Índice general

Capítulo 1

”Parte matemática”

Me temo que pasará algún tiempo antes que esta parte sea totalmente coherente y comprensible a un grado aceptable. Cabe mencionar que esta fuertemente inspirada por el libro Spectral Analysis and Time Series, de M. Priestley [4] porque está explícitamente dirigida a un público sin trasfondo matemático.

Debo citar los trabajos de Cohen, Nason, Adak, Dahlhaus, Gabor, Fryzelwicz, entre otros. En discusiones más modernas, se mencionan temas que aun no se han explorado: ciclo-estacionariedad, procesos harmonizables, estacionariedad local y por partes, diferencias entre memoria larga y memoria corta, espectros de ondaletas, espectros de Wigner-Ville, Wold-Cramér, Gabor. Debo mencionarlos, pero no he trabajado en ello y no se suficiente sobre ello.

La informalidad de la redacción se debe al tiempo: en versiones futuras debería mejorar.

Nota: no es prioritario, pero será una buena idea incluir una discusión sobre por qué tiene sentido revisar si los EEG son estacionarios, y es que un proceso estacionario es básicamente un ruido.

1.1. Estacionariedad débil

El ingrediente básico de las series de tiempo son los procesos estocásticos; para ello, se supone dada la defínción de variables aleatorias, espacios de probabilidad, y espacios L^p; si es necesario los defino, y si no me conformaré con citar un libro sobre series de tiempo que cubra estos temas, como el de Chatfield (The Analysis of Time Series: An Introduction, 2003).

Una muy buena razón para empezar a describir **desde** procesos estocásticos es tener las definiciones a la mano, evitar conflictos con la notación $X(t)$ en lugar de X_t, y enfatizar detalles sobre el tiempo continuo.

Definición 1 (Proceso estocástico) *Un proeso estocástico* $\{X(t)\}$ *es una familia de variables aleatorias indexadas por el símbolo* t *que pertenece a algún conjunto* $T \in \mathbb{R}$

Matemáticamente se permitirá que t, referido como **tiempo**, tome valores en todo $\mathbb{R}$; las observaciones, en cambio, sólo pueden ser tomadas en un conjunto discreto y finito de instantes en el tiempo. Adicionalmente, en algunas secciones se considerarán procesos estocásticos complejos, si bien la mayor parte del texto sólo usará valores reales.

Esta definición particular de proceso estocástico debería enfatizar que para cada tiempo t, $X(t)$ es una variable aleatoria con su función de densidad de probabilidad, sus momentos [sólo se consideran va's con al menos segundos momentos finitos], etc.

Otro concepto clave de este texto es el de **estaionareidad débil**; quizá la mejor forma de motivar el adjetivo 'débil' es como contraposición a la **estacionariedad fuerte o total**. Para ello, sea $F(X;\cdot)$ la función de densidad de probabilidad de X, es decir, la probabilidad de que $X \leq x$ puede expresarse como $F(X;x) = P(X \leq)$ bajo el entendido que X y x pueden ser vectores en $\mathbb{R}^d$.

Definición 2 (Estacionariedad fuerte) *Un proceso estocástico* $\{X(t)\}$ *es fuertemente estacionario si, para cualquier conjunto de tiempos admisibles* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *y cualquier* $\tau \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$F\left(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n); \cdot\right) \equiv F\left(X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \ldots, X(t_n+\tau); \cdot\right)$$

La estacionariedad fuerte depende de las funciones de densidad de probabilidad conjunta para diferentes tiempos. Si un proceso es estacionario en el sentido fuerte, entonces todas las variables $X(t)$ son idénticamente distribuidas.

Con viene definir versiones menos fuertes de estacionariedad según sea posible deducirse de las mediciones de un fenómeno y/o sean relevantes en su modelación.

Definición 3 (Estacionariedad de orden m) *Un proceso estocástico se dice estacionario de orden m si, para cualquier conjunto de tiempos admisibles $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y cualquier $\tau \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$E\left[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2)\cdots X^{m_n}(t_n)\right] = E\left[X^{m_1}(t_1+\tau)X^{m_2}(t_2+\tau)\cdots X^{m_n}(t_n+\tau)\right]$$

Para cualesquiera enteros $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$

Hay una especie de consenso según el cual la estacionariedad de orden 2, también llamada **estacionariedad débil** es suficiente para que se cumplan los teoremas más comunes sobre medias y varianzas. Algunas consecuencias que un proceso sea estacionario debilmente son las siguientes:

- Para todo t, $E[X(t)] = \mu$, una constante
- Para todo t, $\mathrm{Var}\,(X(t)) = \sigma^2$, una constante
- Para cualesquiera t, τ, $\mathrm{Cov}\,(X(t+\tau), \mathrm{Cov}\,(X(t))) = E[X(t+\tau)X(t)] - \mu^2$, una función de τ pero no de t

El recíproco también es cierto: si un proceso cumple las tres condiciones anteriores, entonces es estacionario de orden 2. A su vez tres condiciones son más usuales en la literatura y tienen una intepretación más clara como modelo, pues se exige que el proceso tenga media y varianza constante, y que la función de autocorrelación no dependa de dónde se mida –lo cual simplifica la estimación de estas cantidades.

Antes de proseguir, cabe mencionar que la estacionariedad fuerte se define en términos de las funciones de densidad de probabilidad conjunta, mientras que la estacionariedad se define según los momentos; luego, la estacionariedad débil excluye procesos cuyos momentos no estén definidos. Por ejemplo, una colección de variables independientes idénticamente distribuidos –con distribución de Cauchy– será fuertemente estacionario, pero no estacionario de orden m para ningún m.

Por el momento se asumirán procesos con segundos momentos finitos **debido a que** hay motivaciones en el modelo para ello: energía finita, cambios finitos de energía, respuestas suaves, etc.

1.2. El espectro de una serie de tiempo

Quiero y me siento obligado a citar la excelente discución filosófica de Loynes [2], resaltando la frase "Los espectros instantáneos no existen". También quiero citar una discusión más moderna de Mélard [3], donde una frase a favor es "El supuesto de estacionariedad ha sido válido previamente debido a la corta duración de las series y la baja capacidad de cómputo".

Pues la mayor parte de mi trabajo se ha centrado en el concepto de **espectro** de una serie de tiempo. La mejor forma de introducir el espectro evolutivo –en el sentido que estoy usando– es presentar un proceso estacionario de orden 2, $\{X(t)\}$, en su representación de Cramér [4] [por ahora solo cito el resultado segun el cual todo proceso debilmente estacionario tiene una unica representacion de este tipo, pero quiza sea buena idea escribir la demostracion como apendice]

$$X(t) = \int_{\Lambda} A(\omega) e^{i2\pi\omega t} dZ(\omega)$$

Donde el proceso $\{Z(\omega)\}$ tiene incrementos ortogonales, es decir

$$\text{Cov}\left(dZ(\omega_1, dZ(\omega_2))\right) = \delta(\omega_1, \omega_1) d\omega$$

Con δ la función delta de Dirac. Cabe mencionar que es suficiente si los incrementos son independientes, pero se puede debilitar ese requerimiento; incluso es de notarse que no se exige que el proceso sea al menos continuo –en el sentido estocástico.

El espectro de potencia de $\{X(t)\}$ se define como

$$f(\omega) = |A(\omega)|^2$$

Citaré de Adak [1] una tabla donde compara varias definiciones de espectro, para procesos no-estacionarios.

Table 1: Cohen's class of time-frequency distributions

Author	Definition of $f(t, \lambda)$	$G(t, \tau)$: time - lag kernel
Wigner-Ville	$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(t+\tau/2, t-\tau/2) e^{-i2\pi\lambda\tau} d\tau$	$G(t,\tau) = \delta(t)$
Page(1952)	$\int_0^{\infty} R_X(t, t-\tau) e^{-i2\pi\lambda\tau} d\tau$ $+ R_X(t, t+\tau) e^{-i2\pi\lambda\tau} d\tau$	$G(t,\tau) = \delta(t-\tau/2)$ if $\tau \geq 0$. $G(t,\tau) = \delta(t+\tau/2)$ if $\tau \leq 0$.
Levin(1967)	$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} R_X(t, t-\tau) e^{-i2\pi\lambda\tau} d\tau +$ $\int_0^{\infty} \frac{1}{2} R_X(t, t+\tau) e^{-i2\pi\lambda\tau} d\tau$	$G(t,\tau) = \frac{1}{2}\delta(t-\tau/2)+$ $\frac{1}{2}\delta(t+\tau/2)$
Spectrogram — Windowed Spectral Analysis	$E[\mid \int w(t-u) X(u) e^{-i2\pi\lambda u} du \mid^2]$	$G(t,\tau) =$ $w(t-\tau/2) w^*(t+\tau/2)$
Priestley(1965)	$\mid A(t,\lambda) \mid^2$, where $R_X(t+\tau/2, t-\tau/2)$ $= \int A(t+\tau/2, \theta)\ A^*(t-\tau/2, \theta) e^{i2\pi\theta\tau} d\theta$	Relation to Cohen's class shown in Hammond(1992)
Choi-Williams(1989)	$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(u+\tau/2, u-\tau/2).$ $\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2\sigma}} exp\left[\frac{-(t-u)^2}{4\tau^2\sigma}\right] .e^{-i2\pi\lambda\tau} du d\tau$	$G(t,\tau) =$ $\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau^2\sigma}} exp\left[\frac{-t^2}{4\tau^2\sigma}\right]$

Dos identidades muy importantes para estimar el espectro son la *equivalencia* entre el espectro y la función de autocorrelación

$$f(\omega) = \int R_X(\tau) e^{-i2\pi\omega t} d\tau$$

Donde función de autocorrelación se ha definido como

$$R_X(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = \int_0^{\infty} X(t)X(t+\tau)dt$$

[la demostracion es corta, batsa con reescribir una composicion de integrales como convolucion, la incluire mas tarde]

Por otro lado, se tiene la Identidad de Parseval

$$\int X^2(t)dt = \int f(\omega)d\omega$$

[esta demostracion se basa en la convergencia dominada del modulo de la integral de X^2 por la integral del modulo (...), la incluire mas tarde]

1.3. Test Priestley-Subba Rao (PSR)

(seccion en proceso de re-redaccion)

A muy grosso modo, el test PSR estima localmente el espectro evolutivo y revisa si estadísticamente cambia en el tiempo.

Para ello, usa un estimador para la función de densidad espectral que es aproximadamente (asintóticamente) insesgado y cuya varianza está determinada aproximadamente. La estimación se lleva a cabo en puntos en el tiempo y la frecuencia tales que en conjunto son aproximadamente no-correlacionados. Se aplica logaritmo para que la varianza de todos los estimadores sea aproximadamente la misma (el logaritmo ayuda a), amen que los errores conjuntos tengan una distribución cercana a una multinormal con correlación cero. Finalmente se aplica una prueba ANOVA de varianza conocida.

1.3.1. El espectro evolutivo

Considérese un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X(t)\}$, tal que $E[X(t)] = 0$ y $E\left[X^2(t)\right] < \infty$ para todo t. Es decir que su media es constante y sus segundos momentos están bien definidos, aunque pueden cambiar con el tiempo.

Por el momento se supondrá que acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(t;\omega)e^{i\omega t}\, dZ(\omega)$$

Con $\{Z(\omega)\}$ una familia de procesos ortogonales[1] tales que

- $E\left[|dZ(\omega)|^2\right] = d\omega$
- Para cada t el máximo de $A(t;\cdot)$ se encuentra en 0

Se define entonces el **espectro evolutivo** de $\{X(t)\}$, con respecto a la la familia $\mathcal{F} = \{e^{i\omega t}A(t;\omega)\}$ como

[1] De nuevo, esto implica que $\mathrm{Cov}\left(dZ(\omega_1, dZ(\omega_2))\right) = \delta(\omega_1, \omega_1)d\omega$, una condición más débil que la independencia

$$dF(\omega;t) = |A_t(\omega)|^2 d\omega$$

Ahora bien, si se supone que $\{X(t)\}$ es estocásticametne diferenciable, entonces se puede definir una **función de densidad espectral**

$$f(t;\omega) = |A_t(\omega)|^2$$

Cabe destaca que si la función $A(t;\omega)$ fuera constante con respecto a t

1.3.2. El estimador de doble ventana

Estimador de doble ventana (Priestley, 1965 & 1966) Sea una función $g(u)$ tal que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 d\omega = 1$$

donde se define la **función de respuesta ante frecuencia** como

$$\Gamma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iu\omega} du$$

Posteriormente se define

$$U(t,\omega) = \int_{t-T}^{t} g(u) X_{t-u} e^{i\omega(t-u)} du$$

Sea una función $w_{T'}(t)$ tal que

- $w_{T'}(t) \geq 0$ para cualesquiera t, T'
- $w_{T'}(t) \to 0$ cuando $|t| \to \infty$, para todo T'
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w_{T'}(t) dt = 1$ para todo T'
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (w_{T'}(t))^2 \, dt < \infty$ para todo T'

Ahora, si se define $W_{T'}(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_{T'}(t) dt$

- $\lim_{T'\to\infty}\left[T'\int_{t-T}^{t}|W_{T'}(\lambda)|^2 d\lambda\right] = C$

Se define el estimador para f_t, con $0 \leq t \leq T$

$$\widehat{f}_t(\omega) = \int_{t-T}^{t} w_{T'}(u)|U(t-u,\omega)|^2 du$$

Se define $Y_{i,j} = \log\left(\widehat{f_{t_i}}(\omega_j)\right)$, con las siguientes propiedades

$$E\left[Y_{i,j}\right] \sim \log\left(f_{t_i}(\omega_j)\right) \qquad \mathrm{Var}\left(Y\left(t,\omega\right)\right) \sim \sigma^2$$

Luego, puede escribirse $Y_{i,j} = \log\left(f_{t_i}(\omega_j)\right) + \varepsilon_{i,j}$, con $\varepsilon_{i,j}$ va iid

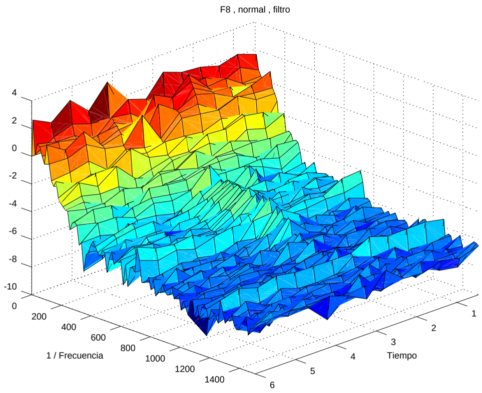
Usando un test ANOVA –de varianza conocida– se puede saber si ε

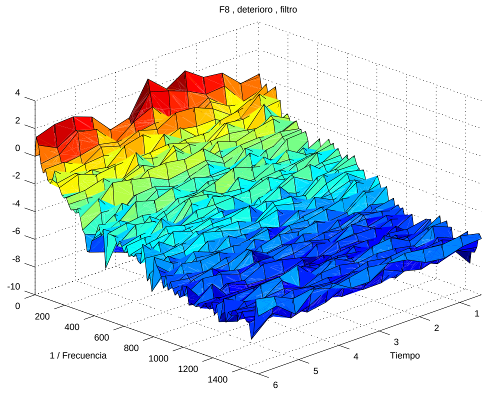
- Tiene marginales
- Constante sobre el tiempo
- Constante sobre las frecuencias

```
Priestley-Subba Rao stationarity Test for datos
-----------------------------------------------
Samples used              : 3072
Samples available         : 3069
Sampling interval         : 1
SDF estimator             : Multitaper
  Number of (sine) tapers : 5
  Centered                : TRUE
  Recentered              : FALSE
Number of blocks          : 11
Block size                : 279
Number of blocks          : 11
p-value for T             : 0.4130131
```

p−value for I+R : 0.1787949

p−value for T+I+R : 0.1801353





T : 0

I+R : 5.787895e−09

T+I+R : 0

T : 0.00332259

I+R : 0.03502537

T+I+R : 0.01598073

Bibliografía

[1] S. Adak. Time-dependent spectral analysis of nonstationary time series. *Journal of the American Statistical Association*, 93(444):1488–1501, 1998.

[2] R. M. Loynes. On the concept of the spectrum for non-stationary processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 1–30, 1968.

[3] G. Mélard and A. H. Schutter. Contributions to evolutionary spectral theory. *Journal of Time Series Analysis*, 10(1):41–63, 1989.

[4] M. B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*, volume 1,2. Academic Press, 1981.