Estacionariedad débil

Detección en series electrofisiológicas

Julio Cesar Enciso Alva

Neuroscience Short Course

6 de julio de 2017

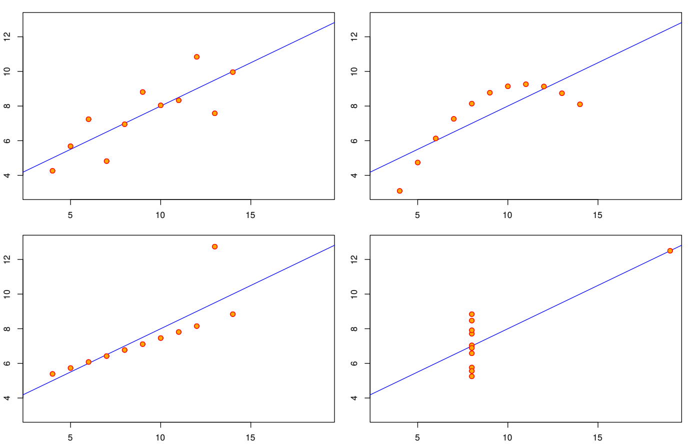
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Motivación

El estudio y diagnóstico de una gran cantidad de enfermedades depende de nuestra habilidad para registrar y analizar señales electrofisiológicas.

Se suele asumir que estas señales son complejas: no lineales, no estacionarias y sin equilibrio por naturaleza. Pero usualmente no se comprueban formalmente estas propiedades.

Motivación: formalidad



Conceptos

Conceptos

Definición (Estacionariedad débil)

Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si para cualesquiera tiempos admisibles t, s se tiene que

- $\mathrm{E}\left[X(t)\right] = \mu_X$
- $\mathrm{Var}\left(X(t)\right) = \sigma_X^2$
- $\mathrm{Cov}\left(X(t), X(s)\right) = \rho_X(s - t)$

Con μ_X, σ_X^2 constantes, $\rho_X(\tau)$ únicamente depende de τ

Teorema (Wiener-Khinchin)

Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea función de autocorrelación para algún proceso a tiempo continuo débilmente estacionario y estocásticamente continuo, $\{X(t)\}$, es que exista una función F tal que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Espectro evolutivo

Se consideran procesos no-estacionarios, estocásticamente continuos, de media cero y varianza finita, y que admitan una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t, \omega) e^{it\omega} dZ(\omega)$$

tal que

- $\operatorname{Cov}\left(dZ(\omega), dZ(\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$
- $E\left[|dZ(\omega)|^2\right] = \mu(\omega)$

El espectro evolutivo fue definido por Priestley[1] como

$$f(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2$$

[1] Maurice B Priestley. “Evolutionary spectra and non-stationary processes”. En: Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (1965), págs. 204-237.

La base de la prueba

Supóngase que puede* expresarse

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega) e^{i\omega t}\, d\xi(\omega)$$

Supóngase que puede* expresarse

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega) e^{i\omega t}\, d\xi(\omega)$$

X_t es estacionaria $\Rightarrow A_t(\omega)$ es constante $\Rightarrow f_t(\omega)$ es constante

La base de la prueba

Supóngase que puede* expresarse

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} A_t(\omega) e^{i\omega t} \, d\xi(\omega)$$

$$X_t \text{ es estacionaria} \Rightarrow A_t(\omega) \text{ es constante} \Rightarrow f_t(\omega) \text{ es constante}$$

La contrapositiva

$$f_t(\omega) \text{ no constante} \Rightarrow X_t \text{ no es estacionaria}$$

<u>Por hacer:</u> Encontrar un buen estimador para f_t

Metodología, teoría

Filtro no-paramétrico para generar las series de tiempo

$$X_t = T_t + S_t + R_t$$

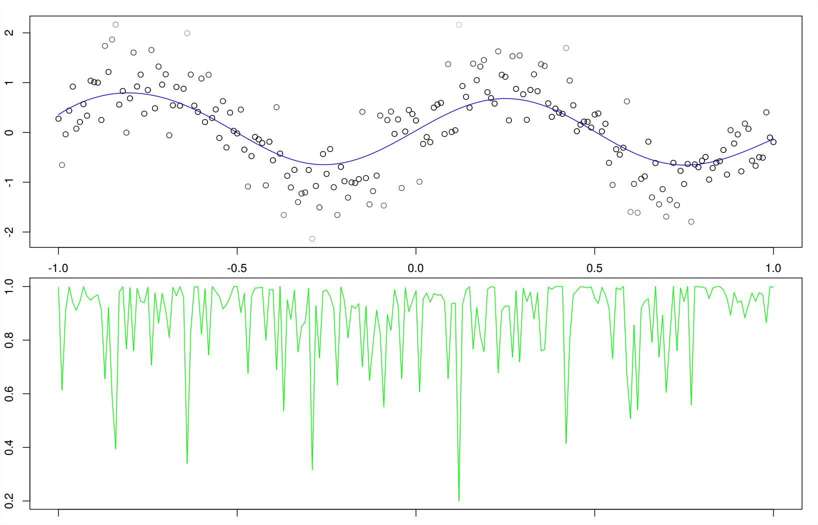
Tales que:

S_t Función periódica suave (frecuencia dada)
Componente estacional

T_t Función suave, no necesariamente periódica
Tendencia

R_t Residuo

Comando en R: `stl()`


2
1
0
-1
-2
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2

Definición (Estimador de doble ventana)

Se define a $\widehat{f}$, estimador para la f, como

$$\widehat{f}(t, \omega) = \int_{t-T}^{t} w_{T'}(u) |U(t-u, \omega)|^2 du$$

Proposición

El estimador de doble ventana $\widehat{f}$ tiene las siguientes propiedades

- $E\left[\widehat{f}(t,\omega)\right] \approx f(t,\omega)$
- $\operatorname{Var}\left(\widehat{f}(t,\omega)\right) \approx \frac{C}{\tau} f^2(t,\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 \, d\theta$
- $\operatorname{Cov}\left(\widehat{f}(t_1,\omega_1), \widehat{f}(t_2,\omega_2)\right) \approx$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) w_\tau(v) \operatorname{Cov}\left(|U(t_1-u,\omega_1)|^2, |U(t_2-u,\omega_2)|^2\right) dudv$

Más aún, puede escribirse

$$Y(t,\omega) = \log\left(f(t,\omega)\right) + \varepsilon(t,\omega)$$

donde las variables $\varepsilon(t,\omega)$ satisfacen que

- $E\left[\varepsilon(t,\omega)\right] = 0$
- $\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t,\omega)\right) \approx \dfrac{C}{\tau}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\theta)|^4 \, d\theta$

En particular, se puede usar numéricamente el que

$$\sum_{i=1}^{N}\left(Y(t,\omega_i) - \overline{Y}(\bullet,\omega_i)\right)^2 \sim \sigma^2\chi^2(N)$$

con $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(\varepsilon(t,\omega)\right)$, y $\overline{Y}(\bullet,\omega) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} Y(t_j,\omega)$.

Metodología, práctica

Registro de PSG

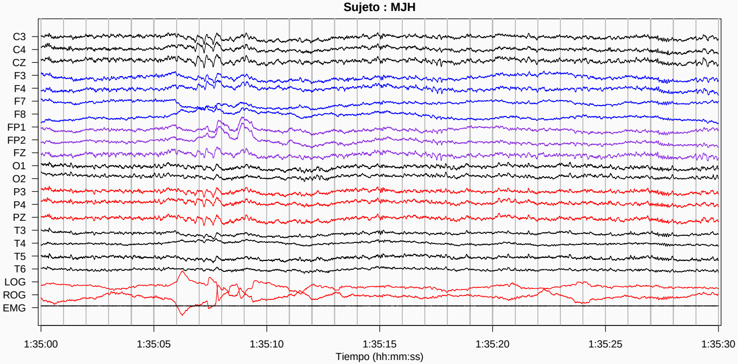
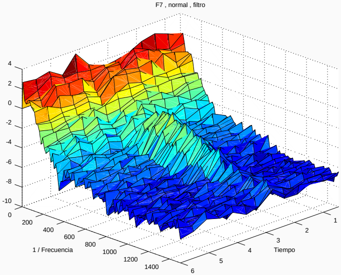
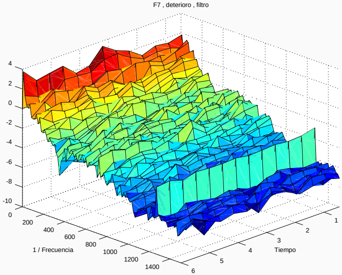


Figura 1: PSG: 19 electrodos EEG, 4 electrodos EOG (horizontal y vertical), 2 electrodos EMG en músculos submentonianos

Espectro estimado

pelis





T	:	0	T	:	4.36434e−07
I+R	:	0	I+R	:	0.0001575723
T+I+R	:	0	T+I+R	:	6.98897e−06

Resultado esperado

```
Priestley-Subba Rao stationarity Test for datos
-----------------------------------------------
Samples used              : 3072
Samples available         : 3069
Sampling interval         : 1
SDF estimator             : Multitaper
  Number of (sine) tapers : 5
  Centered                : TRUE
  Recentered              : FALSE
Number of blocks          : 11
Block size                : 279
Number of blocks          : 11
p-value for T             : 0.4130131
p-value for I+R           : 0.1787949
p-value for T+I+R         : 0.1801353
```

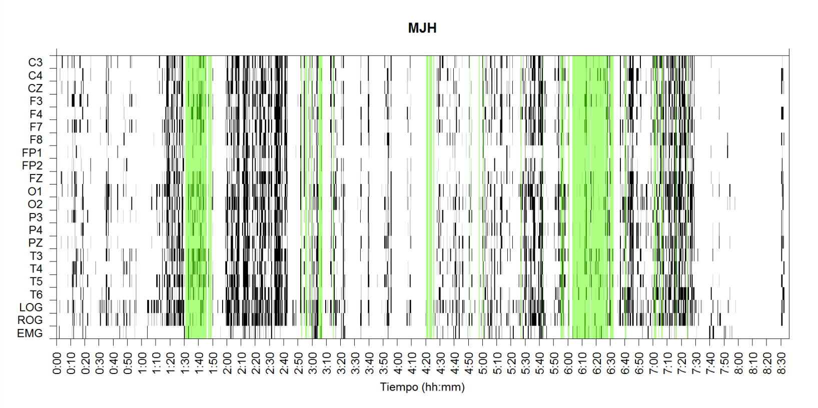
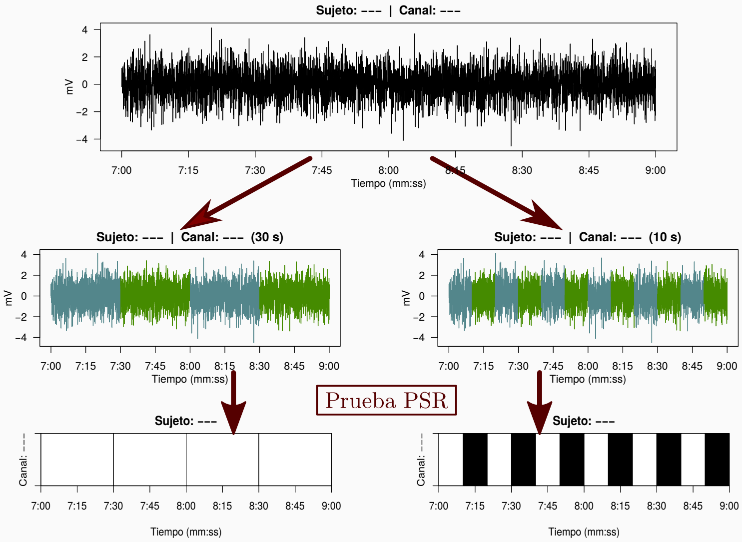
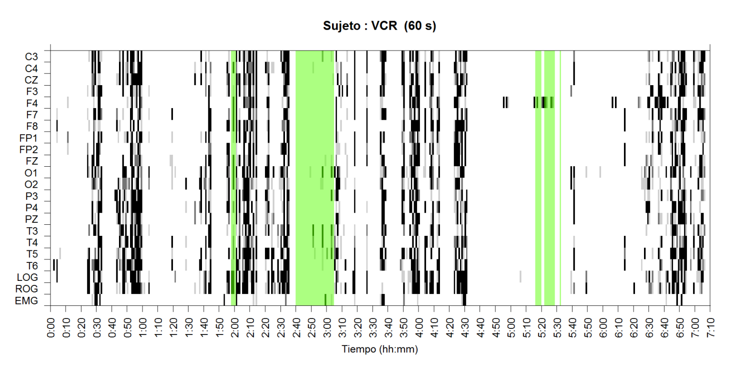


Figura 2: Disposición gráfica para los resultados de la prueba PSR. En verde el sueño MOR.

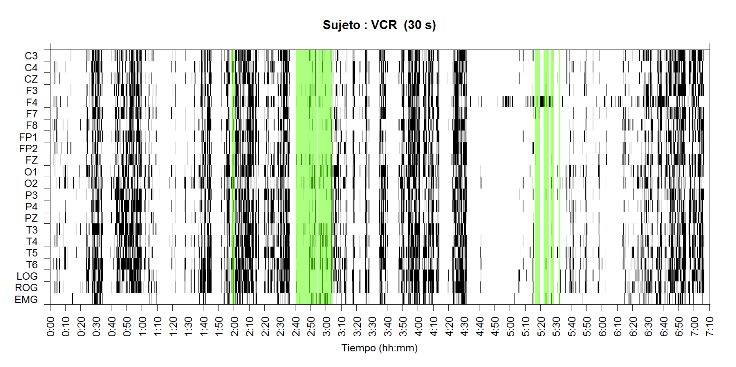
Efecto del tamaño de la época



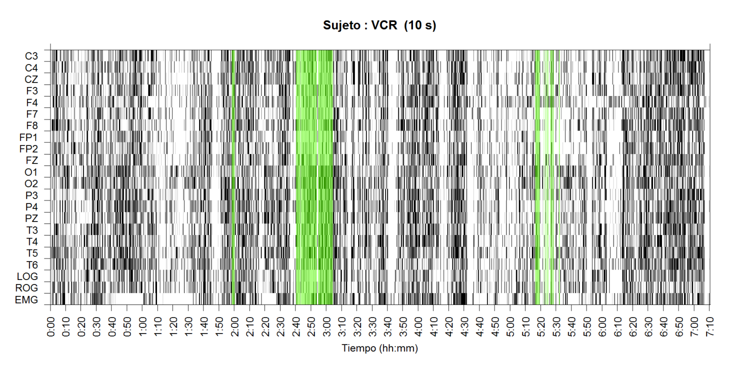
Sobre el tamaño de la época



Sobre el tamaño de la época

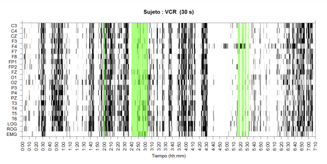


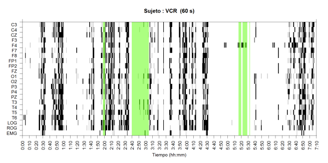
Sobre el tamaño de la época

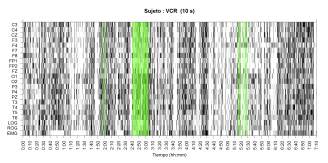


Sobre el tamaño de la época

Estacionariedad local[2]







[2] Bernard Allan Cohen y Anthony Sances. “Stationarity of the human electroencephalogram”. En: Medical and Biological Engineering and Computing 15.5 (1977), págs. 513-518.