t) \right] R(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} R(\tau) d\tau \end{aligned}$$

■

Es posible definir una **función de espectro integrado**, H, como

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 \tau} - e^{i\omega_1 \tau}}{i\tau} R(\tau) d\tau \tag{2.9}$$

Usando que h es una función simétrica tal que $\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = \sigma_X^2$, entonces puede escribirse

$$H(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_1 \tau} - 1}{i\tau} R(\tau) d\tau = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\omega\tau)}{\tau} R(\tau) d\tau \tag{2.10}$$

Conviene remarcar que el teorema 2.4 sólo aplica si el proceso admite una función de densidad espectral, y en consecuencia no es claro si el espectro integrado queda bien definido para procesos que no admiten una densidad espectral. Por ejemplo, considérese el proceso P definido como

El siguiente teorema permite establecer condiciones generales para las cuales se puede definir un espectro de potencias para un proceso estacionario.

Teorema 2.5 (Wiener-Khintchine). *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función F que tenga las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Como notación, el factor dF será referido como la función de espectro integrado normalizado para el proceso.

Una vez definido y probada la existencia de la función de espectro integrado normalizado dF, se define la **función de espectro integrado** dH (sin el adjetivo *normalizado*) como $dH := \sigma_X^2 dF$.

Una vez establecidas las condiciones de existencia para el espectro de potencias de un proceso débilmente estacionario, una pregunta muy natural es sobre la unicidad. Cuando se discutió la transformada de Fourier para funciones en L^2, se dejó en claro que es un operador invertible salvo por su núcleo (definición ?).

Se mostró que la transformada de Fourier puede ser parameterizada en módulo y argumento, siendo el primero es equivalente (salvo una función invertible) al espectro.

El espectro de un proceso estacionario fue definido como

$$h(\omega) = \lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left[|G_T(\omega)|^2\right]$$
$$G_T(\omega) = \int_{-T}^{T} e_{i\omega t} X(t) dt$$

la componente G_T cumple intuitivamente el papel de la transformada de Fourier, pero es omitida para demostrar más fácilmente la existencia del espectro h. Contemplando la parametrización de la transformada de Fourier, ¿puede definirse algo equivalente al argumento para un proceso estacionario? [? mejorar redacción]

Teorema 2.6. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $\mathrm{E}\left[dZ(\omega)\right] = 0$
- $\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega), dZ(\lambda)\right) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$

Demostración. Se mostró anteriormente que $\mathcal{R}$, el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita, tiene la estructura de espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle U, V\rangle := \mathrm{Cov}\left(U, V\right) = \mathrm{E}\left[U, \overline{V}\right] \tag{2.11}$$

Ahora bien, un proceso débilmente estacionario $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ puede verse como una *curva* en $\mathcal{R}$ indexada por $t \in \mathcal{T}$. Por el teorema de Winer-Khintchine, existe un proceso ortogonal dH tal que puede escribirse

$$\langle X(t), X(s)\rangle = R(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \tag{2.12}$$

De manera más general, puede hablarse de una familia de funciones $\{\phi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ (anteriormente se usó $\phi_t(\omega) = e^{i\omega t}$) y escribir

$$\langle X(t), X(s)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega)\overline{\phi_s(\omega)}dH(\omega) \tag{2.13}$$

Usando la familia de funciones $\{\phi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ puede construirse un segundo espacio de Hilbert, $\mathcal{H}_\phi$, como las combinaciones lineales de estas funciones. A este segundo espacio se le define el producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2\rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega)\overline{\phi_2(\omega)}dH(\omega) \tag{2.14}$$

Posteriormente se define un mapeo $M : \mathcal{H}_\phi \to \mathcal{R}$ como

$$M[\phi_t] := X(t) \tag{2.15}$$

el cual se extiende linealmente para cualesquiera coeficientes $c_1, c_2, \cdots \in \mathbb{R}$ y tiempos admisibles $t_1, t_2, \cdots \in \mathcal{T}$

$$M\left[\sum_i c_i\phi_{t_i}\right] = \sum_i c_i M\left[\phi_{t_i}\right] \tag{2.16}$$

Trivialmente, M conserva productos internos; basta notar que

$$\langle X(t), X(s)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega)\overline{\phi_2(\omega)}dH(\omega) = \langle \phi_1, \phi_2\rangle_H \tag{2.17}$$

Ahora, para trabajar con las funciones ϕ conviene descomponerlas en una base más *sencilla*, como límite de funciones simples. Para ello, se define una función indicadora

$$I(\omega;\omega_0,\omega_f) := \begin{cases} 1 & ,\omega_0 \leq \omega < \omega_f \\ 0 & ,\text{otro caso} \end{cases} \tag{2.18}$$

Luego, sea $\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_N\}$ una partición del intervalo $[-n, n]$, con $n >> N$. Entonces, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\phi_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} I(\omega;\omega_{i-1},\omega_i)\left[\inf_{\omega\in[\omega_{i-1},\omega_i]} \phi_t(\omega_i)\right] \tag{2.19}$$

Usando tal representación para las funciones ϕ's, se define a Z como

$$Z(\omega_f) - Z(\omega_0) = M\left[I(\omega;\omega_f,\omega_0)\right] \tag{2.20}$$

Luego entonces, aplicando M a ambos lados de la expresión 2.19 se obtiene

$$\begin{aligned}
M\left[\phi_t(\omega)\right] &= M\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N} I(\omega;\omega_{i-1},\omega_i)\left[\inf_{\omega\in[\omega_{i-1},\omega_i]}\phi_t(\omega_i)\right]\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N} M\left[I(\omega;\omega_{i-1},\omega_i)\right]\left[\inf_{\omega\in[\omega_{i-1},\omega_i]}\phi_t(\omega_i)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \left(Z(\omega_i) - Z(\omega_{i-1})\right)\left[\inf_{\omega\in[\omega_{i-1},\omega_i]}\phi_t(\omega_i)\right]\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\phi_t(\omega)dZ(\omega)
\end{aligned}$$

El resultado que se busca queda establecido porque $M[\phi_t] = X(t)$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi_t(\omega)dZ(\omega) \tag{2.21}$$

■

2.3.1. Representación de procesos a tiempo discreto

La existencia de espectros para procesos a tiempo discreto es dada por el teorema

Teorema 2.7 (Wold). *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ débilmente estacionario es que exista una función F con las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\pi) = 0$
- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau}dF(\omega)$$

Demostración. Por simplicidad, supóngase que $\Delta_X = 1$. A tiempo discreto, la función de autocovarianza adquiere la forma de una secuencia $\{R(\tau)\}_{\tau\in\mathbb{Z}}$. Se define una función R_C que es igual a R pero cuyo dominio es $\mathbb{R}$, de la forma

$$R_C(\tau) = (1 - \tau + \lfloor\tau\rfloor)\, R\left(\lfloor\tau\rfloor\right) + (s - \lfloor\tau\rfloor)\, R\left(\lfloor\tau\rfloor + 1\right) \tag{2.22}$$

Se demuestra en Priestley 1963 [?] que existe un proceso estacionario cuya función de autovarianza es R_C, luego entonces por el teorema 2.5 existe una función de distribución Q tal que

$$R_C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \tag{2.23}$$

Dado que R y R_C son iguales cuando τ es entero, se puede considerar la siguiente manipulación con $\tau \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{2s+1\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2\pi s)\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s)\right]
\end{aligned}$$

Finalmente se puede definir a F, la función de densidad descrita por el teorema, usando

$$dF(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \tag{2.24}$$

El que F sea monótonamente se deduce de que Q lo es. Como dQ es simétrica, puede definirse convenientemente que $F(-\pi) = 0$ y $F(\pi) = 1$ con base a que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dQ(\omega) = 1 \tag{2.25}$$

■

En virtud del teorema de Wold, se puede obtener una variante del teorema 2.6 para procesos a tiempo discreto cambiando el intervalo de integración.

Teorema 2.8. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso a tiempo discreto, débilmente estacionario y de media 0. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $\mathrm{E}\left[dZ(\omega)\right] = 0$
- $\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega), dZ(\lambda)\right) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$

La demostración es completamente análoga, reemplazando el teorema de Winer-Khintchine por el de Wold. Como notación, las representaciones en los teoremas 2.6 y 2.8 son referidas como **representaciones de Wold-Cramér**.

2.4. Efecto alias

Hasta ahora se han tratado por separado los procesos a tiempo discreto y a tiempo continuo. Una vez expuestos algunos resultados importantes, se procede a explorar la familia de los procesos a tiempo discreto generados como subcolección de algún proceso a tiempo continuo. Dicha familia se vuelve importante porque se ha decidido modelar a las señales electrofisiológicas como procesos a tiempo continuo, pero sólo se pueden obtener registros de ellas a tiempo discreto.

Este tópico es relevante desde el punto de vista práctico, ya que existe una amplia variedad de condiciones técnicas bajo las cuales se suelen efectuar los registros. La

AASM establece un mínimo de 128 puntos por segundo (Hz) para registrar el polisomnograma, pero la frecuencia de muestreo usualmente es decidida dependiendo del fenómeno a observar y las características del aparato de registro a usarse. Siguiendo esta idea, conviene hablar del posible efecto de obtener registros con una mayor o menor cantidad de puntos por unidad de tiempo

Considérese un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario, $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$, y sea $\Delta_t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Se construye al proceso $\{Y(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$Y(n) = X(n\Delta_t) \tag{2.26}$$

En virtud del teorema 2.6, $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \tag{2.27}$$

Luego entonces puede reescribirse

$$\begin{aligned}
Y(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega n\Delta_t} dZ_X(\omega) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{(2k-1)\pi/\Delta_t}^{(2k+1)\pi/\Delta_t} e^{i\omega n\Delta_t} dZ_X(\omega) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\left(\omega+\frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)n\Delta_t} dZ_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\omega n\Delta_t} dZ_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Con base a lo anterior, puede definirse para $\omega \in [-{}^{\pi}/_{\Delta_t}, {}^{\pi}/_{\Delta_t}]$

$$dZ_Y(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right) \tag{2.29}$$

En base al teorema 2.6, se define para $|\omega| \leq {}^{\pi}/_{\Delta_t}$

$$
\begin{aligned}
dH_Y(\omega) &= \mathrm{E}\left[|dZ_Y(\omega)|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right)\right|^2\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{E}\left[\left|dZ_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right)\right|^2\right] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} dH_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right)
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

En el segundo paso se usa que $\{dZ_X\}$ es un proceso ortogonal de media cero. Antes de poder declara que dH_Y es el espectro integrado del proceso discretizado, conviene hacer el cambio de variable $\omega^\star := \omega\Delta_t$

$$
\begin{aligned}
dH_Y(\omega^\star) &= dH_Y(\omega\Delta_t)\frac{d\omega^\star}{d\omega} \\
&= \frac{1}{\Delta_t} dH_Y(\omega\Delta_t)
\end{aligned}
$$

donde $|\omega^\star| \leq \pi$. Si $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ posee un espectro puramente continuo –de manera equivalentemente, si dH_X es absolutamente continua– entonces puede escribirse

$$
h_Y(\omega^\star) = \frac{1}{\Delta_t}\sum_{k\in\mathbb{N}} h_X\left(\omega + {}^{2k\pi}/_{\Delta_t}\right) \tag{2.31}
$$

con $|\omega| \leq \pi$. Así entonces h_Y puede entenderse como una versión *colapsada* de h_X, fenómeno conocido como **efecto alias**.

2.5. Filtros lineales

Definición 2.3. *Se dice que un operador $\mathcal{L}_g : L^2 \to L^2$ es un* ***filtro lineal*** *si puede escribirse de la forma*

$$
\mathcal{L}_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(t-u) du \tag{2.32}
$$

para alguna función $g \in L^2$ que es referida como ***función de respuesta****.*

Naturalmente, los filtros lineales son funciones lineales. Son continuos en la identidad aditiva de L^2, y por tanto son continuos en todo L^2. Como los filtros lineales son funciones lineales y continuas, entonces son funciones medibles bajo la medida de Lebesgue. Se puede hablar de la composición de un filtro lineal $\mathcal{L}_g$ con un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$, es decir, definir un proceso de la forma

$$Y(t) = \mathcal{L}_g[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \tag{2.33}$$

Los procesos generados como en 2.33, usualmente referidos como *procesos filtrados*, son comunes en el análisis de señales. En este trabajo serán usados para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias. Para ello, conviene describir la relación entre el espectro de un proceso y el de su *versión filtrada*.

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario. Usando el teorema de representación espectral [?], puede escribirse

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \tag{2.34}$$

Ahora bien, escribiendo al proceso $\{Y(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} dZ_X(\omega)\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega - u} du\right] dZ_X(\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\Gamma(\omega) dZ_X(\omega)
\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega - u}du$ será referida como la **función de transferencia** asociada al filtro. Luego entonces

$$\begin{aligned}
dH_Y(\omega) &= \mathrm{E}\left[|dZ_Y(\omega)|^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[|\Gamma(\omega)dZ_X(\omega)|^2\right] \\
&= |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega)
\end{aligned}$$

Se concluye que si ambos procesos tengan FDE bien definidas, se cumple que

$$h_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 \, h_X(\omega) \tag{2.35}$$

Conviene notar que la relación 2.35 era de esperarse como una generalización del teorema [fourier ?].

2.5.1. Filtros de banda

Como se mencionó, los filtros lineales tienen múltiples aplicaciones en el análisis de señales, además de la estimación del espectro de potencias. Conviene destacar, aún como comentario, la familia de filtros lineales cuya función de transferencia es de la forma

$$\Gamma^{\star}_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \tag{2.36}$$

este tipo de filtros son referidos como *filtros pasa bajas.*Análogamente, un *filtro pasa altas* tiene una la misma forma cambiando la condición por $|\omega| \geq \omega_0$.

Cuando se aplica un filtro pasa bajas a un proceso, el efecto producido suele interpretarse como la *eliminación de los componentes de frecuencia* mayores a ω_0. Tal efecto es deseable si, por ejemplo, se desea estudiar la actividad alfa en el lóbulo frontal (7–12 Hz) pero se espera la interferencia de actividad muscular en el rostro (típicamente $>$ 100 Hz); bastaría construir un filtro pasabajas con $\omega_0 = 100$ Hz.

[?] escribir la forma que debería tener g

Este tipo de pre-procesamiento garantiza, por ejemplo, que en los registros no hay ruido inducido por la corriente eléctrica (120 Hz); en general, el uso de filtros pasa bajas y pasa bajas garantiza heurísticamente la eliminación de una variedad de ruidos comunes. En el presente texto no se exploran con más detalles este tipo de filtros y sus efectos, el lector interesado puede dirigirse al libro *“Medical Instrumentation. Applications and Design”* por John G. Webster [69].

2.6. Estimadores

El objetivo de esta sección es calcular el espectro de potencias de un proceso a partir de una realización del mismo; en el contexto del presente trabajo, las palabras *observación* y *registro* serán usadas como sinónimos. Con vista en la expresión 2.6, un estimador *natural* para el espectro sería el *periodograma*.

Definición 2.4. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario a tiempo discreto, cuyo espectro es puramente continuo y cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_X = 1$. Sea $\{x_t\}_{t=0,\dots,N}$ una realización de longitud N. El* ***periodograma****, I_N, es un estimador definido como*

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N}\left|\sum_{t=0}^{N} e^{i\omega t}x(t)\right|^2 \tag{2.37}$$

Proposición 2.9. *El periodograma (I_N) es un estimador insesgado para el espectro de potencias (h), es decir*

$$\mathrm{E}\left[I_N(\omega)\right] = h(\omega) \tag{2.38}$$

Proposición 2.10. *La familia de estimadores $\{I_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ satisface que*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left(I_N(\omega)\right) = \left[h(\omega)\right]^2 \tag{2.39}$$

Se puede demostrar que $\mathrm{E}\left[I_N(\omega)\right] = h(\omega)$, de modo que es un estimador **insesgado**. Sin embargo, también se demuestra que

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}\left(I_N(\omega)\right) = \left(h(\omega)\right)^2$$

de modo que es un estimador **inconsistente**, lo cual lo descalifica para usarse en la práctica. Para entender por qué el periodograma es inconsistente, conviene escribirlo como

$$I_N(\omega) = 2\sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}^{\star}(\tau)\cos\left(\omega\tau\right) \tag{2.40}$$

donde $\widehat{R}^{\star}$ es un estimador para la función de autocovarianza, R, definido como

$$\widehat{R}^{\star}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) \tag{2.41}$$

Así mismo, la misma expresión puede interpretarse como que el periodograma es una suma ponderada de los valores de $\widehat{R}^{\star}$; mientras más grande es τ, menos parejas de puntos cuya distancia es τ, y entonces $\widehat{R}^{\star}$ tiene mayor varianza cuanto mayor sea τ.

Dado que la inconsistencia del periodograma es porque el periodograma es construido usando estimadores con varianza elevada, la solución natural es evitar tales componentes. Para ello, escójase una función de pesos, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, defínase

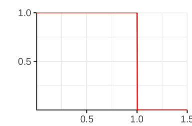
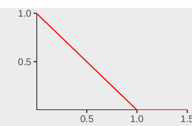
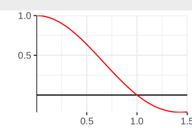
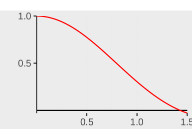
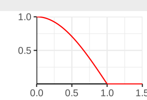
$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau)\widehat{R}^{\star}(\tau)e^{i\omega\tau} \tag{2.42}$$

Resulta ilustrativo reescribir a $\widehat{h}$ en términos del periodograma

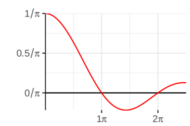
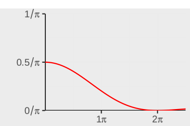
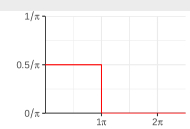
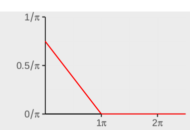
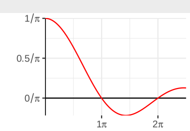
$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta)\Gamma(\omega - \theta)d\theta$$

donde $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega - u}du$. Se puede demostrar que este tipo de estimadores son asintóticamente insesgado y consistentes.

Cuadro 2.1: Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta)

Nombre	$k(u), \|u\| \leq \pi$	Bosquejo
Bartlett	1	
Fejer	$1 - \|u\|$	
Daniell	$\frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u}$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{(\pi u)^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u)\right]$	
Cosenoidal	$\cos(\pi u)$	

Cuadro 2.2: Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia)

Nombre	$K(\theta)$	Bosquejo
Bartlett	$\frac{1}{\pi}\frac{\text{sen}\,(\theta)}{\theta}$	
Fejer	$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\text{sen}\,(\theta/2)}{\theta/2}\right]^2$	
Daniell	$1/2\pi$, si $\lvert\theta\rvert \leq \pi$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{4\pi}\left[1-(\theta/\pi)\right]$, si $\lvert\theta\rvert \leq \pi$	
Cosenoidal	d	

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

CAPÍTULO 3

Espectro evolutivo

En esta sección se introduce el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no-estacionarios cuya estructura cambia lentamente en el tiempo. Esta definición en particular fue presentada por Maurice Priestley en 1965 [53]; la información del presente capítulo puede revisarse con mayor detalle en su libro *"Spectral Analysis and Time Series"* [54], particularmente en el capítulo 11.

Es importante mencionar que la sección 3.1 representa la parte central de este capítulo, describiendo un objeto matemático bien definido que lidia con un problema que roza la vaguedad; es por ello que viene acompañado de una discusión que podría ser omitida dentro del contexto global del trabajo, pero que tiene repercusiones importantes en el uso práctico del espectro evolutivo. Por ejemplo, en la sección 3.2 se discute sobre las condiciones bajo las cuales es *posible* estimar el espectro evolutivo del proceso, mientras que la sección 3.3 parte de tales condiciones para describir cómo efectuar la estimación.

Finalmente, en la sección 3.4 se describe una aplicación aparentemente menor del espectro evolutivo, pero que constituye una parte central en el presente trabajo: la detección de estacionariedad débil a partir del espectro evolutivo.

3.1. Definición del espectro evolutivo

Considérese un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ que, por simplicidad, tiene media cero y varianza finita en todo momento, es decir

$$\mathrm{E}\left[X(t)\right] = 0 \ , \ \mathrm{Var}\left(X^2(t)\right) < \infty$$

Se define el *núcleo de covarianza* para el proceso como

$$R(s,t) := \mathrm{E}\left[\overline{X(t)}X(s)\right] \tag{3.1}$$

Conviene recordar el caso de un proceso estacionario, en el cual el núcleo de covarianza $R(t,s)$ puede verse como función de la variable $|t-s|$, y en virtud del teorema de Winer-Khintchine acepta una representación de la forma

$$R(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \tag{3.2}$$

donde H es el espectro integrado del proceso y tiene las propiedades de una función de distribución sobre $\mathbb{R}$. Como consecuencia, $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \tag{3.3}$$

donde Z es un proceso estocástico que satisface

$$\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)\right) = dH(\omega_1)\delta(\omega_1,\omega_2) \tag{3.4}$$

En general, se espera tener una generalización que conserve las propiedades anteriores. Con vista a la ecuación 3.2, puede restringirse la atención a procesos no-estacionarios que acepten una representación de la forma

$$R(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega;s)}\phi(\omega;t)d\mu(\omega) \tag{3.5}$$

Para alguna medida μ definida en $\mathbb{R}$ y alguna familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R}\times\mathcal{T}\to\mathbb{C}\}$; debido a la interpretación que se le va a dar a este tipo de funciones, la variable $t\in\mathbf{F}$ será referida como un índice. Una condición a satisfacer es que $\mathrm{Var}\left(X^2(t)\right) = R(t,t) < \infty$, para lo cual cada $\phi\in\mathbf{F}$ debe ser cuadrado integrable con respecto a μ, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\omega; t) d\mu(\omega) < \infty \tag{3.6}$$

Se puede demostrar t(4.11.12) que bajo estas condiciones el proceso $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega; t) dZ(\omega) \tag{3.7}$$

donde el proceso Z satisface que

$$\text{Cov}\left(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)\right) = \mu(\omega_1)\delta(\omega_1, \omega_2) \tag{3.8}$$

Se puede demostrar p(parzen 1959) que si un proceso admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia de funciones $\mathbf{F}$, entonces tiene admite múltiples representaciones usando diferentes familias de funciones.

Para dar a estas representaciones la interpretación de espectro, conviene usar una familia de funciones que conserve algunas propiedades de los senos y cosenos; por ejemplo, las funciones oscilatorias

Definición 3.1. *Una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se dice* ***oscilatoria*** *si admite una representación de la forma*

$$\phi(t) = A(t)e^{i\omega t} \tag{3.9}$$

donde A es de la forma

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dK(\omega) \tag{3.10}$$

y donde $|dK(\omega)|$ tiene un único máximo global en $\omega = 0$

Si una función ϕ es oscilatoria como en la definición 3.1, entonces puede entenderse como una función senoidal *modulada* por una función A; no se permite que la función A sea predominantemente periódica.

Como se mencionó, las expresiones 3.5 y 3.7 pueden ser interpretadas como espectro si se usa una familia $\mathbf{F}$ de funciones oscilatorias.

$$R(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(\omega;s)} A(\omega;t) e^{i\omega(t-s)} d\mu(\omega) \tag{3.11}$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega;t) e^{i\omega t} dZ(\omega) \tag{3.12}$$

Definición 3.2. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio y $\mathbf{F}$ una familia de funciones oscilatorias de la forma $\phi(\omega;t) = A(\omega;t)e^{i\omega t}$. Sea μ tal que satisface las condiciones anteriores. Se define al **espectro evolutivo** del proceso respecto a la familia $\mathbf{F}$ como*

$$dH(t,\omega) := |A(\omega;t)|^2 \, d\mu(\omega) \tag{3.13}$$

Proposición 3.1. *Si un proceso $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ es débilmente estacionario, entonces su espectro de potencias h y su espectro evolutivo $h^\star$ satisfacen, para todo $t \in \mathcal{T}$, que*

$$h^\star(\omega,t) = h(\omega) \tag{3.14}$$

3.2. Estimación del espectro evolutivo

En el capítulo anterior se mostró un estimador consistente para el espectro de potencias de un proceso estacionario; dicho estimador usaba la transformada de Fourier discreta, *suavizada* por un filtro lineal (también referido como función ventana). El objetivo de esta sección es aclarar algunos teoremas que permitan usar una técnica similar, la cual requiere imponer algunas condiciones más fuertes que ser oscilatorios.

3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio, no necesariamente estacionario, y sea $g \in L_I^2$; se construye al proceso $\{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ como[1]

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \tag{3.15}$$

[1] En el texto de Priestley se considera un filtro de la forma $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)e^{-i\omega_0(t-u)}du$ para algún ω_0 constante. Por simplicidad se considera únicamente el caso $\omega_0 = 0$

Entonces puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \tag{3.16}$$

donde $\Gamma_\bullet$ es la **función de transferencia generalizada** para g con respecto a la familia $\mathbf{F}$, y que es definida como

$$\Gamma_t(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du \tag{3.17}$$

Un caso particular muy interesante ocurre cuando A, como función de ω, varía lentamente en comparación de g, la cual decae rápidamente a 0; en tal caso podría decirse que $\Gamma_\bullet \approx \Gamma$

Definición 3.3. *Una familia de funciones* $\mathbf{F}$ *se dice* ***semi-estacionaria*** *si, para todo* $\omega \in \mathbb{R}$*, se cumple que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \, |dK(\omega)| < \infty \tag{3.18}$$

En cuyo caso se define su ***ancho de banda característico***

$$B_{\mathbf{F}} := \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \, |dK(\omega)| \right]^{-1} \tag{3.19}$$

Definición 3.4. *Un proceso* $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ *se dice* ***semi-estacionario*** *si admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia semi-estacionaria*

Definición 3.5. *Se dice que una función* u *es* ***pseudo-δ de orden ε*** *con respecto a la función* v *si, para cualquier* k *existe un* $\varepsilon << 1$ *tal que*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(x+k) dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \right| < \varepsilon \tag{3.20}$$

De manera similar, se define el **ancho de banda** para g como

$$B_g := \int_{-\infty}^{\infty} |u| \, |g(u)| \, du \tag{3.21}$$

Supóngase que g está normalizada de modo que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 \, du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| \, d\omega = 1 \tag{3.22}$$

con Γ la función de respuesta para g.

Teorema 3.2. *Sea* $\mathbf{F}$ *una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico* $B_{\mathbf{F}}$*, y sea* g *una función normalizada como en 3.22 y cuyo ancho de banda es* B_g*. Entonces, para cualesquiera* $t, \omega \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $e^{i\omega t} dK(\omega)$ *es una función pseudo-*δ *de orden* ${}^{B_g}/_{B_{\mathbf{F}}}$ *con respecto a* g

Demostración. Suponiendo que Γ sea una vez derivable, su expansión de Taylor alrededor de k es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\Gamma(\theta + k) dK(\omega) = \Gamma(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\theta\Gamma'(k + \nu) dK(\omega)$$

para algún $\nu \in (0, \theta)$. Respecto al segundo sumando, puede observarse que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\theta\Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\theta\Gamma'(k + \nu) dK(\omega) \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \, |\Gamma'(k + \nu)| \, |dK(\omega)| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] |dK(\omega)| \\
&\leq \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \, |dK(\omega)| \right]
\end{aligned}$$

Usando la conexión entre g y Γ

$$\begin{aligned}
\Gamma'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} g(u) du \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d\omega} e^{i\omega u} g(u) \right) du \\
&= i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega u} g(u) du
\end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\theta\Gamma'(k+\nu)dK(\omega) &\leq \left[\sup_{\omega}|\Gamma'(\omega)|\right]\left[\sup_{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}|\theta|\,|dK(\omega)|\right] \\
&\leq \left[\sup_{\omega}\left|\int_{-\infty}^{\infty} iue^{i\omega u}g(u)du\right|\right]B_{\mathbf{F}}^{-1} \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1}\left[\sup_{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}|u|\,|g(u)|\,du\right] \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1}B_g
\end{aligned}$$

■

Con el teorema anterior a la mano se puede declarar formalmente la idea de que A varía más lentamente que g

Teorema 3.3. *Sea* $\mathbf{F}$ *una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico* $B_{\mathbf{F}}$*, sea* $\varepsilon > 0$ *arbitrario, y sea* g *un filtro normalizado como en 3.22 y cuya función de transferencia generalizada con respecto a* $\mathbf{F}$ *es* $\Gamma_\bullet$*. Si* g *es elegida de tal modo que* ${}^{B_g}/_{B_{\mathbf{F}}} < \varepsilon$*, entonces para cualesquiera* t, ω *se cumple que*

$$|\Gamma_t(\omega) - A(\omega; t)\Gamma(\omega)| < \varepsilon \tag{3.23}$$

Demostración. Por la mera definición de $\Gamma_\bullet$ (expresión 3.17) se sabe que

$$\Gamma_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u}du$$

Si se sustituye a A en términos de dK (ver definición 3.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u}du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t-u)}dK(\theta)\right]e^{i\omega u}du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\theta t}e^{i(\omega-\theta)u}dK(\theta)du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i(\omega-\theta)u}du\right]dK(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\Gamma(\omega-\theta)dK(\theta)
\end{aligned}$$

Usando el lema 3.2 junto al hecho que ${}^{B_g}/_{B_{\mathbf{F}}} < \varepsilon$, se puede escribir que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}\Gamma(\omega-\theta)dK(\theta) - \Gamma(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}dK(\theta)\right| \\
&= \left|\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t}dK(\theta)\right| \\
&= |\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega)A(\omega; t)|
\end{aligned}$$

En el último renglón se ha reemplazado nuevamente a A en términos de dK ■

Teorema 3.4. *Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso semi-estacionario con ancho de banda característico B_X, sea g un filtro normalizado como en 3.22 y cuyo ancho de banda es B_g y cuya función de respuesta es Γ. Sea $\{Y(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso definido como 3.16.*

Sea $\mathbf{F^*}$ una familia semi-estacionaria cuyo ancho de banda característico es B_X o es muy parecido a B_X (lo cual es posible por cómo se definió B_X). Se cumple que

$$\mathrm{E}\left[|Y(t)|^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \, dH^*(\omega; t) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{3.24}$$

donde H^* es el espectro integrado respecto a la familia $\mathbf{F^*}$ y $\mathcal{O}(\epsilon)$ es un término que puede hacerse arbitrariamente pequeño si B_g es suficientemente pequeño respecto a B_X

Demostración. Usando la expresión 3.16 para este caso particular, puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) A^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \tag{3.25}$$

donde $\omega_\bullet^*$, A^* y Z^* están definidos respecto a la familia $\mathbf{F^*}$. Nótese que, debido a que los dZ's son ortogonales

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[|Y(t)|^2\right] &= \mathrm{E}\left[\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega)\right] \\ &= \ldots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma_t^*(\omega; t)\right|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Si se elige a g de modo que $\frac{B_g}{B_X} < \varepsilon$, en virtud del teorema 3.3 puede escribirse

$$\Gamma_t^*(\omega; t) = A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t) \tag{3.26}$$

con $|R(\omega, t)| < \varepsilon$. Luego entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[|Y(t)|^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma_t^*(\omega; t)\right|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t)\right|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)\right|^2 d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) \overline{R(\omega; t)} d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left|R(\omega; t)\right|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

El cuarto sumando satisface claramente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|R(\omega; t)\right|^2 d\mu^*(\omega) < \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^*(\omega) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \tag{3.27}$$

Respecto al segundo sumando, nótese que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega;t)\Gamma(\omega)} R(\omega;t) d\mu^*(\omega) &< \int_{-\infty}^{\infty} \left|A^*(\omega;t)\right| \left|\Gamma(\omega)\right| \left|R(\omega;t)\right| d\mu^*(\omega) \\ &< \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left|A^*(\omega;t)\right| \left|\Gamma(\omega)\right| d\mu^*(\omega)\end{aligned}$$

Una cota similar puede hallarse para el tercer sumando. Falta demostrar que la cota permanece finita cuando $B_g \to 0$, lo cual debería lograrse definicendo el conjunto

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} |\, |\Gamma(\omega)|\, |A^*(\omega;t)| \leq 1\} \tag{3.28}$$

y luego, claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|A^*(\omega;t)\right| \left|\Gamma(\omega)\right| d\mu^*(\omega) = \int_{\Omega} \mu^*(\omega) + \int_{\Omega^C} \left|A^*(\omega;t)\right| \left|\Gamma(\omega)\right| d\mu^*(\omega) \tag{3.29}$$

el primer sumando es clarametne finito y no depende de g, mientras que el segundo debería ser finito [?] ya que Γ está normalizada. ■

3.3. Estimador de doble ventana

Para esta sección se considera un proceso a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ y una muestra del mismo de longitud T (o equivalentemente un proceso $\{X(t)\}_{t\in[\mathcal{0},\mathcal{T}]}$), suficientemente larga. El objetivo en esta sección es construir un estimador para el espectro evolutivo $dH(\omega;t)$. Por simplicidad, se supondrá que la medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y entonces puede escribirse

$$h(\omega,t) := dH(\omega;t) \tag{3.30}$$

Para efectuar la estimación del espectro se hará uso del teorema 3.3, para lo cual se necesita un filtro g normalizado según 3.22 y cuyo anho de banda, B_g, satisface

$$B_g << B_X << T \tag{3.31}$$

Se construye entonces a U, una versión filtrada de X usando a g

$$U(t) = \int_{t-T}^{t} g(u)X(t-u)du \tag{3.32}$$

Bajo la condición 3.31, la integral que define a U puede extenderse a todo $\mathbb{R}$ sin cambiar mucho su valor (excepto cerca de 0 y T), e incluso se llega a ser exacta si g es 0 fuera de un intervalo pequeño alrededor de 0. Entonces, en virtud del teorema 3.4 aplica de manera aproximada, y entonces se cumple que

$$\mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega,t)d\omega + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/{}_{B_X}\right) \tag{3.33}$$

El teorema de Isserlis es una identidad relativamente poco conocida sobre los cuartos momentos de una distribución multinormal; el caso particular de cuatro variables será usado para calcular la covarianza de algunos estimadores del espectro de potencias.

Teorema 3.5 (Isserlis). *Sea $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ un vector aleatorio siguiendo una distribución multinormal con media cero y matriz de covarianza finita. Se cumple que*

$$\mathrm{E}[X_1X_2X_3X_4] = \mathrm{E}[X_1X_2]\,\mathrm{E}[X_3X_4] + \mathrm{E}[X_1X_3]\,\mathrm{E}[X_2X_4] + \mathrm{E}[X_1X_4]\,\mathrm{E}[X_2X_3] \tag{3.34}$$

Proposición 3.6. *Dadas las condiciones, y si $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ es un proceso normal cuyo que admite un espectro evolutivo uniformemente continuo, se tiene que*

$$\mathrm{Var}\left(|U(\omega;t)|^2\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega,t)d\omega\right]^2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/{}_{B_X}\right) \tag{3.35}$$

Demostración. Por conveniencia se obtendrá una expresión aproximada para la covarianza de U, a partir de la cual se deducirá su varianza. Para ello, por definición puede escribirse para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Cov}\left(|U(\omega;t)|^2, |U(\lambda;s)|^2\right) = \mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2 |U(\lambda;s)|^2\right] - \mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2\right]\mathrm{E}\left[|U(\lambda;s)|^2\right]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2\,|U(\lambda;s)|^2\right] = \iiiint_{\mathbb{R}^4} & g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\ & \times \mathrm{E}\left[X(t-u)X(t-v)X(s-w)X(s-z)\right] dudvdwdz \end{aligned} \tag{3.36}$$

Si para cada t $X(t)$ sigue una distribución normal, entonces en virtud del teorema 3.5 puede escribirse

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[X(t-u)X(t-v)X(t-w)X(t-z)\right] = & R(t-u,t-v)R(s-w,s-z) \\ & + R(t-u,s-z)R(t-v,s-w) \\ & + R(t-u,s-w)R(t-v,s-z)\end{aligned}$$

Reemplazando sobre la expresión anterior, puede escribirse

$$\mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2\,|U(\lambda;s)|^2\right] = \mathrm{E}\left[|U(\omega;t)|^2\right]\mathrm{E}\left[|U(\lambda;s)|^2\right] + S_1 + S_2 \tag{3.37}$$

donde

$$\begin{aligned}S_1 = \iiiint_{\mathbb{R}^4} & g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\ & \times R(t-u,s-z)R(t-v,s-w)dudvdwdz\end{aligned}$$

Se define a S_2 de manera similar, intercambiando w y z. Estas expresiones, de apariencia innecesariamente complicada, pueden interpretarse como la *interferencias* de la covarianza entre los puntos (ω,t) y (λ,s). Para ello, nótese que

$$\mathrm{Cov}\left(|U(\omega;t)|^2, |U(\lambda;s)|^2\right) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/_{B_X}\right) \tag{3.38}$$

Cabe mencionar que es conveniente que las cantidades S_1 y S_2 sean pequeñas.

Sea ha elegido a g de forma que $B_g << B_X$ con el objetivo de que U tenga un sesgo pequeño, en virtud del teorema [?]. Este teorema puede ser usado nuevamente si S_1 y S_2 son reescritas en cierta forma *adecuada*, para lo cual la autocovarainza debe ser vista como

$$R(p,q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p-q)}A(\omega;p)\overline{A(\omega;q)}d\mu(\omega) \tag{3.39}$$

Así pues, reemplazando esta expresión sobre (?) se obtiene

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \iiiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\
&\quad \times R(t-u, s-z)R(t-v, s-w)dudvdwdz \\
&= \iiiint_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\
&\quad \times \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \left[e^{-i\theta(s-z-t+u)}A(\theta; t-u)\overline{A(\theta; s-z)}\right]\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left[e^{-i\phi(s-w-t+u)}A(\phi; t-v)\overline{A(\theta; s-w)}\right] d\theta d\phi\right) dudvdwdz \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta+\omega; t, \theta)\overline{\Gamma_*(\phi+\omega; t, \phi)}\Gamma_*(\phi+\lambda; s, \phi)\overline{\Gamma_*(\theta+\lambda; s, \theta)} \\
&\quad \times \left[A(\theta; t)\overline{A(\phi; t)}A(\phi; s)\overline{A(\theta; t)}\right] d\theta d\phi \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi+\omega; t, \phi)}\Gamma_*(\phi+\lambda; s, \phi)\overline{A(\phi; t)}A(\phi; s)d\phi\right] \\
&\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta+\omega; t, \theta)\overline{\Gamma_*(\theta+\lambda; s, \theta)}A(\theta; t)\overline{A(\theta; t)}d\theta\right]
\end{aligned}
$$

Donde Γ_* es la función de transferencia generalizada

$$
\Gamma_*(\kappa; t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\frac{A(\omega; t-u)}{A(\omega; t)}e^{-iu\kappa}du \tag{3.40}
$$

Usando el teorema [?], se puede decir que $|\Gamma(\bullet; t, \lambda) - \Gamma(\bullet)| \leq {}^{B_g}/_{B_X}$. Así entonces

$$
\begin{aligned}
|S_1| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi+\omega; t, \phi)}\Gamma_*(\phi+\lambda; s, \phi)\overline{A(\phi; t)}A(\phi; s)d\phi\right| \\
&\quad \times \left|\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta+\omega; t, \theta)\overline{\Gamma_*(\theta+\lambda; s, \theta)}A(\theta; t)\overline{A(\theta; t)}d\theta\right| \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_*(\phi+\omega; t, \phi)|\,|\Gamma_*(\phi+\lambda; s, \phi)|\,|A(\phi; t)A(\phi; s)|\,d\phi\right] \\
&\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma_*(\theta+\omega; t, \theta)|\,|\Gamma_*(\theta+\lambda; s, \theta)|\,|A(\theta; t)A(\theta; t)|\,d\theta\right] \\
&\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi+\omega)|\,|\Gamma(\phi+\lambda)|\,|A(\phi; t)A(\phi; s)|\,d\phi\right]^2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/_{B_X}\right)
\end{aligned}
$$

La misma cota puede hallarse para S_2. En lo inmediato, conviene analizar el caso

$\omega = \lambda$ y $t = s$, de donde se obtiene

$$\mathrm{Var}\left(|U(\omega;t)|^2\right) = \mathrm{Cov}\left(|U(\omega;t)|^2, |U(\omega;t)|^2\right) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/_{B_X}\right)$$

pero en este caso particular, la cota obtenida puede reducirse a

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi+\omega)|^2 |A(\phi;t)|^2 d\phi\right]^2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/_{B_X}\right) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi+\omega)|^2 h(\phi,t) d\phi\right]^2 + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/_{B_X}\right) \end{aligned}$$

■

En el teorema anterior puede interpretarse que $\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi+\omega)|^2 h(\phi,t)d\phi$ es una versión *suavizada* de h. Bajo este comentario, el resultado obtenido es muy análogo a la estimación del espectro en un proceso estacionario (teorema ??). Siguiendo dicha analogía, se sabe que U puede *modificarse* para generar estimadores consistentes; para lo cual se usa una segunda función de ventana w_τ. Por estética y comodidad, las condiciones sobre w_τ serán presentadas junto a las propiedades de la ventana g; todas ellas en la definición

Definición 3.6. *El* ***estimador de doble ventana*** *es un estimador para h definido como*

$$\widehat{h}(\omega,t) = \int_{T-t}^{t} w_\tau(u) |U(\omega, t-u)|^2 du \tag{3.41}$$

donde la función g satisface

- $B_g << B_X << T$
- $g(t) \to 0$ *cuando* $|t| \to \infty$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$

con $\Gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g(t) d\lambda$*. Así mismo, la función* w_τ *satisface*

- $w_\tau(t) \geq 0$ *para cualesquiera* t, τ
- $w_\tau(t) \to 0$ *cuando* $|t| \to \infty$, *para todo* τ
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t)dt = 1$ *para todo* τ

- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 \, dt < \infty$ *para todo* τ

- $\exists C \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{\tau \to \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)|^2 \, d\lambda = C$

donde $W_\tau(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_\tau(t) d\lambda$.

El supuesto sobre que w_τ decaiga rápidamente lejos de 0 permite reemplazar el intervalo de integración que define a $\widehat{h}$ por $\mathbb{R}$ (excepto cerca de 0).

Proposición 3.7. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\mathrm{E}\left[\widehat{h}(\omega, t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \, \overline{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}\left({}^{B_g}\!/_{B_X}\right) \tag{3.42}$$

donde

$$\overline{h}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) h(\omega, t-u) du \tag{3.43}$$

Demostración. De manera relativamente sencilla puede verificarse que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\widehat{h}(\omega, t)\right] &= \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) \, |U(t-u)|^2 \, du\right] \\
&= \int_{T-t}^{t} w_\tau(u) \mathrm{E}\left[|U(t-u)|^2\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \, h(\omega, t-u) d\omega + \mathcal{O}\left({}^{B_g}\!/_{B_X}\right)\right] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) \, |\Gamma(\omega)|^2 \, h(\omega, t-u) d\omega du + \mathcal{O}\left({}^{B_g}\!/_{B_X}\right) \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) h(\omega, t-u) du\right] d\omega du + \mathcal{O}\left({}^{B_g}\!/_{B_X}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \, \overline{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}\left({}^{B_g}\!/_{B_X}\right)
\end{aligned}$$

■

A diferencia de U, el estimador de doble ventana no es consistente salvo en caso que $\overline{h}$ sea parecido a h; como $\overline{h}$ es una versión suavizada, que el estimador sea sesgado depende de que B_{w_τ} sea pequeño en comparación a B_X.

Proposición 3.8. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\operatorname{Var}(V(t)) \approx \widetilde{h}^2(\omega_0, t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\omega)|^2 \, d\omega\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4\right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \tag{3.44}$$

donde

$$\widetilde{h}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\omega_0, t)\,(w_\tau(u))^2}{\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(u))\, du} \tag{3.45}$$

Demostración. Como en el caso del estimador U, será conveniente calcular la covarianza de $\widehat{h}$ y posteriormente deducir la varianza. Se escribe para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Cov}\left(\widehat{h}(\omega, t), \widehat{h}(\lambda, s)\right) = \operatorname{E}\left[\widehat{h}(\omega, t)\widehat{h}(\lambda, s)\right] - \operatorname{E}\left[\widehat{h}(\omega, t)\right] \operatorname{E}\left[\widehat{h}(\lambda, s)\right] \tag{3.46}$$

Hecho el trabajo previo, es claro que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(\widehat{h}(\omega, t), \widehat{h}(\lambda, s)\right) &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \operatorname{Cov}\left(|U(\omega; t-u)|^2, |U(\lambda; s-v)|^2\right) dudv \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \left[S_1 + S_2\right] dudv + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/{}_{B_X}\right) \\
&= T_1 + T_2
\end{aligned}$$

usando, por comodidad

$$T_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \left[S_1\right] dudv \tag{3.47}$$

y similarmente para T_2; S_1 es como en la expresión (?), evaluado en los puntos $(t-u, \omega), (s-v, \lambda)$

$$\begin{aligned}
S_1 = &\left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t-u, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s-v, \phi) \overline{A(\phi; t-u)} A(\phi; s-v) d\phi\right] \\
&\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_*(\theta + \omega; t-u, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s-v, \theta)} A(\theta; t-u) \overline{A(\theta; s-v)} d\theta\right]
\end{aligned}$$

con Γ_* es la función de transferencia generalizada; S_2 se define de manera similar. Se usará el teorema (?) para acotar la covarianza, comenzando por el primer sumando

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \left[S_1\right] dudv \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \left|S_1\right| dudv \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \\
&\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma(\phi+\omega)\right| \left|\Gamma(\phi+\lambda)\right| \left|A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)\right| d\phi\right]^2 dudv + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/{}_{B_X}\right) \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \left|\Gamma(\phi+\omega)\right| \left|\Gamma(\phi+\lambda)\right| \left|\Gamma(\theta+\omega)\right| \left|\Gamma(\theta+\lambda)\right| \\
&\quad \times \left[\iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \left|A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)\right| dudv\right] d\phi d\theta + \mathcal{O}\left({}^{B_g}/{}_{B_X}\right)
\end{aligned}
$$

■

Aún más, si se usa la propiedad de en el límite de τW_τ se puede escribir

$$
\operatorname{Var}\left(V(t)\right) \approx \widetilde{h}^2(\omega_0, t) \frac{C}{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma(\omega)\right|^4\right] \left(1 + \delta(0, \omega_0)\right) \tag{3.48}
$$

Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que $\widetilde{h} \approx h$ y $\overline{h}^2 \approx h^2$. Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas w_τ y W_τ sean más cercanas a funciones tipo δ de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $\operatorname{E}\left[\widehat{h}(t,\omega)\right] \approx h(t,\omega)$
- $\operatorname{Var}\left(\widehat{h}(t,\omega)\right) \approx \dfrac{C}{\tau} h^2(t,\omega) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma_\kappa(\theta)\right|^4 d\theta$

3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao

Proposición 3.9. *Sea g una función cuando menos dos veces derivable cuyo dominio es $\mathcal{D}_g$, y sea X una variable aleatoria real tal que $P(X \notin \mathcal{D}) = 0$. Pueden usarse las* *siguientes aproximaciones*

$$\mathrm{E}\left[g(X)\right] \approx g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) \tag{3.49}$$

$$\mathrm{Var}\left(g(X)\right) \approx \mathrm{Var}\left(X\right)\left[g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^{-2} \tag{3.50}$$

Demostración. Usando polinomio de Taylor de grado 2 para g, alrededor de $\mathrm{E}[X]$ y evaluada en X

$$g(X) = g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) + \left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right) g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) + \frac{\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2}{2} g''(\xi) \tag{3.51}$$

donde la variable aleatoria ξ satisface $|X - \xi| \leq |X - \mathrm{E}[X]|$. La aproximación, con una obvia pérdida, consiste en considerar que $\frac{1}{2}\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 g''(\xi) \approx 0$.

$$g(X) \approx g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) + \left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right) g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) \tag{3.52}$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados

$$\mathrm{E}\left[g(X)\right] \approx \mathrm{E}\left[g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right] + \mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)\right] g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) = g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) \tag{3.53}$$

Lo cual confirma la primera parte del resultado. Para verificar la segunda parte del mismo, se elevan ambos lados al cuadrado

$$\begin{aligned}\left[g(X)\right]^2 \approx{} & \left[g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^2 + 2g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right) g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) \\ & + \left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 \left[g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^2\end{aligned} \tag{3.54}$$

Posteriormente se toma el valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\left[g(X)\right]^2\right] \approx{} & \mathrm{E}\left[\left[g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^2\right] + 2g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}\left[X\right]\right] g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right) \\ & + \mathrm{E}\left[\left(X - \mathrm{E}\left[X\right]\right)^2\right]\left[g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right]\right)^2 \\ = {} & \left[g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^2 + \mathrm{Var}\left(X\right)\left[g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right]\right)^2\end{aligned}$$

entonces

$$\mathrm{Var}\left(g(X)\right) = \mathrm{E}\left[\left[g(X)\right]^2\right] - \left[g\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)\right]^2 \approx \mathrm{Var}\left(X\right)\left[g'\left(\mathrm{E}\left[X\right]\right]\right)^2 \tag{3.55}$$

de donde se obtiene la segunda parte del resultado.

Antes de concluir la demostración, conviene discutir bajo qué condiciones la aproximación es eficiente. La forma completa de la expresión 3.51 contempla el término

$$\frac{(X - \mathrm{E}[X])^2}{2} g''(\xi) \tag{3.56}$$

Como $|\xi| <$ ■

Corolario 3.10. *Si se usa el teorema anterior con* $g = \log$ *se obtiene*

$$\mathrm{E}[\log(X)] \approx \log(\mathrm{E}[X]) \tag{3.57}$$

$$\mathrm{Var}(\log(X)) \approx \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathrm{E}[X])^2} \tag{3.58}$$

La prueba de estacionariedad propuesta por Priestley y Subba Rao [55] consiste en probar si el espectro evolutivo de un proceso dado puede reducirse a un espectro de potencias; en otras palabras, se prueba la hipótesis de que el espectro evolutivo efectivamente cambia en el tiempo. Naturalmente, la prueba debe construirse sobre una única realización del proceso.

El procedimiento consiste en estimar el espectro evolutivo del proceso para algunos tiempos y frecuencias, usando en particular el estimador de doble ventana; dichos puntos deben ser tales que los estimadores sean aproximadamente no-correlacionados. Posteriormente se calcula el logaritmo de la estimación obtenida con el fin de *estabilizar* la varianza. Finalmente, como parte central, se efectúa un ANOVA de dos vías para verificar si se puede afirmar que el espectro estimado tiene –estadísticamente– el mismo valor en los diferentes puntos a través del tiempo. Cabe destacar que este último paso tiene una interpretación poco convencional, y es que los estimadores tienen (por diseño) ciertas propiedades

Sea $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ un proceso semi-estacionario y sea $\{x_t\}_{t=0,\ldots,N}$ un conjunto de observaciones, cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_t = 1$ por simplicidad. Usando esta información se construye el estimador de doble ventana, $\widehat{h}$; para ello se eligen las funciones ventana g_κ y w_τ que, por simplicidad, son ventanas de escalamiento con parámetros κ y τ. Sus funciones de transferencia serán Γ_κ y W_τ, respectivamente.

Bajo las condiciones descritas en la sección anterior, se satisface que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\widehat{h}(t,\omega)\right] &\approx h(t,\omega) \\
\mathrm{Var}\left(\widehat{h}(t,\omega)\right) &\approx \frac{C}{N} h^2(t,\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma^4(\theta)\right| d\theta
\end{aligned}$$

donde $C = \lim_{T\to\infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)|\, d\lambda$. Como se mencionó, se propone la cantidad

$$Y(t,\omega) = \log\left(\widehat{h}(t,\omega)\right) \tag{3.59}$$

en virtud de la proposición (?), se cumple que

$$\mathrm{E}\left[Y(t,\omega)\right] \approx \log\left(h(t,\omega)\right) \tag{3.60}$$

$$\mathrm{Var}\left(Y(t,\omega)\right) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma_\kappa(\theta)\right|^4 d\theta \tag{3.61}$$

$$\tag{3.62}$$

Cabe destacar que la varianza de Y no es independiente de h en el sentido formal, sino que sólo es *aproximadamente independiente* pues depende en mayor medida de la forma de $\widehat{h}$ que del mismo h. Esto era de esperarse, ya que el estimador de doble ventana fue diseñado para exagerar el *peso* de la información local al grado de obtener versiones suavizadas del espectro evolutivo. Adicionalmente, se suele decir intuitivamente que el logaritmo *estabiliza* la varianza. En otra dirección, la varianza aproximadamente constante de Y sugiere que puede escribirse como

$$Y(t,\omega) = \log\left(h(t,\omega)\right) + \varepsilon(t,\omega) \tag{3.63}$$

Debido a la naturaleza naturalmente discreta de los datos, conviene construir una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias, equiespaciado en el tiempo por Δ_t y en las frecuencias por Δ_ω. Si dichas distancias son suficientemente grandes como para que se cumplan las condiciones en 3.64, entonces los valores de Y sobre la cuadrícula serán aproximadamente no-correlacionados.

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma_\kappa(\theta)\right|^2\left|\Gamma_\kappa(\theta+\Delta_\omega)\right|^2 d\theta \approx 0\\ \frac{1}{\Delta_t}\int_{-\infty}^{\infty}|t|\left|w_\tau(t)\right| dt \approx 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{Cov}\left(Y(t,\omega), Y(t+\Delta_t,\omega+\Delta_\omega)\right) \approx 0 \tag{3.64}$$

Así entonces, sea $\{(t_i,\omega_j) \in \mathcal{T} \times [-\pi,\pi] | i = 1,\ldots,I; j = 1,\ldots,J\}$ la cuadrícula descrita, con $|t_i - t_{i+1}| = \Delta_t$ y $|\omega_j - \omega_{j+1}| = \Delta_\omega$. Se define el estimador

$$Y_{i,j} = \log\left(\widehat{h}(t_i,\omega_j)\right) \tag{3.65}$$

el cual puede escribirse como

$$Y_{i,j} \approx \log\left(h(t_i,\omega_j)\right) + \varepsilon_{i,j} \tag{3.66}$$

donde

$$\operatorname{E}\left[\varepsilon_{i,j}\right] \approx 0 \tag{3.67}$$

$$\operatorname{Cov}\left(\varepsilon_{i,j}\right) \approx \frac{C}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma_\kappa(\theta)\right|^4 d\theta\left[\delta(i,i_0)\delta(j,j_0)\right] \tag{3.68}$$

Una vez definido a Y, un estimador adecuado para detectar la estacionariedad débil, conviene escribir explícitamente las condiciones para tal detección. Con base a la proposición (?), si el proceso $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ es débilmente estacionario **entonces**

$$h(t_0,\omega_j) = h(t_1,\omega_j) = \cdots = h(t_I,\omega_j) \text{ , para } j = 1,2,\ldots,J \tag{3.69}$$

condición que puede reescribirse en términos de Y como

$$\operatorname{E}\left[Y_{0,j}\right] = \operatorname{E}\left[Y_{1,j}\right] = \cdots = \operatorname{E}\left[Y_{I,j}\right] \text{ , para } j = 1,2,\ldots,J \tag{3.70}$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$\operatorname{E}\left[\varepsilon_{0,j}\right] = \operatorname{E}\left[\varepsilon_{1,j}\right] = \cdots = \operatorname{E}\left[\varepsilon_{I,j}\right] \text{ , para } j = 1,2,\ldots,J \tag{3.71}$$

Sin embargo, la expresión en 3.71 puede deducirse directamente de las propiedades de Y en caso de que la expresión en 3.70 es cierta. En consecuencia, rechazar 3.71 implica rechazar 3.70, lo cual aporta evidencia para rechazar 3.69; si se rechaza 3.69 entonces puede rechazarse que el proceso sea estacionario, pero un no-rechazo no garantiza que elproceso sea estacionario.

El objetivo de la prueba puede fijarse en decidir si puede rechazarse la condición en 3.71, en cuyo caso se podrá concluir que el proceso **no** es débilmente estacionario. Con base a la expresión en 3.70, la prueba puede formularse en términos de un ANOVA de dos factores, el cual parte de un modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \tag{3.72}$$

donde ε es como en la expresión 3.66. Dentro del contexto, las cantidades involucradas pueden interpretarse como

μ Promedio de h sobre tiempo y frecuencia

α Efecto al variar el tiempo

β Efecto al variar la frecuencia

γ Efecto no lineal de tiempo y frecuencia (*interacción*)

La diferencia entre γ y ε consiste en que (por diseño) se conocen la media y varianza de ε; en contraparte, no se ha supuesto nada sobre γ.

Ahora bien, la expresión 3.70 uede formularse como hipótesis para contrastarse contra H_0, de la forma

$$H_A : \quad Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j} \tag{3.73}$$

Por simplicidad, conviene considerar, como paso intermedio, una prueba de hipótesis *encadenada*

$$H_{A_0} : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j} \tag{3.74}$$

Como es usual con los ANOVA, se definen las sumas de cuadrados dentro de los grupos y entre los grupos (cuadro 3.1), las cuales siguen distribuciones χ^2. Al probar H_0 contra H_{inter} se usa el estadístico de prueba ${S_{I+R}}/{\sigma^2}$, mientras que al probar H_{inter} contra H_A se usa ${S_T}/{\sigma^2}$.

Cuadro 3.1: Estadísticos involucrados en la prueba PSR

Descripción	Estadístico	Gr. de libertad
Efecto tiempo	$S_T = J \sum_{i=1}^{I} (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$I - 1$
Efecto frecuencia	$S_F = I \sum_{j=1}^{J} (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$J - 1$
Interacción	$S_{I+R} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2$	$(I-1)(J-1)$
Total	$S_0 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$IJ - 1$
Prom. tiempo	$Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{i,j}$	
Prom. frecuencia	$Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} Y_{i,j}$	
Prom. general	$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} Y_{i,j}$	

Algoritmo 1: Prueba de Priestley-Subba Rao

Datos: $X = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$
Resultado: p-valores para S_{I+R}, S_T, S_F

$X \leftarrow (x_1, x_2, \cdots, x_N)$
para $i = 1, \cdots; j = 1, \cdots$ **hacer**
  $U[i,j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^{T} g(u) X[t-u] \exp(-\boldsymbol{i}\omega_j i)$
para $i = 1, \cdots; j = 1, \cdots$ **hacer**
  $\widehat{h}[i,j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^{T} w_\tau(u) \left|U[i-u,j]\right|^2$
$Y \leftarrow \log \widehat{h}$
para $i = 1, \cdots, I$ **hacer**
  $Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{i,j}$
para $j = 1, \cdots, J$ **hacer**
  $Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} Y_{i,j}$
$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} Y_{i,j}$
si $S_{I+R} > 0$ **entonces**
  Aceptar H_0
  devolver
si $S_T > 0$ **entonces**
  Aceptar H_1
  devolver
Aceptar H_2

3.5. Estacionariedad local

Una práctica común en el análisis de señales electrofisiológicas es el suponer que una serie de tiempo *suficientemente* corta pueda considerarse estacionaria, cuando menos en el sentido débil; anteriormente se ha señalado que se trata de un efecto de muestras pequeñas [40], y paralelamente se han incorporado a los diseños experimentales motivos para mantener este supuesto [28].

En base a resultados previos usando esta técnica, se espera que el comportamiento de los patrones visuales obedezca al fenómeno de **estacionariedad local**; esta característica, descrita por Dahlhaus [18], implica que un proceso puede ser aproximado a trozos *ensamblando* procesos estacionarios. Esta caracterización del EEG ha sido usada anteriormente de manera fructífera pero problemática [6, 29]. Dentro del modelo para registros de PSG, la estacionariedad local significa que el PSG no es formalmente homogéneo *pero* puede entenderse como varios segmentos homógeneos. En un sentido más general, es coherente pensar que el PSG se componga tanto de segmentos homógeneos como de *eventos puntuales* y artefactos.

En la figura 3.1 se muestra esquemáticamente cómo el tamaño de las ventanas puede influir para su clasificación como estacionarias/homogéneas.

En otro ámbito, se replicó la metodología usada por McEwen [38] para contrastar la afirmación de que las series de tiempo *suficiente cortas* son estacionarias. Este procedimiento consistió en repetir la clasificación de épocas variando el tamaño de ventana; los tamaños de ventana se tomaron de la forma 30×2^n segundos, para comparar con el tamaño de época recomendado por la AASM.

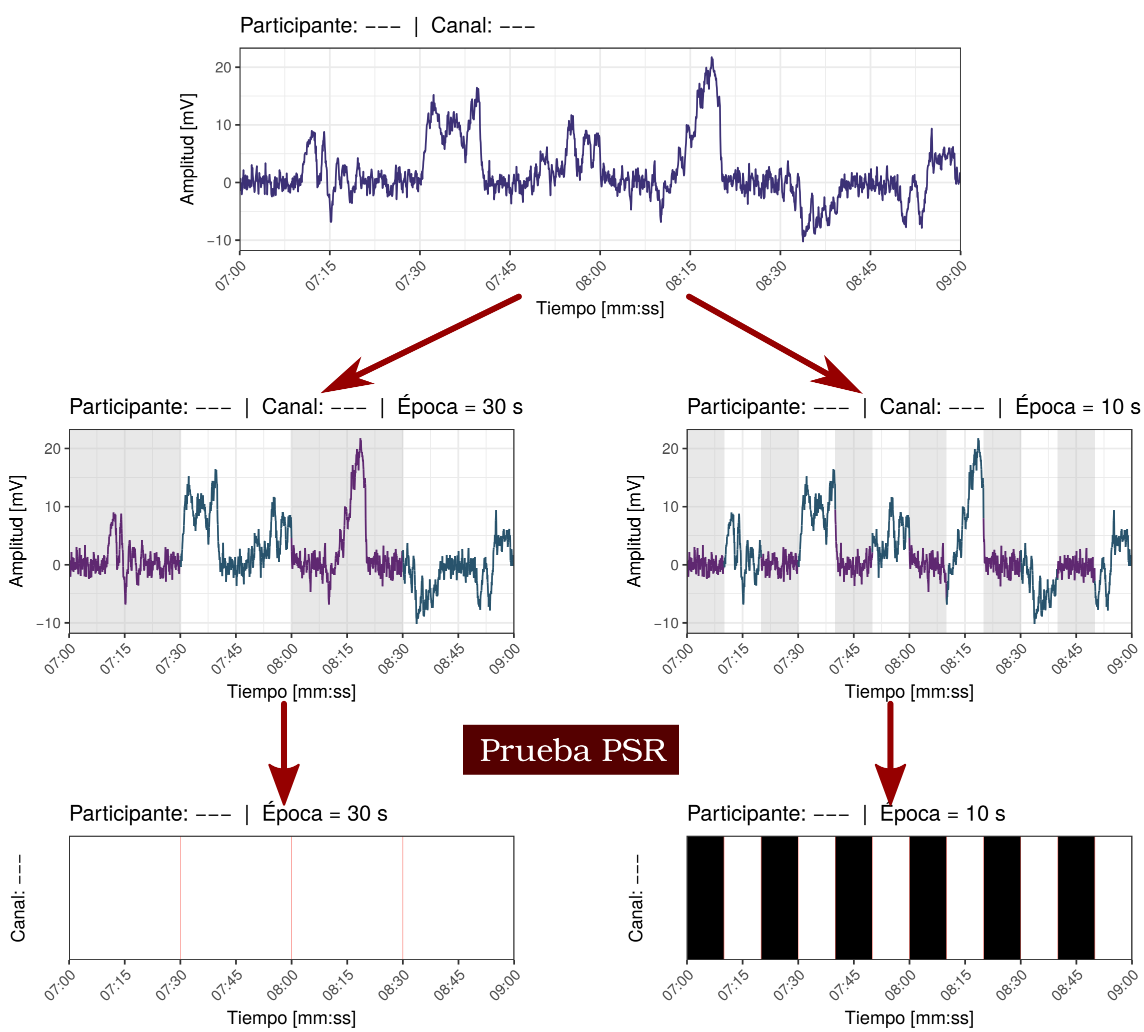


Figura 3.1: Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

CAPÍTULO 4

Deterioro cognitivo y sueño

En este capítulo se exponen varios temas para poder entender adecuadamente al sujeto de estudio (registros de PSG en adultos mayores), así como el contexto y la motivación para su estudio (el PDCL en adultos mayores). Se responde, de manera muy breve, las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el Deterioro Cognitivo Leve y cómo se diagnostica?
- Clínicamente, ¿qué es el sueño y cómo se estudia?
- ¿Cómo se relacionan el Deterioro Cognitivo Leve y el sueño?

Para simplificar la exposición, se considera al EEG como la técnica principal para el estudio de la actividad cerebral. El lector interesado en una exposición más amplia sobre técnicas para el estudio del cerebro, puede referirse al libro *"Medical Instrumentation. Applications and Design"* [69]. Con la misma intención de facilitar la lectura, se describe el sueño (desde el punto de vista clínico) antes de mostrar su posible utilidad como marcador para el DCL.

Si se desea revisar mayor información sobre los tópicos expuestos, pueden consultarse los libros *"Guía para el diagnóstico neuropsicológico"* [2] por Ardila y Ostrosky, y *"Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields"* por Niedermeyer [42]. Si se desean consultarse en mayor detalle los protocolos para registrar la PSG, o aquellos para clasificar las etapas de sueño, debe consultarse el Manual de la AASM [24]. Para consultar con mayor detalle el proceso del sueño en sí, así como los procesos fisiológicos y psicológicos asociados, puede consultarse *Psicofisiología del sueño* por Corsi-Cabrera [15].

4.1. Deterioro Cognitivo Leve

El envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [46]. Como consecuencia, los **adultos mayores** son especialmente propensos al deterioro cognitivo; por precisión, en lo siguiente se usará el término *adulto mayor* para referirse a individuos con 60 o más de edad años. Cabe destacar que la funcionalidad del adulto mayor no depende meramente de la edad, sino que está relacionada con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [61].

La **demencia**, considerada como el estado más grave del deterioro cognitivo, es definida en el el Manual Diagnóstico y Estadístico de Trastornos Mentales (DSM-V, por sus siglas en inglés y la versión consultada) como sigue:

> "Un síndrome que consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo.
> Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente."[35]

Se considera que la demencia es irreversible, y no se han identificado curas definitivas [27]. Debido a ello, ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El diagnóstico temprano es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome [32].

Bajo esta línea de pensamiento se considera al **Deterioro Cognitivo Leve** (DCL) como una etapa precursora de la demencia, y que es definida como sigue:

> "Una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios

suficientes de gravedad para ser calificada como demencia."[57]

Para fines de la definición anterior, se entiende por *síndrome focal* al daño en una estructura nerviosa específica, cuya causa es conocida (como una hemorragia o una embolia) y cuyo inicio sea inmediato y evidente.

El DCL puede detectarse por medio de diversos métodos, que pueden ser complementarios entre sí. La forma de detección más simple es la percepción de fallas en la memoria por parte del individuo u de otro. La percepción subjetiva del deterioro cognitivo *esperado* por el envejecimiento provoca que esta forma de detección sea poco fiable. Una alternativa más formal consiste en la entrevista clínica de un especialista, la aplicación de cuestionarios sobre dificultades en la memoria, o incluso al uso de pruebas neuropsicológicas.

En psicología, los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [2]. Se considera que a través de estas herramientas es posible declarar objetivamente las deficiencias cognitivas o conductuales de los individuos, así como su severidad y características.

De forma auxiliar para el diagnóstico del DCL, se pueden efectuar análisis genéticos, químicos, de imágenes cerebral, entre otros que estudien el sistema nervioso central. Se espera que dichas técnicas, en combinación con las pruebas neuropsicológicas, permitirán diagnosticar más acertadamente el DCL y desentrañar los fenómenos neurobiológicos subyacentes.

Un referente ampliamente usado para el diagnóstico del DCL son los criterios para Alzheimer de la NINCDS–ADRDA, propuestos por el *National Institute of Neurological and Communicative Disorders and Stroke* y la *Alzheimer's Disease and Related Disorders Association* [39, 20]. Dichos criterios proporcionan protocolos para diagnosticar el Alzheimer y algunas enfermedades relacionadas (entre ellas el DCL), así como afecciones que generan síntomas similares. Desafortunadamente, las pruebas neuropsicológicas contempladas por los criterios de la NINCDS–ADRDA todavía no han sido *validadas* en México, es decir que su efectividad para generar diagnósticos acertados no ha sido verificada para la población mexicana.

Otra prueba neuropsicológica ampliamente extendida es el Mini-Mental State Examination (MMSE), propuesta por Folstein en 1975 [23] [citar mas, quiza??]. Sin embargo se ha reportado que, en la población mexicana, la prueba MMSE tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de DCL en general, y baja especificidad para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [45]. Para fines del comentario anterior, se entiende por *sensibilidad* a la probabilidad de obtener verdaderos positivos, y por *especificidad* a la probabilidad de obtener verdaderos negativos.

Una tercera opción, a la cual se ha dado gran peso en el presente trabajo, es la prueba neuropsicológica Neuropsi, desarrollada por Ostrosky y ?? en la Universidad Autónoma de México (UNAM) [43]. La prueba Neurpsi ha sido validada para diversos grupos poblacionales en México, y se ha confirmado su utilidad para distinguir individuos con diverso grado de deterioro cognitivo.

Antes de pasar al siguiente tema, conviene mencionar la **pseudodemencia depresiva**, una afección que no está relacionada con el deterioro cognitivo pero que puede generar un diagnóstico positivo para DCL. De acuerdo al manual DSM-V, pseudodemencia depresiva se define como *"un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo"* [35]. Bajo esta línea de pensamiento resulta conveniente decir que, como parte del diseño experimental, se han omitido participantes con síndromes focales, retraso mental, bipolaridad, esquizofrenia, entre otros trastornos de atención y memoria ajenos al deterioro cognitivo. Con base a ello, se omite una discusión más extensa de dicho tipo de afecciones; el lector interesado puede referirse al Manual DSM-V [35].

4.1.1. Probable Deterioro Cognitivo Leve

En el presente trabajo se delimita al DCL por fines de precisión, usando para ello las pruebas neuropsicológicas. Se define operativamente el **Posible Deterioro Cognitivo Leve** (PDCL) como sigue:

> "Una disminución significativa de las funciones cognitivas del sujeto con respecto las típicas de su edad y nivel de educación."

Para fines de la definición anterior, el desempeño de las funciones cognoscitivas en un individuo es medido usando la prueba Neuropsi [43]; se considera que hay un déficit cognoscitivo *significativo* si la puntuación obtenida es menor al umbral predefinido para su grupo de edad y nivel de escolaridad. El umbral recomendado para la prueba Neuropsi debe calcularse como la media menos 3 desviaciones estándar de los puntajes típicos para individuos de cada grupo de edad y nivel de escolaridad;

estos parámetros fueron estimados para la población mexicana por Ostrosky-Solís y colaboradores [43]. En el cuadro A.2, bajo la etiqueta *Deterioro cognitivo* se recaban los puntajes de corte usados para declarar el PDCL.

La palabra *'probable'* en el PDCL hace alusión a que no constituye un diagnóstico *irrefutable* del DCL. En este sentido, el PDCL puede interpretarse como una condición *necesaria pero no suficiente* para el DCL.

4.1.2. Pruebas neuropsicológicas utilizadas

Dentro del contexto del presente trabajo, conviene describir las pruebas que fueron usadas para detectar el PDCL en adultos mayores. Según la descripción que se dio del DCL, para efectuar su diagnóstico debe verificarse que el individuo (1) presente un déficit en una o varias funciones cognitivas, pero que éste no cumpla los criterios para demencia, (2) que los déficits cognoscitivos no correspondan a síndromes focales, y (3) que no haya presente una afección independiente del deterioro cognitivo y que genere síntomas similares.

La segunda condición fue investigada mediante una entrevista con el participante, constituyéndose como un criterio de exclusión. Debido a la ausencia de excepciones, la tercera condición se limitó únicamente a detectar la pseudodemencia depresiva. En conjunto, fueron usadas las siguientes pruebas:

- Mini–Mental State Examination (MMSE)
  Evaluación escrita relativamente rápida. Permite detectar el deterioro cognitivo, pero no proporciona *muchos* detalles al respecto [23]. [68]

- Evaluación Neuropsicológica (Neuropsi)
  Evaluación extensiva sobre múltiples dominios. [44]

- Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (KATZ)
  Evaluación de la independencia del individuo para realizar tareas básicas de la vida diaria.[30] [60]

- Short Anxiety Screening Test (SAST)
  Evaluación corta para detectar trastornos depresivos y ansiosos. [64]

- Geriatric Depression Scale (GDS)
  Evaluación corta para detectar cuadros depresivos en adultos mayores. [70]

4.2. Estudio clínico del sueño

El sueño en el ser humano se considera como un estado de actividad, con propiedades características, y que influye de manera importante en la vigilia. De manera operativa, puede caracterizarse según la siguientes propiedades [10]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos.
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma
3. Inmovilidad y relajación muscular.
4. Periodicidad típica circadiana (diaria).
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada.
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, las cuales se *acumulan* en tanto persista la privación de sueño.

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas [14].

En 1953 Asierinsky y Kleitman reportaron que existen patrones de actividad cerebral marcadamente diferentes durante el sueño, para lo cual usaron la técnica de electroencefalografía (EEG) [3]. Con base a ello, el sueño se divide tradicionalmente en las etapas N y R, también referidas como NMOR y MOR; dichas etapas se distinguen en cuanto cómo se ve el EEG registrado en dichas etapas, así como los procesos fisiológicos que se llevan a cabo en el cerebro. Por simplicidad expositiva, se describen primeramente las características de las fases de sueño según los criterios de y posteriormente se describe el EEG en sí. Las características descritas corresponden, muy a grosso modo, a los criterios establecidos por la *American Society of Sleep Medicine* (AASM) [24]; en el cuadro 4.1 puede encontrarse una exposición más concreta y apegada al Manual de la AASM.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye, excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres; por *tono muscular* se entiende a la contracción pasiva de los músculos durante el reposo, la cual permite una respuesta voluntaria rápida. En esta fase de sueño las frecuencias cardíaca y respiratoria se vuelven irregulares. El individuo exhibe Movimientos Oculares Rápidos (MOR), en base a lo cual la fase

Cuadro 4.1: Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa de sueño		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
W	Vigilia	Ritmo alfa en $> 50\,\%$ de la época en la región occipital	No	Alto
N1	NMOR 1	Cambio de alfa por AABFM, atenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	$<$W
N2	NMOR 2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	$<$W, $>$R
N3	NMOR 3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 µV) en $> 20\,\%$ de la época. Husos de sueño	No	$<$N2, $\approx$R
R	MOR	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas agudas	Rápidos	Bajo

AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas.

R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante al estado de alerta. Estos patrones de actividad cerebral no interrumpen el sueño sino que, contrariamente, incrementan el umbral para estímulos externos (qué tan fuerte debe ser un estímulo para afectar al individuo), motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante la fase R se producen la mayoría de las ensoñaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensoñaciones [58].

La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K. En base a la mayor o menor presencia de estas características, se definen las sub-fases N1, N2, N3. Tradicionalmente se le refiere como **sueño no-MOR** (o NMOR).

4.2.1. Electroencefalografía

La técnica de electroencefalografía (EEG) consiste en medir la actividad postsináptica (transmisión de impulsos) entre neuronas en la corteza cerebral, lo cual se logra mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo. La corteza cerebral es la capa más exterior del cerebro, está formada por una fina capa de neuronas piramidales (denominadas así por su forma) altamente conectadas entre sí. Típicamente se asocia a la corteza cerebral con las funciones cognitivas superiores [42]. Conviene enfatizar que el término EEG usualmente se usa para referirse a registros hechos mientras el paciente realiza alguna actividad o se encuentra despierto y en reposo; el registro del EEG durante el sueño, adicional al registro de otras señales, es referido como polisomnografía.

Usualmente los registros de EEG muestran una actividad oscilatoria continua y cambiante, su frecuencia se considera entre 0.5 y 100 Hz. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad mental, mostrando diferencias claras durante vigilia y sueño, o durante quietud y concentración [12]. Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, suele mostrar patrones relativamente organizados, conocidos como **ondas cerebrales**; de forma tradicional, éstos se dividen en cinco grupos (referidos como **bandas**) según su*frecuencia*:

- Delta, 0.5–3.5 Hz
- Theta, 3.5–7 Hz
- Alfa, 7–12 Hz
- Beta, 12–30 Hz
- Gamma, 30–100 Hz

Conviene destacar que diferentes autores han usado límites ligeramente diferentes para las bandas; de la misma forma algunos autores han incluido o excluido bandas, así como subdivisiones de éstas.

Adicionalmente a las ondas cerebrales, en el EEG pueden encontrarse *eventos* visiblemente diferentes de su entorno, conuna duración corta (< 1 s) y *formas* características. Dos ejemplos importantes son los **husos de sueño** y los **complejos K**, definidos de manera visual y por su contexto fisiológico [24]; ambos tipos de ondas son típicos del sueño profundo y son usados para distinguirlo, aunque no se consideran ritmos ni pertenecen a las *bandas* descritas anteriormente. En la figura 4.1 se representa un arquetipo visual de cada una de las bandas, incluyendo los husos de sueño y complejos K.

Para realizar el registro del EEG en una forma estandarizada y comparable, deben indicarse los lugares donde se colocan los electrodos y la forma en que éstos están

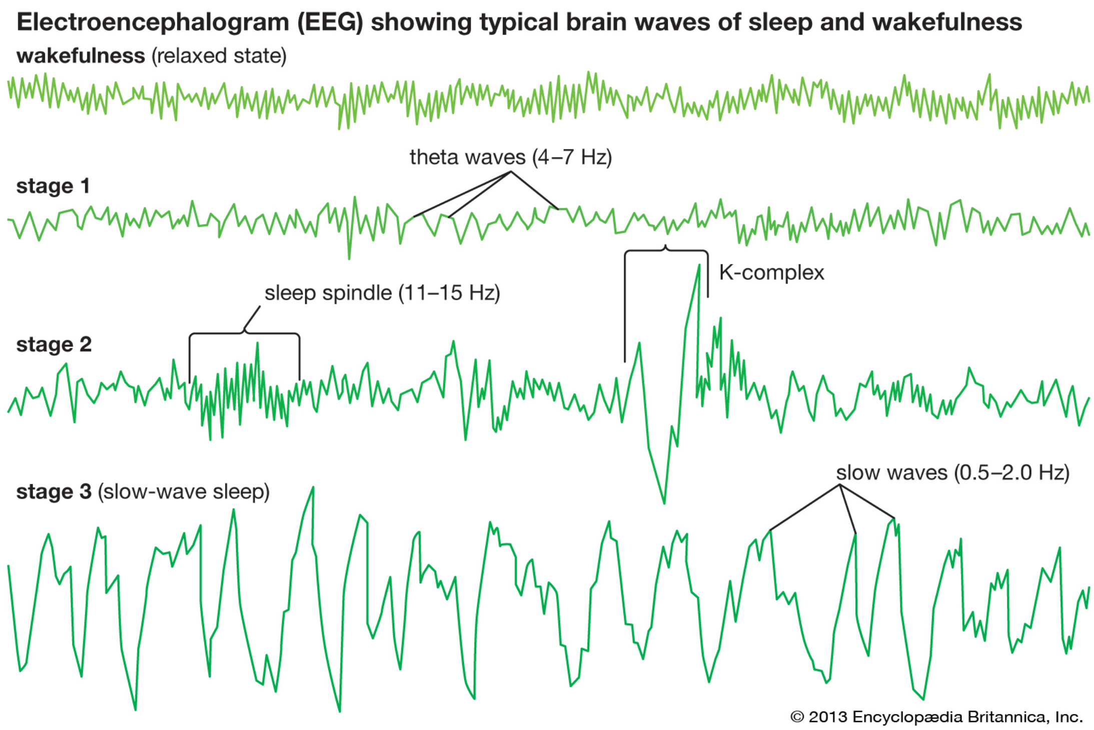


Figura 4.1: Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG durante el sueño. Imagen tomada de Encyclopædia Britannica, versión en línea [66].

conectados. En el contexto del presente trabajo, los electrodos fueron ubicados usado las coordenadas del **Sistema 10–20** [31]. En dicho sistema los sitios se ubican en una *cuadrícula* de distancias relativas (medidas en porcentajes), construida respecto puntos del cráneo relativamente fiables entre individuos:

- El *inion*, un abultamiento en la región posterior del cráneo.
- El *nasión*, la unión del hueso frontal y los huesos nasales del cráneo.
- El *punto preauricular*, arriba del cartílago *tragus* que protege el canal auditivo.

Aunque es perfectamente posible describir textualmente la construcción de las coordenadas en el sistema 10–20, se consideró que es más sencillo mostrarlos gráficamente en la figura 4.2. En la misma imagen se muestran, de forma esquemática, los lóbulos de la corteza cerebral que dan nombre a las locaciones en el sistema: FP=fronotpolar, F=frontal, T=temporal, P=parietal, O=occipital. Si bien no existe un lóbulo central, los electrodos 'C' se suelen asociar al surco central; de forma similar, los electrodos 'A' corresponden a los lóbulos auriculares, los cuales no tienen una actividad eléctrica importante y suelen usarse como referencia neutral. Los electrodos se etiquetan con números pares en el lado izquierdo, números pares en el derecho y 'Z' en el eje central.

Para hablar sobre la forma en que se conectan lo electrodos entre sí, se denota a un par de electrodos como una **derivación** (también referida como *canal*), mientras que el conjunto de derivaciones es un **montaje**. En el contexto del presente trabajo se utilizó un montaje *monopolar* (o también llamado *referencial*) en cual se forman las derivaciones conectando en paralelo a cada electrodo con su respectivo electrodo auricular.

Es importante mencionar que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y que disparan de manera asíncrona, de modo que un periodo de gran actividad cerebral bien puede ser visto en el EEG como una actividad desorganizada y de baja amplitud. En otra perspectiva, el cerebro se encuentra cubierto por las capas meninges, por el líquido encefalorraquídeo, el cráneo y el cuero cabelludo; en suma, los campos eléctricos generados en la corteza cerebral son *víctimas* de una gran difusión espacial. Es por ello que las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente.

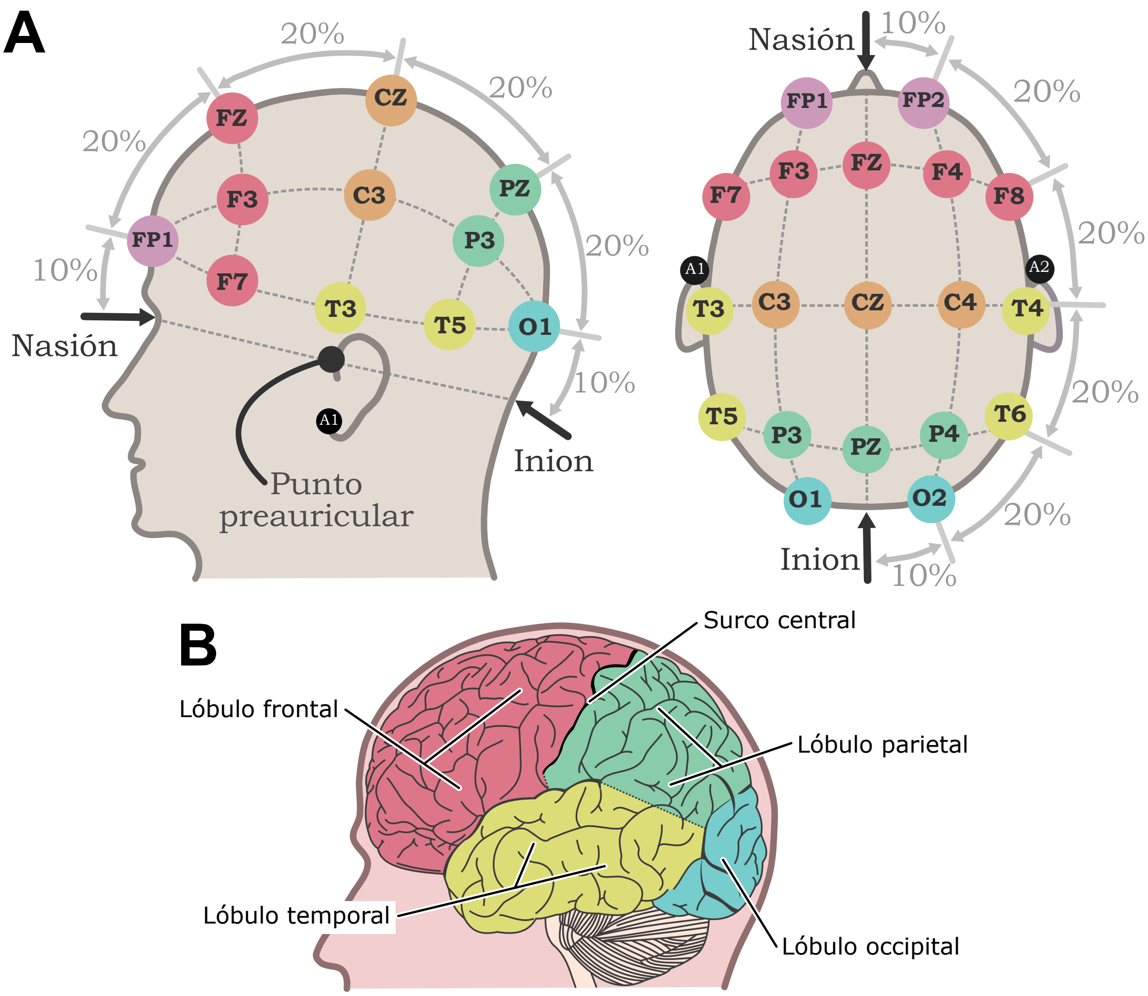


Figura 4.2: Colocación de electrodos según el sistema 10–20. **A.** Los electrodos se colocan en una malla de longitudes relativas (medidas en porcentajes) respecto a tres puntos de referencia: inion, nasion, punto preauricular. **B.** División de la corteza cerebral en lóbulos, mostrando a grosso modo qué regiones son registradas usando el EEG. Los electrodos del sistema son referidos según los lóbulos cerebrales que *representan*: Frontal, Temporal, Parietal, Occipital. Adicionalmente se registra cerca del surco Central, y los lóbulos Auriculares que son usado como puntos con actividad eléctrica negligible.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendiendo con ello a las señales que son registradas de manera no deseada.

Por ejemplo, los músculos faciales generan campos eléctricos con una frecuencia aproximada de 100 Hz; este tipo de ruidos *persistentes* (referido como *ruido de fondo*) son eliminados usando filtros de banda. En contraparte, los ruidos esporádicos de corta duración, típicamente son señalados *a mano* y provocan que el segmento de registro sea invalidado; por ejemplo, el deslizamiento de un electrodo en el curo cabelludo.

Como comentario, cabe mencionar que es posible usar electrodos colocados en otras zonas del cerebro, lo cual conlleva a técnicas similares con nombres diferentes; por ejemplo el electrocorticograma obtenido directamente de la corteza cerebral. Así mismo, se menciona que el término EEG suele usarse independientemente de la cantidad y posición de electrodos usados para el registro: se pueden usar sólo algunas derivaciones del sistema 10–20, se pueden hacer cambios como el uso de la nariz como referencia neutral, o se pueden añadir más electrodos como en el sistema 10–10 [31].

4.2.2. Polisomnografía

La técnica de polisomnografía (PSG) consiste en el registro simultáneo durante el sueño de múltiples variables *variables fisiológicas* como respiración, ritmo cardíaco, temperatura, entre otros. La decisión sobre las señales que componen la PSG depende del problema específico que será estudiado. Para ayudar en la clasificación de etapas de sueño, en el contexto del presente trabajo se usó una PSG con registros de actividad ocular, tono muscular y actividad cerebral (EEG).

La actividad ocular es registrada usando la electrooculografía (EOG), una técnica que explota el comportamiento dipolar del ojo con polos en la retina y la pupila; los movimientos del ojo producen variaciones en los campos eléctricos que pasa por él. El registro del EOG incluye una derivación para cada ojo, LOG y ROG, cada cual formada por un electrodo y el electrodo auricular de referencia común. Así como con el EEG, la ubicación de los electrodos para EOG se indican en la figura 4.3. Cabe mencionar que el registro de EOG debe ser interpretado como el movimiento del ojo, proyectado sobre el eje formado por los electrodos de registro.

El tono muscular es vigilado usando la técnica de electromiografía (EMG), la cual *observa* la actividad eléctrica producida por las fibras musculares. Su registro

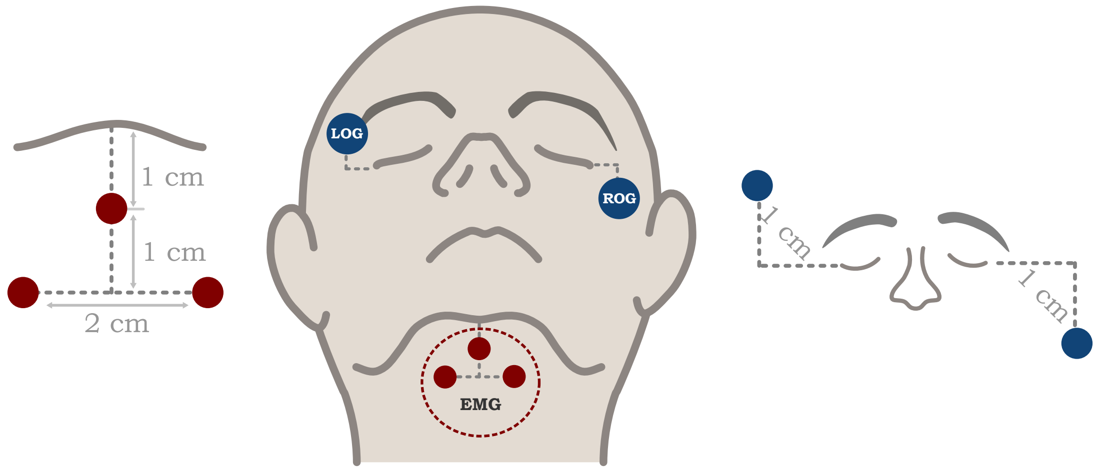


Figura 4.3: Colocación de electrodos para el registro de electrooculografía en ambos ojos (LOG, ROG) y electromiografía (EMG). Las líneas punteadas son paralelas al eje medial, y las líneas discontinuas son perpendiculares al mismo. La línea de referencia para EMG inicia en el punto medial en la barbilla.

contempla una derivación (EMG) con tres electrodos que actúan eléctricamente como tierra, fase y neutro; la ubicación de estos electrodos se indica en la figura 4.3. En el contexto del presente trabajo, más que analizarse la actividad muscular, se espera observar la *desaparición* del mismo durante el sueño MOR.

A modo de comentario, en la figura 4.4 se muestra parte de un registro de PSG durante sueño MOR exhibiendo las características descritas previamente.

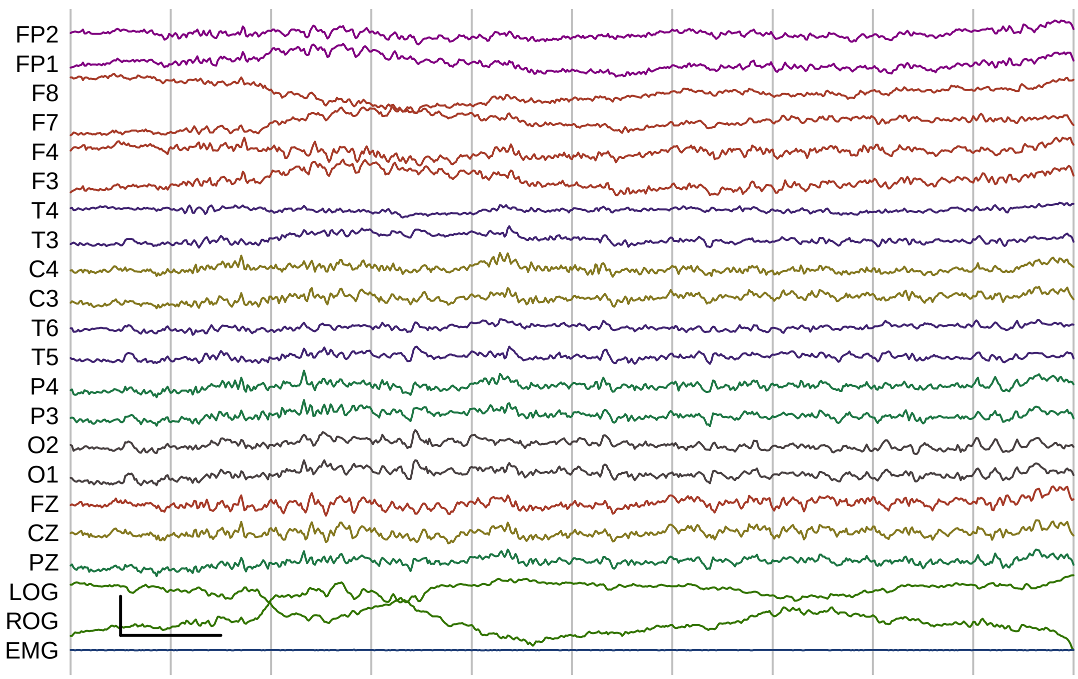


Figura 4.4: Registro de PSG durante sueño MOR. En el margen izquierdo se indica la derivación representada; aunque la mayoría corresponden al EEG, en la porción inferior se contempla al EOG y EMG. Para más detalles sobre la ubicación de las derivaciones, ver el texto y la figura 4.3. Marca de calibración: vertical, 10 µV, horizontal, 1 segundo.

4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño

Varios autores han reportado correlaciones, a nivel poblacional, entre el DCL y trastornos del sueño en adultos mayores [1, 41, 56, 50].

El sueño MOR se ha asociado durante mucho tiempo con las funciones cognitivas [15]. El sueño MOR desempeña un papel en la consolidación de la memoria [37, 21, 22, 49, 47, 48, 65, 16]. Después de tareas complejas, hay reactivaciones de circuitos neuronales durante el sueño MOR [36]. El sueño MOR mejora la memoria y los procesos de atención mediante las entradas colinérgicas [8] a través de la vía pontina [19] y las estructuras del basales del cerebro anterior [7]. Durante el envejecimiento normal y especialmente durante el envejecimiento patológico, los procesos de atención y memoria se vuelven más vulnerables, y las neuronas colinérgicas son las más afectadas [62].

Se ha encontrado, por ejemplo, correlaciones entre el DCL en adultos mayores con la *presencia* de ciertos tipos de ondas cerebrales [5, 52, 51].

Los procesos de atención y memoria dependen de circuitos colinérgicos (grupos de neuronas cuyo principal transmisor es la acetilcolina); estos circuitos son propensos a degradación estructural durante el envejecimiento, y en mayor medida si es un envejecimiento patológico [62]. Cabe destacar que los circuitos colinérgicos son activados de forma importante durante el sueño, particularmente en la fase deniminada MOR [8].

Se ha reportado una mayor potencia absoluta y relativa en frecuencias lentas para regiones laterales [9] y una menor atonía muscular [11] para adultos mayores con DCL, respecto a individuos sanos.

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

CAPÍTULO 5

Metodología y resultados

El presente trabajo surge de una colaboración con el Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, dependiente del Instituto de Ciencias de la Salud de la UAEH y a cargo de la Dra. Alejandra Rosales Lagarde. La colaboración incluye acceso a los registros obtenidos en un estudio por Vázquez-Tagle en 2016 [67]. Dicho estudio se centró en la epidemiología de los trastornos del sueño en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo, y consideró registros de PSG para evaluar parámetros relacionados al sueño MOR. El presente trabajo tiene como objetivo particular analizar con mayor detalle dichos registros.

En este capítulo se describe primeramente la metodología seguida para obtener los registros de PSG. Posteriormente se describe la metodología usada para analizar los registros de PSG, usando las herramientas descritas en el capítulo 3.

Los registros de PSG fueron segmentados en ventanas de 30 segundos, referidas como **épocas**. El análisis de los registros de PSG se llevó a cabo a tres niveles:

- Dentro de cada época.
- Entre las diferentes épocas en un registro.
- Entre los diferentes participantes.

El análisis a nivel de época contempla su clasificación según etapa de sueño (limitada a MOR y NMOR), y su clasificación como estacionarias (usando la prueba de PSR). El uso de épocas como unidades de estudio se justifica por la gran heterogeneidad del sueño nocturno; paralelamente, destaca el supuesto fisiológico de que las etapas de sueño son *comunes* entre los humanos. En suma, los registros de PSG para un sólo individuo pueden interpretarse como una población de épocas.

El análisis a nivel de registro surge de considerar la heterogeneidad del sueño pero usando al registro entero como unidad de estudio. El tomar las épocas junto con su estructura temporal reveló algunos patrones interesantes de actividad.

Para el análisis entre participantes (divididos en grupos), varias de las características descritas fueron *colapsadas* para constituir características *simples*. Debido a las características de la muestra (ver más adelante), los resultados obtenidos no pueden extrapolarse a la población en general. Los resultados obtenidos, entonces, se presentan como *indicios*.

5.1. Características de los participantes

Los participantes fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia* bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años
- Diestros (mano derecha dominante)
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales
- No usar medicamentos o sustancias para dormir
- Firma de consentimiento informado
- Voluntario para el registro de PSG

Un total de 16 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Con el fin de detectar el DCL en estos pacientes, éstos fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MM-SE), detectar cambios en su vida cotidiana (KATZ) y descartar cuadros depresivos (SAST, GDS); para más detalles ver capítulo anterior, sección 4.1.2. En la tabla A.2

Cuadro 5.1: Datos generales de los participantes

	Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SAST	KATZ	GDS
Grupo CTRL								
MJH	F	72	9	113	30	18	0	0
JAE	F	78	5	102	28	19	0	5
MGG	F	61	9	114	28	29	1	14
EMT	F	50	22	117	30	15	0	4
$\widehat{\mu}$		65.3	11.3	111.5	29.0	20.3	0.3	5.8
$\widehat{\sigma}$		12.4	7.4	6.6	1.2	6.1	0.5	5.9
Grupo PDCL								
CLO	F	68	5	81	28	22	1	6
RLO	F	63	9	90	29	20	0	3
JGZ	M	65	11	87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8	96	29		0	2
PCM	M	71	9	111	28	20	0	10
$\widehat{\mu}$		68.0	8.4	93.0	27.8	20.5	0.2	4.4
$\widehat{\sigma}$		4.1	2.2	11.4	1.6	1.0	0.4	3.6

se reportan los puntajes obtenidos por los participantes en dichas pruebas. Se determinó que, objetivamente, 12 de los voluntarios no padecen depresión o ansiedad, ni presentan afectaciones significativas en la vida diaria. Debido a problemas técnicos diversos, sólo 9 participantes fueron considerados; se reportan únicamente los datos relativos a esos participantes.

En base al diagnóstico de Posible Deterioro Cognitivo Leve, los 9 participantes fueron divididos en dos grupos: PDCL y CTRL. Es importante mencionar que, bajo las condiciones muestrales, el grupo CTRL no puede fungir satisfactoriamente como grupo control; una descripción más adecuada sería *grupo sin PDCL*.

5.1.1. Registro del polisomnograma

Para efectuar el registro de la PSG, los participantes acudieron a las instalaciones del Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran siesta ese día. Bajo estas condiciones experimentales se garantiza que los registros son representativos del sueño nocturno de cada participante.

El registro per se fue efectuado usando un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic Mexicana). El protocolo de la PSG incluye los siguientes electrodos[1]:

- 19 electrodos de EEG colocadas según el Sistema Internacional 10–20.
- 2 electrodos de EOG para movimientos oculares.
- 2 electrodos de EMG para tono muscular en los músculos submentonianos.

Los electrodos para EEG fueron conectados en paralelo usando como referencia común los lóbulos de las orejas; se mantuvo por debajo de 50 μΩ. Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron *pasado* filtros analógicos pasa bandas: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Los registros fueron digitalizados con una frecuencia de muestreo de 512 puntos por segundos (Hz), y posteriormente almacenados en formato de texto bajo la codificación ASCII.

Como se mencionó anteriormente, los registros fueron segmentados en segmentos de 30 segundos, referidas como **épocas**. Cada una de las épocas fue clasificada como MOR o NMOR; la clasificación fue llevada a cabo por dos expertos de ICSA, y bajo los estándares de la AASM.

Por simplicidad técnica, los registros fueron truncados para poder considerar épocas completas; algunos datos al final de cada registro fueron omitidos, aunque representan una cantidad negligible de tiempo. Cabe mencionar que cada época de 30 segundos, a una frecuencia de 512 Hz, representa un total de 15,360 puntos.

En la tabla 5.2 se describe la duración de los registros, así como la cantidad de tiempo del registro clasificado como sueño MOR. La cantidad de tiempo en vigilia registrado es negligible (< 5 minutos por cada participante), de modo que ésta no es reportada; con una pérdida mínima de generalidad, se puede afirmar que los registros fuera del sueño MOR corresponden a sueño NMOR.

[1]Para más detalles ver el capítulo anterior, particularmente la sección 4.2

Cuadro 5.2: Datos generales sobre los registros de PSG

	Total		MOR*		
	Épocas	Tiempo	Épocas	Tiempo	%
Grupo CTL					
MJH	1032	8:36:00	127	1:03:30	12.31
JAE	904	7:32:00	171	1:25:30	18.92
MGG	1024	8:32:00	166	1:23:00	16.21
EMT	552	4:36:00	47	0:23:00	8.51
$\widehat{\mu}$	878.0	7:19:00	128.0	1:03:53	13.99
$\widehat{\sigma}$	225.1	1:52:32	57.3	0:28:39	4.55
Grupo PDC					
CLO	944	7:52:00	132	1:06:00	13.98
RLO	840	7:00:00	99	0:49:30	11.79
JGZ	1200	10:00:00	34	0:17:00	2.83
AEFP	952	7:56:00	41	0:20:00	4.31
PCM	752	6:16:00	59	0:29:30	7.85
$\widehat{\mu}$	937.6	7:48:48	73.0	0:36:30	8.15
$\widehat{\sigma}$	168.1	1:24:04	41.5	0:20:46	4.75

*El sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos

5.2. Características muestrales

Previo a los análisis de los registros de PSG, se corroboró si los dos grupos de participantes efectivamente se *comportan* como grupos estadísticamente diferentes. Con dicho objetivo, se aplicaron pruebas U de Wilcoxon-Mann-Whithney (WMW) entre los dos grupos, para todas las variables consideradas. De lo anterior se exceptúa al puntaje de la prueba KATZ, ya que es un parámetro cualitativo. Se concluye que las mediciones son parecidas en ambos grupos para todas las variables observadas, excepto para el puntaje en la prueba Neuropsi; ello era de esperarse ya que el puntaje en Neuropsi fue usado para designar a los participantes en los grupos. Los resultados de estas pruebas se reportan en la tabla 5.3.

Se verificó si hay correlaciones entre las variables consideradas, lo cual podría afectar la interpretación de los resultados posteriores. Para ello se aplicó la prueba de correlación de Spearman a cada par de variables; para la prueba de Spearman estima de la correlación entre variables, y se prueba la hipótesis de que la correlación es diferente de cero. Estos resultados se reportan en el cuadro 5.4.

Sólo se encontraron correlaciones significativas entre dos pares de variables: edad y escolaridad, y tiempo en MOR *medido* en segundos y en porcentaje.

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas, y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Una segunda hipótesis para esta correlación es la contribución del participante EMT, quien tiene una edad menor y un nivel de educación mayor al resto de los participantes. Para contrastar la segunda hipótesis se calculó nuevamente la prueba de Spearman pero retirando los datos de EMT: se halló una correlación estimada de 0.179 con un p-valor asociado de 0.672, que no permite rechazar el que la correlación sea diferente de cero.

Se descarta entonces la hipótesis del efecto generacional, cuando menos para el grupo de participantes considerados, y se acepta que la correlación es debida a valores atípicos. Se concluye que, usando los datos recabados, no se pueden obtener información relevante sobre el efecto del nivel de educación ni la edad sobre el PDCL, ni con los marcadores del PSG que se describirán más adelante.

Intuitivamente era de esperarse la correlación entre el tiempo en MOR y el porcentaje de sueño que es MOR. Sin embargo, la hipótesis de que el sueño tenga una

Cuadro 5.3: Variables independientes entre grupos

	Grupo CTRL		Grupo PDCL		Prueba de WMW	
	Media	(DE)	Media	(DE)	p	W
Edad	65.3	12.4	68.0	4.1	0.905	9.0
Escolaridad	11.3	7.4	8.4	2.2	0.797	11.5
Neuropsi	111.5	6.6	93.0	11.4	**0.032**	19.0
MMSE	29.0	1.2	27.8	1.6	0.366	14.0
SATS	20.3	6.1	20.5	1.0	0.301	4.0
GDS	5.8	5.9	4.4	3.6	0.905	11.0
Sueño [s]	7:19:00	1:52:32	7:48:48	1:24:04	1.000	10.0
MOR [s]	1:03:52	0:28:39	0:36:30	0:20:46	0.190	16.0
MOR [%]	14.0 %	4.5 %	8.2 %	4.8 %	0.111	17.0

DE=Desviación Estándar, WMW=Wilcoxon–Mann–Whitney

Cuadro 5.4: Prueba de correlación de Spearman (estimación y p-valor)

	Escolaridad	Neuropsi	MMSE	SAST	GDS	Sueño [s]	MOR [s]	MOR [%]
Edad	-0.699	-0.267	-0.079	-0.171	-0.233	0.200	0.183	0.100
	(0.04)	(0.49)	(0.84)	(0.69)	(0.55)	(0.61)	(0.64)	(0.81)
Escol.		0.437	0.194	-0.366	-0.254	-0.044	-0.586	-0.525
		(0.24)	(0.62)	(0.37)	(0.51)	(0.91)	(0.10)	(0.15)
Neuropsi			0.501	-0.415	0.200	-0.267	0.150	0.200
			(0.17)	(0.31)	(0.61)	(0.49)	(0.71)	(0.61)
MMSE				-0.628	-0.378	-0.316	-0.070	0.018
				(0.09)	(0.32)	(0.41)	(0.86)	(0.96)
SATS					0.610	0.317	0.293	0.195
					(0.11)	(0.44)	(0.48)	(0.64)
GDS						-0.433	0.517	0.467
						(0.25)	(0.16)	(0.21)
Sueño [s]							-0.050	-0.067
							(0.91)	(0.88)
MOR [s]								0.983
								(0.00)

estructura característica –y por tanto, que las etapas de sueño aparezcan en proporciones similares en varios individuos— es ajena a los supuestos estadísticos. Con base a este resultado, en adelante se usará el porcentaje de MOR como *sustituto* del tiempo real de MOR porque (1) dichas variables están fuertemente correlacionadas, y (2) porque el porcentaje permite comparar intuitivamente a características de registros con duraciones muy diferentes.

5.3. Análisis a nivel de época

Como se mencionó anteriormente, los registros fueron fragmentados en ventanas de 30 segundos, referidas como épocas, para su clasificación en etapa de sueño. De manera independiente, cada una de estas épocas fue sometida a la prueba de estacionariedad de Prietley–Subba Rao (PSR) para investigar si es estacionaria en el sentido de homogeneidad espectral; para más detalles ver la sección 3.4.

En base a la prueba de PSR, cada una de las épocas consideradas fue clasificada como *estacionaria* si fue rechazada la hipótesis de no–estacionariedad con un nivel de significancia $p < 0.05$. La aplicación per se de la prueba de PSR fue efectuada usando el software estadístico R; en particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete `fractal` bajo la función `stationarity` [13].

Con cada época clasificada según etapa de sueño (MOR o NMOR) y según estacionariedad, se procedió primeramente a revisar cómo están relacionadas ambas características. Para ello se planteó la hipótesis de que la cantidad de épocas estacionarias es diferente en MOR y NMOR. Debido a que la cantidad de épocas en NMOR es considerablemente mayor a las épocas en MOR, y en base a las observaciones de la sección anterior, se usaron proporciones en lugar del total de épocas; para simplificar la referencia, las proporciones de épocas clasificadas como estacionarias en MOR y NMOR serán referidas como $\mathrm{p}_{\mathrm{MOR}}$ y $\mathrm{p}_{\mathrm{NMOR}}$, respectivamente. Dado que ambas clasificaciones son dicotómicas, la comparación se llevó a cabo usando la prueba χ^2 de Pearson. Los resultados obtenidos se reportan en el apéndice B, y en la figura **??** se muestra únicamente en qué derivaciones se encontraron diferencias significativas.

Con base a la hipótesis sobre estacionariedad local, discutida en la sección 3.5, se procedió a repetir la clasificación de estacionariedad pero usando ventanas de diferentes tamaños. Por fines de comparabilidad y por motivos técnicos, los tamaños de ventana se eligieron de la forma 30×2^n segundos. El tamaño de ventana más

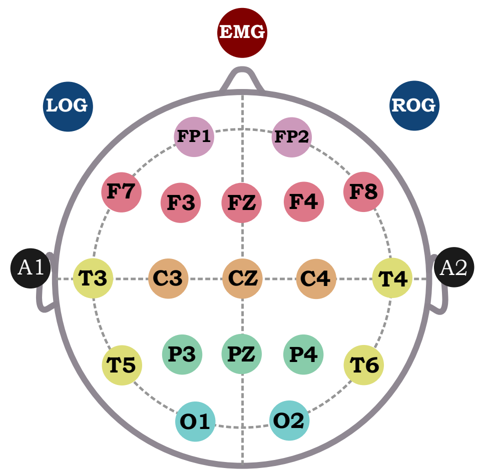


Figura 5.1: Representación minimalista de los electrodos considerados en el registro de PSG; para más detalles ver las secciones 4.2.1 y 4.2.2. En lo posterior, se usarán figuras basadas en ésta para reportar resultados.

pequeño considerado fue de $^{30}/_{32}$ segundos para poder correr la prueba de PSR de forma confiable, mientras que el tamaño más grande fue de 240 segundos tomando en cuenta que bloques más grandes son demasiado heterogéneos para considerarse como unidades de estudio fiables.

En la figura 5.2 se muestra únicamente las proporciones estimadas de épocas estacionarias para MOR y NMOR, para un participante; los resultados de este análisis para todos los participantes puede encontrarse en el apéndice B. Usando épocas de mayor duración, se encuentra que una proporción menor de estas son clasificadas como estacionarias; sin embargo, usando épocas de menor duración no se garantiza el efecto contrario. Dicho fenómeno será discutido posteriormente.

Intuitivamente, no se pudo identificar una conexión clara entre el PDCL y las características de las épocas como unidades autónomas. Es debido a ello que se consideran otros dos niveles de organización sobre los registros: los registros como un conjunto de épocas distribuidas en el tiempo con *cierta estructura*, y al individuo como unidad en la variabilidad de dichas estructuras.

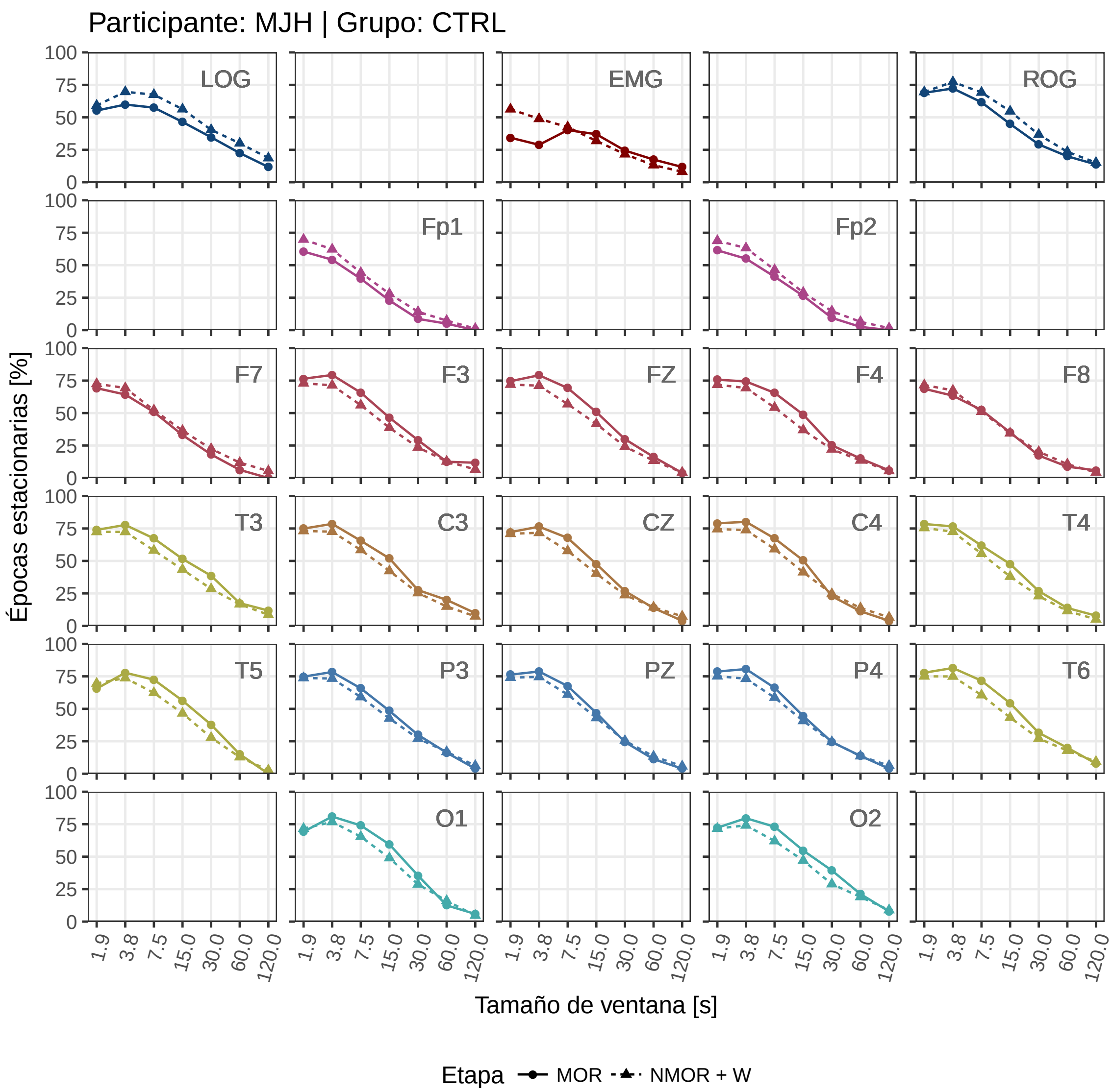


Figura 5.2: Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias, respecto al tamaño de ventana considerado, en cada una de las derivaciones consideradas. La posición y color de cada gráfico se corresponden a aquellos de la figura 5.1. Sea abrevia W=Vigilia, recordando que la cantidad tiempo de los registros clasificada como vigilia es negligible.

5.4. Análisis a nivel de registro

Como se mencionó en la sección 4.3, se ha reportado cambios en la estructura del sueño en adultos mayores con deterioro cognitivo, respecto a adultos mayores saludables. El objetivo de esta subsección es intentar detectar estos *cambios de estructura* usando los métodos descritos y bajo las condiciones descritas.

Con el fin de explorar cómo se relacionan las épocas estacionarias con la *estructura del sueño*, se procedió a *graficar* la estacionariedad. Para efectuar lo anterior se consideró una cuadrícula, con una fila por cada derivación y una columna por cada época analizada (se registró el mismo número de épocas para cada derivación); sobre la cuadrícula el espacio correspondiente a cada época fue coloreado a según la clasificación de la época como estacionaria. Se procedió similarmente para ilustrar la clasificación según etapa de sueño. En la figura 5.3 se ejemplifica este tipo de gráficos, además de otros detalles a mencionarse.

Los gráficos obtenidos mediante este procedimiento mostraron algunas regularidades que merecen especial atención: *bloques emergentes* de épocas que comparten clasificación como estacionarias (o como no–estacionarias). Estos bloques identificados visualmente se extienden entre diversas derivaciones; puede verse un ejemplo de ello en la figura 5.3. Debido a la forma en que se efectuó la clasificación de estacionariedad (usando la prueba de PSR) puede garantizarse que estos patrones emergentes no son producidos por la clasificación per se. Se hipotetiza que estos *patrones de estacionariedad* corresponden a las diferentes etapas de sueño. Posteriormente se discutirá con más detalle al respecto.

El procedimiento de graficación se repitió para las clasificaciones de estacionariedad obtenidas usando diferentes tamaños de ventana, con el fin de verificar si la presencia de los bloques podría atribuirse al tamaño de ventana usado. Se encontró que los patrones aparecen con mayor o menor *nitidez* en los gráficos obtenidos usando diferentes tamaños de ventana, tal como se ilustra en la figura 5.3.

Dentro del contexto del PDCL en adultos mayores, estos patrones de estacionariedad no serán definidos formalmente ni estudiados detalladamente; se presentan como un hallazgo incidental y como verificación empírica de las capacidades de la técnica descrita para distinguir características que varían en el tiempo. Esta decisión fue tomada considerando la naturaleza fuertemente cualitativa de dichos patrones.

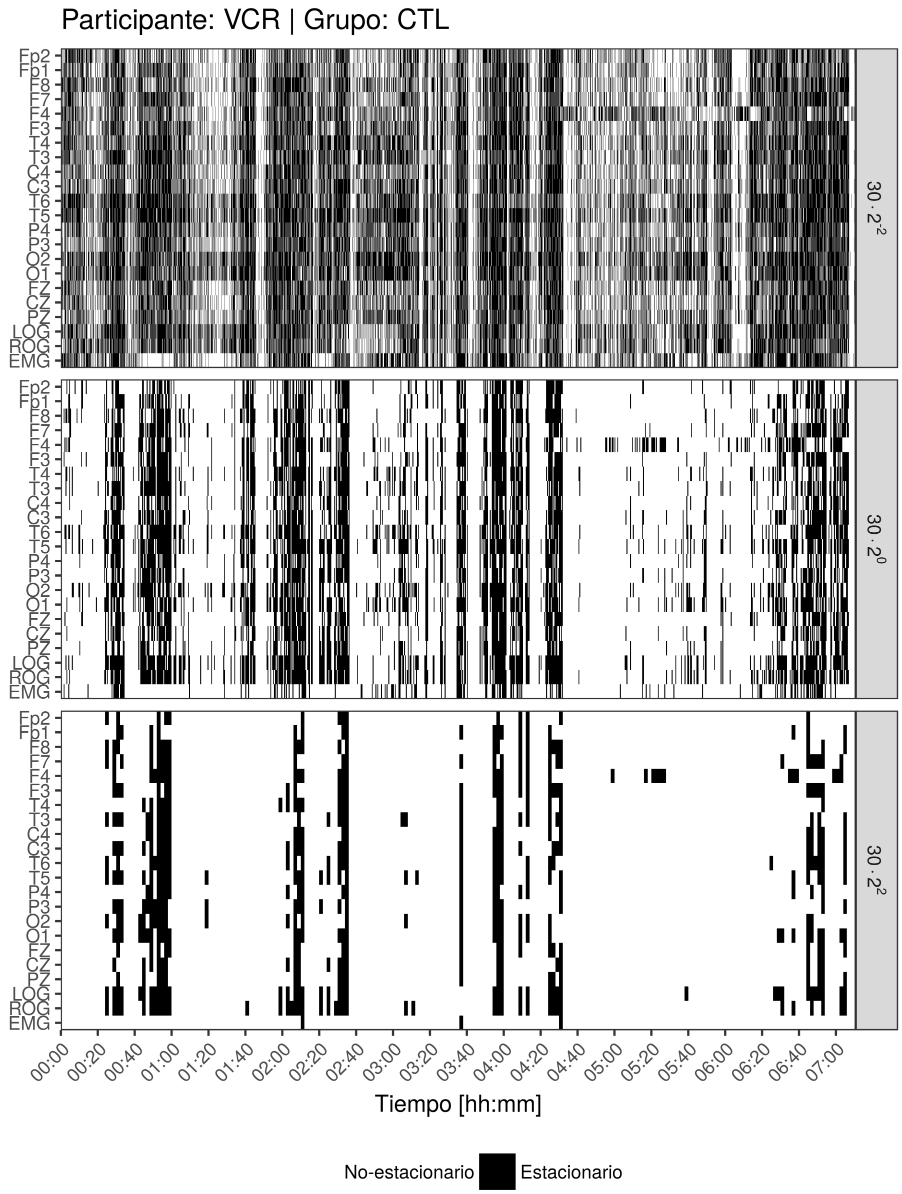


Figura 5.3: Distribución en el tiempo de las ventanas clasificadas como estacionarias, considerando diferentes tamaños de ventana. Cada ventana fue representada en una cuadrícula según su derivación (margen izquierdo) y momento (margen inferior) de procedencia; posteriormente fue *coloreada* según su clasificación como estacionaria. Dado que la clasificación de estacionariedad se repitió usando diversos tamaños de ventana, éstos se indican en el margen derecho. En la parte inferior se representan las mismas épocas en su clasificación según etapa de sueño. Adicionalmente, en la parte superior se indican los *patrones emergentes* de estacionariedad; para más detalles al respecto, ver el texto.

5.5. Análisis a nivel de grupo

Se repitió la comparación a un nivel grupal, usando la prueba U de Mann-Whitney. Se encontraron diferencias significativas para el grupo CTL en los canales P3, P4, PZ, ROG y EMG; en el grupo PDC se observaron tales diferencias sólo en P4. Las proporciones muestran tendencias que, quizá, resultaron no ser significativas por el tamaño pequeño de la muestra: los canales P3 y PZ podrían ser diferentes también para individuos del grupo PDC, y el canal LOG podría ser diferente durante sueño MOR y NMOR. Así mismo se hipotetiza que para el grupo CTL, en todos los canales, el sueño MOR es presenta menor cantidad de épocas estacionarias.

Se concluye que no se puede establecer diferencias entre las medias grupales para esta cantidad (proporción de épocas estacionarias, medidas en el sentido de PSR), debido a la gran variabilidad entre sujetos.

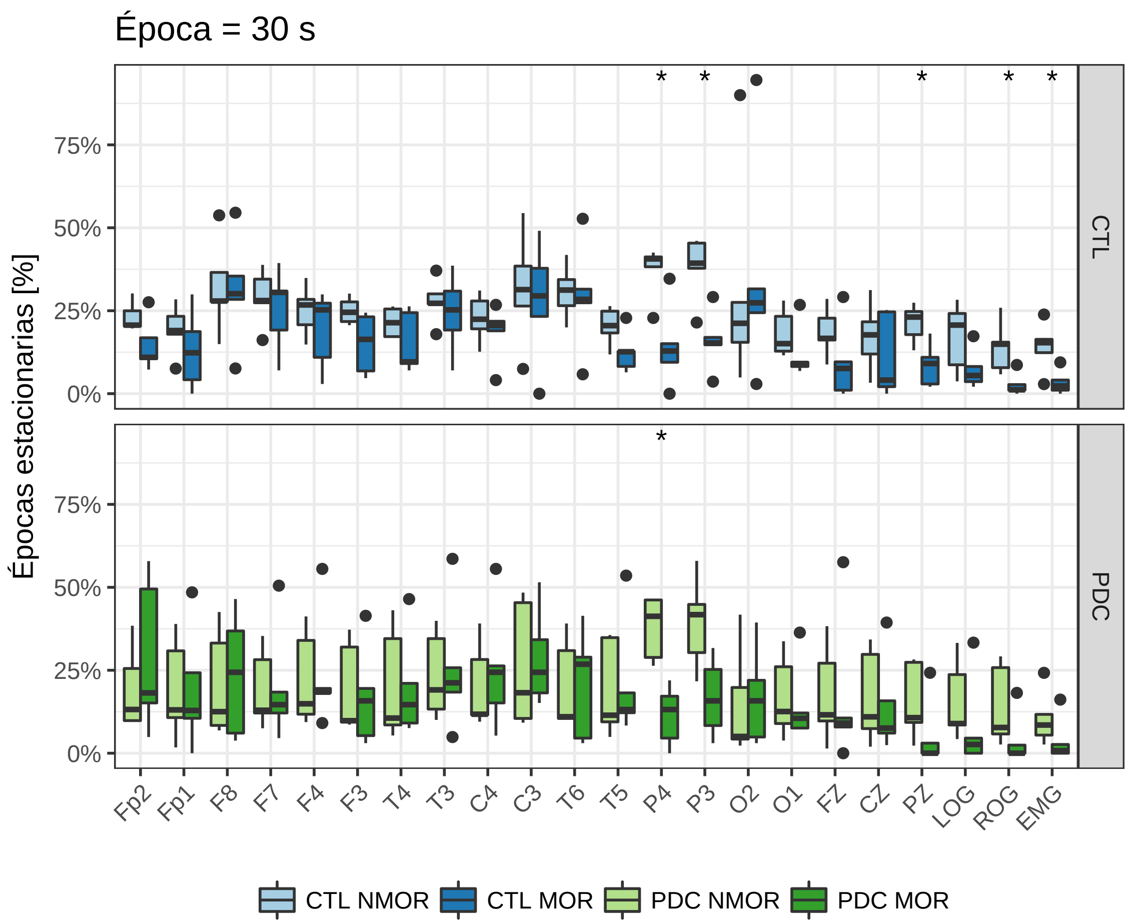


Figura 5.4: Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.

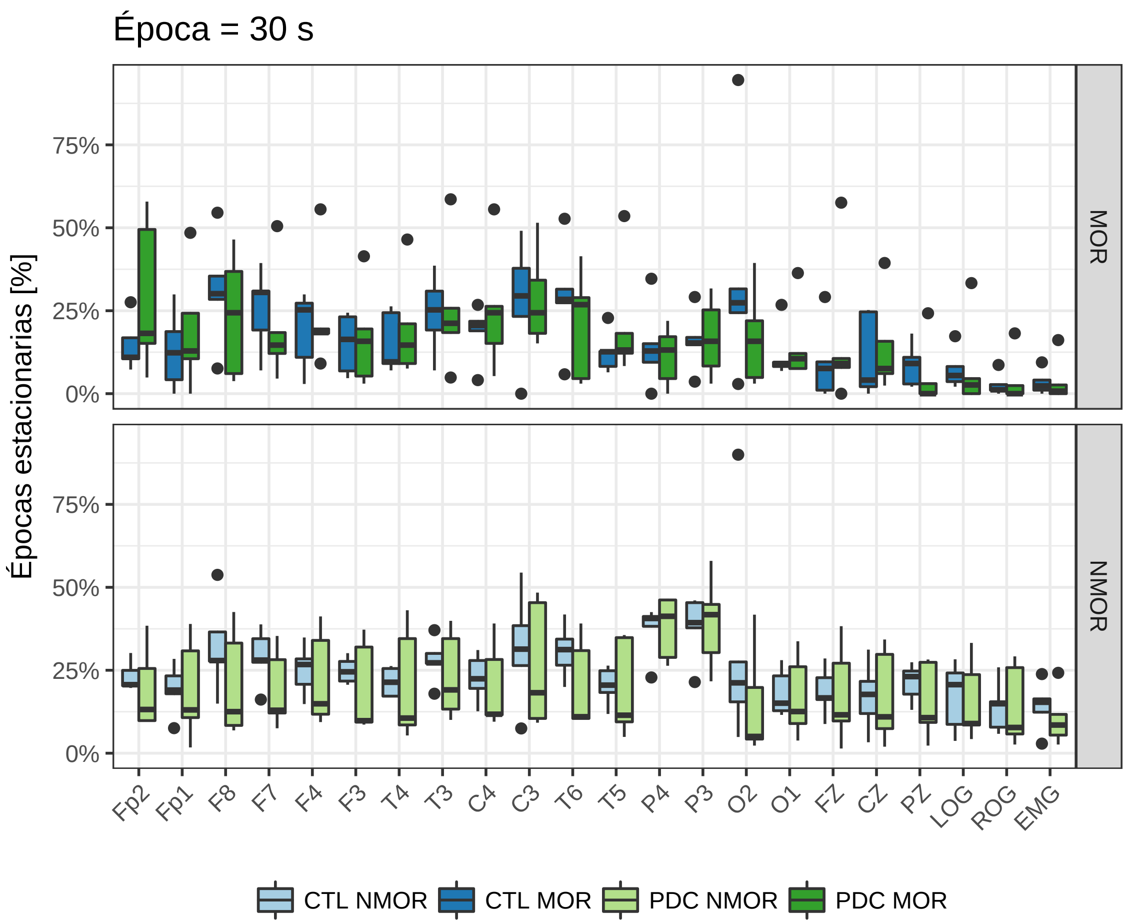


Figura 5.5: Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC.

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

CAPÍTULO 6

Discusión y Conclusiones

Considerar a las épocas, fragmentos de registros electrofisiológicos, como unidades de estudio es equivalente a considerar como unidades de estudio a las sub-capas que componen a la corteza cerebral.

————-

Al comparar sujetos de los grupo CTRL y PDCL, no se observaron cambios estadísticamente significativos en las cantidades p_{MOR} y p_{NMOR}, que respectivamente representan las proporciones de tiempo durante las cuales los registros de PSG se comportan como débilmente estacionario durante MOR y NMOR. En base a estos resultados, puede concluirse que los cambios en la corteza cerebral durante el PDCL no inducen cambios significativos en su *comportamiento* como estacionarios; en otras palabras, con el PDCL la actividad mantiene una parte importante de su *estructura* y es false que se vuelve más *simple*.

Comparando grupalmente la cantidad de épocas estacionarias durante MOR y NMOR, se encontró que en el grupo CTRL había diferencias significativas en sitios de la región frontal y que no eran presentes en el grupo PDCL; para poder establecer una relación con el PDC haría falta un mayor grupo muestral, o bien nuevos registros de PSG para los mismos sujetos, o incluso analizar registros de EEG durante otro tipo de actividades y confirmar las diferencias encontradas.

Cabe destacar que la evidencia aportada indica que el PSG es un conjunto de señales que se comportan como no-estacionarias durante la mayor parte del sueño, lo cual confirma el supuesto usual de que las señales de origen biológico son por naturaleza no-estacionarias.

6.1. Conclusiones

Se ha reportado que los cambios debidos al DCL están asociados con cambios en la estructura del sueño, y en particular en la etapa MOR. Los resultados obtenidos indican que la clasificación de fragmentos de PSG como estacionarios responde a los cambios entre etapas de sueño, en particular al MOR. Sin embargo, no se pudo establecer una relación clara entre el PDCL (una forma *concreta* del DCL) y los cambios detectados usando la clasificación de estacionariedad.

Se concluye que la metodología descrita no puede usarse directamente como un marcador para el diagnóstico del PDCL. Sin embargo, tampoco puede descartarse su utilidad para dicho fin, ya que muestra diferencias significativas para los patrones de actividad cerebral en regiones fisiológicamente relevantes: ??.

Respecto a la hipótesis de estacionariedad local (presentada en la sección 3.5), la información recabada sugiere que dicha hipótesis se verifica para registros de PSG en adultos mayores. En otras palabras, es posible que existan fragmentos arbitrariamente cortos de registros de PSG, los cuales no *corresponden* a procesos estocásticos débilmente estacionarios. Paralelamente, los resultados obtenidos sugieren que la presencia de dichos fragmentos se ve influida por la etapa de sueño –o quizá en general por el estado de actividad del cerebro. Se hipotetiza que éste fenómeno explica los resultados favorables en dirección a la detección del PDCL *usando* la estacionariedad; en consecuencia, un mejor entendimiento de dicho fenómeno podría usarse para mejorar la metodología respecto a la detección el PDCL.

El hallazgo incidental de patrones emergentes de estacionariedad (ver sección 5.4) sugiere que, en principio, es posible usar la clasificación de estacionariedad en registros de EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Esta posibilidad es interesante, pero va más allá de los objetivos del presente trabajo.

6.2. Trabajo a futuro

Los resultados obtenidos son *prometedores*, pero no son suficientes para declarar marcadores clínicos para el PDCL basados en la metodología descrita. En el contexto de la colaboración con el Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, la metodología será automatizada para poder analizar el total de registros obtenidos en el estudio por Vázquez Tagle y colaboradores. En base a los resultados obtenidos con un número mayor de participantes, se decidirá si se inicia un nuevo estudio para *validar* la metodología descrita, o si debería descartarse.

De manera general, el uso de marcadores basados en registros de PSG aporta una base objetivo al diagnóstico del deterioro cognitivo, y complementa los resultados más subjetivos de pruebas neuropsicológicas; esta afirmación permanece válida para una gran variedad de señales electrofisiológicas y de trastornos mentales. Conviene destacar que las técnicas basadas en el EEG son relativamente poco *invasivas*, de bajo costo y fácil acceso, con relación a la calidad de la información obtenida y en comparación con otras técnicas para la observación del sistema nervioso central. Entonces generar marcadores diagnósticos tempranos basados en el EEG facilita su acceso para el público en general, en especial para detectar etapas tempranas del deterioro cognitivo.

En otro ámbito, los patrones emergentes de estacionariedad serán explorados en trabajos futuros.

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

APÉNDICE A

Puntajes para pruebas neuropsicológicas

Cuadro A.1: Puntajes de corte para la prueba MMSE

Edad	Nivel de estudios	Máximo	Deterioro
45 – 49	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
50 – 54	Elemental	23	18
	Primario	27	21
	Medio	28	22
	Superior	29	23
55 – 59	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
60 – 64	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
65 – 69	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
70 – 74	Elemental	22	17
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
75 – 79	Elemental	21	16
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
80 – 84	Elemental	20	16
	Primario	25	20
	Medio	25	20
	Superior	27	21

Fuente: Folstein [17]

Cuadro A.2: Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

		Sano		Deterioro cognitivo		
Edad	Escolaridad	Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
31 – 50	Nula	95	68	54	41	28
	1 – 4	105	81	69	58	46
	5 – 9	118	106	101	90	79
	10 – 24	113	102	97	88	78
51 – 65	Nula	91	59	44	28	13
	1 – 4	98	77	67	57	47
	5 – 9	111	98	91	79	67
	10 – 24	102	93	88	80	72
66 – 85	Nula	76	48	34	20	6
	1 – 4	90	61	46	32	18
	5 – 9	97	80	72	56	39
	10 – 24	92	78	72	59	46

Fuente: Ardila y Ostrosky [2]

Cuadro A.3: Puntuación para la prueba KATZ

Actividad		Descripción
1	Baño	Se baña completamente, o necesita ayuda sólo para jabonarse ciertas regiones (espalda, o una extremidad dañada).
2	Vestido	Saca la ropa del closet, se viste y desviste. Se excluye el anudar los cordones.
3	Uso del toilet	Llega al baño, se sienta y para del toilet, se arregla la ropa y se limpia (puede usar su propia chata en la noche y usar soportes mecánicos).
4	Movilidad	Entra y sale de la cama independientemente, se sienta y para de la silla (puede usar soporte mecánico).
5	Continencia	Controla totalmente esfinter anal y vesical.
6	Alimentación	Lleva la comida del plato a la boca (se excluye el cortar la carne o preparar la comida).

Fuente: Katz [30]. Se puntúa la dependencia para cada actividad.

Cuadro A.4: Puntajes de corte para las pruebas SAST y GDS

Prueba	Puntaje	Indicación
SAST	> 24	Positivo para ansiedad
	22 – 24	No es conclusivo
	< 22	Negativo para ansiedad
GDS	0 – 4	Normal
	5 – 8	Depresión leve
	9 – 11	Depresión moderada
	12 – 15	Depresión severa

Fuente: Yesavage [70], Sinoff [64]

APÉNDICE B

Cuadros y figuras adicionales

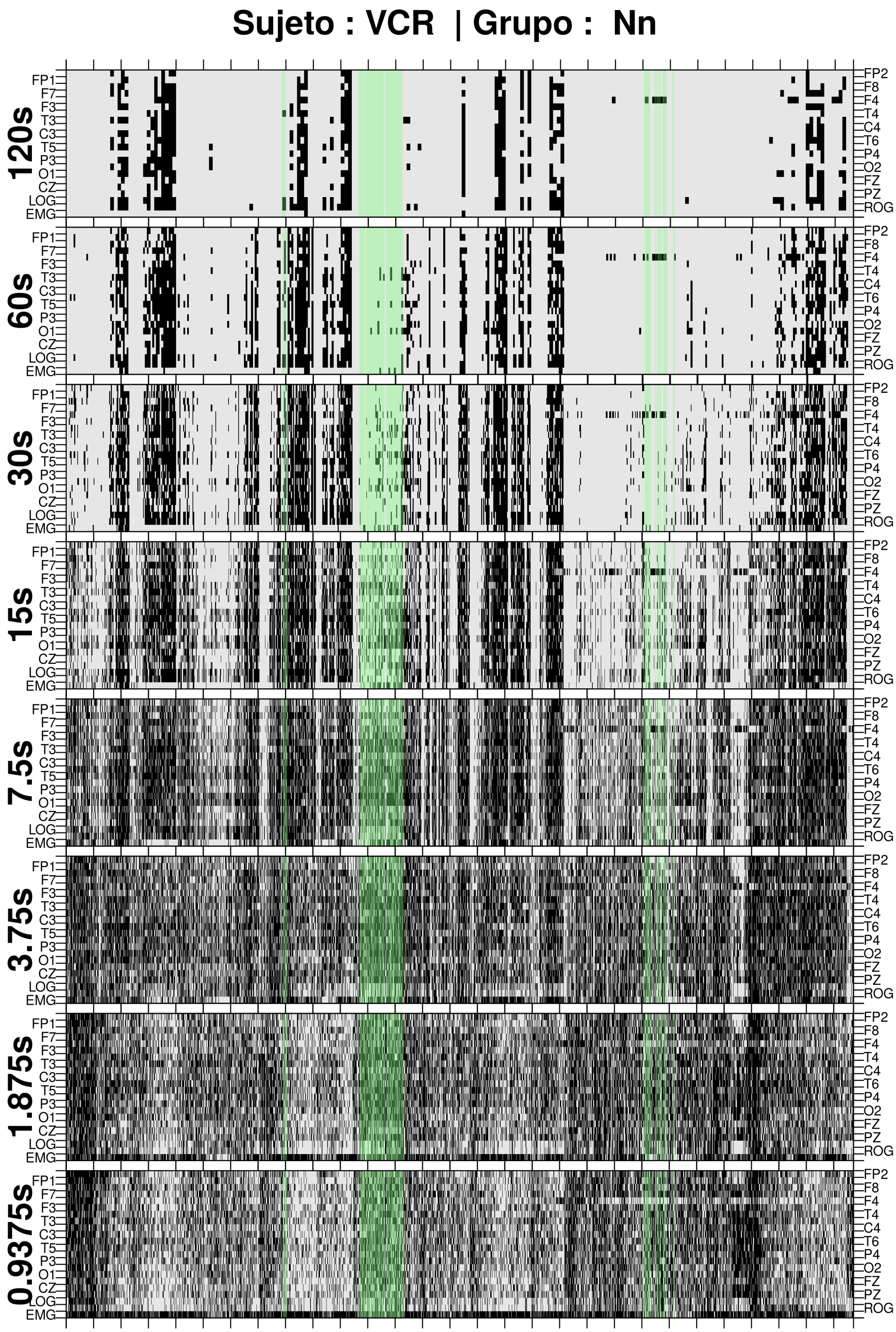
En este apéndice se muestran mayores detalles sobre los resultados obtenidas durante los análisis descritos en el capítulo 5. Este material fue excluido del texto principal con el fin de agilizar su lectura y enfatizar la interpretación de los resultados en el contexto del PDCL, más que la forma en que fueron calculados.

Los gráficos **??** y **??** representan, esquemáticamente, las derivaciones donde las proporciones de épocas estacionarias son diferentes en MOR y NMOR; para más detalles ver la sección 5.3. Estos gráficos pueden entenderse como una réplica de la figura **??** usando varios tamaños de época.

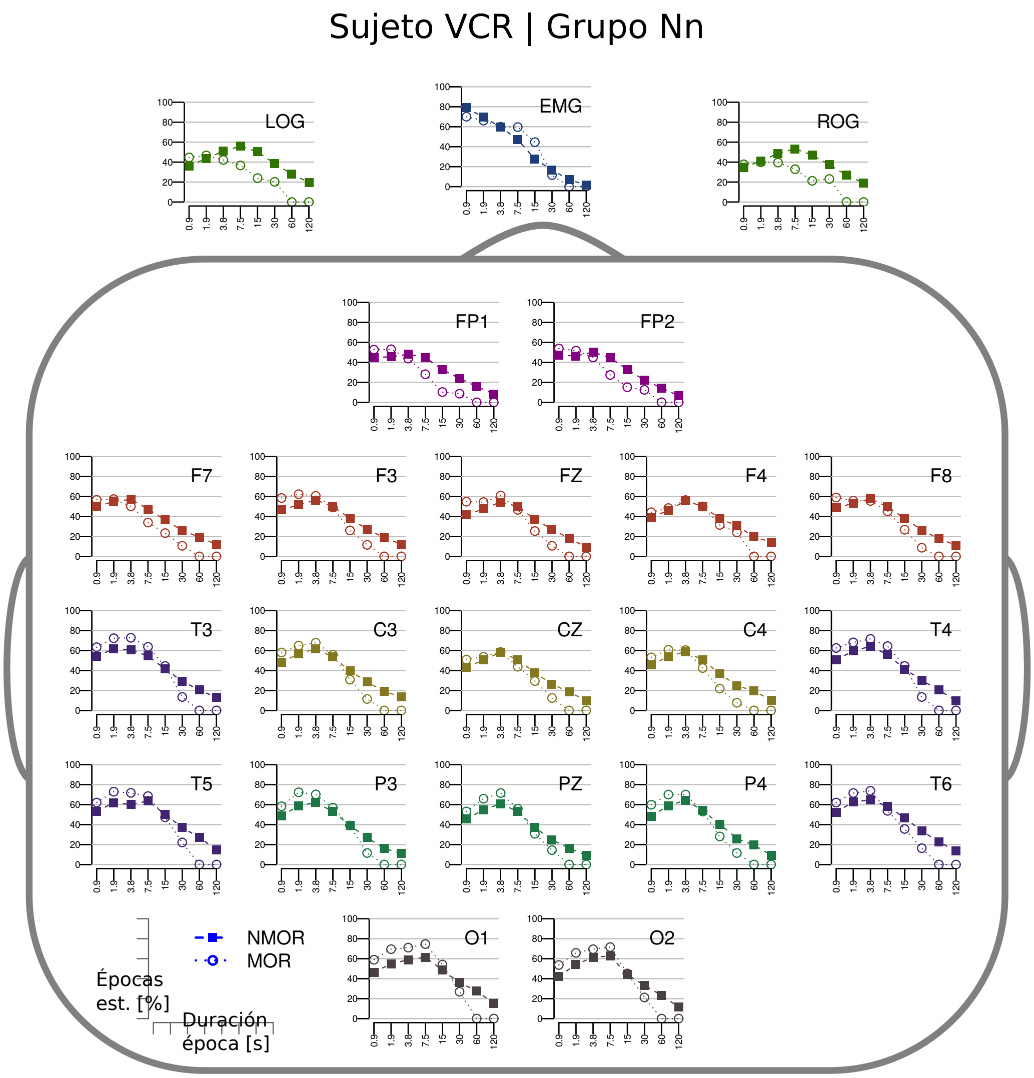
Como prueba voy a referirme a las figuras figs. B.2 to B.6.

Cuadro B.1: Épocas estacionarias, participante VCR

	E = 0.9375			E = 1.875			E = 3.75			E = 7.5			E = 15			E = 30		
	N+W	R	P	N+W	R	P	N+W	R	P	N+W	R	P	N+W	R	P	N+W	R	P
Fp2	11789	1258	.000	5801	604	.001	3200	263	.018	1455	80	.000	545	22	.000	188	3	.000
Fp1	11112	1232	.000	5674	620	.000	3058	256	.054	1463	82	.000	549	15	.000	204	2	.000
F8	12067	1378	.000	6669	651	.088	3643	324	.353	1581	132	.156	615	39	.009	223	4	.000
F7	12513	1323	.000	6892	670	.104	3648	293	.001	1537	99	.000	595	34	.002	216	8	.007
F4	9748	1033	.000	5779	565	.129	3505	329	.772	1583	146	1.000	605	46	.157	246	18	.347
F3	11457	1365	.000	6384	727	.000	3535	354	.055	1584	143	.753	620	38	.005	225	7	.002
T4	12480	1461	.000	7426	796	.000	4006	418	.000	1745	188	.007	649	65	.524	245	15	.109
T3	13432	1479	.000	7673	845	.000	3752	425	.000	1694	186	.003	650	65	.533	237	14	.093
C4	11326	1243	.000	6726	710	.000	3706	353	.489	1624	124	.008	599	32	.001	208	6	.002
C3	11947	1355	.000	7059	759	.000	3860	396	.004	1681	163	.484	637	45	.046	238	8	.002
T6	12975	1450	.000	7823	836	.000	4027	431	.000	1857	157	.135	752	52	.013	271	20	.325
T5	13267	1450	.000	7668	852	.000	3730	419	.000	1993	200	.111	796	69	.551	303	17	.025
P4	11948	1399	.000	7311	818	.000	4032	409	.007	1707	155	.801	655	41	.005	218	5	.000
P3	12035	1363	.000	7273	845	.000	3880	410	.000	1661	166	.231	616	57	1.000	224	8	.004
O2	10415	1254	.000	6716	769	.000	3816	406	.000	1954	209	.003	695	66	.876	272	14	.019
O1	11418	1377	.000	6753	812	.000	3648	415	.000	1901	218	.000	758	79	.231	288	22	.380
FZ	10204	1280	.000	5924	635	.000	3398	356	.003	1585	136	.297	606	37	.005	224	9	.009
CZ	10772	1189	.000	6333	628	.034	3671	342	.906	1628	128	.023	609	43	.054	221	5	.000
PZ	11300	1241	.000	6800	770	.000	3780	418	.000	1666	163	.400	592	45	.164	207	7	.005
LOG	8922	1043	.000	5462	545	.044	3265	246	.000	1820	107	.000	832	35	.000	320	11	.000
ROG	8688	882	.003	5183	465	.458	3118	231	.000	1739	96	.000	779	31	.000	310	11	.000
EMG	20131	1636	.000	8808	772	.017	3769	350	.969	1442	174	.000	414	65	.000	122	20	.028
Total	25236	2336		12618	1168		6309	584		3154	292		1577	146		788	73	



(a) Épocas estacionarias usando diferentes tamaños de ventana



(b) Resumen de épocas estacionarias según tamaño de ventana

Figura B.1: Gráficos individuales para el sujeto VCR

Patrones visuales

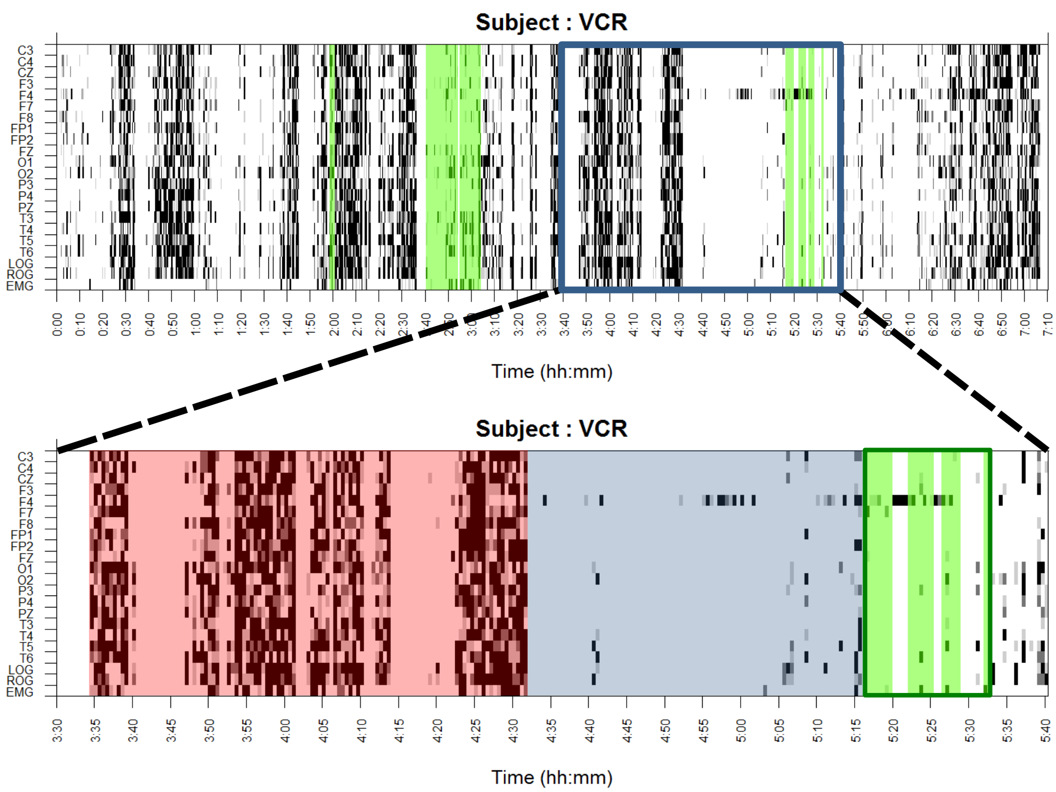


Figura B.2: Test

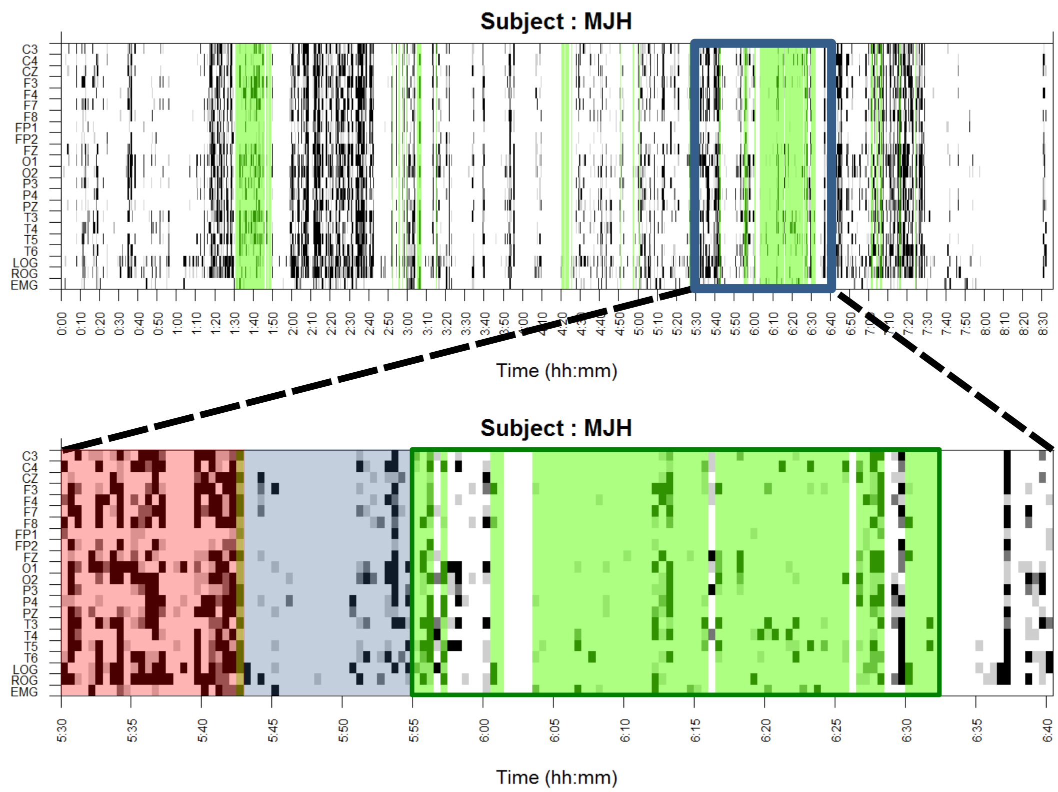


Figura B.3: Test

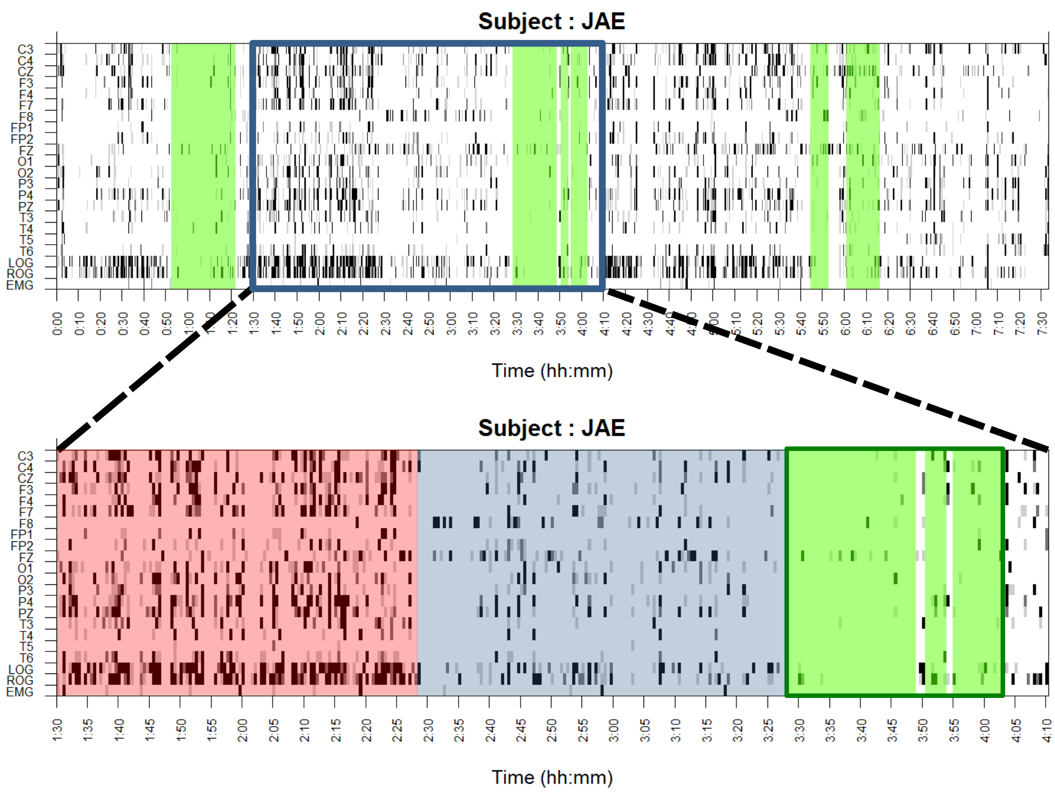


Figura B.4: Test

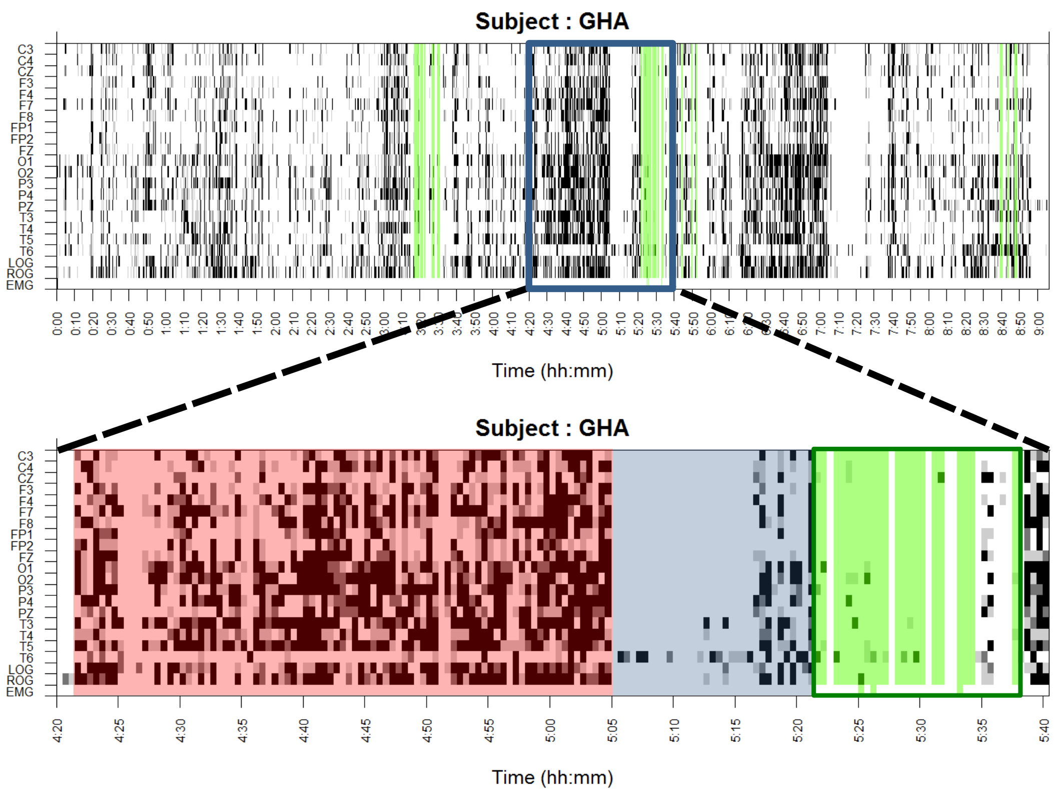


Figura B.5: Test

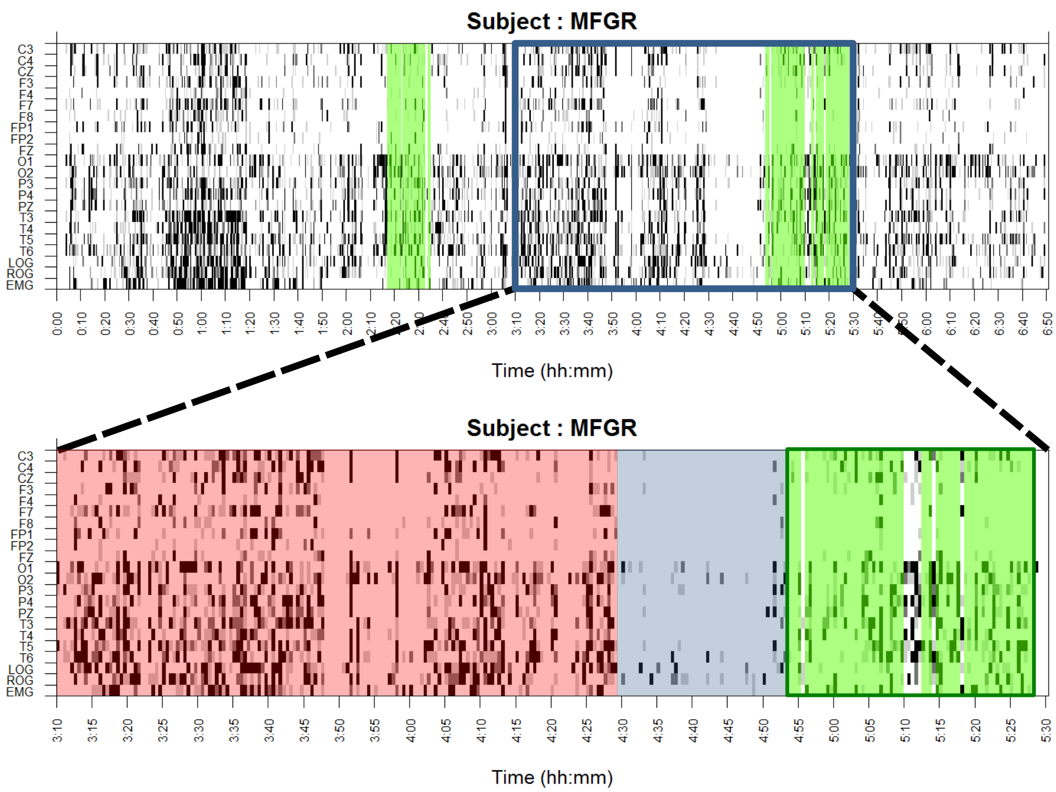


Figura B.6: Test

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

Glosario

AABFM: Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

Actividad de amplitud relativamente baja (< 10 µV), visualmente desorganizada. No tiene una forma sinusoidal clara.

AASM: American Academy of Sleep Medicine

Sociedad estadounidense dedicada al estudio de la *Medicina del sueño* (relativo al diagnóstico y tratamiento de trastornos del sueño). En dicha área, los estándares establecidos por esta organización se encuentran ampliamente difundidos.

DCL: Deterioro Cognitivo Leve

Conjunto de deficiencias cognitivas *objetivas*, respecto a un estado anterior, que no cumplen los criterios para ser clasificadas como demencia. Para ello se entiende que una deficiencia es objetiva si puede confirmarse usando pruebas neuropsicológicas, en contraposición al reporte subjetiva por parte del individuo.

DSM: [Sueño] No-MOR

EEG: Electroencefalografía

Lectura de la actividad eléctrica en la corteza cerebral, la cual se origina por la actividad postsináptica de las neuronas en dicha región. En el presente trabajo, el término EEG se limita a registros obtenidos mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo del individuo, siendo que otros autores también engloban registros obtenidos con microelectrodos insertos en el cerebro por ejemplo.

EMG: Electromiografía

Lectura de la actividad eléctrica en las fibras musculares, la cual se origina por el reclutamiento y activación de fibras musculares por parte del sistema nervioso. En el presente trabajo, se limita el uso del EMG para distinguir la mayor o menor presencia de *tono muscular*, fenómeno característico de fibras musculares en actividad latente.

EOG: Electrooculografía

MOR: [Sueño de] Movimientos Oculares Rápidos

Etapa de sueño nombrada con base la presencia típica de movimientos oculares rápidos. También se le conoce como *sueño paradójico* debido a que la actividad cerebral es similar a la vigilia pese a ser la etapa más profunda del sueño. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase R*.

Neuropsi: [Sueño] No-MOR

NMOR: [Sueño] No-MOR

Contempla el sueño fuera de la etapa MOR, presentando características radicalmente diferentes. Pese a su definición negativa, se divide en sub-etapas con características distintivas claras. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase N*.

PSG: Polisomnografía

Registro conjunto durante el sueño de varias señales electrofisiológicas u otros indicadores fisiológicos.

PDC: Posible Deterioro Cognitivo [Leve]

Diagnóstico positivo para deterioro cognitivo usando únicamente los resultados de pruebas neuropsicológicas, y en particular las usadas en el presente trabajo. Debido a los estándares cautelosos de la psicología clínica, para otorgar el diagnóstico de *deterioro cognitivo leve* no puede otorgarse deben tomarse en cuenta varios estudios complementarios, como imagenología del cerebro por ejemplo.

Catálogo de funciones comunes

Delta de Kroneker (δ)

Usada para facilitar la descripción de productos ortogonales.

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

H de Heavyside (H)

Usada para facilitar la descripción de *ondas cuadradas*.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -1 & ,x < 0 \end{cases}$$

O mayúscula de Landau ($\mathcal{O}$)

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones y $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ arbitrario. Se dice que f es *de orden g alrededor de x_0* si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

Si así fuere, se dice $f = \mathcal{O}\left(g\right)$

Esta página se dejó intencionalmente en blanco.

Bibliografía

[1] Amer, M. S., Hamza, S. A., El Akkad, R. M. y Abdel Galeel, Y. I. I.: *Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes?* Aging & Mental Health, 17(7):788–792, 2013. 4.3

[2] Ardila, A. y Ostrosky, F.: *Guía para el diagnóstico neuropsicológico.* Florida: American Board of Professional Neuropsychology, 2012. 4, 4.1, A.2

[3] Aserinsky, E. y Kleitman, N.: *Regularly occurring periods of eye motility, and concomitant phenomena, during sleep.* Science, 118:273–274, 1953. 4.2

[4] Asimov, I.: *Memorias.* Ediciones B, 1994. (document)

[5] Babiloni, C., Carducci, F., Lizio, R., Vecchio, F., Baglieri, A., Bernardini, S., Cavedo, E., Bozzao, A., Buttinelli, C., Esposito, F. *y cols.*: *Resting state cortical electroencephalographic rhythms are related to gray matter volume in subjects with mild cognitive impairment and Alzheimer's disease [?].* Human brain mapping, 34(6):1427–1446, 2013. (document), 4.3

[6] Barlow, J. S.: *Methods of Analysis of Nonstationary EEGs, with Emphasis on Segmentation Techniques: A Comparative Review.* Journal of Clinical Neurophysiology, 2(3):267–304, 1985. 3.5

[7] Blake, M. G. y Boccia, M. M.: *Basal Forebrain Cholinergic System and Memory.* Curr Top Behav Neurosci., 2017. 4.3

[8] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H2 (15) O PET study.* Brain: a journal of neurology, 120(7):1173–1197, 1997?? 4.3

[9] Brayet, P., Petit, D., Frauscher, B., Gagnon, J. F., Gosselin, N., Gagnon, K., Rouleau, I. y Montplaisir, J.: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment.* Clinical EEG and Neuroscience, 47(2):134–141, 2016. 4.3

[10] Carrillo-Mora, P., Ramírez-Peris, J. y Vázquez, K. Magaña: *Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario.* Revista de la Facultad de Medicina, 56(4):5–15, 2013. 4.2

[11] Chen, P., Wu, D., Chen, C., Chi, N. y Kang, J.H.and Hu, C.: *Rapid eye movement sleep atonia in patients with cognitive impairment.* J Neurol Sci, 15:34–37, 2011. 4.3

[12] Clark, Jr., J. W.: *The Origin of Biopotentials.* En Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*, cap. 4, págs. 126–188. Wiley, Estados Unidos, 4ª ed., 2009. 4.2.1

[13] Constantine, W. y Percival, D.: *fractal: Fractal Time Series Modeling and Analysis*, 2016. `https://CRAN.R-project.org/package=fractal`, R package version 2.0-1. 5.3

[14] Contreras, S. A.: *Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud.* Revista Médica Clínica Las Condes, 24(3):341–349, 2013. 4.2

[15] Corsi, M.: *Psicofisiología del sueño.* Trillas, México, 1983. 4, 4.3

[16] Corsi-Cabrera, M., Rosales-Lagarde, A., Río-Portilla, Y. del, Sifuentes-Ortega, R. y Alcántara-Quintero, B.: *Effects of selective REM sleep deprivation on prefrontal gamma activity and executive functions.* International Journal of Psychophysiology, 96(2):115–124, 2015. 4.3

[17] Crum, R. M., Anthony, J. C., Bassett, S. S. y Folstein, M. F.: *Population-based norms for the Mini-Mental State Examination by age and educational level.* Jama, 269(18):2386–2391, 1993?? A.1

[18] Dahlhaus, R. *y cols.*: *Fitting time series models to nonstationary processes*. The annals of Statistics, 25(1):1–37, 1997. 3.5

[19] Datta, S., Mavanji, V., Ulloor, J. y Patterson, E.: *Activation of phasic pontine-wave generator prevents rapid eye movement sleep deprivation-induced learning impairment in the rat: a mechanism for sleep-dependent plasticity*. Journal of neuroscience, 24:1416–1427, 2004. 4.3

[20] Dubois, B., Feldman, H. H., Jacova, C., DeKosky, S. T., Barberger-Gateau, P., Cummings, J., Delacourte, A., Galasko, D., Gauthier, S., Jicha, G. *y cols.*: *Research criteria for the diagnosis of Alzheimer's disease: revising the NINCDS–ADRDA criteria*. The Lancet Neurology, 6(8):734–746, 2007?? 4.1

[21] Fishbein, W.: *Disruptive effects of rapid eye movement sleep deprivation on long-term memory*. Physiology & Behavior, 6(4):279–282, 1971. 4.3

[22] Fishbein, W. y Gutwein, B. M.: *Paradoxical sleep and memory storage processes*. Behavioral Biology, 19(4):425–464, 1977. 4.3

[23] Folstein, M. F., Folstein, S. E. y McHugh, P. R.: *"Mini-mental state": a practical method for grading the cognitive state of patients for the clinician*. Journal of psychiatric research, 12(3):189–198, 1975?? 4.1, 4.1.2

[24] Iber, C., Ancoli-Israel, S., Chesson, A., Quan, S. F. *y cols.*: *The AASM manual for the scoring of sleep and associated events: rules, terminology and technical specifications*. American Academy of Sleep Medicine Westchester, IL, 2007. 4, 4.2, 4.2.1

[25] Instituto Nacional de Eestadística Geografía e Informática, INEGI: *Censo de Población y Vivienda 2010*. http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/. Revisado: 2017-11-15. (document)

[26] Instituto Nacional de Eestadística Geografía e Informática, INEGI: *Encuesta Intercensal 2015*. http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/especiales/intercensal/. Revisado: 2017-11-15. (document)

[27] Instituto Nacional de Geriatría y Secretaría de Salud: *Plan de acción Alzheimer y otras demencias. México, 2014*, 2014. México. (document), 4.1

[28] Kaiser, D. A.: *QEEG: State of the Art, or State of Confusion.* Journal of Neurotherapy, 4(2):57–75, 2000. 2, 3.5

[29] Kaplan, A. Y.: *The problem of segmental description of human electroencephalogram.* HUMAN PHYSIOLOGY C/C OF FIZIOLOGIIA CHELOVEKA, 25:107–114, 1999. 3.5

[30] Katz, S., Downs, T. D., Cash, H. R. y Grotz, R. C.: *Progress in development of the index of ADL.* The gerontologist, 10(0):20–30, 1970. 4.1.2, A.3

[31] Klem, G., Lüders, H. O., Jasper, H. H. y Elger, C.: *The ten-twenty electrode system of the International Federation.* Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 52:3–6, 1999. (Suplemento). 4.2.1, 4.2.1

[32] Knopman, D. S., DeKosky, S. T., Cummings, J., Chui, H., Corey-Bloom, J., Relkin, N., Small, G., Miller, B. y Stevens, J.: *Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (An Evidence-based Review) Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology.* Neurology, 56(9):1143–1153, 2001. 4.1

[33] Lindgren, B. R.: *Statistical Theory.* Chapman & Hall, 4ª ed., 1993. 1

[34] Lindgren, G.: *Stationary Stochastic Processes: Theory and Applications.* Texts in Statistical Science. CRC Press, 2012. 1

[35] Lopez, C. A.: *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-5.* Editorial medica panamericana, 2014. 4.1

[36] Louie, K. y Wilson, M.: *Temporally structured replay of awake hippocampal ensemble activity during rapid eye movement sleep.* Neuron, 29:145–156, 2001. 4.3

[37] Lucero, M. A.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat.* Brain Research, 20(2):319–322, 1970. 4.3

[38] McEwen, J. A. y Anderson, G. B.: *Modeling the Stationarity and Gaussianity of Spontaneous Electroencephalographic Activity.* IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-22(5):361–369, 1975. 3.5

[39] McKhann, G., Drachman, D., Folstein, M., Katzman, R., Price, D. y Stadlan, E. M.: *Clinical diagnosis of Alzheimer's disease Report of the NINCDS-ADRDA Work Group* under the auspices of Department of Health and Human Services Task Force on Alzheimer's Disease.* Neurology, 34(7):939–944, 1984?? 4.1

[40] Melard, G. y Schutter, A. H. d.: *Contributions to evolutionary spectral theory.* Journal of Time Series Analysis, 10(1):41–63, 1989. 3.5

[41] Miyata, S., Noda, A., Iwamoto, K., Kawano, N., Okuda, M. y Ozaki, N.: *Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults.* Journal of Sleep Research, 22(5):535–541, 2013. 4.3

[42] Niedermeyer, E. y Schomer, D. L.: *Niedermeyer's Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields.* Lippincott Williams & Wilkins, 6ª ed., 2011. 4, 4.2.1

[43] Ostrosky-Solís, F., Ardila, A. y Rosselli, M.: *Neuropsi: A brief neuropsychological test battery in Spanish with norms by age and educational level.* Journal of the International Neuropsychological Society, 5:413–433, 1999. 4.1, 4.1.1

[44] Ostrosky-Solís, F., Gómez, M. E., Villaseñor, E. M., Roselli, M., Ardila, A. y Pineda, D.: *Neuropsi: Atención y Memoria.* Manual Moderno, 2ª ed., 2003. 4.1.2

[45] Ostrosky-Solís, F., López-Arango, G. y Ardila, A.: *Sensitivity and Specificity of the Mini-Mental State Examination in a Spanish-Speaking Population.* Applied Neuropsychology, 7(1):25–31, 2000. 1.3, 4.1

[46] Park, D. C. y Reuter-Lorenz, P.: *The Adaptive Brain: Aging and Neurocognitive Scaffolding.* Annual Review of Psychology, 60:173–196, 2009. 4.1

[47] Pearlman, C.: *REM sleep deprivation impairs latent extinction in rats.* Physiology and behavior, 11:233–237, 1973. 4.3

[48] Pearlman, C. y Becker, M.: *REM sleep deprivation impairs bar-press acquisition in rats.* Physiology & Behavior, 13(6):813–817, 1974. 4.3

[49] Pearlman, C. A.: *Latent learning impaired by REM sleep deprivation.* Psychonomic Science, 25(3):135–136, 1971. 4.3

[50] Potvin, O., Lorrain, D., Forget, H., Dubé, M., Grenier, S., Préville, M. y Hudon, C.: *Sleep Quality and 1-Year Incident Cognitive Impairment in Community-Dwelling Older Adults.* SLEEP, 35(4):491–499, 2012. 4.3

[51] Prichep, L., John, E., Ferris, S., Rausch, L., Fang, Z., Cancro, R., Torossian, C. y Reisberg, B.: *Prediction of longitudinal cognitive decline in normal elderly with subjective complaints using electrophysiological imaging [?].* Neurobiology of aging, 27(3):471–481, 2006. (document), 4.3

[52] Prichep, L., John, E., Ferris, S. H., Reisberg, B., Almas, M., Alper, K. y Cancro, R.: *Quantitative EEG correlates of cognitive deterioration in the elderly [?].* Neurobiology of Aging, 15(1):85–90, 1994. (document), 4.3

[53] Priestley, M. B.: *Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes.* Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27(2):204–237, 1965. 3

[54] Priestley, M. B.: *Spectral Analysis and Time Series*, vol. 1, 2. Academic Press, 1981. 3

[55] Priestley, M. B. y Subba Rao, T.: *A Test for Non-stationarity of Time-series.* Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 31(1):140–149, 1969. 3.4

[56] Reid, K. J., Martinovich, Z., Finkel, S., Statsinger, J., Golden, R., Harter, K. y Zee, P. C.: *Sleep: A Marker of Physical and Mental Health in the Elderly.* The American Journal of Geriatric Psychiatry, 14(10):860–866, 2006. 4.3

[57] Robles, A., Del Ser, T., Alom, J., Peña-Casanova, J. y Neurología Grupo Asesor del Grupo de Neurología de la Conducta y Demencias de la Sociedad Española de: *Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de Alzheimer.* Neurología, 17(1):17–32, 2002. 4.1

[58] Rosales-Lagarde, A.: *La relación sueños-cerebro y sus modelos.* Ludus Vitalis, 22(41):311–331, 2016. 4.2

[59] Rosales-Lagarde, A., Rodríguez-Torres, E., Enciso-Alva, J., Martínez-Alcalá, C., Vázquez-Tagle, G., Tetlalmatzi-Montiel, M., Viveros, J. y López-Noguerola, J. S.: *STATIONARITY DURING REM SLEEP IN OLD ADULTS*. Alzheimerś and Dementia, 13(7, Supplement):P723 – P724, 2017, ISSN 1552-5260. http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1552526017311706, 2017 Abstract Supplement. (document)

[60] Roumec, B., Gismondi, M., Gomez, A. M. y Sousa, L.: *Escala por interrogatorio de las actividades de la vida diaria: validación y correlación con escalas de severidad de deterioro cognitivo en pacientes con demencia tipo Alzheimer*. Neurología Argentina, 6(3):137–141, 2014. 4.1.2

[61] Sanhueza Guzmán, C.: *Programa de entrenamiento cerebral en adultos mayores sin deterioro cognitivo: atención, memoria y funciones ejecutivas*. Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, 2014. 4.1

[62] Schliebs, R. y Arendt, T.: *The cholinergic system in aging and neuronal degeneration*. Behavioural Brain Research, 221(2):555–563, 2011. 4.3

[63] Shorack, G. R.: *Probability for Statisticians*. Springer texts in statistics. Springer, 1ª ed., 2000. 1

[64] Sinoff, G., Ore, L., Zlotogorsky, D. y Tamir, A.: *Short anxiety screening test—a brief instrument for detecting anxiety in the elderly*. International journal of geriatric psychiatry, 14(12):1062–1071, 1999?? 4.1.2, A.4

[65] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. SLEEP, 14(4):325–330, 1991. 4.3

[66] The Editors of Encyclopædia Britannica: *Electroencephalogaphy*. https://www.britannica.com/science/electroencephalography. Revisado: 2017-11-15. 4.1

[67] Vázquez-Tagle Gallegos, G. R., García-Muñoz, V., Rosales-Lagarde, A., Rodríguez Torres, E., Martínez-Alcalá, C. y Reséndiz-Flores, O.: *Correlación inter-hemisférica durante el sueño MOR del Adulto Mayor con Deterioro Cognitivo*, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México. (document), 5

[68] Velasco, S. L., Ayuso, L. L., Contador, I. y Pareja, F. B.: *Versiones en español del Minimental State Examination (MMSE). Cuestiones para su uso en la práctica clínica*. Revista de Neurología, 61(8):363–371, 2015. 4.1.2

[69] Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*. Wiley, Estados Unidos, 4ª ed., 2009. 2.5.1, 4

[70] Yesavage, J. A., Brink, T. L., Rose, T. L., Lum, O., Huang, V., Adey, M. y Leirer, V. O.: *Development and Validation of a Geriatric Depression Screening Scale: A Preliminary Report*. Journal of Psychiatric Research, 17(1):37–49, 1982. 4.1.2, A.4