



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Estacionariedad débil en registros polisomnográficos de adultos mayores, como marcador de posible deterioro cognitivo

Presenta

Julio Cesar Enciso Alva

Dirección

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. Abril de 2018

Resumen

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Abstract

La doctora Alejandra Rosales Lagarde propuso investigar el tema del sueño en el adulto mayor en el Área Académica de Gerontología de la UAEH, institución a la cual está comisionada de acuerdo al contrato con el programa Cátedras CONACYT con el número de investigadora 1411 y el proyecto número 2162, *Evaluación y diagnóstico de los aspectos biopsicosociales del adulto mayor y sus cuidadores primarios*.

De manera adicional, el presente estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080), Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalevskaya (2014); otorgados a la doctora Erika E. Rodríguez Torres.

Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Erika Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo y centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por el permitirme el acceso y análisis de los registros de polisomnograma. Mi contribución con este trabajo luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Índice general

Índice de figuras	xii
Índice de cuadros	xiii
Introducción	1
Antecedentes	2
Pregunta de investigación y objetivos	2
Sobre la estructura del texto	3
1. Preliminares	7
1.1. Medidas	7
1.1.1. Integración en espacios medibles	9
1.2. Variables aleatorias	9
1.2.1. Convergencia de variables aleatorias	12
1.2.2. Variables aleatorias continuas y discretas	12
1.2.3. Valor esperado	14
1.2.4. Vectores aleatorios	15
1.3. Estimación de parámetros	16
1.4. Procesos estocásticos	19
1.5. Pruebas de hipótesis	23
1.6. Espacios de Hilbert	26

1.7. Transformada de Fourier	26
1.8. Otros resultados importantes	29
2. Espectro de potencias	33
2.1. Función de densidad espectral	34
2.2. Representación espectral	34
2.2.1. Representación de procesos a tiempo discreto	41
2.3. Efecto alias	43
2.4. Filtros lineales	45
2.4.1. Filtros de banda	46
2.5. Estimadores	47
3. Espectro evolutivo	51
3.1. Definición del espectro evolutivo	52
3.2. Estimación del espectro evolutivo	54
3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios	54
3.3. Estimador de doble ventana	60
3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao	67
4. Deterioro cognitivo y sueño	75
4.1. Deterioro Cognitivo Leve	76
4.1.1. Probable Deterioro Cognitivo Leve	78
4.1.2. Algunas pruebas neuropsicológicas	79
4.2. Estudio clínico del sueño	82
4.2.1. Estructura del sueño	86
4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño	88
5. Metodología y resultados	91
5.1. Características de los participantes	92
5.1.1. Registro del polisomnograma	93
5.2. Características grupales	96
5.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao	98
5.4. Variabilidad dentro del sujeto	103

6. Discusión y conclusiones	107
6.1. Conclusiones	108
6.2. Trabajo a futuro	108
A. Compilados gráficos	109
Glosario	117
Bibliografía	121

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

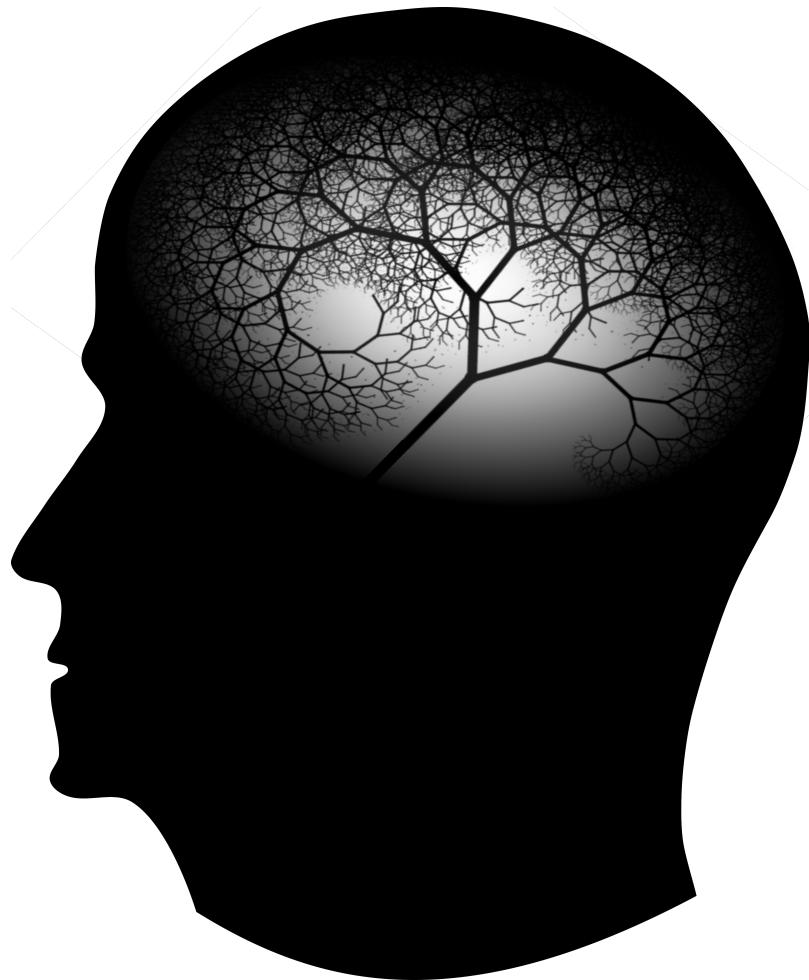
Índice de figuras

1. Estructura de la tesis	5
1.1. Algunos pasos en la <i>construcción iterativa</i> de la función de Cantor . .	14
1.2. Realizaciones de algunos proceso débilmente estacionarios	22
3.1. Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.	73
4.1. Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG	83
4.2. Colocación de electrodos según el sistema 10–20	84
4.3. Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular	85
4.4. Registro de polisomnograma durante sueño MOR	88
5.1. Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes	99
5.2. Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana	101
5.3. Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana.	102
5.4. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativa- mente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos	104
5.5. Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.	105
5.6. Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC.	106

A.1. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativa- mente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana	110
A.2. Gráficos individuales para el sujeto VCR	112

Índice de cuadros

2.1. Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta)	49
2.2. Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia)	50
3.1. Estadísticos involucrados en la prueba PSR	71
4.1. Puntajes de corte para la prueba MMSE	80
4.2. Puntajes de corte para la prueba Neuropsi	81
4.3. Puntuación para la prueba KATZ	81
4.4. Puntajes de corte para las pruebas SAST y GDS	82
4.5. Criterios para la clasificación de etapas de sueño	87
5.1. Datos generales de los participantes	93
5.2. Datos generales sobre los registros de PSG	95
5.3. Variables independientes entre grupos	97
5.4. Correlaciones entre variables independientes	97



*“Creo que el conocimiento científico tiene
propiedades fractales; que por mucho que aprendamos,
lo que queda, por pequeño que parezca,
es tan infinitamente complejo como el todo
por el que empezamos.
Ese, creo yo, es el secreto del universo.”*

ISAAC ASIMOV [3]

Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo se ha incrementado la esperanza de vida y la calidad de vida. Desafortunadamente, también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad. En México el sector de la población con más de 60 años de edad (considerados en alto riesgo para este tipo de enfermedades) contempló a 10 millones de personas en 2010, y en 2015 dicha cifra creció a 12 millones [25, 26]. En este trabajo se destaca la demencia de entre las enfermedades asociadas con la edad.

La demencia consiste en el desarrollo de deficiencias cognoscitivas (especialmente en atención y memoria) suficientemente graves para interferir en las actividades del individuo. Se considera que la demencia es irreversible, y no se han identificado curas definitivas [27], debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El deterioro cognitivo leve (DCL), una etapa temprana de la demencia, se entiende como el desarrollo de deficiencias cognoscitivas *objetivas* pero que no corresponden a daño físico del cerebro y no son lo suficientemente graves para calificarse como demencia.

Existen varios otros métodos alternativos para detectar –o definir– el DCL; desde la autopercepción por parte del paciente, hasta análisis genéticos, químicos y de imagenología cerebral. De entre estas técnicas se destaca a la polisomnografía (PSG), el registro conjunto de varias señales electrofisiológicas durante el sueño. En particular, se considera una PSG compuesta por registros de electroencefalograma (EEG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG) para medir, respecti-

vamente, actividad eléctrica cerebral, tono muscular y movimientos oculares. El uso en particular de registros de PSG obedece principalmente a que (1) es una técnica relativamente barata y no invasiva, con relación al tipo de información que se obtiene, y (2) existe una cantidad moderadamente grande de marcadores para el DCL reportados usando la PSG.

Se ha encontrado, por ejemplo, correlaciones entre el DCL en adultos mayores con la *presencia* de ciertos tipos de ondas cerebrales [4, 57, 56]. Sin embargo, otros estudios sugieren que el EEG durante el sueño es un mejor predictor del DCL [buscar y citar Baryet ??].

En el presente trabajo se busca desarrollar métodos para determinar el DCL en base a registros de PSG en adultos mayores, como complemento a los resultados de pruebas neuropsicológicas. Se mantiene presente que el deterioro cognitivo (más allá del DCL) no puede reducirse exclusivamente a tales mediciones; las conclusiones obtenidas usando registros de señales electrofisiológicas deben ser contrastadas siempre con resultados de análisis complementarios.

Antecedentes

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron el PDCL en adultos mayores del estado de Hidalgo con el método no lineal del Análisis de Fluctuaciones sin Tendencia (DFA, por sus siglas en inglés), encontrando efectivamente que los sujetos con PDCL presentan mayor ruido browniano en varias regiones en comparación con los pacientes sin PDCL[75].

En un estudio reciente, EEG de una noche polisomnografía de personas mayores con y sin deterioro cognitivo según las evaluaciones con el Neuropsi analizó el porcentaje de estacionariedad. En sueño MOR el porcentaje fue menor que el del sueño NMOR y la vigilia, se obtuvo estacionariedad como un índice para comparar NMOR versus sueño MOR en ambos grupos [65].

Pregunta de investigación y objetivos

¿Las series de tiempo de los registros de polisomnografía en adultos mayores son débilmente estacionarias? Si en efecto, son débilmente estacionarias ¿Ésta es distinta

entre los sujetos con PDCL y sin PDCL?

Objetivo general

Buscar pruebas estadísticas formales para detectar si una serie de tiempo dada procede de un proceso estocástico débilmente estacionario. Usar tales pruebas sobre registros de PSG en adultos mayores para investigar si la presencia de más segmentos débilmente estacionarios se asocia con la condición de PDCL.

Objetivos específicos

- Estudiar la definición de estacionariedad para procesos estocásticos.
- Investigar cómo detectar, como prueba de hipótesis, si una serie de tiempo dada proviene de un proceso estocástico débilmente estacionario, y bajo qué supuestos es válida dicha caracterización.
- Establecer si los registros de PSG durante las etapas de sueño son débilmente estacionarios.
- Investigar si la presencia de segmentos estacionarios en los registros es diferente si la PSG corresponde a un individuo con PDCL.

Sobre la estructura del texto

El presente trabajo está conformado por 6 capítulos y un apéndice. El primer capítulo aborda conceptos preliminares como medida, integración, variables aleatorias, estimadores, pruebas de hipótesis, proceso estocásticos, espacios de Hilbert y la transformada de Fourier.

En el segundo capítulo se expone una serie de temas relacionados con la *estadística en el dominio espectral*, es decir, obtener el espectro de potencias de un proceso estocástico –particularmente de procesos débilmente estacionarios. Debido a la notoria relación mutua entre estos temas, se decidió ilustrar en la figura 1 la red de temas según dependen unos de otros.

En el tercer capítulo se expone el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no estacionarios. Como el espectro evolutivo de

un proceso débilmente estacionario se reduce al espectro de potencias, se describe una metodología para detectar estacionariedad débil.

En el cuarto capítulo se presentan conceptos preliminares de índole fisiológica como detección de deterioro cognitivo y su relación con el sueño. En particular se explora el estudio del sueño a través de la polisomnografía.

En el capítulo quinto describe cómo se aplica la metodología descrita en los capítulos anteriores. Los registros son divididos en segmentos, llamados *épocas*, que son analizadas en tres niveles:

- Se prueba la homogeneidad de cada época
- Se estudian las características de las distintas épocas dentro

En el capítulo sexto se discuten los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones.

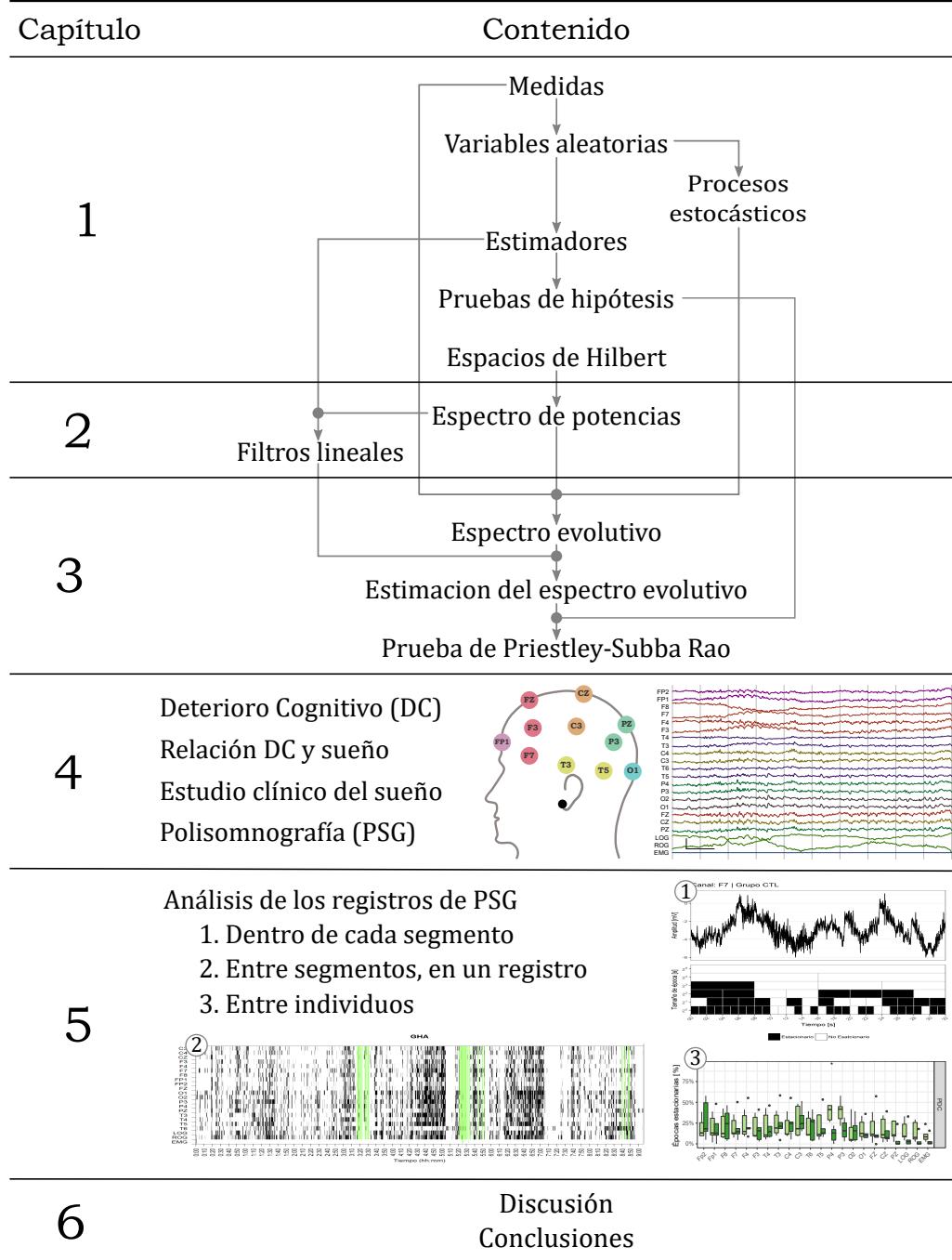


Figura 1: Se ilustra gráficamente las *dependencias* respecto a los tópicos de matemáticas, es decir, los temas que deben discutirse antes que otros. El resto del texto (incluyendo los tópicos de fisiología) son expuestos de forma más *secuencial*, por lo que no se consideró necesario ilustrar sus dependencias.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 1

Preliminares

El lector interesado puede revisar mayores detalles sobre teoría de la medida, probabilidad y estadística en los libros “*Probability for Statisticians*” por Galen R. Shorack [69] y “*Statistical Theory*” por Bernard W. Lindgren [33]. Redactar también [34].

1.1. Medidas

Definición 1.1. *Sea Ω un conjunto y sea \mathcal{U} una familia de subconjuntos de Ω . Se dice que \mathcal{U} es una **σ -álgebra** si cumple*

- $\Omega \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U}$
- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde A^C es el complemento de A en U

Los elementos de una σ -álgebra se denominan **conjuntos medibles**.

Definición 1.2. *Sea Ω un conjunto y $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ una familia de subconjuntos. Se define a $\sigma(\mathcal{A})$, la σ -álgebra generada por \mathcal{A} , como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{A}*

1.1. MEDIDAS

En el contexto de la probabilidad, es particularmente importante la σ -álgebra de Borel, definida como

$$\mathcal{B} = \sigma(\{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (1.1)$$

Este tipo de σ -álgebras puede definirse sencillamente para algún subconjunto $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_A = \sigma(\{(-\infty, a] \cap A \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (1.2)$$

Definición 1.3. *Sea Ω un conjunto y \mathcal{U} una σ -álgebra definida en Ω . El par (Ω, \mathcal{U}) será referido como **espacio de medida**. Por nomenclatura, Ω es referido como espacio muestral y \mathcal{U} como σ -álgebra de sucesos.*

Definición 1.4. *Sea (Ω, \mathcal{U}) un espacio de medida. Se dice que una función $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$ es una **medida** si cumple que*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ son tales que $A_n \cap A_m = \emptyset \Leftrightarrow m \neq n$, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Donde $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x\} \cup \{\infty\}$ y \emptyset es el conjunto vacío. La terna $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ será referida como **espacio de medida**.

Definición 1.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que μ es **σ -finita** si existen una familia de conjuntos medibles $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que*

- $\mu(A_n) < \infty$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

Definición 1.6. *Considérese el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, con \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel. Se define la medida de Lebesgue, μ_L , la medida en el espacio mencionado tal que*

$$\mu_L([a, b]) = b - a \quad (1.3)$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

1.1.1. Integración en espacios medibles

Definición 1.7. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible no-negativa. Sea $A \in \mathcal{U}$ un conjunto arbitrario y $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}$ el conjunto de las particiones de A en una cantidad finita de conjuntos medibles. Se define la **integral de f respecto a μ en el conjunto A** como

$$\int_A f(x)\mu(x) := \sup_{\mathcal{C}_A} \left[\sum_{j=1}^n f(\lambda)\mu(E_m) \right] \quad (1.4)$$

Donde $\mathcal{C}_A = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

Definición 1.8. Sea $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función medible. Se definen las funciones f^+ y f^- como

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \\ f^-(x) &= -\min(f(x), 0) \end{aligned}$$

Se dice que f es integrable en A respecto a μ si cumple que $\int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$ y $\int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) < \infty$; si así fuere, se define

$$\int_A f(\lambda)d\mu(\lambda) := \int_A f^+(\lambda)d\mu(\lambda) - \int_A f^-(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (1.5)$$

Proposición 1.0.1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ espacios medibles y μ una medida sobre el primero. Una función g es integrable en $A \in \mathcal{U}_2$ respecto a μ_f si y sólo si $g \circ f$ es integrable en $f^{-1}(A)$ respecto a μ . En dado caso, se satisface que

$$\int_A g(\lambda)d\mu_f(\lambda) = \int_{f^{-1}(A)} g \circ f(\lambda)d\mu(\lambda) \quad (1.6)$$

1.2. Variables aleatorias

Si una medida μ es acotada en todo el espacio de eventos se dice que es una **medida finita** (no confundir con σ -finita). Una medida de probabilidad puede entenderse como un caso particular de medida finita sobre los reales.

Definición 1.9. El espacio de medida (Ω, \mathcal{U}, P) se dice un **espacio de probabilidad**

dad si satisface que $P(\Omega) = 1$

Definición 1.10. Sean $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$ dos espacios medibles. Se dice que una función $f : \omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es **medible** si para todo $A \in \mathcal{U}_2$ $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_1$

Definición 1.11. Sea (Ω, \mathcal{U}) un espacio medible y (I, \mathcal{B}_I, P) un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función medible $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_I$ entre estos espacios

Siendo X una variable aleatoria, intuitivamente se puede definir la función de densidad de probabilidad de un conjunto medible $A \in \mathcal{B}$ como

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \quad (1.7)$$

Definición 1.12. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ un espacio de probabilidad. La **función de probabilidad acumulada**, $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, se define como

$$F(x) := P((-\infty, x])$$

Por comodidad, se define una notación alterna para la función de probabilidad acumulada de X como

$$P_X(x \leq x) := F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \quad (1.8)$$

Si se puede definir una función de densidad de probabilidad para X , entonces puede escribirse

$$P(x \in A) = \int_A f_X(\lambda) d\lambda \quad (1.9)$$

Una función de probabilidad acumulada satisface las siguientes propiedades

- Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$
- Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} F(x) + P(\{x\})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Conviene considerar las funciones que satisface las condiciones anteriores, referidas simplemente como **función de distribución**, pero que no necesariamente

provienen de un espacio de probabilidad. Naturalmente, una función de distribución F puede inducir una medida μ .

Proposición 1.0.2. *Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución; se puede construir una medida μ_F sobre el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ tal que la función de probabilidad acumulada asociada al espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$ es exactamente F . La medida μ_F será referida como la **medida inducida** por F .*

Así entonces, es perfectamente posible definir variables aleatorias especificando su respectiva función de probabilidad acumulada.

Cuando dos variables aleatorias X, Y tienen la misma función de densidad de probabilidad, se denota como

$$X \sim Y \quad (1.10)$$

Ejemplo 1.1. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ p & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x \end{cases} \quad (1.11)$$

para algún $p \in [0, 1]$. Se dice entonces que X sigue una **distribución de Bernoulli** con parámetro p , y se denota por $X \sim B(p)$.

Ejemplo 1.2. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , z \leq x \end{cases} \quad (1.12)$$

para algún $p \in \mathbb{R}$. Se dice entonces que X sigue una **distribución degenerada** con parámetro k , y se denota por $X \sim D(p)$.

Ejemplo 1.3. *Si una variable aleatoria tiene una función de distribución de probabilidad de la forma*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (1.13)$$

para algunos $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Se dice entonces que X sigue una **distribución normal** con parámetros μ y σ^2 , y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1.2.1. Convergencia de variables aleatorias

Definición 1.13. Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de probabilidad acumulada, correspondientes a la sucesión de variables aleatorias reales $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en distribución** a una variable aleatoria X si, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad (1.14)$$

donde F es la función de probabilidad acumulada de X .

Definición 1.14. Sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de probabilidad acumulada, correspondientes a la sucesión de variables aleatorias reales $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Se dice que la sucesión $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilidad** a una variable aleatoria X si, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad (1.15)$$

donde, para cada n , P es la medida de probabilidad para el vector $[X_n, X]$.

1.2.2. Variables aleatorias continuas y discretas

Definición 1.15. Una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice **absolutamente continua** si para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ y una familia de intervalos, $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| < \delta \quad (1.16)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \quad (1.17)$$

Se dice que una medida de probabilidad P es **continua** si su función de probabilidad acumulada es absolutamente continua.

Si una medida de probabilidad F es absolutamente continua, entonces existe una función f tal que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (1.18)$$

Se dice que f es la **función de densidad de probabilidad**.

Sea P una medida de probabilidad, se define su **soporte** como

$$\mathcal{D}_P = \{x \in \mathbb{R} | P(\{x\}) > 0\} \quad (1.19)$$

Se dice que una medida de probabilidad, P , es **discreta** si su soporte es numerable.

Si una medida de probabilidad F es discreta, entonces existe una finito o infinito numerable $Q_F = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$F(x) = \sum_{n \leq x} q_n F(q_n) \quad (1.20)$$

Es posible construir una función de densidad de probabilidad para F como

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in Q_F \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.21)$$

Naturalmente es posible construir medidas de probabilidad que no sean ni continuas ni discretas. Por ejemplo, considérese la función de Cantor K que puede ser definida iterativamente como

$$K_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}K_n(3x - 2) + \frac{1}{2} & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.22)$$

con $K_0(x) = x$ y $K := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$

Proposición 1.0.3. *La función de Cantor es continua pero no es absolutamente continua*

Luego entonces, puede construirse la siguiente función de distribución

$$F_K = \begin{cases} K(x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1 & , x > 1 \end{cases} \quad (1.23)$$

la cual no es ni continua ni discreta. Por simplicidad, en el presente trabajo únicamente se considerarán variables aleatorias que son continuas o discretas.

1.2. VARIABLES ALEATORIAS

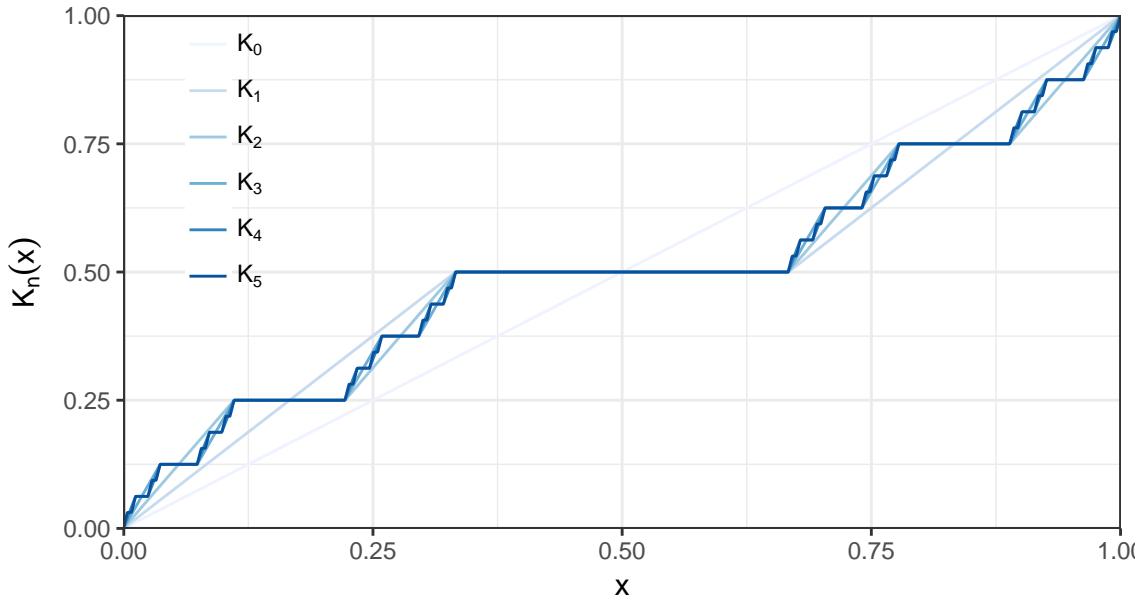


Figura 1.1: Algunos pasos en la *construcción iterativa* de la función de Cantor, que es creciente, acotada y continua pero no absolutamente continua. En el texto, la función de Cantor es usado para construir medidas con propiedades patológicas.

1.2.3. Valor esperado

Definición 1.16. Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{U}, P) . Si P es integrable en Ω respecto a P , entonces se define el **valor esperado** de X como

$$E[X] := \int_{\omega} X(\lambda) dP(\lambda) \quad (1.24)$$

Proposición 1.0.4. Sea X una variable aleatoria y g una función medible en el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Entonces $g(X)$ es una variable aleatoria cuyo valor esperado es

$$E[g(x)] = \int_{\Omega} [g(X)](\lambda) dP(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP(x) \quad (1.25)$$

Definición 1.17. Sea X una variable aleatoria, se definen su media μ_X y varianza σ_X^2 como

$$\mu_X := E[X] \quad (1.26)$$

$$\sigma_X^2 := E[(X - \mu_X)^2] \quad (1.27)$$

Por definición, no hay garantía que una variable aleatoria arbitraria tenga media o

varianza bien definidas.

Naturalmente la notación μ_X únicamente se usa cuando no hay confusión con la notación para medidas. Así mismo, conviene mencionar ejemplos de variables aleatorias para las cuales no está bien definida su media o varianza.

? Ejemplos

Definición 1.18. Sean X, Y dos variables aleatorias. Se define su **covarianza** como

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xydP_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xydP_X(x)dP_Y(y) \quad (1.28)$$

Definición 1.19. Sean X, Y dos variables aleatorias. Se define su **coeficiente de correlación de Pearson** como

$$\rho(X, Y) := \sqrt{\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \quad (1.29)$$

1.2.4. Vectores aleatorios

El concepto de variable aleatoria real (definición ?) puede extenderse trivialmente a conjuntos más generales *basados* en \mathbb{R} , como \mathbb{R}^n para algún entero n ; dicha generalización puede formalizarse fácilmente como otro caso particular.

Definición 1.20. Se llama **vector aleatorio** a una variable aleatoria sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P)$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Se define a \mathcal{B}^n , la σ -álgebra de Borel n -dimensional, como

$$\mathcal{B}^n := \sigma(\{(-\infty, a_1] \times (-\infty, a_2] \times \cdots \times (-\infty, a_n] \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}) \quad (1.30)$$

Por notación, el vector aleatorio *n-dimensional* \mathbf{X} será referido como

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n] \quad (1.31)$$

esta notación para denotar vectores con *símbolos gruesos* será usada durante el texto, extendida igualmente para realizaciones y otros vectores similares.

1.3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Ejemplo 1.4. Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_d]$ sigue una **distribución multinormal** si su función de probabilidad acumulada conjunta tiene la forma

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |C|}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}C^{-1}\mathbf{x}^\top}{2}\right) \quad (1.32)$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. El vector $\mu \in \mathbb{R}^d$ será referido como vector de medias, y la matriz $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ como matriz de covarianza.

1.3. Estimación de parámetros

Es común que se conozca cierta información de estos fenómenos que permita suponer que se comportan como variables aleatorias con cierta forma. Por ejemplo, ?. Conviene destacar el caso de fenómenos que son *forzados* a seguir una distribución conocida; por ejemplo, la metodología para aplicar la prueba Neuropsi [49] ha sido diseñada de tal forma que los puntajes siguen una distribución normal para cada segmento poblacional.

En este tipo de escenarios se puede hablar de una función de distribución $f(\bullet; \theta)$ que depende de un parámetro $\theta \in \Omega$, donde Ω se conoce como **espacio de parámetros**; el objetivo consiste en deducir el valor de θ a partir de los datos recabados.

Definición 1.21. Sea X una variable aleatoria. Una **muestra de X de tamaño N** es una colección de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ tales que son independientes y que comparten la misma distribución de X

Proposición 1.0.5. Sea X una variable aleatoria que admite una función de densidad f_X , y sea $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ una muestra. La función de densidad de probabilidad conjunta para el vector $[X_1, X_2, \dots, X_N]$ es

$$f_{[X_1, \dots, X_N]}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N f(x_j) \quad (1.33)$$

Mientras no se indique lo contrario, las variables aleatorias en la muestra no están ordenadas.

Proposición 1.0.6. Sea X una variable aleatoria, $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ una muestra y $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un conjunto de observaciones. Se define la **función de distribu-**

ción muestral como

$$F_{X;N}(x) := \frac{1}{N} \sum_{x_j \leq x} 1 \quad (1.34)$$

Proposición 1.0.7. Si el tamaño de una muestra de X se vuelve arbitrariamente grande, la función de distribución muestral converge en probabilidad a F , la función de probabilidad acumulada de X

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{X;N} = F_X \quad (1.35)$$

Definición 1.22. Un **estadístico** es una función de las observaciones en una muestra

Ejemplo en pagina 112 del libro de lindgren. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sea $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_j$, entonces

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \quad (1.36)$$

Teorema 1.1 (Cramér-Rao). Sea $\hat{\theta}$ un estimador insesgado de θ . Si la función de verosimilitud asociada al estimador, L , es diferenciable, entonces

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \left(\text{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} L(X; \theta) \right] \right)^{-2} \quad (1.37)$$

La igualdad se alcanza si y sólo si existe una función positiva k tal que puede escribirse

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(X; \theta) = k(\theta) [\hat{\theta}(X) - \theta] \quad (1.38)$$

Definición 1.23. Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y X_1, \dots, X_N una muestra de tamaño N . Un estimador $\hat{\theta}$ es **suficiente** si la distribución de la variable $X|\hat{\theta}$ no depende de θ

Teorema 1.2. Sea X una variable aleatoria que depende del parámetro θ . Un estadístico $\hat{\theta}$ es suficiente si y sólo si existen funciones g y h tales que

$$f_X(\bullet; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h_X(\bullet) \quad (1.39)$$

Definición 1.24. El **error de media cuadrática** para el estimador $\hat{\theta}$ se define como

$$EMC(\hat{\theta}) := \text{E} \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] = \text{Var}(\hat{\theta}) + (\text{E}[\theta] - \theta)^2 \quad (1.40)$$

1.3. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Definición 1.25. Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y X_1, \dots, X_N una muestra de tamaño N . Un estimador $\hat{\theta}$ es **insesgado** si cumple que

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (1.41)$$

Se puede hablar del **sesso** del estimador $\hat{\theta}$ como $E[\hat{\theta}] - \theta$

Definición 1.26. Sea X una variable aleatoria que depende de un parámetro θ y $\{\hat{\theta}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de estimadores definidos para muestras de X de tamaño arbitrario. La familia de estimadores se dice **consistente** si para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (1.42)$$

Definición 1.27. Así como en la definición anterior, se dice que a familia de estimadores converge en media cuadrática si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = 0 \quad (1.43)$$

Si esto se cumple, se dice que la familia de estimadores es **consistente en media cuadrática**

Proposición 1.2.1. Si $\hat{\theta}_n$ es una familia de estimadores consistente en media cuadrática, entonces es consistente

Proposición 1.2.2. COROLARIO Una condición suficiente para que una familia sea consistente en media cuadrática es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n] = \theta \quad (1.44)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0 \quad (1.45)$$

Teorema 1.3 (Límite central). Sea $\{X_1, \dots, X_N\}$ una muestra de tamaño N de una variable aleatoria con distribución normal, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Defínase la variable aleatoria Y_N como

$$Y_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i - N\mu}{\sqrt{N\sigma^2}} \quad (1.46)$$

Entonces $\{Y_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge en probabilidad a una distribución normal $N(0, 1)$.

1.4. Procesos estocásticos

Los procesos estocásticos se definen formalmente como variables aleatorias cuyo espacio muestral es un espacio de funciones, para lo cual deben definirse previamente una σ -álgebra *suficientemente buena* para estos espacios. Intuitivamente es posible definir los procesos estocásticos como una mera concatenación de variables aleatorias; sin embargo, el usar un conjunto infinito de ellas representa un problema desde el punto de vista formal. Debido a las limitaciones del presente trabajo, el tema se expone de manera formal pero incompleta; la exposición se basa en aquella presentada por [Kolmogorov?], de modo que el lector interesado debe dirigirse a dicho texto.

Primeramente se define a $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, el conjunto de funciones con dominio en \mathcal{T} y codominio en \mathbb{R} , el cual será usado como espacio de eventos¹. A modo de *intervalos generalizados* se definen los conjuntos de la forma

$$I([t_1, a_1, b_1], \dots, [t_N, a_N, b_N]) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mid f(t_i) \in (a_i, b_i), i = 1, \dots, N\} \quad (1.47)$$

Es relativamente fácil extender la familia de estos intervalos por uniones e intersecciones finitas. Es un tanto más interesante definir una σ -álgebra generada por éstos conjuntos, pero tal parte se omite en el presente trabajo. En el texto por Kolmogorov se explora con mayor detalle la existencia de dicha σ -álgebra –y por tanto, la existencia de procesos estocásticos.

Definición 1.28. *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es una colección de variables aleatorias indexadas por el símbolo $t \in \mathcal{T}$.*

Definición 1.29. *Se dice que un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un **proceso estocástico en \mathbb{R}** si cumple que $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}$. Por notación, el índice t es referido como **tiempo**, mientras que \mathcal{T} es el conjunto de **tiempos admisibles**.*

Por simplicidad, durante el presente trabajo sólo se usarán dos familias de procesos estocásticos en \mathbb{R} : si \mathcal{T} es un intervalo, o si es parte de una *malla*. La primera familia se reserva para modelar las señales electrofisiológicas, mientras que la segunda se usará para modelar los registros de estas mismas señales. La distinción consiste en que las señales electrofisiológicas sólo pueden ser registradas digitalmente en un conjunto finito de puntos en el tiempo; la atención del texto recae en ambos grupos de procesos, en espera que sus características sean similares de algún modo.

¹Se puede definir análogamente a $\mathbb{C}^{\mathcal{T}}$, o espacios más generales

1.4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Definición 1.30. Se dice que un proceso estocástico en \mathbb{R} es a **tiempo continuo** si existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que

$$\mathcal{T} = (a, b) \quad (1.48)$$

Así mismo, se dice que un proceso estocástico en \mathbb{R} es a **tiempo discreto** si existen $t_0, \Delta_X \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que

$$\mathcal{T} = \{t_0 + t \in \mathbb{R} \mid t \cdot \Delta_X \in \mathbb{Z}\} \quad (1.49)$$

Por notación, Δ_X es referida como *frecuencia de muestreo*.

Conviene destacar que el nombre *frecuencia de muestreo* hace referencia al proceso de registro, que algunos textos es referido como *muestreo*; esta terminología entra claramente en conflicto con las muestras de una variable aleatoria. En lo siguiente se evita llamar muestreo al proceso de registro, pero se conservará el término *frecuencia de muestro*.

Cabe mencionar que hay un conflicto similar con los términos *tiempo continuo* y *tiempo discreto*; estos términos no guardan ninguna analogía con las variables aleatorias discretas y continuas, ni con los espectro de potencias puramente continuos o puramente discretos (ver el capítulo siguiente). Estos términos se usan porque se encuentran muy extendidos en la literatura sobre análisis de señales.

Refiriendo a los proceso estocásticos como colecciones de variables ???? Para evitar confusiones, los elementos que componen a un proceso estocástico son denotados como:

$\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$	Todo el proceso
$X(t)$	Variable aleatoria en el proceso, para el tiempo t
$x(t)$	Una realización de $X(t)$
$F_{X(t)}$	Función de probabilidad acumulada para $X(t)$

La estacionariedad es un indicativo de la *homogeneidad* de un proceso; un proceso *muy* estacionario sería aquél cuya variable aleatoria que tiene distribuciones conjuntas que no cambian con el tiempo. La definición 1.31 representa con exactitud tales requerimientos, pero se le considera *innecesariamente fuerte*; una definición común es 1.32.

Definición 1.31 (Estacionariedad fuerte). *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice fuertemente*

te estacionario si para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ y cualquier τ tal que $t_i + \tau \in \mathcal{T}$, se cumple que

$$F_{[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]} \equiv F_{[X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau)]}$$

Donde $F_{[v_1, v_2, \dots, v_N]}$ es la FPA conjunta para el vector $[v_1, v_2, \dots, v_N]$

Definición 1.32 (Estacionariedad de orden m). *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice estacionario de orden m si, para cualesquiera $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ y cualquier τ tal que $t_i + \tau \in \mathcal{T}$, se cumple que*

$$\mathbb{E}[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2)\cdots X^{m_n}(t_n)] = \mathbb{E}[X^{m_1}(t_1 + \tau)X^{m_2}(t_2 + \tau)\cdots X^{m_n}(t_n + \tau)]$$

para cualesquiera enteros m_1, m_2, \dots, m_n tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$

Cabe mencionar que la definición 1.32 no es equivalente a la definición 1.31, ni aún cuando $m \rightarrow \infty$; sin embargo permite asegurar que los *momentos* ($\mathbb{E}[X^k]$ para algún k) del proceso sean invariantes en el tiempo, y éstos suelen encontrarse asociados a cantidades físicas.

Como un ejemplo muy particular conviene destacar la energía, que suele ser asociada con el segundo momento (definición 1.53). Dicha conexión motiva a escoger una definición de estacionariedad que permita analizar la energía del proceso: la estacionariedad débil.

Definición 1.33 (Estacionariedad débil). *Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice débilmente estacionario si existen constantes $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ y una función $R : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tales que, para cualesquiera $t, s \in T$ se cumple*

- $\mathbb{E}[X(t)] = \mu$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = R(s - t)$

Proposición 1.3.1. *Un proceso estocástico es débilmente estacionario si y sólo si es estacionario de orden 2.*

La proposición anterior deja en claro que la estacionariedad débil puede entenderse como una *estabilidad* en los momentos conjuntos de orden al menos dos, condición suficiente para trabajar con la media y la varianza del proceso. Sin embargo,

1.4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

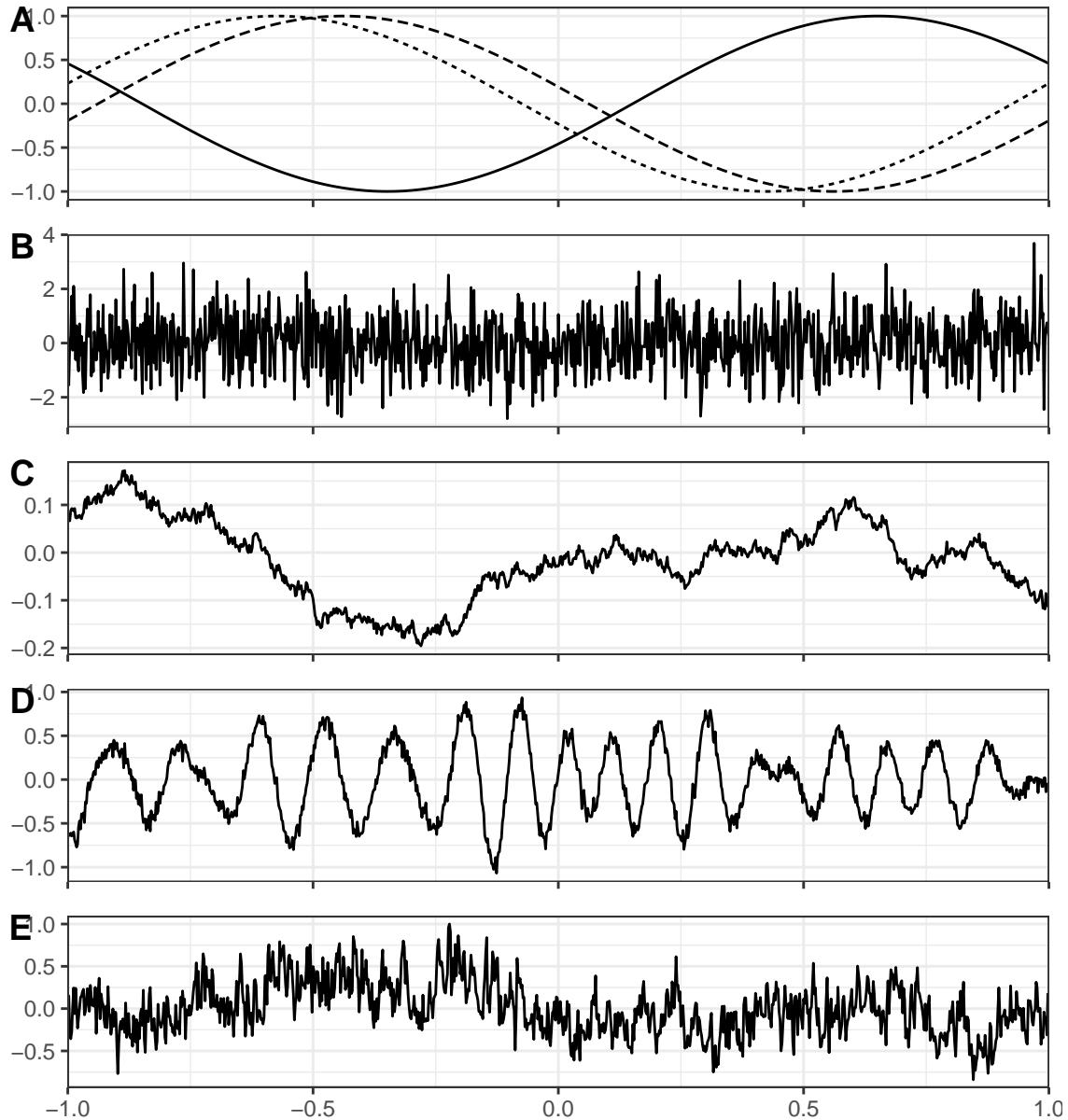


Figura 1.2: Realizaciones de algunos procesos débilmente estacionarios. **A.** Proceso oscilante, del cual se grafican tres realizaciones diferentes. **B.** Proceso ruido blanco. **C.** Proceso de medias móviles (MA). **D.** Proceso tipo alfa. **E.** Proceso ruido rosa.

en ocasiones se requerirán condiciones más fuertes sobre los procesos. Como ejemplo, cuando se quiere obtener la varianza para un estimador del espectro de potencias, se necesita que la serie sea estacionaria de orden 4.

En el marco del modelo de series electrofisiológicas, conviene suponer que los registros corresponden a procesos a tiempo continuo que son continuos de alguna forma; se ha elegido la continuidad en media cuadrática.

Cuando una señal electrofisiológica se modela como un proceso estocástico, es necesario suponer que su media y varianza son finitas en todo momento. Esto se debe a que existen umbrales *naturales* en los que ocurren las mediciones, fuera de los cuales la vida misma es imposible; este comentario aplica también sobre la energía dentro del sistema. Más aún, la actividad eléctrica cerebral y muscular presentan una actividad característica del estado de reposo (*actividad basal*) de la cual no se alejan mucho el resto del tiempo; esta suerte de media intuitiva es referida como *línea base*, y se refleja dentro del modelado con la insistencia heurística de tratar a los procesos como si tuvieran media cero.

Observación 1.1. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocovarianza. Si R es continua en 0 entonces es continua en todo \mathbb{R} .*

Definición 1.34 (Continuidad estocástica en media cuadrática). *Un proceso a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática, en un tiempo admisible t_0 si*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbb{E} [(X(t) - X(t_0))^2] = 0$$

Proposición 1.3.2. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario, y sea R su función de autocovarianza. El proceso es estocásticamente continuo si y sólo si R es continua en 0.*

1.5. Pruebas de hipótesis

Una hipótesis es una afirmación sobre algún aspecto desconocido. Es tarea común en la estadística el decidir si alguna afirmación puede sostenerse a partir de la información proporcionada por un conjunto de observaciones. A partir de la aplicación

1.5. PRUEBAS DE HIPÓTESIS

masiva de pruebas neuropsicológicas a un grupo de adultos mayores uno puede preguntarse, por ejemplo, si hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas, o si la edad de los participantes está correlacionada con su desempeño en tareas de memoria. En la tabla ... se muestran los datos sobre una simulación (artificial) de dicho escenario.

Una herramienta de uso común para producir estas decisiones es la **pruebas de hipótesis**, la cual consiste en dos afirmaciones complementarias, es decir, tales que exactamente una de ellas es verdadera; tales afirmaciones son referidas como *hipótesis*, y deben elegirse de forma que sean equivalentes a la decisión que se busca. Usualmente la primera de las hipótesis (hipótesis nula, H_0) representa la afirmación más general o que se cree verdadera por omisión, mientras que la segunda hipótesis (hipótesis alternativa, H_A) se tomará como verdadera si existe suficiente información para rechazar la veracidad de la primera. El enfoque de prueba de significancia es tomar un estadístico $\hat{\theta}$ y evaluarlo sobre los datos, posteriormente se analiza qué tan diferente es el valor observado del típico cuando la hipótesis nula es verdadera.

Los estadísticos de prueba suele ser un estadístico construido para tener una distribución conocida salvo unos pocos parámetros fáciles de estimar. La interpretación usual es que, si H_0 es verdadera entonces $\hat{\theta}$ puede no tener el valor predicho debido a factores ajenos al fenómeno estudiado, en consecuencia se suele hablar de una región de rechazo en el espacio de estados (ver más adelante). Bajo esta interpretación, un valor de $\hat{\theta}$ dentro de la región de rechazo significa que los datos representan evidencia para rechazar H_0 ; un no-rechazo no significa precisamente que H_0 sea verdadera, sino que las observaciones no representan evidencia suficiente para rechazar H_0 .

Definición 1.35. *En una prueba de hipótesis, rechazar H_0 cuando es verdadero es un **error del tipo I**. Así mismo, aceptar H_0 cuando es falsa es un **error del tipo II**.*

La naturaleza e interpretación de los estadísticos de prueba suelen ser muy particulares de las situaciones bajo las cuales son definidos. Una forma típica de normalizar los diferentes estadísticos es a través del *p*-valor, definido como la probabilidad de que ocurra un valor extremo del estadístico de prueba; el *p*-valor suele interpretarse como la fuerza de la evidencia contra H_0 .

Definición 1.36. *Sea $\hat{\theta}$ un estadístico de prueba. El **p-valor** asociado al $\hat{\theta} = \theta_0$ es la probabilidad $P(\hat{\theta} > \theta_0)$*

Una **prueba de significancia** se entiende como una pruebas de hipótesis para algunos p -valores predefinidos, usualmente 0.05, 0.01, 0.005, entre otros. Un error común, pero muy extendido, es interpretar al p -valor como la probabilidad de obtener H_0 .

Definición 1.37. *Dada una muestra poblacional y dos afirmaciones complementarias H_0 y H_A , una **prueba de hipótesis** es una regla de decisión que asigna a cada punto del espacio de estados una acción del conjunto Aceptar H_0 , rechazar H_A , Rechazar H_0 , aceptar H_A .*

*Al conjunto del espacio muestral donde se rechaza H_0 se le denomina **región crítica**.*

Una propiedad deseable para un estadístico de prueba es poder acotar los errores de tipo I y de tipo II; para ello, para alguna región crítica arbitraria \mathcal{C} se define el **nivel de significancia** de la prueba como

$$\alpha := \sup_{\theta \in H_0} p(\mathcal{C} | \theta) \quad (1.50)$$

Ejemplo: Retomando los datos de la tabla ..., considérese la pregunta *¿Los hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas neuropsicológicas?*. En este ejemplo se supone que los puntajes de los hombres en la prueba siguen una distribución normal con media μ_H y varianza 1, y similarmente para las mujeres con media μ_M y varianza 1. Como hipótesis nula se elige la posibilidad de que en promedio ambos grupos (hombre y mujeres) obtengan el mismo puntaje en la prueba, es decir

$$H_0 : \mu_H = \mu_M \quad (1.51)$$

y como hipótesis alternativa está la posibilidad de que los puntajes sean diferentes

$$H_A : \mu_H \neq \mu_M \quad (1.52)$$

1.6. Espacios de Hilbert

1.7. Transformada de Fourier

Para exponer formalmente lo que es la transformada de Fourier, conviene mencionar los espacios de las **series p -sumables** (ℓ^p), y las **funciones p -integrables** sobre un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ (L_I^p).

$$\begin{aligned}\ell^p &:= \left\{ s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^p < \infty \right\} \\ L_I^p &:= \left\{ S : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_I |S(t)|^p dt < \infty \right\}\end{aligned}$$

Estos conjuntos admiten las operaciones suma (+), producto (\cdot) y multiplicación por escalares de la manera usual. Para el caso particular $p = 2$, los conjuntos ℓ^2 y L_I^2 admiten los siguientes productos internos:

$$\begin{aligned}\langle s, z \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(n)} \\ \langle S, Z \rangle &= \int_I S(t) \overline{Z(t)} dt\end{aligned}$$

Usando dichos productos internos, junto con las normas y métricas que inducen, los conjuntos ℓ^2 y L_I^2 tienen estructura de *espacio de Hilbert*.

Las definiciones anteriores revelan cómo ℓ^2 y L_I^2 son *muy* parecidos, luego entonces se puede definir la transformada de Fourier como una conexión natural entre ellos.

Definición 1.38 (Serie de Fourier). *Sea $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una función periódica con periodo $2T$ y tal que $S \in L_{[-T,T]}^2$. Se dice que A es la serie de Fourier para S si satisface*

$$A(n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t) e^{-i|n|t/2T} dt$$

Definición 1.39 (Transformada de Fourier). *Sean S y A como en la definición 1.38. Se le llama transformada de Fourier a la función $\mathcal{F}_T : L_{[-T,T]}^2 \rightarrow \ell^2 : S \mapsto A$*

Puede interpretarse a A como las *coordenadas* de S en $L^2_{[-T,T]}$, usando una base de funciones ortonormales $\{e^{i|n|t/2T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$; esta base en particular es conocida como la **base de Fourier**. Cabe mencionar las siguientes propiedades de \mathcal{F}_T

- Es lineal, $\mathcal{F}_T[cS + Z] = c\mathcal{F}_T[S] + \mathcal{F}_T[Z]$
- **No** es invertible, aunque se le suele definir una pseudoinversa como

$$\mathcal{F}_T^{\text{inv}} : \ell^2 \rightarrow L^2_{[-T,T]} : A \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n) e^{i|n|t/2T}$$

Se define, de manera pragmática, la **energía disipada** y la **potencia** de una función S en un intervalo $[a, b]$ como

$$\begin{aligned} \text{energía}[S]_{[a,b]} &= \int_a^b |S(t)|^2 dt \\ \text{potencia}[S]_{[a,b]} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b |S(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (1.53)$$

Es evidente que la energía y potencia están relacionadas a la norma en $L^2_{[-T,T]}$ inducida por su producto interno. Dicha relación junto a las propiedades *agradables* de \mathcal{F}_T pueden ser usadas para conectar la energía con la norma en ℓ^2 (teorema 1.4): la energía disipada por una función equivale a la suma de las energías disipada por cada una de sus *componentes* en la base de Fourier. Conviene, entonces, definir una función que *desglose* estos *aportes*.

Teorema 1.4 (Parseval). *Sea $S \in L^2_{[-T,T]}$, y sea $A = \mathcal{F}[S]$. Se cumple que*

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2$$

Un elemento que será de crucial importancia en el desarrollo posterior es la **con-**

volución (*), una tercera operación binaria en estos espacios y definida como

$$[s * z](\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau - n)}$$

$$[S * Z](\tau) = \int_I S(t) \overline{Z(\tau - t)}$$

donde \bar{c} es el conjugado complejo de c .

Teorema 1.5. *Sean $f, g \in \ell^2$, las cuales poseen una transformada de Fourier de la forma*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt$$

Entonces

$$F(\omega) \overline{G(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt \quad (1.54)$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) du \quad (1.55)$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) du \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u-t)} g(u - t) du \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \overline{G(\omega)} du \\ &= \overline{G(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) du \\ &= \overline{G(\omega)} F(\omega) \end{aligned}$$

□

$$[s * z](\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau - n)}$$

$$[S * Z](\tau) = \int_I S(t) \overline{Z(\tau - t)}$$

Teorema 1.6. COROLARIO. Usando $f \equiv g$ en el teorema anterior

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad (1.56)$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u - t) du \quad (1.57)$$

1.8. Otros resultados importantes

Los siguientes teoremas y proposiciones se refieren a propiedades únicamente de los objetos descritos en el capítulo. Aunque no son una consecuencia clara de los resultados expuestos anteriormente, son una base importante de algunos resultados que se expondrán en capítulos posteriores.

El teorema de Isserlis es una identidad relativamente poco conocida sobre los cuartos momentos de una distribución multinormal; el caso particular de cuatro variables será usado para calcular la covarianza de algunos estimadores del espectro de potencias.

Proposición 1.6.1. Sea g una función cuando menos dos veces derivable cuyo dominio es \mathcal{D}_g , y sea X una variable aleatoria real tal que $P(X \notin \mathcal{D}) = 0$. Pueden usarse las siguientes aproximaciones

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx g(\mathbb{E}[X]) \quad (1.58)$$

$$\text{Var}(g(X)) \approx \text{Var}(X) [g'(\mathbb{E}[X])]^{-2} \quad (1.59)$$

Demostración. Usando polinomio de Taylor de grado 2 para g , alrededor de $\mathbb{E}[X]$ y evaluada en X

$$g(X) = g(\mathbb{E}[X]) + (X - \mathbb{E}[X]) g'(\mathbb{E}[X]) + \frac{(X - \mathbb{E}[X])^2}{2} g''(\xi) \quad (1.60)$$

1.8. OTROS RESULTADOS IMPORTANTES

donde la variable aleatoria ξ satisface $|X - \xi| \leq |X - E[X]|$. La aproximación, con una obvia pérdida, consiste en considerar que $\frac{1}{2} (X - E[X])^2 g''(\xi) \approx 0$.

$$g(X) \approx g(E[X]) + (X - E[X]) g'(E[X]) \quad (1.61)$$

Si se toma el valor esperado de ambos lados

$$E[g(X)] \approx E[g(E[X])] + E[(X - E[X]) g'(E[X])] = g(E[X]) \quad (1.62)$$

Lo cual confirma la primera parte del resultado. Para verificar la segunda parte del mismo, se elevan ambos lados al cuadrado

$$\begin{aligned} [g(X)]^2 &\approx [g(E[X])]^2 + 2g(E[X])(X - E[X])g'(E[X]) \\ &\quad + (X - E[X])^2 [g'(E[X])]^2 \end{aligned} \quad (1.63)$$

Posteriormente se toma el valor esperado de ambos lados

$$\begin{aligned} E[[g(X)]^2] &\approx E[[g(E[X])]^2] + 2g(E[X])E[X - E[X]]g'(E[X]) \\ &\quad + E[(X - E[X])^2] [g'(E[X])]^2 \\ &= [g(E[X])]^2 + \text{Var}(X)[g'(E[X])]^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\text{Var}(g(X)) = E[[g(X)]^2] - [g(E[X])]^2 \approx \text{Var}(X)[g'(E[X])]^2 \quad (1.64)$$

de donde se obtiene la segunda parte del resultado.

Antes de concluir la demostración, conviene discutir bajo qué condiciones la aproximación es eficiente. La forma completa de la expresión 1.60 contempla el término

$$\frac{(X - E[X])^2}{2} g''(\xi) \quad (1.65)$$

Como $|\xi| <$

□

Corolario 1.6.1. *Si se usa el teorema anterior con $g = \log$ se obtiene*

$$\mathbb{E}[\log(X)] \approx \log(\mathbb{E}[X]) \quad (1.66)$$

$$\text{Var}(\log(X)) \approx \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbb{E}[X])^2} \quad (1.67)$$

Teorema 1.7 (Isserlis). *Sea $[X_1, X_2, X_3, X_4]$ un vector aleatorio siguiendo una distribución multinormal con media cero y matriz de covarianza finita. Se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 X_3 X_4] = \mathbb{E}[X_1 X_2] \mathbb{E}[X_3 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_3] \mathbb{E}[X_2 X_4] + \mathbb{E}[X_1 X_4] \mathbb{E}[X_2 X_3] \quad (1.68)$$

Proposición 1.7.1. *Sea \mathcal{R} el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita. Se define un producto interno entre dos variables aleatorias arbitrarias, U y V , como*

$$\langle U, V \rangle := \mathbb{E}[U, \overline{V}] \quad (1.69)$$

Usando la suma y productos usuales de variables aleatorias, junto al producto interno descrito, el espacio \mathcal{R} tiene la estructura de espacio de Hilbert.

Proposición 1.7.2. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario y R su función de autocorrelación. Se cumple que R es una función positiva definida.*

Teorema 1.8 (Bochner). *Sea f una función real arbitraria. Una condición suficiente y necesaria para que f sea definida positiva es que exista una función real F monótonamente creciente, continua por la derecha y acotada tal que puede escribirse*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega) \quad (1.70)$$

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 2

Espectro de potencias

Existe una larga tradición para entender y modelar las señales electrofisiológicas en términos de *ondas y frecuencias*, ya que fundamentalmente son fenómenos eléctricos [28]. En este capítulo se expone el enfoque *usual* en cuanto a modelar las señales electrofisiológicas como procesos estocásticos a los cuales se puede definir un *espectro de potencias*. El espectro de potencias es entendido como una generalización para el módulo de la transformada de Fourier; conserva algunas de sus propiedades, como el ser una norma inducida por un producto interno, así como la interpretación asociada como distribución de *energía*.

En la sección 2.1 se define el espectro de potencias para procesos estocásticos débilmente estacionarios y se establecen condiciones de existencia; la discusión sobre unicidad se ubica en la sección 2.2, donde se define una forma de representar al proceso en términos de su espectro. Finalmente, la sección 2.5 trata sobre la estimación del espectro de un proceso a partir de una realización del mismo; se aborda el enfoque de obtener una versión *suavizada* del espectro en aras de que los estimadores sean consistentes.

Un hecho que conviene reiterar es que todos los temas son expuestos dos veces: para procesos estocásticos a tiempo continuo y para aquellos a tiempo discreto; Cabe mencionar que en este capítulo se trata únicamente el caso de procesos estocásticos *débilmente estacionarios*, mientras que en el siguiente se explora una familia más

2.1. FUNCIÓN DE DENSIDAD ESPECTRAL

general de procesos estocásticos. Dentro del contexto global del presente trabajo, el capítulo entero pudiera etiquetarse como el estudio de un caso particular salvo por simplicidad expositiva.

2.1. Función de densidad espectral

La forma más *natural* de definir un espectro de potencias para un proceso estacionario es a través de la transformada de Fourier de sus realizaciones. Tal enfoque no funciona en general, pues no se puede garantizar que las realizaciones arbitrarias admitan una transformada de Fourier (ni aún de Fourier-Stieltjes). Se define entonces el espectro en base a un límite de subcolecciones de la realización, de modo que éstas sí admitan una transformada de Fourier.

Definición 2.1 (Función de densidad espectral, tiempo continuo). *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso estacionario a tiempo continuo. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] \quad (2.1)$$

[? ejemplos: ruido rosa esta bien definido, proceso oscilatorio no esta definido, ruido blanco no esta definido]

Definición 2.2 (Función de densidad espectral, tiempo discreto). *Sea $\{X(t)\}_{t/\Delta_t \in \mathbb{Z}}$ un proceso estacionario a tiempo discreto. Se define su función de densidad espectral como*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2N} \left| \sum_{n=-N}^N X(n\Delta_t) e^{-i\omega n\Delta_t} \right|^2 \right] \quad (2.2)$$

2.2. Representación espectral

Teorema 2.1. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso continuo de media cero, débilmente estacionario, y que admite una función de densidad espectral h , sea R su función de autocovarianza. Entonces*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Demostración. Usando que $h = \lim_{T \rightarrow \infty} G_T$, nótese que

$$\begin{aligned}|G_T(\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] d\tau\end{aligned}$$

Esta integral puede verse como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación de la serie truncada, \widehat{R}_T

$$\begin{aligned}\widehat{R}_T(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T X(u) X(u - |\tau|) du & , |\tau| \leq T \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases}\end{aligned}$$

Así entonces

$$\begin{aligned}h(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} |G_T(\omega)|^2 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{2T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{R}_T(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} E \left[\widehat{R}_T(\tau) \right] d\tau\end{aligned}$$

2.2. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

Para esto, si $|\tau| \leq 2T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\widehat{R}_T(\tau)] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T X(u) X(u - \tau) du \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T \mathbb{E}[X(u) X(u - \tau)] du \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T+|\tau|}^T R(\tau) du \\ &= \frac{1}{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) R(\tau)\end{aligned}$$

pero si $|\tau| > 2T$ entonces $\widehat{R}_T = 0$. Luego entonces

$$\begin{aligned}h(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{i\omega t} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) R(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau\end{aligned}$$

con

$$g_T = \begin{cases} 1 - |\tau|/2T & , |\tau| \leq 2T \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

Para establecer el límite anterior nótese que para cualesquiera τ, T se cumple que $0 \leq g_\tau \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g_T(\tau)| |R(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)| d\tau\end{aligned}$$

Para cada ω , el módulo de $\int_{-T}^T e^{i\omega t} g_\tau(t) R(\tau) d\tau$ es monótonamente creciente y acotado, luego entonces, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se

tiene que

$$\begin{aligned}
 h(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g_T(t) R(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) \right] R(\tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} R(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

□

Es posible definir una **función de espectro integrado**, H , como

$$H(\omega_2) - H(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} h(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 \tau} - e^{i\omega_1 \tau}}{i\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

Usando que h es una función simétrica tal que $\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = \sigma_X^2$, entonces puede escribirse

$$H(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_1 \tau} - 1}{i\tau} R(\tau) d\tau = \frac{\sigma_X^2}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega\tau)}{\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

Conviene remarcar que el teorema 2.1 sólo aplica si el proceso admite una función de densidad espectral, y en consecuencia no es claro si el espectro integrado queda bien definido para procesos que no admiten una densidad espectral. Por ejemplo, considérese el proceso P definido como

El siguiente teorema permite establecer condiciones generales para las cuales se puede definir un espectro de potencias para un proceso estacionario.

Teorema 2.2 (Wiener-Khintchine). *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in T}$ débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función F que tenga las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

2.2. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Como notación, el factor dF será referido como la función de espectro integrado normalizado para el proceso.

Una vez definido y probada la existencia de la función de espectro integrado normalizado dF , se define la **función de espectro integrado** dH (sin el adjetivo *normalizado*) como $dH := \sigma_X^2 dF$.

Una vez establecidas las condiciones de existencia para el espectro de potencias de un proceso débilmente estacionario, una pregunta muy natural es sobre la unicidad. Cuando se discutió la transformada de Fourier para funciones en L^2 , se dejó en claro que es un operador invertible salvo por su núcleo (definición ?).

Se mostró que la transformada de Fourier puede ser parameterizada en módulo y argumento, siendo el primero es equivalente (salvo una función invertible) al espectro. El espectro de un proceso estacionario fue definido como

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|G_T(\omega)|^2]$$

$$G_T(\omega) = \int_{-T}^T e^{i\omega t} X(t) dt$$

la componente G_T cumple intuitivamente el papel de la transformada de Fourier, pero es omitida para demostrar más fácilmente la existencia del espectro h . Contemplando la parametrización de la transformada de Fourier, ¿puede definirse algo equivalente al argumento para un proceso estacionario? [? mejorar redacción]

Teorema 2.3. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $\mathbb{E}[dZ(\omega)] = 0$

- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

Demostración. Se mostró anteriormente que \mathcal{R} , el conjunto de variables aleatorias con media cero y varianza finita, tiene la estructura de espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle U, V \rangle := \text{Cov}(U, V) = \mathbb{E}[U, \bar{V}] \quad (2.7)$$

Ahora bien, un proceso débilmente estacionario $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ puede verse como una *curva* en \mathcal{R} indexada por $t \in \mathcal{T}$. Por el teorema de Winer-Khintchine, existe un proceso ortogonal dH tal que puede escribirse

$$\langle X(t), X(s) \rangle = R(t-s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (2.8)$$

De manera más general, puede hablarse de una familia de funciones $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ (anteriormente se usó $\phi_t(\omega) = e^{i\omega t}$) y escribir

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) \overline{\phi_s(\omega)} dH(\omega) \quad (2.9)$$

Usando la familia de funciones $\{\phi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ puede construirse un segundo espacio de Hilbert, \mathcal{H}_ϕ , como las combinaciones lineales de estas funciones. A este segundo espacio se le define el producto interno

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) \quad (2.10)$$

Posteriormente se define un mapeo $M : \mathcal{H}_\phi \rightarrow \mathcal{R}$ como

$$M[\phi_t] := X(t) \quad (2.11)$$

el cual se extiende linealmente para cualesquiera coeficientes $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$ y tiempos admisibles $t_1, t_2, \dots \in \mathcal{T}$

$$M \left[\sum_i c_i \phi_{t_i} \right] = \sum_i c_i M[\phi_{t_i}] \quad (2.12)$$

2.2. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

Trivialmente, M conserva productos internos; basta notar que

$$\langle X(t), X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\omega) \overline{\phi_2(\omega)} dH(\omega) = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_H \quad (2.13)$$

Ahora, para trabajar con las funciones ϕ conviene descomponerlas en una base más *sencilla*, como límite de funciones simples. Para ello, se define una función indicadora

$$I(\omega; \omega_0, \omega_f) := \begin{cases} 1 & , \omega_0 \leq \omega < \omega_f \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.14)$$

Luego, sea $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$ una partición del intervalo $[-n, n]$, con $n \gg N$. Entonces, en virtud del teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\phi_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \quad (2.15)$$

Usando tal representación para las funciones ϕ 's, se define a Z como

$$Z(\omega_f) - Z(\omega_0) = M[I(\omega; \omega_f, \omega_0)] \quad (2.16)$$

Luego entonces, aplicando M a ambos lados de la expresión 2.15 se obtiene

$$\begin{aligned} M[\phi_t(\omega)] &= M \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N M[I(\omega; \omega_{i-1}, \omega_i)] \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (Z(\omega_i) - Z(\omega_{i-1})) \left[\inf_{\omega \in [\omega_{i-1}, \omega_i]} \phi_t(\omega_i) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \end{aligned}$$

El resultado que se busca queda establecido porque $M[\phi_t] = X(t)$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(\omega) dZ(\omega) \quad (2.17)$$

□

2.2.1. Representación de procesos a tiempo discreto

La existencia de espectros para procesos a tiempo discreto es dada por el teorema

Teorema 2.4 (Wold). *Una condición suficiente y necesaria para que ρ sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ débilmente estacionario es que exista una función F con las siguientes propiedades*

- *Monótonamente creciente*
- $F(-\pi) = 0$
- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

Demostración. Por simplicidad, supóngase que $\Delta_X = 1$. A tiempo discreto, la función de autocovarianza adquiere la forma de una secuencia $\{R(\tau)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}$. Se define una función R_C que es igual a R pero cuyo dominio es \mathbb{R} , de la forma

$$R_C(\tau) = (1 - \tau + \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor) + (s - \lfloor \tau \rfloor) R(\lfloor \tau \rfloor + 1) \quad (2.18)$$

Se demuestra en Priestley 1963 [?] que existe un proceso estacionario cuya función de autovarianza es R_C , luego entonces por el teorema 2.2 existe una función de distribución Q tal que

$$R_C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \quad (2.19)$$

Dado que R y R_C son iguales cuando τ es entero, se puede considerar la siguiente

2.2. REPRESENTACIÓN ESPECTRAL

manipulación con $\tau \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dQ(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{2s+1\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2\pi s)\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} Q(\omega + 2\pi s) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente se puede definir a F , la función de densidad descrita por el teorema, usando

$$dF(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \quad (2.20)$$

El que F sea monótonamente se deduce de que Q lo es. Como dQ es simétrica, puede definirse convenientemente que $F(-\pi) = 0$ y $F(\pi) = 1$ con base a que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{s=-\infty}^{\infty} Q(\omega + 2\pi s) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dQ(\omega) = 1 \quad (2.21)$$

□

En virtud del teorema de Wold, se puede obtener una variante del teorema 2.3 para procesos a tiempo discreto cambiando el intervalo de integración.

Teorema 2.5. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo discreto, débilmente estacionario y de media 0. Existe un proceso ortogonal $\{Z(\omega)\}$ tal que, para todo tiempo ω admisible, se puede escribir*

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(t)\}$ tiene las siguientes propiedades para todo ω

- $E[dZ(\omega)] = 0$
- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = dH(\omega)\delta(\omega, \lambda)$

Donde $dH(\omega)$ el espectro integrado de $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$

La demostración es completamente análoga, reemplazando el teorema de Winer-Khintchine por el de Wold. Como notación, las representaciones en los teoremas 2.3 y 2.5 son referidas como **representaciones de Wold-Cramér**.

2.3. Efecto alias

Hasta ahora se han tratado por separado los procesos a tiempo discreto y a tiempo continuo. Una vez expuestos algunos resultados importantes, se procede a explorar la familia de los procesos a tiempo discreto generados como subcolección de algún proceso a tiempo continuo. Dicha familia se vuelve importante porque se ha decidido modelar a las señales electrofisiológicas como procesos a tiempo continuo, pero sólo se pueden obtener registros de ellas a tiempo discreto.

Este tópico es relevante desde el punto de vista práctico, ya que existe una amplia variedad de condiciones técnicas bajo las cuales se suelen efectuar los registros. La AASM establece un mínimo de 128 puntos por segundo (Hz) para registrar el polisomnograma, pero la frecuencia de muestreo usualmente es decidida dependiendo del fenómeno a observar y las características del aparato de registro a usarse. Siguiendo esta idea, conviene hablar del posible efecto de obtener registros con una mayor o menor cantidad de puntos por unidad de tiempo

Considérese un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, y sea $\Delta_t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Se construye al proceso $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$Y(n) = X(n\Delta_t) \quad (2.22)$$

En virtud del teorema 2.3, $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.23)$$

2.3. EFECTO ALIAS

Luego entonces puede reescribirse

$$\begin{aligned}
 Y(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{(2k-1)\pi/\Delta_t}^{(2k+1)\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t})n \Delta_t} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Con base a lo anterior, puede definirse para $\omega \in [-\pi/\Delta_t, \pi/\Delta_t]$

$$dZ_Y(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \tag{2.25}$$

En base al teorema 2.3, se define para $|\omega| \leq \pi/\Delta_t$

$$\begin{aligned}
 dH_Y(\omega) &= \mathbb{E}[|dZ_Y(\omega)|^2] \\
 &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)\right|^2\right] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|dZ_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)|^2] \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} dH_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

En el segundo paso se usa que $\{dZ_X\}$ es un proceso ortogonal de media cero. Antes de poder declarar que dH_Y es el espectro integrado del proceso discretizado, conviene hacer el cambio de variable $\omega^* := \omega \Delta_t$

$$\begin{aligned}
 dH_Y(\omega^*) &= dH_Y(\omega \Delta_t) \frac{d\omega^*}{d\omega} \\
 &= \frac{1}{\Delta_t} dH_Y(\omega \Delta_t)
 \end{aligned}$$

donde $|\omega^*| \leq \pi$. Si $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ posee un espectro puramente continuo –de manera

equivalentemente, si dH_X es absolutamente continua— entonces puede escribirse

$$h_Y(\omega^\star) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \quad (2.27)$$

con $|\omega| \leq \pi$. Así entonces h_Y puede entenderse como una versión *colapsada* de h_X , fenómeno conocido como **efecto alias**.

2.4. Filtros lineales

Definición 2.3. Se dice que un operador $\mathcal{L}_g : L^2 \rightarrow L^2$ es un **filtro lineal** si puede escribirse de la forma

$$\mathcal{L}_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)du \quad (2.28)$$

para alguna función $g \in L^2$ que es referida como **función de respuesta**.

Naturalmente, los filtros lineales son funciones lineales. Son continuos en la identidad aditiva de L^2 , y por tanto son continuos en todo L^2 . Como los filtros lineales son funciones lineales y continuas, entonces son funciones medibles bajo la medida de Lebesgue. Se puede hablar de la composición de un filtro lineal \mathcal{L}_g con un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$, es decir, definir un proceso de la forma

$$Y(t) = \mathcal{L}_g[X](t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \quad (2.29)$$

Los procesos generados como en 2.29, usualmente referidos como *procesos filtrados*, son comunes en el análisis de señales. En este trabajo serán usados para construir estimadores consistentes para el espectro de potencias. Para ello, conviene describir la relación entre el espectro de un proceso y el de su *versión filtrada*.

Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario. Usando el teorema de representación espectral [?], puede escribirse

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (2.30)$$

2.4. FILTROS LINEALES

Ahora bien, escribiendo al proceso $\{Y(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)X(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} dZ_X(\omega) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega-u} du \right] dZ_X(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Gamma(\omega) dZ_X(\omega) \end{aligned}$$

donde $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega-u} du$ será referida como la **función de transferencia** asociada al filtro. Luego entonces

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega) &= E [|dZ_Y(\omega)|^2] \\ &= E [|\Gamma(\omega)dZ_X(\omega)|^2] \\ &= |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega) \end{aligned}$$

Se concluye que si ambos procesos tengan FDE bien definidas, se cumple que

$$h_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 h_X(\omega) \quad (2.31)$$

Conviene notar que la relación 2.31 era de esperarse como una generalización del teorema [fourier ?].

2.4.1. Filtros de banda

Como se mencionó, los filtros lineales tienen múltiples aplicaciones en el análisis de señales, además de la estimación del espectro de potencias. Conviene destacar, aún como comentario, la familia de filtros lineales cuya función de transferencia es de la forma

$$\Gamma_{\omega_0}^*(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.32)$$

este tipo de filtros son referidos como *filtros pasa bajas*. Análogamente, un *filtro pasa altas* tiene una la misma forma cambiando la condición por $|\omega| \geq \omega_0$.

Cuando se aplica un filtro pasa bajas a un proceso, el efecto producido suele

interpretarse como la *eliminación de los componentes de frecuencia mayores a ω_0* . Tal efecto es deseable si, por ejemplo, se desea estudiar la actividad alfa en el lóbulo frontal (7–12 Hz) pero se espera la interferencia de actividad muscular en el rostro (típicamente > 100 Hz); bastaría construir un filtro pasabajas con $\omega_0 = 100$ Hz.

[?] escribir la forma que debería tener g

Este tipo de pre-procesamiento garantiza, por ejemplo, que en los registros no hay ruido inducido por la corriente eléctrica (120 Hz); en general, el uso de filtros pasa bajas y pasa bajas garantiza heurísticamente la eliminación de una variedad de ruidos comunes. En el presente texto no se exploran con más detalles este tipo de filtros y sus efectos, el lector interesado puede dirigirse al libro “*Medical Instrumentation. Applications and Design*” por John G. Webster [77].

2.5. Estimadores

El objetivo de esta sección es calcular el espectro de potencias de un proceso a partir de una realización del mismo; en el contexto del presente trabajo, las palabras *observación* y *registro* serán usadas como sinónimos. Con vista en la expresión 2.2, un estimador *natural* para el espectro sería el *periodograma*.

Definición 2.4. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso débilmente estacionario a tiempo discreto, cuyo espectro es puramente continuo y cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_X = 1$. Sea $\{x_t\}_{t=0,\dots,N}$ una realización de longitud N . El **periodograma**, I_N , es un estimador definido como

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (2.33)$$

Proposición 2.5.1. El periodograma (I_N) es un estimador insesgado para el espectro de potencias (h), es decir

$$\mathbb{E}[I_N(\omega)] = h(\omega) \quad (2.34)$$

Proposición 2.5.2. La familia de estimadores $\{I_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ satisface que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = [h(\omega)]^2 \quad (2.35)$$

2.5. ESTIMADORES

Se puede demostrar que $E[I_N(\omega)] = h(\omega)$, de modo que es un estimador **insesgado**. Sin embargo, también se demuestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = (h(\omega))^2$$

de modo que es un estimador **inconsistente**, lo cual lo descalifica para usarse en la práctica. Para entender por qué el periodograma es inconsistente, conviene escribirlo como

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}^*(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.36)$$

donde \hat{R}^* es un estimador para la función de autocovarianza, R , definido como

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) \quad (2.37)$$

Así mismo, la misma expresión puede interpretarse como que el periodograma es una suma ponderada de los valores de \hat{R}^* ; mientras más grande es τ , menos parejas de puntos cuya distancia es τ , y entonces \hat{R}^* tiene mayor varianza cuanto mayor sea τ .

Dado que la inconsistencia del periodograma es porque el periodograma es construido usando estimadores con varianza elevada, la solución natural es evitar tales componentes. Para ello, escójase una función de pesos, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, defínase

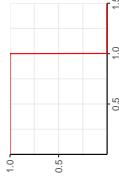
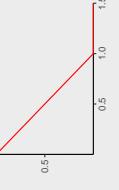
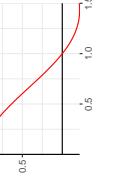
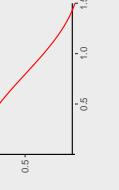
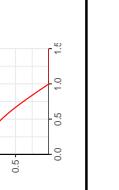
$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau) \hat{R}^*(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (2.38)$$

Resulta ilustrativo reescribir a \hat{h} en términos del periodograma

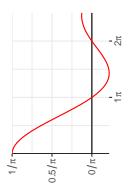
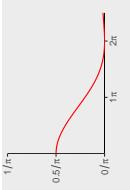
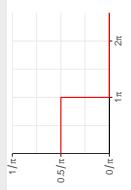
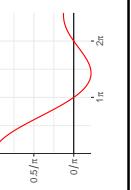
$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) \Gamma(\omega - \theta) d\theta$$

donde $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega-u} du$. Se puede demostrar que este tipo de estimadores son asintóticamente insesgado y consistentes.

Cuadro 2.1: Ejemplos de funciones ventana (función de respuesta)

Nombre	$k(u), u \leq \pi$	Bosquejo
Bartlett	1	 A red step function plot on a grid. The x-axis ranges from -0.5 to 1.5 with ticks at -0.5, 0.5, 1.0, and 1.5. The y-axis ranges from 0.5 to 1.0 with ticks at 0.5 and 1.0. The function is 1.0 for u < -0.5, 0.5 for -0.5 <= u < 0.5, and 1.0 for u >= 0.5.
Fejer	$1 - u $	 A red curve plot on a grid. The x-axis ranges from -0.5 to 1.5 with ticks at -0.5, 0.5, 1.0, and 1.5. The y-axis ranges from 0.5 to 1.0 with ticks at 0.5 and 1.0. The curve starts at (0, 1.0), decreases linearly to (1, 0.5), and then increases linearly back to (2, 1.0).
Daniell	$\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$	 A red curve plot on a grid. The x-axis ranges from -0.5 to 1.5 with ticks at -0.5, 0.5, 1.0, and 1.5. The y-axis ranges from 0.5 to 1.0 with ticks at 0.5 and 1.0. The curve starts at (0, 1.0) and decays towards zero as u increases.
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{(\pi u)^2} \left[\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} - \cos(\pi u) \right]$	 A red curve plot on a grid. The x-axis ranges from -0.5 to 1.5 with ticks at -0.5, 0.5, 1.0, and 1.5. The y-axis ranges from 0.5 to 1.0 with ticks at 0.5 and 1.0. The curve starts at (0, 1.0), has a sharp peak near u=0, and then decays.
Cosenoidal	$\cos(\pi u)$	 A red curve plot on a grid. The x-axis ranges from -0.5 to 1.5 with ticks at -0.5, 0.5, 1.0, and 1.5. The y-axis ranges from 0.5 to 1.0 with ticks at 0.5 and 1.0. The curve starts at (0, 1.0) and oscillates between 0.5 and 1.0 as u increases.

Cuadro 2.2: Ejemplos de funciones ventana (función de transferencia)

Nombre	$K(\theta)$	Bosquejo
Bartlett	$\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\theta)}{\theta}$	
Fejer	$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \right]^2$	
Daniell	$1/(2\pi)$, si $ \theta \leq \pi$	
Bartlett-Priestley	$\frac{3}{4\pi} [1 - (\theta/\pi)]$, si $ \theta \leq \pi$	
Coseoidal	d	

CAPÍTULO 3

Espectro evolutivo

En esta sección se introduce el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no-estacionarios cuya estructura cambia lentamente en el tiempo. Esta definición en particular fue presentada por Maurice Priestley en 1965 [58]; la información del presente capítulo puede revisarse con mayor detalle en su libro “*Spectral Analysis and Time Series*” [59], particularmente en el capítulo 11.

Es importante mencionar que la sección 3.1 representa la parte central de este capítulo, describiendo un objeto matemático bien definido que lida con un problema que roza la vaguedad; es por ello que viene acompañado de una discusión que podría ser omitida dentro del contexto global del trabajo, pero que tiene repercusiones importantes en el uso práctico del espectro evolutivo. Por ejemplo, en la sección 3.2 se discute sobre las condiciones bajo las cuales es *posible* estimar el espectro evolutivo del proceso, mientras que la sección 3.3 parte de tales condiciones para describir cómo efectuar la estimación.

Finalmente, en la sección 3.4 se describe una aplicación aparentemente menor del espectro evolutivo, pero que constituye una parte central en el presente trabajo: la detección de estacionariedad débil a partir del espectro evolutivo.

3.1. Definición del espectro evolutivo

Considérese un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ que, por simplicidad, tiene media cero y varianza finita en todo momento, es decir

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0, \quad \text{Var}(X^2(t)) < \infty$$

Se define el *núcleo de covarianza* para el proceso como

$$R(s, t) := \mathbb{E}[\overline{X(t)}X(s)] \quad (3.1)$$

Conviene recordar el caso de un proceso estacionario, en el cual el núcleo de covarianza $R(t, s)$ puede verse como función de la variable $|t - s|$, y en virtud del teorema de Winer-Khintchine acepta una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (3.2)$$

donde H es el espectro integrado del proceso y tiene las propiedades de una función de distribución sobre \mathbb{R} . Como consecuencia, $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.3)$$

donde Z es un proceso estocástico que satisface

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = dH(\omega_1)\delta(\omega_1, \omega_2) \quad (3.4)$$

En general, se espera tener una generalización que conserve las propiedades anteriores. Con vista a la ecuación 3.2, puede restringirse la atención a procesos no-estacionarios que acepten una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)}\phi(\omega; t)d\mu(\omega) \quad (3.5)$$

Para alguna medida μ definida en \mathbb{R} y alguna familia de funciones $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$; debido a la interpretación que se le va a dar a este tipo de funciones, la variable $t \in \mathbf{F}$ será referida como un índice. Una condición a satisfacer es que $\text{Var}(X^2(t)) = R(t, t) < \infty$, para lo cual cada $\phi \in \mathbf{F}$ debe ser cuadrado integrable con respecto a μ ,

3.1. DEFINICIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\omega; t) d\mu(\omega) < \infty \quad (3.6)$$

Se puede demostrar t(4.11.12) que bajo estas condiciones el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega; t) dZ(\omega) \quad (3.7)$$

donde el proceso Z satisface que

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = \mu(\omega_1) \delta(\omega_1, \omega_2) \quad (3.8)$$

Se puede demostrar p(parzen 1959) que si un proceso admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia de funciones \mathbf{F} , entonces tiene admite múltiples representaciones usando diferentes familias de funciones.

Para dar a estas representaciones la interpretación de espectro, conviene usar una familia de funciones que conserve algunas propiedades de los senos y cosenos; por ejemplo, las funciones oscilatorias

Definición 3.1. Una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **oscilatoria** si admite una representación de la forma

$$\phi(t) = A(t) e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

donde A es de la forma

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dK(\omega) \quad (3.10)$$

y donde $|dK(\omega)|$ tiene un único máximo global en $\omega = 0$

Si una función ϕ es oscilatoria como en la definición 3.1, entonces puede entenderse como una función senoidal *modulada* por una función A ; no se permite que la función A sea predominantemente periódica.

Como se mencionó, las expresiones 3.5 y 3.7 pueden ser interpretadas como espectro si se usa una familia \mathbf{F} de funciones oscilatorias.

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(\omega; s)} A(\omega; t) e^{i\omega(t-s)} d\mu(\omega) \quad (3.11)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega; t) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.12)$$

Definición 3.2. Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio y \mathbf{F} una familia de funciones oscilatorias de la forma $\phi(\omega; t) = A(\omega; t)e^{i\omega t}$. Sea μ tal que satisface las condiciones anteriores. Se define al **espectro evolutivo** del proceso respecto a la familia \mathbf{F} como

$$dH(t, \omega) := |A(\omega; t)|^2 d\mu(\omega) \quad (3.13)$$

Proposición 3.0.1. Si un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es débilmente estacionario, entonces su espectro de potencias h y su espectro evolutivo h^* satisfacen, para todo $t \in \mathcal{T}$, que

$$h^*(\omega, t) = h(\omega) \quad (3.14)$$

3.2. Estimación del espectro evolutivo

En el capítulo anterior se mostró un estimador consistente para el espectro de potencias de un proceso estacionario; dicho estimador usaba la transformada de Fourier discreta, *suavizada* por un filtro lineal (también referido como función ventana). El objetivo de esta sección es aclarar algunos teoremas que permitan usar una técnica similar, la cual requiere imponer algunas condiciones más fuertes que ser oscilatorios.

3.2.1. Filtros lineales sobre procesos oscilatorios

Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso oscilatorio, no necesariamente estacionario, y sea $g \in L_I^2$; se construye al proceso $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ como¹

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) du \quad (3.15)$$

¹En el texto de Priestley se considera un filtro de la forma $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) e^{-i\omega_0(t-u)} du$ para algún ω_0 constante. Por simplicidad se considera únicamente el caso $\omega_0 = 0$

Entonces puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (3.16)$$

donde Γ_t es la **función de transferencia generalizada** para g con respecto a la familia \mathbf{F} , y que es definida como

$$\Gamma_t(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du \quad (3.17)$$

Un caso particular muy interesante ocurre cuando A , como función de ω , varía lentamente en comparación de g , la cual decae rápidamente a 0; en tal caso podría decirse que $\Gamma_t \approx \Gamma$

Definición 3.3. Una familia de funciones \mathbf{F} se dice **semi-estacionaria** si, para todo $\omega \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| < \infty \quad (3.18)$$

En cuyo caso se define su **ancho de banda característico**

$$B_{\mathbf{F}} := \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| \right]^{-1} \quad (3.19)$$

Definición 3.4. Un proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ se dice **semi-estacionario** si admite una representación de la forma 3.7 para alguna familia semi-estacionaria

Definición 3.5. Se dice que una función u es **pseudo- δ de orden ε** con respecto a la función v si, para cualquier k existe un $\varepsilon \ll 1$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x+k)dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx \right| < \varepsilon \quad (3.20)$$

De manera similar, se define el **ancho de banda** para g como

$$B_g := \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \quad (3.21)$$

3.2. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

Supóngase que g está normalizada de modo que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| d\omega = 1 \quad (3.22)$$

con Γ la función de respuesta para g .

Teorema 3.1. *Sea \mathbf{F} una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico $B_{\mathbf{F}}$, y sea g una función normalizada como en 3.22 y cuyo ancho de banda es B_g . Entonces, para cualesquiera $t, \omega \in \mathbb{R}$ se cumple que $e^{i\omega t} dK(\omega)$ es una función pseudo- δ de orden $B_g/B_{\mathbf{F}}$ con respecto a g*

Demostración. Suponiendo que Γ sea una vez derivable, su expansión de Taylor alrededor de k es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\theta + k) dK(\omega) = \Gamma(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega)$$

para algún $\nu \in (0, \theta)$. Respecto al segundo sumando, puede observarse que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |\Gamma'(k + \nu)| |dK(\omega)| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] |dK(\omega)| \\ &\leq \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \end{aligned}$$

Usando la conexión entre g y Γ

$$\begin{aligned} \Gamma'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} g(u) du \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{d\omega} e^{i\omega u} g(u) \right) du \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega u} g(u) du \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left[\sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \\
 &\leq \left[\sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} iue^{i\omega u} g(u) du \right| \right] B_{\mathbf{F}}^{-1} \\
 &\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} \left[\sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \right] \\
 &\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} B_g
 \end{aligned}$$

□

Con el teorema anterior a la mano se puede declarar formalmente la idea de que A varía más lentamente que g

Teorema 3.2. *Sea \mathbf{F} una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico $B_{\mathbf{F}}$, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, y sea g un filtro normalizado como en 3.22 y cuya función de transferencia generalizada con respecto a \mathbf{F} es Γ_{\bullet} . Si g es elegida de tal modo que $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, entonces para cualesquiera t, ω se cumple que*

$$|\Gamma_t(\omega) - A(\omega; t)\Gamma(\omega)| < \varepsilon \quad (3.23)$$

Demostración. Por la mera definición de Γ_{\bullet} (expresión 3.17) se sabe que

$$\Gamma_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du$$

3.2. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

Si se sustituye a A en términos de dK (ver definición 3.2)

$$\begin{aligned}\Gamma_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)A(\omega; t-u)e^{i\omega u}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t-u)}dK(\theta) \right] e^{i\omega u}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\theta t}e^{i(\omega-\theta)u}dK(\theta)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i(\omega-\theta)u}du \right] dK(\theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta)dK(\theta)\end{aligned}$$

Usando el lema 3.1 junto al hecho que $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, se puede escribir que

$$\begin{aligned}\varepsilon &> \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta)dK(\theta) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\ &= \left| \Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\ &= |\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega)A(\omega; t)|\end{aligned}$$

En el último renglón se ha reemplazado nuevamente a A en términos de dK

Teorema 3.3. *Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso semi-estacionario con ancho de banda característico B_X , sea g un filtro normalizado como en 3.22 y cuyo ancho de banda es B_g y cuya función de respuesta es Γ . Sea $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso definido como 3.16.*

Sea \mathbf{F}^ una familia semi-estacionaria cuyo ancho de banda característico es B_X o es muy parecido a B_X (lo cual es posible por cómo se definió B_X). Se cumple que*

$$E[|Y(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 dH^*(\omega; t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (3.24)$$

donde H^* es el espectro integrado respecto a la familia \mathbf{F}^* y $\mathcal{O}(\epsilon)$ es un término que puede hacerse arbitrariamente pequeño si B_g es suficientemente pequeño respecto a B_X

3.2. ESTIMACIÓN DEL ESPECTRO EVOLUTIVO

Demostración. Usando la expresión 3.16 para este caso particular, puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) A^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \quad (3.25)$$

donde ω_\bullet^* , A^* y Z^* están definidos respecto a la familia \mathbf{F}^* . Nótese que, debido a que los dZ 's son ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \mathbb{E} \left[\overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \right] \\ &= \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Si se elige a g de modo que $\frac{B_g}{B_X} < \varepsilon$, en virtud del teorema 3.2 puede escribirse

$$\Gamma_t^*(\omega; t) = A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t) \quad (3.26)$$

con $|R(\omega, t)| < \varepsilon$. Luego entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) + R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega; t)\Gamma(\omega) \overline{R(\omega; t)} d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

El cuarto sumando satisface claramente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) < \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^*(\omega) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (3.27)$$

3.3. ESTIMADOR DE DOBLE VENTANA

Respecto al segundo sumando, nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t)\Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) &< \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| |R(\omega; t)| d\mu^*(\omega) \\ &< \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Una cota similar puede hallarse para el tercer sumando. Falta demostrar que la cota permanece finita cuando $B_g \rightarrow 0$, lo cual debería lograrse definicindo el conjunto

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} \mid |\Gamma(\omega)| |A^*(\omega; t)| \leq 1\} \quad (3.28)$$

y luego, claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) = \int_{\Omega} \mu^*(\omega) + \int_{\Omega^C} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \quad (3.29)$$

el primer sumando es clarametne finito y no depende de g , mientras que el segundo debería ser finito [?] ya que Γ está normalizada. \square

3.3. Estimador de doble ventana

Para esta sección se considera un proceso a tiempo continuo $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ y una muestra del mismo de longitud T (o equivalentemente un proceso $\{X(t)\}_{t \in [t, T]}$), suficientemente larga. El objetivo en esta sección es construir un estimador para el espectro evolutivo $dH(\omega; t)$. Por simplicidad, se supondrá que la medida μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y entonces puede escribirse

$$h(\omega, t) := dH(\omega; t) \quad (3.30)$$

Para efectuar la estimación del espectro se hará uso del teorema 3.2, para lo cual se necesita un filtro g normalizado segúñ 3.22 y cuyo anho de banda, B_g , satisface

$$B_g \ll B_X \ll T \quad (3.31)$$

Se construye entonces a U , una versión filtrada de X usando a g

$$U(t) = \int_{t-T}^t g(u)X(t-u)du \quad (3.32)$$

Bajo la condición 3.31, la integral que define a U puede extenderse a todo \mathbb{R} sin cambiar mucho su valor (excepto cerca de 0 y T), e incluso se llega a ser exacta si g es 0 fuera de un intervalo pequeño alrededor de 0. Entonces, en virtud del teorema 3.3 aplica de manera aproximada, y entonces se cumple que

$$\mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t)d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.33)$$

Proposición 3.3.1. *Dadas las condiciones, y si $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es un proceso normal cuyo que admite un espectro evolutivo uniformemente continuo, se tiene que*

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t)d\omega \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.34)$$

Demostración. Por conveniencia se obtendrá una expresión aproximada para la covarianza de U , a partir de la cual se deducirá su varianza. Para ello, por definición puede escribirse para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2) = \mathbb{E}[|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] - \mathbb{E}[|U(\omega; t)|^2] \mathbb{E}[|U(\lambda; s)|^2]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] &= \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{i\omega u} e^{i\lambda v} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\ &\quad \times \mathbb{E}[X(t-u)X(t-v)X(s-w)X(s-z)] dudvdwdz \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si para cada t $X(t)$ sigue una distribución normal, entonces en virtud del teorema 1.7 puede escribirse

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t-u)X(t-v)X(t-w)X(t-z)] &= R(t-u, t-v)R(s-w, s-z) \\ &\quad + R(t-u, s-z)R(t-v, s-w) \\ &\quad + R(t-u, s-w)R(t-v, s-z) \end{aligned}$$

3.3. ESTIMADOR DE DOBLE VENTANA

Reemplazando sobre la expresión anterior, puede escribirse

$$\mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2 |U(\lambda; s)|^2] = \mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] \mathbb{E} [|U(\lambda; s)|^2] + S_1 + S_2 \quad (3.36)$$

donde

$$S_1 = \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z) e^{iu\omega} e^{iv\omega} e^{iw\lambda} e^{iz\lambda} \\ \times R(t-u, s-z) R(t-v, s-w) du dv dw dz$$

Se define a S_2 de manera similar, intercambiando w y z . Estas expresiones, de apariencia innecesariamente complicada, pueden interpretarse como la *interferencias* de la covarianza entre los puntos (ω, t) y (λ, s) . Para ello, nótese que

$$\text{Cov} (|U(\omega; t)|^2, |U(\lambda; s)|^2) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.37)$$

Cabe mencionar que es conveniente que las cantidades S_1 y S_2 sean pequeñas.

Sea ha elegido a g de forma que $B_g \ll B_X$ con el objetivo de que U tenga un sesgo pequeño, en virtud del teorema [?]. Este teorema puede ser usado nuevamente si S_1 y S_2 son reescritas en cierta forma *adecuada*, para lo cual la autocovarianza debe ser vista como

$$R(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(p-q)} A(\omega; p) \overline{A(\omega; q)} d\mu(\omega) \quad (3.38)$$

Así pues, reemplazando esta expresión sobre (?) se obtiene

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int \int \int \int_{R^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\
 &\quad \times R(t-u, s-z)R(t-v, s-w)dudvdw dz \\
 &= \int \int \int \int_{\mathbb{R}^4} g(u)g(v)g(w)g(z)e^{iu\omega}e^{iv\omega}e^{iw\lambda}e^{iz\lambda} \\
 &\quad \times \left(\int \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{-i\theta(s-z-t+u)} A(\theta; t-u) \overline{A(\theta; s-z)} \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[e^{-i\phi(s-w-t+u)} A(\phi; t-v) \overline{A(\phi; s-w)} \right] d\theta d\phi \right) dudvdw dz \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} \\
 &\quad \times \left[A(\theta; t) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) \overline{A(\theta; t)} \right] d\theta d\phi \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right] \\
 &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right]
 \end{aligned}$$

Donde Γ_* es la función de transferencia generalizada

$$\Gamma_*(\kappa; t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{A(\omega; t-u)}{A(\omega; t)} e^{-i\kappa u} du \quad (3.39)$$

Usando el teorema [?], se puede decir que $|\Gamma(\bullet; t, \lambda) - \Gamma(\bullet)| \leq B_g/B_X$. Así entonces

$$\begin{aligned}
 |S_1| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi) \overline{A(\phi; t)} A(\phi; s) d\phi \right| \\
 &\quad \times \left| \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)} A(\theta; t) \overline{A(\theta; t)} d\theta \right| \\
 &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_*(\phi + \omega; t, \phi)| |\Gamma_*(\phi + \lambda; s, \phi)| |A(\phi; t)A(\phi; s)| d\phi \right] \\
 &\quad \times \left[\int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma_*(\theta + \omega; t, \theta)| |\Gamma_*(\theta + \lambda; s, \theta)| |A(\theta; t)A(\theta; t)| d\theta \right] \\
 &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t)A(\phi; s)| d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)
 \end{aligned}$$

La misma cota puede hallarse para S_2 . En lo inmediato, conviene analizar el caso

3.3. ESTIMADOR DE DOBLE VENTANA

$\omega = \lambda$ y $t = s$, de donde se obtiene

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) = \text{Cov}(|U(\omega; t)|^2, |U(\omega; t)|^2) = S_1 + S_2 + \mathcal{O}(B_g/B_X)$$

pero en este caso particular, la cota obtenida puede reducirse a

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 |A(\phi; t)|^2 d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi \right]^2 + \mathcal{O}(B_g/B_X) \end{aligned}$$

□

En el teorema anterior puede interpretarse que $\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)|^2 h(\phi, t) d\phi$ es una versión *suavizada* de h . Bajo este comentario, el resultado obtenido es muy análogo a la estimación del espectro en un proceso estacionario (teorema ??). Siguiendo dicha analogía, se sabe que U puede *modificarse* para generar estimadores consistentes; para lo cual se usa una segunda función de ventana w_τ . Por estética y comodidad, las condiciones sobre w_τ serán presentadas junto a las propiedades de la ventana g ; todas ellas en la definición

Definición 3.6. El *estimador de doble ventana* es un estimador para h definido como

$$\hat{h}(\omega, t) = \int_{T-t}^t w_\tau(u) |U(\omega, t-u)|^2 du \quad (3.40)$$

donde la función g satisface

- $B_g \ll B_X \ll T$
- $g(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$
- $2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$

con $\Gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g(t) dt$. Así mismo, la función w_τ satisface

- $w_\tau(t) \geq 0$ para cualesquiera t, τ
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$ cuando $|t| \rightarrow \infty$, para todo τ
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$ para todo τ

- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(t))^2 dt < \infty$ para todo τ
- $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_{\tau}(\lambda)|^2 d\lambda = C$

donde $W_{\tau}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_{\tau}(t) d\lambda$.

El supuesto sobre que w_{τ} decaiga rápidamente lejos de 0 permite reemplazar el intervalo de integración que define a \hat{h} por \mathbb{R} (excepto cerca de 0).

Proposición 3.3.2. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\mathbb{E} [\hat{h}(\omega, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (3.41)$$

donde

$$\bar{h}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) h(\omega, t-u) du \quad (3.42)$$

Demostración. De manera relativamente sencilla puede verificarse que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{h}(\omega, t)] &= \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |U(t-u)|^2 du \right] \\ &= \int_{T-t}^t w_{\tau}(u) \mathbb{E} [|U(t-u)|^2] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} w_{\tau}(u) h(\omega, t-u) du \right] d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \end{aligned}$$

□

A diferencia de U , el estimador de doble ventana no es consistente salvo en caso que \bar{h} sea parecido a h ; como \bar{h} es una versión suavizada, que el estimador sea sesgado depende de que $B_{w_{\tau}}$ sea pequeño en comparación a B_X .

3.3. ESTIMADOR DE DOBLE VENTANA

Proposición 3.3.3. *El estimador de doble ventana satisface*

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} |W_{\tau}(\omega)|^2 d\omega \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.43)$$

donde

$$\tilde{h}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\omega_0, t) (w_{\tau}(u))^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} (w_{\tau}(u)) du} \quad (3.44)$$

Demostración. Como en el caso del estimador U , será conveniente calcular la covarianza de \hat{h} y posteriormente deducir la varianza. Se escribe para $t, s \in \mathcal{T}$ y $\omega, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Cov}(\hat{h}(\omega, t), \hat{h}(\lambda, s)) = E[\hat{h}(\omega, t)\hat{h}(\lambda, s)] - E[\hat{h}(\omega, t)]E[\hat{h}(\lambda, s)] \quad (3.45)$$

Hecho el trabajo previo, es claro que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{h}(\omega, t), \hat{h}(\lambda, s)) &= \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) \text{Cov}(|U(\omega; t-u)|^2, |U(\lambda; s-v)|^2) dudv \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) [S_1 + S_2] dudv + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\ &= T_1 + T_2 \end{aligned}$$

usando, por comodidad

$$T_1 = \int \int_{\mathbb{R}^2} w_{\tau}(u)w_{\tau}(v) [S_1] dudv \quad (3.46)$$

y similarmente para T_2 ; S_1 es como en la expresión (?), evaluado en los puntos $(t-u, \omega), (s-v, \lambda)$

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Gamma_*(\phi + \omega; t-u, \phi)} \Gamma_*(\phi + \lambda; s-v, \phi) \overline{A(\phi; t-u)} A(\phi; s-v) d\phi \right] \\ &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_*(\theta + \omega; t-u, \theta) \overline{\Gamma_*(\theta + \lambda; s-v, \theta)} \overline{A(\theta; t-u)} A(\theta; s-v) d\theta \right] \end{aligned}$$

con Γ_* es la función de transferencia generalizada; S_2 se define de manera similar. Se

usará el teorema (?) para acotar la covarianza, comenzando por el primer sumando

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) [S_1] dudv \\
 &\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |S_1| dudv \\
 &\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) \\
 &\quad \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)| d\phi \right]^2 dudv + \mathcal{O}(B_g/B_X) \\
 &\leq \int \int_{\mathbb{R}^2} |\Gamma(\phi + \omega)| |\Gamma(\phi + \lambda)| |\Gamma(\theta + \omega)| |\Gamma(\theta + \lambda)| \\
 &\quad \times \left[\int \int_{\mathbb{R}^2} w_\tau(u) w_\tau(v) |A(\phi; t-u) A(\phi; s-v)| dudv \right] d\phi d\theta + \mathcal{O}(B_g/B_X)
 \end{aligned}$$

□

Aún más, si se usa la propiedad de en el límite de τW_τ se puede escribir

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \frac{C}{\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (3.47)$$

Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que $\tilde{h} \approx h$ y $\tilde{h}^2 \approx h^2$. Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas w_τ y W_τ sean más cercanas a funciones tipo δ de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $E[\hat{h}(t, \omega)] \approx h(t, \omega)$
- $\text{Var}(\hat{h}(t, \omega)) \approx \frac{C}{\tau} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta$

3.4. Prueba de Priestley-Subba Rao

La prueba de estacionariedad propuesta por Priestley y Subba Rao [60] consiste en probar si el espectro evolutivo de un proceso dado puede reducirse a un espectro de potencias; en otras palabras, se prueba la hipótesis de que el espectro evolutivo

3.4. PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

efectivamente cambia en el tiempo. Naturalmente, la prueba debe construirse sobre una única realización del proceso.

El procedimiento consiste en estimar el espectro evolutivo del proceso para algunos tiempos y frecuencias, usando en particular el estimador de doble ventana; dichos puntos deben ser tales que los estimadores sean aproximadamente no-correlacionados. Posteriormente se calcula el logaritmo de la estimación obtenida con el fin de *estabilizar* la varianza. Finalmente, como parte central, se efectúa un ANOVA de dos vías para verificar si se puede afirmar que el espectro estimado tiene –estadísticamente– el mismo valor en los diferentes puntos a través del tiempo. Cabe destacar que este último paso tiene una interpretación poco convencional, y es que los estimadores tienen (por diseño) ciertas propiedades

Sea $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ un proceso semi-estacionario y sea $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$ un conjunto de observaciones, cuya frecuencia de muestreo es $\Delta_t = 1$ por simplicidad. Usando esta información se construye el estimador de doble ventana, \hat{h} ; para ello se eligen las funciones ventana g_κ y w_τ que, por simplicidad, son ventanas de escalamiento con parámetros κ y τ . Sus funciones de transferencia serán Γ_κ y W_τ , respectivamente.

Bajo las condiciones descritas en la sección anterior, se satisface que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{h}(t, \omega)] &\approx h(t, \omega) \\ \text{Var} (\hat{h}(t, \omega)) &\approx \frac{C}{N} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma^4(\theta)| d\theta \end{aligned}$$

donde $C = \lim_{T \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)| d\lambda$. Como se mencionó, se propone la cantidad

$$Y(t, \omega) = \log (\hat{h}(t, \omega)) \quad (3.48)$$

en virtud de la proposición (?), se cumple que

$$\mathbb{E} [Y(t, \omega)] \approx \log (h(t, \omega)) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \text{Var} (Y(t, \omega)) &\approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta \\ &\quad (3.51) \end{aligned}$$

Cabe destacar que la varianza de Y no es independiente de h en el sentido formal, sino que sólo es *aproximadamente independiente* pues depende en mayor medida

de la forma de \hat{h} que del mismo h . Esto era de esperarse, ya que el estimador de doble ventana fue diseñado para exagerar el *peso* de la información local al grado de obtener versiones suavizadas del espectro evolutivo. Adicionalmente, se suele decir intuitivamente que el logaritmo *estabiliza* la varianza. En otra dirección, la varianza aproximadamente constante de Y sugiere que puede escribirse como

$$Y(t, \omega) = \log(h(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega) \quad (3.52)$$

Debido a la naturaleza naturalmente discreta de los datos, conviene construir una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias, equiespaciado en el tiempo por Δ_t y en las frecuencias por Δ_ω . Si dichas distancias son suficientemente grandes como para que se cumplan las condiciones en 3.53, entonces los valores de Y sobre la cuadrícula serán aproximadamente no-correlacionados.

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^2 |\Gamma_\kappa(\theta + \Delta_\omega)|^2 d\theta \approx 0 \\ & \frac{1}{\Delta_t} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |w_\tau(t)| dt \approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t + \Delta_t, \omega + \Delta_\omega)) \approx 0 \quad (3.53)$$

Así entonces, sea $\{(t_i, \omega_j) \in \mathcal{T} \times [-\pi, \pi] | i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\}$ la cuadrícula descrita, con $|t_i - t_{i+1}| = \Delta_t$ y $|\omega_j - \omega_{j+1}| = \Delta_\omega$. Se define el estimador

$$Y_{i,j} = \log(\hat{h}(t_i, \omega_j)) \quad (3.54)$$

el cual puede escribirse como

$$Y_{i,j} \approx \log(h(t_i, \omega_j)) + \varepsilon_{i,j} \quad (3.55)$$

donde

$$\text{E}[\varepsilon_{i,j}] \approx 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_{i,j}) \approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_\kappa(\theta)|^4 d\theta [\delta(i, i_0) \delta(j, j_0)] \quad (3.57)$$

Una vez definido a Y , un estimador adecuado para detectar la estacionariedad débil, conviene escribir explícitamente las condiciones para tal detección. Con base

3.4. PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

a la proposición (?), si el proceso $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ es débilmente estacionario **entonces**

$$h(t_0, \omega_j) = h(t_1, \omega_j) = \cdots = h(t_I, \omega_j) , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.58)$$

condición que puede reescribirse en términos de Y como

$$\mathbb{E}[Y_{0,j}] = \mathbb{E}[Y_{1,j}] = \cdots = \mathbb{E}[Y_{I,j}] , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.59)$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{0,j}] = \mathbb{E}[\varepsilon_{1,j}] = \cdots = \mathbb{E}[\varepsilon_{I,j}] , \text{ para } j = 1, 2, \dots, J \quad (3.60)$$

Sin embargo, la expresión en 3.60 puede deducirse directamente de las propiedades de Y en caso de que la expresión en 3.59 es cierta. En consecuencia, rechazar 3.60 implica rechazar 3.59, lo cual aporta evidencia para rechazar 3.58; si se rechaza 3.58 entonces puede rechazarse que el proceso sea estacionario, pero un no-rechazo no garantiza que el proceso sea estacionario.

El objetivo de la prueba puede fijarse en decidir si puede rechazarse la condición en 3.60, en cuyo caso se podrá concluir que el proceso **no** es débilmente estacionario. Con base a la expresión en 3.59, la prueba puede formularse en términos de un ANOVA de dos factores, el cual parte de un modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \quad (3.61)$$

donde ε es como en la expresión 3.55. Dentro del contexto, las cantidades involucradas pueden interpretarse como

μ Promedio de h sobre tiempo y frecuencia

α Efecto al variar el tiempo

β Efecto al variar la frecuencia

γ Efecto no lineal de tiempo y frecuencia (*interacción*)

La diferencia entre γ y ε consiste en que (por diseño) se conocen la media y varianza de ε ; en contraparte, no se ha supuesto nada sobre γ .

Cuadro 3.1: Estadísticos involucrados en la prueba PSR

Descripción	Estadístico	Gr. de libertad
Efecto tiempo	$S_T = J \sum_{i=1}^I (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$I - 1$
Efecto frecuencia	$S_F = I \sum_{j=1}^J (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$J - 1$
Interacción	$S_{I+R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2$	$(I - 1)(J - 1)$
Total	$S_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$IJ - 1$
Prom. tiempo	$Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	
Prom. frecuencia	$Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$	
Prom. general	$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	

Ahora bien, la expresión 3.59 uede formularse como hipótesis para contrastarse contra H_0 , de la forma

$$H_A : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j} \quad (3.62)$$

Por simplicidad, conviene considerar, como paso intermedio, una prueba de hipótesis *encadenada*

$$H_{A_0} : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j} \quad (3.63)$$

Como es usual con los ANOVA, se definen las sumas de cuadrados dentro de los grupos y entre los grupos (cuadro 3.1), las cuales siguen distribuciones χ^2 . Al probar H_0 contra H_{inter} se usa el estadístico de prueba S_{I+R}/σ^2 , mientras que al probar H_{inter} contra H_A se usa S_T/σ^2 .

Algoritmo 1: Prueba de Priestley-Subba Rao

Datos: $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

Resultado: p-valores para S_{I+R} , S_T , S_F

- 1 $X \leftarrow (x_1, x_2, \dots, x_N)$
- 2 **para** $i = 1, \dots; j = 1, \dots$ **hacer**
- 3 $U[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T g(u)X[t-u] \exp(-i\omega_j i)$
- 4 **para** $i = 1, \dots; j = 1, \dots$ **hacer**
- 5 $\hat{h}[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T w_\tau(u) |U[i-u, j]|^2$
- 6 $Y \leftarrow \log \hat{h}$
- 7 **para** $i = 1, \dots, I$ **hacer**
- 8 $Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$
- 9 **para** $j = 1, \dots, J$ **hacer**
- 10 $Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$
- 11 $Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$
- 12 **si** $S_{I+R} > 0$ **entonces**
- 13 Aceptar H_0
- 14 **devolver**
- 15 **si** $S_T > 0$ **entonces**
- 16 Aceptar H_1
- 17 **devolver**
- 18 Aceptar H_2

3.4. PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

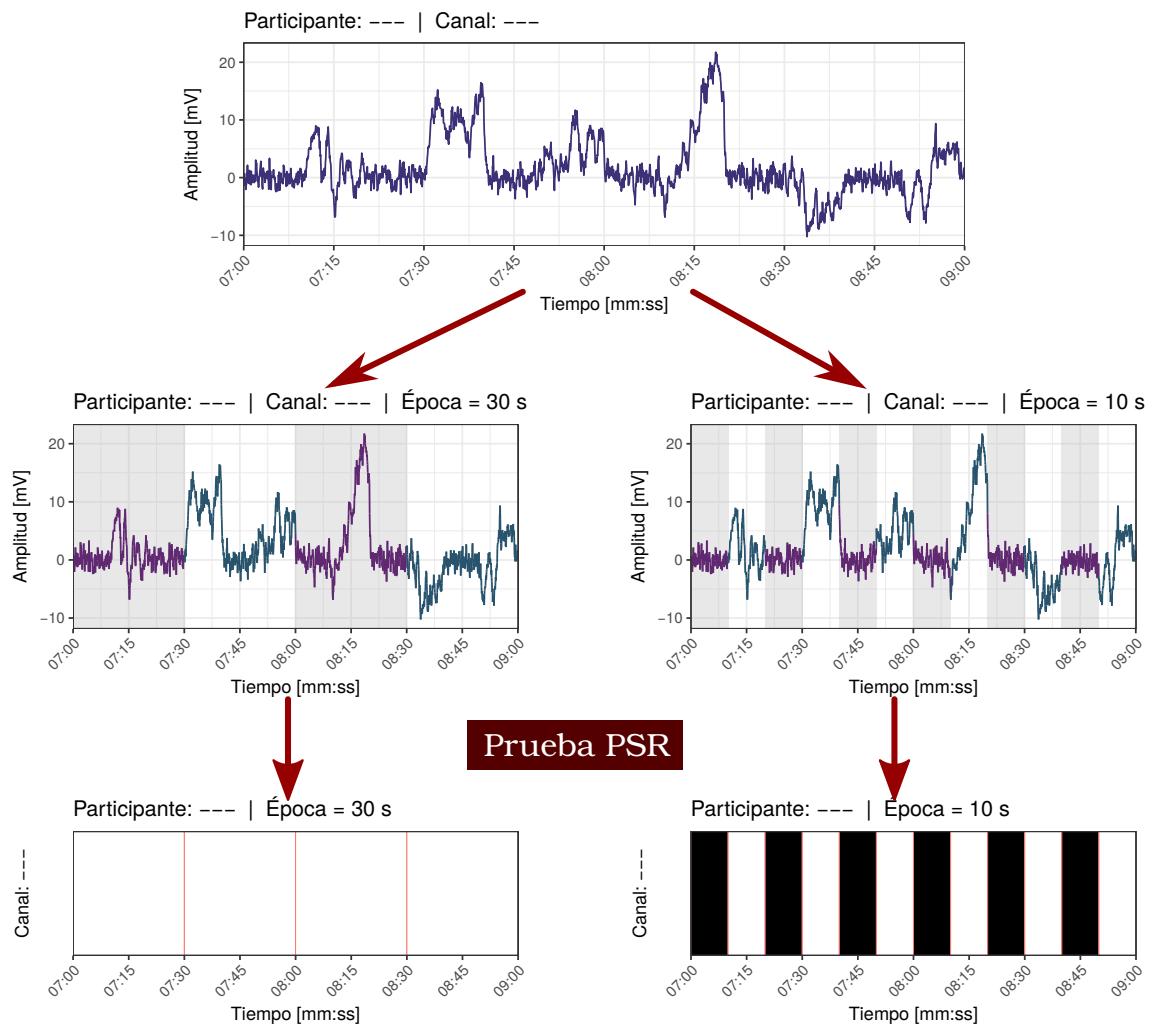


Figura 3.1: Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 4

Deterioro cognitivo y sueño

En este capítulo se exponen varios temas para poder entender adecuadamente al sujeto de estudio (registros de PSG en adultos mayores), así como el contexto y la motivación para su estudio (el PDCL en adultos mayores). Se responde, de manera muy breve, las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el Deterioro Cognitivo Leve y cómo se detecta?
- ¿Cómo detectar el DCL en adultos mayores?
- Clínicamente, ¿qué es el sueño y cómo se estudia?
- ¿Cómo se relacionan el DCL y el sueño?

Para simplificar la exposición, se considera al EEG como la técnica principal para el estudio de la actividad cerebral. El lector interesado en una exposición más amplia sobre técnicas para el estudio del cerebro, puede referirse al libro “*Medical Instrumentation. Applications and Design*” [77]. Con la misma intención de facilitar la lectura, se describe el sueño (desde el punto de vista clínico) antes de mostrar su posible utilidad como marcador para el DCL.

Si se desea revisar mayor información sobre los tópicos expuestos, pueden consultarse los libros “*Guía para el diagnóstico neuropsicológico*” [2] y “*Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*”[46]. Si se desean

4.1. DETERIORO COGNITIVO LEVE

consultarse en mayor detalle los protocolos para registrar la PSG, o aquellos para clasificar las etapas de sueño, debe consultarse el Manual de la AASM [24].

4.1. Deterioro Cognitivo Leve

El envejecimiento es determinado por una serie de procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [50]. Como consecuencia, los **adultos mayores** son especialmente propensos al deterioro cognitivo; por precisión, en lo siguiente se usará el término *adulto mayor* para referirse a individuos con 60 o más de edad años. Cabe destacar que la funcionalidad del adulto mayor no depende meramente de la edad, sino que está relacionada con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [67].

La **demencia**, considerada como el estado más grave del deterioro cognitivo, es definida en el el Manual Diagnóstico y Estadístico de Trastornos Mentales (DSM-V, por sus siglas en inglés y la versión consultada) como sigue:

“Un síndrome que consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo.

Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente.” [37]

Se considera que la demencia es irreversible, y no se han identificado curas definitivas [27]. Debido a ello, ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar sus etapas tempranas. El diagnóstico temprano es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome [32].

Bajo esta línea de pensamiento se considera al **Deterioro Cognitivo Leve** (DCL) como una etapa precursora de la demencia, y que es definida como sigue:

“Una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia.” [62]

4.1. DETERIORO COGNITIVO LEVE

Para fines de la definición anterior, se entiende por *síndrome focal* al daño en una estructura nerviosa específica, cuya causa es conocida (como una hemorragia o una embolia) y cuyo inicio sea inmediato y evidente.

El DCL puede detectarse por medio de diversos métodos, que pueden ser complementarios entre sí. La forma de detección más simple es la percepción de fallas en la memoria por parte del individuo u de otro. La percepción subjetiva del deterioro cognitivo *esperado* por el envejecimiento provoca que esta forma de detección sea poco fiable. Una alternativa más formal consiste en la entrevista clínica de un especialista, la aplicación de cuestionarios sobre dificultades en la memoria, o incluso al uso de pruebas neuropsicológicas.

En psicología, los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [2]. Se considera que a través de estas herramientas es posible declarar objetivamente las deficiencias cognitivas o conductuales de los individuos, así como su severidad y características.

De forma auxiliar para el diagnóstico del DCL, se pueden efectuar análisis genéticos, químicos, de imágenes cerebral, entre otros que estudien el sistema nervioso central. Se espera que dichas técnicas, en combinación con las pruebas neuropsicológicas, permitirán diagnosticar más acertadamente el DCL y desentrañar los fenómenos neurobiológicos subyacentes.

Un referente ampliamente usado para el diagnóstico del DCL son los criterios para Alzheimer de la NINCDS–ADRDA, propuestos por el *National Institute of Neurological and Communicative Disorders and Stroke* y la *Alzheimer's Disease and Related Disorders Association* [42, 20]. Dichos criterios proporcionan protocolos para diagnosticar el Alzheimer y algunas enfermedades relacionadas (entre ellas el DCL), así como afecciones que generan síntomas similares. Desafortunadamente, las pruebas neuropsicológicas contempladas por los criterios de la NINCDS–ADRDA todavía no han sido *validadas* en México, es decir que su efectividad para generar diagnósticos acertados no ha sido verificada para la población mexicana.

Otra prueba neuropsicológica ampliamente extendida es el Mini-Mental State Examination (MMSE), propuesta por Folstein en 1975 [23] [citar mas, quizá??]. Sin embargo se ha reportado que, en la población mexicana, la prueba MMSE tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de DCL en general, y baja especificidad para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [49]. Para fines del comentario anterior,

4.1. DETERIORO COGNITIVO LEVE

se entiende por *sensibilidad* a la probabilidad de obtener verdaderos positivos, y por *especificidad* a la probabilidad de obtener verdaderos negativos.

Una tercera opción, a la cual se ha dado gran peso en el presente trabajo, es la prueba neuropsicológica Neuropsi, desarrollada por Ostrosky y ?? en la Universidad Autónoma de México (UNAM) [47]. La prueba Neuropsi ha sido validada para diversos grupos poblacionales en México, y se ha confirmado su utilidad para distinguir individuos con diverso grado de deterioro cognitivo.

Antes de pasar al siguiente tema, conviene mencionar la **pseudodemencia depresiva**, una afección que no está relacionada con el deterioro cognitivo pero que puede generar un diagnóstico positivo para DCL. De acuerdo al manual DSM-V, pseudodemencia depresiva se define como “*un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo*” [37]. Bajo esta línea de pensamiento resulta conveniente decir que, como parte del diseño experimental, se han omitido participantes con síndromes focales, retraso mental, bipolaridad, esquizofrenia, entre otros trastornos de atención y memoria ajenos al deterioro cognitivo. Con base a ello, se omite una discusión más extensa de dicho tipo de afecciones; el lector interesado puede referirse al Manual DSM-V [37].

4.1.1. Probable Deterioro Cognitivo Leve

En el presente trabajo se delimita al DCL por fines de precisión, usando para ello las pruebas neuropsicológicas. Se define operativamente el **Possible Deterioro Cognitivo Leve (PDCL)** como sigue:

“Una disminución significativa de las funciones cognitivas del sujeto con respecto las típicas de su edad y nivel de educación.”

Para fines de la definición anterior, el desempeño de las funciones cognoscitivas en un individuo es medido usando la prueba Neuropsi [47]; se considera que hay un déficit cognoscitivo *significativo* si la puntuación obtenida es menor al umbral predefinido para su grupo de edad y nivel de escolaridad. El umbral recomendado para la prueba Neuropsi debe calcularse como la media menos 3 desviaciones estándar de los puntajes típicos para individuos de cada grupo de edad y nivel de escolaridad; estos parámetros fueron estimados para la población mexicana por Ostrosky-Solís y colaboradores [47]. En el cuadro 4.2, bajo la etiqueta *Deterioro cognitivo* se recaban los puntajes de corte usados para declarar el PDCL.

La palabra '*probable*' en el PDCL hace alusión a que no constituye un diagnóstico *irrefutable* del DCL. En este sentido, el PDCL puede interpretarse como una condición *necesaria pero no suficiente* para el DCL.

4.1.2. Algunas pruebas neuropsicológicas

Dentro del contexto del presente trabajo, conviene describir las pruebas que fueron usadas para detectar el PDCL en adultos mayores. Según la descripción que se dio del DCL, para efectuar su diagnóstico debe verificarse que el individuo

- Presente una disminución en una o varias funciones cognitivas.
- Que los déficits cognoscitivos no correspondan a síndromes focales.
- Que los mismos déficits no cumplan los criterios para demencia.
- Que no exista una afección independiente del deterioro cognitivo y que genere síntomas similares.

La segunda condición fue investigada mediante una entrevista con el participante, y se constituyó como un criterio de inclusión. Debido a la ausencia de excepciones, la cuarta condición se limitó únicamente a detectar la pseudodemencia depresiva. La siguientes pruebas fueron utilizadas:

- Mini-Mental State Examination (MMSE)
Evaluación escrita relativamente rápida. Permite detectar el deterioro cognitivo, pero no proporciona *muchos* detalles al respecto [23]. [76]
- Evaluación Neuropsicológica (Neuropsi)
Evaluación extensiva sobre múltiples dominios. [48]
- Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (KATZ)
Evaluación de la independencia del individuo para realizar tareas básicas de la vida diaria.[30] [66]
- Short Anxiety Screening Test (SAST)
Evaluación corta para detectar trastornos depresivos y ansiosos. [70]
- Geriatric Depression Scale (GDS)
Evaluación corta para detectar cuadros depresivos en adultos mayores. [78]

4.1. DETERIORO COGNITIVO LEVE

Cuadro 4.1: Puntajes de corte para la prueba MMSE

Edad	Nivel de estudios	Máximo	DC
45 – 49	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
50 – 54	Elemental	23	18
	Primario	27	21
	Medio	28	22
	Superior	29	23
55 – 59	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
60 – 64	Elemental	23	18
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
65 – 69	Elemental	22	17
	Primario	26	20
	Medio	28	22
	Superior	29	23
70 – 74	Elemental	22	17
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
75 – 79	Elemental	21	16
	Primario	25	20
	Medio	27	21
	Superior	28	22
80 – 84	Elemental	20	16
	Primario	25	20
	Medio	25	20
	Superior	27	21

Fuente: Folstein [17]

4.1. DETERIORO COGNITIVO LEVE

Cuadro 4.2: Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

Edad	Escolaridad	Sano		Deterioro cognitivo		
		Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
31 – 50	Nula	95	68	54	41	28
	1 – 4	105	81	69	58	46
	5 – 9	118	106	101	90	79
	10 – 24	113	102	97	88	78
51 – 65	Nula	91	59	44	28	13
	1 – 4	98	77	67	57	47
	5 – 9	111	98	91	79	67
	10 – 24	102	93	88	80	72
66 – 85	Nula	76	48	34	20	6
	1 – 4	90	61	46	32	18
	5 – 9	97	80	72	56	39
	10 – 24	92	78	72	59	46

Fuente: Ardila y Ostrosky [2]

Cuadro 4.3: Puntuación para la prueba KATZ

Actividad	Descripción
1 Baño	Se baña completamente, o necesita ayuda sólo para jabonarse ciertas regiones (espalda, o una extremidad dañada).
2 Vestido	Saca la ropa del closet, se viste y desviste. Se excluye el anudar los cordones.
3 Uso del toilet	Llega al baño, se sienta y para del toilet, se arregla la ropa y se limpia (puede usar su propia chata en la noche y usar soportes mecánicos).
4 Movilidad	Entra y sale de la cama independientemente, se sienta y para de la silla (puede usar soporte mecánico).
5 Continencia	Controla totalmente esfínter anal y vesical.
6 Alimentación	Lleva la comida del plato a la boca (se excluye el cortar la carne o preparar la comida).

Fuente: Katz [30]. Se puntúa la dependencia para cada actividad.

4.2. ESTUDIO CLÍNICO DEL SUEÑO

Cuadro 4.4: Puntajes de corte para las pruebas SAST y GDS

Prueba	Puntaje	Indicación
SAST	> 24	Positivo para ansiedad
	22 – 24	No es conclusivo
	< 22	Negativo para ansiedad
GDS	0 – 4	Normal
	5 – 8	Depresión leve
	9 – 11	Depresión moderada
	12 – 15	Depresión severa

Fuente: Yesavage [78], Sinoff [70]

4.2. Estudio clínico del sueño

Usualmente estos registros de EEG muestran una actividad oscilatoria continua y cambiante, cuya frecuencia se considera entre 0.5 y 100 Hz. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad mental mostrando diferencias claras durante vigilia y sueño, o durante quietud y concentración [12]. Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, también muestran patrones relativamente organizados conocidos como **ondas cerebrales**. De forma tradicional, las ondas cerebrales se dividen en cinco grupos según su *frecuencia*:

- Delta, 0.5–3.5 Hz
- Theta, 3.5–7 Hz
- Alfa, 7–12 Hz
- Beta, 12–30 Hz
- Gamma, 30–100 Hz

Conviene destacar que diferentes autores han usado diferentes límites para los grupo, y de la misma forma se han incluido o excluido grupos o división de los mismos.

Adicionalmente a las ondas cerebrales, en el EEG pueden encontrarse *eventos* visiblemente diferentes de su entorno, llamados **paroxismos**; estas ondas imprevisibles tienen una duración corta (< 1 s) y poseen *formas* características. Los **husos de sueño** son típicos del sueño profundo, los **complejos K** son similares a las ondas

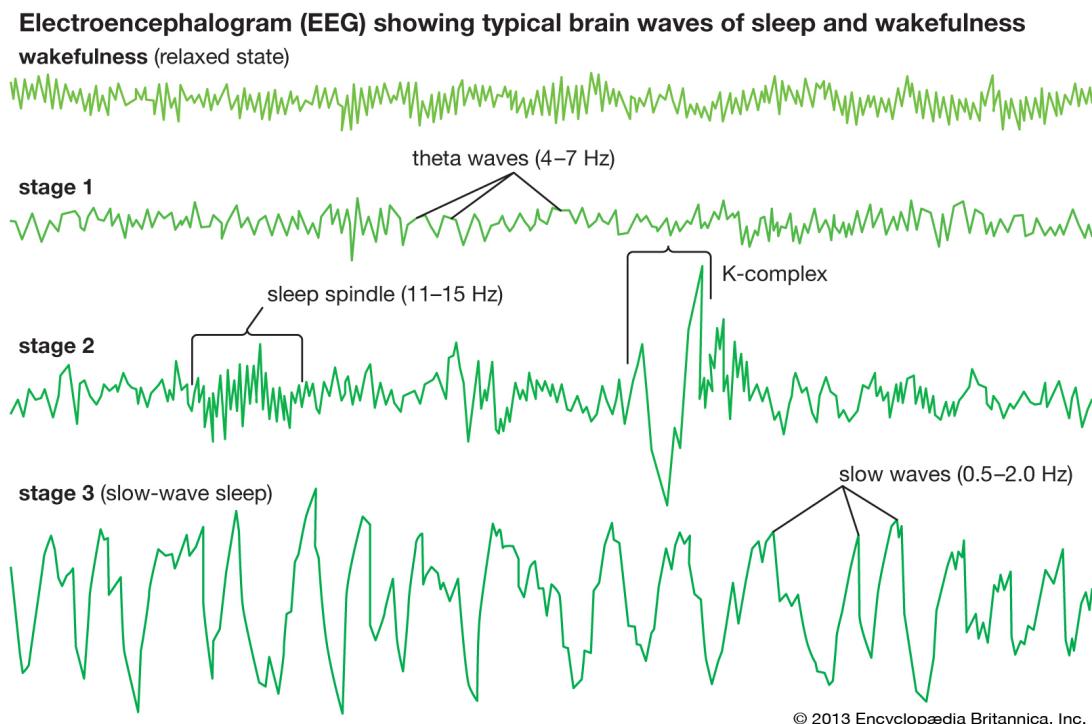


Figura 4.1: Ejemplos de ondas cerebrales y paroxisomas encontradas en el EEG durante el sueño. Imagen tomada de Encyclopædia Britannica, versión en línea [74].

???. En la figura 4.1 se representa un arquetipo visual de cada tipo de onda cerebral, incluyendo los paroxisomas.

Para realizar el registro de las ondas cerebrales de una forma estandarizada y comparable, se definen arreglos llamados **montajes**, entendidos como el conjunto de (1) los sitios donde se colocan los electrodos de registro y (2) la manera en que los electrodos de registro están conectados entre sí.

En el trabajo de Vázquez Tagle [75] se usa un montaje *referencial*, en el cual los electrodos se conectan en paralelo con un electrodo de referencia cuya actividad eléctrica es constante y negligible; los electrodos fueron colocados según el **Sistema 10–20** [31]. Dicho sistema define los sitios según una cuadrícula construida respecto a distancias relativas entre varios puntos de referencia: el *inion*, protuberancia en la región posterior del cráneo, el *nasión*, unión del hueso frontal y los huesos nasales, y el *punto preauricular*, ubicado arriba del cartílago que protege el canal auditivo.

Debido a que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y a que disparan de manera asíncrona, además de que el cerebro se encuentra cubierto

4.2. ESTUDIO CLÍNICO DEL SUEÑO

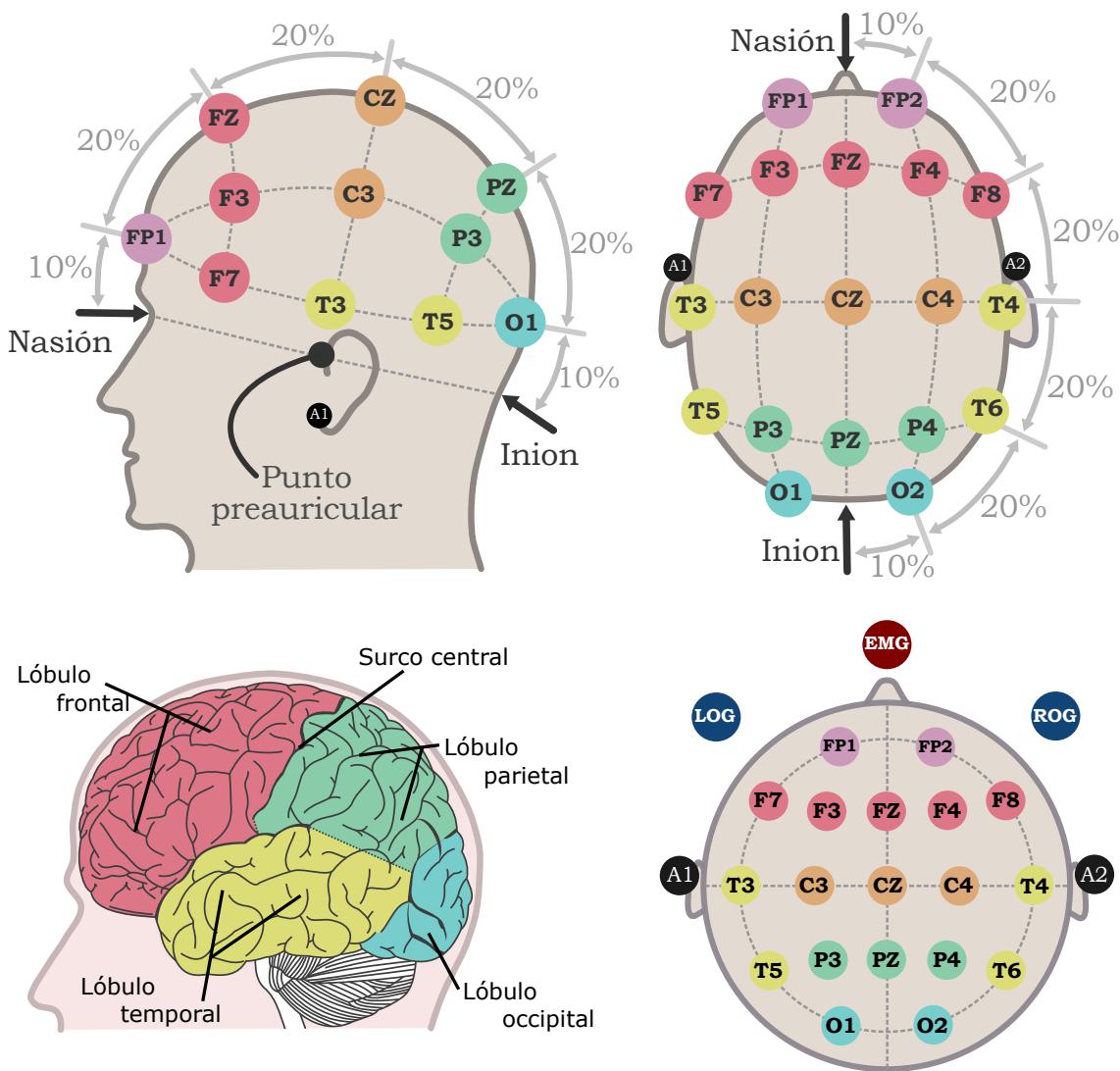


Figura 4.2: A. Colocación de electrodos según el sistema 10-20. Los electrodos se colocan en una malla de longitudes relativas. Las letras refieren a los lóbulos cerebrales cercanos (Frontal, Temporal, Parietal, Occipital) además del surco Central; los números impares se ubican a la izquierda, los pares a la derecha y se usa la Z para el eje central. En el montaje ilustrado se usan como referencia neutral a los lóbulos de las orejas, electrodos cortocircuitados A1 y A2. B. División de la corteza cerebral en lóbulos, mostrando a grosso modo qué regiones son registradas usando el EEG. C. Representación esquemática de los electrodos en el sistema 10-20, añadiendo los electrodos para actividad ocular y muscular. Se usarán diagramas en base a éste para reportar resultados.

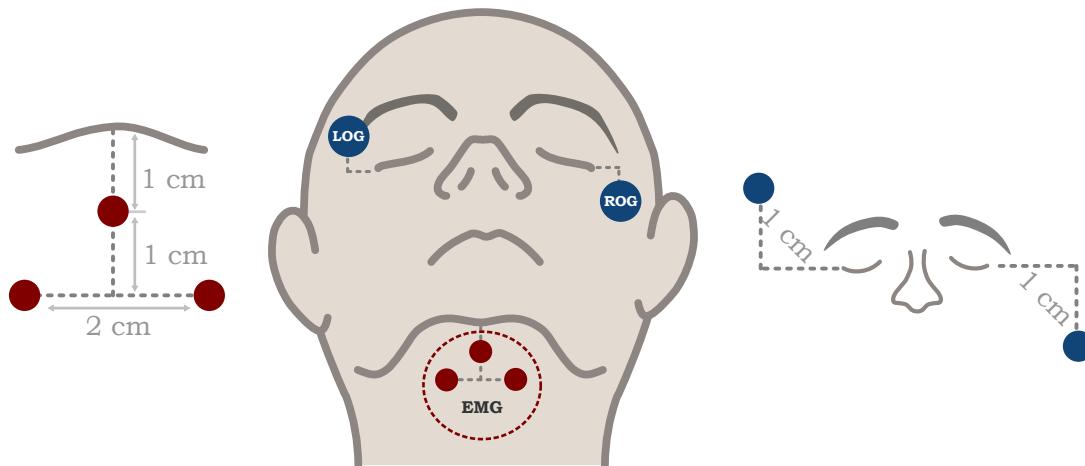


Figura 4.3: Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular

por las muchas capas descritas anteriormente, las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente. A ello hay que añadir la difusión generada por las meninges, el líquido encefalorraquídeo y el cráneo.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendido como señales que son registradas de manera no deseada; como ejemplo, los músculos faciales medianamente contraídos generan campos eléctricos con frecuencia de 100 Hz. Este tipo de ruido *persistentes* son eliminados usando un filtro que *elimine* los componentes de frecuencia específicos. Los ruidos de duración corta son referidos como **artefactos**; como ejemplo, pestañear voluntariamente durante un episodio de quietud mental interrumpe las ondas alfa por cerca de dos segundos.

Adicionalmente al registro del EEG, la PSG contempla el registro de algunas otras *variables fisiológicas* como respiración, ritmo cardíaco, temperatura, entre otros. En el estudio por Vázquez Tagle y colaboradores, el registro de PSG incluyó registros de actividad ocular (**electrooculograma**, EOG) y tono muscular (**electromiograma**, EMG), según las recomendaciones de la AASM para clasificar las etapas de sueños. La ubicación estos últimos electrodos es ilustrada en la figura 4.3.

Para interpretar los registros de EOG (canales LOG, ROG) se puede entender al ojo como una batería cuyos polos son la retina y la pupila, y que genera pequeñas variaciones en el campo eléctrico cuando se mueve; el registro consiste en la proyección del movimiento sobre el eje que forman los electrodos. Los registros de EMG (canal EMG) admiten una interpretación más *sencilla*, ya que los músculos son activados

4.2. ESTUDIO CLÍNICO DEL SUEÑO

directamente por señales eléctricas: el tono muscular es la actividad muscular basal, y se relaciona con la velocidad con que los músculos pueden *salir* del reposo.

4.2.1. Estructura del sueño

Se entiende al sueño como un proceso vital, con una estructura característica, y que en el ser humano presenta las siguientes propiedades [10]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma
3. Inmovilidad y relajación muscular
4. Periodicidad típica circadiana (diaria)
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, además de que genera una *deuda* acumulativa

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas por noche [14]. Paralelamente el sueño no es un proceso homogéneo, sino que tiene una estructura por etapas con rasgos electroencefalográficos y fisiológicos distintivos.

Para su estudio, el sueño se divide en dos etapas: N y R. La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K; en base a ello se divide en las sub-fases N1, N2, N3.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye (excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres), la frecuencia cardíaca y respiratoria se vuelve irregular, y el sujeto exhibe movimientos oculares rápidos (MOR); en base a lo cual la fase R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante el estado de alerta; estos patrones no interrumpen el sueño sino que, contrariamente, incrementan el umbral para estímulos externos, motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante el sueño MOR se producen la mayoría de

4.2. ESTUDIO CLÍNICO DEL SUEÑO

Cuadro 4.5: Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
Vigilia	W	Ritmo alfa en > 50 % de la época en la región occipital	No	Alto
NMOR 1	N1	Cambio de alfa por AABFM, atenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	<W
NMOR 2	N2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	<W, >R
NMOR 3	N3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 µV) en > 20 % de la época. Husos de sueño	No	<N2, ≈R
MOR	R	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas 'saw-tooth'	MOR's	Bajo

AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

las ensoñaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensoñaciones [63].

4.3. RELACIÓN ENTRE DETERIORO COGNITIVO Y SUEÑO

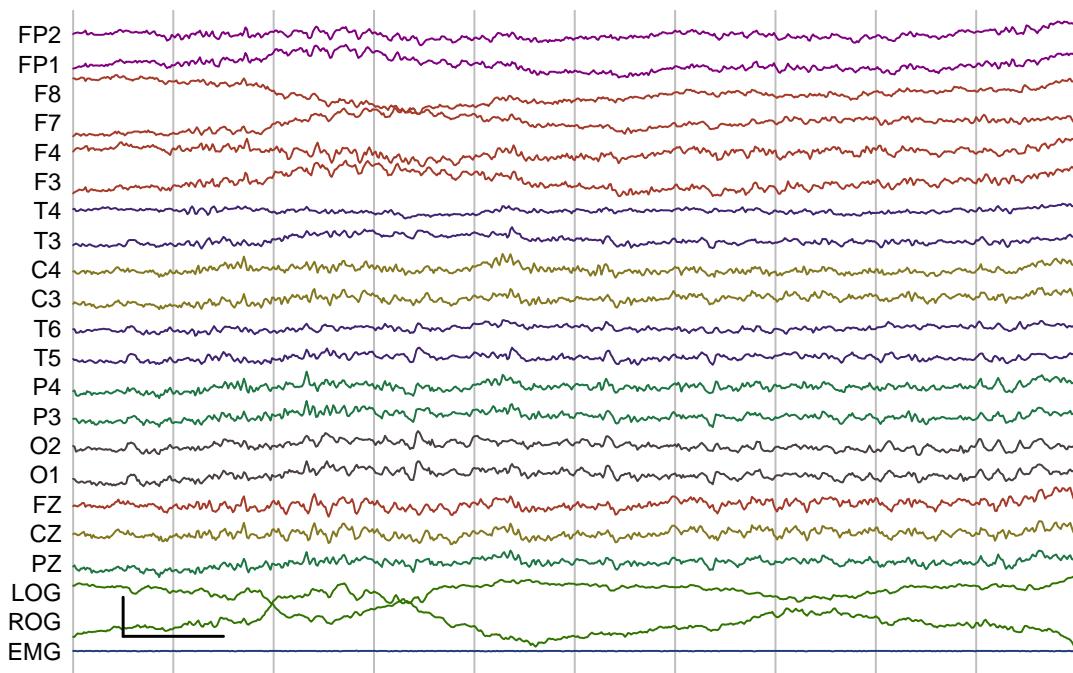


Figura 4.4: Registro de polisomnograma durante sueño MOR. Marca de calibración: vertical, 10 µV, horizontal, 1 segundo

4.3. Relación entre deterioro cognitivo y sueño

La época del sueño de Movimientos Oculares Rápidos (MOR) ha demostrado ser un indicador del DC en los adultos mayores. En otros estudios, se ha encontrado una mayor potencia absoluta y relativa en frecuencias lentes, en regiones laterales [9] y menos atonía muscular [11].

Las causas inmediatas del DCL pueden rastrearse al deterioro en varias estructuras cerebrales. Como ejemplo, los procesos de atención y memoria dependen de circuitos colinérgicos¹; estos circuitos son propensos a degradación estructural durante el envejecimiento, y en mayor medida si es un envejecimiento patológico [68]. Cabe destacar que los circuitos colinérgicos son activados de forma importante durante el sueño, particularmente en la fase denominada MOR [8].

Varios autores han reportado correlaciones, a nivel poblacional, entre el DCL y trastornos del sueño en adultos mayores [1, 44, 61, 55]. De forma enfática, la fase de sueño denominada MOR ha sido ampliamente relacionada con la consolidación de la memoria, así como con otras funciones cognitivas [21, 22, 40, 54, 53, 71, 16].

¹Grupos de neuronas cuyo principal transmisor es la acetilcolina

4.3. RELACIÓN ENTRE DETERIORO COGNITIVO Y SUEÑO

El sueño MOR se ha asociado durante mucho tiempo con las funciones cognitivas [45]; citado en [15]. El sueño MOR desempeña un papel en la consolidación de la memoria [39, 21, 22, 54, 52, 53, 72]. Después de tareas complejas, hay reactivaciones de circuitos neuronales durante MOR sleep [38]. La Potenciación a Largo Plazo (LTP) solo ocurre durante la vigilia y el sueño MOR, y, dependiendo de su fase theta del hipocampo, la LTP puede mejorarse o inhibirse [51].

El sueño MOR mejora la memoria y los procesos de atención mediante las entradas colinérgicas [7] a través de pontine [19] y las estructuras del basales del cerebro anterior [6]. Durante el envejecimiento normal y especialmente durante el envejecimiento patológico, los procesos de atención y memoria se vuelven más vulnerables, y las neuronas colinérgicas son las más afectadas [68]. El envejecimiento afecta a varias estructuras anatómicas que resultan en la pérdida de un eje dendrítico en las neuronas corticales que muestran una degradación en su complejidad fractal estructural [35].

Se ha encontrado, por ejemplo, correlaciones entre el DCL en adultos mayores con la *presencia* de ciertos tipos de ondas cerebrales [4, 57, 56]. Sin embargo, otros estudios sugieren que el EEG durante el sueño es un mejor predictor del DCL [buscar y citar Baryet ??]. El sueño MOR mejora la memoria y los procesos de atención mediante las entradas colinérgicas [7] a través de pontine [19] y las estructuras del basales del cerebro anterior [6]. Durante el envejecimiento normal y especialmente durante el envejecimiento patológico, los procesos de atención y memoria se vuelven más vulnerables, y las neuronas colinérgicas son las más afectadas [68]. El envejecimiento afecta a varias estructuras anatómicas que resultan en la pérdida de un eje dendrítico en las neuronas corticales que muestran una degradación en su complejidad fractal estructural [35].

Los estudios anteriores han incluido análisis lineales del Electroencefalograma (EEG) o del Electromiograma (EMG), pero el Electrooculograma (EOG) no se ha considerado como un posible marcador de deterioro cognitivo. Los tres indicadores de sueño MOR aparecen generalmente en orden consecutivo. Al ingresar a esta etapa, los husos y las ondas lentas de alta amplitud están ausentes, el EEG tiene abundantes frecuencias beta y gamma [73, 36], hay una abrupta pérdida de voltaje que ocurre en un intervalo menos de 2 segundos [64], y, luego, aparecen los movimientos oculares (MOR) característicos [24].

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

CAPÍTULO 5

Metodología y resultados

El presente trabajo surge de una colaboración con el Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, dependiente del Instituto de Ciencias de la Salud de la UAEH y a cargo de la Dra. Alejandra Rosales Lagarde. La colaboración incluye acceso a los registros obtenidos en un estudio por Vázquez-Tagle en 2016 [75]. Dicho estudio se centró en la epidemiología de los trastornos del sueño en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo, y consideró registros de PSG para evaluar parámetros relacionados al sueño MOR. El presente trabajo tiene como objetivo particular analizar con mayor detalle dichos registros.

En este capítulo se describe primeramente la metodología seguida para obtener los registros de PSG. Posteriormente se describe la metodología usada para analizar los registros de PSG, usando las herramientas descritas en el capítulo 3.

Los registros de PSG fueron segmentados en ventanas de 30 segundos, referidas como **épocas**. El análisis de los registros de PSG se llevó a cabo a tres niveles:

- Dentro de cada época.
- Entre las diferentes épocas en un registro.
- Entre los diferentes participantes.

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

El análisis a nivel de época contempla su clasificación según etapa de sueño (limitada a MOR y NMOR), y su clasificación como estacionarias (usando la prueba de PSR). El uso de épocas como unidades de estudio se justifica por la gran heterogeneidad del sueño nocturno; paralelamente, destaca el supuesto fisiológico de que las etapas de sueño son *comunes* entre los humanos. En suma, los registros de PSG para un sólo individuo pueden interpretarse como una población de épocas.

El análisis a nivel de registro surge de considerar la heterogeneidad del sueño pero usando al registro entero como unidad de estudio. El tomar las épocas junto con su estructura temporal reveló algunos patrones interesantes de actividad.

Para el análisis entre participantes (divididos en grupos), varias de las características descritas fueron *colapsadas* para constituir características *simples*. Debido a las características de la muestra (ver más adelante), los resultados obtenidos no pueden extrapolarse a la población en general. Los resultados obtenidos, entonces, se presentan como *indicios*.

5.1. Características de los participantes

Los participantes fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia* bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años
- Diestros (mano derecha dominante)
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales
- No usar medicamentos o sustancias para dormir
- Firma de consentimiento informado
- Voluntario para el registro de PSG

Un total de 16 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Con el fin de detectar el DCL en estos pacientes, éstos fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MMSE), detectar cambios en su vida cotidiana (KATZ) y descartar cuadros depresivos (SAST, GDS); para más detalles ver capítulo anterior, sección 4.1.2. En la tabla 4.2

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Cuadro 5.1: Datos generales de los participantes

	Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SAST	KATZ	GDS
Grupo CTRL								
MJH	F	72	9	113	30	18	0	0
JAE	F	78	5	102	28	19	0	5
MGG	F	61	9	114	28	29	1	14
EMT	F	50	22	117	30	15	0	4
$\hat{\mu}$		65.3	11.3	111.5	29.0	20.3	0.3	5.8
$\hat{\sigma}$		12.4	7.4	6.6	1.2	6.1	0.5	5.9
Grupo PDCL								
CLO	F	68	5	81	28	22	1	6
RLO	F	63	9	90	29	20	0	3
JGZ	M	65	11	87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8	96	29		0	2
PCM	M	71	9	111	28	20	0	10
$\hat{\mu}$		68.0	8.4	93.0	27.8	20.5	0.2	4.4
$\hat{\sigma}$		4.1	2.2	11.4	1.6	1.0	0.4	3.6

se reportan los puntajes obtenidos por los participantes en dichas pruebas. Se determinó que, objetivamente, 12 de los voluntarios no padecen depresión o ansiedad, ni presentan afectaciones significativas en la vida diaria. Debido a problemas técnicos diversos, sólo 9 participantes fueron considerados; se reportan únicamente los datos relativos a esos participantes.

En base al diagnóstico de Posible Deterioro Cognitivo Leve, los 9 participantes fueron divididos en dos grupos: PDCL y CTRL. Es importante mencionar que, bajo las condiciones muestrales, el grupo CTRL no puede fungir satisfactoriamente como grupo control; una descripción más adecuada sería *grupo sin PDCL*.

5.1.1. Registro del polisomnograma

Para efectuar el registro de la PSG, los participantes acudieron a las instalaciones del Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

siesta ese día. Bajo estas condiciones experimentales se garantiza que los registros son representativos del sueño nocturno de cada participante.

El registro per se fue efectuado usando un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic Mexicana). El protocolo de la PSG incluye los siguientes electrodos¹:

- 19 electrodos de EEG colocadas según el Sistema Internacional 10–20.
- 2 electrodos de EOG para movimientos oculares.
- 2 electrodos de EMG para tono muscular en los músculos submentonianos.

Los electrodos para EEG fueron conectados en paralelo usando como referencia común los lóbulos de las orejas; se mantuvo por debajo de $50\ \mu\Omega$. Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron *pasado* filtros analógicos pasa bandas: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Los registros fueron digitalizados con una frecuencia de muestreo de 512 puntos por segundos (Hz), y posteriormente almacenados en formato de texto bajo la codificación ASCII.

Como se mencionó anteriormente, los registros fueron segmentados en segmentos de 30 segundos, referidas como **épocas**. Cada una de las épocas fue clasificada como MOR o NMOR; la clasificación fue llevada a cabo por dos expertos de ICSA, y bajo los estándares de la AASM.

Por simplicidad técnica, los registros fueron truncados para poder considerar épocas completas; algunos datos al final de cada registro fueron omitidos, aunque representan una cantidad negligible de tiempo. Cabe mencionar que cada época de 30 segundos, a una frecuencia de 512 Hz, representa un total de 15,360 puntos.

En la tabla 5.2 se describe la duración de los registros, así como la cantidad de tiempo del registro clasificado como sueño MOR. La cantidad de tiempo en vigilia registrado es negligible (< 5 minutos por cada participante), de modo que ésta no es reportada; con una pérdida mínima de generalidad, se puede afirmar que los registros fuera del sueño MOR corresponden a sueño NMOR.

¹Para más detalles ver el capítulo anterior, particularmente la sección 4.2

5.1. CARACTERÍSTICAS DE LOS PARTICIPANTES

Cuadro 5.2: Datos generales sobre los registros de PSG

	Total		MOR*		
	Puntos	Tiempo	Puntos	Tiempo	%
Grupo CTL					
MJH	15851520	8:36:00	1950720	1:03:30	12.31
JAE	13885440	7:32:00	2626560	1:25:30	18.92
MGG	15728640	8:32:00	2549760	1:23:00	16.21
EMT	8478720	4:36:00	721920	0:23:00	8.51
$\hat{\mu}$	13486080	07:19:00	1962240	01:03:53	13.99
$\hat{\sigma}$	3457240	01:52:32	880346	00:28:39	4.55
Grupo PDC					
CLO	14499840	7:52:00	2027520	1:06:00	13.98
RLO	12902400	7:00:00	1520640	0:49:30	11.79
JGZ	18432000	10:00:00	522240	0:17:00	2.83
AEFP	14622720	7:56:00	629760	0:20:00	4.31
PCM	11550720	6:16:00	906240	0:29:30	7.85
$\hat{\mu}$	14401536	7:48:48	1121280	0:36:30	8.15
$\hat{\sigma}$	2582527	1:24:04	637856	0:20:46	4.75

*El sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos

5.2. CARACTERÍSTICAS GRUPALES

5.2. Características grupales

Previo a los análisis de los registros de PSG, se corroboró si los dos grupos de participantes efectivamente se *comportan* como grupos estadísticamente diferentes. Con dicho objetivo, se aplicaron pruebas *t* de Wilcoxon entre los dos grupos, para todas las variables reportadas anteriormente; los resultados de estas pruebas se reportan en la tabla 5.3.

Así mismo, se verificó si las variables medias (edad, escolaridad, puntajes en las pruebas) estaban correlacionadas entre sí.

Previo al análisis de la estacionariedad, se corroboró la hipótesis de que las variables independientes son estadísticamente iguales entre los grupos CTL y PDC. Las comparaciones usando la prueba *t* de Welch (cuadro ??) indican que efectivamente la hipótesis se cumple salvo para los puntajes de Neuropsi.

Se evaluó si pudieran existir relaciones entre las variables que se presumen independientes. Usando la prueba de correlación de Spearman (cuadro 5.4) se encontró sólo hay correlaciones monotónicas entre los siguientes pares de variables:

- Edad y Escolaridad
- Puntaje en Neuropsi y Puntaje en Mini Mental-State Examination (MMSE)
- Tiempo de MOR (en segundos) y Tiempo en MOR (porcentaje)

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas, y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Algunos autores han sugerido que un bajo nivel de escolaridad es un factor de riesgo para padecer deterioro cognitivo, en base a estudios horizontales de larga escala [43]. En el presente trabajo se ignora este dato, en vista de que no se pudieron relacionar el nivel de escolaridad de los participantes con su desempeño en pruebas neuropsicológicas.

La relación entre los puntajes en Neuropsi y en MMSE era de esperarse, ya que ambas pruebas miden parámetros similares y tienen contenidos independientes. Cabe mencionar el curioso fenómeno en que (1) los puntajes de MMSE tienen estadísticamente las mismas medias grupales, (2) los puntajes de MMSE están fuertemente correlacionados con los puntajes de Neuropsi, y (3) los puntajes de Neuropsi tienen

5.2. CARACTERÍSTICAS GRUPALES

Cuadro 5.3: Variables independientes entre grupos

	Grupo CTRL		Grupo PDCL		t de Welch		
	Media	(DE)	Media	(DE)	p	t	ν
Edad	68.2	(7.2)	67.6	(3.4)	0.8746	0.16	6.11
Escolaridad	9.2	(2.7)	8.4	(2.2)	0.6201	0.52	7.69
Neuropsi	108.9	(5.2)	87.8	(5.6)	0.0003	6.17	7.94
MMSE	29.4	(0.9)	27.4	(1.4)	0.0706	0.16	6.11
Sueño [s]	7:51:30	(0:57:36)	7:16:48	(2:24:43)	0.6836	0.50	5.24
MOR [s]	0:52:06	(0:23:00)	0:34:18	(0:22:14)	0.2486	1.24	7.99
MOR [%]	11.3	(5.1)	8.4	(4.8)	0.3871	0.91	7.96

DE=Desviación Estándar

Cuadro 5.4: Correlaciones entre variables independientes

	1	2	3	4	5	6
1 Edad	•					
2 Escolaridad	-0.7134*	•				
3 Neuropsi	-0.2432	0.3776	•			
4 MMSE	-0.1063	0.1812	0.8477***	•		
5 Sueño [s]	0.0486	-0.0944	0.0545	0.0374	•	
6 MOR [s]	0.2796	-0.5035	0.1879	0.2618	-0.1515	•
7 MOR [%]	0.3709	-0.5287	0.0182	0.0748	-0.3578	1****

Niveles de significancia: * $<.05$, ** $<.01$, *** $<.005$, **** $<.001$

estadísticamente medias grupales diferentes. Se confirma que la prueba MMSE tiene menor sensibilidad que la prueba Neuropsi para detectar deterioro cognitivo.

Era por demás obvia la relación entre la cantidad total de sueño MOR, con su proporción respecto a todo el sueño. Sin embargo, conviene mencionar que la cantidad de sueño MOR no es afectada por ninguna de las otras variables independientes; luego entonces las cantidades que fueron estudiadas (estacionariedad, espectro de potencias) no tienen correlaciones sesgadas con las demás variables.

5.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao

Se fragmentaron los registros en ventanas de 30 segundos de duración, sin traslape. Cada una de estas ventanas fue sometida a la prueba de PSR, y se clasificó como *estacionaria en el sentido de PSR* si fue posible rechazar ($p < 0.05$) la hipótesis de no-estacionariedad. Los resultados obtenidos (una lista de las épocas que son estacionarias) se guardaron en archivos de texto para su posterior análisis. Debido a la gran variabilidad entre el tiempo que los participantes pasaron en sueño MOR, se decidió basar las comparaciones en proporciones de épocas; por ejemplo, se calculó la proporción de épocas MOR que son estacionarias para todos los participantes.

Como análisis exploratorio se graficaron en el tiempo las épocas, en todos los canales, como se muestra en la figura 5.1. Este tipo de gráficos *revelan* cierto tipo de *bloques* de épocas estacionarias o no-estacionarias. Heurísticamente se puede afirmar que éstos patrones son independientes de la prueba de PSR, y anteriormente se reportó que estos patrones suelen coincidir con la aparición de sueño MOR. Más adelante se ofrece una discusión al respecto.

En otro ámbito, se replicó la metodología usada por McEwen [41] para contrastar la afirmación de que las series de tiempo *suficiente cortas* son estacionarias. Este procedimiento consistió en repetir la clasificación de épocas variando el tamaño de ventana; los tamaños de ventana se tomaron de la forma 30×2^n segundos, para comparar con el tamaño de época recomendado por la AASM.

Usando la clasificación de épocas estacionarias, obtenida para diferentes tamaños de ventana, se construyeron más gráficos sobre la ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. Estos nuevos gráficos, como el de la figura 5.3, refuerzan heurísticamente la hipótesis de que los patrones son significativos fisiológicamente.

En base a resultados previos usando esta técnica, se espera que el comportamiento de los patrones visuales obedezca al fenómeno de **estacionariedad local**; esta característica, descrita por Dahlhaus [18], implica que un proceso puede ser aproximado a trozos *ensamblando* procesos estacionarios. Esta caracterización del EEG ha sido usada anteriormente de manera fructífera pero problemática [5, 29]. Dentro del modelo para registros de PSG, la estacionariedad local significa que el PSG no es formalmente homogéneo *pero* puede entenderse como varios segmentos homogéneos. En un sentido más general, es coherente pensar que el PSG se componga tanto de

5.3. APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

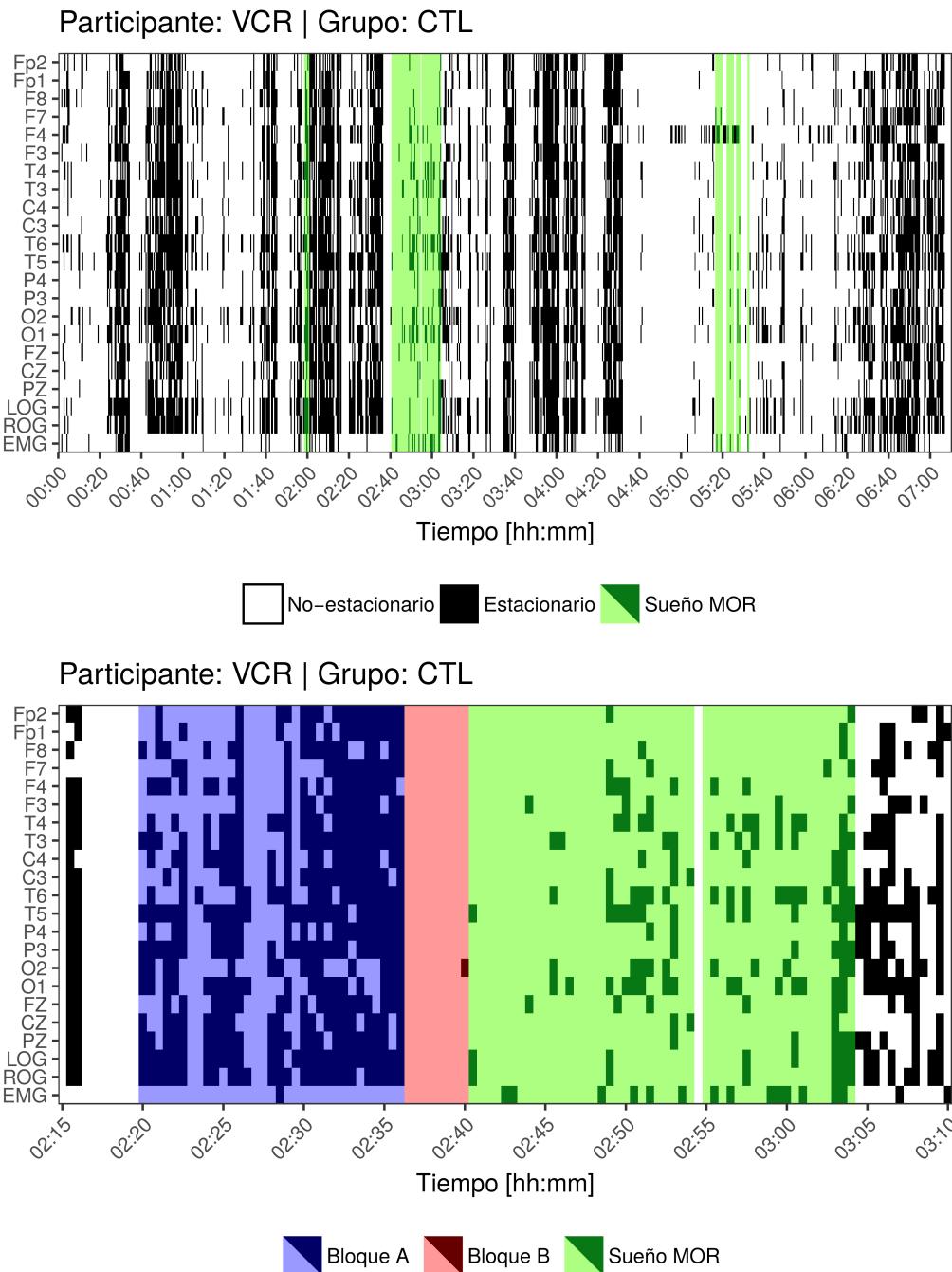


Figura 5.1: Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes. **Arriba:** Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. **Abajo:** Patrón de bloques relacionado con el sueño MOR

5.3. APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

segmentos homogéneos como de *eventos puntuales* y artefactos.

En la figura 3.1 se muestra esquemáticamente cómo el tamaño de las ventanas puede influir para su clasificación como estacionarias/homogéneas.

Entonces, se propone que los registros de PSG se comportan como procesos localmente estacionarios; más aún, se propone que esta característica cambia cualitativamente en adultos mayores con PDC, para los cuales el *nivel de homogeneidad* del PSG es muy similar durante MOR y NMOR.

Cabe destacar que la aplicación *per se* de la prueba fue efectuada usando el software estadístico R. En particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete **fractal** [13] bajo la función **stationarity**.

5.3. APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

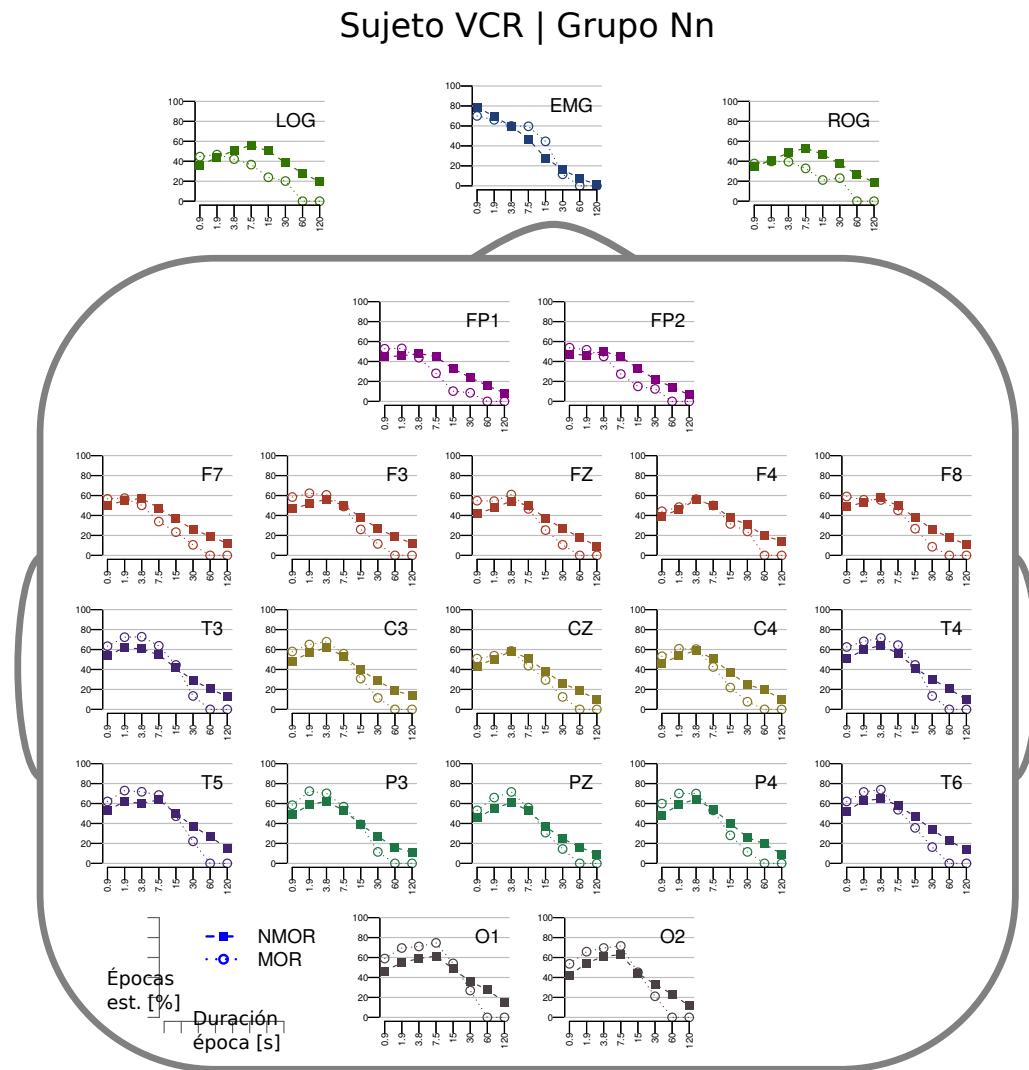


Figura 5.2: Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana

5.3. APLICACIÓN DE LA PRUEBA DE PRIESTLEY-SUBBA RAO

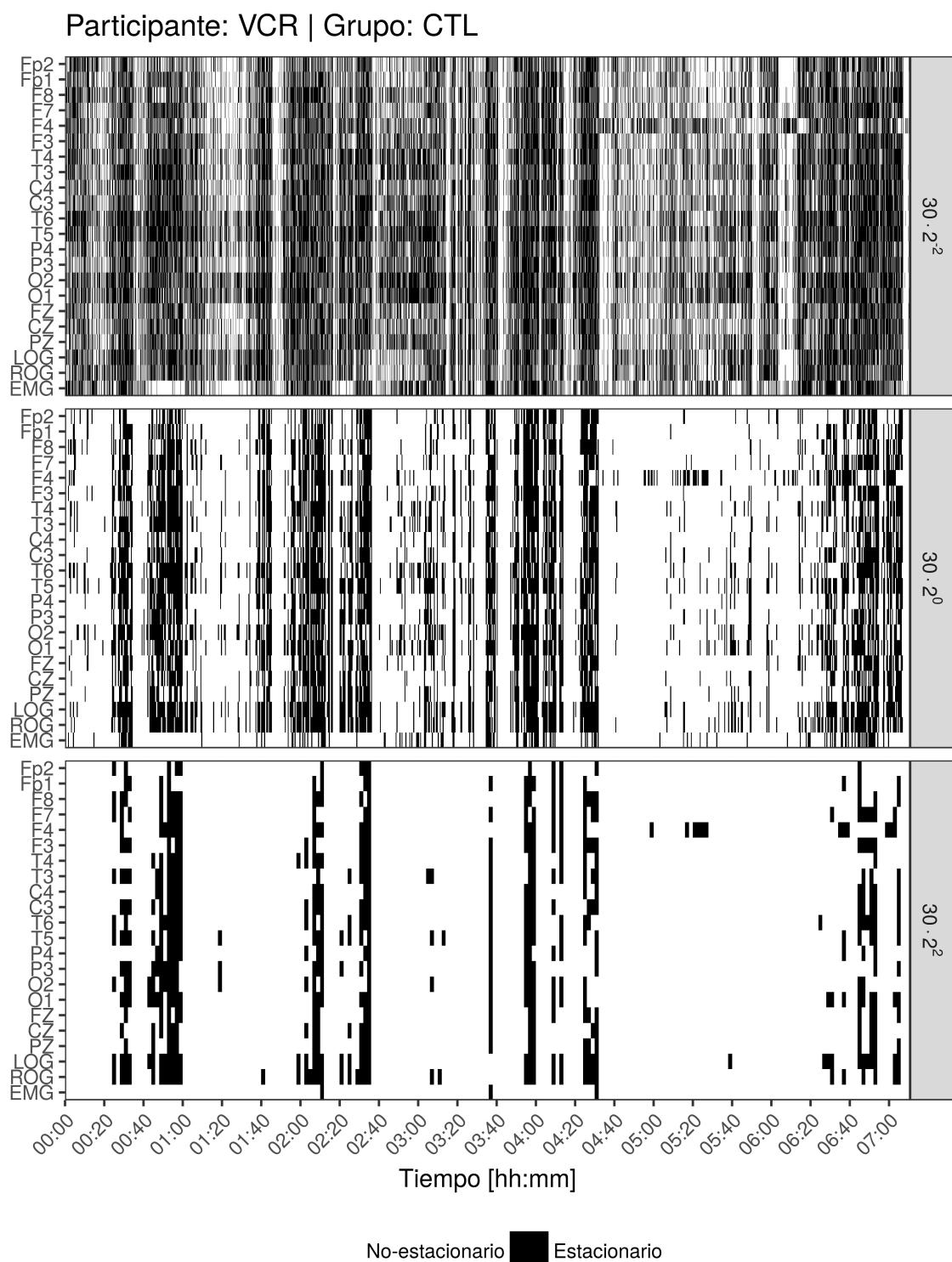


Figura 5.3: Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana.

5.4. Variabilidad dentro del sujeto

Se sometió a prueba la hipótesis de que durante sueño MOR ocurre en mayor medida la estacionariedad débil, en comparación con el sueño NMOR. Para ello, se compararon el porcentaje de épocas estacionarias en el sentido de PSR, ocurridas durante sueño MOR y NMOR. La comparación fue efectuada usando la prueba χ^2 de Pearson. Se encontró de manera consistente que los canales ROG y LOG presentaron diferencias significativas ($p < 0.05$) entre sueño MOR y NMOR, lo cual puede explicarse por los movimientos oculares rápidos característicos del sueño MOR. En los canales que corresponden al EEG no se encontraron patrones consistentes y claros entre los sujetos (ver figura 5.4).

Se repitió la comparación a un nivel grupal, usando la prueba U de Mann-Whitney. Se encontraron diferencias significativas para el grupo CTL en los canales P3, P4, PZ, ROG y EMG; en el grupo PDC se observaron tales diferencias sólo en P4. Las proporciones muestran tendencias que, quizás, resultaron no ser significativas por el tamaño pequeño de la muestra: los canales P3 y PZ podrían ser diferentes también para individuos del grupo PDC, y el canal LOG podría ser diferente durante sueño MOR y NMOR. Así mismo se hipotetiza que para el grupo CTL, en todos los canales, el sueño MOR es presenta menor cantidad de épocas estacionarias.

Se concluye que no se puede establecer diferencias entre las medias grupales para esta cantidad (proporción de épocas estacionarias, medidas en el sentido de PSR), debido a la gran variabilidad entre sujetos.

5.4. VARIABILIDAD DENTRO DEL SUJETO

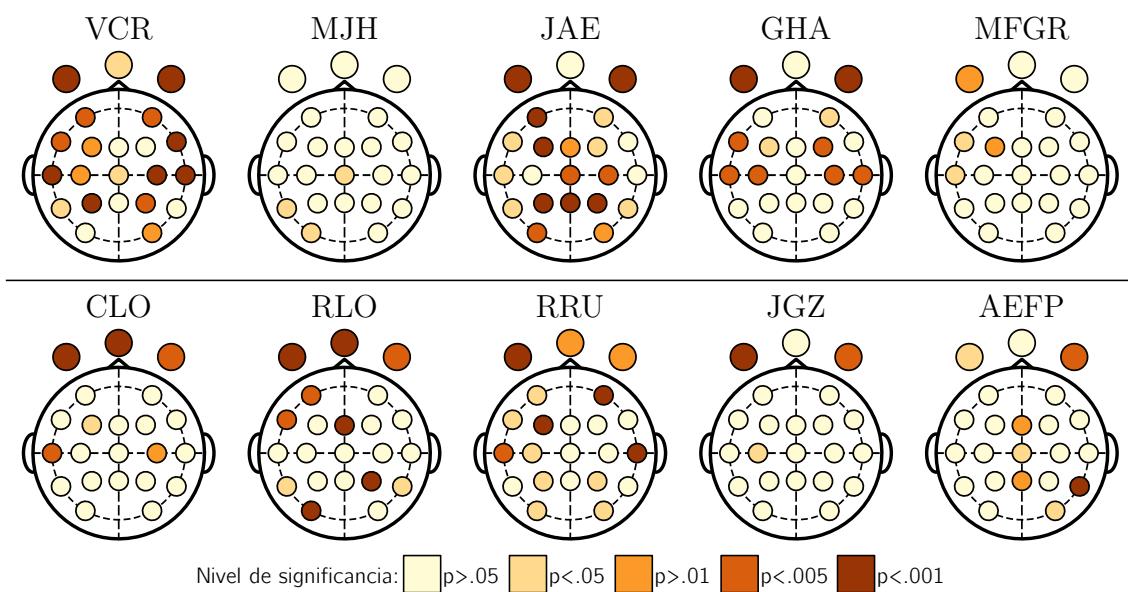


Figura 5.4: Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos

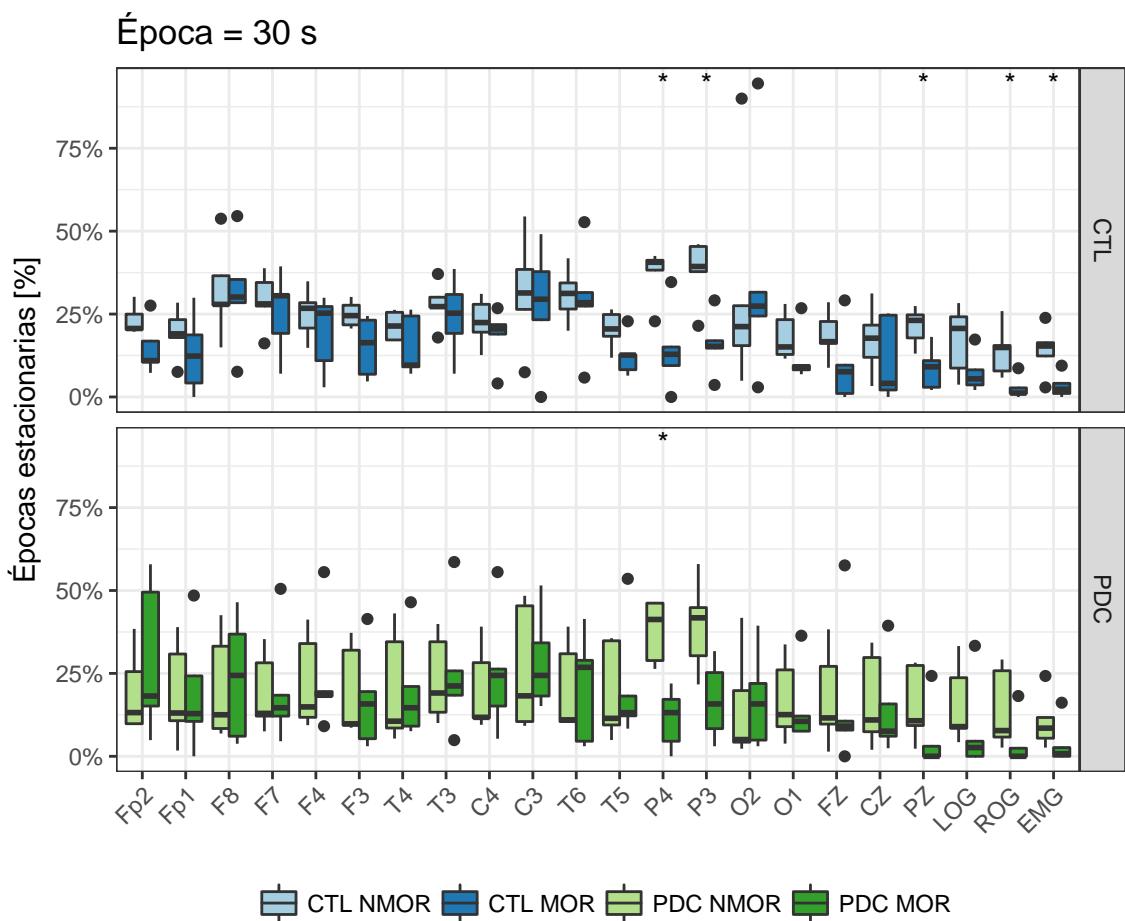


Figura 5.5: Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.

5.4. VARIABILIDAD DENTRO DEL SUJETO

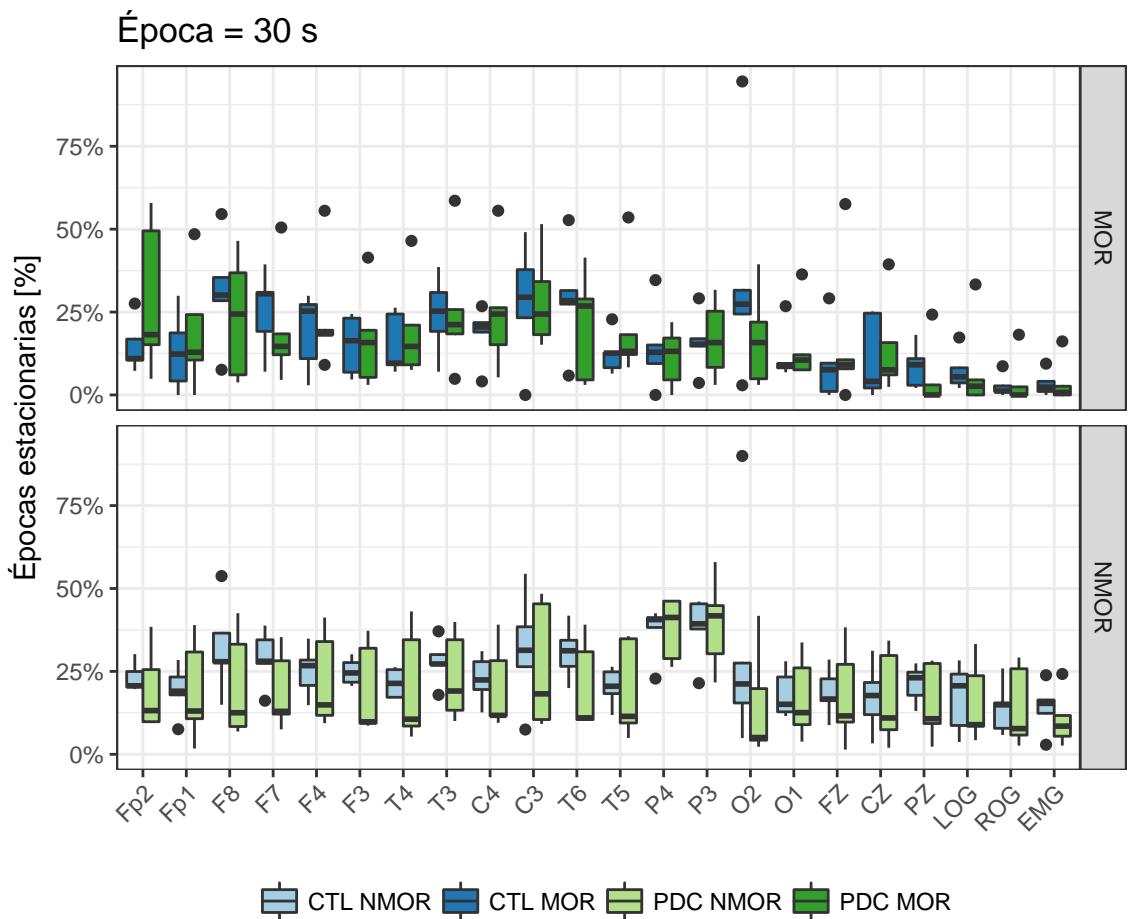


Figura 5.6: Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC.

CAPÍTULO 6

Discusión y conclusiones

Este trabajo parte de la hipótesis de que adultos mayores con PDC presentan en mayor medida estacionariedad débil en sus registros de PSG; al comparar sujetos de los grupo Nn (control) y Mn (PDC), no se observaron cambios significativos en la porción de tiempo durante la cual el registro de PSG se comporta como débilmente estacionario. Esto puede interpretarse como que los cambios en la corteza cerebral durante el deterioro cognitivo, no provocan que la señal se vuelva más *simple* en el sentido de *volverse* estacionaria.

Comparando grupalmente la cantidad de épocas estacionarias durante MOR y NMOR, se encontró que en el grupo Nn había diferencias significativas en sitios de la región frontal y que no eran presentes en el grupo Mn; para poder establecer una relación con el PDC haría falta un mayor grupo muestral, o bien nuevos registros de PSG para los mismos sujetos, o incluso analizar registros de EEG durante otro tipo de actividades y confirmar las diferencias encontradas.

Cabe destacar que la evidencia aportada indica que el PSG es un conjunto de señales que se comportan como no-estacionarias durante la mayor parte del sueño, lo cual confirma el supuesto usual de que las señales de origen biológico son por naturaleza no-estacionarias.

6.1. CONCLUSIONES

6.1. Conclusiones

Se concluye que es posible la ocurrencia de fragmentos arbitrariamente cortos de registros de PSG que no son débilmente estacionarios. Paralelamente, la presencia de estos fragmentos se ve influida por el estado de actividad del cerebro. Como consecuencia directa de este fenómeno, es posible limitar los efectos *distorsivos* de la no-estacionariedad, para lo cual basta un diseño experimental que distinga adecuadamente el estado de actividad a estudiar.

En otro ámbito, es en principio posible usar la proporción de estacionariedad (*densidad* de ventanas estacionarias en el sentido de PSR) en el EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Para ello, falta investigar las características particulares de la etapa que se busca identificar, así como otras etapas cercanas en el tiempo.

6.2. Trabajo a futuro

Una vez que se ha identificado un marcador para el PDC usando un grupo de laboratorio, conviene automatizar los análisis para su uso clínico sobre un público más general. Un uso más amplio de la técnica asegura una mayor población para poder estudiar la efectividad y sensibilidad de la prueba Y más que eso, se espera que puedan ser sinceramente beneficiosos para los pacientes. Siguiendo el protocolo usual, los marcadores presentados no serán usados como único recurso para generar un diagnóstico clínico, sino como un apoyo a las herramientas existentes.

El uso de marcadores basados en registros de PSG –basados en el EEG en general– aporta una base fisiológica al diagnóstico de deterioro cognitivo, misma que no es posible usando únicamente pruebas neuropsicológicas. Conviene destacar que, de entre las herramientas para el registro fisiológico del sistema nervioso central, las técnicas electrofisiológicas son las más económicas y menos invasivas; generar marcadores basados en ellas facilita su uso por el público general como herramienta diagnóstica, sobre todo en ausencia de síntomas.

APÉNDICE A

Compilados gráficos

En este apéndice se muestran los compilados gráficos mencionados en la parte de resultados, y que representan la distribución temporal y pseudo-espacial de las ocurrencia de épocas PSG dentro de los registros para cada paciente.

Primeramente se presentan los compilados gráficos en los que se ha destacado el sueño MOR; posteriormente se presentan los mismos gráficos resaltando los patrones visuales propuestos, que parecen estar relacionados con la aparición de sueño MOR.

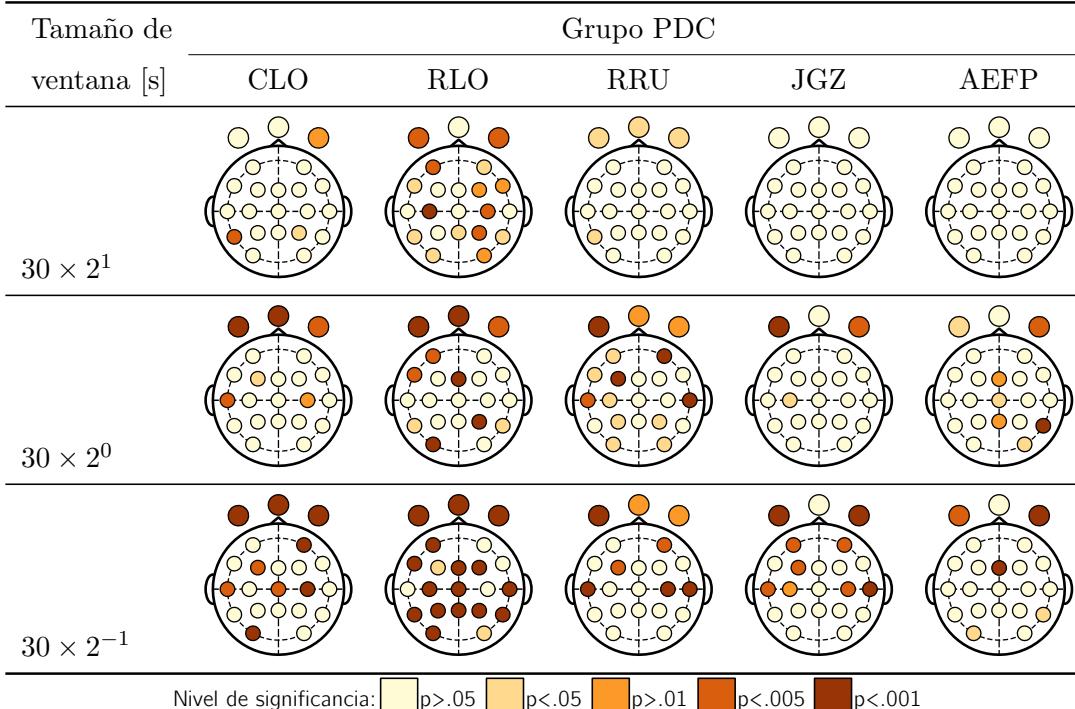
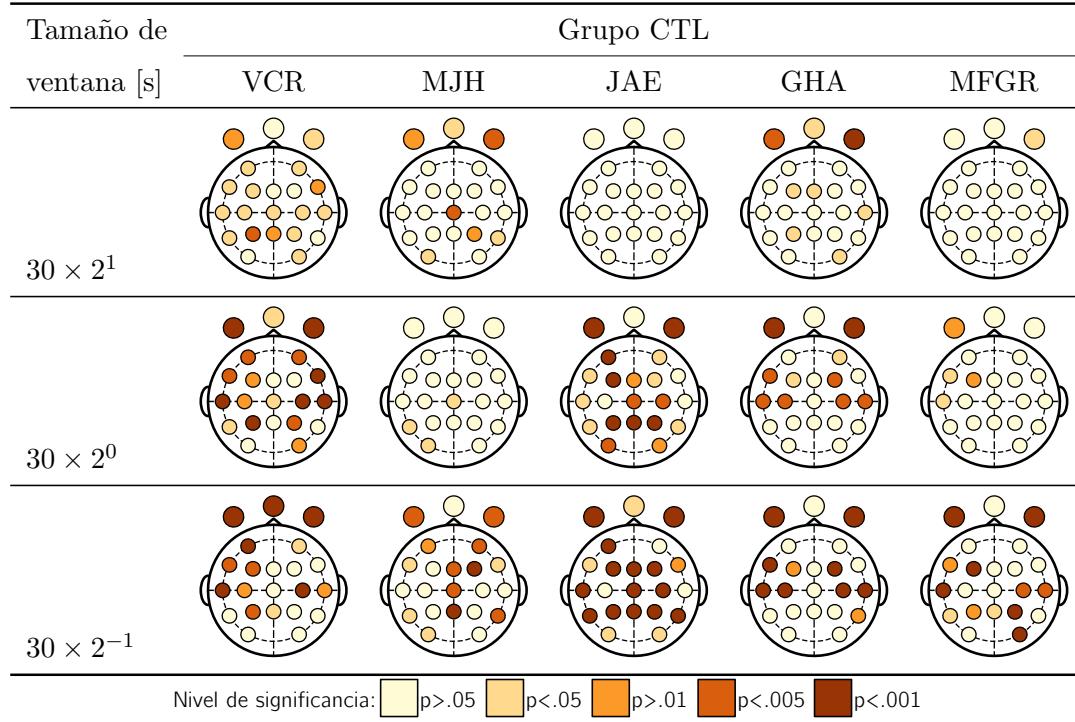
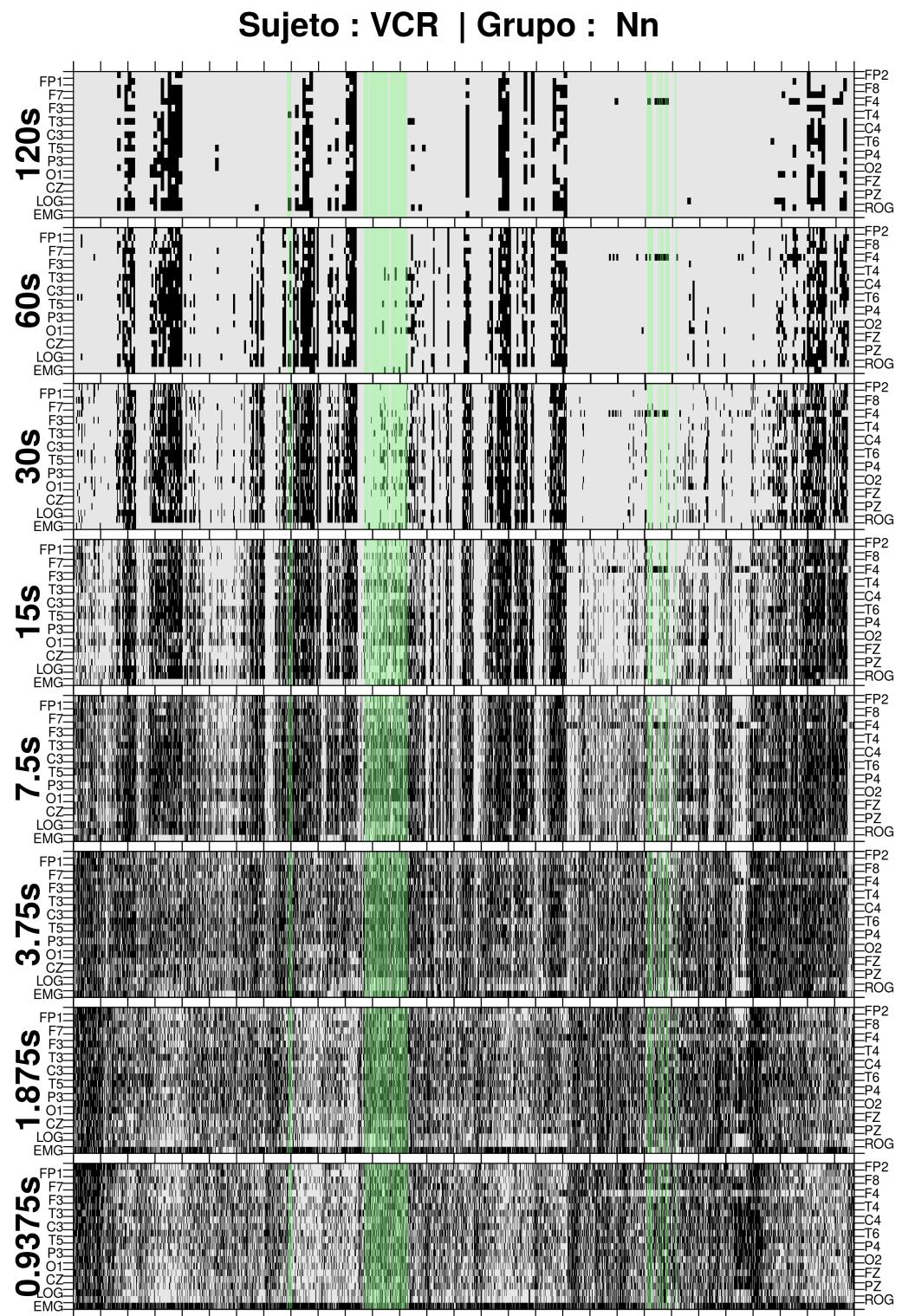
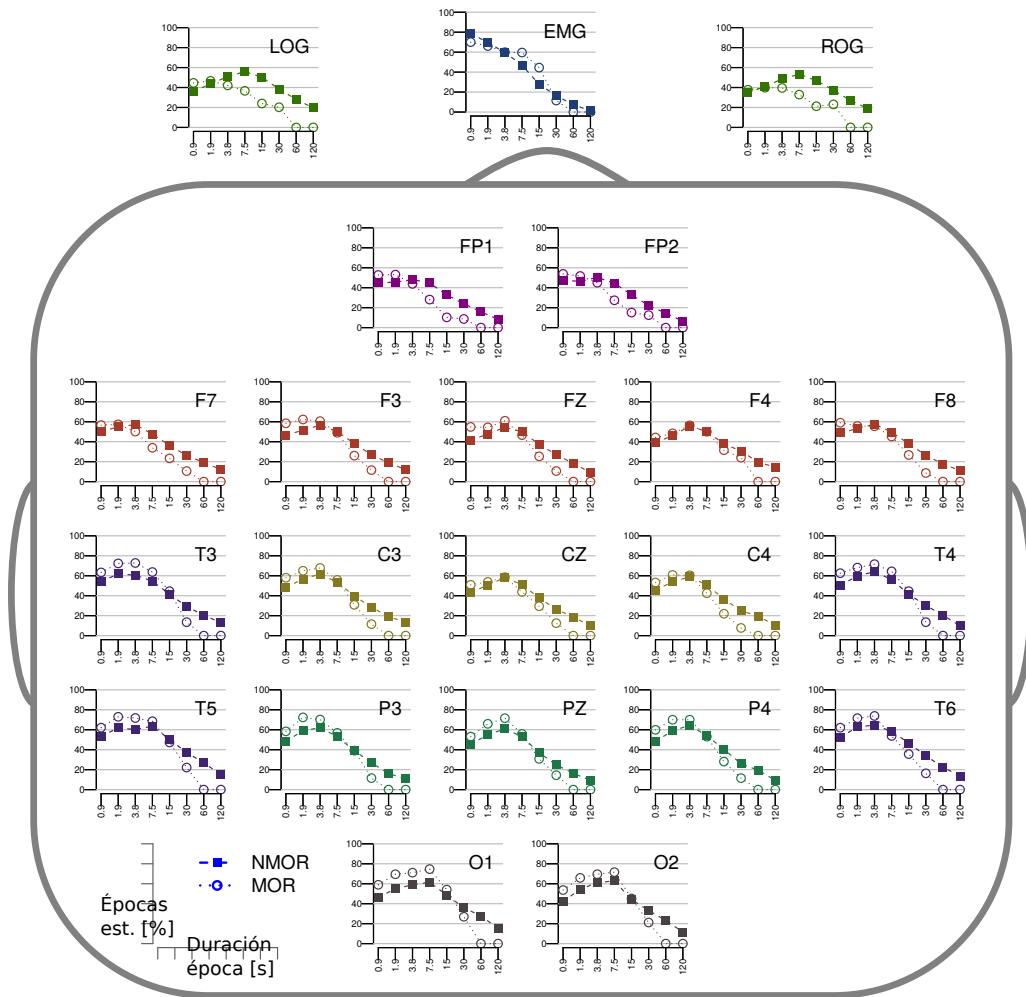


Figura A.1: Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana



(a) Épocas estacionarias usando diferentes tamaños de ventana

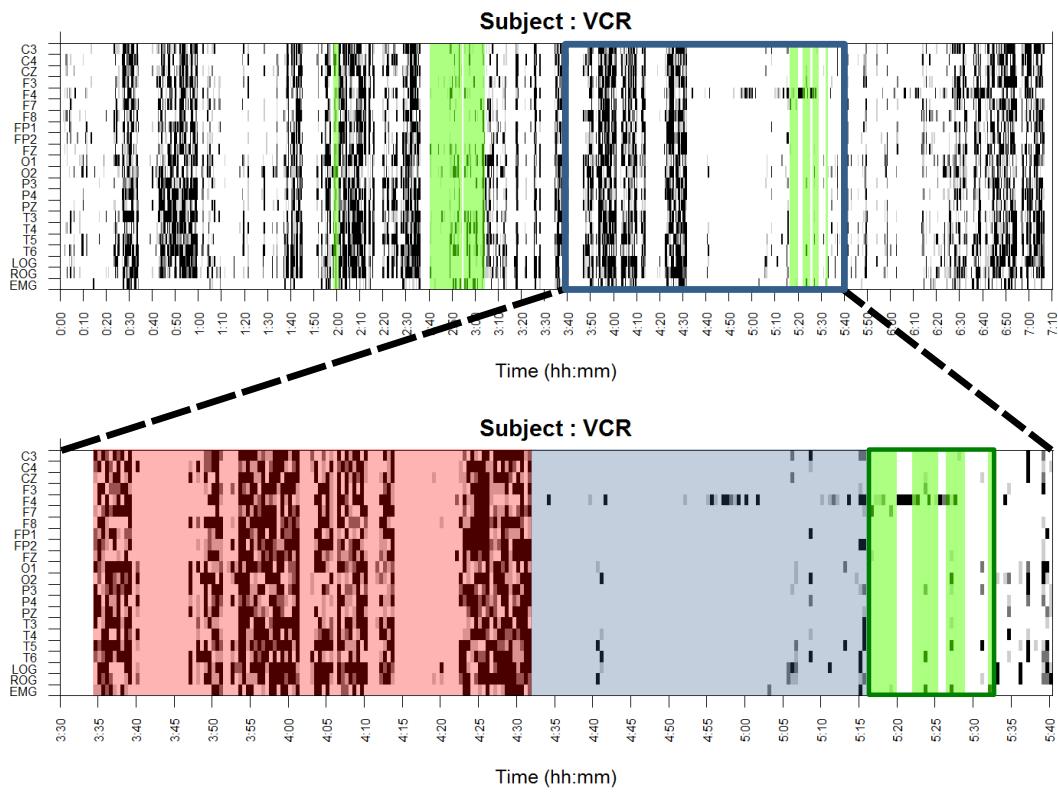
Sujeto VCR | Grupo Nn

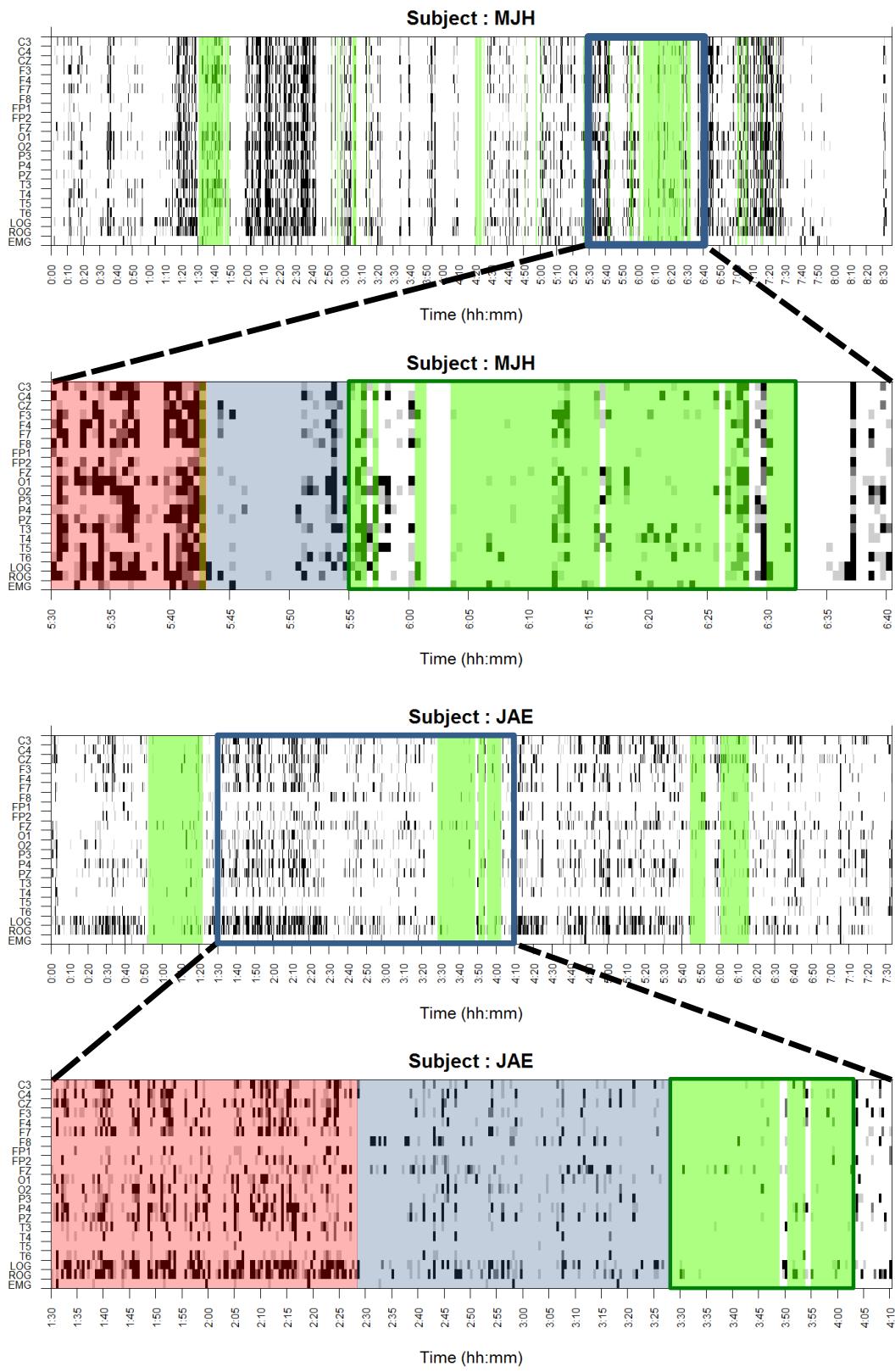


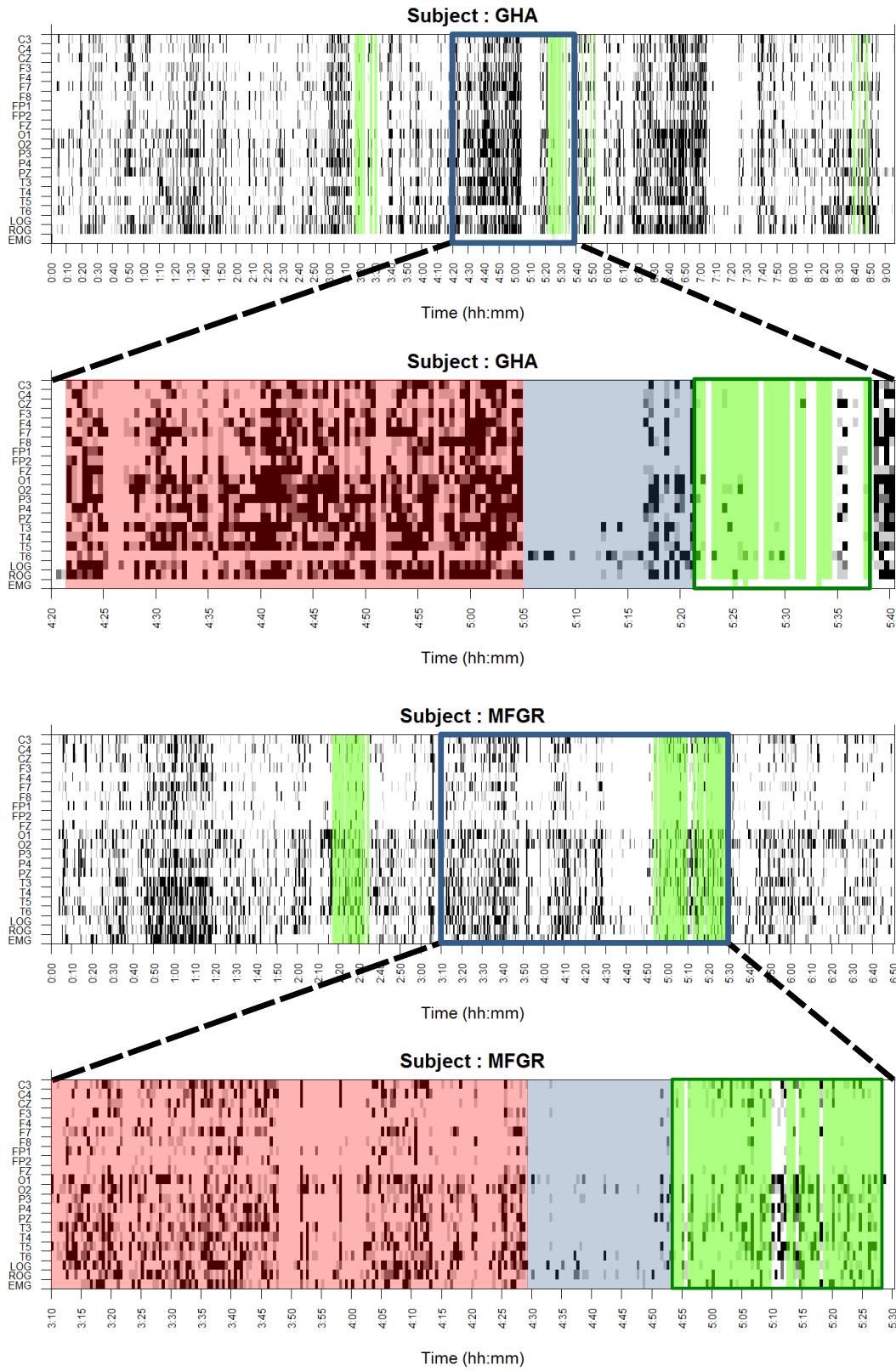
(b) Resumen de épocas estacionarias según tamaño de ventana

Figura A.2: Gráficos individuales para el sujeto VCR

Patrones visuales







ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Glosario

AABFM: Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

Actividad de amplitud relativamente baja ($< 10 \mu\text{V}$), visualmente desorganizada. No tiene una forma sinusoidal clara.

AASM: American Academy of Sleep Medicine

Sociedad estadounidense dedicada al estudio de la *Medicina del sueño* (relativo al diagnóstico y tratamiento de trastornos del sueño). En dicha área, los estándares establecidos por esta organización se encuentran ampliamente difundidos.

DCL: Deterioro Cognitivo Leve

Conjunto de deficiencias cognitivas *objetivas*, respecto a un estado anterior, que no cumplen los criterios para ser clasificadas como demencia. Para ello se entiende que una deficiencia es objetiva si puede confirmarse usando pruebas neuropsicológicas, en contraposición al reporte subjetiva por parte del individuo.

DSM: [Sueño] No-MOR**EEG:** Electroencefalografía

Lectura de la actividad eléctrica en la corteza cerebral, la cual se origina por la actividad postsináptica de las neuronas en dicha región. En el presente trabajo, el término EEG se limita a registros obtenidos mediante electrodos colocados en el cuero cabelludo del individuo, siendo que otros autores también engloban registros obtenidos con microelectrodos insertos en el cerebro por ejemplo.

EMG: Electromiografía

Lectura de la actividad eléctrica en las fibras musculares, la cual se origina por el reclutamiento y activación de fibras musculares por parte del sistema nervioso. En el presente trabajo, se limita el uso del EMG para distinguir la mayor o menor presencia de *tono muscular*, fenómeno característico de fibras musculares en actividad latente.

EOG: Electrooculografía

MOR: [Sueño de] Movimientos Oculares Rápidos

Etapa de sueño nombrada con base la presencia típica de movimientos oculares rápidos. También se le conoce como *sueño paradójico* debido a que la actividad cerebral es similar a la vigilia pese a ser la etapa más profunda del sueño. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase R*.

Neuropsi: [Sueño] No-MOR

NMOR: [Sueño] No-MOR

Contempla el sueño fuera de la etapa MOR, presentando características radicalmente diferentes. Pese a su definición negativa, se divide en sub-etapas con características distintivas claras. Según los estándares de la AASM en 2007 también se le conoce como *fase N*.

PSG: Polisomnografía

Registro conjunto durante el sueño de varias señales electrofisiológicas u otros indicadores fisiológicos.

PDC: Posible Deterioro Cognitivo [Leve]

Diagnóstico positivo para deterioro cognitivo usando únicamente los resultados de pruebas neuropsicológicas, y en particular las usadas en el presente trabajo. Debido a los estándares cautelosos de la psicología clínica, para otorgar el diagnóstico de *deterioro cognitivo leve* no puede otorgarse deben tomarse en cuenta varios estudios complementarios, como imagenología del cerebro por ejemplo.

Catálogo de funciones comunes

Delta de Kroneker (δ)

Usada para facilitar la descripción de productos ortogonales.

$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

H de Heavyside (H)

Usada para facilitar la descripción de *ondas cuadradas*.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

O mayúscula de Landau (\mathcal{O})

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ arbitrario. Se dice que f es *de orden g alrededor de x_0* si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C$$

Si así fuere, se dice $f = \mathcal{O}(g)$

ESTA PÁGINA SE DEJÓ INTENCIONALMENTE EN BLANCO.

Bibliografía

- [1] Amer, M. S., Hamza, S. A., El Akkad, R. M. y Abdel Galeel, Y. I. I.: *Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes?* Aging & Mental Health, 17(7):788–792, 2013. [4.3](#)
- [2] Ardila, A. y Ostrosky, F.: *Guía para el diagnóstico neuropsicológico*. Florida: American Board of Professional Neuropsychology, 2012. [4](#), [4.1](#), [4.2](#)
- [3] Asimov, I.: *Memorias*. Ediciones B, 1994. ([document](#))
- [4] Babiloni, C., Carducci, F., Lizio, R., Vecchio, F., Baglieri, A., Bernardini, S., Cavedo, E., Bozzao, A., Buttinelli, C., Esposito, F. y cols.: *Resting state cortical electroencephalographic rhythms are related to gray matter volume in subjects with mild cognitive impairment and Alzheimer's disease [?]*. Human brain mapping, 34(6):1427–1446, 2013. ([document](#)), [4.3](#)
- [5] Barlow, J. S.: *Methods of Analysis of Nonstationary EEGs, with Emphasis on Segmentation Techniques: A Comparative Review*. Journal of Clinical Neurophysiology, 2(3):267–304, 1985. [5.3](#)
- [6] Blake, M. G. y Boccia, M. M.: *Basal Forebrain Cholinergic System and Memory*. Curr Top Behav Neurosci., 2017. [4.3](#)

- [7] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H₁₅ 2 O PET study.* Brain, 120:1173–1197, 1997. **4.3**
- [8] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H₂ (15) O PET study.* Brain: a journal of neurology, 120(7):1173–1197, 1997. **4.3**
- [9] Brayet, P., Petit, D., Frauscher, B., Gagnon, J. F., Gosselin, N., Gagnon, K., Rouleau, I. y Montplaisir, J.: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment.* Clinical EEG and Neuroscience, 47(2):134–141, 2016. **4.3**
- [10] Carrillo-Mora, P., Ramírez-Peris, J. y Vázquez, K. Magaña: *Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario.* Revista de la Facultad de Medicina, 56(4):5–15, 2013. **4.2.1**
- [11] Chen, P., Wu, D., Chen, C., Chi, N. y Kang, J.H. and Hu, C.: *Rapid eye movement sleep atonia in patients with cognitive impairment.* J Neurol Sci, 15:34–37, 2011. **4.3**
- [12] Clark, Jr., J. W.: *The Origin of Biopotentials.* En Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*, cap. 4, págs. 126–188. Wiley, Estados Unidos, 4^a ed., 2009. **4.2**
- [13] Constantine, W. y Percival, D.: *fractal: Fractal Time Series Modeling and Analysis*, 2016. <https://CRAN.R-project.org/package=fractal>, R package version 2.0-1. **5.3**
- [14] Contreras, S. A.: *Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud.* Revista Médica Clínica Las Condes, 24(3):341–349, 2013. **4.2.1**
- [15] Corsi, M.: *Psicofisiología del sueño.* Trillas, México, 1983. **4.3**
- [16] Corsi-Cabrera, M., Rosales-Lagarde, A., Río-Portilla, Y. del, Sifuentes-Ortega, R. y Alcántara-Quintero, B.: *Effects of selective REM sleep deprivation on prefrontal gamma activity and executive functions.* International Journal of Psychophysiology, 96(2):115–124, 2015. **4.3**

- [17] Crum, R. M., Anthony, J. C., Bassett, S. S. y Folstein, M. F.: *Population-based norms for the Mini-Mental State Examination by age and educational level*. Jama, 269(18):2386–2391, 1993?? **4.1**
- [18] Dahlhaus, R. y cols.: *Fitting time series models to nonstationary processes*. The annals of Statistics, 25(1):1–37, 1997. **5.3**
- [19] Datta, S., Mavanji, V., Ulloor, J. y Patterson, E.: *Activation of phasic pontine-wave generator prevents rapid eye movement sleep deprivation-induced learning impairment in the rat: a mechanism for sleep-dependent plasticity*. Journal of neuroscience, 24:1416–1427, 2004. **4.3**
- [20] Dubois, B., Feldman, H. H., Jacova, C., DeKosky, S. T., Barberger-Gateau, P., Cummings, J., Delacourte, A., Galasko, D., Gauthier, S., Jicha, G. y cols.: *Research criteria for the diagnosis of Alzheimer’s disease: revising the NINCDS-ADRDA criteria*. The Lancet Neurology, 6(8):734–746, 2007?? **4.1**
- [21] Fishbein, W.: *Disruptive effects of rapid eye movement sleep deprivation on long-term memory*. Physiology & Behavior, 6(4):279–282, 1971. **4.3**
- [22] Fishbein, W. y Gutwein, B. M.: *Paradoxical sleep and memory storage processes*. Behavioral Biology, 19(4):425–464, 1977. **4.3**
- [23] Folstein, M. F., Folstein, S. E. y McHugh, P. R.: “*Mini-mental state*”: a practical method for grading the cognitive state of patients for the clinician. Journal of psychiatric research, 12(3):189–198, 1975?? **4.1, 4.1.2**
- [24] Iber, C., Ancoli-Israel, S., Chesson, A., Quan, S. F. y cols.: *The AASM manual for the scoring of sleep and associated events: rules, terminology and technical specifications*. American Academy of Sleep Medicine Westchester, IL, 2007. **4, 4.3**
- [25] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, INEGI: *Censo de Población y Vivienda 2010*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/>. Revisado: 2017-11-15. ([document](#))
- [26] Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática, INEGI: *Encuesta Intercensal 2015*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/encogares/especiales/intercensal/>. Revisado: 2017-11-15. ([document](#))

- [27] Instituto Nacional de Geriatría y Secretaría de Salud: *Plan de acción Alzheimer y otras demencias. México, 2014*, 2014. México. ([document](#)), 4.1
- [28] Kaiser, D. A.: *QEEG: State of the Art, or State of Confusion.* Journal of Neurotherapy, 4(2):57–75, 2000. 2
- [29] Kaplan, A. Y.: *The problem of segmental description of human electroencephalogram.* HUMAN PHYSIOLOGY C/C OF FIZIOLOGIIA CHELOVEKA, 25:107–114, 1999. 5.3
- [30] Katz, S., Downs, T. D., Cash, H. R. y Grotz, R. C.: *Progress in development of the index of ADL.* The gerontologist, 10(0):20–30, 1970. 4.1.2, 4.3
- [31] Klem, G., Lüders, H. O., Jasper, H. H. y Elger, C.: *The ten-twenty electrode system of the International Federation.* Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 52:3–6, 1999. (Suplemento). 4.2
- [32] Knopman, D. S., DeKosky, S. T., Cummings, J., Chui, H., Corey-Bloom, J., Relkin, N., Small, G., Miller, B. y Stevens, J.: *Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (An Evidence-based Review) Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology.* Neurology, 56(9):1143–1153, 2001. 4.1
- [33] Lindgren, B. R.: *Statistical Theory.* Chapman & Hall, 4^a ed., 1993. 1
- [34] Lindgren, G.: *Stationary Stochastic Processes: Theory and Applications.* Texts in Statistical Science. CRC Press, 2012. 1
- [35] Lipsitz, L. A. y Goldberger, A.: *Loss of complexity and aging, potential applications of fractals and chaos theory to senescence.* Journal of the American Medical Association, 267(13):1806–1809 doi:10.1001/jama.1992.03480130122036, 1992. 4.3
- [36] Llinás, R. y Ribary, U.: *Coherent 40 Hz oscillation characterizes dream state in humans.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA,, 90:2078–2081 (?), 1993. 4.3
- [37] Lopez, C. A.: *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-5.* Editorial medica panamericana, 2014. 4.1

- [38] Louie, K. y Wilson, M.: *Temporally structured replay of awake hippocampal ensemble activity during rapid eye movement sleep.* Neuron, 29:145–156, 2001. 4.3
- [39] Lucero, M.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat.* Brain research, 20:319–322, 1970. 4.3
- [40] Lucero, M. A.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat.* Brain Research, 20(2):319–322, 1970. 4.3
- [41] McEwen, J. A. y Anderson, G. B.: *Modeling the Stationarity and Gaussianity of Spontaneous Electroencephalographic Activity.* IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-22(5):361–369, 1975. 5.3
- [42] McKhann, G., Drachman, D., Folstein, M., Katzman, R., Price, D. y Stadlan, E. M.: *Clinical diagnosis of Alzheimer's disease Report of the NINCDS-ADRDA Work Group* under the auspices of Department of Health and Human Services Task Force on Alzheimer's Disease.* Neurology, 34(7):939–944, 1984?? 4.1
- [43] Mejía-Arango, S., Jaimes-Miguel, A., Villa, A., Ruiz-Arregui, L. y Gutiérrez-Robledo, L.: *Deterioro cognoscitivo y factores asociados en adultos mayores en México.* Salud Pública de México, 49:S475–S481, 2007. 5.2
- [44] Miyata, S., Noda, A., Iwamoto, K., Kawano, N., Okuda, M. y Ozaki, N.: *Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults.* Journal of Sleep Research, 22(5):535–541, 2013. 4.3
- [45] Moruzzi, G.: *Active processes in the brain stem during sleep. Harvey Lectures, 58, 233-297, in María Corsi.* (1983). Psicofisiología del sueño (Psychophysiology of sleep)., 1963. 4.3
- [46] Niedermeyer, E. y Schomer, D. L.: *Niedermeyer's Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields.* Lippincott Williams & Wilkins, 6^a ed., 2011. 4
- [47] Ostrosky-Solís, F., Ardila, A. y Rosselli, M.: *Neuropsi: A brief neuropsychological test battery in Spanish with norms by age and educational level.* Journal of the International Neuropsychological Society, 5:413–433, 1999. 4.1, 4.1.1

- [48] Ostrosky-Solís, F., Gómez, M. E., Villaseñor, E. M., Roselli, M., Ardila, A. y Pineda, D.: *Neuropsi: Atención y Memoria*. Manual Moderno, 2^a ed., 2003. **4.1.2**
- [49] Ostrosky-Solís, F., López-Arango, G. y Ardila, A.: *Sensitivity and Specificity of the Mini-Mental State Examination in a Spanish-Speaking Population*. Applied Neuropsychology, 7(1):25–31, 2000. **1.3, 4.1**
- [50] Park, D. C. y Reuter-Lorenz, P.: *The Adaptive Brain: Aging and Neurocognitive Scaffolding*. Annual Review of Psychology, 60:173–196, 2009. **4.1**
- [51] Pavlides, C., Greenstein, Y., Grudman, M. y Winson, J.: *Long-term potentiation in the dentate gyrus is induced preferentially on the positive phase of theta-rhythm*. Brain research, 439:383–387, 1988. **4.3**
- [52] Pearlman, C.: *REM sleep deprivation impairs latent extinction in rats*. Physiology and behavior, 11:233–237, 1973. **4.3**
- [53] Pearlman, C. y Becker, M.: *REM sleep deprivation impairs bar-press acquisition in rats*. Physiology & Behavior, 13(6):813–817, 1974. **4.3**
- [54] Pearlman, C. A.: *Latent learning impaired by REM sleep deprivation*. Psychonomic Science, 25(3):135–136, 1971. **4.3**
- [55] Potvin, O., Lorrain, D., Forget, H., Dubé, M., Grenier, S., Préville, M. y Hudon, C.: *Sleep Quality and 1-Year Incident Cognitive Impairment in Community-Dwelling Older Adults*. SLEEP, 35(4):491–499, 2012. **4.3**
- [56] Prichep, L., John, E., Ferris, S., Rausch, L., Fang, Z., Cancro, R., Torossian, C. y Reisberg, B.: *Prediction of longitudinal cognitive decline in normal elderly with subjective complaints using electrophysiological imaging [?]*. Neurobiology of aging, 27(3):471–481, 2006. ([document](#)), **4.3**
- [57] Prichep, L., John, E., Ferris, S. H., Reisberg, B., Almas, M., Alper, K. y Cancro, R.: *Quantitative EEG correlates of cognitive deterioration in the elderly [?]*. Neurobiology of Aging, 15(1):85–90, 1994. ([document](#)), **4.3**
- [58] Priestley, M. B.: *Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27(2):204–237, 1965. **3**

- [59] Priestley, M. B.: *Spectral Analysis and Time Series*, vol. 1, 2. Academic Press, 1981. **3**
- [60] Priestley, M. B. y Subba Rao, T.: *A Test for Non-stationarity of Time-series*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 31(1):140–149, 1969. **3.4**
- [61] Reid, K. J., Martinovich, Z., Finkel, S., Statsinger, J., Golden, R., Harter, K. y Zee, P. C.: *Sleep: A Marker of Physical and Mental Health in the Elderly*. The American Journal of Geriatric Psychiatry, 14(10):860–866, 2006. **4.3**
- [62] Robles, A., Del Ser, T., Alom, J., Peña-Casanova, J. y Neurología Grupo Asesor del Grupo de Neurología de la Conducta y Demencias de la Sociedad Española de: *Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de Alzheimer*. Neurología, 17(1):17–32, 2002. **4.1**
- [63] Rosales-Lagarde, A.: *La relación sueños-cerebro y sus modelos*. Ludus Vitalis, 22(41):311–331, 2016. **4.2.1**
- [64] Rosales-Lagarde, A., Río-Portilla, Y. del, Guevara, M. A. y Corsi-Cabrera, M.: *Caída abrupta del tono muscular al entrar a sueño MOR en el ser humano*. Salud Mental, 31:117–123, 2009. **4.3**
- [65] Rosales-Lagarde, A., Rodríguez-Torres, E., Enciso-Alva, J., Martínez-Alcalá, C., Vázquez-Tagle, G., Tetlalmatzi-Montiel, M., Viveros, J. y López-Noguerola, J. S.: *STATIONARITY DURING REM SLEEP IN OLD ADULTS*. Alzheimer's and Dementia, 13(7, Supplement):P723 – P724, 2017, ISSN 1552-5260. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1552526017311706>, 2017 Abstract Supplement. ([document](#))
- [66] Roumec, B., Gismondi, M., Gomez, A. M. y Sousa, L.: *Escala por interro-gatorio de las actividades de la vida diaria: validación y correlación con escalas de severidad de deterioro cognitivo en pacientes con demencia tipo Alzheimer*. Neurología Argentina, 6(3):137–141, 2014. **4.1.2**

- [67] Sanhueza Guzmán, C.: *Programa de entrenamiento cerebral en adultos mayores sin deterioro cognitivo: atención, memoria y funciones ejecutivas*. Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, 2014. **4.1**
- [68] Schliebs, R. y Arendt, T.: *The cholinergic system in aging and neuronal degeneration*. Behavioural Brain Research, 221(2):555–563, 2011. **4.3**
- [69] Shorack, G. R.: *Probability for Statisticians*. Springer texts in statistics. Springer, 1^a ed., 2000. **1**
- [70] Sinoff, G., Ore, L., Zlotogorsky, D. y Tamir, A.: *Short anxiety screening test—a brief instrument for detecting anxiety in the elderly*. International journal of geriatric psychiatry, 14(12):1062–1071, 1999?? **4.1.2, 4.4**
- [71] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. SLEEP, 14(4):325–330, 1991. **4.3**
- [72] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. Sleep, 14:325–330, 2001. **4.3**
- [73] Steriade, M. y Amzica, F.: *Intracortical and corticothalamic coherency of fast spontaneous oscillations*. Proc. Natl. Acad. Sci., 93:2533–2538 ??, 1996. **4.3**
- [74] The Editors of Encyclopædia Britannica: *Electroencephalography*. <https://www.britannica.com/science/electroencephalography>. Revisado: 2017-11-15. **4.1**
- [75] Vázquez-Tagle Gallegos, G. R., García-Muñoz, V., Rosales-Lagarde, A., Rodríguez Torres, E., Martínez-Alcalá, C. y Reséndiz-Flores, O.: *Correlación inter-hemisférica durante el sueño MOR del Adulto Mayor con Deterioro Cognitivo*, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México. ([document](#)), **4.2, 5**
- [76] Velasco, S. L., Ayuso, L. L., Contador, I. y Pareja, F. B.: *Versiónes en español del Minimental State Examination (MMSE). Cuestiones para su uso en la práctica clínica*. Revista de Neurología, 61(8):363–371, 2015. **4.1.2**
- [77] Webster, J. G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*. Wiley, Estados Unidos, 4^a ed., 2009. **2.4.1, 4**

- [78] Yesavage, J. A., Brink, T. L., Rose, T. L., Lum, O., Huang, V., Adey, M. y Leirer, V. O.: *Development and Validation of a Geriatric Depression Screening Scale: A Preliminary Report*. Journal of Psychiatric Research, 17(1):37–49, 1982.
- 4.1.2, 4.4