



**Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo  
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería**

Estacionariedad débil en registros  
polisomnográficos de adultos mayores,  
como marcador de deterioro cognitivo leve

**Presenta**

Julio Cesar Enciso Alva

**Dirección**

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres  
Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Pachuca, Hidalgo, Noviembre de 2017  
México

# Resumen

En las últimas décadas ha aumentado la esperanza y calidad de vida; un efecto secundario de ello es una mayor presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas a la edad, entre ellas la demencia. Anteriormente se ha reportado, para adultos mayores, correlaciones entre la presencia de deterioro cognitivo leve (PDC, considerado una etapa temprana de la demencia) y algunas propiedades del espectro de potencias calculado para registros de polisomnograma (PSG, electroencefalograma durante ciertas etapas de sueño) [4]. En este trabajo se buscan marcadores para un diagnóstico de PDC, basados en cantidades dependientes del espectro de potencias para registros de actividad. En particular se estudia la estacionariedad débil, una cantidad que se ha propuesto como marcador de alteraciones neurológicas [8], pero que usualmente se desecha heurísticamente y sin una comprobación formal. Se concluye que hay conexiones entre los marcador reportados en la literatura para PDC y el marcador propuesto, basado en el estudio de la estacionariedad débil.



# Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Ericka Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo y centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por el permitirme el acceso y análisis de los registros de polisomnograma. Mi contribución con este trabajo luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.

Este estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080) otorgado a ERT; Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalevskaya (2014) otorgado a ERT.



# Acrónimos

<b>AABFM</b>	Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas
<b>AASM</b>	American Association of Sleep Medicine
<b>EEG</b>	Electroencefalografía
<b>EMG</b>	Electromiografía
<b>EOG</b>	Electrooculografía
<b>FDE</b>	Función de Densidad Espectral
<b>MOR</b>	Movimientos Oculares Rápidos
<b>NMOR</b>	No-MOR
<b>PSG</b>	Polisomnografía
<b>PDC</b>	Possible Deterioro Cognitivo
<b>PSR</b>	[Prueba de] Priestley-Subba Rao
<b>VA</b>	Variable Aleatoria



# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>xI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Pregunta de investigación . . . . .	3
1.2.1. Hipótesis . . . . .	3
1.2.2. Objetivo general . . . . .	3
1.2.3. Objetivos específicos . . . . .	3
<b>2. Conceptos</b>	<b>5</b>
2.1. Psicología . . . . .	6
2.1.1. Psicometría . . . . .	7
2.2. Fisiología . . . . .	7
2.2.1. Polisomnografía . . . . .	9
2.2.2. Estructura del sueño . . . . .	13
2.3. Matemáticas . . . . .	15
2.3.1. Frecuencia y energía . . . . .	15
2.3.2. Estacionariedad débil . . . . .	16
2.3.3. Función de densidad espectral . . . . .	17
2.3.4. Estimadores . . . . .	18
2.3.5. Espectro evolutivo, generalidades . . . . .	20
2.3.6. Prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	20

<b>3. Metodología</b>	<b>25</b>
3.1. Participantes . . . . .	25
3.2. Registro del polisomnograma . . . . .	27
3.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	29
3.3.1. Espectro de potencias . . . . .	31
<b>4. Resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Estacionariedad en sueño MOR . . . . .	37
4.2. Discusión . . . . .	40
4.2.1. Efecto del tamaño de las épocas . . . . .	40
4.3. Conclusiones . . . . .	42
4.4. Trabajo a futuro . . . . .	42
<b>A. Variables aleatorias</b>	<b>43</b>
A.1. Medidas . . . . .	43
A.2. Procesos estocásticos . . . . .	45
A.3. Periodograma . . . . .	47
A.3.1. Representación espectral . . . . .	48
<b>B. Espectro evolutivo</b>	<b>53</b>
B.1. Espectro evolutivo . . . . .	53
B.2. Estimación del espectro evolutivo . . . . .	53
B.3. Estimador de doble ventana . . . . .	55
<b>C. Compilados gráficos</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Índice de figuras

2.1. División de la corteza cerebral en lóbulos . . . . .	8
2.2. Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG . . . . .	10
2.3. Colocación de electrodos según el sistema 10–20. . . . .	11
2.4. Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular	12
2.5. Registro de polisomnograma durante sueño MOR . . . . .	14
3.1. Resultado típico para la función <b>stationarity</b> . . . . .	29
3.2. Patrones emergentes de épocas estacionarias . . . . .	30
3.3. Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana . . . . .	32
3.4. Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana . . . . .	33
3.5. Espectro de potencias de banda ancha . . . . .	34
4.1. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos . . . . .	37
4.2. Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR .	38
4.3. Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC . . . . .	39
4.4. Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad	41
C.1. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana	58
C.2. Gráficos individuales para el sujeto VCR . . . . .	62



# Índice de cuadros

2.1. Generalidades sobre ondas cerebrales . . . . .	10
2.2. Criterios para la clasificación de etapas de sueño . . . . .	14
2.3. Estadísticos involucrados en la prueba PSR . . . . .	22
2.4. Modelos que pueden ser contrastados usando la prueba PSR . . . . .	23
3.1. Puntajes de corte para la prueba Neuropsi . . . . .	26
3.2. Datos generales de los participantes . . . . .	27
3.3. Datos generales sobre los registros de PSG . . . . .	28
4.1. Variables independientes entre grupos . . . . .	36
4.2. Correlaciones entre variables independientes . . . . .	36

# Capítulo 1

## Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo, ha incrementado la esperanza de vida y la calidad de vida; desafortunadamente también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad, de las cuales no se han identificado factores causales [37]. Particularmente en México, el sector de la población en riesgo (individuos con más de 60 años) fue de 10 millones de personas en 2010, y se estima que son 12 millones y medio en 2015 [14, 15].

De entre las enfermedades ante las cuales este grupo de edad es vulnerable, en este trabajo se destaca la demencia. La demencia consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir en las actividades laborales y sociales. El deterioro cognitivo característico de la demencia se considera irreversible, debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar etapas tempranas de este padecimiento con el fin de evitar en lo posible dicho síntoma.

Como ejemplo Petersen [?] define una muy detallada escala de subtipos para el deterioro cognitivo, basándose principalmente en criterios psicológicos orientados a la funcionalidad del paciente; en contraparte Montplaisir [4] reporta asociaciones entre ejecuciones pobres en pruebas neuropsicológicas y atrofias en el hipocampo, detectadas usando resonancia magnética funcional. En el presente trabajo se otorga cierta preferencia a los criterios basados en registros electrofisiológicos, ya que son más fáciles de cuantificar; se mantiene una conexión estrecha con los criterios neuropsicológicos.

Cabe destacar que la convergencia de enfoques entre distintos niveles del sujeto (conductual, sistémico) no sería posible sin un cuerpo común de modelos y métodos

que permitan entender los datos recabados dentro de un mismo marco conceptual centrado en el sujeto de estudio (el deterioro cognitivo); es bajo estas circunstancia que emerge el estudio de los métodos de análisis *per se* como una necesidad ante la innovación tecnológica acelerada, que en fechas recientes ha hecho de uso común el registro y procesamiento de conjuntos masivos datos.

El principal problema que se aborda en el presente trabajo comienza en que las señales electrofisiológicas típicamente son complejas, y representan procesos no-lineales y no-estacionarios; sin embargo, las herramientas para analizar tales datos a menudo siguen asumiendo linealidad y estacionariedad. A consecuencia de lo anterior, los conjuntos de datos pueden contener información *oculta* y que puede ser de valor clínico; o información que no es extraída y manejada de forma apropiada, y por tanto puede no ser representativa del fenómeno que se estudia.

En el presente trabajo se exponen herramientas relativas a verificar (en el sentido estadístico) la estacionariedad débil en series de tiempo, un supuesto básico para calcular el espectro de potencias; esta cantidad, calculada para el polisomnograma, ha sido reportada como relacionada con el deterioro cognitivo [?, ?, ?].

## 1.1. Antecedentes

En algunos estudios de gran escala se han hallado correlaciones entre diferentes trastornos del sueño y algún grado de deterioro cognitivo objetivo en adultos mayores [1, 23, 33, 28]; entendiendo por ello una ejecuciones más pobres en tareas cognitivas, pero que no impiden llevar a cabo actividades cotidianas.

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron la epidemiología del deterioro cognitivo en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo y su posible relación con trastornos de sueño, encontrando una correlación entre una menor eficiencia del sueño<sup>1</sup> y la presencia de deterioro cognitivo [40].

---

<sup>1</sup>Porcentaje de tiempo de sueño respecto al tiempo en cama

## **1.2. Pregunta de investigación**

¿Los registros de PSG<sup>2</sup> en adultos mayores, pueden considerarse como series tiempo débilmente estacionarias? ¿Es posible que tal caracterización se relacione con el estado cognitivo general del adulto mayor?

### **1.2.1. Hipótesis**

Existen diferencias en la actividad eléctrica cerebral en adultos mayores con PDC, respecto a individuos sanos, y es posible detectar dichas diferencias como una mayor o menor *presencia* de estacionariedad débil en registros de PSG durante el sueño profundo.

### **1.2.2. Objetivo general**

Deducir, a partir de pruebas estadísticas formales, las presencia de estacionariedad débil en registros de PSG para adultos mayores con PDC, así como individuos control. Usar estas pruebas para vigilar registros de PSG en sueño profundo.

### **1.2.3. Objetivos específicos**

- Estudiar la definición de estacionariedad para procesos estocásticos y sus posibles consecuencias para el modelado de los datos considerados
- Investigar cómo detectar, como prueba de hipótesis, si una serie de tiempo dada provenga de un proceso estocástico débilmente estacionario, y bajo qué supuestos es válida dicha caracterización
- Analizar si los registros de PSG, durante sueño profundo, son débilmente estacionarios. Revisar si se pueden encontrar diferencias significativas entre individuos con y sin PDC

---

<sup>2</sup>Polisomnograma: actividad eléctrica del cerebro durante el sueño, además de otros marcadores como la actividad ocular o la respiración



# Capítulo 2

## Conceptos

Para poder identificar marcadores significativos para el diagnóstico del deterioro cognitivo, éste debe ser estudiado desde la neuropsicología; dentro de ésta última se destaca la técnica de electroencefalografía, que es usada para medir cierto tipo de actividad cerebral y que posiblemente esté asociada al deterioro cognitivo. Una vez expuestos los conceptos pertinentes, se presenta una colección de objetos matemáticos (procesos estocásticos débilmente estacionarios) con los cuales se han modelado un tipo de actividad cerebral, y que fue comparado con mediciones de la misma.

La exposición se divide en dos subsecciones marcadamente diferentes: matemáticas y fisiología/psicología. En la primera se menciona al deterioro cognitivo en adultos mayores, con énfasis en su caracterización dentro del sistema nervioso. La segunda subsección se centra en las herramientas estadísticas utilizadas para analizar datos experimentales, entendidas no como simples *técnicas* sino como objetos abstractos definidos formalmente.

Estas dos partes difieren no sólo en temas sino también epistemológicamente: en la primera aparecen afirmaciones basadas en datos experimentales, acompañadas de las citas pertinentes, mientras que en la segunda las afirmaciones son formalmente verdaderas y demostrables en el sistema axiomático usual. Respecto a estas últimas, varias de las demostraciones se presentan como apéndice junto las definiciones pertinentes, mientras otras son citadas debido a diversos motivos.

## 2.1. Psicología

La **demencia** es, según el Manual diagnóstico de y estadístico de trastornos mentales (DSM-IV), *un síndrome que consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo. Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente [20]*.

Cuando un sujeto presenta cambios marcados en su conducta, es relativamente fácil identificar la demencia; caso contrario es el diagnóstico temprano de la misma, el cual es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome. Se ha señalado que los criterios del manual DSM-IV son suficientes para este diagnóstico [19].

Considerando a los **adultos mayores**, entendidos como individuos de 60 años o más, conviene destacar que el envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [27]. La funcionalidad durante esta etapa se relaciona con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [38].

Al momento de diagnosticar deterioro cognitivo en adultos mayores, deben tenerse en cuenta el envejecimiento normal y la posible **pseudodemencia depresiva**, ya que presentan características similares. Con respecto a ésta última, definida como *un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo [20]*, aunque no es efectivamente un tipo de demencia bien puede desencadenar en ello en ausencia de un tratamiento adecuado.

Así mismo, para construir un diagnóstico temprano se considerará como etapa precursora de la demencia al **deterioro cognitivo leve**, definido como *una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia [34]*; dentro del presente escrito, este síndrome será manejado como **possible deterioro cognitivo (PDC)** ya que el autor no tiene la autoridad ni la autorización para efectuar un diagnóstico clínico, y porque los síntomas en esta etapa se consideran reversibles.

### 2.1.1. Psicometría

En psicología los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente entre sujetos [2]. Es a través de estas herramientas que se declaran formalmente las deficiencias cognitivas o conductuales, así como su severidad y clasificación.

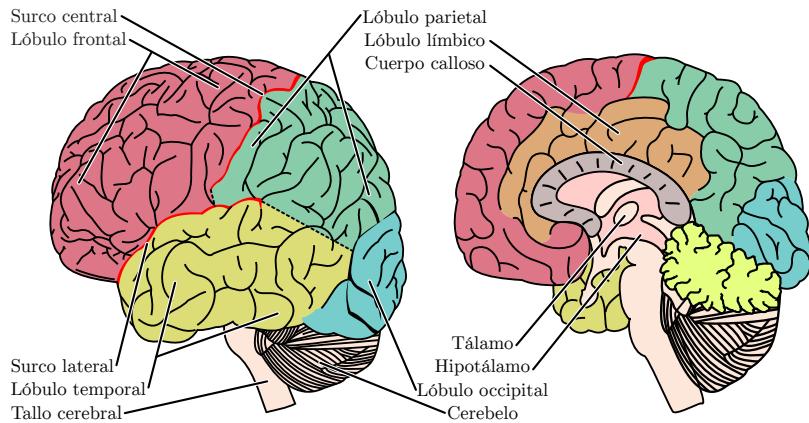
Las habilidades que se miden usando este tipo de pruebas, se suelen agrupar en áreas o **dominios**: atención, lenguaje, cálculo, memoria y aprendizaje, percepción, motricidad, funciones somatosensoriales, habilidades espaciales, funciones ejecutivas, entre otros. La clasificación de dominios, así como la inclusión de unos u otros, suele variar según algunos autores.

En el estudio realizado por Vázquez-Tagle en 2016 [40] se investigó el deterioro cognitivo en el estado de Hidalgo, para lo cual se aplicó la siguiente batería de pruebas neuropsicológicas:

- Estado cognoscitivo general
  - Evaluación Neuropsicológica (**Neuopsi**) [25]
  - Mini Mental State Examination (**MMSE**) [41]
- Detectar pseudodemencia depresiva y ansiedad
  - Escala breve para la detección de ansiedad del anciano (**SATS**) [39]
  - Escala de Depresión Geriátrica (**GDS**) [42, 13]
- Detectar cambios en la vida cotidiana
  - Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (**KATZ**) [36]

### 2.2. Fisiología

El registro de la actividad eléctrica en el cerebro, referido como **electroencefalograma** (EEG), está tradicionalmente relacionado con la exploración de procesos mentales y sus trastornos; como ejemplo se puede citar que Hans Berger, reconocido como el inventor del EEG, reportó usar dicha técnica en 1932 para estudiar posibles



**Figura 2.1:** División de la corteza cerebral en lóbulos

cambios en un paciente con Alzheimer [24]. A continuación se expone el *sustrato fisiológico* del EEG, es decir, el mecanismo biológico que da lugar a este fenómeno.

De manera general, el sistema nervioso central consiste en la médula espinal y el cerebro, una porción altamente especializada de la primera. El cerebro se encuentra protegido primeramente por las meninges, varias capas de tejido conectivo irrigadas capilarmente, en segundo lugar por un fluido conocido como líquido encefalorraquídeo, y en tercer lugar por el cráneo, un conjunto de placas óseas; en la mayor parte de la cabeza no hay tejido muscular entre el cráneo y la piel. En cuanto a estructura, el cerebro se divide en tallo cerebral, cerebelo y hemisferios cerebrales (ver figura 2.1).

Los hemisferios cerebrales se estructuran en capas, de las cuales la **corteza cerebral** es la más externa. La corteza cerebral, o simplemente *corteza*, tiene cerca de 1 cm de grosor y está integrada casi exclusivamente por neuronas piramidales (??) acomodadas densamente y altamente interconectadas con neuronas en la corteza. La corteza es una de las estructuras evolutivamente más recientes, siendo algunas regiones exclusivas de la especie humana; se ha mostrado su papel protagónico en las llamadas *funciones superiores* [7].

La corteza cerebral presenta numerosos pliegues estructurados en *giros* (crestas) y *surcos* (valles), los surcos más profundos son llamados *fisuras*. Algunas fisuras sirven como referencias anatómicas para dividir la corteza en **lóbulos**: la *fisura lateral* define al lóbulo temporal, mientras que la *fisura central* divide los lóbulos frontal y parietal, como en la figura 2.1.

El mecanismo base para la generación de campos eléctricos en las neuronas,

fue descubierto formalmente por Hodgkin y Huxley<sup>1</sup>. Dicho fenómeno depende de la capacidad de la membrana celular, particularmente en neuronas, para mantener un equilibrio estable de iones con el medio extracelular; este equilibrio es contragradiante e implica un gasto de energía, y así mismo es la causa un potencial eléctrico a través de la membrana.

Cuando existe un desequilibrio puntual y súbito en la concentración extracelular de iones, se bombean iones a través de la membrana para reestablecer el equilibrio en tal punto; esta acción genera desequilibrios secundarios en regiones vecinas de la membrana, que a su vez activan mecanismos similares. Como consecuencia, la perturbación en el potencial de membrana se propaga a lo largo de ésta y se genera la transmisión de impulsos nerviosos en neuronas<sup>2</sup>.

El EEG mide directamente el resultado de la transmisión de impulsos nerviosos entre neuronas de la corteza cerebral. Contribuyen particularmente las neuronas piramidales, que se distribuyen muy densamente formando capas, y que están altamente conectadas entre sí.

### 2.2.1. Polisomnografía

El registro de la actividad eléctrica en el cerebro se conoce como **electroencefalograma** (EEG); usualmente estos registros muestra una actividad oscilatoria continua y cambiante con frecuencia<sup>3</sup> de entre 0.5 y 100 Hz; su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad cerebral mostrando, por ejemplo, diferencias claras durante vigilia y sueño o durante quietud y concentración [7].

Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, también muestra patrones relativamente organizadas conocidos como **ondas cerebrales**. Las ondas cerebrales más comunes y estudiadas se tipifican en cuatro grupos según su *frecuencia*: alfa, beta, gamma, delta, theta. En la figura 2.2 se representa un arquetipo visual de cada tipo de onda.

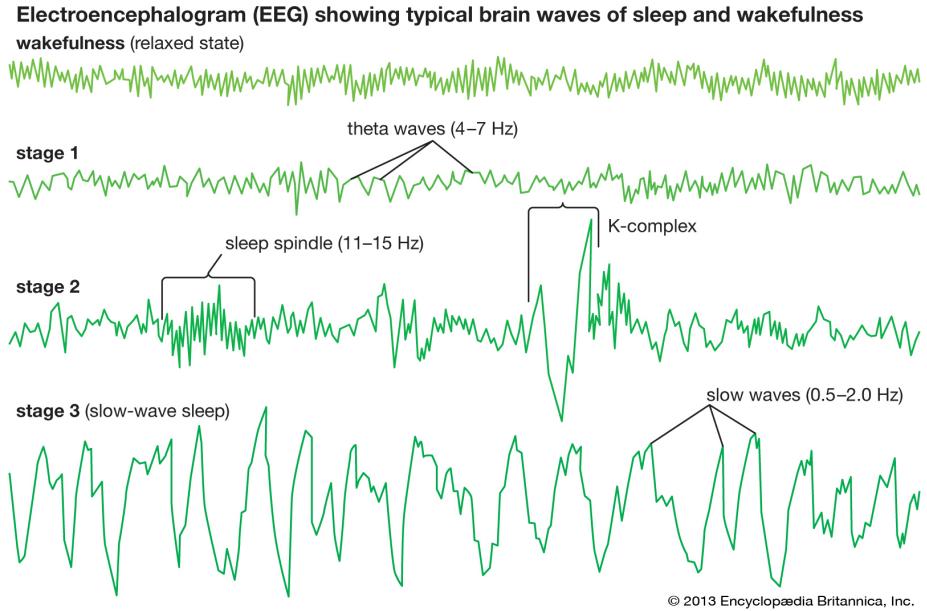
Para realizar el registro *per se* en una forma estandarizada y comparable, se definen arreglos llamados **montajes**, entendidos como el conjunto de (1) los sitios

---

<sup>1</sup>Lo cual les valió el Premio Nobel de Fisiología en 1963

<sup>2</sup>La explicación escrita es más bien simplista debido a que no impacta de manera significativa los resultados del presente trabajo. El lector interesado puede referirse, por ejemplo, a [12]

<sup>3</sup>En el anexo B se presenta una discusión sobre la definición de este concepto, que resulta ser paradójicamente complicado

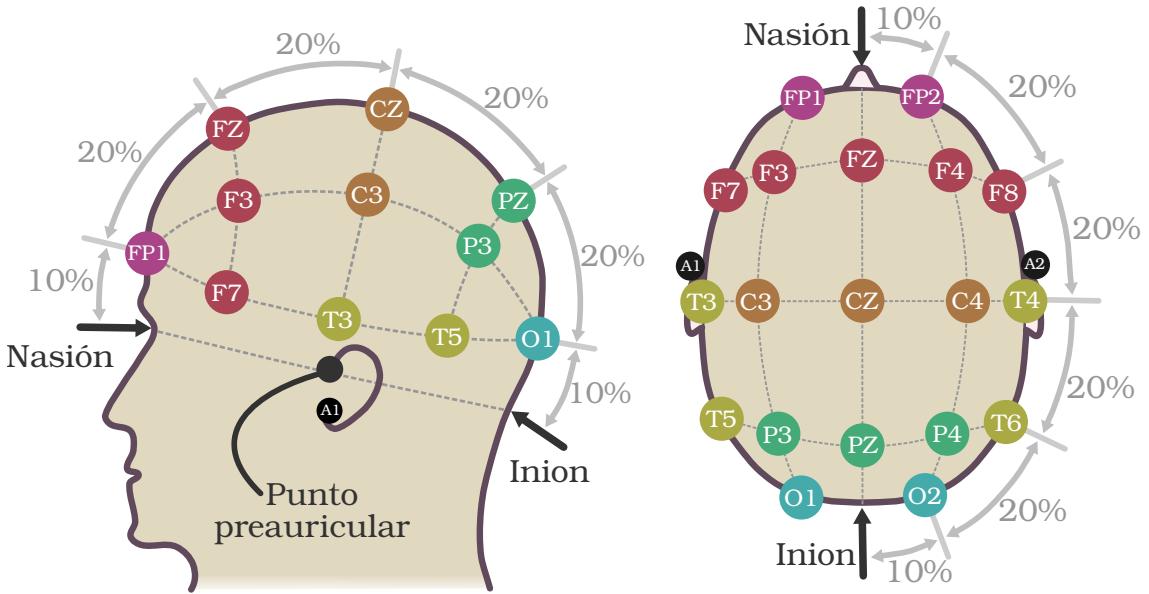


**Figura 2.2:** Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG. Imagen tomada de Encyclopædia Britannica, versión en línea [5]

**Cuadro 2.1:** Generalidades sobre ondas cerebrales

Tipo de onda	Frecuencia [Hz ]	Ubicación usual	Condiciones usuales
Delta	0.5 – 3.5		Síndromes focales. Sueño profundo en infantes
Theta	3.5 – 7	P, T	Durante estrés emocional. En infantes
Alfa	7 – 12	F, P, O	Vigilia en reposo con ojos cerrados
Beta	12 – 30	P, F	Actividad mental en adultos
Gamma	30 – 100		

Se abrevian los lóbulos cerebrales: F=frontal, P=parietal, T=temporal, O=occipital



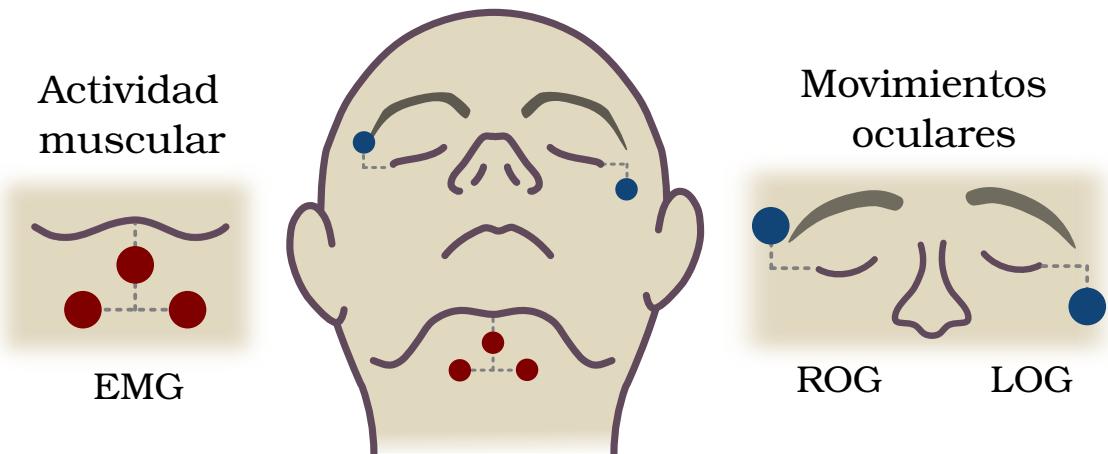
**Figura 2.3:** Colocación de electrodos según el sistema 10–20.

donde se colocan los electrodos de registro y (2) la manera en que los electrodos de registro están conectados entre sí.

En el trabajo de Vázquez Tagle [40] se usa un montaje *referencial*, en el cual los electrodos se conectan en paralelo con un electrodo de referencia cuya actividad eléctrica es constante y negligible (lóbulos de las orejas, electrodos A1, A2); los electrodos fueron colocados según el **Sistema 10–20** [16, 18]. Dicho sistema define los sitios según una cuadrícula construida respecto a distancias relativas entre varios puntos de referencia: el *inion*, protuberancia la región posterior del cráneo, el *nasión*, unión del hueso frontal y los huesos nasales, y el *punto preauricular*, ubicado arriba del cartílago que protege el canal auditivo.

Debido a que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y a que disparan de manera asíncrona, además de que el cerebro se encuentra cubierto por las muchas capas descritas anteriormente, las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente. A ello hay que añadir la difusión generada por las meninges, el líquido encefalorraquídeo y el cráneo.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendido como señales que son registradas de manera no deseada; como ejemplo, los músculos faciales medianamente contraídos generan campos eléctricos con frecuencia de 100



**Figura 2.4:** Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular

Hz. Este tipo de ruido *persistentes* son eliminados usando un filtro<sup>4</sup> que *elimine* los componentes de frecuencia específicos. Los ruidos de duración corta son referidos como **artefactos**; como ejemplo, pestañear voluntariamente durante un episodio de quietud mental interrumpe las ondas alfa por cerca de dos segundos. El enfoque tradicional es de eliminar las porciones de registro afectadas por artefactos.

Adicionalmente al registro del EEG, el PSG incluye el registro de algunas otras *variables fisiológicas*, como respiración, ritmo cardiaco, temperatura, entre otros. En el estudio por Vázquez-Tagle el registro de PSG fue complementado con registros de actividad ocular (**electrooculograma**, EOG) y tono muscular (**electromiograma**, EMG), según las recomendaciones de la AASM; la ubicación de los electrodos pertinentes es ilustrado en la figura 2.4

Para interpretar los registros de EOG (canales LOG, ROG) se puede entender al ojo como una batería cuyos polos son la retina y la pupila, y que genera pequeñas variaciones en el campo eléctrico cuando se mueve; el registro consiste en la proyección del movimiento sobre el eje que forman los electrodos. Los registros de EMG (canal EMG) admiten una interpretación más *sencilla*, ya que los músculos son activados directamente por señales eléctricas: el tono muscular es la actividad muscular basal, y se relaciona con la velocidad con que los músculos pueden *salir* del reposo.

---

<sup>4</sup>Los detalles sobre el uso y construcción de estos filtros se discute en el anexo A

## 2.2.2. Estructura del sueño

Se entiende al sueño como un proceso vital, con una estructura característica, y que en el ser humano presenta las siguientes propiedades [6]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma
3. Inmovilidad y relajación muscular
4. Periodicidad típica circadiana (diaria)
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, además de que genera una *deuda* acumulativa

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas por noche [10]. Paralelamente el sueño no es un proceso homogéneo, sino que tiene una estructura por etapas con rasgos electroencefalográficos y fisiológicos distintivos.

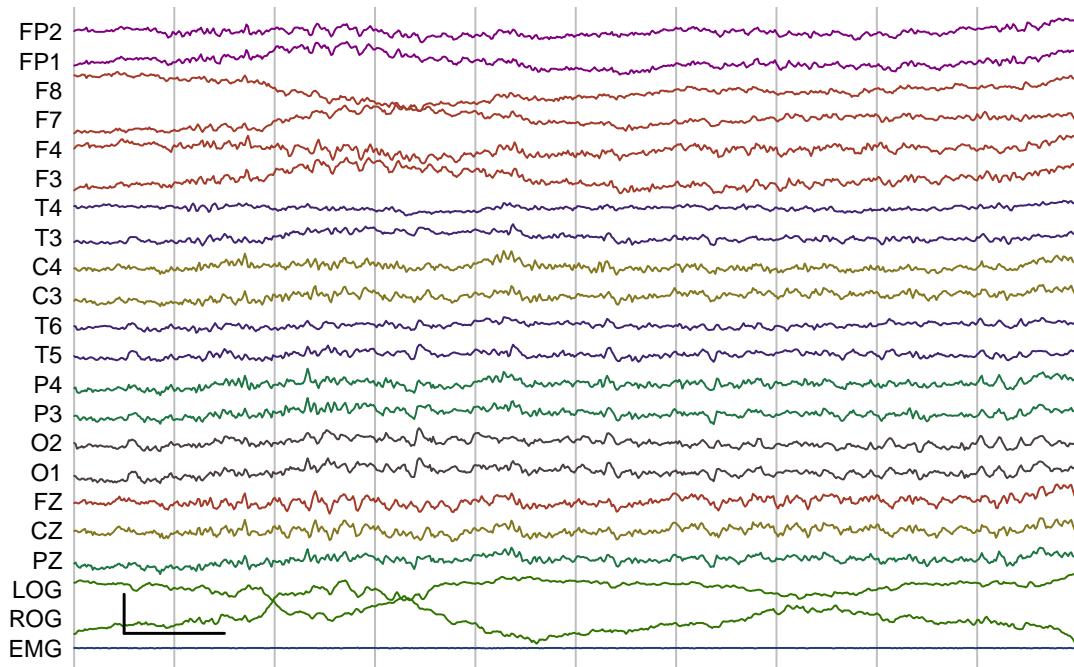
Para su estudio, el sueño se divide en dos etapas: N y R. La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K; en base a ello se divide en las sub-fases N1, N2, N3.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye (excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres), la frecuencia cardiaca y respiratoria se vuelve irregular, y el sujeto exhibe movimientos oculares rápidos (MOR); en base a lo cual la fase R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante el estado de alerta; estos patrones no interrumpen el sueño sino que, contrariamente, incrementan el umbral para estímulos externos, motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante el sueño MOR se producen la mayoría de las ensañaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensañaciones [35].

**Cuadro 2.2:** Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
Vigilia	W	Ritmo alfa en > 50 % de la época en la región occipital	No	Alto
NMOR 1	N1	Cambio de alfa por AABFM, atenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	<W
NMOR 2	N2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	<W, >R
NMOR 3	N3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 µV) en > 20 % de la época. Husos de sueño	No	<N2, ≈R
MOR	R	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas 'saw-tooth'	MOR's	Bajo

Se abrevia AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas



**Figura 2.5:** Registro de polisomnograma durante sueño MOR. Marca de calibración: vertical, 10 µV, horizontal, 1 segundo

## 2.3. Matemáticas

Existe una larga tradición para entender –y modelar– las señales electrofisiológicas en términos de ondas y frecuencias, ya que fundamentalmente son fenómenos eléctricos [17]. En el presente trabajo se aborda el enfoque usual de asociar la *energía* de una señal con su varianza, y usar la transformada de Fourier para estudiar como se *reparte* dicha energía entre los *componentes de frecuencia*. Para modelar los registros de PSG como procesos estocásticos conviene mencionar que

- Usar un modelo estocástico para las señales no implica suponer que son aleatorias, sino que en principio no se rechaza el no-determinismo
- Las señales ocurren efectivamente *a tiempo continuo* aunque sólo son registrables *a tiempo discreto*, lo cual es importante dentro del modelo

El objetivo principal de este trabajo es estudiar si el modelo descrito admite –en el sentido estadístico– algunas propiedades, entre las cuales destaca la estacionariedad débil, y cómo la información recabada durante la comparación puede relacionarse con las fases de sueño y el PDC.

### 2.3.1. Frecuencia y energía

La **transformada de Fourier clásica** ( $\mathcal{F}$ ) se entiende formalmente como un operador<sup>5</sup> que asocia una función  $S = S(t)$ , periódica con periodo  $2T$ , con una serie  $A = A(n), n \in \mathbb{Z}$  tal que

$$A(n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t) e^{-it\frac{n}{2T}} dt \quad (2.1)$$

donde el factor  $\frac{n}{2T}$  es referido como *frecuencia*; y se dice que  $\mathcal{F}[S] = A$ . Los detalles formales sobre  $\mathcal{F}$  se exponen en el anexo A. Con respecto a la **energía**, de manera operativa ésta se define como<sup>6</sup>

$$\text{potencia}[S]_{[a,b]} = \frac{1}{b-a} \int_a^b |S(t)|^2 dt \quad (2.2)$$

---

<sup>5</sup>Un operador es efectivamente una función, cuyo dominio es un conjunto de funciones; toma un nombre distinto para evitar confusiones

<sup>6</sup>Potencia = Energía / Tiempo, ver anexo A

La relación de Parseval permite caracterizar la potencia de una señal si ésta admite una tr. de Fourier bien definida

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2 \quad (2.3)$$

Reemplazando la expresión 2.3 sobre la definición de potencia, el módulo de la tr. de Fourier puede verse como indicador de como se *distribuye* la energía de la señal  $S$ , motivo por el cual es referido como **espectro de potencia**. En las diferentes generalizaciones que se presentan, se busca conservar tal interpretación.

### 2.3.2. Estacionariedad débil

En el sentido formal un **proceso estocástico**<sup>7</sup>  $\{X(t)\}_{t \in T}$  es una colección de *variables aleatorias* (VA) indexadas. El significado preciso y formal de los conceptos mencionados en la presente sección se discuten en el anexo B.

El conjunto  $T \in \mathbb{R}$  que indexa a un proceso, referido como *tiempo*, se considerará como un intervalo cerrado (**tiempo continuo**) o bien un suconjunto de  $\{t \in \mathbb{R} | t \cdot \Delta_t \in \mathbb{Z}\}$  para algún  $\Delta_t$  (**tiempo discreto**). Estos procesos suelen ser referidos como *univariados* o *series de tiempo*. Las diferentes partes de un proceso estocástico serán denotadas como:

$\{X(t)\}_{t \in T}$	Todo el proceso
$X(t)$	Una VA que compone al proceso, en el tiempo $t$
$x(t)$	Una realización de $X(t)$
$F_{X(t)}$	Función de probabilidad acumulada para $X(t)$
$\Delta_t$	Frecuencia de muestreo (sólo en tiempo discreto)

La estacionariedad es un indicativo de la *homogeneidad* de un proceso, un proceso fuertemente estacionario se compone de VA que tienen la misma distribución y distribuciones conjuntas que no dependen del tiempo (definición ??); tal característica usualmente se considera *innecesariamente* fuerte y se reemplaza por la siguiente

**Definición 2.1** *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in T}$  es **débilmente estacionario** si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles<sup>8</sup>  $t, s$  se tiene que*

---

<sup>7</sup>Durante el texto será referido simplemente como **proceso**, por comodidad

<sup>8</sup>**Tiempos admisibles** significa que la definición es la misma para tiempo y discreto, bajo las

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = R_X(s - t)$

Donde  $\mu_X$ ,  $\sigma_X^2$  son constantes,  $\rho_X(\tau)$  es una función que únicamente depende de  $\tau$

Por simplicidad de notación, a lo largo del texto los procesos débilmente estacionarios serán referidos simplemente como *estacionarios*.

### 2.3.3. Función de densidad espectral

La forma más natural de definir un espectro de potencias para un proceso estacionario es a través de la tr. de Fourier de sus realizaciones. Sin embargo, en general no se puede garantizar que quede *bien definida*<sup>9</sup> de esa manera: la señal puede no ser periódica, cuadrado-integrable, uniformemente continua, etc. Este problema se aborda restringiendo el tiempo a un conjunto *sin problemas*, para luego considerar el límite cuando tal conjunto tiende a su *forma original*.

**Definición 2.2** Sea  $\{X(t)\}_{t \in T}$  un proceso estacionario a tiempo continuo. Se define su **función de densidad espectral** como

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] \quad (2.4)$$

**Definición 2.3** Sea  $\{X(t)\}_{t/\Delta_t \in \mathbb{Z}}$  un proceso estacionario a tiempo discreto. Se define su **función de densidad espectral** como

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{2N} \left| \sum_{n=-N}^N X(n\Delta_t) e^{-i\omega n\Delta_t} \right|^2 \right] \quad (2.5)$$

Los detalles formales sobre la definición de la función de densidad espectral (FDE) se discuten en el anexo B; algunas de sus propiedades que conviene resaltar son

---

restricciones pertinente

<sup>9</sup>Dos problemas presentes al definir una cantidad como el resultado de un procedimiento, es garantizar que (1) el procedimiento efectivamente arroje algún resultado y (2) que bajo diferentes el mismo resultado independientemente de lconstantante

- La FDE de un proceso en tiempo continuo está definida para  $\omega \in \mathbb{R}$ , y en tiempo discreto para  $\omega \in [-\pi, \pi]$
- Es una función par ( $h(-\omega) = h(\omega)$ ) y no-negativa
- $h(0) = \mu_X$ , el promedio del proceso
- $\int h(\omega)d\omega = \sigma_X^2$ , la varianza del proceso
- Como consecuencia de los teorema de Wiener-Khinchin (A.3) y de Wold (A.4), y suponiendo que el espectro es continuo, se puede escribir

$$R(\tau) = \int_{\mathbf{T}} h(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad (2.6)$$

con  $R$  la función de autocovarianza del proceso

#### 2.3.4. Estimadores

Cuando se supone la existencia de la FDE es inmediato el querer calcularla; sin embargo, manejar procesos estocásticos implica la imposibilidad de *acceder* a las VA's a partir de observaciones, de modo que el cálculo se basa en realizaciones y no da lugar a un resultado *exacto* (como con la tr. de Fourier) sino una VA.

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathbf{T}}$  un proceso estacionario y  $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$  una muestra de tamaño  $N$  para una realización del proceso. Un estimador *natural*<sup>10</sup> para la FDE es el **periodograma**, definido como

$$I_N(\omega) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (2.7)$$

Como se demuestra en el anexo B, el periodograma es un estimador insesgado<sup>11</sup> pero inconsistente<sup>12</sup> para la FDE, lo cual lo descalifica para usarse en la práctica.

Para entender –y evitar– la inconsistencia del periodograma conviene escribirlo

---

<sup>10</sup>Comparar las expresiones en 2.7 y en 2.5

<sup>11</sup> $E[I_N(\omega)] = h(\omega)$

<sup>12</sup> $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = h^2(\omega) \neq 0$

de una forma equivalente (teorema ??)

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}^*(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.8)$$

donde  $\widehat{R}^*$  es un estimador para  $R$ , la función de autocovarianza, definido como

$$\widehat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|} \quad (2.9)$$

Como se demuestra en el anexo B, el estimador  $\widehat{R}^*$  es consistente y sesgado, aunque es *asintóticamente insesgado*<sup>13</sup>. La expresión 2.8 bien puede verse como una versión discreta e invertida de la expresión en 2.6, tomando en cuenta que la FDE y la función de autocovarianza son simétricas.

Una ventaja de la segunda forma del periodograma es que puede verse como una suma ponderada de  $\widehat{R}^*$  para diferentes valores de  $\tau$ . Mientras más grande es  $\tau$ , es menor la cantidad de parejas de puntos cuya distancia en el tiempo es  $\tau$ , de modo que el estimador  $\widehat{R}^*$  tiene más varianza.

Así entonces, la inconsistencia del periodograma se debe en gran parte a que está construido, indirectamente, usando estimadores con varianza muy elevada. La solución más natural sería evitar los componentes con mucha varianza, considerando estimadores de la forma

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau) \widehat{R}^*(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2.10)$$

donde  $g$ , referida como **ventana de retrasos**, es una función de que decae *rápidamente* lejos de cero, con el propósito que  $\widehat{h}$  sea un estimador consistente y aunque se vuelva asintóticamente insesgado. En el anexo B se exponen más detalladamente las propiedades de este tipo de estimadores.

---

<sup>13</sup> $\lim_{N \rightarrow \infty} \widehat{R}^*(\tau) = R(\tau)$

### 2.3.5. Espectro evolutivo, generalidades

La definición de espectro presentada en la sección anterior, para tiempo continuo y discreto, se limita expresamente a procesos estacionarios.

La tarea de definir un espectro de potencias para procesos no-estacionarios<sup>14</sup>

---

En el presente trabajo se ha elegido usar el espectro evolutivo, propuesto por Priestley en 1965 [29] debido a que fue diseñado específicamente para (1) conservar linealidad (2) ser siempre positivo, (3) conservar la interpretación física como distribución de energía [21].

### 2.3.6. Prueba de Priestley-Subba Rao

Una propiedad interesante de poder estimar el espectro evolutivo de un proceso, a partir de una realización del mismo, es la capacidad para identificar si éste pudiera reducirse al espectro usual, definido para procesos débilmente estacionarios –bastaría con revisar si el espectro estimado es constante en el tiempo.

La prueba de estacionariedad propuesta por Priestley y Subba Rao en 1969 [31] tiene como *ingrediente principal* un estimador muy particular para una cantidad que depende del espectro, con propiedades estadísticas adecuadas para detectar la posible estacionariedad.

Sea  $\{X(t)\}_{t \in T}$  que se tiene un proceso semi-estacionario y sea  $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$  un conjunto de observaciones del proceso, espaciadas uniformemente en el tiempo. Se construye a  $\hat{f}$ , el estimador de doble ventana definido como en la sección anterior, usando las funciones ventana  $g_h$  y  $w_\tau$ , y sus respectivas transformadas de Fourier  $\Gamma_h$  y  $W_\tau$ . Bajo las condiciones descritas, se cumple que aproximadamente

- $E[\hat{f}(t, \omega)] \approx f(t, \omega)$
- $Var(\hat{f}(t, \omega)) \approx \frac{C}{T} f^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma^4(\theta)| d\theta$

donde  $C = \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_{-\infty}^{\infty} |W_T(\lambda)| d\lambda$ . Se define el estimador  $Y(t, \omega) = \log(\hat{f}(t, \omega))$ , que tiene las siguientes propiedades

- $E[Y(t, \omega)] \approx \log(f(t, \omega))$

---

<sup>14</sup>En el presente trabajo se limita al caso de procesos no-estacionarios  $\{X(t)\}_{t \in T}$  tales que  $E[X(t)] < \infty$ ,  $\text{Cov}(X(t), X(s))$  para cualesquiera tiempos admisibles  $s, t$

- $\text{Var}(Y(t, \omega)) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_h(\theta)|^4 d\theta =: \sigma^2$

Cabe destacar que la varianza  $Y$  no es formalmente independiente de  $f$  sino que es *aproximadamente independiente*, es decir, la varianza de  $Y$  depende *más* del propio estimador que del verdadero valor de  $\log f$ . Esto no es tan sorprendente tomando en cuenta el diseño del estimador de doble ventana, que otorga mayor importancia a la información local usando repetidamente la proposición B.1. Esta independencia asintótica sugiere que  $Y$  puede verse como  $Y(t, \omega) = \log(f(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega)$ , con  $E[\varepsilon(t, \omega)] \approx 0$  y  $\text{Var}(\varepsilon(t, \omega)) \approx \sigma^2$ .

Más aún, es demostrado en [30] que si  $|\omega - \omega_0|$  es suficientemente grande como para que  $\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_h(\theta + \omega)|^2 |\Gamma_h(\theta + \omega_0)|^2 d\theta \approx 0$ , entonces  $\text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t, \omega_0)) \approx 0$ . Similarmente, si  $|t - t_0| >> \int_{-\infty}^{\infty} |t| |w_\tau(t)| dt$ , entonces  $\text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t_0, \omega)) \approx 0$ .

Bajo estas nuevas condiciones, es posible construir una versión discretizada de  $Y$  tal que los componentes  $\varepsilon$  sean estadísticamente independientes. Para ello se define una malla de puntos  $(t_i, \omega_j)$ , con  $i = 1, \dots, I$  y  $j = 1, \dots, J$ , y posteriormente a la matriz  $Y$  como  $Y_{i,j} = Y(t_i, \omega_j)$ , que satisface

- $Y_{i,j} = \log(f(t_i, \omega_j)) + \varepsilon_{i,j}$
- $E[\varepsilon_{i,j}] \approx 0$
- $\text{Var}(\varepsilon_{i,j}) \approx \sigma^2 = \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_h(\theta)|^4 d\theta$
- $\text{Cov}(\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i_0, j_0}) \approx 0$  siempre que  $(i, j) \neq (i_0, j_0)$

Si el número de puntos es *suficientemente grande*, entonces las componentes de  $Y$  siguen distribuciones aproximadamente normales, de modo que  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$ .

Habiendo definido al estimador  $Y$  según de esta forma en su versión discretizada (proceso resumido en el gráfico 1), es posible definir criterios estadísticos para determinar la estacionariedad débil usando a  $Y$ . El primer caso es definir, como hipótesis nula, un modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$$

donde  $\varepsilon$  son como se definieron anteriormente. Respecto a los otros parámetros,  $\mu$  representa el promedio de  $Y$  (así  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tienen media cero),  $\alpha$  y  $\beta$  son las *variaciones*

Estadístico	Gr. de libertad
$S_T = J \sum_{i=1}^I (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$I - 1$
$S_F = I \sum_{j=1}^J (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$J - 1$
$S_{I+R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2$	$(I - 1)(J - 1)$
$S_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$IJ - 1$
$Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	
$Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$	
$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	

**Cuadro 2.3:** Estadísticos involucrados en la prueba PSR

de  $Y$  en el tiempo y las frecuencias, respectivamente, y  $\gamma$  abarca las *variaciones no-lineales*;  $\gamma$  y  $\varepsilon$  se diferencian en que por diseño se sabe que  $\varepsilon_{i,j} \sim N(0, \sigma^2)$ , mientras que no se ha supuesto nada sobre  $\gamma$ .

Para determinar la estacionariedad se define, como hipótesis alterna, un modelo el  $Y$  es efectivamente constante en el tiempo

$$H_A : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j}$$

posteriormente se prueba si se puede rechazar  $H_0$  a favor de  $H_A$ ; para ello se evalúan los estadísticos de el cuadro 2.3 y se verifican las hipótesis  $S_{I+R}/\sigma^2 = 0$  (para  $\gamma = 0$ ) y  $S_T/\sigma^2 = 0$  (para  $\beta = 0$ ). Por cómo se construyeron, estos estadísticos tienen distribuciones  $\chi^2$ , con los grados de libertad indicados indicados en el cuadro.

Cabe mencionar que en la formulación original de la prueba de PSR se exploran algunas otros modelos que pueden ser verificadas usando el estimador  $Y$ , descritos en el cuadro 2.4. Los procesos **uniformemente modulados** (UM) necesariamente pueden expresarse como  $X(t) = S(t)X_0(t)$ , donde  $\{X_0(t)\}_{t \in T}$  es un proceso débilmente estacionario.

Para un proceso UM, si se hace a  $S$  constante ( $\beta = 0$ ) se obtiene un proceso débilmente estacionario. En otro modelo, si se hace a  $f_0$  constante<sup>15</sup> ( $\alpha = 0$ ) entonces el proceso puede interpretarse como un proceso ruido blanco (definición ??) multiplicado en el tiempo por una función arbitraria.

---

<sup>15</sup>Lo cual sólo es físicamente relevante si el proceso es a tiempo discreto

Modelo	Estacionario	UM
$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$	✗	✗
$H_1 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j}$	✗	✓
$H_2 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j}$	✓	✓
$H_3 : Y_{i,j} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{i,j}$	✗	✓

**Cuadro 2.4:** Modelos que pueden ser contrastados usando la prueba PSR

---

**Algoritmo 1:** Prueba de Priestley-Subba Rao

---

**Datos:**  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$   
**Resultado:** p-valores para  $S_{I+R} = 0$ ,  $S_T = 0$ ,  $S_F = 0$

- 1  $X \leftarrow (x_1, x_2, \dots, x_N)$
- 2 **para**  $i = 1, \dots; j = 1, \dots$  **hacer**
- 3    $U[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T g(u)X[t-u] \exp(-i\omega_j u)$
- 4 **para**  $i = 1, \dots; j = 1, \dots$  **hacer**
- 5    $\hat{f}[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T w_\tau(u) |U[i-u, j]|^2$
- 6  $Y \leftarrow \log \hat{f}$
- 7 **para**  $i = 1, \dots, I$  **hacer**
- 8    $Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$
- 9 **para**  $j = 1, \dots, J$  **hacer**
- 10    $Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$
- 11  $Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$

---



# Capítulo 3

## Metodología

### 3.1. Participantes

Los sujetos fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia*<sup>1</sup> bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años
- Diestros (mano derecha dominante)
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales
- No usar medicamentos o sustancias para dormir
- Firma de consentimiento informado
- Voluntario para el registro de PSG

Un total de 14 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Estos participantes fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MMSE), descartar cuadros depresivos (GDS, SATS) y cambios en la vida cotidiana (KATZ). En base a las pruebas se determinó que, objetivamente, 9 de los voluntarios no padecen depresión ni ansiedad, además de que no presentan afectaciones significativas en la vida diaria.

---

<sup>1</sup>Lo cual implica que los resultados pueden no deben ser interpolados inmediatamente a poblaciones más grandes

**Cuadro 3.1:** Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

Escolaridad	Edad	Sano		Deterioro cognitivo		
		Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
Nula	16 – 30	92	60	45	30	14
	31 – 50	95	68	54	41	28
	51 – 65	91	59	44	28	13
	66 – 85	76	48	34	20	6
1 – 4 años	16 – 30	105	73	58	42	27
	31 – 50	105	81	69	58	46
	51 – 65	98	77	67	57	47
	66 – 85	90	61	46	32	18
5 – 9 años	16 – 30	114	102	97	86	75
	31 – 50	118	106	101	90	79
	51 – 65	111	98	91	79	67
	66 – 85	97	80	72	56	39
10 – 24 años	16 – 30	115	103	98	87	77
	31 – 50	113	102	97	88	78
	51 – 65	102	93	88	80	72
	66 – 85	92	78	72	59	46

Adaptado de [2]

Para su análisis, los 9 participantes se dividieron en dos grupos en base a su estado cognoscitivo: control (CTL) y con Probable Deterioro Cognitivo (PDC). Para esta clasificación se dio mayor atención al puntaje de Neuropsi, estandarizado según edad y escolaridad (tabla 3.1). Al puntaje de MMSE se le otorgó menos importancia como clasificador debido a que tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de deterioro cognitivo leve [2], y baja especificidad<sup>2</sup> para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [26], una situación presente en los adultos mayores participantes.

---

<sup>2</sup>Especificidad es la probabilidad de que un individuo sano obtenga un resultado negativo en la prueba de deterioro cognitivo

**Cuadro 3.2:** Datos generales de los participantes

		Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SATS	KATZ	GDS
<b>Grupo CTL</b>									
VCR	F	59	12		107	29	21	0	3
MJH	F	72	9		113	30	18	0	0
JAE	F	78	5		102	28	19	0	5
GHA	M	65	9		107.5	30	23	0	7
MFGR	F	67	11		115	30	18	0	
$\hat{\mu}$		68.2	9.2		108.9	29.4	19.8	0.0	3.0
$\hat{\sigma}$		7.2	2.7		5.2	0.9	2.2	0.0	3.0
<b>Grupo PDC</b>									
CLO	F	68	5		81	28	22	1	6
RLO	F	63	9		90	29	20	0	3
RRU	M	69	9		85	27	10	0	3
JGZ	M	65	11		87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8		96	29		0	2
$\hat{\mu}$		67.6	8.4		87.8	27.4	18.0	0.2	3.0
$\hat{\sigma}$		3.4	2.2		5.6	1.8	5.4	0.4	1.9

### 3.2. Registro del polisomnograma

Para llevar a cabo el registro, los adultos mayores participantes fueron invitados a acudir a las instalaciones de la Clínica Gerontológica de Sueño, ubicada dentro del Instituto de Ciencias de la Salud (ICSA) dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran siesta ese día.

Para efectuar el registro se usó un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic Mexicana). El protocolo de PSG incluye

- 19 electrodos de EEG, colocadas siguiendo las coordenadas del Sistema Internacional 10–20
- 4 electrodos de EOG para movimientos oculares horizontales y verticales
- 2 electrodos de EMG colocados en los músculos submentonianos

**Cuadro 3.3:** Datos generales sobre los registros de PSG

Frecuencia de muestreo [Hz ]	Total		MOR*			%
	Puntos	Tiempo	Puntos	Tiempo		
<b>Grupo CTL</b>						
VCR	200	5166000	7:10:30	438000	0:36:30	8.48
MJH	512	15851520	8:36:00	1950720	1:03:30	12.31
JAE	512	13931520	7:33:30	2626560	1:25:30	18.85
GHA	200	6558000	9:06:30	330000	0:27:30	5.03
MFGR	200	4932000	6:51:00	570000	0:47:30	11.56
$\hat{\mu}$			7:51:30		0:52:06	11.25
$\hat{\sigma}$			0:57:36		0:23:00	5.13
<b>Grupo PDC</b>						
CLO	512	14499840	7:52:00	2027520	1:06:00	13.98
RLO	512	12994560	7:03:00	1520640	0:49:30	11.70
RRU	200	2484000	3:27:00	228000	0:19:00	9.18
JGZ	512	18539520	10:03:30	506880	0:16:30	2.73
AEFP	512	14699520	7:58:30	629760	0:20:30	4.28
$\hat{\mu}$			7:16:48		0:34:18	8.38
$\hat{\sigma}$			2:24:43		0:22:14	4.79

\*Dado que el sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos

Los electrodos para registro de EEG fueron montados usando los lóbulos oculares como referencia común; se mantuvo por debajo de  $50 \mu\Omega$ .

Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron filtradas analógicamente usando filtros de paso de banda: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Debido a dificultades técnicas el registro se efectuó a razón de 512 puntos por segundo (Hz) para algunos participantes, mientras que se usó 200 Hz para otros; en ambos casos se cumple la recomendación de la AASM de al menos 128 Hz. Los registros digitalizados fueron almacenados en formato de texto bajo la codificación ASCII.

Los registros fueron segmentados en ventanas de 30 segundos de duración, referidas como *épocas*, para su estudio posterior *fuera de línea*. Usando los criterios de la AASM, cada una de las épocas fueron clasificadas según la etapa de sueño como MOR o NMOR. Dicha clasificación fue llevada a cabo por expertos en sueño de ICSa.

```

1 Priestley–Subba Rao stationarity Test for datos
2
3 Samples used : 3072
4 Samples available : 3069
5 Sampling interval : 1
6 SDF estimator : Multitaper
7 Number of (sine) tapers : 5
8 Centered : TRUE
9 Recentered : FALSE
10 Number of blocks : 11
11 Block size : 279
12 Number of blocks : 11
13 p-value for T : 0.4130131
14 p-value for I+R : 0.1787949
15 p-value for T+I+R : 0.1801353

```

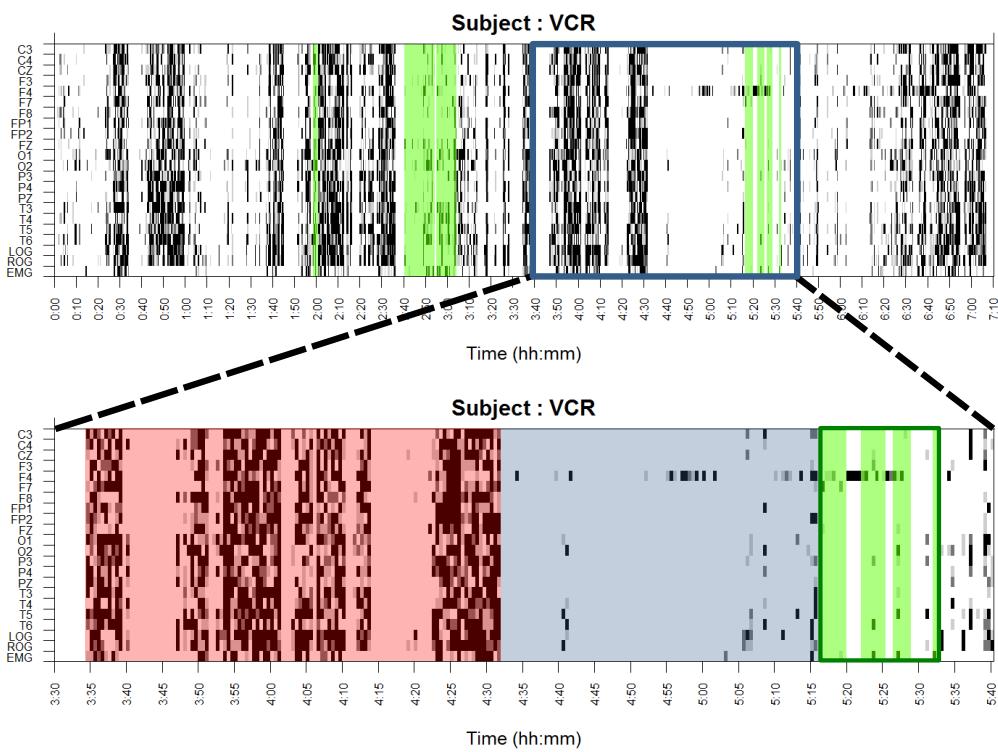
**Figura 3.1:** Resultado típico para la función `stationarity`. La función de densidad espectral es referida como SDF, mientras que los p valores. El p-valor para  $T+I+R$  es equivalente al estadístico  $S_{I+R}$ , y el p-valor para  $T$  equivale a  $S_T$

### 3.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao

Se fragmentaron los registros en ventanas de 30 segundos de duración, sin traslape. Cada una de estas ventanas fue sometida al test de PSR, y se clasificó como *estacionaria en el sentido de PSR* si fue posible rechazar ( $p < 0.05$ ) la hipótesis de no-estacionariedad. Los resultados obtenidos (una lista de las épocas que son estacionarias) se guardaron en archivos de texto para su posterior análisis. Debido a la gran variabilidad entre el tiempo que los participantes pasaron en sueño MOR, se decidió basar las comparaciones en proporciones de épocas; por ejemplo, se calculó la proporción de épocas MOR que son estacionarias para todos los participantes.

Como análisis exploratorio se graficaron en el tiempo las épocas, en todos los canales, como se muestra en la figura 3.2. Este tipo de gráficos *revelan* cierto tipo de *bloques* de épocas estacionarias o no-estacionarias. Heurísticamente se puede afirmar que éstos patrones son independientes de la prueba de PSR, y anteriormente se reportó que estos patrones suelen coincidir con la aparición de sueño MOR. Más adelante se ofrece una discusión al respecto.

En otro ámbito, se replicó la metodología usada por McEwen [22] para contrastar la afirmación de que las series de tiempo *suficiente cortas* son estacionarias. Este



**Figura 3.2:** Patrones emergentes de épocas estacionarias. Arriba: Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. Se ha resaltado en verde las épocas de sueño MOR. Abajo: Patrón sugerido: épocas estacionarias (rojo), no-estacionarias (azul), sueño MOR (verde)

procedimiento consistió en repetir la clasificación de épocas variando el tamaño de ventana; los tamaños de ventana se tomaron de la forma  $30 \times 2^n$  segundos, para comparar con el tamaño de época recomendado por la AASM.

Usando la clasificación de épocas estacionarias, obtenida para diferentes tamaños de ventana, se construyeron más gráficos sobre la ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. Estos nuevos gráficos, como el de la figura 3.4, refuerzan heurísticamente la hipótesis de que los patrones son significativos fisiológicamente.

Cabe destacar que la aplicación *per se* de la prueba fue efectuada usando el software estadístico R [32]. En particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete `fractal` [9] bajo la función `stationarity`.

### 3.3.1. Espectro de potencias

Adicionalmente a la clasificación de épocas como estacionarias, se calculó su espectro de potencia. Como una metodología común, se calculó el **espectro de banda ancha**, es decir, la potencia total y relativa correspondientes a las frecuencias que caracterizan las ondas delta, theta, alfa, beta y gamma (ver cuadro 2.1).

Usando los espectros de banda ancha se ha calculado el coeficiente de enlentecimiento  $R_E$ , definido en la expresión 3.1, con particular atención al sueño MOR. Esta cantidad se ha reportado como un posible marcador de deterioro cognitivo leve en adultos mayores [4].

$$R_E = \frac{\text{potencia}_\delta + \text{potencia}_\theta}{\text{potencia}_\alpha + \text{potencia}_\beta} = \frac{\int_{0.5\text{Hz}}^{7\text{ Hz}} h(\omega)d\omega}{\int_{7\text{Hz}}^{30\text{ Hz}} h(\omega)d\omega} \quad (3.1)$$

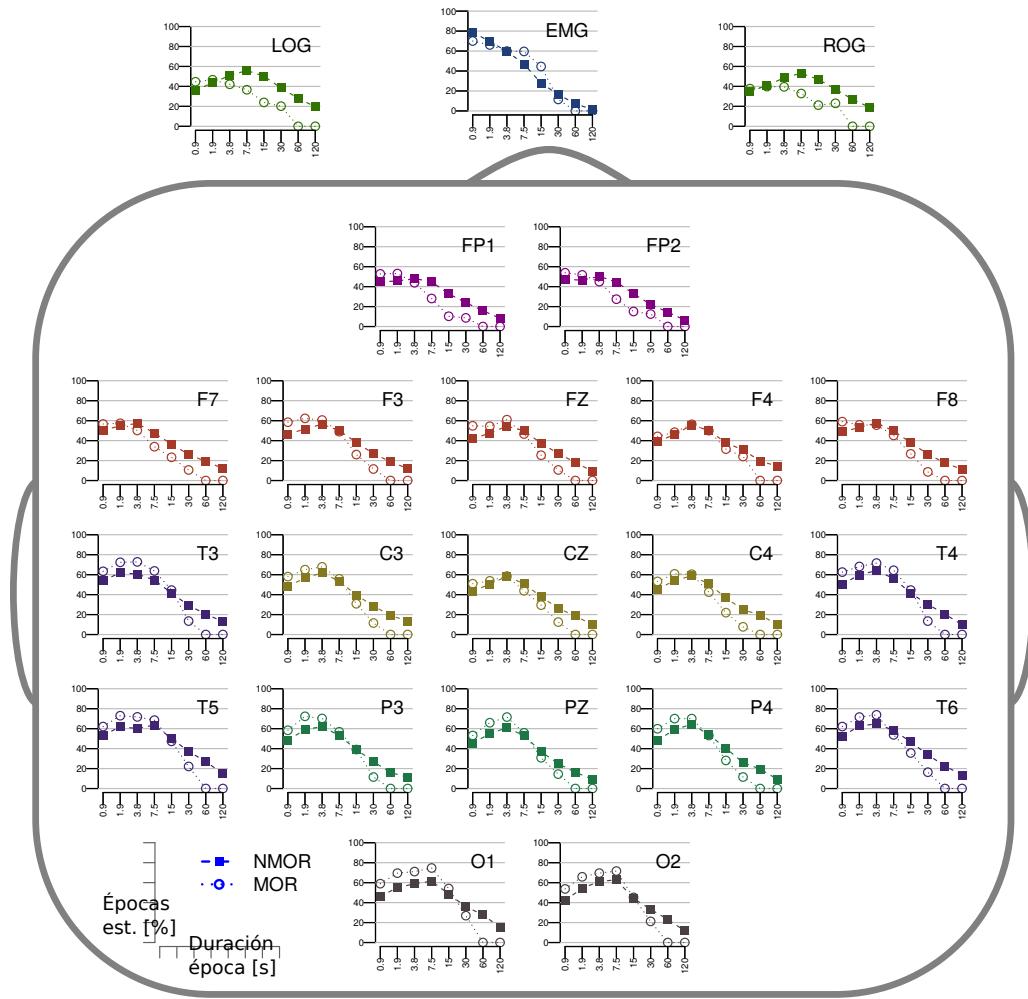
El espectro de potencias se ha calculado usando el estimador adaptativo propuesto por Barbour y Parker [3], el cual se encuentra implementado dentro del paquete `psd` bajo la función `pspectrum`. Se ha usado dicho estimador para garantizar heurísticamente que el espectro de potencias calculado (1) es independiente del uso para determinar la estacionariedad y (2) es compatible con la metodología *usual*<sup>3</sup>.

Como se discute posteriormente, los bloques de épocas estacionarias están relacionados a bloques cuyo espectro de potencia son distintos. Así mismo son diferentes los coeficientes  $R_E$  calculado para dichos bloques.

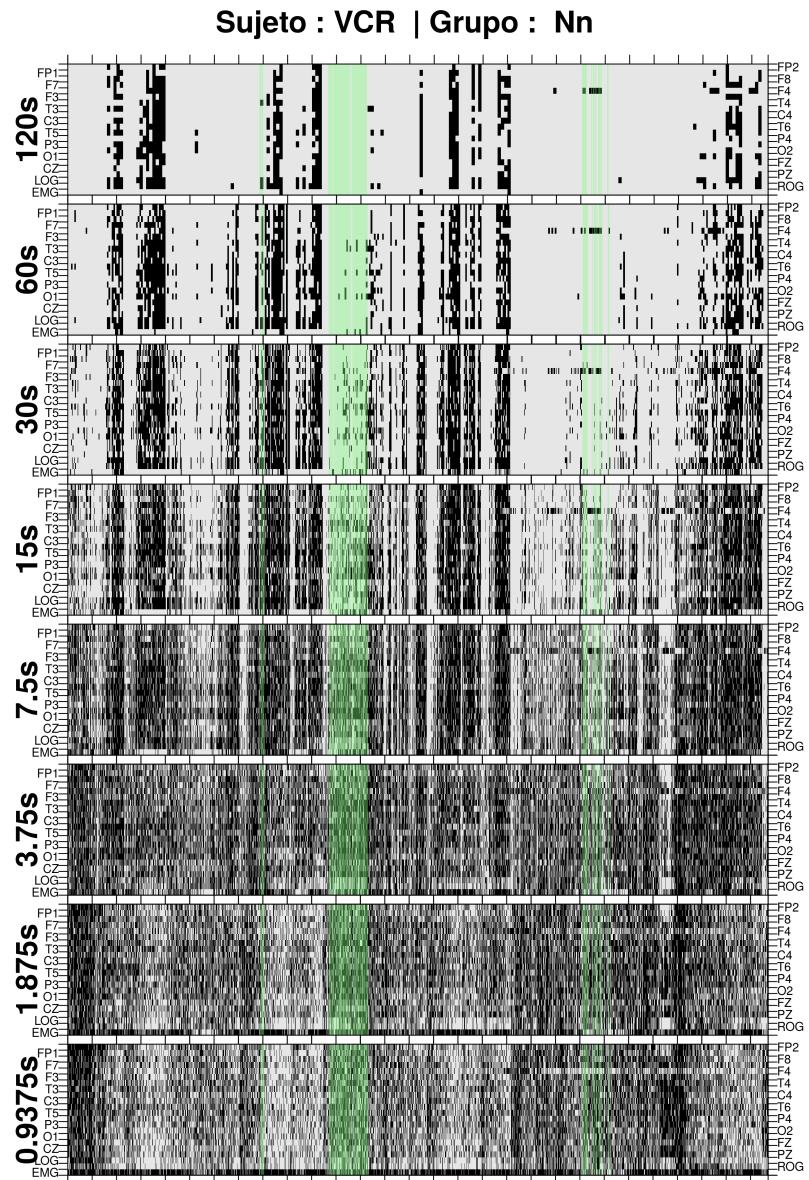
---

<sup>3</sup>El algoritmo `psd` supone estacionariedad débil; usándolo se espera emular resultados obtenidos bajo tal supuesto

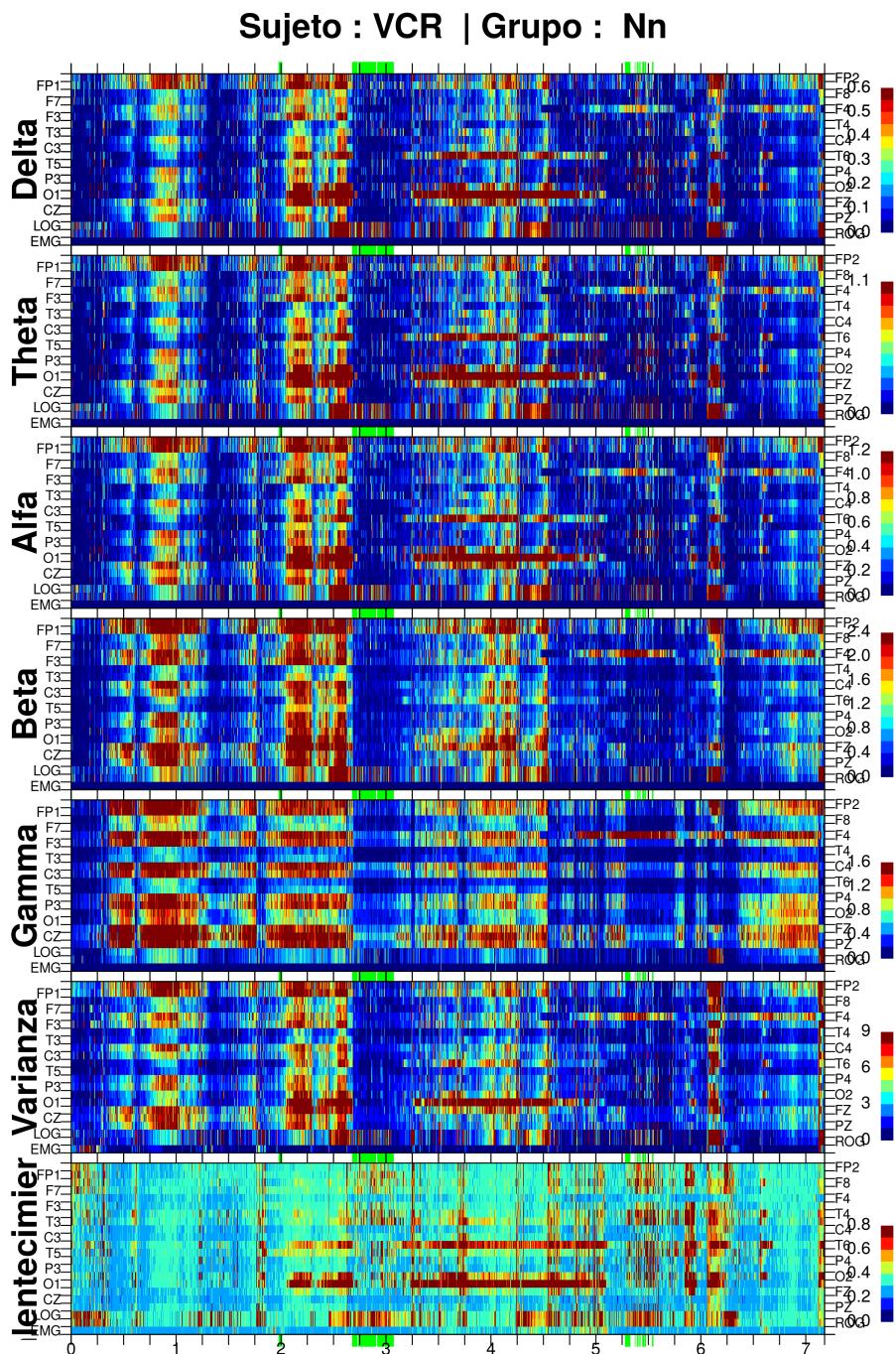
### Sujeto VCR | Grupo Nn



**Figura 3.3:** Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana



**Figura 3.4:** Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana



**Figura 3.5:** Espectro de potencias de banda ancha (delta, theta alfa, beta, gamma)

# Capítulo 4

## Resultados

Previo al análisis de la estacionariedad, se corroboró la hipótesis de que las variables independientes son estadísticamente iguales entre los grupos CTL y PDC. Las comparaciones usando la prueba  $t$  de Welch (cuadro 4.1) indican que efectivamente la hipótesis se cumple salvo para los puntajes de Neuropsi.

Se evalúo si pudieran existir relaciones entre las variables que se presumen independientes. Usando la prueba de correlación de Spearman (cuadro 4.2) se encontró sólo hay correlaciones monotónicas entre los siguientes pares de variables:

- Edad y Escolaridad
- Puntaje en Neuropsi y Puntaje en Mini Mental-State Examination (MMSE)
- Tiempo de MOR (en segundos) y Tiempo en MOR (porcentaje)

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas, y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Algunos autores han sugerido que un bajo nivel de escolaridad es un factor de riesgo para padecer deterioro cognitivo, en base a estudios horizontales de larga escala [citar]. En el presente trabajo se ignora este dato, en vista de que no se pudieron relacionar el nivel de escolaridad de los participantes con su desempeño en pruebas neuropsicológicas.

La relación entre los puntajes en Neuropsi y en MMSE era de esperarse, ya que ambas pruebas miden parámetros similares y tienen contenidos independientes. Cabe

**Cuadro 4.1:** Variables independientes entre grupos

	Grupo CTL		Grupo PDC		t de Welch		
	Media	(DE)	Media	(DE)	p	t	ν
Edad	68.2	(7.2)	67.6	(3.4)	0.8746	0.16	6.11
Escolaridad	9.2	(2.7)	8.4	(2.2)	0.6201	0.52	7.69
Neuropsi	108.9	(5.2)	87.8	(5.6)	<b>0.0003</b>	6.17	7.94
MMSE	29.4	(0.9)	27.4	(1.4)	0.0706	0.16	6.11
Sueño [s]	7:51:30	(0:57:36)	7:16:48	(2:24:43)	0.6836	0.50	5.24
MOR [s]	0:52:06	(0:23:00)	0:34:18	(0:22:14)	0.2486	1.24	7.99
MOR [%]	11.3	(5.1)	8.4	(4.8)	0.3871	0.91	7.96

DE=Desviación Estándar

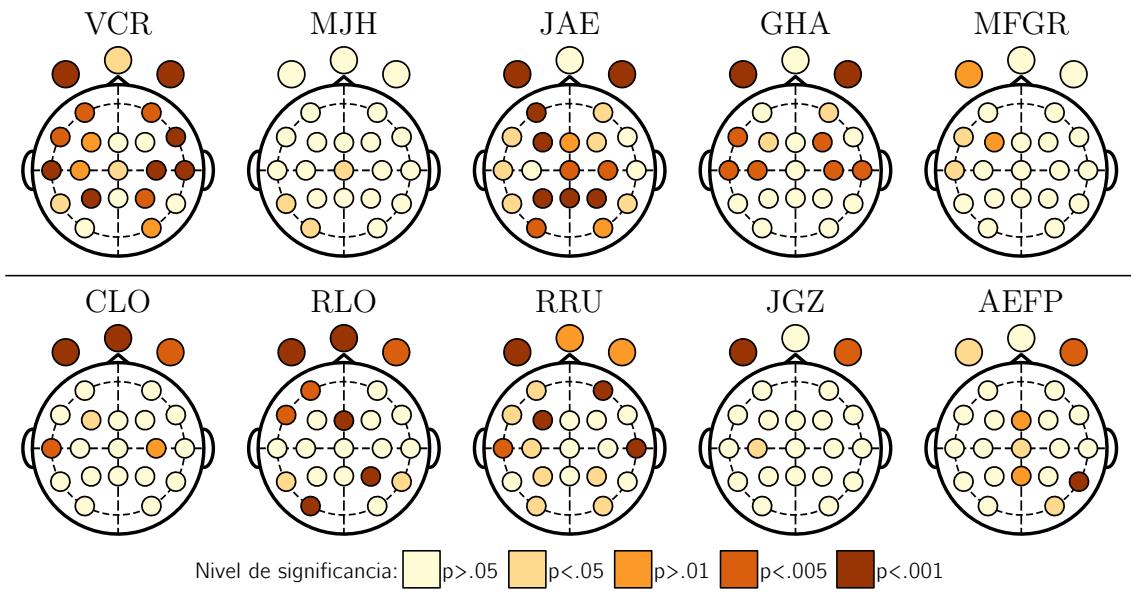
**Cuadro 4.2:** Correlaciones entre variables independientes

	1	2	3	4	5	6
1 Edad	•					
2 Escolaridad	-0.7134*	•				
3 Neuropsi	-0.2432	0.3776	•			
4 MMSE	-0.1063	0.1812	0.8477***	•		
5 Sueño [s]	0.0486	-0.0944	0.0545	0.0374	•	
6 MOR [s]	0.2796	-0.5035	0.1879	0.2618	-0.1515	•
7 MOR [%]	0.3709	-0.5287	0.0182	0.0748	-0.3578	1****

Niveles de significancia: \* $<.05$  , \*\* $<.01$  , \*\*\* $<.005$  , \*\*\*\* $<.001$

mencionar el curioso fenómeno en que (1) los puntajes de MMSE tienen estadísticamente las mismas medias grupales, (2) los puntajes de MMSE están fuertemente correlacionados con los puntajes de Neuropsi, y (3) los puntajes de Neuropsi tienen estadísticamente medias grupales diferentes. Se confirma que la prueba MMSE tiene menor sensibilidad que la prueba Neuropsi para detectar deterioro cognitivo.

Era por demás obvia la relación entre la cantidad total de sueño MOR, con su proporción respecto a todo el sueño. Sin embargo, conviene mencionar que la cantidad de sueño MOR no es afectada por ninguna de las otras variables independientes; luego entonces las cantidades que fueron estudiadas (estacionariedad, espectro de potencias) no tienen correlaciones sesgadas con las demás variables.

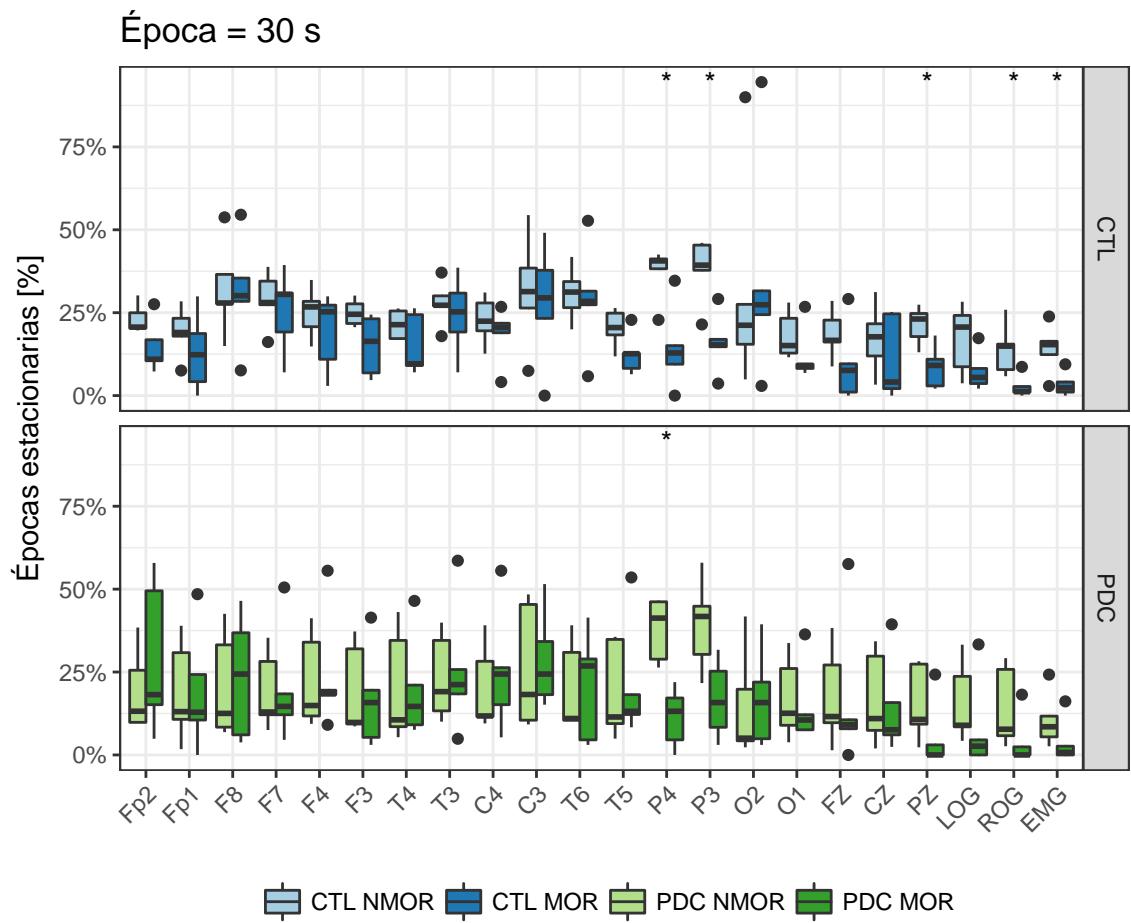


**Figura 4.1:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos

## 4.1. Estacionariedad en sueño MOR

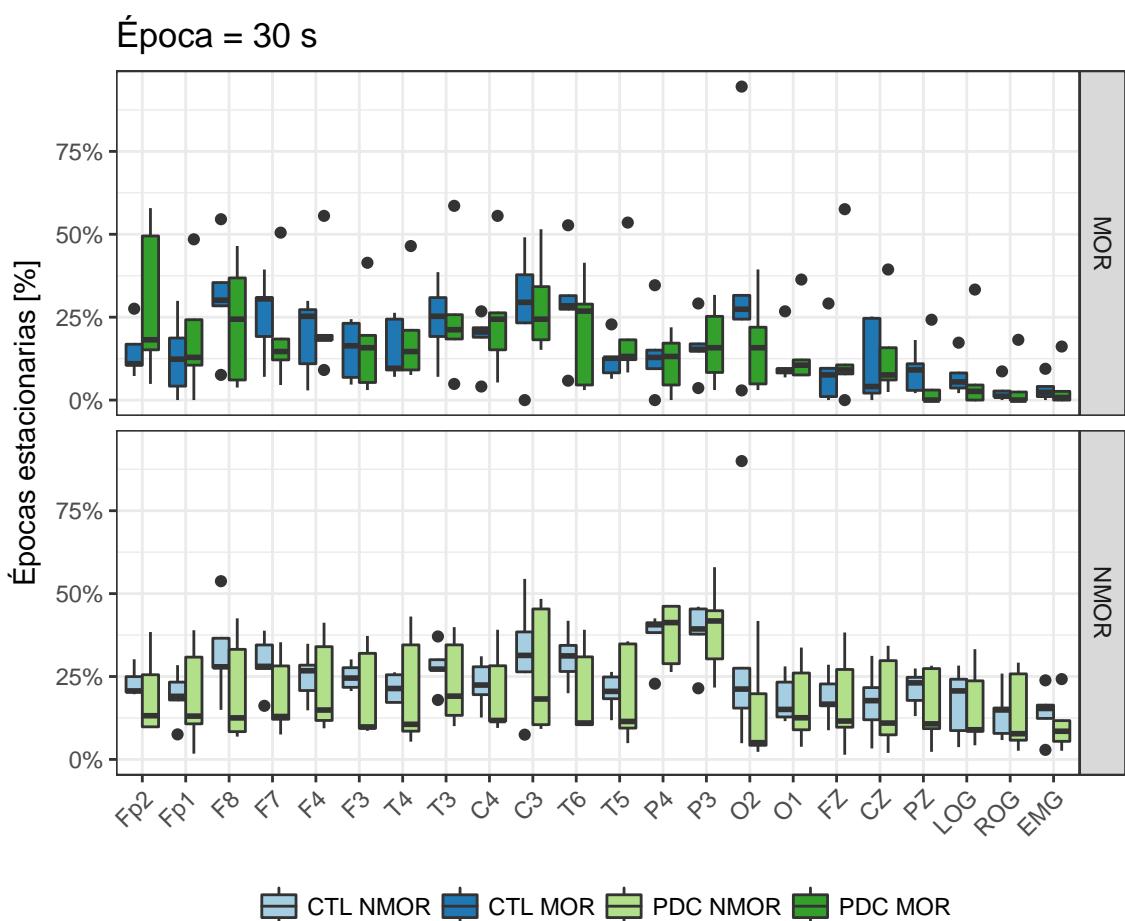
Se sometió a prueba la hipótesis de que durante sueño MOR ocurre en mayor medida la estacionariedad débil, en comparación con el sueño NMOR. Para ello, se compararon el porcentaje de épocas estacionarias en el sentido de PSR, ocurridas durante sueño MOR y NMOR. La comparación fue efectuada usando la prueba  $\chi^2$  de Pearson. Se encontró de manera consistente que los canales ROG y LOG presentaron diferencias significativas ( $p < 0.05$ ) entre sueño MOR y NMOR, lo cual puede explicarse por los movimientos oculares rápidos característicos del sueño MOR. EN los canales que corresponden al EEG no se encontraron patrones consistentes y claros entre los sujetos (ver figura 4.1).

Se repitió la comparación a un nivel grupal, usando la prueba  $U$  de Mann-Whitney. Se encontraron diferencias significativas para el grupo CTL en los canales P3, P4, PZ, ROG y EMG; en el grupo PDC se observaron tales diferencias sólo en P4. Las proporciones muestran tendencias que, quizás, resultaron no ser significativas por el tamaño pequeño de la muestra: los canales P3 y PZ podrían ser diferentes también para individuos del grupo PDC, y el canal LOG podría ser diferente durante sueño MOR y NMOR. Así mismo se hipotetiza que para el grupo CTL, en todos los canales, el sueño MOR es presenta menor cantidad de épocas estacionarias.



**Figura 4.2:** Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR

Se concluye que no se puede establecer diferencias entre las medias grupales para esta cantidad (proporción de épocas estacionarias, medidas en el sentido de PSR), debido a la gran variabilidad entre sujetos.



**Figura 4.3:** Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC

## 4.2. Discusión

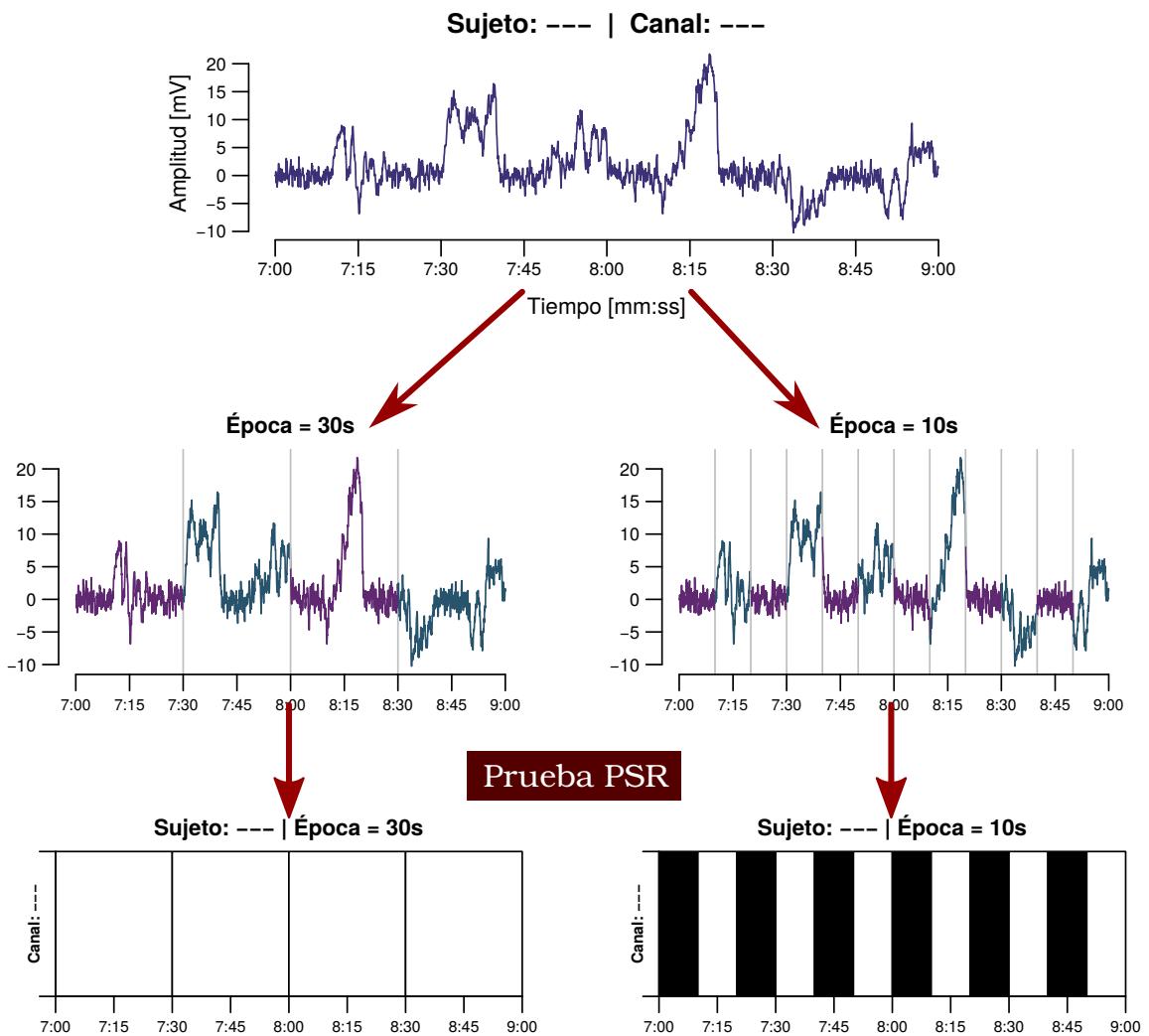
### 4.2.1. Efecto del tamaño de las épocas

En el apéndice X se explica que si disminuye el tamaño de época el test de PSR disminuye su potencia, de modo que es más propensa a dar falsos negativos (rechazar la hipótesis de estacionariedad cuando debía aceptarse); entonces, en épocas más pequeñas debería haber más épocas clasificadas como no-estacionarias. Sin embargo, al *graficar* la estacionariedad para diferentes tamaños de época (figura 3.4) ocurre que es más frecuente el efecto contrario.

Se propone que este efecto puede ser explicado si los registros de PSG son **localmente estacionarios**, una propiedad introducida por Dahlhaus [11] y que consiste en que un proceso no-estacionario pueda ser aproximado a trozos *ensamblando* procesos estacionarios definidos para intervalos pequeños de tiempo. Esta caracterización del EEG ha sido usada anteriormente de manera fructífera pero problemática [??].

En el contexto particular del presente trabajo, la presencia de estacionariedad local puede ser explicada fisiológicamente por el contenido heterogéneo de ritmos cerebrales de las etapas de sueño; como ejemplo, en la etapa N3 aparecen husos de sueño mezcladas con ritmos Alfa, de modo que es posible hallar un fragmento de época en sueño N3 con únicamente un tren de ondas Alfa o un tren de husos de sueño. Este fenómeno es ilustrado de manera esquemática en la figura 4.4.

Entonces, se propone que los registros de PSG se comportan como procesos localmente estacionarios; más aún, se propone que esta característica cambia cualitativamente en adultos mayores con PDC, para los cuales el *nivel de homogeneidad* del PSG es muy similar durante MOR y NMOR.



**Figura 4.4:** Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad

## **4.3. Conclusiones**

Se concluye que es posible la ocurrencia de fragmentos arbitrariamente cortos de registros de PSG que no son débilmente estacionarios. Paralelamente, la presencia de estos fragmentos se ve influida por el estado de actividad del cerebro. Como consecuencia directa de este fenómeno, es posible limitar los efectos *distorsivos* de la no-estacionariedad, para lo cual basta un diseño experimental que distinga adecuadamente el estado de actividad a estudiar.

En otro ámbito, es en principio posible usar la proporción de estacionariedad<sup>1</sup> en el EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Para ello, falta investigar las características particulares de la etapa que se busca identificar, así como otras etapas cercanas en el tiempo.

## **4.4. Trabajo a futuro**

Una vez que se ha identificado un marcador para el PDC usando un grupo de laboratorio, conviene automatizar los análisis para su uso clínico sobre un público más general. Un uso más amplio de la técnica asegura una mayor población para poder estudiar la efectividad y sensibilidad de la prueba. Y más que eso, se espera que pueda ser sinceramente beneficioso para los pacientes. Siguiendo el protocolo usual, los marcadores presentados no serán usados como único recurso para generar un diagnóstico clínico, sino como un apoyo a las herramientas existentes.

El uso de marcadores basados en registros de PSG –basados en el EEG en general– aporta una base fisiológica al diagnóstico de deterioro cognitivo, misma que no es posible usando únicamente pruebas neuropsicológicas. Conviene destacar que, de entre las herramientas para el registro fisiológico del sistema nervioso central, las técnicas electrofisiológicas son las más económicas y menos invasivas; generar marcadores basados en ellas facilita su uso por el público general como herramienta diagnóstica, sobre todo en ausencia de síntomas.

---

<sup>1</sup>La *densidad* de ventanas estacionarias, en el sentido de PSR, a través del registro

# Apéndice A

## Variables aleatorias

### A.1. Medidas

Un primer motivo para esta sección es enfatizar que, formalmente, una variable aleatoria se concibe como un espacio de medida y no como un recuento de eventos. Paralelamente, introducir la terminología adecuada permitirá entender los teoremas que dan base a los análisis realizados.

**Definición A.1 ( $\sigma$ -álgebra)** *Sea  $U$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una colección de subconjuntos de  $U$ . Se dice que  $\mathcal{U}$  es una  $\sigma$ -álgebra si cumple que*

- $U \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U}$  implica que  $A^C \in \mathcal{U}$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son conjuntos tales que  $A_i \in \mathcal{U}$ , entonces  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde  $A^C$  es el complemento  $\{u \in U | u \notin A\}$

Por simplicidad, en este trabajo sólo se usarán medidas para conjuntos de números reales derivadas de la  $\sigma$ -álgebra de Borel, que es definida como la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a los intervalos abiertos<sup>1</sup>.

**Definición A.2 (Medida)** *Sea  $U$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una  $\sigma$ -álgebra definida en  $U$ . Se dice que una función  $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$  es una medida si cumple que*

---

<sup>1</sup>Si una  $\sigma$ -álgebra contiene a todos los intervalos abiertos, entonces debe contener a todos los elementos de la  $\sigma$ -álgebra de Borel

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A) \geq 0$  para cualquier  $A \in \mathcal{U}$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son conjuntos disjuntos a pares y tales que  $A_i \in \mathcal{U}$ , entonces  $\mu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Donde  $\emptyset$  es el conjunto vacío

**Definición A.3 (Medida de probabilidad en  $\mathbb{R}$ )** Sea  $\mathcal{B}$  la sigma álgebra de Borel definida para  $\mathbb{R}$ , se dice que una función  $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  es una **medida de probabilidad** si cumple que

- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$  para cualquier  $A \in \mathcal{B}$
- Si  $A, B \in \mathcal{B}$  y  $A \cap B = \emptyset$ , entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\mathbb{R}) = 1$

Otra forma de entender una variables aleatoria es a partir de su función de probabilidad acumulada (FPA), ya que hay una correspondencia unívoca entre cada variable aleatoria y su FPA.

**Definición A.4 (Función de Probabilidad Acumulada)** Sea

$$F_X(x) = P((-\infty, x])$$

Habitualmente, como se hace el presente texto, se usa el símbolo  $X$  para denotar a una variable aleatoria cuya FPA es  $F_X$ ; bajo esta idea, para cualquier conjunto  $I \subseteq \mathbb{R}$  se denota  $P(X \in I) = P(I)$

**Teorema A.1 (Descomposición de Lebesgue)** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función de variación acotada, con  $I$  un intervalo. Entonces pueden hallarse funciones  $f_j, f_c, f_a : I \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

- $f = f_j + f_c + f_a$

- $f_j = \sum_{y \leq x} f(x - 0) + f(x + 0)$
- $f_a$  es absolutamente continua<sup>2</sup> en  $I$
- $f_c$  es una función singular<sup>3</sup> en  $I$

Estas funciones son únicas excepto por constantes, y en conjunto son llamados la descomposición de Lebesgue de  $f$

## A.2. Procesos estocásticos

**Definición A.5 (Proceso estocástico)** Un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \in T}$  es una familia de variables aleatorias reales, indexadas por  $t \in T$ .

Respecto al conjunto  $T$  que indexa a un proceso estocástico, y que será referido como *tiempo*, conviene introducir dos grandes grupos para los mismos

- *Continuo* si  $T$  es un intervalo cerrado
- *Discreto* si  $T$  es de la forma  $\{t_0 + n\delta | n \in U \subseteq \mathbb{Z}\}$

Los procesos a tiempo discreto contemplan conjuntos finitos e infinitos de puntos en el tiempo. No se manejan discutirán sobre otros tipos de tiempo en este trabajo.

Como notación, se usará  $\{X(t)\}_{t \in T}$  para el proceso estocástico y  $X(t)$  para una de las variables aleatorias que lo componen; de la misma manera  $x(t)$  es una realización de  $X(t)$  y  $F_{X(t)}$  es la función de probabilidad acumulada para  $X(t)$ .

**Definición A.6 (Continuidad estocástica en media cuadrática)** Un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}$  es estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática, en un tiempo admisible  $t_0$  si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} [(X(t) - X(t_0))^2] = 0$$

---

<sup>2</sup>Para que una función sea absolutamente continua, basta que sea de variación acotada y que mapee conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero

<sup>3</sup>Una función es singular si es continua, de variación acotada y no-constante, y se cumple que tiene derivada cero casi en todas partes

Una forma natural de pensar en la definición A.6 es que, si  $|t - t_0|$  es muy pequeño, entonces  $X(t)$  y  $X(t_0)$  difieren muy poco entre sí (como variables aleatorias). Es destacable que si un proceso es estocásticamente continuo en un intervalo, sus realizaciones solamente se pueden garantizar continuas casi en todas partes<sup>4</sup> en ese intervalo.

Como ejemplos, un proceso ruido blanco (definición A.7) no es estocásticamente continuo, mientras que un proceso de Wiener (definición A.8) sí lo es.

**Definición A.7 (Proceso ruido blanco)** *Se dice de un proceso estocástico  $\{R(t)\}$  que cumple, para cualesquiera tiempos admisibles  $t$  y  $s$ , las siguientes propiedades:*

- $E[R(t)] = 0$
- $\text{Cov}(R(t), R(s)) = 0 \Leftrightarrow t = s$

**Definición A.8 (Proceso de Wiener)** *Se dice de un proceso estocástico  $\{W(t)\}$  que cumple, para cualesquiera tiempos admisibles  $t$  y  $s$  (con  $s > t$ ) las siguientes propiedades:*

- $W(0) = 0$  ( $W(0)$  es constante)
- $W(s) - W(t)$  es independiente de  $W(u)$ , para todo  $u < t$  admisible
- $W(s) - W(t) \sim N(0, |t - s|)$  (los incrementos tienen distribución normal)

**Definición A.9 (Estacionariedad débil)** *Un proceso estocástico  $\{X(t)\}_{t \in T}$  es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles<sup>5</sup>  $t, s$  se tiene que*

- $E[X(t)] = \mu_X$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma_X^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = \rho_X(s - t)$

<sup>4</sup>Una propiedad se cumple **casi en todas partes** si se cumple en un conjunto cuyo complemento tiene medida cero

<sup>5</sup>El término *tiempos admisibles* significa que la definición es la misma para diferentes tipos de tiempo, bajo las restricciones pertinente

Donde  $\mu_X$ ,  $\sigma_X^2$  son constantes,  $\rho_X(\tau)$  es una función que únicamente depende de  $\tau$

**Definición A.10 (Función de espectro integrado)** Sea  $\{X(t)\}_{t \in T}$  un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario. Se define su función de espectro integrado como

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_2 t} - e^{-i\omega_1 t}}{-i\tau} R(\tau) d\tau$$

Donde  $h$  es la FDE para  $\{X(t)\}_{t \in T}$

### A.3. Periodograma

Una observación interesante sobre estos teoremas es el caso  $\tau = 0$

$$\rho(0) = \int_{-A}^{+A} dF(\omega) = F(A) - F(-A)$$

donde  $A$  vale  $\infty$  o  $\pi$  según sea el caso discreto o continuo. Si  $R$  es la función de autocovarianza del proceso, entonces la ecuación anterior se traduce en que

$$R(0) = \sigma^2 (F(A) - F(-A)) = \sigma^2 F(A)$$

donde  $\sigma^2$  es la varianza del proceso. Esta observación adquiere importancia porque la FDE integrada ( $H$ ), por definición, satisface el papel de  $F$  salvo por la condición  $F(\infty) = 1$ ; si se puede garantizar que  $H(\infty) < \infty$  entonces puede ser normalizada para satisfacer tal condición y, más aún, si tal fuera el caso entonces  $H(\infty) = \sigma^2$ . Una consecuencia muy fuerte de este comentario es que, como se ha establecido previamente que sólo se considerarán procesos con segundos momentos finitos, entonces la FDE de los procesos considerados siempre es acotada.

Se puede demostrar que  $\widehat{R}^*$  tiene las siguientes propiedades:

- $E\left[\widehat{R}^*(\tau)\right] = \left(1 - \frac{|\tau|}{N}\right) R(\omega)$
- $\text{Var}\left(\widehat{R}^*(\tau)\right) \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (R^2(r) + R(r - \tau)R(r + \tau))$
- $\text{Cov}(\widehat{R}^*(\tau), \widehat{R}^*(\tau + \nu)) \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} (\rho(r)\rho(r + \nu) + \rho(r - \tau)\rho(r + \tau + \nu))$

Las aproximaciones para la varianza y covarianza se vuelven exactas si el proceso sigue una distribución normal en todos los tiempos.

### A.3.1. Representación espectral

**Teorema A.2** *Sea  $\{X(t)\}$  un proceso estocástico a tiempo continuo débilmente estacionario de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Entonces, existe un proceso ortogonal  $\{Z(\omega)\}$  tal que, para todo tiempo  $\omega$  admisible, se puede escribir<sup>6</sup>*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso  $\{Z(t)\}$  tiene las siguientes propiedades para todo  $\omega$

- $E[dZ(\omega)] = 0$
- $E[|dZ(\omega)|^2] = dH(\omega)$
- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$

Donde  $dH(\omega)$  la FDE integrada de  $\{X(t)\}$

**Teorema A.3 (Wiener-Khinchin)** *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}$  débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función  $F$  que tenga las siguientes propiedades*

- Monótonamente creciente
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

**Teorema A.4 (Wold)** *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X(t)\}$  débilmente estacionario es que exista una función  $F$  con las siguientes propiedades*

---

<sup>6</sup>La integral se encuentra definida en el sentido de media cuadrática.

- Monótonamente creciente

- $F(-\pi) = 0$

- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

En virtud del teorema de Wold, se puede tener una variante del teorema ?? para procesos a tiempo discreto, razón por la cual tal representación es referida como **representación de Wold-Cramér**.

Conviene introducir estimadores para la función de autocovarianza de un proceso débilmente estacionario,  $\{X(t)\}$ , a partir de un conjunto de  $N$  observaciones equiespaciadas en el tiempo con separación  $\Delta t$ ; se denotará a estas observaciones como  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Como se cumple la siguiente propiedad para la función de autocovarianza,  $R$ , por definición

$$R(\tau) = E[X(n\Delta t)X(n\Delta t + \tau)] , n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

el estimados estándar para  $R$  está dado por la siguiente expresión

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{N - |\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$$

Se puede demostrar que  $\hat{R}$  es un estimador insesgado<sup>7</sup> y consistente<sup>8</sup> para  $R$ ; sin embargo conviene introducir un estimador diferente para  $R$

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$$

<sup>7</sup>Un estimador para el parámetro  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$ , se dice **insesgado** si  $E[\hat{\theta}] = \theta$

<sup>8</sup>Un estimador para el parámetro  $\theta$  que depende de  $N$  observaciones,  $\hat{\theta}_N$ , se dice **consistente** si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_N) = 0$

**Teorema A.5** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_N$  observaciones de un proceso estocástico de media cero y varianza finita. Se puede calcular el periodograma para estos datos como

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}^*(r) \cos(r\omega)$$

Donde  $\widehat{R}^*$  es el estimador para la función de autocovarianza del proceso, calculado como  $\widehat{R}(\tau) = \frac{1}{N-|\tau|} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x_t x_{t+|\tau|}$

Se puede demostrar que el periodograma es un estimador insesgado de la FDE para los procesos considerados; sin embargo, si el proceso tuviera un espectro puramente continuo, ocurre que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = h^2(\omega)$ , con  $h$  la FDE del proceso: el periodograma, en general, no es consistente. En parte esto ocurre porque el periodograma depende de los estimadores para la función de autocovarianza,  $\widehat{R}$ , evaluada en todos los puntos posibles: para calcular  $\widehat{R}$  en valores muy altos se requieren puntos muy alejados, los cuales son menos abundantes e implican una mayor varianza.

Si efectivamente el periodograma aumenta su varianza cuando incluye las 'colas' de la función de autocovarianza, entonces una solución es evitarlas, multiplicando por una función de pesos. Tales consideraciones dan origen a estimadores de la forma

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \lambda(s) \widehat{R}^*(s) e^{i\omega t}$$

donde la función de pesos,  $\lambda$ , es referida como **ventana de retrasos**. Para estudiar las propiedades estos estimadores, conviene reescribirlos en función del periodograma

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) W(\omega - \theta) d\theta$$

donde  $W$  es la transformada de Fourier finita de  $\lambda$

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-(N-1)}^{N-1} \lambda(s) e^{-is\theta}$$

Cabe destacar la forma que adopta  $\widehat{h}$  como la convolución  $I_N * W$ , que bien puede entenderse como que  $W$  es una función de pesos en el 'dominio de las frecuencias'; por ello,  $W$  es referida como **ventana de retrasos**. En la tabla ?? hay una lista corta

de algunas funciones tipo ventana. Estos estimadores son consistentes y sesgados, aunque son asintóticamente insesgados.

**Proposición A.1** *Sean  $u$  y  $v$  dos funciones tipo pseudo  $\delta$  de Dirac, es decir, unimodales con un máximo y (...). Si  $u$  tiene una concentración muy alta, con relación a  $v$ , entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx \approx v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx$$



## Apéndice B

# Espectro evolutivo

### B.1. Espectro evolutivo

**Proposición B.1** Sean  $u$  y  $v$  dos funciones tipo pseudo  $\delta$  de Dirac, es decir, unimodales con un máximo y (...). Si  $u$  tiene una concentración muy alta, con relación a  $v$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx \approx v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx$$

### B.2. Estimación del espectro evolutivo

Una vez definido el espectro evolutivo para procesos no-estacionarios con varianza finita, cabe preguntarse sobre la estimación de esta cantidad a partir de una realización del proceso usando, por ejemplo, periodogramas modificados; tal pregunta no tiene, en general, una respuesta satisfactoria. Es por ello que se define una colección, más restringida, de procesos no-estacionarios cuyo espectro evolutivo pueda ser estimado efectivamente usando la técnica de ventanas.

Considerando un proceso no-estacionario  $\{X(t)\}_{t \in \mathbf{T}}$  que admite una representación de la forma  $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t, \omega) e^{i\omega t} dZ(\omega)$ , entonces el espectro evolutivo queda definido como

$$dF_t(\omega) = |A(t, \omega)|^2 d\mu(\omega) \quad (\text{B.1})$$

Antes de poder usar la proposición B.1 para estimar  $F_t$  (con respecto a  $t$ ) usando

una ventana espectral, hay que medir la dispersión de  $F_t$  en el tiempo; más aún, hay que pedir que esa dispersión sea finita. Con vista a la ecuación B.1, se puede usar la conexión entre  $F$  y  $A$  para establecer condiciones respecto a la segunda; se define entonces a  $H_\omega$ , la transformada de Fourier de  $A$  en el tiempo

$$A(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dH_\omega(\theta) \quad (\text{B.2})$$

Un motivo muy fuerte para definir un objeto tan rebuscado es que (...)

Posteriormente se define a  $B_{\mathbf{F}}$ , el ancho de banda para  $H_\omega$  con respecto a la familia de funciones  $\mathbf{F}$ , como

$$B_{\mathbf{F}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dH_\omega(\theta)| \quad (\text{B.3})$$

Se dice que el proceso es semi-estacionario con respecto a  $\mathbf{F}$  si  $\sup_{\omega} B_{\mathbf{F}} < \infty$ . El proceso se dice simplemente **semi-estacionario** si esta cantidad es acotada para cualquier familia de funciones admisibles  $\mathbf{F} \in \mathbf{C}$ ; entonces se puede definir la constante  $B_X$ , el *ancho de banda característico* de  $\{X(t)\}_{t \in T}$ , como

$$B_X = \sup_{\mathbf{F} \in \mathbf{C}} \left[ \sup_{\omega} B_{\mathbf{F}}(\omega) \right]^{-1} \quad (\text{B.4})$$

Muy vagamente,  $B_X$  indica el tiempo máximo en el cual el proceso, representado en la forma B.1, (...)

Una vez definida la cantidad  $B_X$ , y habiendo supuesto que no es 0, es demostrado en [29] que el estimador  $U$  definido como en ... satisface que

$$\mathbb{E} [|U(t, \omega)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 f(t, \omega + \omega_0) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (\text{B.5})$$

De esta última expresión es evidente que el estimador es mejor conforme

- $B_X$ , el tiempo máximo para el cual el proceso es *básicamente estacionario*, es mayor
- $B_g$ , la dispersión en el tiempo para la ventana  $g$ , es menor

Entonces se ha probado en [30, 31] que bajo ciertas condiciones p

### B.3. Estimador de doble ventana

Respecto a la estimación del espectro local se usa el **estimador de doble ventana**, técnica introducida por Priestley [31] y que requiere dos funciones,  $w_\tau$  y  $g$ , que funcionan como ventana de retrasos y como filtro lineal, respectivamente. En cuando a  $g$ , se define a  $\Gamma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega u} du$  y se les pide que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$$

Cabe mencionar que las ventanas espectrales mostradas en la tabla ?? bien pueden cumplir las propiedades requeridas para ser filtros. Posteriormente se define el estimador  $U$  con el objetivo de asignar pesos en el tiempo para estimar a la FDE

$$U(t, \omega) = \int_{t-T}^t g(u) X(t-u) e^{i\omega(t-u)} du$$

Bajo el entendido que la función  $\Gamma$  converge a una función tipo  $\delta$  de Dirac, puede considerarse que  $E[|U(t, \omega)|^2] \approx f_t(\omega)$ ; sin embargo, se demuestra en [30] que  $\text{Var}(|U(t, \omega)|^2) \not\rightarrow 0$ . Debido a ello se usa una segunda función tipo ventana, de forma similar al periodograma. Se considera la función  $W_\tau$ , ventana de retrasos, y su respectiva ventana espectral  $w_\tau$ ; deben satisfacer las siguientes propiedades:

- $w_\tau(t) \geq 0$  para cualesquiera  $t, \tau$
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , para todo  $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$  para todo  $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 dt < \infty$  para todo  $\tau$
- $\exists C$  tal que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^t |W_\tau(\lambda)|^2 d\lambda = C$

Cabe mencionar que todas las ventanas mostradas en ?? satisfacen las propiedades anteriores. Finalmente, se define el estimador  $\hat{f}$  para las FDE normalizada,  $f_t$ , como

$$\hat{f}(t, \omega) = \int_{t-T}^t w_{T'}(u) |U(t-u, \omega)|^2 du$$

Fue demostrado por Priestley [29] que los estimadores de doble ventana son asintóticamente insesgados y consistentes, y propone las siguientes aproximaciones:

- $E \left[ \widehat{f}(t, \omega) \right] \approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t, \omega + \theta) |\Gamma(\theta)|^2 d\theta$
- $\text{Var} \left( \widehat{f}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{\tau} \left( \bar{f}^2(\omega) \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

donde las funciones  $\tilde{f}$  y  $\bar{f}$  son versiones 'suavizadas' de la FDE normalizada,  $f$ , y están definidas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, \omega + \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{\tau}(u) f(t - u, \omega + \theta) du \\ \bar{f}^2(t, \omega) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t - u, W_{\tau}^2(u)) du}{\int_{-\infty}^{\infty} (W_{\tau}(u))^2 du} \end{aligned}$$

Como  $W_{\tau}$  funciona como ventana espectral, converge a una función tipo  $\delta$  de Dirac; luego  $\tilde{f}$  es aproximadamente la convolución  $\tilde{f}(t, \omega + \theta) \approx \delta_t * f(\bullet, \omega + \theta)$ . Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que  $\tilde{f} \approx f$  y  $\bar{f}^2 \approx f^2$ . Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas  $w_{\tau}$  y  $W_{\tau}$  sean más cercanas a funciones tipo  $\delta$  de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

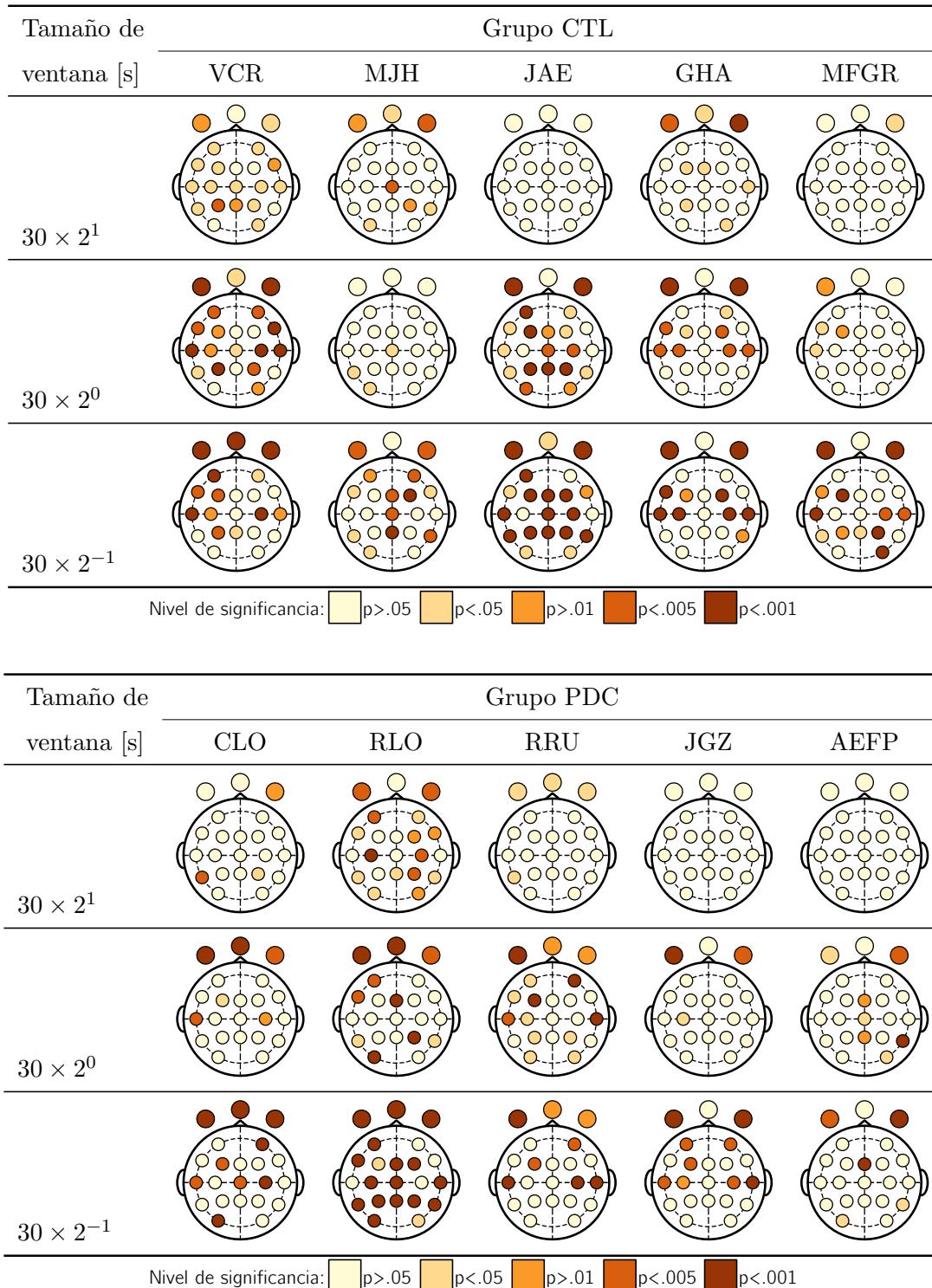
- $E \left[ \widehat{f}(t, \omega) \right] \approx f(t, \omega)$
- $\text{Var} \left( \widehat{f}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{\tau} f^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 d\theta$

# Apéndice C

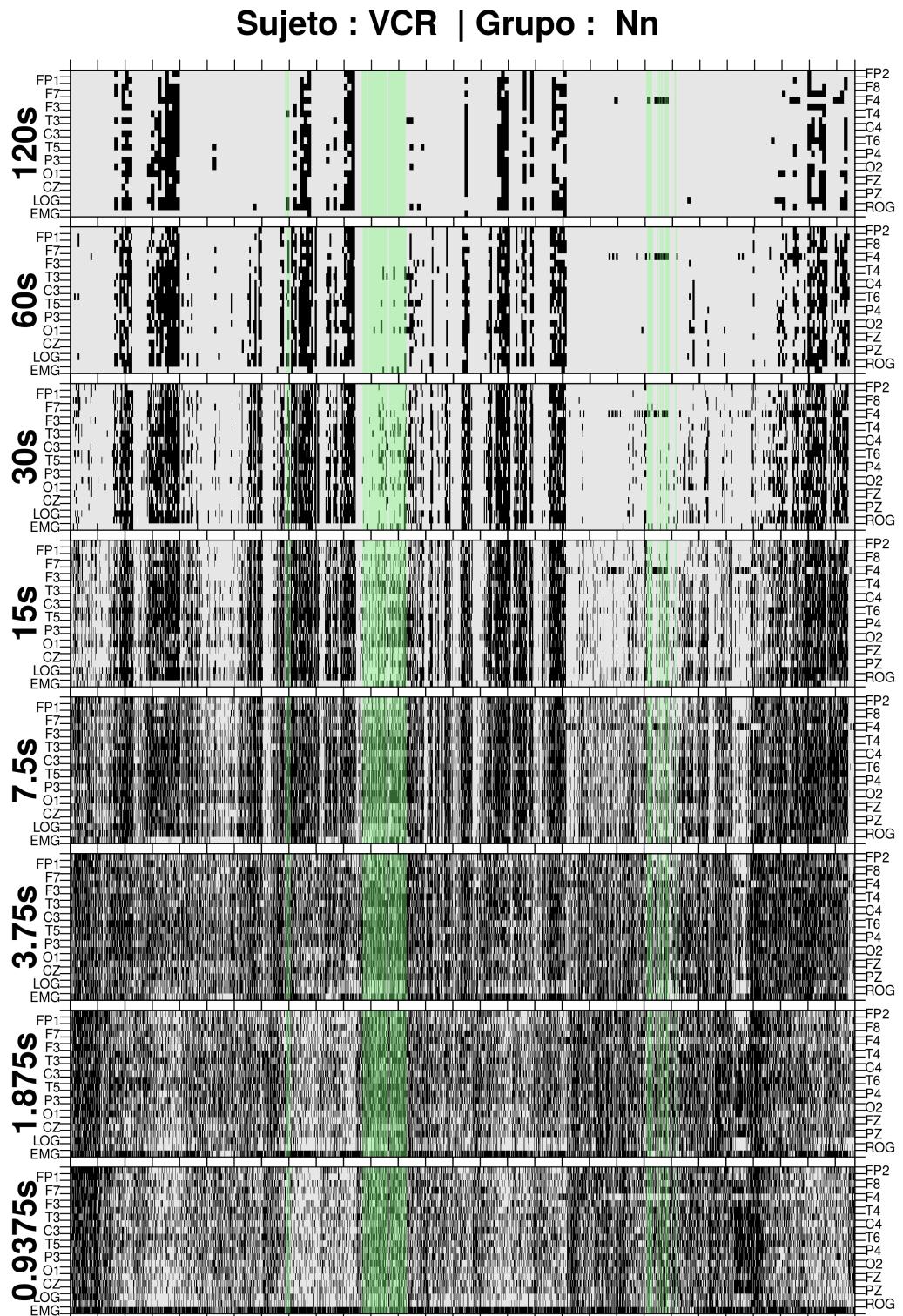
## Compilados gráficos

En este apéndice se muestran los compilados gráficos mencionados en la parte de resultados, y que representan la distribución temporal y pseudo-espacial de las ocurrencia de épocas PSG dentro de los registros para cada paciente.

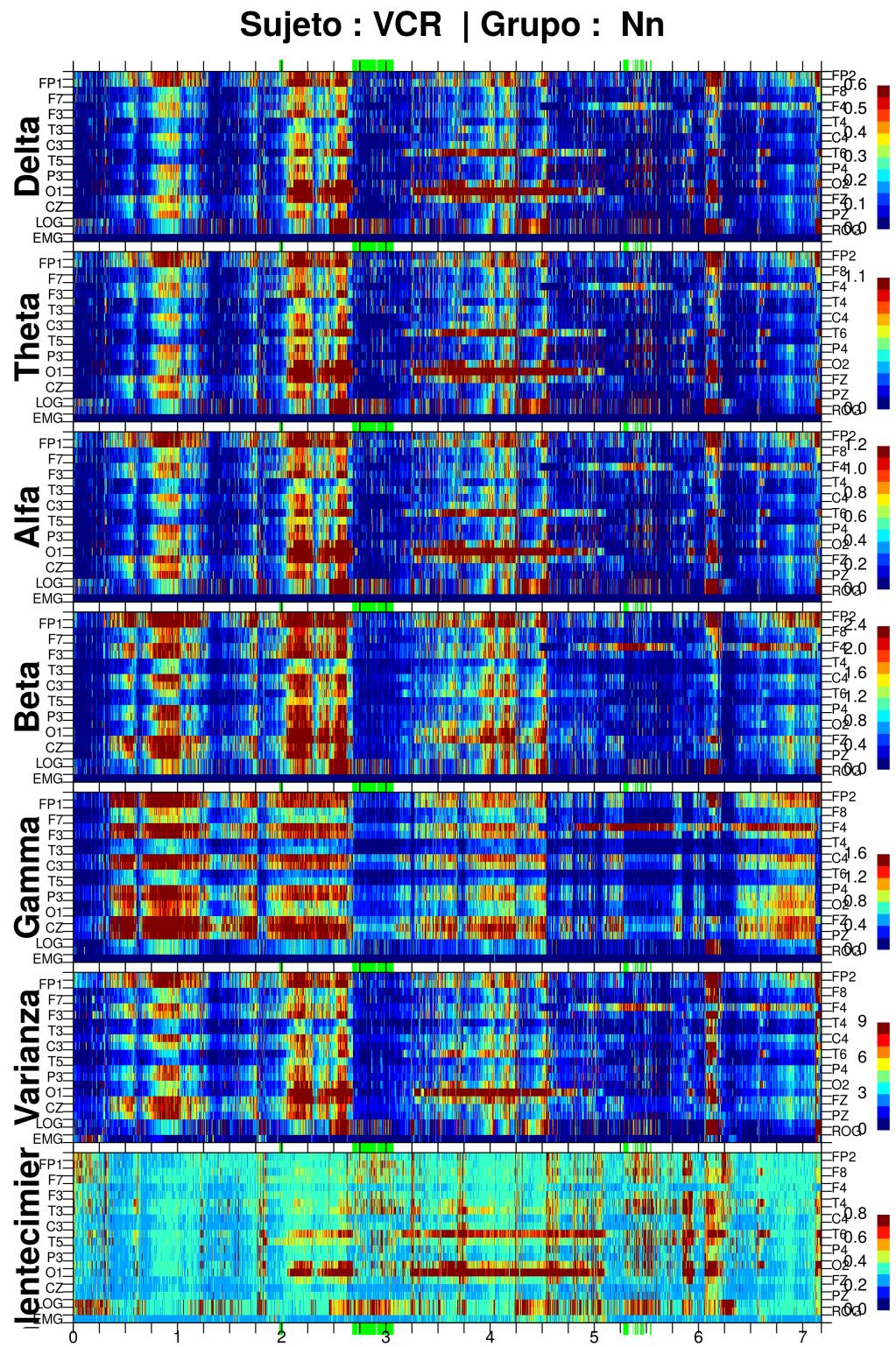
Primeramente se presentan los compilados gráficos en los que se ha destacado el sueño MOR; posteriormente se presentan los mismos gráficos resaltando los patrones visuales propuestos, que parecen estar relacionados con la aparición de sueño MOR.



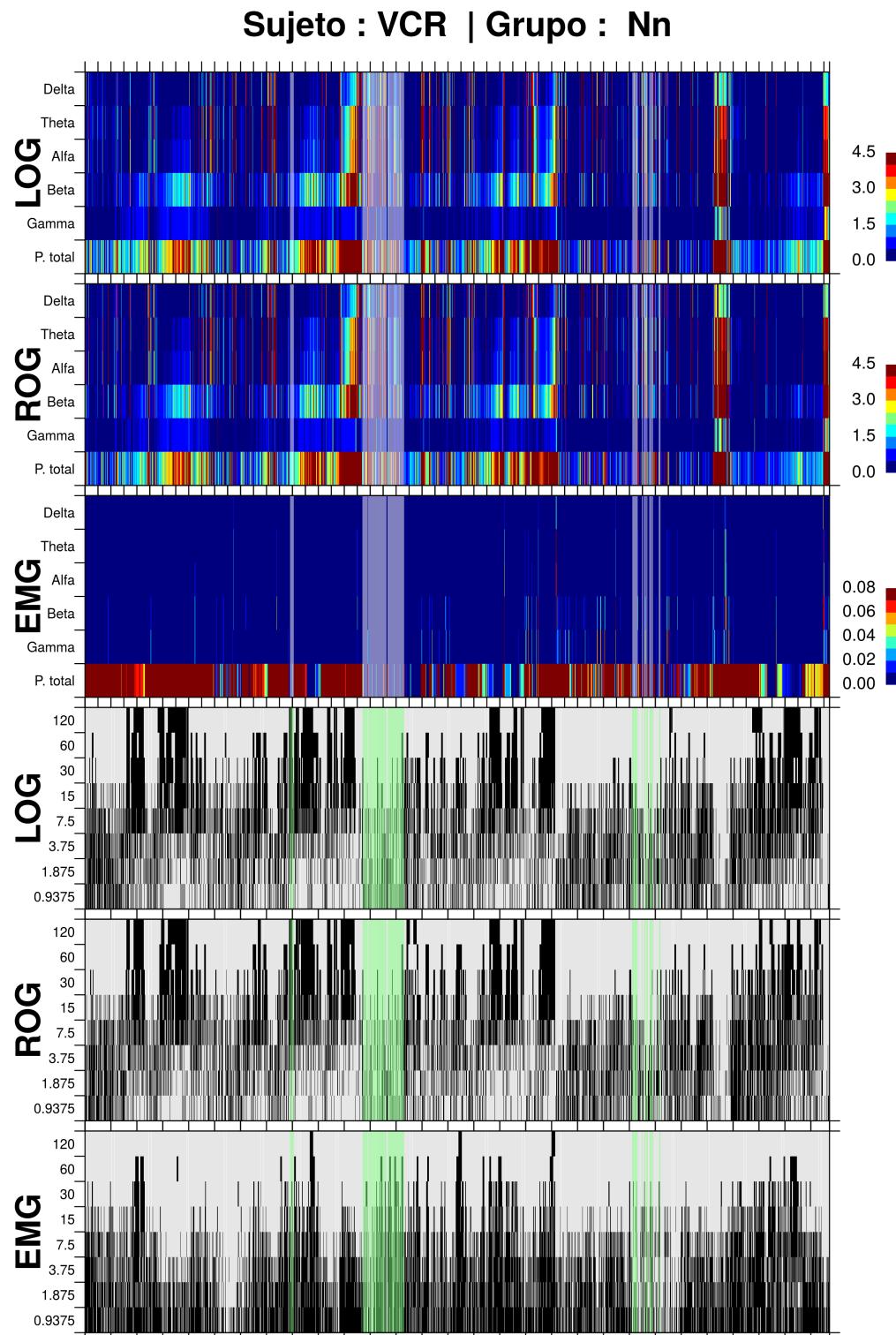
**Figura C.1:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana



(a) Épocas estacionarias usando diferentes tamaños de ventana

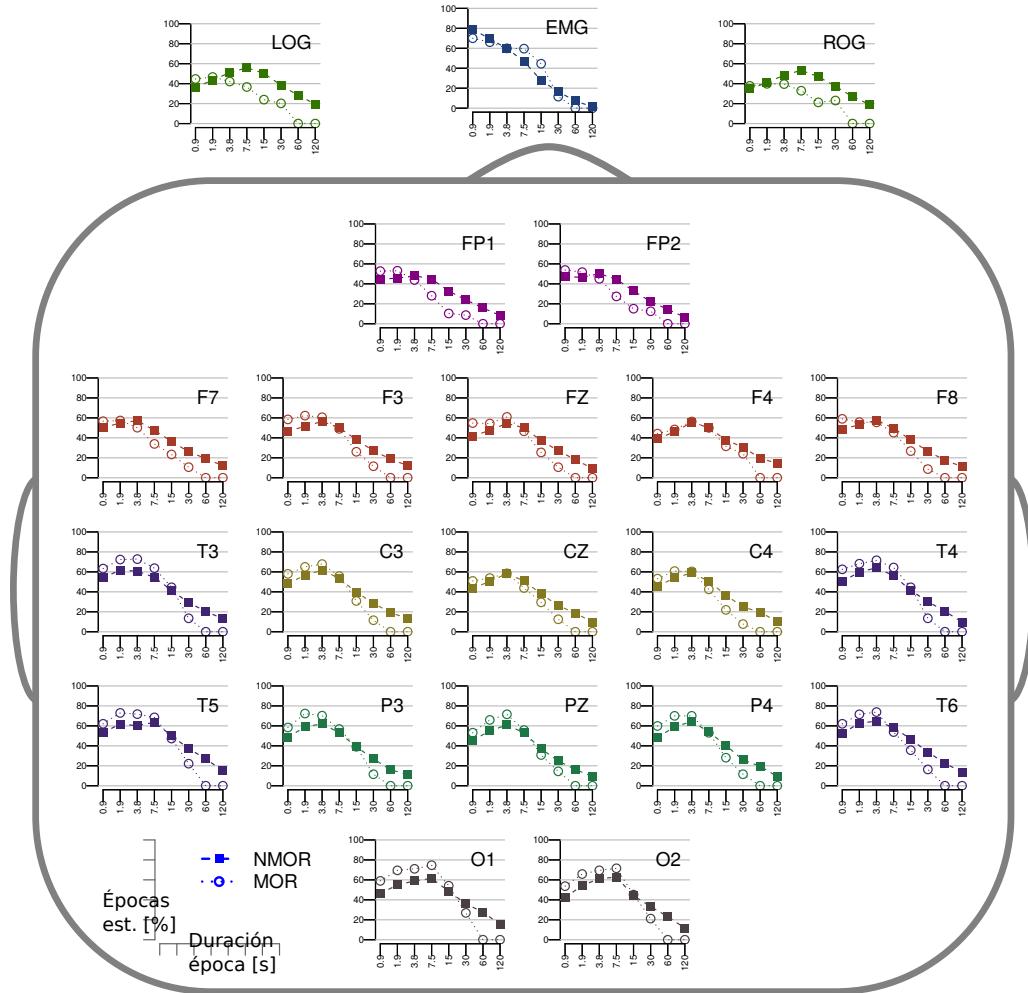


(b) Espectro de potencias de banda ancha



(c) Espectro de potencias y análisis de estacionariedad para los canales LOG, ROG y EMG

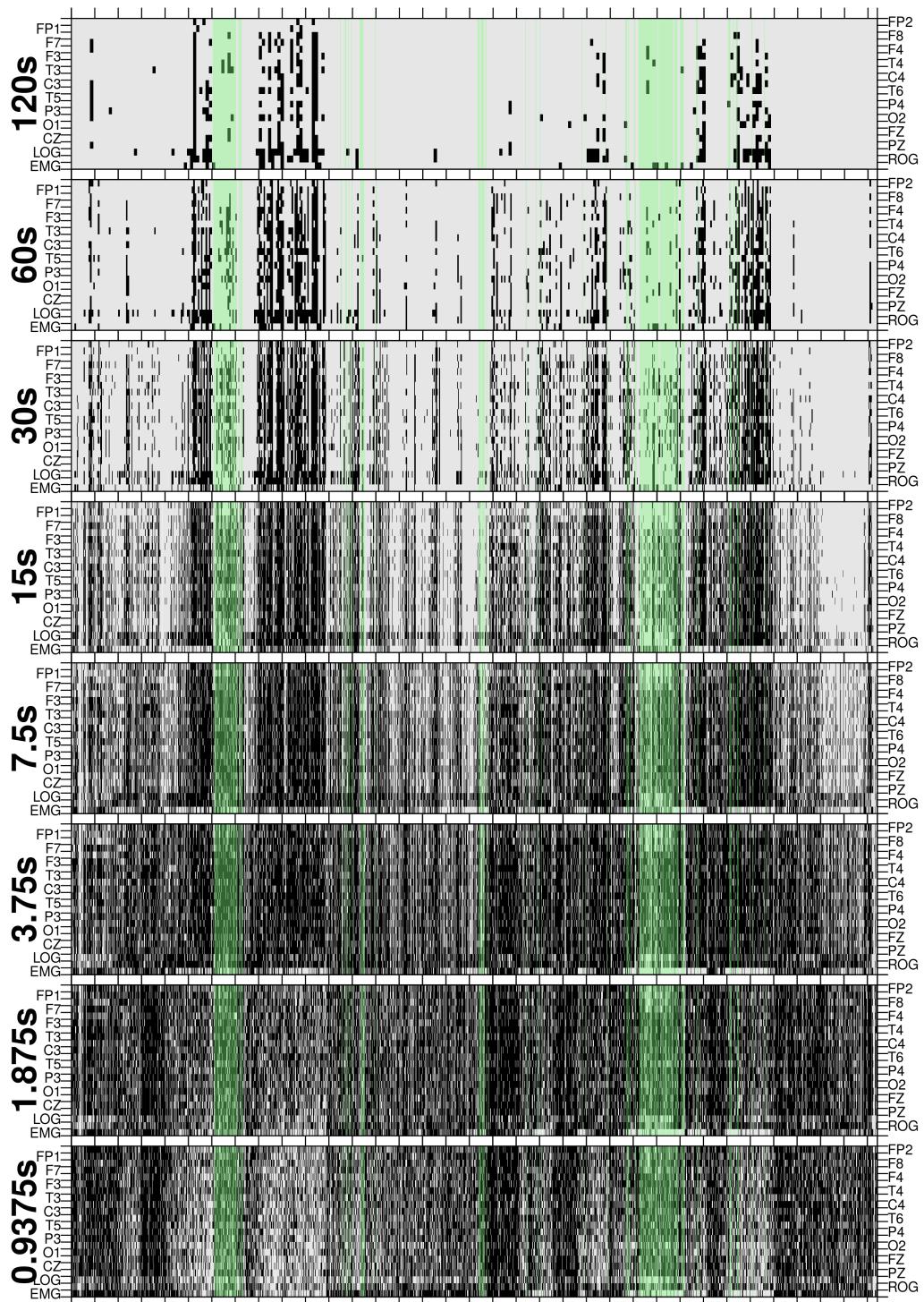
### Sujeto VCR | Grupo Nn



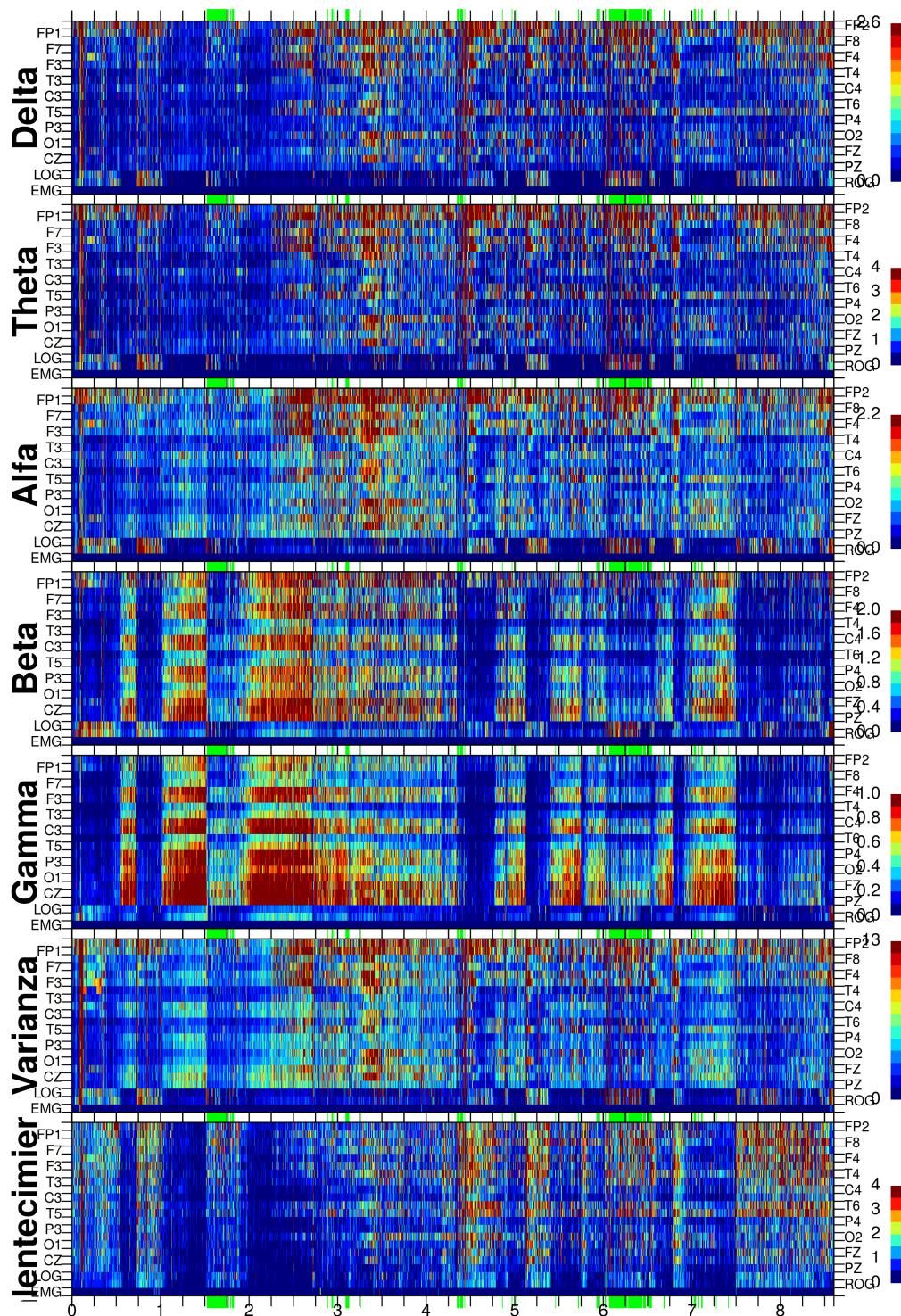
(d) Resumen de épocas estacionarias según tamaño de ventana

**Figura C.2:** Gráficos individuales para el sujeto VCR

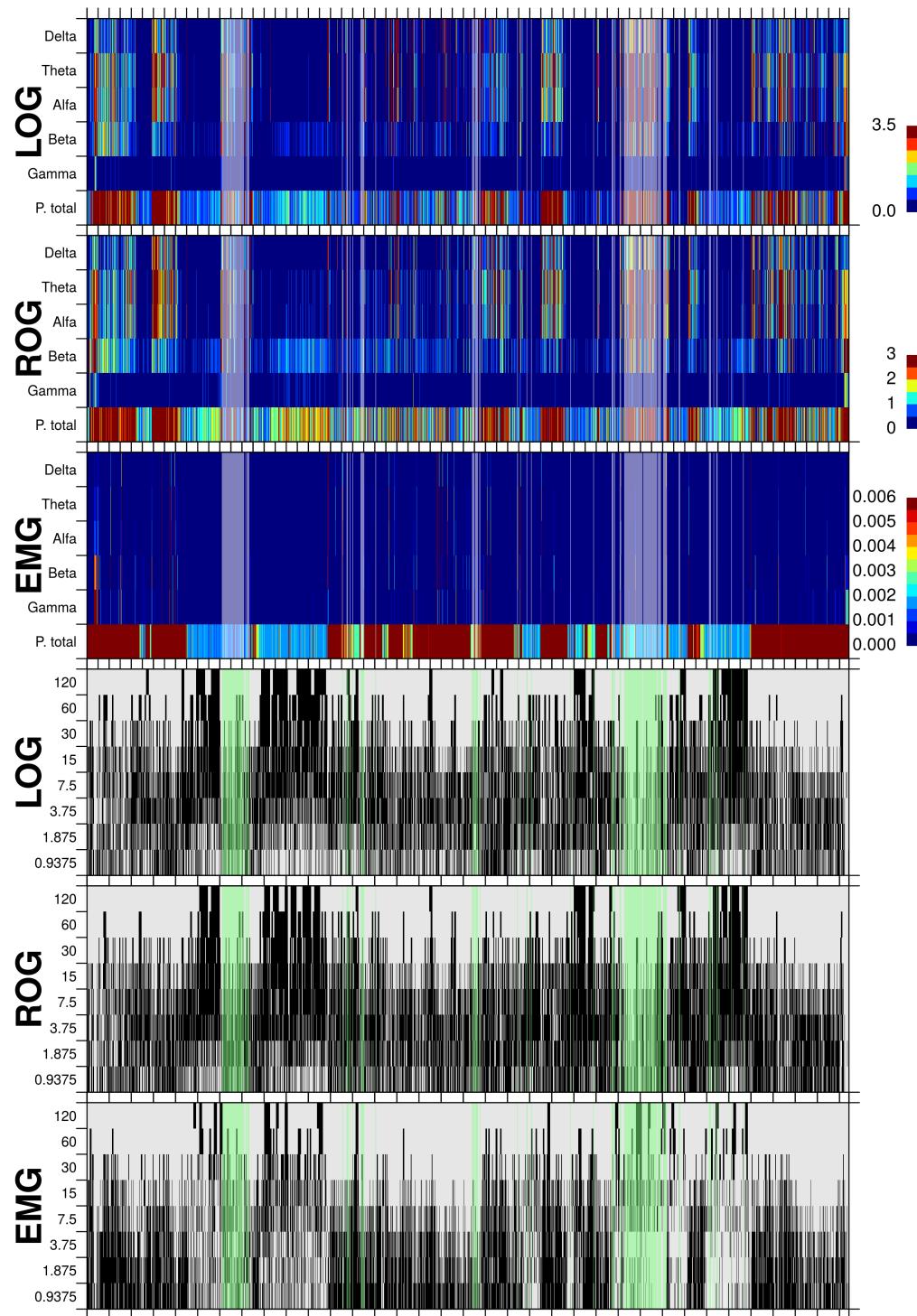
**Sujeto : MJH | Grupo : Nn**



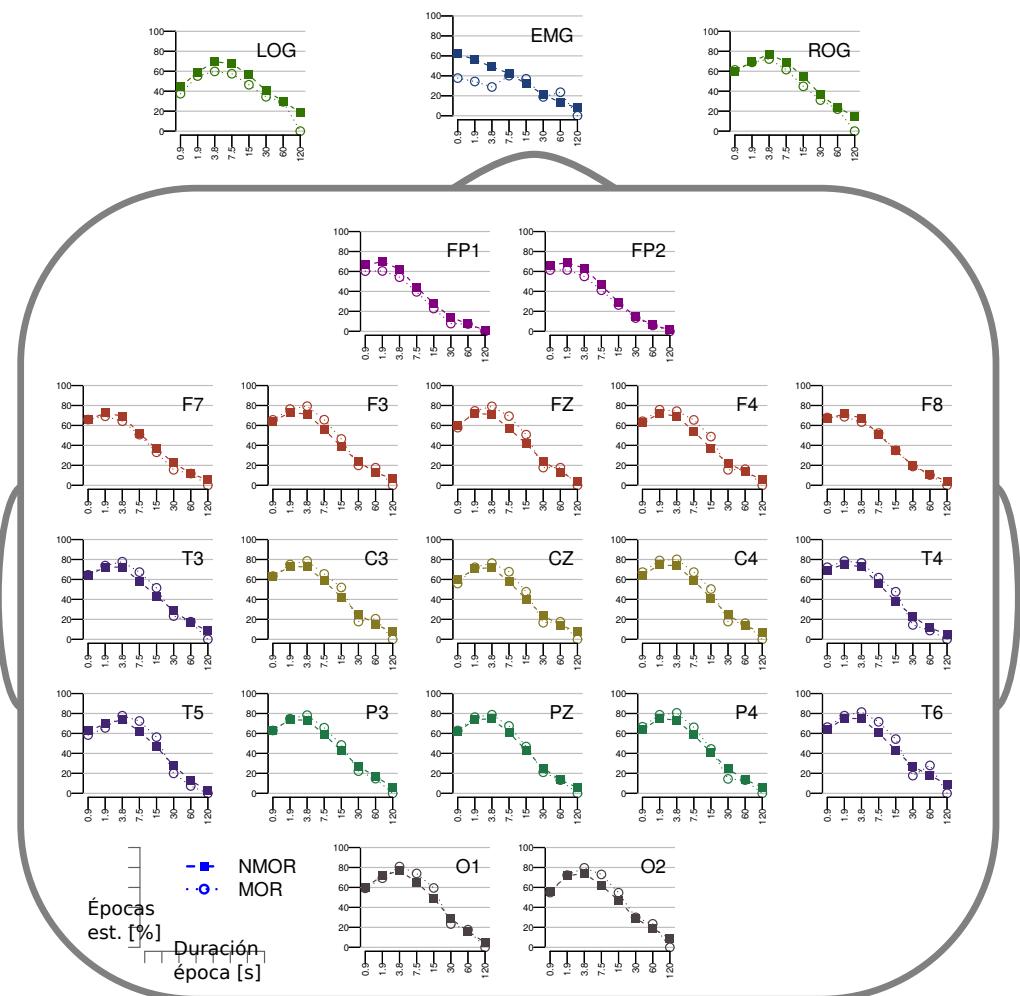
Sujeto : MJH | Grupo : Nn



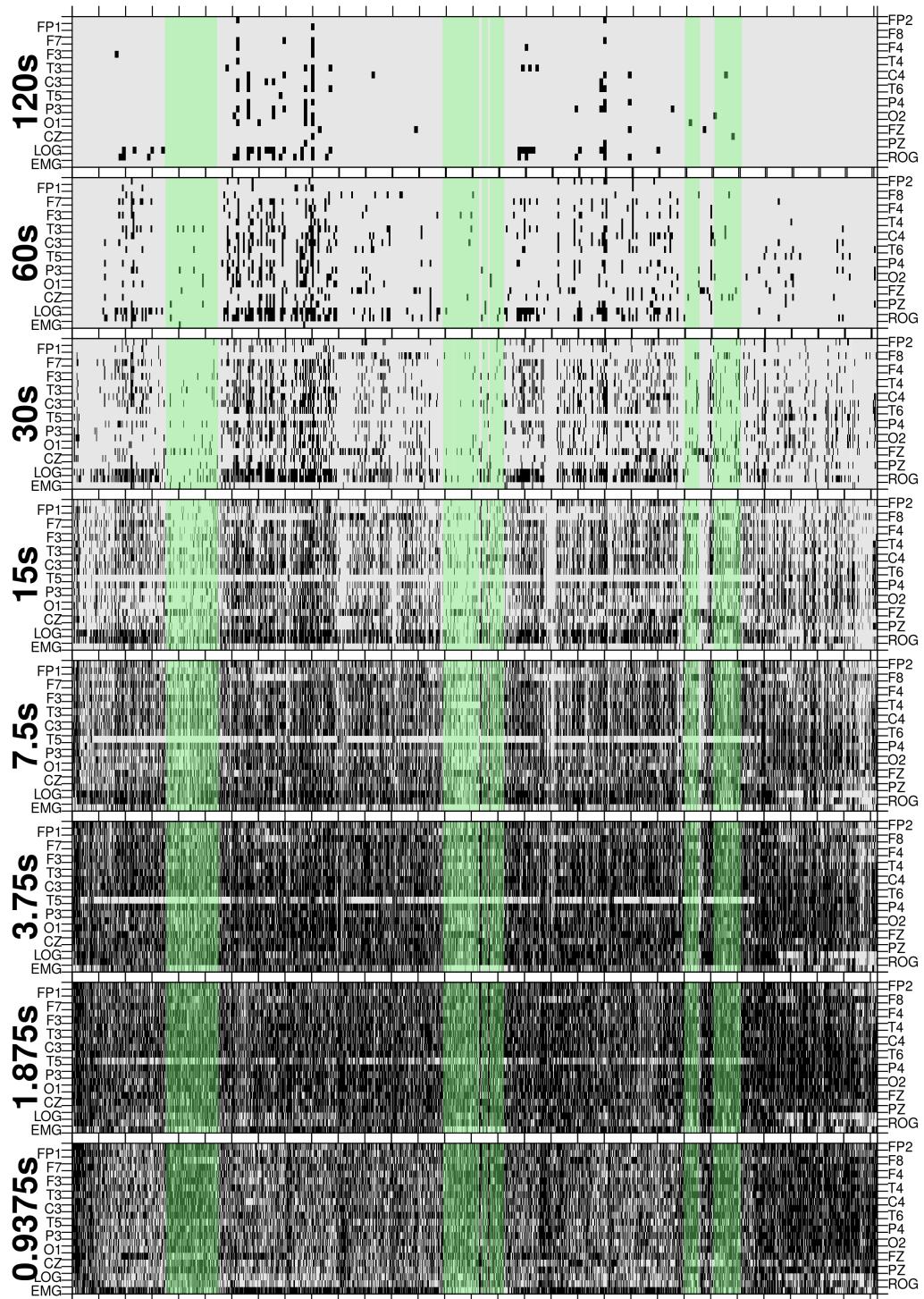
## Sujeto : MJH | Grupo : Nn



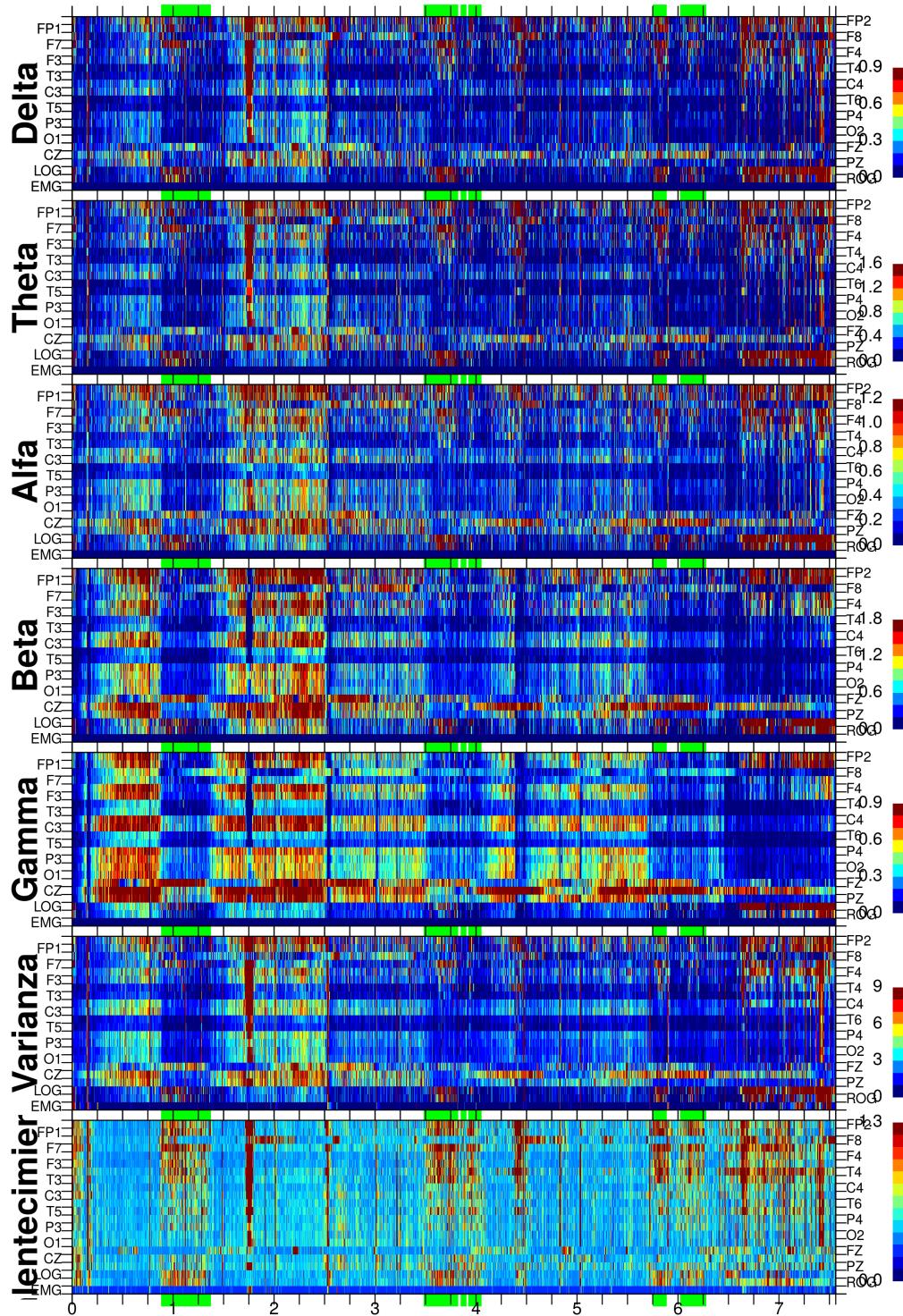
## Sujeto MJH | Grupo Nn



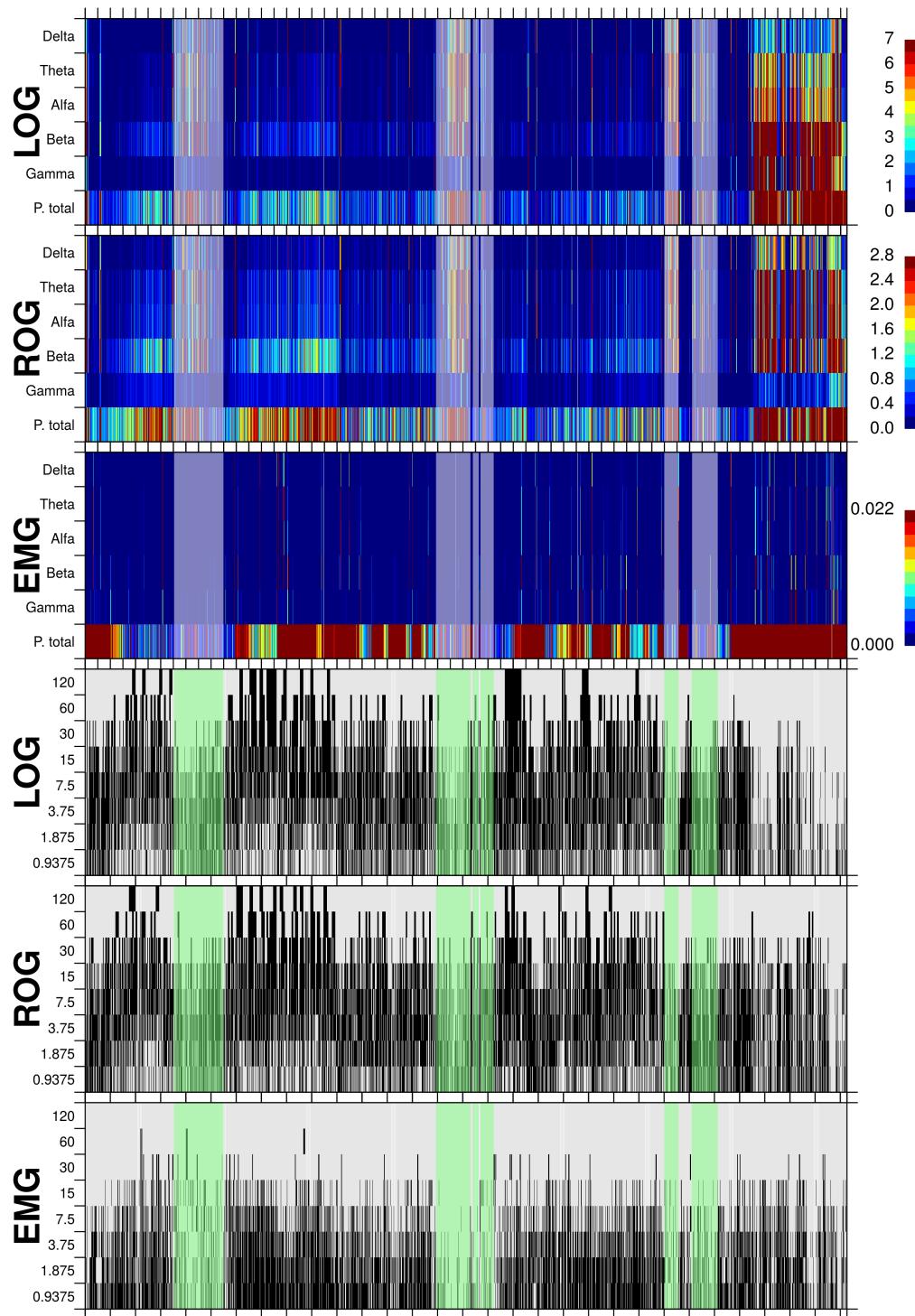
**Sujeto : JAE | Grupo : Nn**



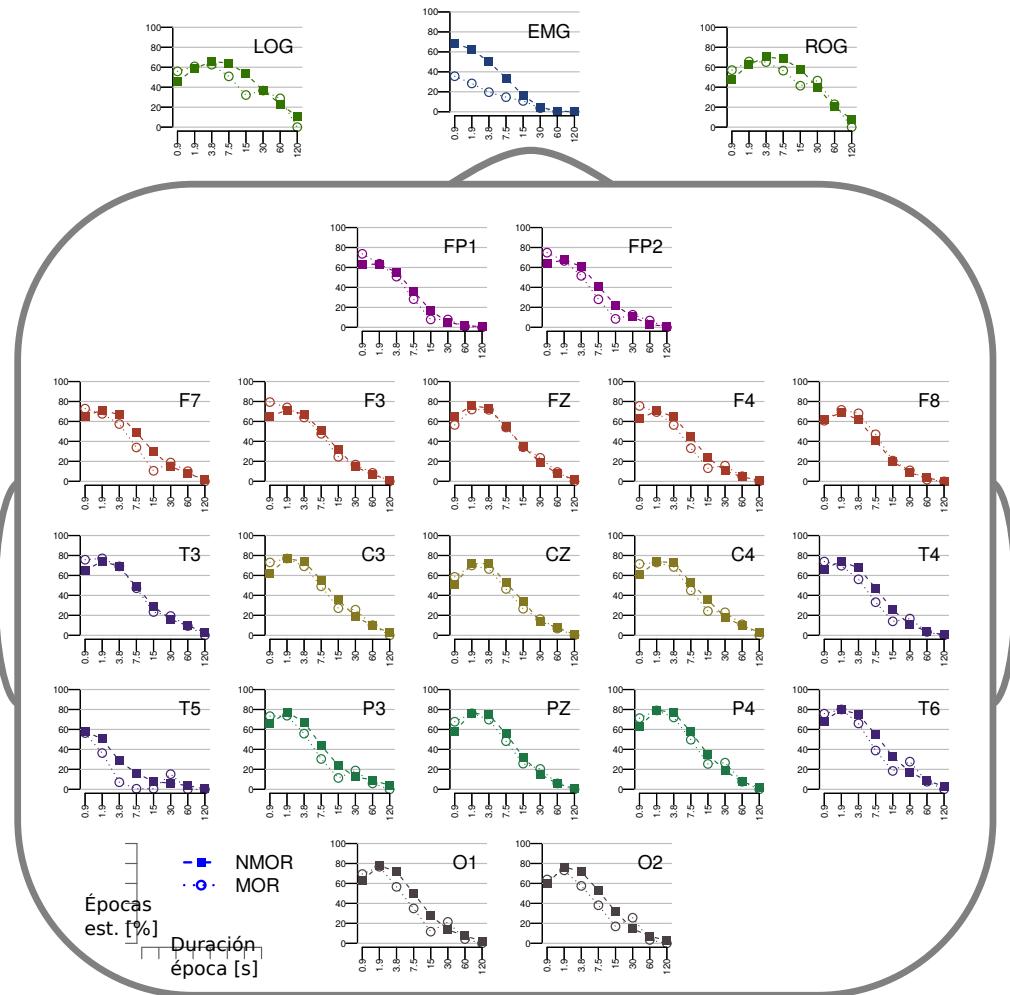
Sujeto : JAE | Grupo : Nn



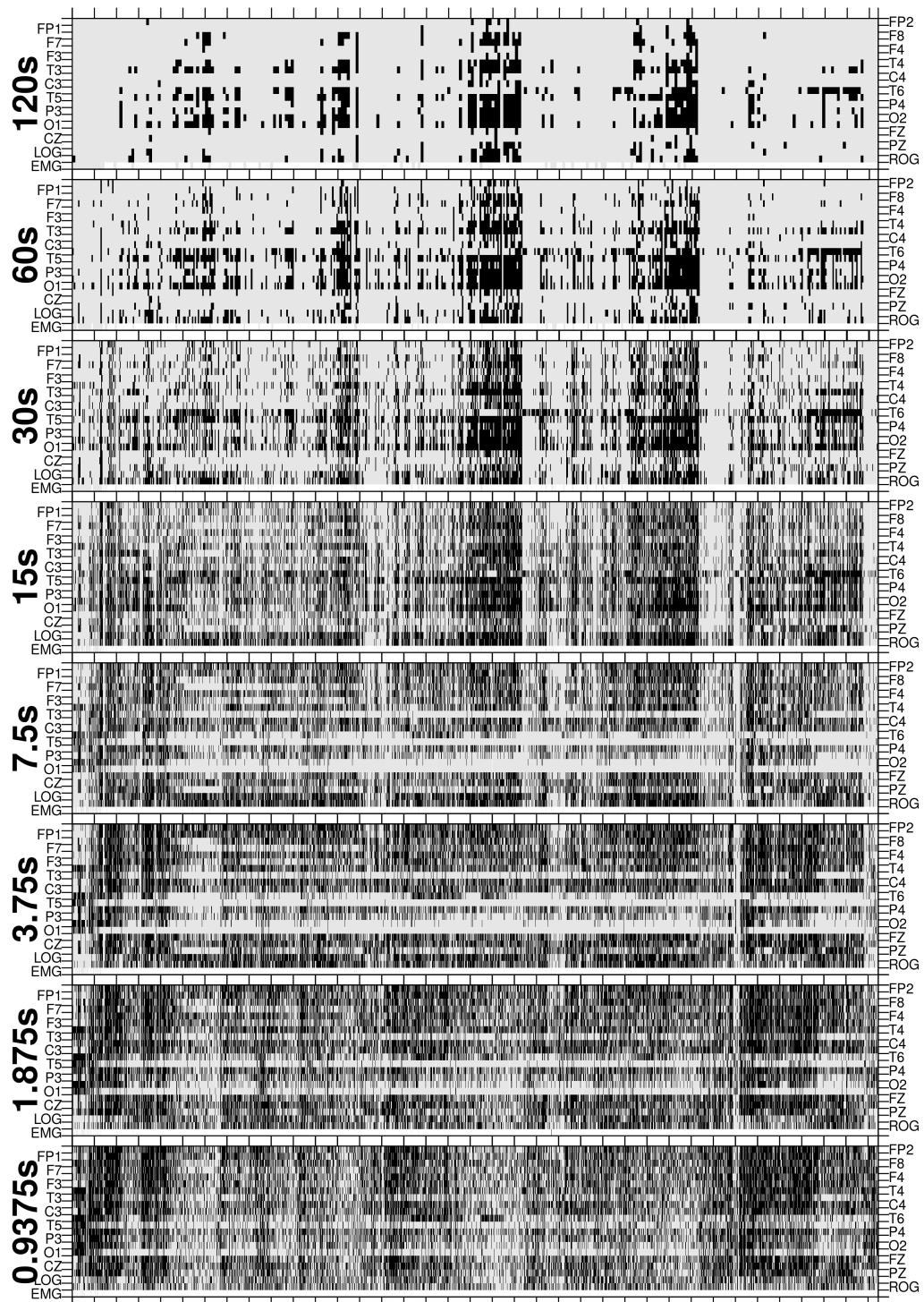
**Sujeto : JAE | Grupo : Nn**



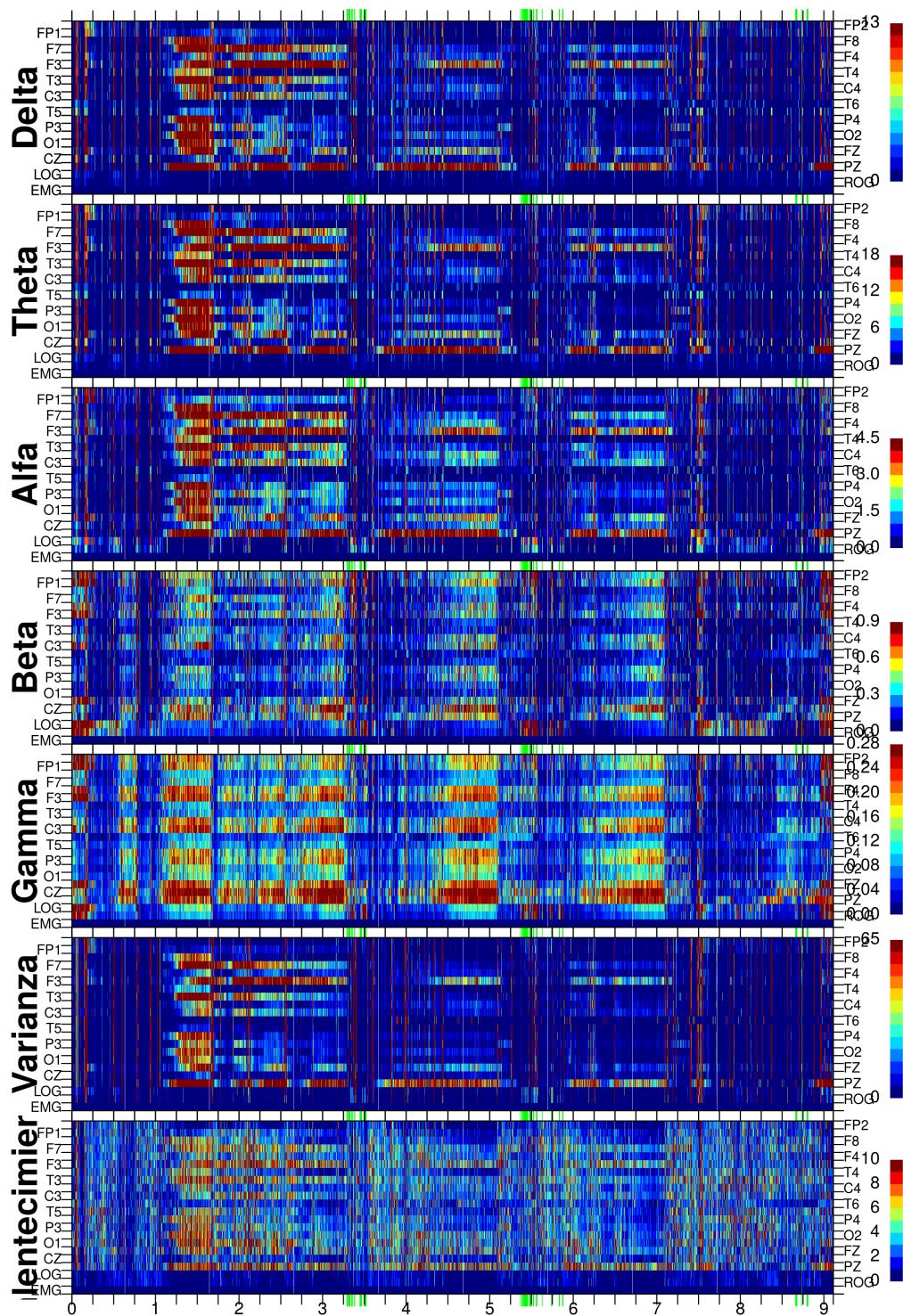
## Sujeto JAE | Grupo Nn



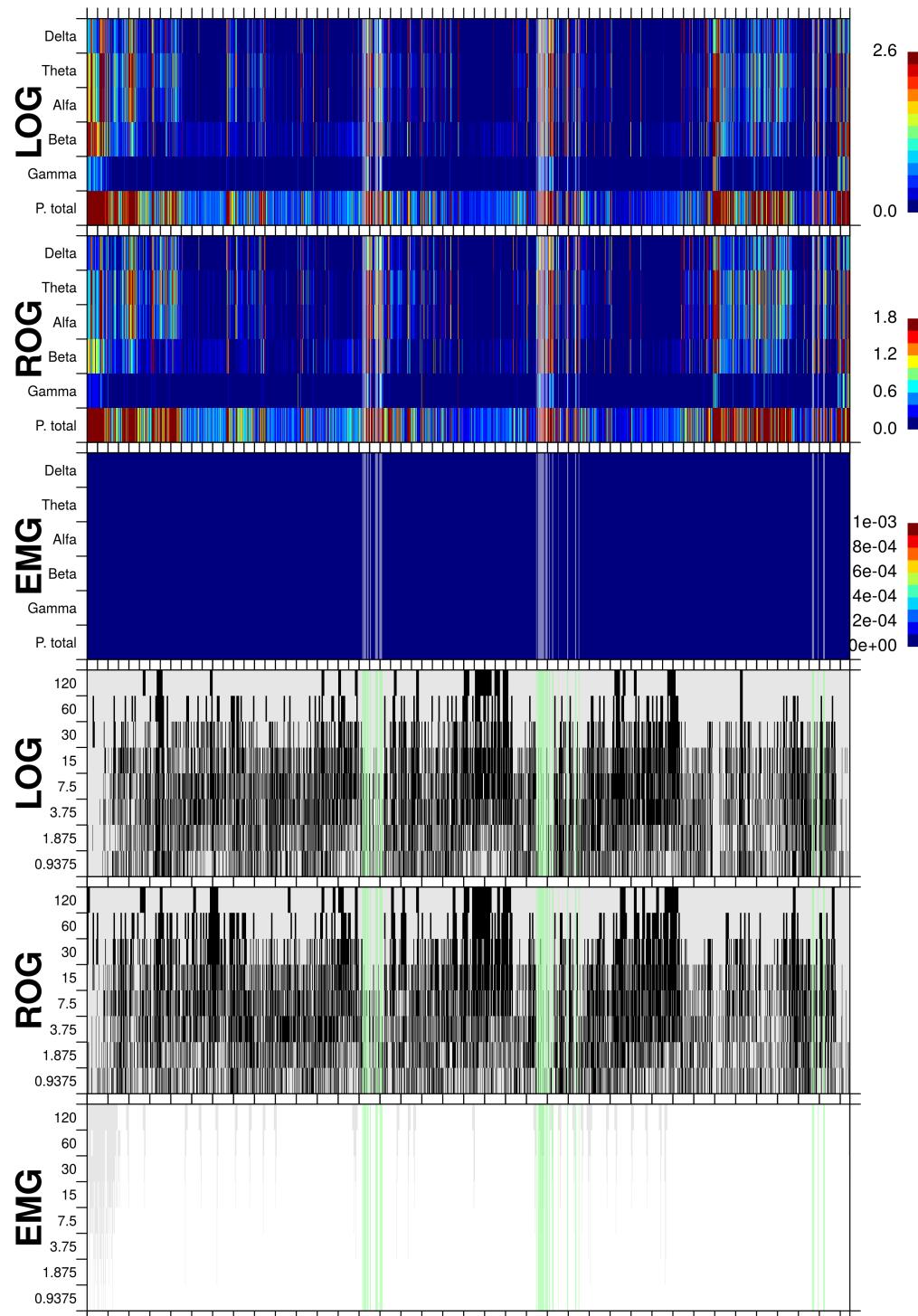
**Sujeto : GHA | Grupo : Nn**



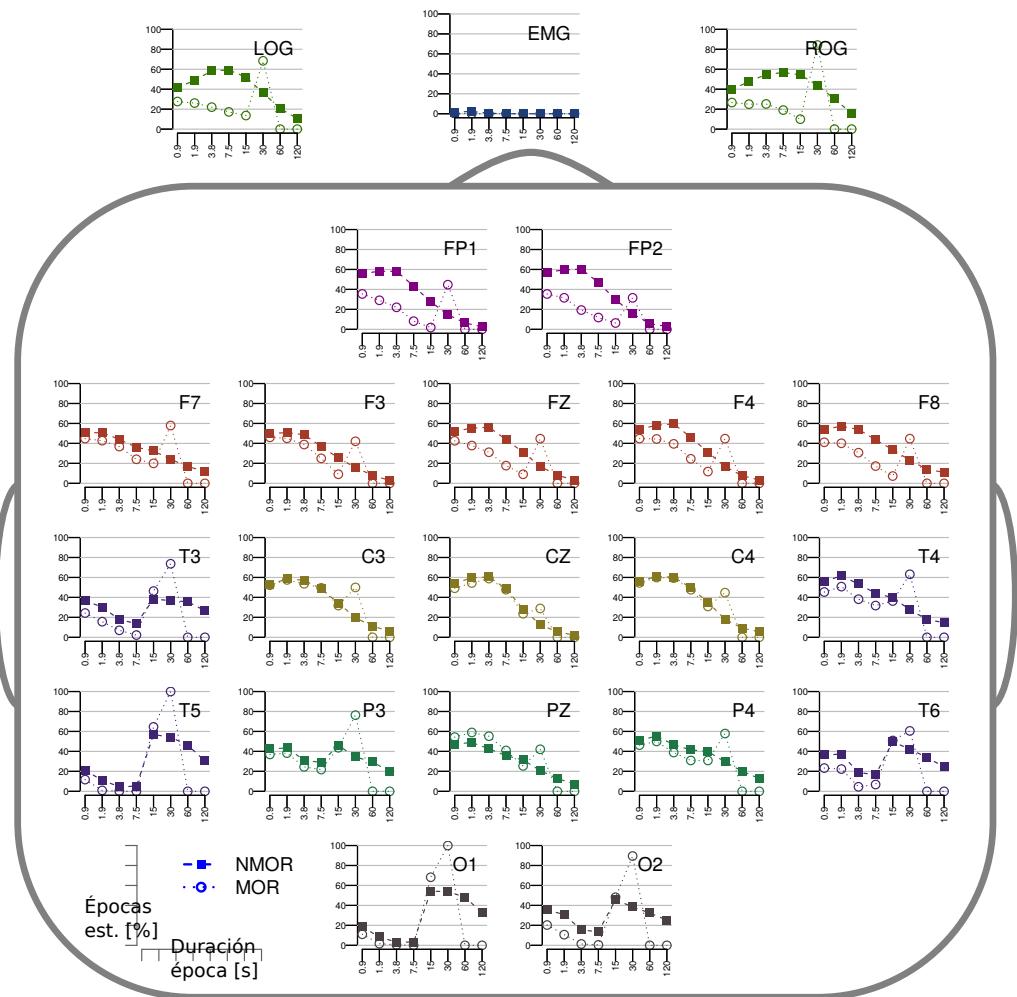
Sujeto : GHA | Grupo : Nn



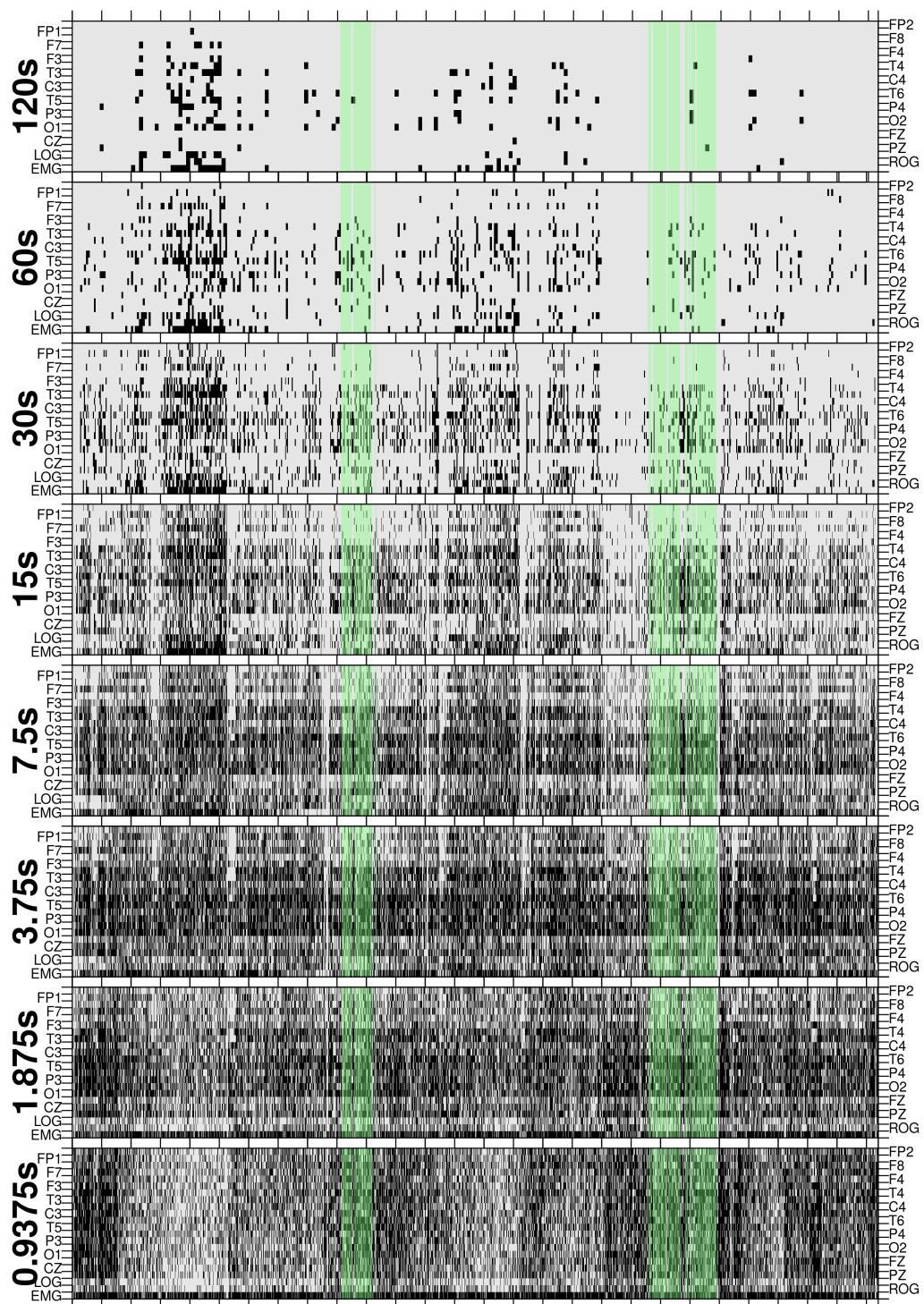
## Sujeto : GHA | Grupo : Nn



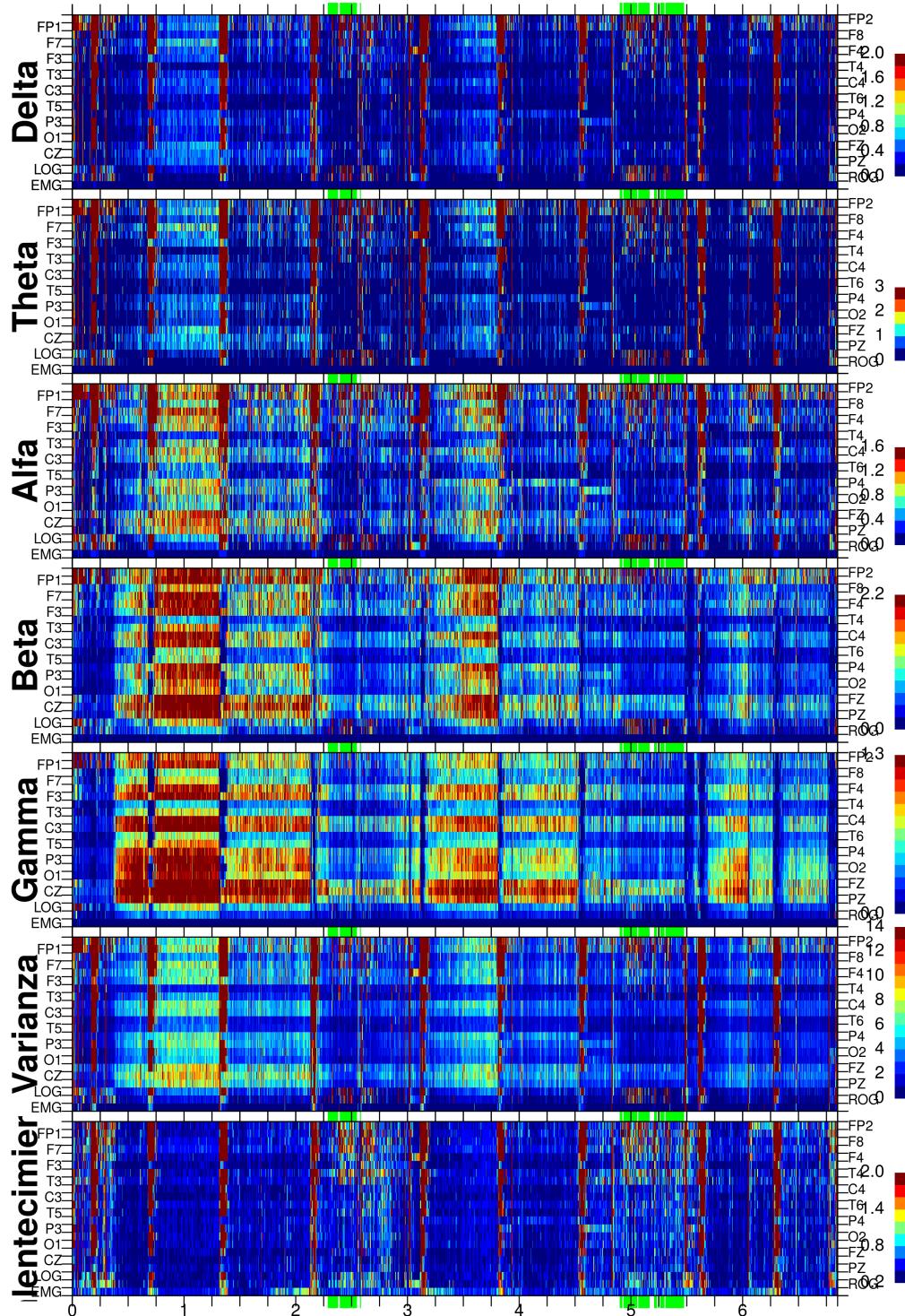
## Sujeto GHA | Grupo Nn



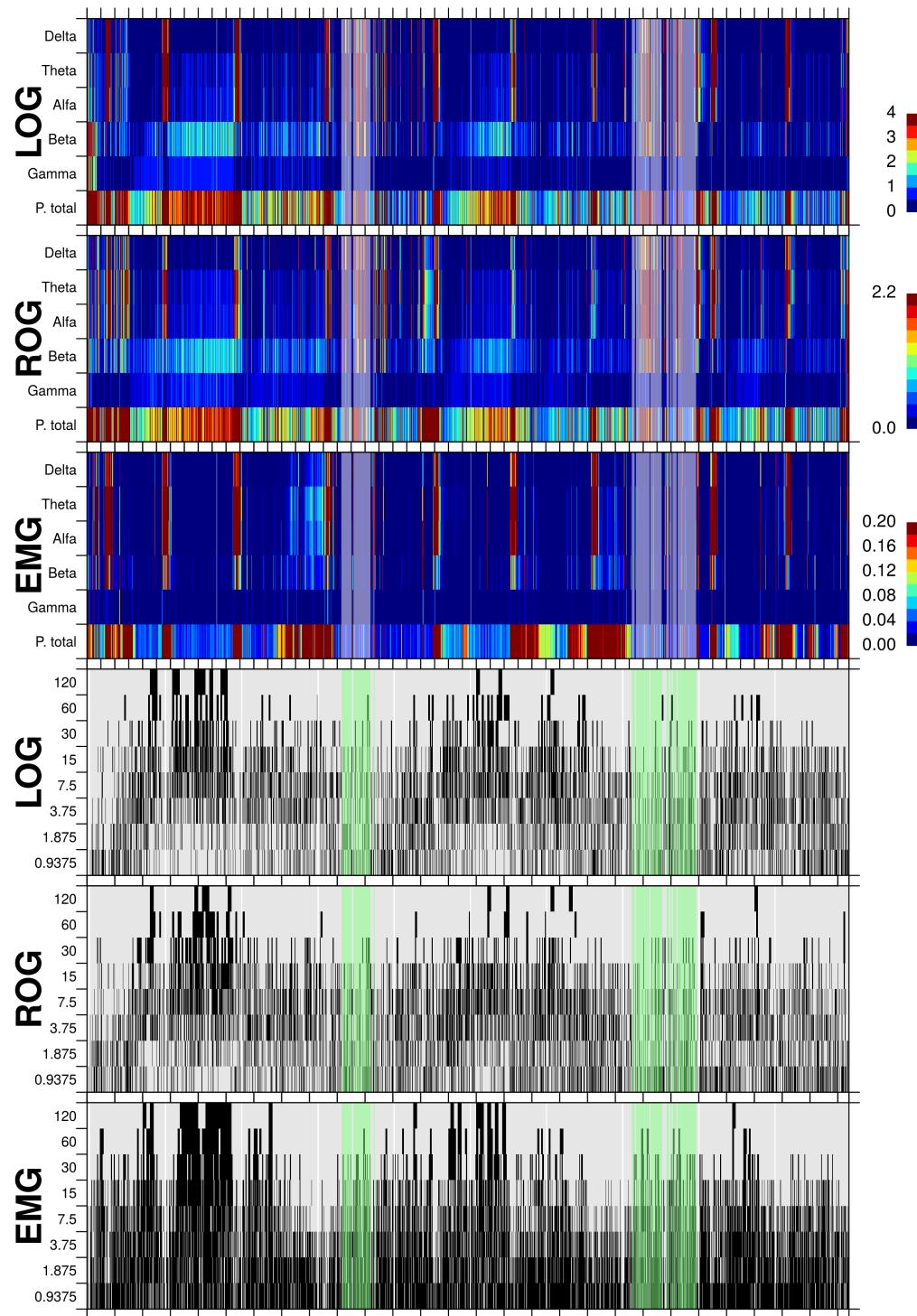
**Sujeto : MFGR | Grupo : Nn**



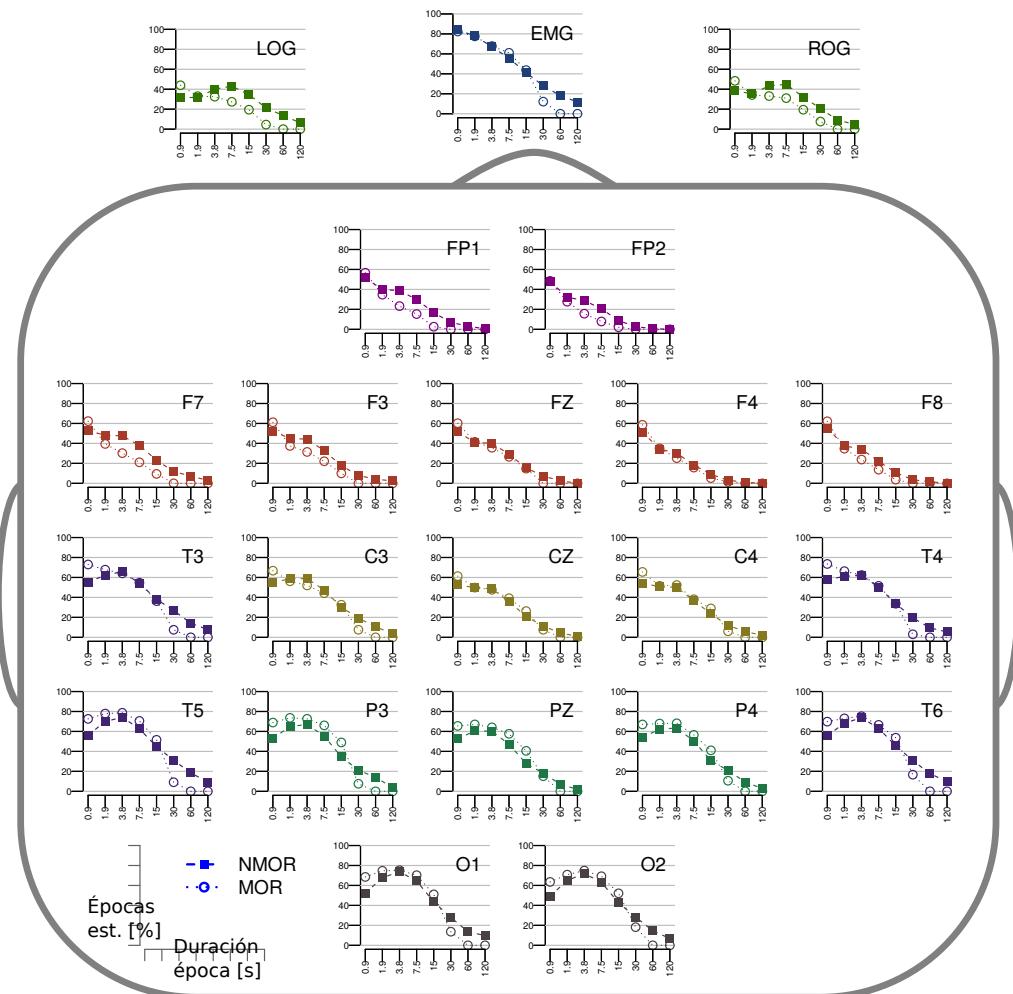
Sujeto : MFGR | Grupo : Nn



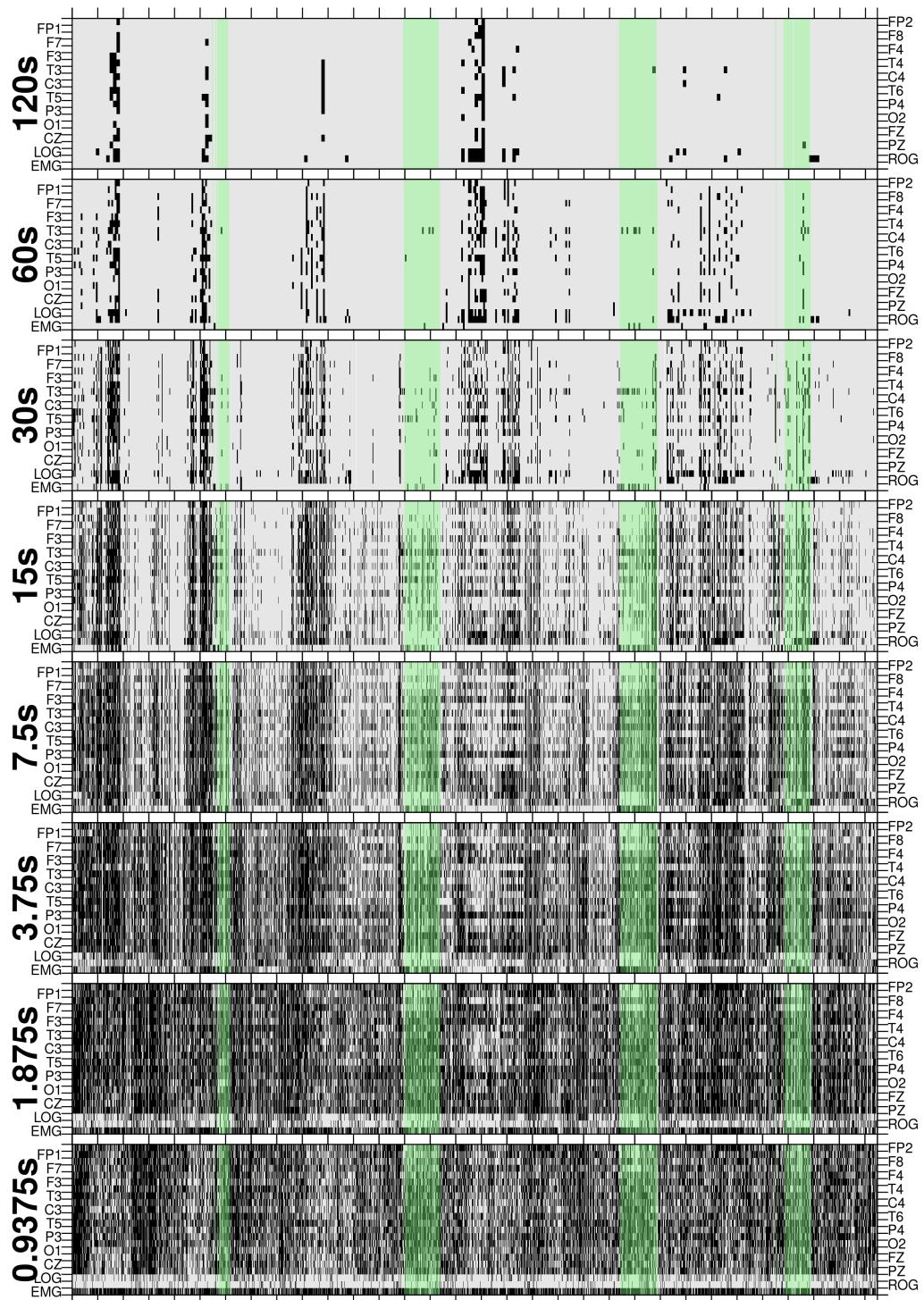
## Sujeto : MFGR | Grupo : Nn



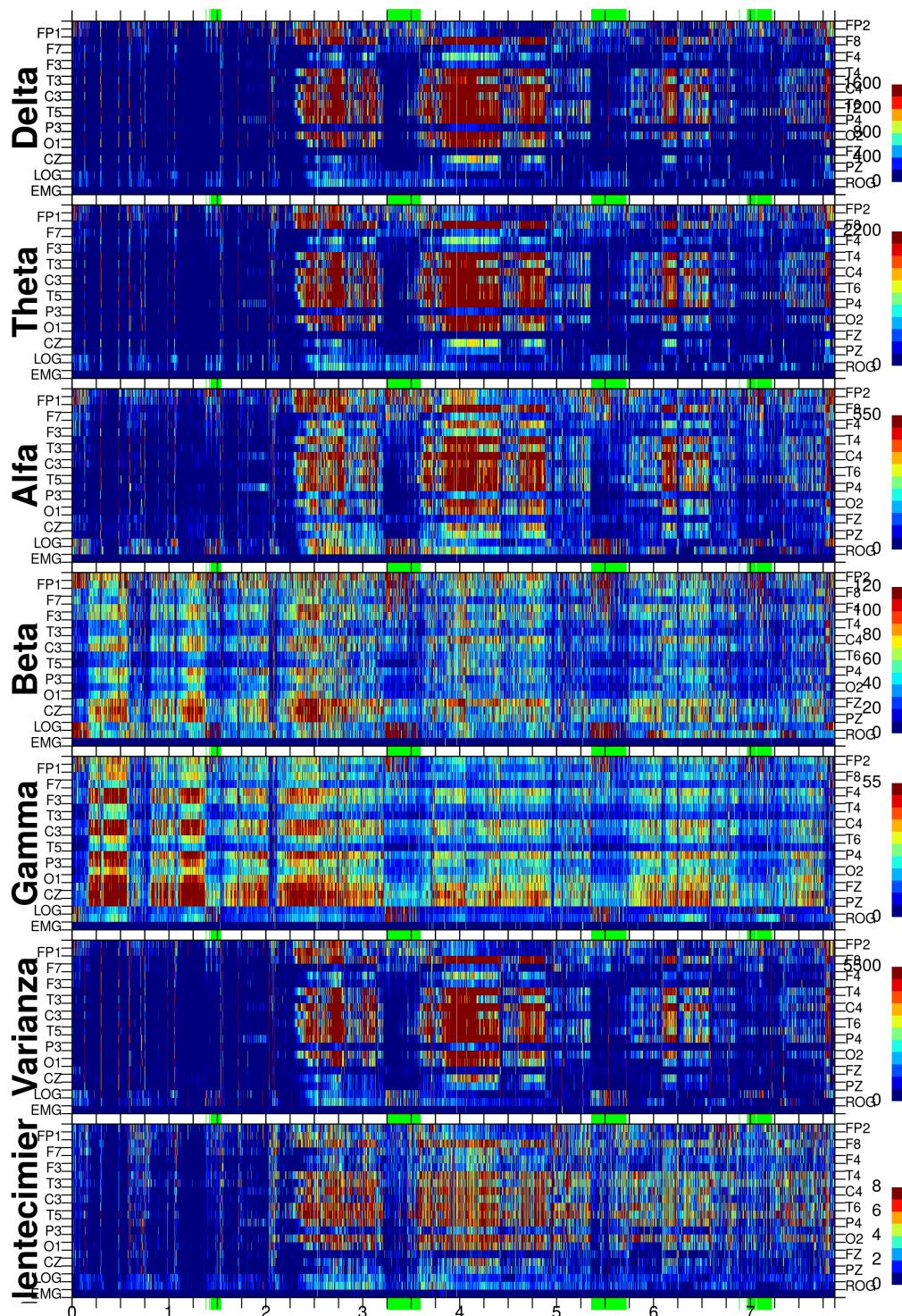
## Sujeto MFGR | Grupo Nn



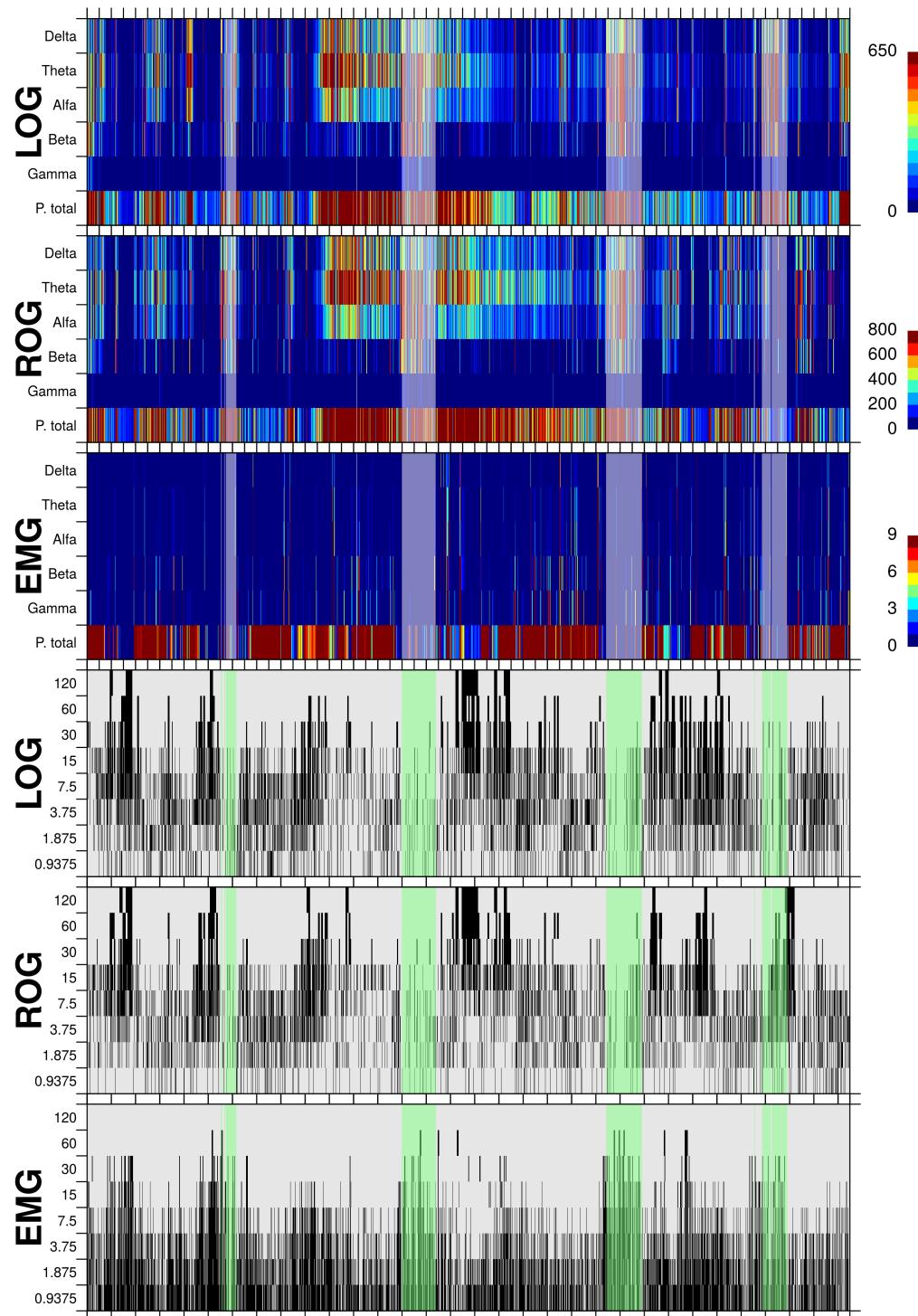
**Sujeto : CLO | Grupo : Mn**



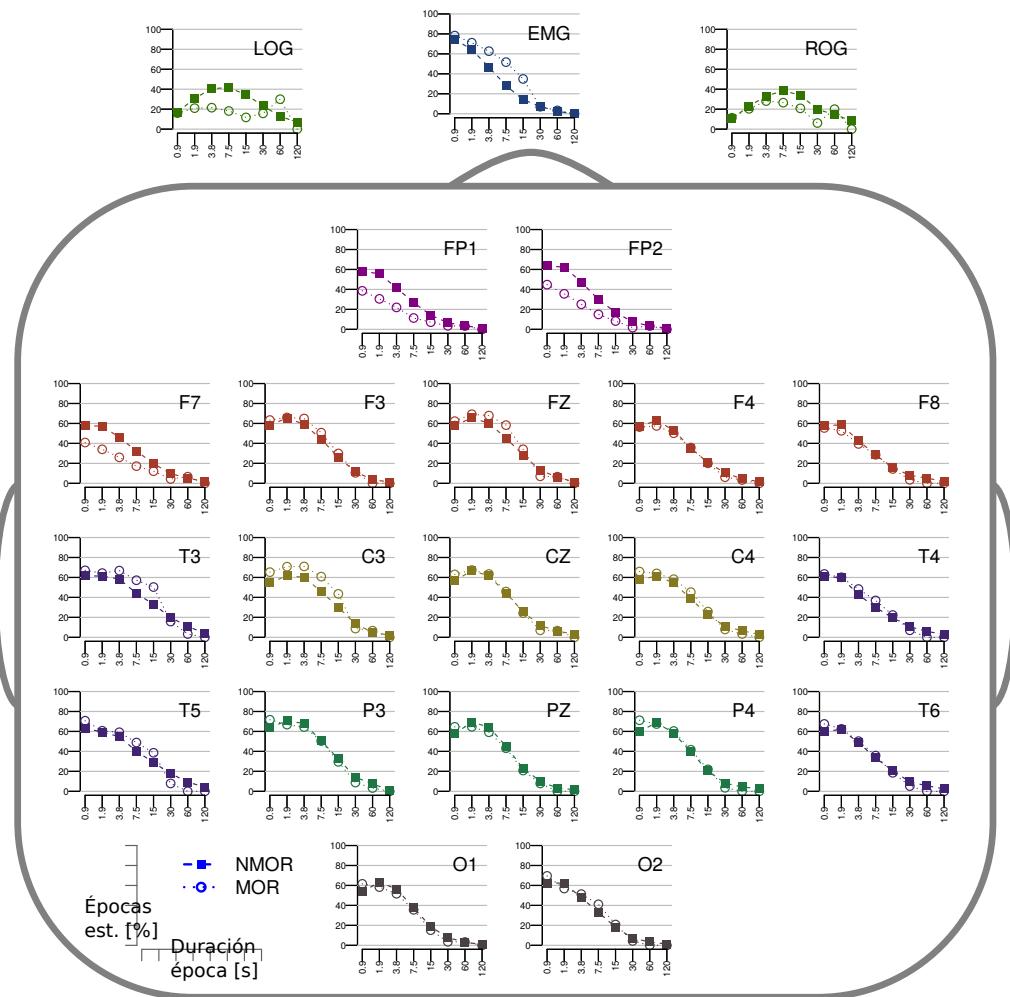
Sujeto : CLO | Grupo : Mn



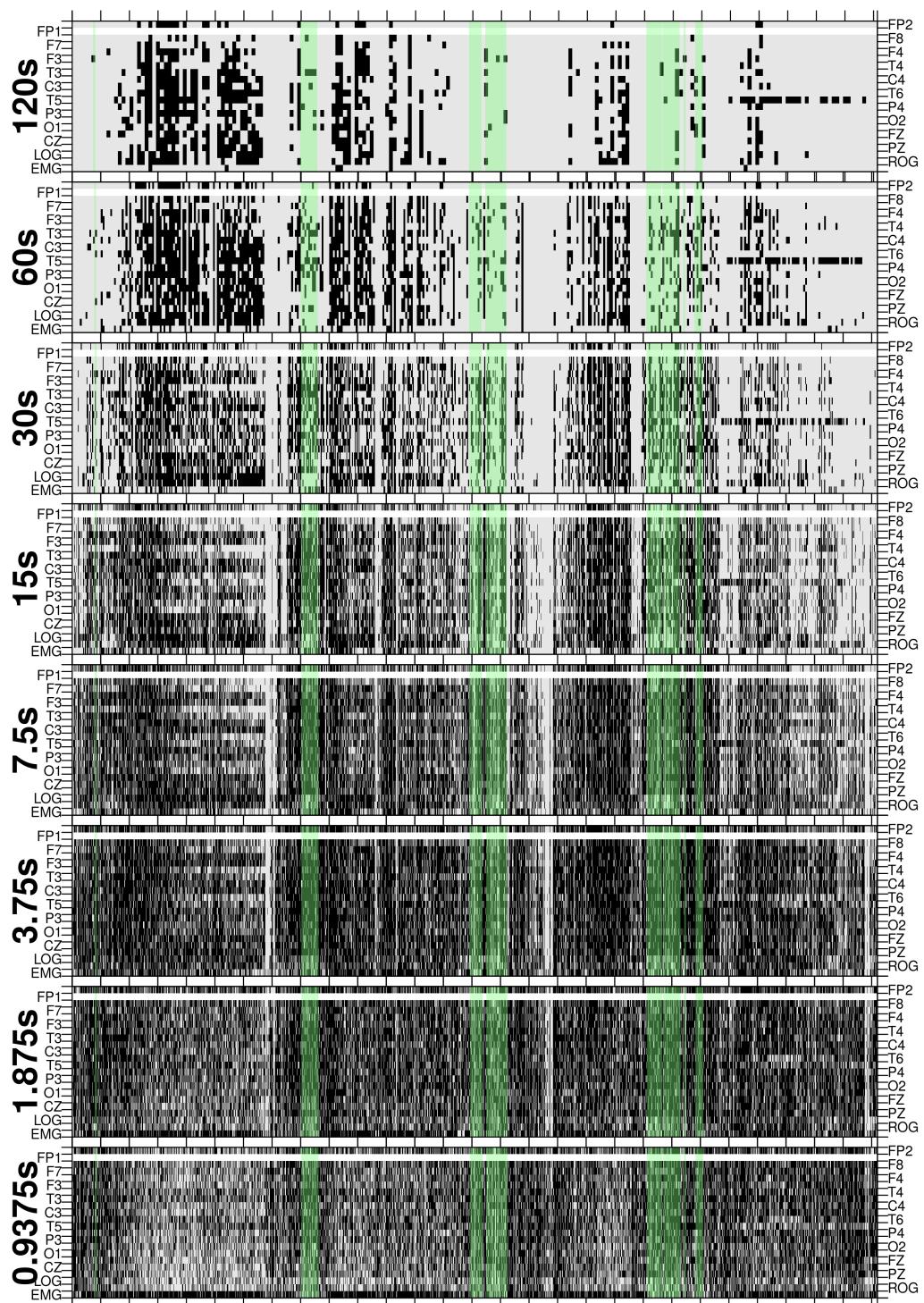
## Sujeto : CLO | Grupo : Mn



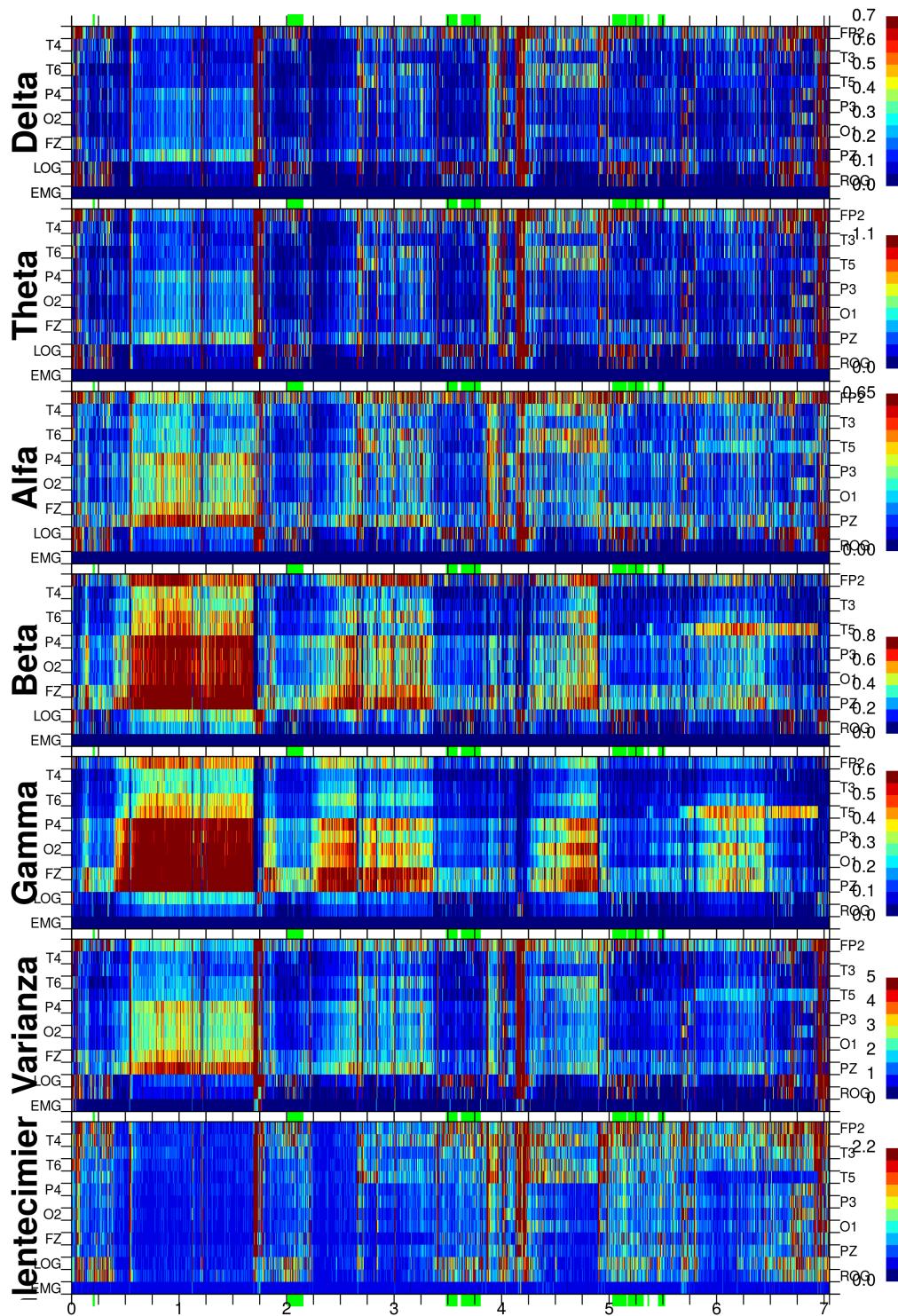
### Sujeto CLO | Grupo Mn



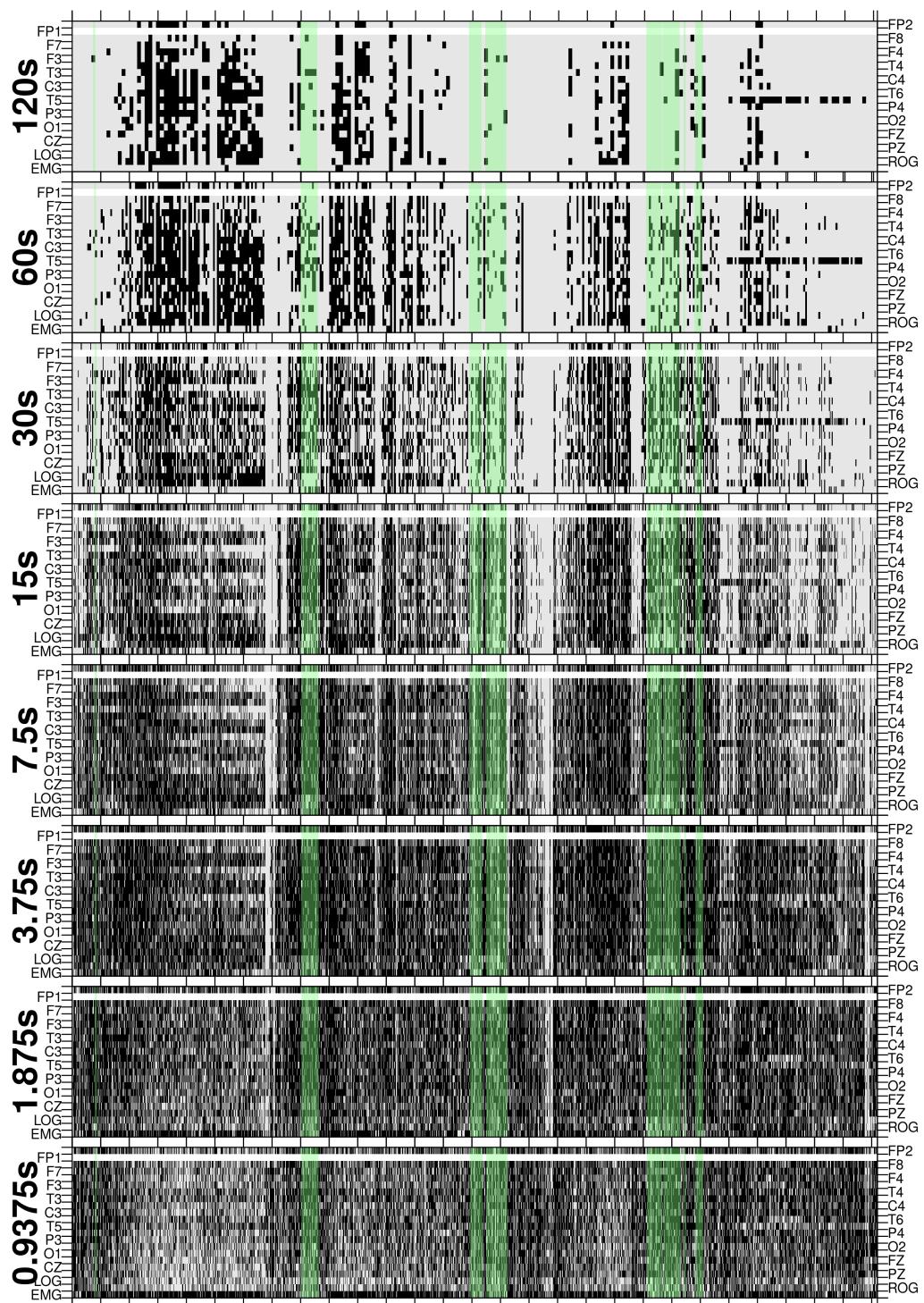
**Sujeto : RLO | Grupo : Mn**



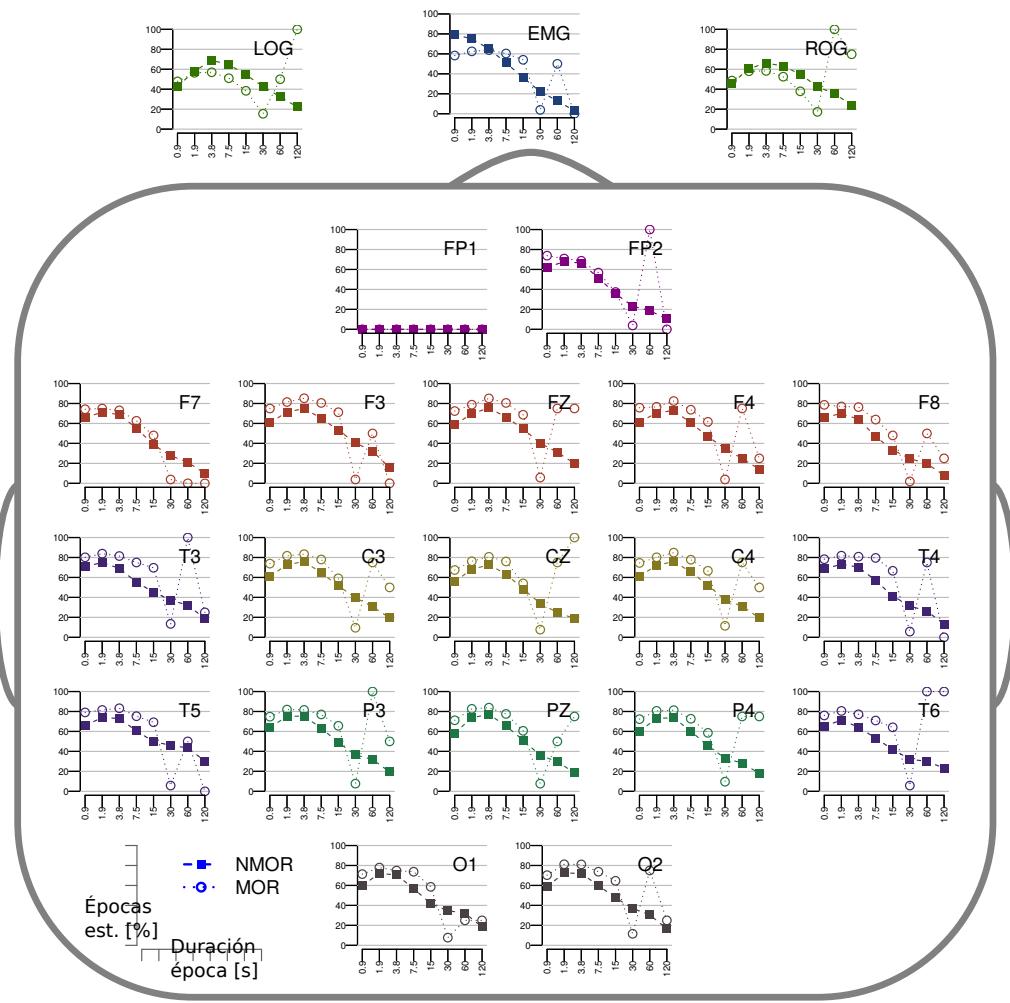
Sujeto : RLO | Grupo : Mn



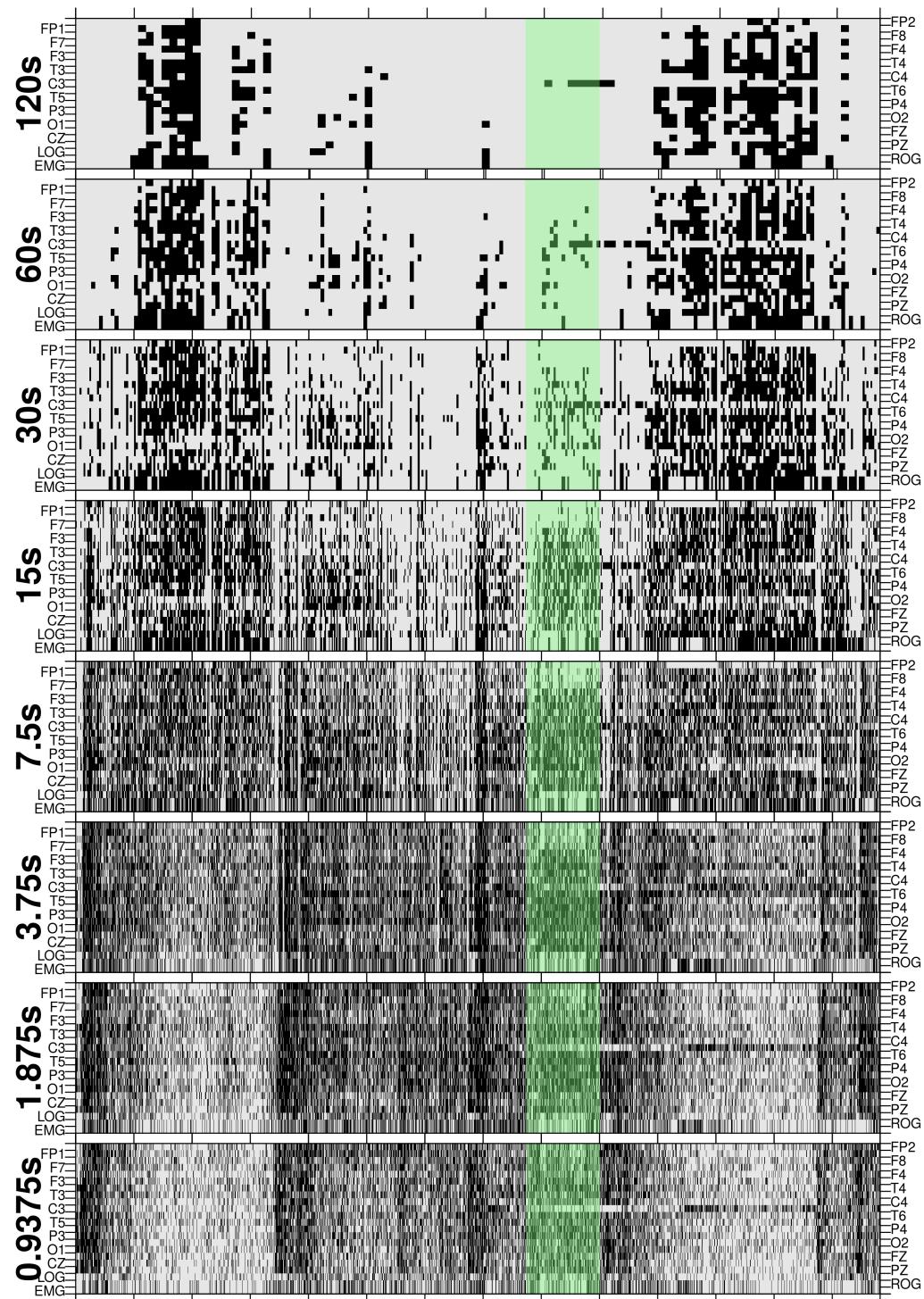
**Sujeto : RLO | Grupo : Mn**



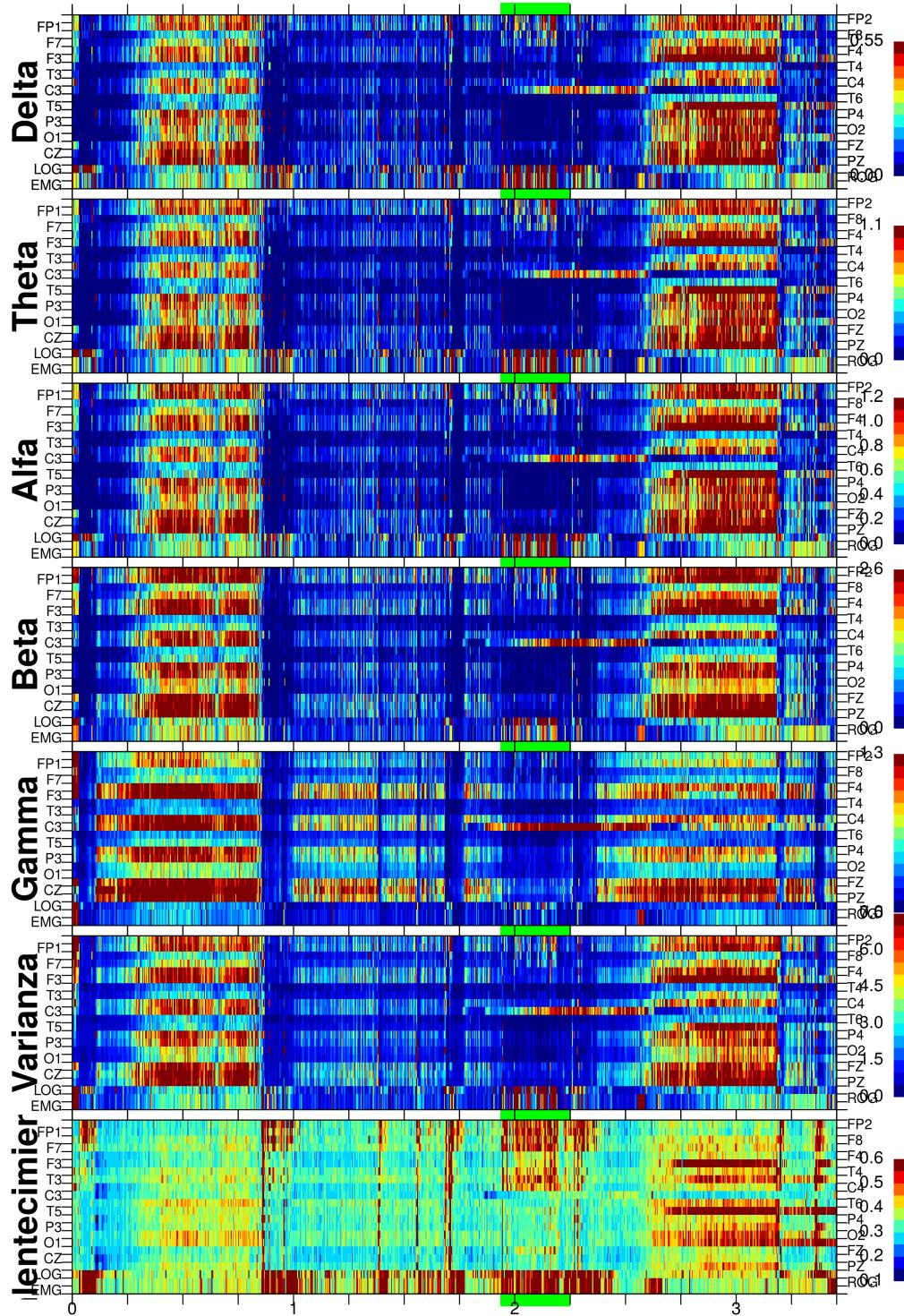
## Sujeto RLO | Grupo Mn



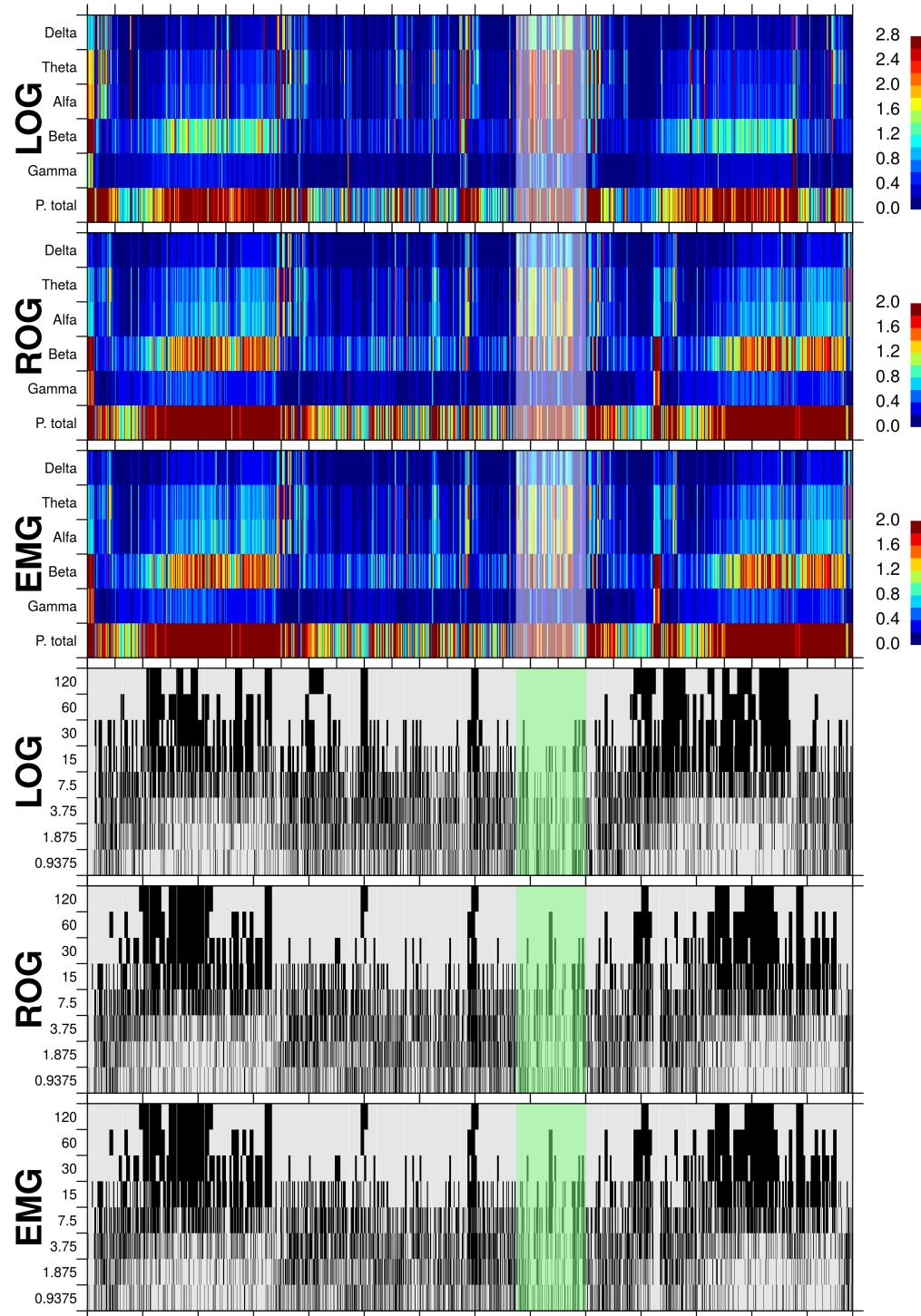
Sujeto : RRU | Grupo : Mn



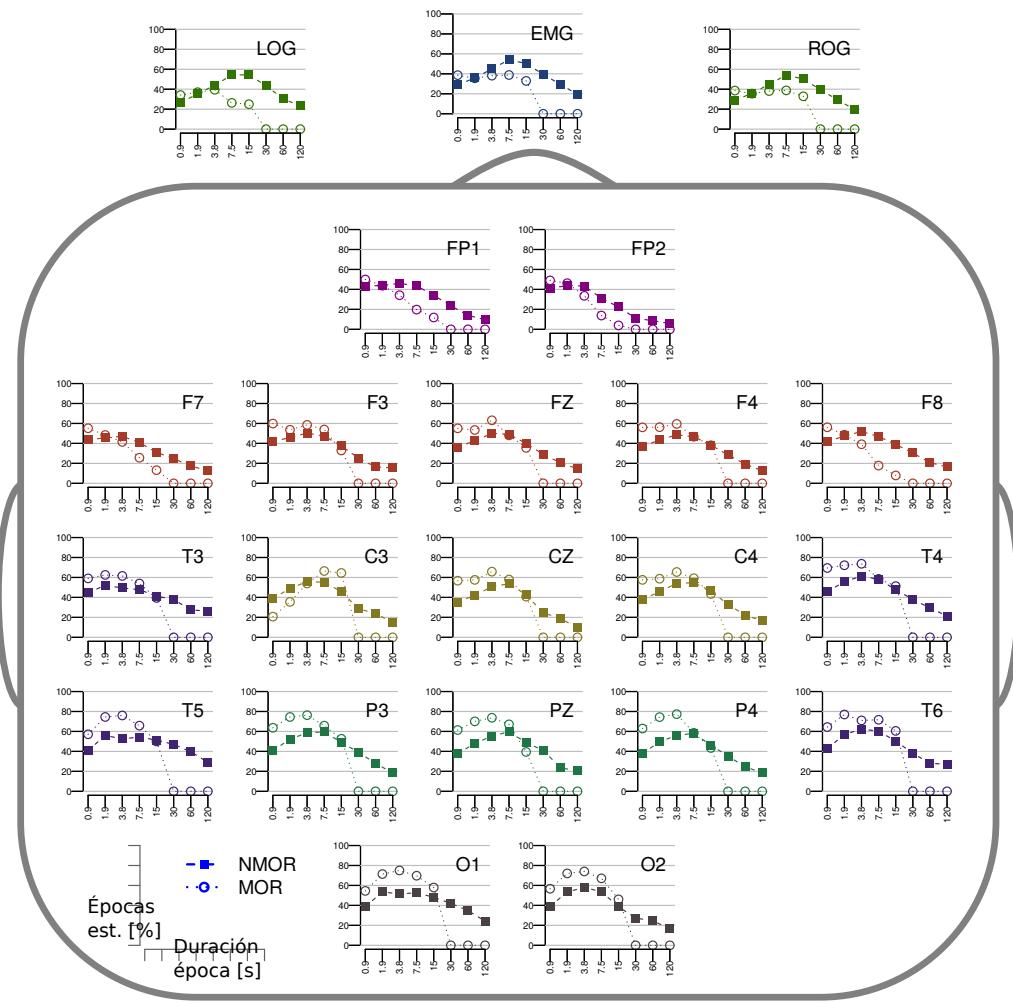
Sujeto : RRU | Grupo : Mn



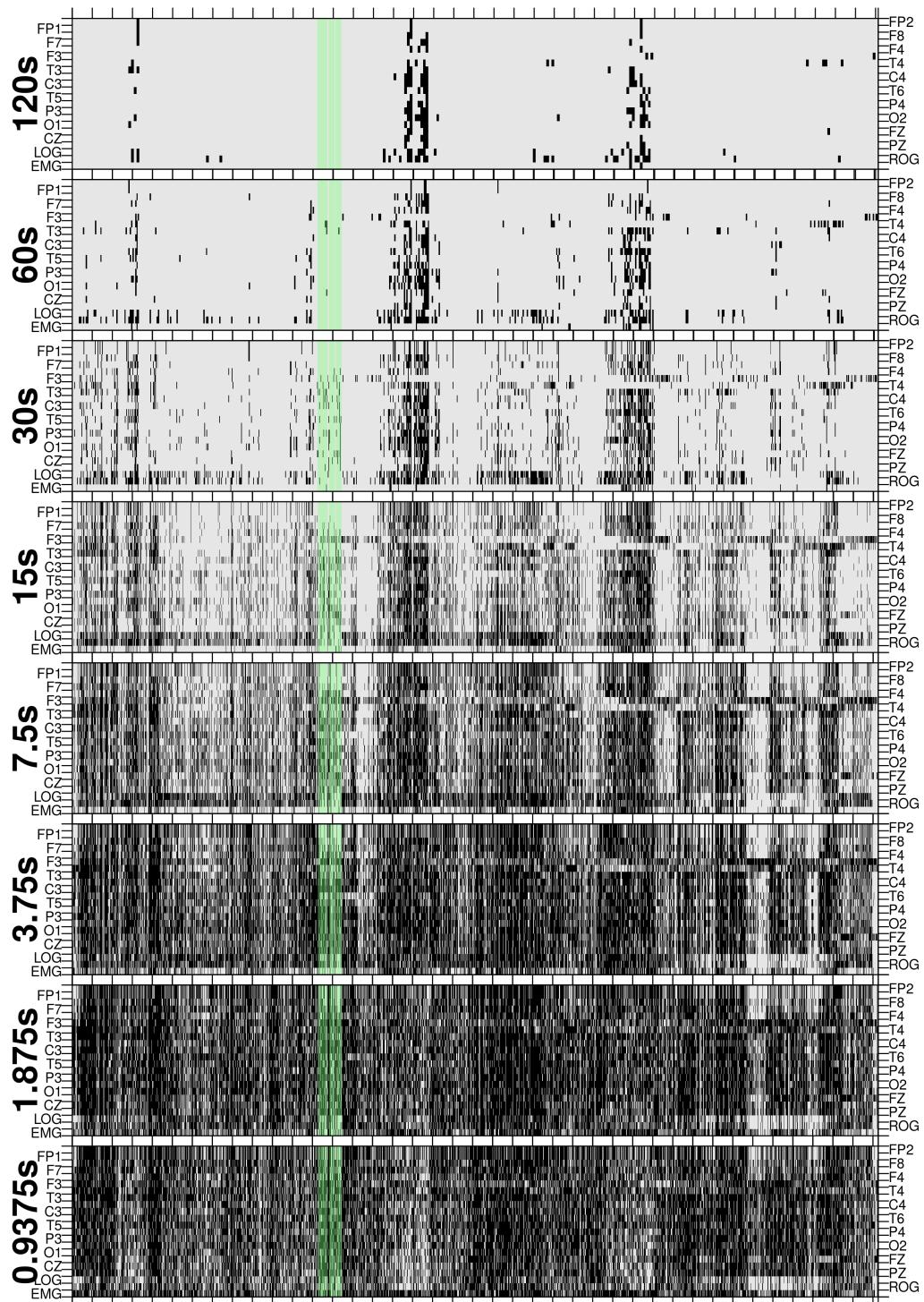
## Sujeto : RRU | Grupo : Mn



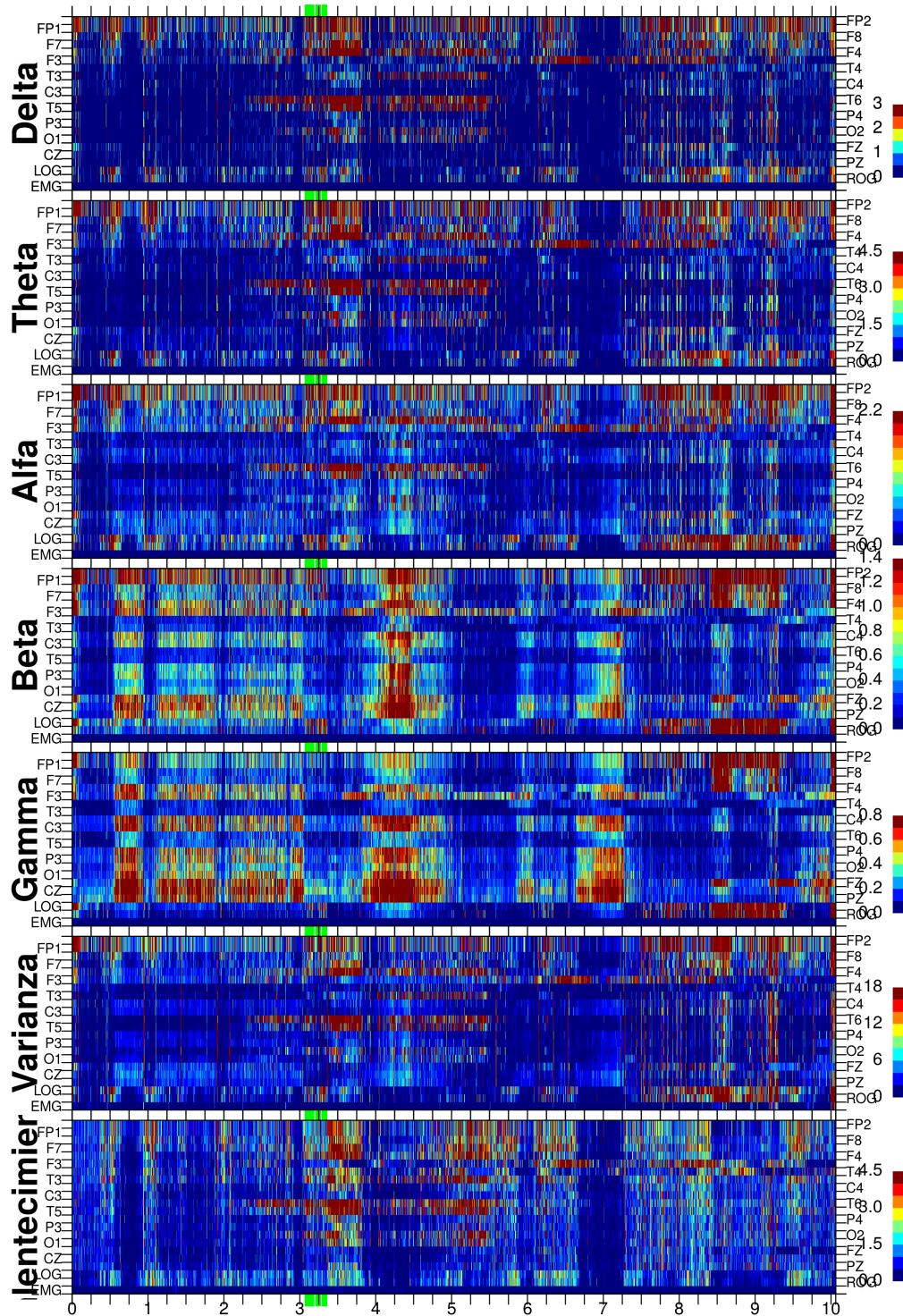
## Sujeto RRU | Grupo Mn



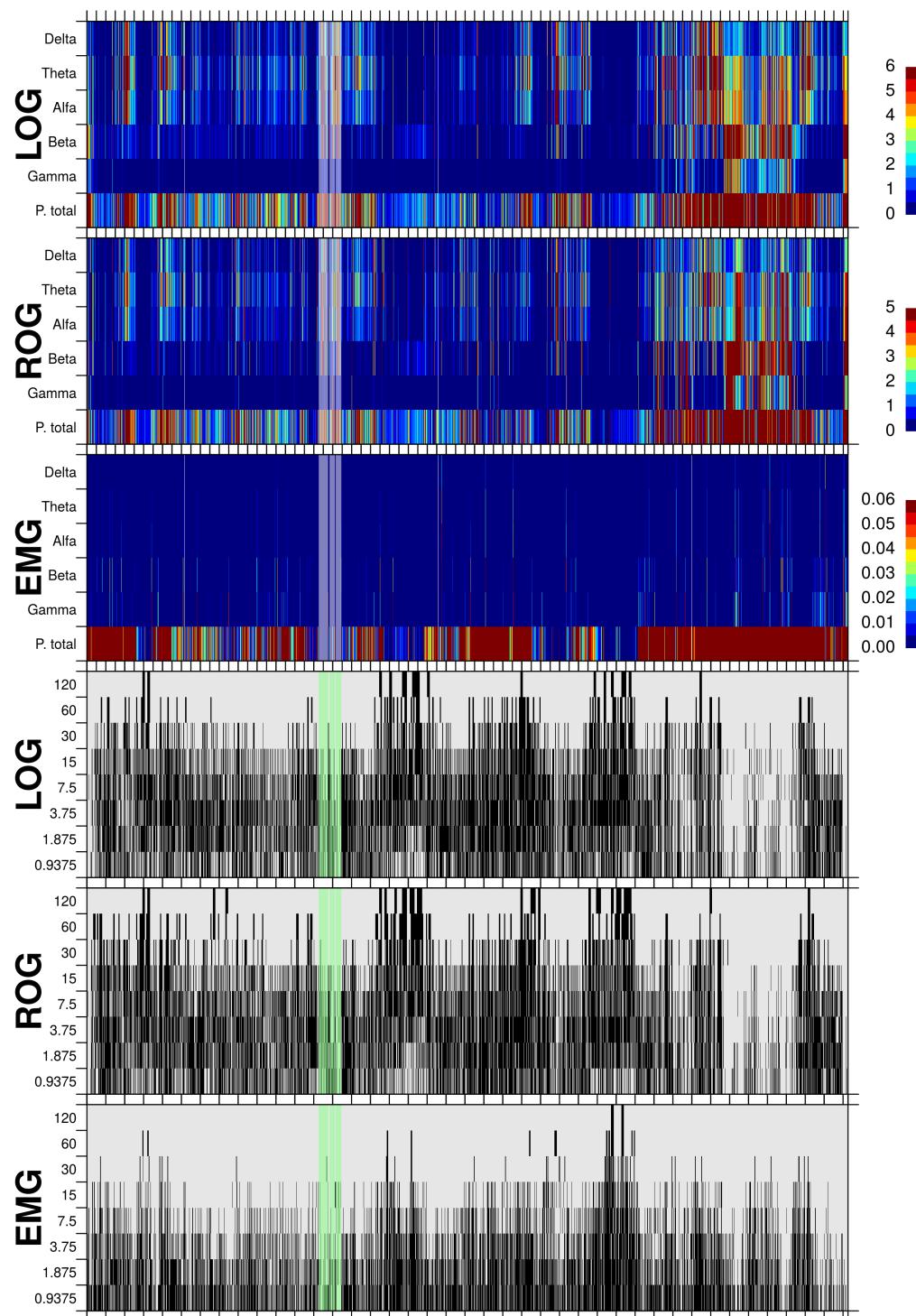
**Sujeto : JGZ | Grupo : Mn**



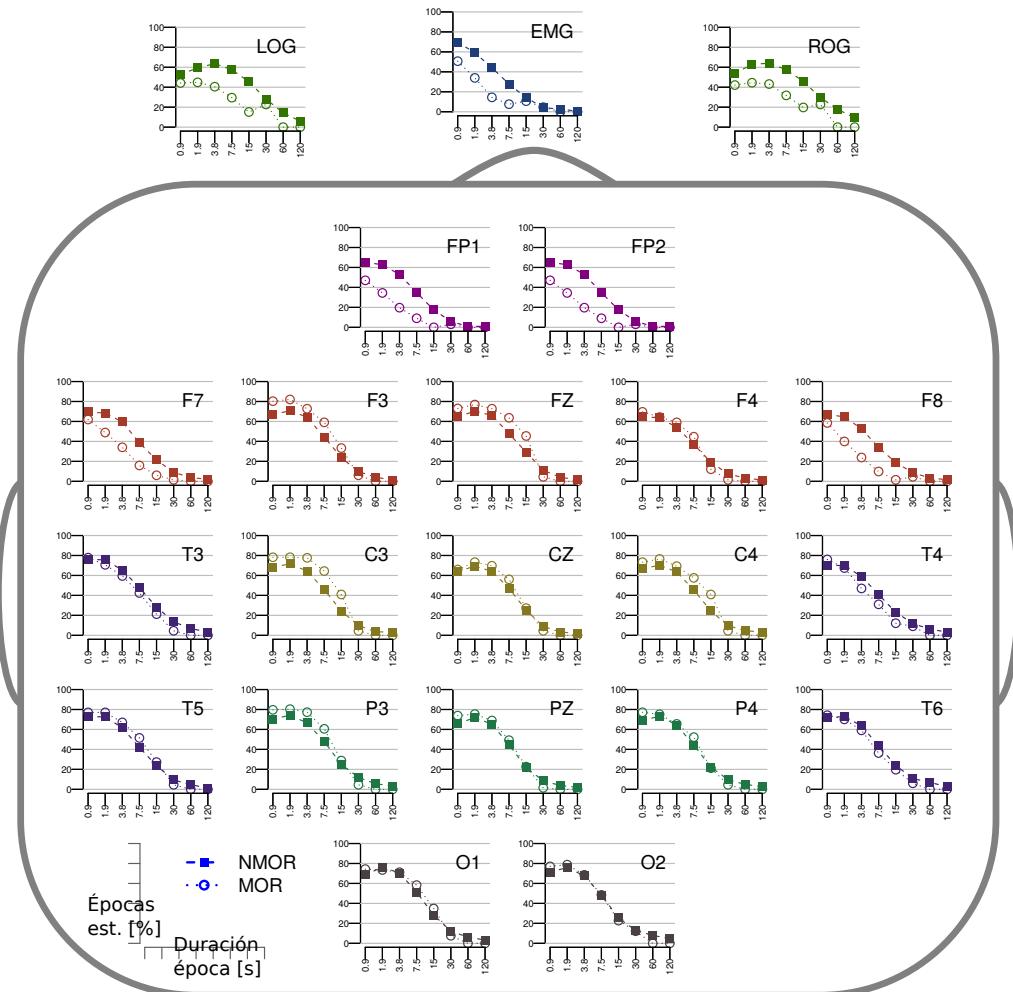
Sujeto : JGZ | Grupo : Mn



**Sujeto : JGZ | Grupo : Mn**



## Sujeto JGZ | Grupo Mn



# Bibliografía

- [1] Amer, M. S., S. A. Hamza, R. M. El Akkad y Y. I. I. Abdel Galeel: *Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes?* Aging & Mental Health, 17(7):788–792, 2013.
- [2] Ardila, A. y F. Ostrosky: *Guía para el diagnóstico neuropsicológico*. Florida: American Board of Professional Neuropsychology, 2012.
- [3] Barbour, A. J. y R. L. Parker: *psd: Adaptive, sine multitaper power spectral density estimation for R*. Computers & Geosciences, 63:1–8, 2014.
- [4] Brayet, P., D. Petit, B. Frauscher, J. F. Gagnon, N. Gosselin, K. Gagnon, I. Rouleau y J. Montplaisir: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment*. Clinical EEG and Neuroscience, 47(2):134–141, 2016.
- [5] Britannica The Editors of Encyclopædia: *Electroencephalography*. <https://www.britannica.com/science/electroencephalography>. Revisado: 2017-11-15.
- [6] Carrillo-Mora, P., J. Ramírez-Peris y K. Magaña Vázquez: *Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario*. Revista de la Facultad de Medicina, 56(4):5–15, 2013.
- [7] Clark, Jr., J. W.: *The Origin of Biopotentials*. En Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*, cap. 4, págs. 126–188. Wiley, Estados Unidos, 4<sup>a</sup> ed., 2009.
- [8] Cohen, B. A. y A. Sances: *Stationarity of the human electroencephalogram*. Medical and Biological Engineering and Computing, 15(5):513–518, 1977.

- [9] Constantine, W. y D. Percival: *fractal: Fractal Time Series Modeling and Analysis*, 2016. <https://CRAN.R-project.org/package=fractal>, R package version 2.0-1.
- [10] Contreras, S. A.: *Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud*. Revista Médica Clínica Las Condes, 24(3):341–349, 2013.
- [11] Dahlhaus, R. y cols.: *Fitting time series models to nonstationary processes*. The annals of Statistics, 25(1):1–37, 1997.
- [12] Ermentrout, G. B. y D. H. Terman: *Mathematical Foundations of Neuroscience*, vol. 35. Springer Science & Business Media, 2010.
- [13] Greenberg, S. A.: *The Geriatric Depression Scale (GDS)*. Best Practices in Nursing Care to Older Adults, 4:1–2, 2012.
- [14] INEGI: *Censo de Población y Vivienda 2010*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/>. Revisado: 2017-11-15.
- [15] INEGI: *Encuesta Intercensal 2015*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/encogares/especiales/intercensal/>. Revisado: 2017-11-15.
- [16] Jasper, H. H.: *The Ten Twenty Electrode System of the International Federation*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 10(2):371–375, 1958.
- [17] Kaiser, D. A.: *QEEG: State of the Art, or State of Confusion*. Journal of Neurotherapy, 4(2):57–75, 2000.
- [18] Klem, G., H. O. Lüders, H. H. Jasper y C. Elger: *The ten-twenty electrode system of the International Federation*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 52:3–6, 1999. (Suplemento).
- [19] Knopman, D. S., S. T. DeKosky, J. Cummings, H. Chui, J. Corey-Bloom, N. Relkin, G. Small, B. Miller y J. Stevens: *Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (An Evidence-based Review) Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology*. Neurology, 56(9):1143–1153, 2001.
- [20] Lopez, C. A.: *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-5*. Editorial medica panamericana, 2014.

- [21] Loynes, R. M.: *On the concept of the spectrum for non-stationary processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), págs. 1–30, 1968.
- [22] McEwen, J. A. y G. B. Anderson: *Modeling the Stationarity and Gaussianity of Spontaneous Electroencephalographic Activity*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-22(5):361–369, 1975.
- [23] Miyata, S., A. Noda, K. Iwamoto, N. Kawano, M. Okuda y N. Ozaki: *Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults*. Journal of Sleep Research, 22(5):535–541, 2013.
- [24] Niedermeyer, E. y D. L. Schomer: *Historical Aspects of EEG*. En Schomer, D. L. y F. Lopes Da Silva (eds.): *Niedermeyer's Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, cap. 1, págs. 1–16. Lippincott Williams & Wilkins, 6<sup>a</sup> ed., 2011.
- [25] Ostrosky-Solís, F., M. E. Gómez, E. M. Villaseñor, M. Roselli, A. Ardila y D. Piñeda: *Neuropsi: Atención y Memoria*. Manual Moderno, 2<sup>a</sup> ed., 2003.
- [26] Ostrosky-Solís, F., G. López-Arango y A. Ardila: *Sensitivity and Specificity of the Mini-Mental State Examination in a Spanish-Speaking Population*. Applied Neuropsychology, 7(1):25–31, 2000.
- [27] Park, D. C. y P. Reuter-Lorenz: *The Adaptive Brain: Aging and Neurocognitive Scaffolding*. Annual Review of Psychology, 60:173–196, 2009.
- [28] Potvin, O., D. Lorrain, H. Forget, M. Dubé, S. Grenier, M. Préville y C. Hudon: *Sleep Quality and 1-Year Incident Cognitive Impairment in Community-Dwelling Older Adults*. SLEEP, 35(4):491–499, 2012.
- [29] Priestley, M. B.: *Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27(2):204–237, 1965.
- [30] Priestley, M. B.: *Design Relations for Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 28(1):228–240, 1966.

- [31] Priestley, M. B. y T. Subba Rao: *A Test for Non-stationarity of Time-series*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 31(1):140–149, 1969.
- [32] R Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015. <https://www.R-project.org/>.
- [33] Reid, K. J., Z. Martinovich, S. Finkel, J. Statsinger, R. Golden, K. Harter y P. C. Zee: *Sleep: A Marker of Physical and Mental Health in the Elderly*. The American Journal of Geriatric Psychiatry, 14(10):860–866, 2006.
- [34] Robles, A., T. Del Ser, J. Alom, J. Peña-Acasanova y Grupo Asesor del Grupo de Neurología de la Conducta y Demencias de la Sociedad Española de Neurología: *Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de Alzheimer*. Neurología, 17(1):17–32, 2002.
- [35] Rosales-Lagarde, A.: *La relación sueños-cerebro y sus modelos*. Ludus Vitalis, 22(41):311–331, 2016.
- [36] Roumec, B., M. Gismondi, A. M. Gomez y L. Sousa: *Escala por interrogatorio de las actividades de la vida diaria: validación y correlación con escalas de severidad de deterioro cognitivo en pacientes con demencia tipo Alzheimer*. Neurología Argentina, 6(3):137–141, 2014.
- [37] Salud, I. N. de Geriatría / Secretaría de: *Plan de acción Alzheimer y otras demencias*. México, 2014, 2014. México.
- [38] Sanhueza Guzmán, C.: *Programa de entrenamiento cerebral en adultos mayores sin deterioro cognitivo: atención, memoria y funciones ejecutivas*. Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, 2014.
- [39] Vargas Terrez, B. E., V. Villamil Salcedo, C. Rodríguez Estrada, J. Pérez Romero y J. Cortés Sotres: *Validación de la escala Kessler 10 (K-10) en la detección de depresión y ansiedad en el primer nivel de atención. Propiedades psicométricas*. Salud Mental, 34(4):323–331, 2011.

- [40] Vázquez-Tagle Gallegos, G. R., V. García-Muñoz, A. Rosales-Lagarde, E. Rodríguez Torres, C. Martínez-Alcalá y O. Reséndiz-Flores: *Correlación inter-hemisférica durante el sueño MOR del Adulto Mayor con Deterioro Cognitivo*, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México.
- [41] Velasco, S. L., L. L. Ayuso, I. Contador y F. B. Pareja: *Versiónes en español del Mini-Mental State Examination (MMSE). Cuestiones para su uso en la práctica clínica*. Revista de Neurología, 61(8):363–371, 2015.
- [42] Yesavage, J. A., T. L. Brink, T. L. Rose, O. Lum, V. Huang, M. Adey y V. O. Leirer: *Development and Validation of a Geriatric Depression Screening Scale: A Preliminary Report*. Journal of Psychiatric Research, 17(1):37–49, 1982.



Creo que el conocimiento científico tiene propiedades fractales: que por mucho que aprendamos, lo que queda, por pequeño que parezca, es tan infinitamente complejo como el todo por el que empezamos. Ese, creo yo, es el secreto del universo.

Isaac Asimov (1920–1992)