



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

Estacionariedad débil en registros  
polisomnográficos de adultos mayores,  
como marcador de posible deterioro  
cognitivo

**Presenta**

Julio Cesar Enciso Alva

**Dirección**

Dra. Erika Elizabeth Rodríguez Torres

Dra. Alejandra Rosales Lagarde

Pachuca, Hidalgo, Febrero de 2018  
México

# Resumen

En las últimas décadas ha aumentado la esperanza y calidad de vida, paralelamente se observa una mayor presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas a la edad, entre ellas la demencia. Anteriormente se ha reportado, para adultos mayores, correlaciones entre la presencia de deterioro cognitivo leve (PDC, considerado una etapa temprana de la demencia) y algunas propiedades del espectro de potencias calculado para registros de polisomnograma (PSG, observación conjunta de múltiples señales electrofisiológicas durante el sueño) [12]. En este trabajo se buscan marcadores para un diagnóstico de PDC, basados en cantidades dependientes del espectro de potencias para registros de actividad. En particular se estudia la estacionariedad débil, una cantidad que se ha propuesto como marcador de alteraciones neurológicas [17], pero que usualmente se deshecha heurísticamente y sin una comprobación formal. Se concluye que hay conexiones entre los marcador reportados en la literatura para PDC y el marcador propuesto, basado en el estudio de la estacionariedad débil.



# Abstract

In the last decades, life expectancy and quality has increased, along with a greater presence of non-communicable diseases associated with age, including dementia. It has previously been reported, in older adults, correlations between the presence of mild cognitive impairment (MCI, considered an early stage of dementia) and certain properties of the power spectrum of polysomnogram records (PSG, joint observation of multiple electrophysiologic signals during sleep) [12]. In this work we search for diagnostic markers of MCI, based quantities derived from the power spectrum of PSG records. In particular, weak stationarity is considered, a property that has been proposed as a marker of neurological alterations [17] but is usually discarded without any formal verification. It is found a connection between the MCI markers reported in the literature and the proposed marker, based on the study of weak stationarity.

La doctora Alejandra Rosales Lagarde propuso investigar el tema del sueño en el adulto mayor en el Área Académica de Gerontología de la UAEH, institución a la cual está comisionada de acuerdo al contrato con el programa Cátedras CONACYT con el número de investigadora 1411 y el proyecto número 2162, *Evaluación y diagnóstico de los aspectos biopsicosociales del adulto mayor y sus cuidadores primarios*.

De manera adicional, el presente estudio fue apoyado parcialmente por las siguientes entidades: SNI-CONACYT (96080), Convenio PROMEP UAEHGO-103.5-14-10567, la Sociedad Matemática Mexicana Sofía Kovalévskaya (2014); otorgados a la doctora Erika E. Rodríguez Torres.

# Agradecimientos

Antes que nada a mis padres, María Guadalupe Alva González y Nicolás Enciso Maturano, quienes además darme la vida me han soportado y apoyado en ella. Y también a mi hermano, Erick Ricardo Enciso Alva, por su apoyo incondicional. Les agradezco por su enorme paciencia conmigo.

A todos los profesores de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. Los muchos conocimientos que han compartido y a mis compañeros han sido más que una inspiración, un ejemplo a seguir.

Doblemente a mis asesoras, Dra. Erika Rodríguez Torres y Dra. Alejandra Rosales Lagarde, por obligarme a superarme a mí mismo y centrarme en el trabajo.

De manera particular a la Dra. Alejandra Rosales Lagarde y a la Mtra. Génesis Vázquez Tagle por el permitirme el acceso y análisis de los registros de polisomnograma. Mi contribución con este trabajo luce pequeña en comparación.

También a los amigos que conocí durante la carrera: Alberto, Augusto, Daniel, Omar, Angie, Magali, Alejandro; por hacer la vida más llevadera.



# Acrónimos

<b>AABFM</b>	Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas
<b>AASM</b>	American Association of Sleep Medicine
<b>DCL</b>	Deterioro Cognitivo Leve
<b>EEG</b>	Electroencefalografía
<b>EMG</b>	Electromiografía
<b>EOG</b>	Electrooculografía
<b>FDE</b>	Función de Densidad Espectral
<b>MOR</b>	Movimientos Oculares Rápidos
<b>NMOR</b>	No-MOR
<b>PSG</b>	Polisomnografía
<b>PDC</b>	Posible Deterioro Cognitivo
<b>PSR</b>	[Prueba de] Priestley-Subba Rao





# Índice general

Índice de figuras	XI
Índice de cuadros	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes (viejo) . . . . .	3
1.2. Antecedentes . . . . .	3
1.3. Pregunta de investigación . . . . .	5
1.3.1. Hipótesis . . . . .	5
1.3.2. Objetivo general . . . . .	5
1.3.3. Objetivos específicos . . . . .	5
1.4. Antecedentes previo . . . . .	6
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Medidas . . . . .	9
2.1.1. Integración en espacios medibles . . . . .	11
2.2. Variables aleatorias . . . . .	12
2.2.1. Variables aleatorias continuas y discretas . . . . .	13
2.2.2. Valor esperado . . . . .	15
2.3. Estimación de parámetros . . . . .	16
2.4. Pruebas de hipótesis . . . . .	19
2.5. Procesos estocásticos . . . . .	21
<b>3. Medida y frecuencia</b>	<b>25</b>
3.1. Transformada de Fourier . . . . .	25
3.2. Función de densidad espectral . . . . .	28

3.3.	Representación espectral . . . . .	29
3.3.1.	Efecto <i>alias</i> . . . . .	31
3.3.2.	Filtros lineales . . . . .	33
3.4.	Estimadores . . . . .	35
<b>4.</b>	<b>Espectro evolutivo</b>	<b>37</b>
4.1.	Definición del espectro evolutivo . . . . .	38
4.2.	Estimación del espectro evolutivo . . . . .	40
4.2.1.	Filtros lineales . . . . .	40
4.3.	Estimador de doble ventana . . . . .	46
4.4.	Prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	49
<b>5.</b>	<b>Marco conceptual del problema</b>	<b>55</b>
5.1.	Psicología . . . . .	55
5.1.1.	Psicometría . . . . .	56
5.2.	Fisiología . . . . .	57
5.2.1.	Polisomnografía . . . . .	58
5.2.2.	Estructura del sueño . . . . .	60
<b>6.</b>	<b>Metodología</b>	<b>65</b>
6.1.	Participantes . . . . .	65
6.2.	Registro del polisomnograma . . . . .	67
6.3.	Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao . . . . .	69
6.4.	Espectro de potencias . . . . .	75
<b>7.</b>	<b>Resultados</b>	<b>77</b>
7.1.	Estacionariedad en sueño MOR . . . . .	79
7.2.	Discusión . . . . .	82
7.3.	Conclusiones . . . . .	82
7.4.	Trabajo a futuro . . . . .	82
<b>A.</b>	<b>Compilados gráficos</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>

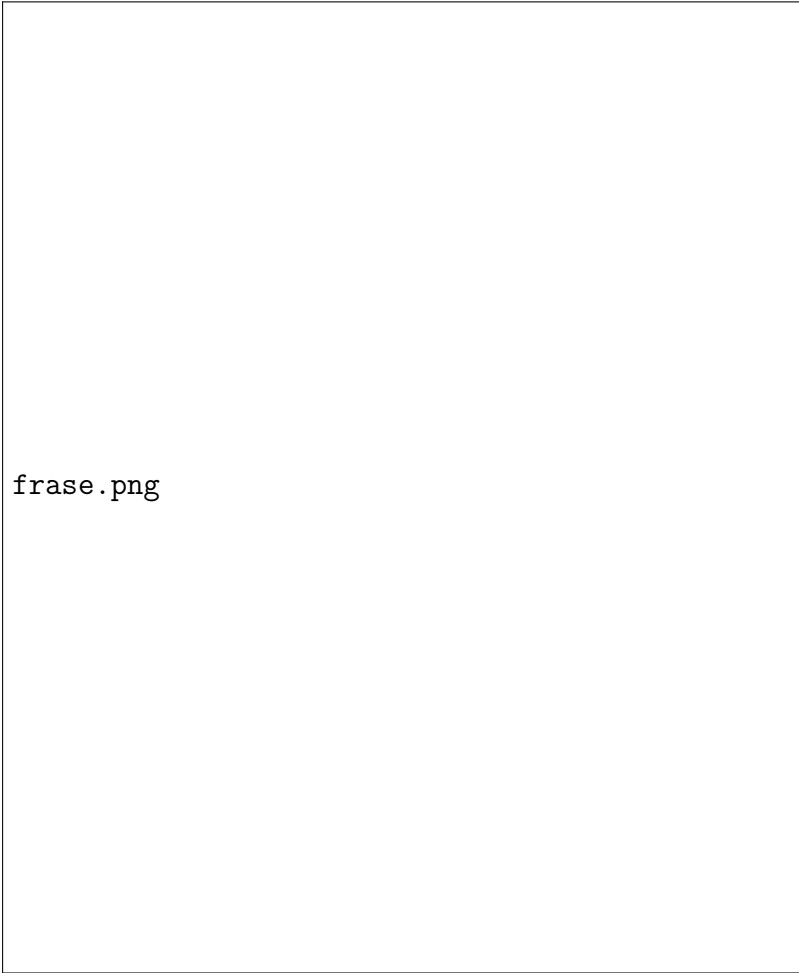
# Índice de figuras

5.1. Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG . . . . .	58
5.2. Colocación de electrodos según el sistema 10–20 . . . . .	60
5.3. Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular	61
5.4. Registro de polisomnograma durante sueño MOR . . . . .	63
6.1. Resultado típico para la función <b>stationarity</b> . . . . .	69
6.2. Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes	70
6.3. Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana . . . . .	72
6.4. Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.	73
6.5. Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana. . . . .	74
6.6. Espectro de potencias de banda ancha . . . . .	76
7.1. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativa- mente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos . . . . .	79
7.2. Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.	80
7.3. Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC. . . . .	81
A.1. Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativa- mente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana	84
A.2. Gráficos individuales para el sujeto VCR . . . . .	86



# Índice de cuadros

4.1. Estadísticos involucrados en la prueba PSR . . . . .	52
5.1. Generalidades sobre ondas cerebrales . . . . .	59
5.2. Criterios para la clasificación de etapas de sueño . . . . .	62
6.1. Puntajes de corte para la prueba Neuropsi . . . . .	66
6.2. Datos generales de los participantes . . . . .	67
6.3. Datos generales sobre los registros de PSG . . . . .	68
7.1. Variables independientes entre grupos . . . . .	78
7.2. Correlaciones entre variables independientes . . . . .	78



frase.png

*“Creo que el conocimiento científico tiene  
propiedades fractales: que por mucho que aprendamos,  
lo que queda, por pequeño que parezca,  
es tan infinitamente complejo como el todo  
por el que empezamos.  
Ese, creo yo, es el secreto del universo.”*

ISAAC ASIMOV (1920–1992)

# Capítulo 1

## Introducción

Gracias a los avances médicos del último siglo se ha incrementado la esperanza de vida y la calidad de vida. Desafortunadamente, también ha aumentado la presencia de enfermedades no-transmisibles asociadas con la edad. Para muchas de esas enfermedades no se han identificado factores causales o curas definitivas [30]. En México el sector de la población con más de 60 años de edad (aquellos con alto riesgo para este tipo de enfermedades) contempló a 10 millones de personas en 2010 y en 2015 esta cifra creció a 12 millones [28, 29].

De entre las enfermedades ante las cuales este grupo de edad es vulnerable, en este trabajo se destaca la demencia. La demencia consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir en las actividades laborales y sociales. El deterioro cognitivo característico de la demencia se considera irreversible, debido a lo cual ha surgido un gran interés en definir y diagnosticar etapas tempranas de este padecimiento con el fin de evitar en lo posible dicho síntoma [36].

Se define entonces al deterioro cognitivo leve (DCL) como “ *una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia* ” [71]. No hay un consenso absoluto sobre qué deficiencias cognitivas –o más bien en qué grado– distinguen a un individuo con DCL, de modo que hay una multitud de definiciones que no son equivalentes [62]. En el presente trabajo se desarrollaron métodos para caracterizar con DCL adultos mayores comparados con sanos en base a mediciones objetivas, pero manteniendo presente que el fenómeno del deterioro cognitivo no puede reducirse exclusivamente a tales mediciones. Las



conclusiones sobre las señales electrofisiológicas deben ser contrastadas, por ejemplo, con los resultados de evaluaciones neuropsicológicas y revisiones neurológicas.

En concreto se utilizarán registros de varias señales electrofisiológicas –incluyendo electroencefalograma (EEG), electrooculograma (EOG) y electromiograma (EMG)– obtenidos durante etapas específicas en el sueño del paciente, técnica conocida como polisomnografía (PSG)<sup>1</sup>. Conviene destacar que muchos de los marcadores para el DCL definidos en base al EEG, dependen efectivamente de su respectivo espectro de potencias; el razonamiento usual para ello es que si el EEG está asociado al grado de actividad cerebral en términos de energía, entonces el espectro de potencias explica *cómo* es dicha actividad.

El presente trabajo toma parte en el problema metodológico de que las señales electrofisiológicas típicamente representan procesos no–lineales y **no–estacionarios**, y sin embargo suelen ser analizadas usando herramientas que suponen linealidad y estacionariedad. Se sabe que las señales biológicas son globalmente no estacionarias, pero en ventanas pequeñas de tiempo estas son mayormente estacionarias. Además estudios previos han demostrado que análisis de señales en tiempos intermedios pueden ayudar a inferir problemas neurológicos [17]. En el caso particular del espectro de potencias, es común que sea calculado usando la transformada de Fourier sobre segmentos cortos para evitar los *efectos* de la no–estacionariedad [32]. A consecuencia de lo anterior los datos pueden contener información *oculta*, o incluso pueden llegar a no ser representativos del fenómeno que se estudia. Es por ello que se buscan herramientas para verificar la estacionariedad débil (más detalles en la sección de métodos) en los registros electrofisiológicas, y con especial atención en la posibilidad de que puedan usarse como marcadores de deterioro cognitivo. Adicionalmente, la posibilidad de que sujetos con PDC exhiben estacionariedad débil en sus registros de EEG en mayor proporción (respecto a individuos sanos) fue sugerida anteriormente [17]. En esta tesis probable DCL o PDC, se asume que solo las pruebas neurológicas son lo determinan.

---

<sup>1</sup>La PSG puede contener otro tipo de registros como electrocardiograma, niveles de oxígeno en la sangre, esfuerzo respiratorio, entre otros

## 1.1. Antecedentes (viejo)

El sueño MOR ha sido ampliamente reconocido como parte de la consolidación de la memoria, así como otras funciones cognitivas [25, 26, 45, 61, 60, 80]. En el caso de adultos mayores, la correlación entre deterioro cognitivo y trastornos del sueño ha sido reportada por varios autores a partir de estudios poblacionales [3, 50, 70, 63]. Tal correlación era de esperarse ya que los procesos de atención y memoria, por ejemplo, dependen de los circuitos colinérgicos activados durante el sueño MOR [10]; estos circuitos son propensos a degradación estructural tanto en tanto en el envejecimiento normal como en el patológico, y especialmente en el segundo [78].

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron la epidemiología del DCL en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo y su posible relación con trastornos de sueño, encontrando efectivamente una correlación entre una menor eficiencia del sueño (porcentaje de tiempo de sueño respecto al tiempo en cama) y la presencia de deterioro cognitivo [85]. En aquél estudio se efectuaron registros de PSG para algunos de los participantes, con la intención de verificar que existen diferencias en los registros correspondientes a individuos con y sin DCL. El presente trabajo se enmarca dentro de una colaboración los responsables del estudio mencionado, con el objetivo de identificar concretamente los posibles cambios en los registros de PSG ocurridos durante el DCL.

La idea de que sujetos con deterioro cognitivo exhiban cambios en sus registros de PSG relacionados a la estacionariedad débil, fue sugerida por Cohen en 1977 [17]; aquél análisis se refiere a su vez a trabajos anteriores sobre estacionariedad y normalidad en registros de EEG [46, 83, 34]. Los estudios referidos se enmarcan en un primer intento de verificar que los registros electrofisiológicos no pueden modelarse como señales son simples.

## 1.2. Antecedentes

La época del sueño de Movimientos Oculares Rápidos (MOR) ha demostrado ser un indicador del DC en los adultos mayores. En otros estudios, se ha encontrado una mayor potencia absoluta y relativa en frecuencias lentas, en regiones laterales [11] y menos atonía muscular [15].

Los estudios anteriores han incluido análisis lineales del Electroencefalograma

(EEG) o del Electromiograma (EMG), pero el Electrooculograma (EOG) no se ha considerado como un posible marcador de deterioro cognitivo. Los tres indicadores de sueño MOR aparecen generalmente en orden consecutivo. Al ingresar a esta etapa, los husos y las ondas lentas de alta amplitud están ausentes, el EEG tiene abundantes frecuencias beta y gamma [82, 41], hay una abrupta pérdida de voltaje que ocurre en un intervalo menos de 2 segundos [74], y, luego, aparecen los movimientos oculares (MOR) característicos [5, 1, 69].

El sueño MOR se ha asociado durante mucho tiempo con las funciones cognitivas [52]; citado en [21]. El sueño MOR desempeña un papel en la consolidación de la memoria [44, 38, 39, 25, 26, 61, 59, 60, 81]. Después de tareas complejas, hay reactivaciones de circuitos neuronales durante MOR sleep [43]. La Potenciación a Largo Plazo (LTP) solo ocurre durante la vigilia y el sueño MOR, y, dependiendo de su fase theta del hipocampo, la LTP puede mejorarse o inhibirse [58].

El sueño MOR mejora la memoria y los procesos de atención mediante las entradas colinérgicas [9] a través de pontine [23] y las estructuras del basales del cerebro anterior [8]. Durante el envejecimiento normal y especialmente durante el envejecimiento patológico, los procesos de atención y memoria se vuelven más vulnerables, y las neuronas colinérgicas son las más afectadas [79]. El envejecimiento afecta a varias estructuras anatómicas que resultan en la pérdida de un eje dendrítico en las neuronas corticales que muestran una degradación en su complejidad fractal estructural [40].

En otros países, el deterioro cognitivo leve (DCL) ha sido medido por el Instituto Nacional de Enfermedades Neurológicas y Comunicativas y la Asociación de Stroke / Alzheimer's Disease and Related Disorders o NINCDS ADRDA criteria [47]. Sin embargo, las pruebas neuropsicológicas empleadas en estos estudios todavía no se han validado en México debido en parte a la alta tasa de analfabetismo entre los adultos mayores, que en México asciende al 25.6% [18]. En cambio, en estudios epidemiológicos, el Examen Cognitivo Transcultural (CCCE) y otras pruebas se han utilizado [73]. El CCCE muestra una prevalencia del 28.7% de deterioro cognitivo sin demencia (DCSD) que aumenta con la edad y disminuye con un nivel educativo más alto [48]. La prueba de Neuropsi, desarrollada en la UNAM, también ha distinguido claramente entre sujetos normales, con deterioro cognitivo y demenciales [54, 2, 51]. En el presente estudio, una puntuación de 3 desviaciones estándar por debajo de la media en la prueba de Neuropsi se consideró una indicación de Probable DC (PDC).

En un estudio reciente, EEG de una noche polisomnografía de personas mayores con y sin deterioro cognitivo según las evaluaciones con el Neuropsi analizó el porcentaje de estacionariedad. En sueño MOR el porcentaje fue menor que el del sueño NMOR y la vigilia, se obtuvo estacionariedad como un índice para comparar NMOR versus sueño MOR en ambos grupos [75].

## 1.3. Pregunta de investigación

¿Los registros de polisomnograma en adultos mayores pueden considerarse como series de tiempo débilmente estacionarias?

¿Es posible que la estacionariedad se vea influida por el estado cognitivo del sujeto?

### 1.3.1. Hipótesis

Existen diferencias en la actividad eléctrica cerebral en adultos mayores con DCL, respecto a individuos sanos, y es posible detectar dichas diferencias como una mayor o menor *presencia* de estacionariedad débil en registros de PSG durante el sueño profundo.

### 1.3.2. Objetivo general

Buscar pruebas estadísticas formales para detectar si una serie de tiempo dada procede de un proceso estocástico débilmente estacionario. Usar tales pruebas sobre registros de polisomnograma en adultos mayores, para investigar si la presencia de segmentos débilmente estacionarios se correlaciona con la condición de probable deterioro cognitivo.

### 1.3.3. Objetivos específicos

- Estudiar la definición de estacionariedad para procesos estocásticos.
- Investigar cómo detectar, como prueba de hipótesis, si una serie de tiempo dada proviene de un proceso estocástico débilmente estacionario, y bajo qué supuestos es válida dicha caracterización.

- Decidir si los registros de PSG, durante sueño profundo, son débilmente estacionarios.
- Investigar si la presencia de segmentos estacionarios en los registros es diferente si el PSG corresponde a un individuo con PDCL o PDC.

## 1.4. Antecedentes previo

El sueño MOR ha sido ampliamente reconocido como parte de la consolidación de la memoria, así como otras funciones cognitivas [25, 26, 45, 61, 60, 80]. En el caso de adultos mayores, la correlación entre deterioro cognitivo y trastornos del sueño ha sido reportada por varios autores a partir de estudios poblacionales [3, 50, 70, 63]. Tal correlación era de esperarse ya que los procesos de atención y memoria, por ejemplo, dependen de los circuitos colinérgicos activados durante el sueño MOR [10]; estos circuitos son propensos a degradación estructural tanto en el envejecimiento normal como en el patológico, y especialmente en el segundo [78].

En 2016 Vázquez-Tagle y colaboradores estudiaron la epidemiología del DCL en adultos mayores dentro del estado de Hidalgo y su posible relación con trastornos de sueño, encontrando efectivamente una correlación entre una menor eficiencia del sueño (porcentaje de tiempo de sueño respecto al tiempo en cama) y la presencia de deterioro cognitivo [85]. En aquél estudio se efectuaron registros de PSG para algunos de los participantes, con la intención de verificar que existen diferencias en los registros correspondientes a individuos con y sin DCL. El presente trabajo se enmarca dentro de una reciente colaboración, con el objetivo de identificar concretamente los posibles cambios en los registros de PSG ocurridos durante el DCL o PDC.

La idea de que sujetos con deterioro cognitivo exhiban cambios en sus registros de PSG relacionados a la estacionariedad débil, fue sugerida por Cohen en 1977 [17]; aquél análisis se refiere a su vez a trabajos anteriores sobre estacionariedad y normalidad en registros de EEG [46, 83, 34]. Los estudios referidos se enmarcan en un primer intento de verificar que los registros electrofisiológicos no pueden modelarse como señales *simples* (lo contrario a señales complejas). El tema de la estacionariedad en señales parece relevante nuevamente a la luz de una revisión por Kreuz y colaboradores [37], según la cual el método más eficaz para detectar correlación es la correlación *clásica* –en comparación con algunos métodos basados en entropía

o información mutua, por ejemplo. Para llegar a tal conclusión analizaron algunos tipos *comunes* de datos, experimentales y simulados, así como algunos tipos comunes de perturbaciones.

Un resultado tan controversial provoca replantearse, por ejemplo, si algún método en particular es adecuado para un tipo arbitrario de datos, o si algunas generalizaciones para estos métodos son efectivamente necesarias.



# Capítulo 2

## Preliminares

Redactar una introducción [?]

### 2.1. Medidas

**Definición 2.1.** Sea  $\Omega$  un conjunto y sea  $\mathcal{U}$  una familia de subconjuntos de  $\Omega$ . Se dice que  $\mathcal{U}$  es una  **$\sigma$ -álgebra** si cumple

- $\Omega \in \mathcal{U}$
- $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^C \in \mathcal{U}$
- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

Donde  $A^C$  es el complemento de  $A$  en  $U$

Los elementos de una  $\sigma$ -álgebra se denominan **conjuntos medibles**.

**Definición 2.2.** Sea  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{A} \subseteq \Omega$  una familia de subconjuntos. Se define a  $\sigma(\mathcal{A})$ , la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{A}$ , como la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras que contienen a  $\mathcal{A}$

En el contexto de la probabilidad, es particularmente importante la  $\sigma$ -álgebra de Borel, definida como

$$\mathcal{B} = \sigma(\{(-\infty, a] \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (2.1)$$

Este tipo de  $\sigma$ -álgebras puede definirse sencillamente para algún subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_A = \sigma(\{(-\infty, a] \cap A \subset \mathbb{R} | a \in \mathbb{R}\}) \quad (2.2)$$



**Definición 2.3.** Sea  $\Omega$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una  $\sigma$ -álgebra definida en  $\Omega$ . El par  $(\Omega, \mathcal{U})$  será referido como **espacio de medida**. Por nomenclatura,  $\Omega$  es referido como espacio muestral y  $\mathcal{U}$  como  $\sigma$ -álgebra de sucesos.

**Definición 2.4.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio de medida. Se dice que una función  $\mu : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_+$  es una **medida** si cumple que

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  son tales que  $A_n \cap A_m = \emptyset \Leftrightarrow m \neq n$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Donde  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x\} \cup \{\infty\}$  y  $\emptyset$  es el conjunto vacío. La terna  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  será referida como **espacio de medida**.

**Definición 2.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida. Se dice que  $\mu$  es  **$\sigma$ -finita** si existen una familia de conjuntos medibles  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tales que

- $\mu(A_n) < \infty$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$

**Definición 2.6.** Considérese el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , con  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel. Se define la medida de Lebesgue,  $\mu_L$ , la medida en el espacio mencionado tal que

$$\mu_L([a, b]) = b - a \quad (2.3)$$

para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a < b$

**Proposición 2.1.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  un espacio de probabilidad. Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos medibles tales que

- $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- Existe un conjunto medible  $A$  tal que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) \quad (2.4)$$

*Demostración.* Nótese que

$$P(A) = P(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$$

□

### 2.1.1. Integración en espacios medibles

**Definición 2.7.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función medible no-negativa. Sea  $A \in \mathcal{U}$  un conjunto arbitrario y  $\mathcal{C}_A \subset \mathcal{U}$  el conjunto de las particiones de  $A$  en una cantidad finita de conjuntos medibles. Se define la **integral de  $f$  respecto a  $\mu$  en el conjunto  $A$**  como

$$\int_A f(x) \mu(x) := \sup_{\mathcal{C}_A} \left[ \sum_{j=1}^n f(\lambda) \mu(E_m) \right] \quad (2.5)$$

Donde  $\mathcal{C}_A = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$

**Definición 2.8.** Sea  $(\Omega, \mathcal{U}, \mu)$  un espacio de medida y sea  $f : \omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  una función medible. Se definen las funciones  $f^+$  y  $f^-$  como

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max(f(x), 0) \\ f^-(x) &= -\min(f(x), 0) \end{aligned}$$

Se dice que  $f$  es integrable en  $A$  respecto a  $\mu$  si cumple que  $\int_A f^+(\lambda) d\mu(\lambda) < \infty$  y  $\int_A f^-(\lambda) d\mu(\lambda) < \infty$ ; si así fuere, se define

$$\int_A f(\lambda) d\mu(\lambda) := \int_A f^+(\lambda) d\mu(\lambda) - \int_A f^-(\lambda) d\mu(\lambda) \quad (2.6)$$

**Definición 2.9.** Sean  $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$  espacios medibles y  $\mu$  una medida sobre el primero. Una función  $g$  es integrable en  $A \in \mathcal{U}_\epsilon$  respecto a  $\mu_f$  si y sólo si  $g \circ f$  es integrable en  $f^{-1}(A)$  respecto a  $\mu$

? pagina 47 del manual

□

## 2.2. Variables aleatorias

Si una medida  $\mu$  es acotada en todo el espacio de eventos se dice que es una **medida finita** (no confundir con  $\sigma$ -finita). Una medida de probabilidad puede entenderse como un caso particular de medida finita sobre los reales.

**Definición 2.10.** *El espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  se dice un **espacio de probabilidad** si satisface que  $P(\Omega) = 1$*

**Definición 2.11.** *Sean  $(\Omega_1, \mathcal{U}_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{U}_2)$  dos espacios medibles. Se dice que una función  $f : \omega_1 \rightarrow \Omega_2$  es **medible** si para todo  $A \in \mathcal{U}_2$   $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}_1$*

**Definición 2.12.** *Sea  $(\Omega, \mathcal{U})$  un espacio medible y  $(I, \mathcal{B}_I, P)$  un espacio de probabilidad. Una **variable aleatoria** es una función medible  $X : \Omega \rightarrow \mathcal{B}_I$  entre estos espacios*

Siendo  $X$  una variable aleatoria, intuitivamente se puede definir la función de densidad de probabilidad de un conjunto medible  $A \in \mathcal{B}$  como

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \quad (2.7)$$

**Definición 2.13.** *Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$  un espacio de probabilidad. La **función de probabilidad acumulada**,  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , se define como*

$$F(x) := P((-\infty, x])$$

Por comodidad, se define una notación alterna para la función de probabilidad acumulada de  $X$  como

$$P_X(x \leq x) := F_X(x) = P_X((-\infty, x]) \quad (2.8)$$

Si se puede definir una función de densidad de probabilidad para  $X$ , entonces puede escribirse

$$P(x \in A) = \int_A f_X(\lambda) d\lambda \quad (2.9)$$

Una función de probabilidad acumulada satisface las siguientes propiedades

- Para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$

- Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} F(x) + P(\{x\})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Conviene considerar las funciones que satisfacen las condiciones anteriores, referidas simplemente como **función de distribución**, pero que no necesariamente provienen de un espacio de probabilidad. Naturalmente, una función de distribución  $F$  puede inducir una medida  $\mu$ .

**Teorema 2.1.** *Sea  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de distribución; se puede construir una medida  $\mu_F$  sobre el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tal que la función de probabilidad acumulada asociada al espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_F)$  es exactamente  $F$ .*

*La medida  $\mu_F$  será referida como la **medida inducida** por  $F$ .*

*Demostración.* Para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ , puede escribirse

$$\mu((a, b]) := F(b) - F(a) \quad (2.10)$$

[? pag 18, 25 del libro de teorema de la medida] □

### 2.2.1. Variables aleatorias continuas y discretas

**Definición 2.14.** *Una función  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **absolutamente continua** si para cualquier  $\varepsilon > 0$  arbitrario existe un  $\delta > 0$  y una familia de intervalos,  $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| < \delta \quad (2.11)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon \quad (2.12)$$

Se dice que una medida de probabilidad  $P$  es **continua** si su función de probabilidad acumulada es absolutamente continua.

**Proposición 2.2.** *Si una medida de probabilidad  $F$  es absolutamente continua, entonces existe una función  $f$  tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad (2.13)$$

Se dice que  $f$  es la **función de densidad de probabilidad**.

Sea  $P$  una medida de probabilidad, se define su **soporte** como

$$\mathcal{D}_P = \{x \in \mathbb{R} | P(\{x\}) > 0\} \quad (2.14)$$

Se dice que una medida de probabilidad,  $P$ , es **discreta** si su soporte es numerable.

**Proposición 2.3.** *Si una medida de probabilidad  $F$  es discreta, entonces existe una finito o infinito numerable  $Q_F = \{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} q_n F(q_n) \quad (2.15)$$

Es posible construir una función de densidad de probabilidad para  $F$  como

$$f(x) = \begin{cases} F(x) & , x \in Q_F \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.16)$$

Naturalmente es posible construir medidas de probabilidad que no sean ni continuas ni discretas. Por ejemplo, considérese la función de Cantor  $K$  que puede ser definida iterativamente como

$$K_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_n(3x) & , 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}K_n(3x-2) + \frac{1}{2} & , \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

con  $K_0(x) = x$  y  $K := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$

[?] demostracion de que la funcion de cantor esta bien definida

**Proposición 2.4.** *La función de Cantor es continua pero no es absolutamente continua*

Luego entonces, puede construirse la siguiente función de distribución

$$F_K = \begin{cases} K(x) & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x < 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

la cual no es ni continua ni discreta. Por simplicidad, en el presente trabajo únicamente se considerarán variables aleatorias que son continuas o discretas.

### 2.2.2. Valor esperado

**Definición 2.15.** Sea  $X$  una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ . Si  $P$  es integrable en  $\Omega$  respecto a  $P$ , entonces se define el **valor esperado** de  $X$  como

$$E[X] := \int_{\omega} X(\lambda) dP(\lambda) \quad (2.19)$$

**Proposición 2.5.** Sea  $X$  una variable aleatoria y  $g$  una función medible en el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ . Entonces  $g(X)$  es una variable aleatoria cuyo valor esperado es

$$E[g(X)] = \int_{\Omega} [g(X)](\lambda) dP(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dP(x) \quad (2.20)$$

**Definición 2.16.** Sea  $X$  una variable aleatoria, se definen (si es posible) su media  $\mu_X$  y varianza  $\sigma_X^2$  como

$$\mu_X := E[X] \quad (2.21)$$

$$\sigma_X^2 := E[(X - \mu_X)^2] \quad (2.22)$$

Naturalmente la notación  $\mu_X$  únicamente se usa cuando no hay confusión con la notación para medidas. Así mismo, conviene mencionar ejemplos de variables aleatorias para las cuales no está bien definida su media o varianza.

? Ejemplos

**Definición 2.17.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Se define su **función característica** como

$$\phi_X(\omega) := E[e^{i\omega X}] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} dF_X(x) \quad (2.23)$$

donde, para todo  $z \in \mathbb{R}$ ,  $e^{iz} := \cos(z) + i\sin(z)$

**Definición 2.18.** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias. Se define su **covarianza** como

$$\text{Cov}(X, Y) := E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{(X,Y)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_X(x) dP_Y(y) \quad (2.24)$$

**Proposición 2.6.** Si  $X, Y$  son independientes, entonces  $\text{Cov}(X, Y) = 0$

**Definición 2.19.** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias. Se define su **coeficiente de correlación de Pearson** como

$$\rho(X, Y) := \sqrt{\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} \quad (2.25)$$

## 2.3. Estimación de parámetros

Es común que se conozca cierta información de estos fenómenos que permita suponer que se comportan como variables aleatorias con cierta forma. Por ejemplo, ¿. Conviene destacar el caso de fenómenos que son *forzados* a seguir una distribución conocida; por ejemplo, la metodología para aplicar la prueba Neuropsi [56] ha sido diseñada de tal forma que los puntajes siguen una distribución normal para cada segmento poblacional.

En este tipo de escenarios se puede hablar de una función de distribución  $f(\bullet; \theta)$  que depende de un parámetro  $\theta \in \Omega$ , donde  $\Omega$  se conoce como **espacio de parámetros**; el objetivo consiste en deducir el valor de  $\theta$  a partir de los datos recabados.

**Definición 2.20.** Sea  $X$  una variable aleatoria. Una **muestra de  $X$  de tamaño  $N$**  es una colección de variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  tales que son independientes y que comparten la misma distribución de  $X$

**Proposición 2.7.** Sea  $X$  una variable aleatoria que admite una función de densidad  $f_X$ , y sea  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  una muestra. La función de densidad de probabilidad conjunta para el vector  $[X_1, X_2, \dots, X_N]$  es

$$f_{[X_1, \dots, X_N]}(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N f(x_j) \quad (2.26)$$

Mientras no se indique lo contrario, las variables aleatorias en la muestra no están ordenadas.

**Proposición 2.8.** Sea  $X$  una variable aleatoria,  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$  una muestra y  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  un conjunto de observaciones. Se define la **función de distribu-**

*ción muestral como*

$$F_{X;N}(x) := \frac{1}{N} \sum_{x_j \leq x} 1 \quad (2.27)$$

**Proposición 2.9.** *Si el tamaño de una muestra de  $X$  se vuelve arbitrariamente grande, la función de distribución muestral converge en probabilidad a  $F$ , la función de probabilidad acumulada de  $X$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_{X;N} = F_X \quad (2.28)$$

**Definición 2.21.** *Un **estadístico** es una función de las observaciones en una muestra*

Ejemplo en pagina 112 del libro de lindgren. Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , sea  $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_j$ , entonces

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{N}) \quad (2.29)$$

Ejemplo. Considérese la variable aleatoria binomial  $X \sim B(\theta)$  con  $\theta \in [0, 1]$ , cuya FDP es

$$f_X(x; \theta) = \begin{cases} \theta^x (1 - \theta)^{1-x} & , x \in \{0, 1\} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.30)$$

La FDP conjunta para una muestra de tamaño  $N$  es

$$f_N(x_1, \dots, x_N; \theta) = \begin{cases} \theta^{\sum_i x_i} (1 - \theta)^{\sum_i (1-x_i)} & , x_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, N\} \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.31)$$

Se puede entender a  $f_N$ , evaluada en los datos obtenidos y como función de  $\theta$ , como la probabilidad de que se hayan obtenido los datos que de hecho se obtuvieron. Esta redundancia sugiere que una elección adecuada para el parámetro  $\theta$  sería aquél que maximice a tal función, que recibe el nombre de **función de verosimilitud**

$$L(\theta; x_1, \dots, x_N) = \theta^{\sum_i x_i} (1 - \theta)^{\sum_i (1-x_i)} \quad (2.32)$$

con  $\theta \in [0, 1]$ . Por simplicidad técnica, se maximizará a  $L$  igualando a cero la derivada



de  $\log \circ L$  con respecto a  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \log(L(\theta; x_1, \dots, x_N)) &= \frac{d}{d\theta} \log \left( \theta^{\sum_{i=1}^N x_i} (1 - \theta)^{\sum_{i=1}^N (1 - x_i)} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left[ \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \log(\theta) + \left( \sum_{i=1}^N (1 - x_i) \right) \log(1 - \theta) \right] \\ &= \left( \sum_{i=1}^N x_i \right) \frac{1}{\theta} - \left( N - \sum_{i=1}^N x_i \right) \frac{1}{1 - \theta} \end{aligned}$$

Luego entonces, la función de verosimilitud es maximizada usando  $\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)$ .

**Definición 2.22.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $X_1, \dots, X_N$  una muestra de tamaño  $N$ . Un estimador  $\hat{\theta}$  es **suficiente** si la distribución de la variable  $X|\hat{\theta}$  no depende de  $\theta$

**Teorema 2.2.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende del parámetro  $\theta$ . Un estadístico  $\hat{\theta}$  es suficiente si y sólo si existen funciones  $g$  y  $h$  tales que

$$f_X(\bullet; \theta) = g(\hat{\theta}, \theta) h_X(\bullet) \quad (2.33)$$

**Definición 2.23.** El **error de media cuadrática** para el estimador  $\hat{\theta}$  se define como

$$EMC(\hat{\theta}) := E \left[ \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2 \right] = \text{Var} \left( \hat{\theta} \right) + (E[\hat{\theta}] - \theta)^2 \quad (2.34)$$

**Definición 2.24.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $X_1, \dots, X_N$  una muestra de tamaño  $N$ . Un estimador  $\hat{\theta}$  es **insesgado** si cumple que

$$E \left[ \hat{\theta} \right] = \theta \quad (2.35)$$

Se puede hablar del **sesgo** del estimador  $\hat{\theta}$  como  $E \left[ \hat{\theta} \right] - \theta$

**Definición 2.25.** Sea  $X$  una variable aleatoria que depende de un parámetro  $\theta$  y  $\left\{ \hat{\theta}_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de estimadores definidos para muestras de  $X$  de tamaño arbitrario. La familia de estimadores se dice **consistente** si para cualquier  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \hat{\theta}_n - \theta \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad (2.36)$$

**Definición 2.26.** *Así como en la definición anterior, se dice que a familia de estimadores converge en media cuadrática si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \hat{\theta}_n - \theta \right)^2 \right] = 0 \quad (2.37)$$

*Si esto se cumple, se dice que la familia de estimadores es **consistente en media cuadrática***

**Teorema 2.3.** *Si  $\hat{\theta}_n$  es una familia de estimadores consistente en media cuadrática, entonces es consistente*

**Teorema 2.4.** *Una condición suficiente para para que una familia sea consistente en en media cuadrática es*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \hat{\theta}_n \right] = \theta \quad (2.38)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \hat{\theta}_n \right) = 0 \quad (2.39)$$

*Demostración.* ? pag 141 del libro de lindgren □

## 2.4. Pruebas de hipótesis

Una hipótesis es una afirmación sobre algún aspecto desconocido. Es tarea común en la estadística el decidir si alguna afirmación puede sostenerse a partir de la información proporcionada por un conjunto de observaciones. A partir de la aplicación masiva de pruebas neuropsicológicas a un grupo de adultos mayores uno puede preguntarse, por ejemplo, si hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas, o si la edad de los participantes está correlacionada con su desempeño en tareas de memoria. En la tabla ... se muestran los datos sobre una simulación (artificial) de dicho escenario.

Una herramienta de uso común para producir estas decisiones es la **pruebas de hipótesis**, la cual consiste en dos afirmaciones complementarias, es decir, tales que exactamente una de ellas es verdadera; tales afirmaciones son referidas como *hipótesis*, y deben elegirse de forma que sean equivalentes a la decisión que se busca. Usualmente la primera de las hipótesis (hipótesis nula,  $H_0$ ) representa la afirmación más general o que se cree verdadera por omisión, mientras que la segunda hipótesis

(hipótesis alternativa,  $H_A$ ) se tomará como verdadera si existe suficiente información para rechazar la veracidad de la primera. El enfoque de prueba de significancia es tomar un estadístico  $\hat{\theta}$  y evaluarlo sobre los datos, posteriormente se analiza qué tan diferente es el valor obrevado del típico cuando la hipótesis nula es verdadera.

Los estadísticos de prueba suele ser un estadístico construido para tener una distribución conocida salvo unos pocos parámetros fáciles de estimar. La interpretación usual es que, si  $H_0$  es verdadera entonces  $\hat{\theta}$  puede no tener el valor predicho debido a factores ajenos al fenómeno estudiado, en consecuencia se suele hablar de una región de rechazo en el espacio de estados (ver más adelante). Bajo esta interpretación, un valor de  $\hat{\theta}$  dentro de la región de rechazo significa que los datos representan evidencia para rechazar  $H_0$ ; un no-rechazo no significa precisamente que  $H_0$  sea verdadera, sino que las observaciones no representan evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ .

**Definición 2.27.** *En una prueba de hipótesis, rechazar  $H_0$  cuando es verdadero es un **error del tipo I**. Así msimo, aceptar  $H_0$  cuando es falsa es un **error del tipo II**.*

La naturaleza e intepretación de los estadísticos de prueba suelen ser muy particulares de las situaciones bajo las cuales son definidos. Una forma típica de normalizar los diferentes estadísticos es a través del  $p$ -valor, definido como la probabilidad de que ocurra un valor extremo del estadístico de prueba; el  $p$ -valor suele interpretarse como la *fuerza* de la evidencia contra  $H_0$ .

**Definición 2.28.** *Sea  $\hat{\theta}$  un estadístico de prueba. El  **$p$ -valor** asociado al  $\hat{\theta} = \theta_0$  es la probabilidad  $P(\hat{\theta} \geq \theta_0)$*

Una **prueba de sinificancia** se entiende como una pruebas de hipótesis para algunos  $p$ -valores predefinidos, usualmente 0.05, 0.01, 0.005, entre otros. Un error común, pero muy extendido, es interpretar al  $p$ -valor como la probabilidad de obtener  $H_0$ .

**Definición 2.29.** *Dada una muestra poblacional y dos afirmaciones complementarias  $H_0$  y  $H_A$ , una **prueba de hipótesis** es una regla de decisión que asigna a cada punto del espacio de estados una acción del conjunto Aceptar  $H_0$ , rechazar  $H_A$ , Rechazar  $H_0$ , aceptar  $H_A$ .*

*Al conjunto del espacio muestral sonde se rechaza  $H_0$  se le denomina **región crítica**.*

Una propiedad deseable para un estadístico de prueba es poder acotar los errores de tipo I y de tipo II; para ello, para alguna región crítica arbitraria  $\mathcal{C}$  se define el **nivel de significancia** de la prueba como

$$\alpha := \sup_{\theta \in H_0} p(\mathcal{C}|\theta) \quad (2.40)$$

Ejemplo: Retomando los datos de la tabla ..., considérese la pregunta ¿*Los hombres y mujeres tienden a obtener puntajes diferentes en las pruebas neuropsicológicas?*. En este ejemplo se supone que los puntajes de los hombres en la prueba siguen una distribución normal con media  $\mu_H$  y varianza 1, y similarmente para las mujeres con media  $\mu_M$  y varianza 1. Como hipótesis nula se elige la posibilidad de que en promedio ambos grupos (hombre y mujeres) obtengan el mismo puntaje en la prueba, es decir

$$H_0 : \mu_H = \mu_M \quad (2.41)$$

y como hipótesis alternativa está la posibilidad de que los puntajes sean diferentes

$$H_A : \mu_H \neq \mu_M \quad (2.42)$$

## 2.5. Procesos estocásticos

**Definición 2.30.** *Un **proceso estocástico**  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es una colección de variables aleatorias indexadas en el conjunto  $\mathcal{T}$*

$$\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}} := \{X(t) | t \in \mathcal{T}\} \quad (2.43)$$

*La variable  $t$  es referida como tiempo, mientras que el conjunto  $\mathcal{T}$  es referido como el conjunto de tiempos admisibles*

de  $\{t \in \mathbb{R} | t \cdot \Delta_t \in \mathbb{Z}\}$  para algún  $\Delta_t$  (**tiempo discreto**). Las *componentes* de un proceso estocástico serán denotadas como:

$\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$	Todo el proceso
$X(t)$	Una de las variable aleatoria que componen al proceso, en el tiempo $t$
$x(t)$	Una realización de $X(t)$
$F_{X(t)}$	FPA para $X(t)$
$\Delta_t$	Frecuencia de muestreo (en tiempo discreto)

La estacionariedad es un indicativo de la *homogeneidad* de un proceso; un proceso *muy* estacionario sería aquél cuyas variable aleatoria que tiene distribuciones conjuntas que no cambian con el tiempo. La definición 2.31 representa con exactitud tales requerimientos, pero se le considera *innecesariamente fuerte*; una definición común es 2.32.

**Definición 2.31** (Estacionariedad fuerte). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice fuertemente estacionario si para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  y cualquier  $\tau$  tal que  $t_i + \tau \in \mathcal{T}$ , se cumple que*

$$F_{[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]} \equiv F_{[X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)]}$$

Donde  $F_{[v_1, v_2, \dots, v_N]}$  es la FPA conjunta para el vector  $[v_1, v_2, \dots, v_N]$

**Definición 2.32** (Estacionariedad de orden  $m$ ). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice estacionario de orden  $m$  si, para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$  y cualquier  $\tau$  tal que  $t_i + \tau \in \mathcal{T}$ , se cumple que*

$$E[X^{m_1}(t_1)X^{m_2}(t_2) \cdots X^{m_n}(t_n)] = E[X^{m_1}(t_1 + \tau)X^{m_2}(t_2 + \tau) \cdots X^{m_n}(t_n + \tau)]$$

para cualesquiera enteros  $m_1, m_2, \dots, m_n$  tales que  $m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq m$

Cabe mencionar que la definición 2.32 no es equivalente a la definición 2.31, ni aún cuando  $m \rightarrow \infty$ ; sin embargo permite asegurar que los *momentos* ( $E[X^k]$  para algún  $k$ ) del proceso sean invariantes en el tiempo, y éstos suelen encontrarse asociados a cantidades físicas.

Como un ejemplo muy particular conviene destacar la energía, que suele ser asociada con el segundo momento (definición 3.1). Dicha conexión motiva a escoger una definición de estacionariedad que permita analizar la energía del proceso: la estacionariedad débil.

**Definición 2.33** (Estacionariedad débil). *Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice débilmente estacionario si existen constantes  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$  y una función  $R : T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  tales*

que, para cualesquiera  $t, s \in T$  se cumple

- $E[X(t)] = \mu$
- $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2$
- $\text{Cov}(X(t), X(s)) = R(s - t)$

**Proposición 2.10.** *Un proceso es débilmente estacionario si y sólo si es estacionario de orden 2*

Cabe destacar que la estacionariedad débil no sólo tiene como condición que todas las variables del proceso tengan la misma media y varianza, sino que también supone que éstas son finitas. Sobre la función de covarianza  $R$  (que en un único proceso es referida como *autocovarianza*), no hay restricciones sobre los valores que pueda tomar, excepto que  $R(0) = \text{Var}(X(\bullet)) < \infty$ . En el marco del modelo de series electrofisiológicas, conviene suponer que los registros corresponden a procesos a tiempo continuo que son continuos de alguna forma; se ha elegido la continuidad en media cuadrática.

**Definición 2.34** (Continuidad estocástica en media cuadrática). *Un proceso a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es estocásticamente continuo, en el sentido de media cuadrática, en un tiempo admisible  $t_0$  si*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} E[(X(t) - X(t_0))^2] = 0$$

Una forma natural de pensar en la definición 2.34 es que si  $|t - t_0|$  es muy pequeño entonces  $X(t)$  y  $X(t_0)$  difieren muy poco entre sí, como variables aleatorias. Hablando de procesos débilmente estacionarios, la continuidad estocástica de un proceso es equivalente a que su función de autocovarianza sea continua en 0.



# Capítulo 3

## Medida y frecuencia

Existe una larga tradición para entender y modelar las señales electrofisiológicas en términos de *ondas y frecuencias*, ya que fundamentalmente son fenómenos eléctricos [32]. Se aborda el enfoque usual del espectro de potencias: se asocia la energía de una señal con su dispersión (varianza) y se estudia cómo se distribuye en la base de Fourier. En el entendido de que el espectro de potencias puede variar en el tiempo, la estacionariedad es equivalente a que el tal cambio no ocurra.

### 3.1. Transformada de Fourier

Para exponer formalmente lo que es la transformada de Fourier, conviene mencionar los espacios de las **series  $p$ -sumables** ( $\ell^p$ ), y las **funciones  $p$ -integrables** sobre un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  ( $L_I^p$ ).

$$\ell^p := \left\{ s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^p < \infty \right. \right\}$$
$$L_I^p := \left\{ S : I \rightarrow \mathbb{C} \left| \int_I |S(t)|^p dt < \infty \right. \right\}$$

Estos conjuntos admiten las operaciones suma (+), producto ( $\cdot$ ) y multiplicación por escalares de la manera usual. Para el caso particular  $p = 2$ , los conjuntos  $\ell^2$  y



$L_I^2$  admiten los siguientes productos internos:

$$\langle s, z \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(n)}$$

$$\langle S, Z \rangle = \int_I S(t) \overline{Z(t)} dt$$

Usando dichos productos internos, junto con las normas y métricas que inducen, los conjuntos  $\ell^2$  y  $L_I^2$  tienen estructura de *espacio de Hilbert*.

Las definiciones anteriores revelan cómo  $\ell^2$  y  $L_I^2$  son *muy* parecidos, luego entonces se puede definir la transformada de Fourier como una conexión natural entre ellos.

**Definición 3.1** (Serie de Fourier). *Sea  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función periódica con periodo  $2T$  y tal que  $S \in L_{[-T,T]}^2$ . Se dice que  $A$  es la serie de Fourier para  $S$  si satisface*

$$A(n) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(t) e^{-i|n|t/2T} dt$$

**Definición 3.2** (Transformada de Fourier). *Sean  $S$  y  $A$  como en la definición 3.1. Se le llama transformada de Fourier a la función  $\mathcal{F}_T : L_{[-T,T]}^2 \rightarrow \ell^2 : S \mapsto A$*

Puede interpretarse a  $A$  como las *coordenadas* de  $S$  en  $L_{[-T,T]}^2$ , usando una base de funciones ortonormales  $\{e^{i|n|t/2T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ; esta base en particular es conocida como la **base de Fourier**. Cabe mencionar las siguientes propiedades de  $\mathcal{F}_T$

- Es lineal,  $\mathcal{F}_T[cS + Z] = c\mathcal{F}_T[S] + \mathcal{F}_T[Z]$
- **No** es invertible, aunque se le suele definir una pseudoinversa como

$$\mathcal{F}_T^{\text{inv}} : \ell^2 \rightarrow L_{[-T,T]}^2 : A \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n) e^{i|n|t/2T}$$

Se define, de manera pragmática, la **energía disipada** y la **potencia** de una

función  $S$  en un intervalo  $[a, b]$  como

$$\begin{aligned} \text{energía}[S]_{[a,b]} &= \int_a^b |S(t)|^2 dt \\ \text{potencia}[S]_{[a,b]} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b |S(t)|^2 dt \end{aligned} \quad (3.1)$$

Es evidente que la energía y potencia están relacionadas a la norma en  $L^2_{[-T,T]}$  inducida por su producto interno. Dicha relación junto a las propiedades *agradables* de  $\mathcal{F}_T$  pueden ser usadas para conectar la energía con la norma en  $\ell^2$  (teorema 3.1): la energía disipada por una función equivale a la suma de las energías disipada por cada una de sus *componentes* en la base de Fourier. Conviene, entonces, definir una función que *desglose* estos *aportes*.

**Teorema 3.1** (Parseval). *Sea  $S \in L^2_{[-T,T]}$ , y sea  $A = \mathcal{F}[S]$ . Se cumple que*

$$\int_{-T}^T |S(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |A(n)|^2$$

**Definición 3.3** (Espectro de potencias). *Sea  $S \in L^2_{[-T,T]}$ , y sea  $A = \mathcal{F}[S]$ . Se llama espectro de potencias para  $S$  a la función  $h_S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como*

$$h_S(\omega) = \begin{cases} |A(n)|^2 & , \text{ si } \omega = n/2T, \text{ con } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

Un elemento que será de crucial importancia en el desarrollo posterior es la **convolución**  $(*)$ , una tercera operación binaria en estos espacios y definida como

$$\begin{aligned} [s * z](\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) \overline{z(\tau - n)} \\ [S * Z](\tau) &= \int_I S(t) \overline{Z(\tau - t)} \end{aligned}$$

donde  $\bar{c}$  es el conjugado complejo de  $c$ . Esta operación cobra importancia por la forma en que se relaciona con  $\mathcal{F}_T$

**Observación 3.1.** Sean  $S, Z \in L^2_{[-T, T]}$ , entonces se satisface que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_T[S * Z] &= \mathcal{F}_T[S] \cdot \mathcal{F}_T[Z] \\ \mathcal{F}_T[S \cdot Z] &= \mathcal{F}_T[S] * \mathcal{F}_T[Z]\end{aligned}$$

## 3.2. Función de densidad espectral

La forma más natural de definir un espectro de potencias para un proceso estacionario es a través de la tr. de Fourier de sus realizaciones. En general no se puede garantizar que una definición así *funcione* ya que las realizaciones pueden ser señales que no son periódicas, cuadrado-integrable, continuas, etc. Este problema será abordado al restringir los tiempos permitidos a un conjunto *sin problemas*, para luego considerar el límite cuando *recupera su forma original*.

**Definición 3.4** (Función de densidad espectral, tiempo continuo). Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso estacionario a tiempo continuo. Se define su función de densidad espectral como

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] \quad (3.2)$$

**Definición 3.5** (Función de densidad espectral, tiempo discreto). Sea  $\{X(t)\}_{t/\Delta_t \in \mathbb{Z}}$  un proceso estacionario a tiempo discreto. Se define su función de densidad espectral como

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2N} \left| \sum_{n=-N}^N X(n\Delta_t) e^{-i\omega n\Delta_t} \right|^2 \right] \quad (3.3)$$

De la defunción se deduce que la función de densidad espectral (FDE) siempre es una función no-negativa

### 3.3. Representación espectral

**Teorema 3.2.** Sean  $f, g \in \ell^2$ , las cuales poseen una transformada de Fourier de la forma

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\ G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt \end{aligned}$$

Entonces

$$F(\omega) \overline{G(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt \quad (3.4)$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) du \quad (3.5)$$

*Demostración.* Nótese que

$$\begin{aligned} |G_T(\omega)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(u) X_T(u - \tau) du \right] d\tau \\ &= \frac{2T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \widehat{R}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} k(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(u - t) du \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(u-t)} g(u - t) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) \overline{G(\omega)} du \\ &= \overline{G(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} f(u) du \\ &= \overline{G(\omega)} F(\omega) \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.** *COROLARIO. Usando  $f \equiv g$  en el teorema anterior*

$$|F(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} k(t) dt \quad (3.6)$$

donde

$$k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u-t)du \quad (3.7)$$

**Teorema 3.4.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso continuo de media cero, débilmente estacionario, y que admite una función de densidad espectral  $h$ , sea  $R$  su función de autocovarianza. Entonces*

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \quad (3.8)$$

**Teorema 3.5** (Wiener-Khinchin). *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}$  débilmente estacionario y estocásticamente continuo, es que exista una función  $F$  que tenga las siguientes propiedades*

- Monótonamente creciente
- $F(-\infty) = 0$
- $F(+\infty) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

**Teorema 3.6** (Wold). *Una condición suficiente y necesaria para que  $\rho$  sea una función de autocorrelación de algún proceso estocástico a tiempo discreto  $\{X(t)\}$  débilmente estacionario es que exista una función  $F$  con las siguientes propiedades*

- Monótonamente creciente
- $F(-\pi) = 0$
- $F(+\pi) = 1$

y tal que para todo  $\tau \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\rho(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega)$$

**Teorema 3.7.** Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, de media 0 y estocásticamente continuo en el sentido de media cuadrática. Entonces, existe un proceso ortogonal  $\{Z(\omega)\}$  tal que, para todo tiempo  $\omega$  admisible, se puede escribir

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega)$$

Donde el proceso  $\{Z(t)\}$  tiene las siguientes propiedades para todo  $\omega$

- $E[dZ(\omega)] = 0$
- $E[|dZ(\omega)|^2] = dH(\omega)$
- $\text{Cov}(dZ(\omega), dZ(\lambda)) = 0 \Leftrightarrow \omega \neq \lambda$

Donde  $dH(\omega)$  la FDE integrada de  $\{X(t)\}$

En virtud del teorema de Wold, se puede tener una variante del teorema de Wiener-Khinchin para procesos a tiempo discreto, razón por la cual tal representación es referida como **representación de Wold-Cramér**.

### 3.3.1. Efecto *alias*

Merecen especial atención los procesos a tiempo discreto que son generados al registrar digitalmente procesos a tiempo continuo, procedimiento referido como *muestreo*. Dicho procedimiento está limitado por la velocidad con que se pueden registrar mediciones, así como por la capacidad para almacenar los datos obtenidos; tales limitaciones deben tomarse en cuenta dentro del diseño experimental para el fenómeno que se estudia, pero no se discutirán aquí.

Sobre el efecto del muestreo, considérese un proceso a tiempo continuo y débilmente estacionario,  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$ , y sea  $\Delta_t \in \mathbb{R}$  arbitrario. Se construye al proceso  $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  como

$$Y(n) = X(n\Delta_t) \tag{3.9}$$

En virtud del teorema 3.7,  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \quad (3.10)$$

Luego entonces puede reescribirse

$$\begin{aligned} Y(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{(2k-1)\pi/\Delta_t}^{(2k+1)\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X(\omega) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)n\Delta_t} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{-\pi/\Delta_t}^{\pi/\Delta_t} e^{i\omega n \Delta_t} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con base a lo anterior, puede definirse para  $\omega \in [-\pi/\Delta_t, \pi/\Delta_t]$

$$dZ_Y(\omega) := \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \quad (3.12)$$

En base al teorema 3.7, se define para  $|\omega| \leq \pi/\Delta_t$

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega) &= \mathbb{E} [|dZ_Y(\omega)|^2] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \right|^2 \right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} [|dZ_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right)|^2] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} dH_X\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta_t}\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

En el segundo paso se usa que  $\{dZ_X\}$  es un proceso ortogonal de media cero. Antes de poder declara que  $dH_Y$  es el espectro integrado del proceso discretizado,

conviene hacer el cambio de variable  $\omega^* := \omega \Delta_t$

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega^*) &= dH_Y(\omega \Delta_t) \frac{d\omega^*}{d\omega} \\ &= \frac{1}{\Delta_t} dH_Y(\omega \Delta_t) \end{aligned}$$

donde  $|\omega^*| \leq \pi$ . Si  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  posee un espectro puramente continuo –de manera equivalentemente, si  $dH_X$  es absolutamente continua– entonces puede escribirse

$$h_Y(\omega^*) = \frac{1}{\Delta_t} \sum_{k \in \mathbb{N}} h_X(\omega + 2k\pi/\Delta_t) \quad (3.14)$$

con  $|\omega| \leq \pi$ . Así entonces  $h_Y$  puede entenderse como una versión *colapsada* de  $h_X$ , fenómeno conocido como **efecto alias**.

### 3.3.2. Filtros lineales

Otra familia de procesos que merecen atención especial son aquellos de la forma son aquellos construidos de la forma

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t-u) du \quad (3.15)$$

con  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso a tiempo continuo, débilmente estacionario, y  $g \in L^2_{\mathbb{R}}$  una función simétrica, por simplicidad. La conexión entre las FDE respectivas puede obtenerse escribiendo

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_X(\omega) \\ Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} dZ_X(\omega) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega(-u)} du \right] dZ_X(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Gamma(\omega) dZ_X(\omega) \end{aligned}$$



donde  $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{i\omega u} du$ . Luego entonces

$$\begin{aligned} dH_Y(\omega) &= E [|dZ_Y(\omega)|^2] \\ &= E [|\Gamma(\omega)dZ_X(\omega)|^2] \\ &= |\Gamma(\omega)|^2 dH_X(\omega) \end{aligned}$$

Se concluye que si ambos procesos tengan FDE bien definidas, se cumple que

$$h_Y(\omega) = |\Gamma(\omega)|^2 h_X(\omega) \quad (3.16)$$

lo cual se esperaba heurísticamente como generalización de la relación entre convolución y tr. de Fourier.

Como notación la función  $g$  será referida como **función de respuesta**, mientras que  $\Gamma$  es la **función de transferencia**. Estos nombre nacen de la interpretación de  $Y$  como el resultado de *pasar* a  $X$  a través de un circuito RC: si  $X$  no fuera un *pulso* unitario de longitud infinitesimal entonces  $Y$  sería  $g$ , y si  $X$  fuera una función periódica entonces  $Y$  sería un pulso unitario.

Conviene destacar que el papel de los filtros se ve incrementando en dos casos particulares:

- En la interpretación como circuito RC, si  $\Gamma$  fuera 1 sobre un intervalo de frecuencias y 0 en otro caso entonces puede decirse que el sistema *filtra* dichas frecuencias. Estos objetos son físicamente posibles de manera aproximada, y son de uso común en el procesamiento de señales para eliminar algunos artefactos
- Considérese una versión más general de  $Y$  como

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-u) dG(u) \quad (3.17)$$

con  $G$  absolutamente continua. Entonces es posible generalizar la teoría de filtros para incluir al operador de retraso, definido como  $B_{\Delta_t}[Y](t) = Y(t - \Delta_t)$ , y con ello se pueden establecer equivalencias con los métodos basados en modelos tipo ARIMA

Por simplicidad, ninguno de estos enfoques será explorado en el presente trabajo.

### 3.4. Estimadores

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso débilmente estacionario cuyo espectro es puramente continuo, y  $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$  un registro de una realización, de tamaño  $N$ . El objetivo de esta sección es calcular la FDE del proceso a partir del registro obtenido. Con vista en la expresión 3.3, un estimador natural es el **periodograma**, definido como

$$I_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=0}^N e^{i\omega t} x(t) \right|^2 \quad (3.18)$$

Se puede demostrar que  $E[I_N(\omega)] = h(\omega)$ , de modo que es un estimador **insesgado**. Sin embargo, también se demuestra que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(I_N(\omega)) = (h(\omega))^2$$

de modo que es un estimador **inconsistente**, lo cual lo descalifica para usarse en la práctica. Para entender por qué el periodograma es inconsistente, conviene escribirlo como

$$I_N(\omega) = 2 \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \hat{R}^*(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (3.19)$$

donde  $\hat{R}^*$  es un estimador para la función de autocovarianza,  $R$ , definido como

$$\hat{R}^*(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-|\tau|} x(t)x(t+|\tau|) \quad (3.20)$$

La expresión 3.19 bien puede verse como una inversión de la relación entre la FDE y la autocovarianza dada por el teorema 3.6. Así mismo, la misma expresión puede interpretarse como que el periodograma es una suma ponderada de los valores de  $\hat{R}^*$ ; mientras más grande es  $\tau$ , menos parejas de puntos cuya distancia es  $\tau$ , y entonces  $\hat{R}^*$  tiene mayor varianza cuanto mayor sea  $\tau$ .

Dado que la inconsistencia del periodograma es porque el periodograma es construido usando estimadores con varianza elevada, la solución natural es evitar tales

componentes. Para ello, escójase una función de pesos,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , defínase

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} g(\tau) \hat{R}^*(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (3.21)$$

Resulta ilustrativo reescribir a  $\hat{h}$  en términos del periodograma

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\theta) \Gamma(\omega - \theta) d\theta$$

donde  $\Gamma(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\omega u} du$ . Se puede demostrar que este tipo de estimadores son asintóticamente insesgado y consistentes.

# Capítulo 4

## Espectro evolutivo

En esta sección se introduce el *espectro evolutivo*, una generalización del espectro de potencias para procesos no-estacionarios cuya estructura cambia lentamente en el tiempo. Esta definición en particular fue presentada por Maurice Priestley en 1965 [64]; la información del presente capítulo puede revisarse con mayor detalle en su libro "*Spectral Analysis and Time Series*" [66], particularmente en el capítulo 11.

Las secciones ??, ..., pueden verse como preliminares de este capítulo y pueden omitirse en una primera lectura, pues lidian con detalles sobre diferentes posibilidades para generalización el espectro.

Es importante mencionar que la sección 4.1 representa la parte central de este capítulo, describiendo un objeto matemático bien definido que lidia con un problema que roza la vaguedad; es por ello que viene acompañado de una discusión que podría ser omitida dentro del contexto global del trabajo, pero que tiene repercusiones importantes en el uso práctico del espectro evolutivo. Por ejemplo, en la sección 4.2 se discute sobre las condiciones bajo las cuales es *posible* estimar el espectro evolutivo del proceso, mientras que la sección 4.3 parte de tales condiciones para describir cómo efectuar la estimación.

Finalmente, en la sección 4.4 se describe una aplicación aparentemente menor del espectro evolutivo, pero que constituye una parte central en el presente trabajo: la detección de estacionariedad débil a partir del espectro de potencias.

## 4.1. Definición del espectro evolutivo

Considérese un proceso estocástico a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  que, por simplicidad, tiene media cero y varianza finita en todo momento, es decir

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0, \text{Var}(X^2(t)) < \infty$$

Se define el *núcleo de covarianza* para el proceso como

$$R(s, t) := \mathbb{E}[\overline{X(t)}X(s)] \quad (4.1)$$

Conviene recordar el caso de un proceso estacionario, en el cual el núcleo de covarianza  $R(t, s)$  puede verse como función de la variable  $|t - s|$ , y en virtud del teorema de Winer-Khintchine acepta una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-s)} dH(\omega) \quad (4.2)$$

donde  $H$  es el espectro integrado del proceso y tiene las propiedades de una función de distribución sobre  $\mathbb{R}$ . Como consecuencia,  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  admite una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (4.3)$$

donde  $Z$  es un proceso estocástico que satisface

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = \begin{cases} dH(\omega_1) & , \text{si } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases} \quad (4.4)$$

En general, se espera tener una generalización que conserve las propiedades anteriores. Con vista a la ecuación 4.2, puede restringirse la atención a procesos no estacionarios que acepten una representación de la forma

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi(\omega; s)} \phi(\omega; t) d\mu(\omega) \quad (4.5)$$

Para alguna medida  $\mu$  definida en  $\mathbb{R}$  y alguna familia de funciones  $\mathbf{F} = \{\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}\}$ ;■  
debido a la interpretación que se le va a dar a este tipo de funciones, la variable

$t \in \mathbf{F}$  será referida como un índice. Una condición a satisfacer es que  $\text{Var}(X^2(t)) = R(t, t) < \infty$ , para lo cual cada  $\phi \in \mathbf{F}$  debe ser cuadrado integrable con respecto a  $\mu$ , es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(\omega; t) d\mu(\omega) < \infty \quad (4.6)$$

Se puede demostrar t(4.11.12) que bajo estas condiciones el proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  acepta una representación de la forma

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega; t) dZ(\omega) \quad (4.7)$$

donde el proceso  $Z$  satisface que

$$\text{Cov}(dZ(\omega_1), dZ(\omega_2)) = \begin{cases} \mu(\omega_1) & , \text{ si } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases} \quad (4.8)$$

Se puede demostrar p(parzen 1959) que si un proceso admite una representación de la forma 4.7 para alguna familia de funciones  $\mathbf{F}$ , entonces tiene admite múltiples representaciones usando diferentes familias de funciones.

Para dar a estas representaciones la interpretación de espectro, conviene usar una familia de funciones que conserve algunas propiedades de los senos y cosenos; por ejemplo, las funciones oscilatorias

**Definición 4.1.** Una función  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice **oscilatoria** si admite una representación de la forma

$$\phi(t) = A(t)e^{i\omega t} \quad (4.9)$$

donde  $A$  es de la forma

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dK(\omega) \quad (4.10)$$

y donde  $|dK(\omega)|$  tiene un único máximo global en  $\omega = 0$

Si una función  $\phi$  es oscilatoria como en la definición 4.1, entonces puede entenderse como una función senoidal *modulada* por una función  $A$ ; no se permite que la función  $A$  sea predominantemente periódica.

Como se mencionó, las expresiones 4.5 y 4.7 pueden ser interpretadas como espectro si se usa una familia  $\mathbf{F}$  de funciones oscilatorias.

$$R(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A(\omega; s)} A(\omega; t) e^{i\omega(t-s)} d\mu(\omega) \quad (4.11)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega; t) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (4.12)$$

**Definición 4.2.** Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso oscilatorio y  $\mathbf{F}$  una familia de funciones oscilatorias de la forma  $\phi(\omega; t) = A(\omega; t) e^{i\omega t}$ . Sea  $\mu$  tal que ... Se define al **espectro evolutivo** del proceso respecto a la familia  $\mathbf{F}$  como

$$dH(t, \omega) := |A(\omega; t)|^2 d\mu(\omega) \quad (4.13)$$

## 4.2. Estimación del espectro evolutivo

En el capítulo anterior se mostró un estimador consistente para el espectro de potencias de un proceso estacionario; dicho estimador usaba la transformada de Fourier discreta, *suavizada* por un filtro lineal (también referido como función ventana). El objetivo de esta sección es aclarar algunos teoremas que permitan usar una técnica similar, la cual requiere imponer algunas condiciones más fuertes que ser oscilatorios.

### 4.2.1. Filtros lineales

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso oscilatorio, no necesariamente estacionario, y sea  $g \in L^2_I$ ; se construye al proceso  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  como<sup>1</sup>

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t - u) du \quad (4.14)$$

Entonces puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t(\omega) e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (4.15)$$

---

<sup>1</sup>En el texto de Priestley se considera un filtro de la forma  $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) X(t - u) e^{-i\omega_0(t-u)} du$  para algún  $\omega_0$  constante. Por simplicidad se considera únicamente el caso  $\omega_0 = 0$

donde  $\Gamma_\bullet$  es la **función de transferencia generalizada** para  $g$  con respecto a la familia  $\mathbf{F}$ , y que es definida como

$$\Gamma_t(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t - u) e^{i\omega u} du \quad (4.16)$$

Un caso particular muy interesante ocurre cuando  $A$ , como función de  $\omega$ , varía lentamente en comparación de  $g$ , la cual decae rápidamente a 0; en tal caso podría decirse que  $\Gamma_\bullet \approx \Gamma$

**Definición 4.3.** Una familia de funciones  $\mathbf{F}$  se dice **semi-estacionaria** si, para todo  $\omega \in \mathbb{R}$ , se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| < \infty \quad (4.17)$$

En cuyo caso se define su **ancho característico**

$$B_{\mathbf{F}} := \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |dK(\omega)| \right]^{-1} \quad (4.18)$$

**Definición 4.4.** Un proceso  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  se dice **semi-estacionario** si admite una representación de la forma 4.7 para alguna familia semi-estacionaria

**Definición 4.5.** Se dice que una función  $u$  es **pseudo- $\delta$  de orden  $\varepsilon$**  con respecto a la función  $v$  si, para cualquier  $k$  existe un  $\varepsilon \ll 1$  tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(x + k) dx - v(k) \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx \right| < \varepsilon \quad (4.19)$$

De manera similar, se define el **ancho de banda** para  $g$  como

$$B_g := \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \quad (4.20)$$

Supóngase que  $g$  está normalizada de modo que

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)| d\omega = 1 \quad (4.21)$$

con  $\Gamma$  la función de respuesta para  $g$ .



**Teorema 4.1.** Sea  $\mathbf{F}$  una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico  $B_{\mathbf{F}}$ , y sea  $g$  una función normalizada como en 4.21 y cuyo ancho de banda es  $B_g$ . Entonces, para cualesquiera  $t, \omega \in \mathbb{R}$  se cumple que  $e^{i\omega t}dK(\omega)$  es una función pseudo- $\delta$  de orden  $B_g/B_{\mathbf{F}}$  con respecto a  $g$

*Demostración.* Suponiendo que  $\Gamma$  sea una vez derivable, su expansión de Taylor alrededor de  $k$  es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\theta + k) dK(\omega) = \Gamma(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega)$$

para algún  $\nu \in (0, \theta)$ . Respecto al segundo sumando, puede observarse que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |\Gamma'(k + \nu)| |dK(\omega)| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] |dK(\omega)| \\ &\leq \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \end{aligned}$$

Usando la conexión entre  $g$  y  $\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} g(u) du \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d}{d\omega} e^{i\omega u} g(u) \right) du \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\omega u} g(u) du \end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \theta \Gamma'(k + \nu) dK(\omega) &\leq \left[ \sup_{\omega} |\Gamma'(\omega)| \right] \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |\theta| |dK(\omega)| \right] \\
&\leq \left[ \sup_{\omega} \left| \int_{-\infty}^{\infty} iu e^{i\omega u} g(u) du \right| \right] B_{\mathbf{F}}^{-1} \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} \left[ \sup_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |u| |g(u)| du \right] \\
&\leq B_{\mathbf{F}}^{-1} B_g
\end{aligned}$$

□

Con el teorema anterior a la mano se puede declarar formalmente la idea de que  $A$  varía más lentamente que  $g$

**Teorema 4.2.** *Sea  $\mathbf{F}$  una familia semi-estacionaria con ancho de banda característico  $B_{\mathbf{F}}$ , sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario, y sea  $g$  un filtro normalizado como en 4.21 y cuya función de transferencia generalizada con respecto a  $\mathbf{F}$  es  $\Gamma_{\bullet}$ . Si  $g$  es elegida de tal modo que  $B_g/B_{\mathbf{F}} < \varepsilon$ , entonces para cualesquiera  $t, \omega$  se cumple que*

$$|\Gamma_t(\omega) - A(\omega; t) \Gamma(\omega)| < \varepsilon \quad (4.22)$$

*Demostración.* Por la mera definición de  $\Gamma_{\bullet}$  (expresión 4.16) se sabe que

$$\Gamma_t(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t - u) e^{i\omega u} du$$

Si se sustituye a  $A$  en términos de  $dK$  (ver definición 4.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma_t(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) A(\omega; t-u) e^{i\omega u} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta(t-u)} dK(\theta) \right] e^{i\omega u} du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i\theta t} e^{i(\omega-\theta)u} dK(\theta) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{i(\omega-\theta)u} du \right] dK(\theta) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta)
\end{aligned}$$

Usando el lema 4.1 junto al hecho que  $B_g/B_F < \varepsilon$ , se puede escribir que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} \Gamma(\omega - \theta) dK(\theta) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\
&= \left| \Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta t} dK(\theta) \right| \\
&= |\Gamma_t(\omega) - \Gamma(\omega) A(\omega; t)|
\end{aligned}$$

En el último renglón se ha reemplazado nuevamente a  $A$  en términos de  $dK$  □

**Teorema 4.3.** *Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso semi-estacionario con ancho de banda característico  $B_X$ , sea  $g$  un filtro normalizado como en 4.21 y cuyo ancho de banda es  $B_g$  y cuya función de respuesta es  $\Gamma$ . Sea  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso definido como 4.15.*

*Sea  $\mathbf{F}^*$  una familia semi-estacionaria cuyo ancho de banda característico es  $B_X$  o es muy parecido a  $B_X$  (lo cual es posible por cómo se definió  $B_X$ ). Se cumple que*

$$E[|Y(t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 dH^*(\omega; t) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.23)$$

*donde  $H^*$  es el espectro integrado respecto a la familia  $\mathbf{F}^*$  y  $\mathcal{O}(\epsilon)$  es un término que puede hacerse arbitrariamente pequeño si  $B_g$  es suficientemente pequeño respecto a  $B_X$*

*Demostración.* Usando la expresión 4.15 para este caso particular, puede escribirse

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) A^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \quad (4.24)$$

donde  $\omega^*$ ,  $A^*$  y  $Z^*$  están definidos respecto a la familia  $\mathbf{F}^*$ . Nótese que, debido a que los  $dZ$ 's son ortogonales

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \mathbb{E} \left[ \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_t^*(\omega; t) e^{i\omega t} dZ^*(\omega) \right] \\ &= \dots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Si se elige a  $g$  de modo que  $\frac{B_g}{B_X} < \varepsilon$ , en virtud del teorema 4.2 puede escribirse

$$\Gamma_t^*(\omega; t) = A^*(\omega; t) \Gamma(\omega) + R(\omega; t) \quad (4.25)$$

con  $|R(\omega, t)| < \varepsilon$ . Luego entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|Y(t)|^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_t^*(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t) \Gamma(\omega) + R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t) \Gamma(\omega)|^2 d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t) \Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} A^*(\omega; t) \Gamma(\omega) \overline{R(\omega; t)} d\mu^*(\omega) + \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

El cuarto sumando satisface claramente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\omega; t)|^2 d\mu^*(\omega) < \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu^*(\omega) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.26)$$

Respecto al segundo sumando, nótese que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{A^*(\omega; t) \Gamma(\omega)} R(\omega; t) d\mu^*(\omega) &< \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| |R(\omega; t)| d\mu^*(\omega) \\ &< \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \end{aligned}$$

Una cota similar puede hallarse para el tercer sumando. Falta demostrar que la cota permanece finita cuando  $B_g \rightarrow 0$ , lo cual debería lograrse definiendo el conjunto

$$\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} \mid |\Gamma(\omega)| |A^*(\omega; t)| \leq 1\} \quad (4.27)$$

y luego, claramente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) = \int_{\Omega} \mu^*(\omega) + \int_{\Omega^c} |A^*(\omega; t)| |\Gamma(\omega)| d\mu^*(\omega) \quad (4.28)$$

el primer sumando es clarametne finito y no depende de  $g$ , mientras que el segundo debería ser finito [?] ya que  $\Gamma$  está normalizada.  $\square$

### 4.3. Estimador de doble ventana

Para esta sección se considera un proceso a tiempo continuo  $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  y una muestra del mismo de longitud  $T$  (o equivalentemente un proceso  $\{X(t)\}_{t \in [t, T]}$ ), suficientemente larga. El objetivo en esta sección es construir un estimador para el espectro evolutivo  $dH(\omega; t)$ . Por simplicidad, se supondrá que la medida  $\mu$  es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, y entonces puede escribirse

$$h(\omega, t) := dH(\omega; t) \quad (4.29)$$

Para efectuar la estimación del espectro se hará uso del teorema 4.2, para lo cual se necesita un filtro  $g$  normalizado según 4.21 y cuyo ancho de banda,  $B_g$ , satisface

$$B_g \ll B_X \ll T \quad (4.30)$$

Se construye entonces a  $U$ , una versión filtrada de  $X$  usando a  $g$

$$U(t) = \int_{t-T}^t g(u)X(t-u)du \quad (4.31)$$

Bajo la condición 4.30, la integral que define a  $U$  puede extenderse a todo  $\mathbb{R}$  sin cambiar mucho su valor (excepto cerca de 0 y  $T$ ), e incluso se llega a ser exacta si  $g$  es 0 fuera de un intervalo pequeño alrededor de 0. Entonces, en virtud del teorema 4.3 aplica de manera aproximada, y entonces se cumple que

$$\mathbb{E} [|U(\omega; t)|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \quad (4.32)$$

**Proposición 4.1.** *Dadas las condiciones, y si  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es un proceso normal cuyo que admite un espectro evolutivo uniformemente continuo, se tiene que*

$$\text{Var}(|U(\omega; t)|^2) \approx \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t) d\omega \right]^2 \quad (4.33)$$

La demostración al teorema anterior puede ahllarse en el artículo de Maurice Priestley *Design Relations for Non-Stationary Processes* [65], sección 3.

Un resultado que es muy análogo a la estimación del espectro en el caso de estacionariedad. Siguiendo con la analogía, este problema es resuelto al usar un filtro  $w_\tau$  que satisfaga las siguientes propiedades

- $w_\tau(t) \geq 0$  para cualesquiera  $t, \tau$
- $w_\tau(t) \rightarrow 0$  cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , para todo  $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(t) dt = 1$  para todo  $\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(t))^2 dt < \infty$  para todo  $\tau$
- $\exists C \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\lambda)|^2 d\lambda = C$

donde  $W_\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} w_\tau(t) d\lambda$ . Se define el segundo estimador

$$V(t) = \int_{T-t}^t w_\tau(u) |U(t-u)|^2 du \quad (4.34)$$

El supuesto sobre que  $g$  decaiga lejos de 0, aplicado ahora a  $w_\tau$ , permite reemplazar el intervalo de integración que define a  $V$  por  $\mathbb{R}$ .

De manera sencilla puede verse que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V(t)] &= \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) |U(t-u)|^2 du \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) \mathbb{E}[|U(t-u)|^2] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \right] du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) |\Gamma(\omega)|^2 h(\omega, t-u) d\omega du + \mathcal{O}(B_g/B_X) \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) h(\omega, t-u) du \right] d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X) \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^2 \bar{h}(\omega, t) d\omega + \mathcal{O}(B_g/B_X)
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{h}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_\tau(u) h(\omega, t-u) du \quad (4.35)$$

Es demostrado en Priestley [1966?] que

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |W_\tau(\omega)|^2 d\omega \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (4.36)$$

donde

$$\tilde{h}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\omega_0, t) (w_\tau(u))^2 du}{\int_{-\infty}^{\infty} (w_\tau(u)) du} \quad (4.37)$$

Aún más, si se usa la propiedad de en el límite de  $\tau W_\tau$  se puede escribir

$$\text{Var}(V(t)) \approx \tilde{h}^2(\omega_0, t) \frac{C}{\tau} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(\omega)|^4 d\omega \right] (1 + \delta(0, \omega_0)) \quad (4.38)$$

Una aproximación muy similar puede hacerse respecto al segundo término, de modo que  $\tilde{h} \approx h$  y  $\bar{h}^2 \approx h^2$ . Tales aproximaciones serán mejores en tanto las ventanas  $w_\tau$  y  $W_\tau$  sean más cercanas a funciones tipo  $\delta$  de Dirac. Dicho esto, se pueden hacer las siguientes aproximaciones, un poco más arriesgadas:

- $E \left[ \hat{h}(t, \omega) \right] \approx h(t, \omega)$
- $\text{Var} \left( \hat{h}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{\tau} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^4 d\theta$

## 4.4. Prueba de Priestley-Subba Rao

La prueba de estacionariedad propuesta por Priestley y Subba Rao [67] consiste en probar la hipótesis de que el espectro evolutivo efectivamente cambia en el tiempo. El proceso consiste en *calcular* el logaritmo del espectro evolutivo para algunos tiempos y frecuencias puntuales, para lo cual se usa el estimador de doble ventana, y posteriormente usar un análisis ANOVA para verificar si dichas cantidades tienen el mismo valor esperado –recordando que el estimador de doble ventana es asintóticamente consistente.

Sea  $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  un proceso semi-estacionario y sea  $\{x_t\}_{t=0, \dots, N}$  un conjunto de observación, cuya frecuencia de muestreo es  $\Delta_t = 1$  por simplicidad. Usando estos datos se construye el estimador de doble ventana,  $\hat{h}$ ; para ello se eligen como parámetros las funciones  $g_{\kappa}$  y  $w_{\tau}$ , que dependen a su vez de los parámetros  $\kappa$  y  $\tau$ , y por consecuencia a sus respectivas tr. de Fourier  $\Gamma_{\kappa}$  y  $W_{\tau}$ . Bajo las condiciones descritas en la sección anterior, se satisface que

$$E \left[ \hat{h}(t, \omega) \right] \approx h(t, \omega)$$

$$\text{Var} \left( \hat{h}(t, \omega) \right) \approx \frac{C}{N} h^2(t, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma^4(\theta)| d\theta$$

donde  $C = \lim_{T \rightarrow \infty} T \int_{-\infty}^{\infty} |W_T(\lambda)| d\lambda$ . Como es habitual en el estudio del espectro de potencias, se propone la cantidad

$$Y(t, \omega) = \log \left( \hat{h}(t, \omega) \right) \tag{4.39}$$



que, por ser  $\log$  una función inversible y derivable, cumple que

$$\begin{aligned} E[Y(t, \omega)] &\approx \log(h(t, \omega)) \\ \text{Var}(Y(t, \omega)) &\approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^4 d\theta \end{aligned}$$

Cabe destacar que la varianza de  $Y$  no es independiente de  $h$  en el sentido formal, sino que sólo es *aproximadamente independiente* pues depende en mayor medida de la forma de  $\hat{h}$  que del mismo  $h$ . Esto era de esperarse, ya que el estimador de doble ventana fue diseñado para exagerar el *peso* de la información local. En otra dirección, la independencia aproximada sugiere que  $Y$  puede escribirse como

$$Y(t, \omega) = \log(h(t, \omega)) + \varepsilon(t, \omega) \quad (4.40)$$

El que la varianza de  $Y$  sea aproximadamente constante en todos los tiempos y frecuencias lo hace una excelente elección para verificar que el espectro evolutivo es constante en el tiempo. Dos problemas respecto a la expresión 4.40 son (1) la covarianza de  $\varepsilon$  entre tiempos y frecuencias y (2) computacionalmente sólo es posible evaluar a  $Y$  sobre una malla de puntos en tiempo y frecuencia.

Sea una malla de puntos en el tiempo y las frecuencias, equiespaciado en el tiempo con distancia  $\delta_t$  y en las frecuencias con distancia  $\delta_{\omega}$ . Es demostrado en [65] que si  $\delta_{\omega}$  o  $\delta_t$  son suficientemente grandes como para que se cumpla alguna de las condiciones en 4.41, entonces los valores de  $Y$  sobre la cuadrícula son aproximadamente no-correlacionados.

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^2 |\Gamma_{\kappa}(\theta + \delta_{\omega})|^2 d\theta &\approx 0 \\ \frac{1}{\delta_t} \int_{-\infty}^{\infty} |t| |w_{\tau}(t)| dt &\approx 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Cov}(Y(t, \omega), Y(t, \omega_0)) \approx 0 \quad (4.41)$$

Así entonces, sea  $\{(t_i, \omega_j) \in \mathcal{T} \times [-\pi, \pi] | i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\}$  la cuadrícula descrita, con  $\delta_t = |t_i - t_{i+1}|$  y  $\delta_{\omega} = |\omega_j - \omega_{j+1}|$ . Se define el estimador

$$Y_{i,j} = \log(\hat{h}(t_i, \omega_j)) \quad (4.42)$$

el cual tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} Y_{i,j} &\approx \log(h(t_i, \omega_j)) + \varepsilon_{i,j} \\ E[\varepsilon_{i,j}] &\approx 0 \\ \text{Var}(\varepsilon_{i,j}) &\approx \frac{C}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma_{\kappa}(\theta)|^4 d\theta \\ \text{Cov}(\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i_0, j_0}) &\approx 0 \Leftarrow (i, j) \neq (i_0, j_0) \end{aligned}$$

Una vez definido un estimador adecuado para detectar la estacionariedad débil, conviene escribir explícitamente las condiciones para tal detección. La estacionariedad débil, en términos del espectro evolutivo  $h$ , puede expresarse como

$$H_{E_1} : h(t_0, \omega_j) = h(t_1, \omega_j) = \dots = h(t_I, \omega_j) \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J$$

condición que puede reescribirse<sup>2</sup> en términos de  $Y$ , en su versión discreta

$$H_{E_2} : E[Y_{0,j}] = E[Y_{1,j}] = \dots = E[Y_{I,j}] \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J$$

la cual, a su vez, puede reescribirse como

$$H_{E_3} : E[\varepsilon_{0,j}] = E[\varepsilon_{1,j}] = \dots = E[\varepsilon_{I,j}] \text{ , para } j = 1, 2, \dots, J$$

Sin embargo, la condición  $H_{E_3}$  es una consecuencia directa de las propiedades de  $Y$  si  $H_{E_2}$  es cierta; este *juego* de equivalencias pierde consistencia si resulta que  $H_{E_3}$  fuera rechazada, lo cual implicaría en una contradicción.

El objetivo de la prueba puede fijarse en verificar efectivamente ocurre la contradicción referida, en cuyo caso se podrá concluir que el proceso **no** es débilmente estacionario. Con base a la forma de  $H_{E_2}$ , la prueba puede formularse en términos de un análisis ANOVA de dos factores, el cual parte de un modelo general

$$H_0 : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$$

donde  $\varepsilon$  es como se definió anteriormente. Dentro del contexto, las cantidades involucradas pueden interpretarse como

---

<sup>2</sup> $H_{E_1}$  y  $H_{E_2}$  son equivalentes en cuanto a la decisión que producen

**Cuadro 4.1:** Estadísticos involucrados en la prueba PSR

Descripción	Estadístico	Gr. de libertad
Efecto tiempo	$S_T = J \sum_{i=1}^I (Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$I - 1$
Efecto frecuencia	$S_F = I \sum_{j=1}^J (Y_{\bullet,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$J - 1$
Interacción	$S_{I+R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{i,\bullet} - Y_{\bullet,j} + Y_{\bullet,\bullet})^2$	$(I - 1)(J - 1)$
Total	$S_0 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (Y_{i,j} - Y_{\bullet,\bullet})^2$	$IJ - 1$
Prom. tiempo	$Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	
Prom. frecuencia	$Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$	
Prom. general	$Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$	

$\mu$  Promedio de  $h$  sobre tiempo y frecuencia

$\alpha$  Efecto al variar el tiempo

$\beta$  Efecto al variar la frecuencia

$\gamma$  Efecto no lineal de tiempo y frecuencia (*interacción*)

La diferencia entre  $\gamma$  y  $\varepsilon$  consiste en que se conocen (por diseño) la media y varianza de  $\varepsilon$ , y se espera que siga una distribución normal si se cuentan con suficientes puntos; en contraparte, no se ha supuesto nada sobre  $\gamma$ .

Ahora bien, la hipótesis  $H_{E_2}$  puede reescribirse para contrastarse contra  $H_0$  como

$$H_A : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{i,j}$$

Por simplicidad, conviene considerar un paso intermedio

$$H_{\text{inter}} : Y_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{i,j}$$

Como es usual con los ANOVA, se definen las sumas de cuadrados dentro de los grupos y entre los grupos (cuadro 4.1), las cuales siguen distribuciones  $\chi^2$ . Al probar  $H_0$  contra  $H_{\text{inter}}$  se usa el estadístico de prueba  $S_{I+R}/\sigma^2$ , mientras que al probar  $H_{\text{inter}}$  contra  $H_A$  se usa  $S_T/\sigma^2 = 0$ .

Cabe mencionar que en la formulación original de la prueba de PSR se exploran algunas otros modelos. Por ejemplo, si se acepta  $H_{\text{inter}}$  entonces el proceso es refe-

rido como **uniformemente modulados** y necesariamente pueden expresarse como  $X(t) = S(t)X_0(t)$ , donde  $\{X_0(t)\}_{t \in \mathcal{T}}$  es un proceso débilmente estacionario.

---

**Algoritmo 1:** Prueba de Priestley-Subba Rao

---

**Datos:**  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$   
**Resultado:** p-valores para  $S_{I+R} = 0$ ,  $S_T = 0$ ,  $S_F = 0$

```

1  $X \leftarrow (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 
2 para  $i = 1, \dots, J$  hacer
3    $U[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T g(u) X[t-u] \exp(-i\omega_j u)$ 
4 para  $i = 1, \dots, J$  hacer
5    $\hat{f}[i, j] \leftarrow \sum_{u=t-T}^T w_\tau(u) |U[i-u, j]|^2$ 
6  $Y \leftarrow \log \hat{f}$ 
7 para  $i = 1, \dots, I$  hacer
8    $Y_{i,\bullet} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$ 
9 para  $j = 1, \dots, J$  hacer
10   $Y_{\bullet,j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Y_{i,j}$ 
11  $Y_{\bullet,\bullet} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J Y_{i,j}$ 
12 si  $S_{I+R} > 0$  entonces
13   Aceptar  $H_0$ 
14   devolver
15 si  $S_T > 0$  entonces
16   Aceptar  $H_1$ 
17   devolver
18 Aceptar  $H_2$ 

```

---



# Capítulo 5

## Marco conceptual del problema

Para poder identificar marcadores significativos para el diagnóstico del deterioro cognitivo, es posible usar la técnica de electroencefalografía, que es usada para medir cierto tipo de actividad cerebral y que posiblemente esté asociada al deterioro cognitivo. En esta sección se presenta el deterioro cognitivo en adultos mayores, con énfasis en su caracterización.

### 5.1. Psicología

La **demencia** es, según el Manual diagnóstico y estadístico de trastornos mentales, en su quinta versión (DSM-V, por sus siglas en inglés)

Un síndrome que consiste en el desarrollo de déficit cognoscitivos suficientemente graves como para interferir significativamente en las actividades laborales y sociales, respecto al nivel de actividad previo [42]. Los sujetos con demencia tienen una baja capacidad para aprender información nueva y suelen olvidar lo aprendido anteriormente, siendo éste el síntoma más prominente.

Cuando un sujeto presenta cambios marcados en su conducta, es relativamente fácil identificar la demencia; caso contrario es el diagnóstico temprano de la misma, el cual es importante para un tratamiento adecuado que revierta o desacelere el avance de este síndrome [36].

Considerando a los **adultos mayores** –entendidos como individuos de 60 años o más– conviene mencionar que el envejecimiento es determinado por una serie de

procesos moleculares, celulares, fisiológicos y psicológicos que conducen directamente al deterioro de funciones cognitivas, específicamente atención y memoria [57]. La funcionalidad durante esta etapa se relaciona con el estilo de vida, los factores de riesgo, el acceso a la educación y las acciones para el cuidado de la salud realizadas en edades más tempranas [77].

Al momento de diagnosticar deterioro cognitivo en adultos mayores, deben tenerse en cuenta el envejecimiento normal y la posible **pseudodemencia depresiva**, ya que presentan características similares. Con respecto a ésta última, definida como *un trastorno del afecto y que produce un aparente deterioro cognitivo* [42], aunque no se suele considerar como un tipo de demencia.

Así mismo, para realizar un diagnóstico temprano se considerará como etapa precursora de la demencia al **deterioro cognitivo leve**, definido como

Una alteración adquirida y prolongada de una o varias funciones cognitivas, que no corresponde a un síndrome focal y no cumple criterios suficientes de gravedad para ser calificada como demencia [71].

dentro del presente escrito, este síndrome será manejado como **posible deterioro cognitivo** (PDC) amén de que esta etapa de daño se considera reversible.

### 5.1.1. Psicometría

En psicología los instrumentos de medición comunes son las **pruebas neuropsicológicas**, entendidas como muestras de alguna conducta de interés a las que se asignan puntajes para comparar cuantitativamente a los sujetos [4]. Es a través de estas herramientas que se declaran formalmente las deficiencias cognitivas o conductuales, así como su severidad y clasificación.

Las habilidades que se miden usando este tipo de pruebas se suelen agrupar en áreas o **dominios**: atención, lenguaje, cálculo, memoria y aprendizaje, percepción, motricidad, funciones somatosensoriales, habilidades espaciales, funciones ejecutivas, entre otros. La clasificación de dominios suele variar según algunos autores.

En el estudio realizado por Vázquez-Tagle en 2016 [85] se investigó el deterioro cognitivo en el estado de Hidalgo, para lo cual se aplicó la siguiente batería de pruebas neuropsicológicas:

- Estado cognoscitivo general

- Evaluación Neuropsicológica (**Neuropsi**) [55]
- Mini Mental State Examination (**MMSE**) [86]
- Detectar pseudodemencia depresiva y ansiedad
  - Escala breve para la detección de ansiedad del anciano (**SATS**) [84]
  - Escala de Depresión Geriátrica (**GDS**) [87, 27]
- Detectar cambios en la vida cotidiana
  - Escala sobre las actividades cotidianas de la vida diaria (**KATZ**) [76]

## 5.2. Fisiología

El registro de la actividad eléctrica en el cerebro, referido como **electroencefalograma** (EEG), está tradicionalmente relacionado con la exploración de procesos mentales y sus trastornos; como ejemplo se puede citar que Hans Berger, reconocido como el inventor del EEG, reportó usar dicha técnica en 1932 para estudiar posibles cambios en un paciente con Alzheimer [53].

El mecanismo base para la propagación de campos eléctricos en las neuronas, depende de la capacidad de la membrana celular para mantener un equilibrio estable de iones con el medio extracelular. Dicho fenómeno fue ampliamente estudiado por Hodgkin y Huxley y puede describirse brevemente de la siguiente manera: cuando existe un desequilibrio puntual y súbito en la concentración extracelular de iones, se bombean iones a través de la membrana para restablecer el equilibrio en tal punto; esta acción genera desequilibrios secundarios en regiones vecinas de la membrana, que a su vez activan mecanismos similares. Como consecuencia, la perturbación en el potencial de membrana se propaga a lo largo de ésta y se genera la transmisión de impulsos nerviosos en neuronas. Un excelente referente sobre el tema es el libro por Ermentrout [24].

El EEG mide indirectamente la transmisión de impulsos nerviosos entre neuronas de la corteza cerebral, de modo que constituye una medida de la *cantidad* de actividad cerebral. La actividad registrada en el EEG consta principalmente de la actividad postsináptica de las neuronas piramidales en la corteza cerebral; éstas se encuentran altamente conectadas entre sí y forman capas densas.





**Figura 5.1:** Ejemplos de ondas cerebrales encontradas en el EEG. Imagen tomada de Encyclopædia Britannica, versión en línea [13].

### 5.2.1. Polisomnografía

Usualmente estos registros de EEG muestran una actividad oscilatoria continua y cambiante, cuya frecuencia se considera entre 0.5 y 100 Hz. Su composición está fuertemente relacionada con el grado de actividad mental mostrando diferencias claras durante vigilia y sueño, o durante quietud y concentración [16].

Aunque el EEG es irregular la mayor parte del tiempo, también muestran patrones relativamente organizados conocidos como **ondas cerebrales**. Las ondas cerebrales más comunes y estudiadas se tipifican en cuatro grupos según su *frecuencia*: alfa, beta, gamma, delta, theta. En la figura 5.1 se representa un arquetipo visual de cada tipo de onda.

Para realizar el registro *per se* en una forma estandarizada y comparable, se definen arreglos llamados **montajes**, entendidos como el conjunto de (1) los sitios donde se colocan los electrodos de registro y (2) la manera en que los electrodos de registro están conectados entre sí.

En el trabajo de Vázquez Tagle [85] se usa un montaje *referencial*, en el cual

**Cuadro 5.1:** Generalidades sobre ondas cerebrales

Tipo de onda	Frecuencia [Hz ]	Ubicación usual	Condiciones usuales
Delta	0.5 – 3.5		Síndromes focales. Sueño profundo en infantes
Theta	3.5 – 7	P, T	Durante estrés emocional En infantes
Alfa	7 – 12	F, P, O	Vigilia en reposo con ojos cerrados
Beta	12 – 30	P, F	Actividad mental en adultos
Gamma	30 – 100		

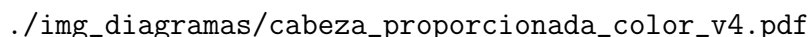
Se abrevian los lóbulos cerebrales: F=frontal, P=parietal, T=temporal, O=occipital.

los electrodos se conectan en paralelo con un electrodo de referencia cuya actividad eléctrica es constante y negligible (lóbulos de las orejas, electrodos cortocircuitados A1, A2); los electrodos fueron colocados según el **Sistema 10–20** [31, 35]. Dicho sistema define los sitios según una cuadrícula construida respecto a distancias relativas entre varios puntos de referencia: el *inion*, protuberancia en la región posterior del cráneo, el *nación*, unión del hueso frontal y los huesos nasales, y el *punto preauricular*, ubicado arriba del cartílago que protege el canal auditivo.

Debido a que las neuronas en la corteza cerebral tienen orientaciones muy diversas y a que disparan de manera asíncrona, además de que el cerebro se encuentra cubierto por las muchas capas descritas anteriormente, las señales captadas por los electrodos deben ser amplificadas analógicamente antes de ser registradas digitalmente. A ello hay que añadir la difusión generada por las meninges, el líquido cefalorraquídeo y el cráneo.

Un efecto colateral de amplificar la señal es la inclusión de **ruido**, entendido como señales que son registradas de manera no deseada; como ejemplo, los músculos faciales medianamente contraídos generan campos eléctricos con frecuencia de 100 Hz. Este tipo de ruido *persistentes* son eliminados usando un filtro que *elimine* los componentes de frecuencia específicos. Los ruidos de duración corta son referidos como **artefactos**; como ejemplo, pestañear voluntariamente durante un episodio de quietud mental interrumpe las ondas alfa por cerca de dos segundos.

Adicionalmente al registro del EEG, la PSG contempla el registro de algunas otras *variables fisiológicas* como respiración, ritmo cardíaco, temperatura, entre otros. En

The figure is a diagram illustrating the placement of EEG electrodes according to the 10-20 system. It shows a top-down view of a human head with various electrode positions marked. The text './img\_diagramas/cabeza\_proporcionada\_color\_v4.pdf' is visible within the diagram area, likely indicating the source of the image.

./img\_diagramas/cabeza\_proporcionada\_color\_v4.pdf

**Figura 5.2:** Colocación de electrodos según el sistema 10–20

el estudio por Vázquez Tagle y colaboradores, el registro de PSG incluyó registros de actividad ocular (**electrooculograma**, EOG) y tono muscular (**electromiograma**, EMG), según las recomendaciones de la AASM para clasificar las etapas de sueños. La ubicación estos últimos electrodos es ilustrada en la figura 5.3.

Para interpretar los registros de EOG (canales LOG, ROG) se puede entender al ojo como una batería cuyos polos son la retina y la pupila, y que genera pequeñas variaciones en el campo eléctrico cuando se mueve; el registro consiste en la proyección del movimiento sobre el eje que forman los electrodos. Los registros de EMG (canal EMG) admiten una interpretación más *sencilla*, ya que los músculos son activados directamente por señales eléctricas: el tono muscular es la actividad muscular basal, y se relaciona con la velocidad con que los músculos pueden *salir* del reposo.

### 5.2.2. Estructura del sueño

Se entiende al sueño como un proceso vital, con una estructura característica, y que en el ser humano presenta las siguientes propiedades [14]:

1. Disminución de conciencia y reactividad a estímulos externos
2. Fácilmente reversible, a diferencia de estados patológicos como estupor y coma

./img\_diagramas/emg\_eog\_v4.pdf

**Figura 5.3:** Colocación de electrodos para registrar actividad ocular y tono muscular

3. Inmovilidad y relajación muscular
4. Periodicidad típica circadiana (diaria)
5. Los individuos adquieren una postura estereotipada
6. La privación induce alteraciones conductuales y fisiológicas, además de que genera una *deuda* acumulativa

La duración del sueño es determinada en gran parte por la edad; el recién nacido duerme entre 14 y 18 horas, el lactante entre 12 y 14 horas, el niño en etapa escolar entre 11 y 12 horas y en la edad adulta, la mayoría duerme entre 7 y 8 horas por noche [20]. Paralelamente el sueño no es un proceso homogéneo, sino que tiene una estructura por etapas con rasgos electroencefalográficos y fisiológicos distintivos.

Para su estudio, el sueño se divide en dos etapas: N y R. La **fase N**, se caracteriza por movimientos oculares lentos, tono muscular que decrece constantemente, actividad cerebral que recuerda al reposo, y la presencia de husos de sueño y complejos K; en base a ello se divide en las sub-fases N1, N2, N3.

Durante la **fase R** el tono muscular disminuye (excepto para los músculos respiratorios y los esfínteres), la frecuencia cardíaca y respiratoria se vuelve irregular, y el sujeto exhibe movimientos oculares rápidos (MOR); en base a lo cual la fase R es conocida como **sueño MOR**. En el EEG, aparecen ondas rápidas de bajo voltaje, irregulares, y que recuerdan la actividad durante el estado de alerta; estos patrones no interrumpen el sueño sino que, contrariamente, incrementan el umbral

**Cuadro 5.2:** Criterios para la clasificación de etapas de sueño según la AASM

Etapa		Características del EEG	Movimientos oculares	Tono muscular
Vigilia	W	Ritmo alfa en > 50 % de la época en la región occipital	No	Alto
NMOR 1	N1	Cambio de alfa por AABFM, atenuación del ritmo dominante. Ondas agudas	Lentos	<W
NMOR 2	N2	Husos de sueño y complejos K en la primera mitad de la época. AABFM	No	<W, >R
NMOR 3	N3	Ondas lentas (0.5–2 Hz, > 75 $\mu$ V) en > 20 % de la época. Husos de sueño	No	<N2, $\approx$ R
MOR	R	Actividad baja amplitud y frecuencias mixtas. Ondas 'saw-tooth'	MOR's	Bajo

Se abrevia AABFM=Actividad de Amplitud Baja y Frecuencias Mixtas

para estímulos externos, motivo por el cual esta fase también es referida como **sueño paradójico**. Cabe mencionar que durante el sueño MOR se producen la mayoría de las ensoñaciones (referidas coloquialmente como *sueños*), y que la mayoría de los pacientes que despiertan durante esta fase suelen recordar vívidamente el contenido de sus ensoñaciones [72].



`./img_ejemplos/MJNN_epoca_stam.pdf`

**Figura 5.4:** Registro de polisomnograma durante sueño MOR. Marca de calibración: vertical, 10  $\mu$ V, horizontal, 1 segundo



# Capítulo 6

## Metodología

### 6.1. Participantes

Los sujetos fueron elegidos usando un muestreo *no probabilístico por conveniencia* bajo los siguientes criterios de inclusión:

- Edad entre 60 y 85 años
- Diestros (mano derecha dominante)
- Sin ansiedad, depresión ni síndromes focales
- No usar medicamentos o sustancias para dormir
- Firma de consentimiento informado
- Voluntario para el registro de PSG

Un total de 14 adultos mayores cumplieron los criterios de inclusión. Estos participantes fueron sometidos a una batería de pruebas neuropsicológicas para determinar su estado cognoscitivo general (Neuropsi, MMSE), descartar cuadros depresivos (GDS, SATS) y cambios en la vida cotidiana (KATZ). En base a las pruebas se determinó que, objetivamente, 10 de los voluntarios no padecen depresión ni ansiedad, además de que no presentan afectaciones significativas en la vida diaria.

Para su análisis, los 10 participantes se dividieron en dos grupos en base a su estado cognoscitivo: control (CTL) y con Probable Deterioro Cognitivo (PDC). Para esta clasificación se dio mayor atención al puntaje de Neuropsi, estandarizado según



**Cuadro 6.1:** Puntajes de corte para la prueba Neuropsi

Escolaridad	Edad	Sano		Deterioro cognitivo		
		Alto	Normal	Leve	Moderado	Severo
Nula	16 – 30	92	60	45	30	14
	31 – 50	95	68	54	41	28
	51 – 65	91	59	44	28	13
	66 – 85	76	48	34	20	6
1 – 4 años	16 – 30	105	73	58	42	27
	31 – 50	105	81	69	58	46
	51 – 65	98	77	67	57	47
	66 – 85	90	61	46	32	18
5 – 9 años	16 – 30	114	102	97	86	75
	31 – 50	118	106	101	90	79
	51 – 65	111	98	91	79	67
	66 – 85	97	80	72	56	39
10 – 24 años	16 – 30	115	103	98	87	77
	31 – 50	113	102	97	88	78
	51 – 65	102	93	88	80	72
	66 – 85	92	78	72	59	46

Fuente: Ardila y Ostrosky [4]

edad y escolaridad (cuadro 6.1). El puntaje de MMSE se le otorgó menos importancia como clasificador debido a que tiene baja sensibilidad para el diagnóstico de deterioro cognitivo leve [4], y baja especificidad para individuos con escolaridad muy baja o muy alta [56]. Cabe mencionar que se entiende por especificidad a la probabilidad de un verdadero negativo, es decir que un individuo sin deterioro cognitivo obtenga un resultado de no-deterioro.

**Cuadro 6.2:** Datos generales de los participantes

	Sexo	Edad	Escol.	Neuropsi	MMSE	SATS	KATZ	GDS
<b>Grupo CTL</b>								
VCR	F	59	12	107	29	21	0	3
MJH	F	72	9	113	30	18	0	0
JAЕ	F	78	5	102	28	19	0	5
GHA	M	65	9	107.5	30	23	0	7
MFGR	F	67	11	115	30	18	0	
$\hat{\mu}$		68.2	9.2	108.9	29.4	19.8	0.0	3.0
$\hat{\sigma}$		7.2	2.7	5.2	0.9	2.2	0.0	3.0
<b>Grupo PDC</b>								
CLO	F	68	5	81	28	22	1	6
RLO	F	63	9	90	29	20	0	3
RRU	M	69	9	85	27	10	0	3
JGZ	M	65	11	87	25	20	0	1
AEFP	M	73	8	96	29		0	2
$\hat{\mu}$		67.6	8.4	87.8	27.4	18.0	0.2	3.0
$\hat{\sigma}$		3.4	2.2	5.6	1.8	5.4	0.4	1.9

## 6.2. Registro del polisomnograma

Para llevar a cabo el registro, los adultos mayores participantes fueron invitados a acudir a las instalaciones del Laboratorio de Sueño, Emoción y Cognición, ubicado dentro del Instituto de Ciencias de la Salud (ICSa) dependiente de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Los participantes recibieron instrucciones de realizar una rutina normal de actividades durante la semana que precedió al estudio, y se les recomendó no ingerir bebidas alcohólicas o energizantes (como café o refresco) durante las 24 horas previas al experimento, y que no durmieran siesta ese día.

Para efectuar el registro se usó un polisomnógrafo Medicid 5 (Neuronic Mexicana). El protocolo de PSG incluye:

- 19 electrodos de EEG, colocadas siguiendo las coordenadas del Sistema Internacional 10–20
- 2 electrodos de EOG para movimientos oculares horizontales y verticales
- 2 electrodos de EMG colocados en los músculos submentonianos

**Cuadro 6.3:** Datos generales sobre los registros de PSG

Frecuencia de muestreo [Hz ]		Total		MOR*		
		Puntos	Tiempo	Puntos	Tiempo	%
Grupo CTL						
VCR	200	5166000	7:10:30	438000	0:36:30	8.48
MJH	512	15851520	8:36:00	1950720	1:03:30	12.31
JAE	512	13931520	7:33:30	2626560	1:25:30	18.85
GHA	200	6558000	9:06:30	330000	0:27:30	5.03
MFGR	200	4932000	6:51:00	570000	0:47:30	11.56
$\hat{\mu}$			7:51:30		0:52:06	11.25
$\hat{\sigma}$			0:57:36		0:23:00	5.13
Grupo PDC						
CLO	512	14499840	7:52:00	2027520	1:06:00	13.98
RLO	512	12994560	7:03:00	1520640	0:49:30	11.70
RRU	200	2484000	3:27:00	228000	0:19:00	9.18
JGZ	512	18539520	10:03:30	506880	0:16:30	2.73
AEFP	512	14699520	7:58:30	629760	0:20:30	4.28
$\hat{\mu}$			7:16:48		0:34:18	8.38
$\hat{\sigma}$			2:24:43		0:22:14	4.79

\*Dado que el sueño MOR aparece fragmentado, se reporta la suma de tales tiempos

Los electrodos para registro de EEG fueron montados usando los lóbulos auriculares como referencia común; se mantuvo por debajo de  $50 \mu\Omega$ .

Las señales fueron amplificadas analógicamente usando amplificadores de alta ganancia en cadena, y adicionalmente fueron filtradas analógicamente usando filtros de paso de banda: 0.1–100 Hz para EEG, 3–20 Hz para EOG. Debido a dificultades técnicas el registro se efectuó a razón de 512 puntos por segundo (Hz) para algunos participantes, mientras que se usó 200 Hz para otros; en ambos casos se cumple la recomendación de la AASM de al menos 128 Hz. Los registros digitalizados fueron almacenados en formato de texto bajo la codificación ASCII.

Los registros fueron segmentados en ventanas de 30 segundos de duración, referidas como *épocas*, para su estudio posterior *fuera de línea*. Usando los criterios de la AASM, cada una de las épocas fueron clasificadas según la etapa de sueño como MOR o NMOR. Dicha clasificación fue llevada a cabo por expertos en sueño de ICSa.

---

**Figura 6.1:** Resultado típico para la función `stationarity`. La función de densidad espectral es referida como SDF, mientras que los p valores. El p-valor para T+I+R corresponde al estadístico  $S_{I+R}$ , y el p-valor para T corresponde  $S_T$

### 6.3. Aplicación de la prueba de Priestley-Subba Rao

Se fragmentaron los registros en ventanas de 30 segundos de duración, sin traslape. Cada una de estas ventanas fue sometida a la prueba de PSR, y se clasificó como *estacionaria en el sentido de PSR* si fue posible rechazar ( $p < 0.05$ ) la hipótesis de no-estacionariedad. Los resultados obtenidos (una lista de las épocas que son estacionarias) se guardaron en archivos de texto para su posterior análisis. Debido a la gran variabilidad entre el tiempo que los participantes pasaron en sueño MOR, se decidió basar las comparaciones en proporciones de épocas; por ejemplo, se calculó la proporción de épocas MOR que son estacionarias para todos los participantes.

Como análisis exploratorio se graficaron en el tiempo las épocas, en todos los canales, como se muestra en la figura 6.2. Este tipo de gráficos *revelan* cierto tipo de *bloques* de épocas estacionarias o no-estacionarias. Heurísticamente se puede afirmar que éstos patrones son independientes de la prueba de PSR, y anteriormente se reportó que estos patrones suelen coincidir con la aparición de sueño MOR. Más adelante se ofrece una discusión al respecto.

En otro ámbito, se replicó la metodología usada por McEwen [46] para contrastar la afirmación de que las series de tiempo *suficiente cortas* son estacionarias. Este procedimiento consistió en repetir la clasificación de épocas variando el tamaño de ventana; los tamaños de ventana se tomaron de la forma  $30 \times 2^n$  segundos, para comparar con el tamaño de época recomendado por la AASM.

Usando la clasificación de épocas estacionarias, obtenida para diferentes tamaños de ventana, se construyeron más gráficos sobre la ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. Estos nuevos gráficos, como el de la figura 6.5, refuerzan heurísticamente la hipótesis de que los patrones son significativos fisiológicamente.

En base a resultados previos usando esta técnica, se espera que el comportamiento de los patrones visuales obedezca al fenómeno de **estacionariedad local**; esta característica, descrita por Dahlhaus [22], implica que un proceso puede ser aproxi-

./img\_art\_dfa/zoom\_noVCR\_v2.png

./img\_art\_dfa/zoom\_siVCR\_v2.png


**Figura 6.2:** Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo y patrones emergentes.  
**Arriba:** Ubicación de épocas estacionarias en el tiempo. **Abajo:** Patrón de bloques relacionado con el sueño MOR

mado a trozos *ensamblando* procesos estacionarios. Esta caracterización del EEG ha sido usada anteriormente de manera fructífera pero problemática [7, 33]. Dentro del modelo para registros de PSG, la estacionariedad local significa que el PSG no es formalmente homogéneo *pero* puede entenderse como varios segmentos homogéneos. En un sentido más general, es coherente pensar que el PSG se componga tanto de segmentos homogéneos como de *eventos puntuales* y artefactos.

En la figura 6.4 se muestra esquemáticamente cómo el tamaño de las ventanas puede influir para su clasificación como estacionarias/homogéneas.

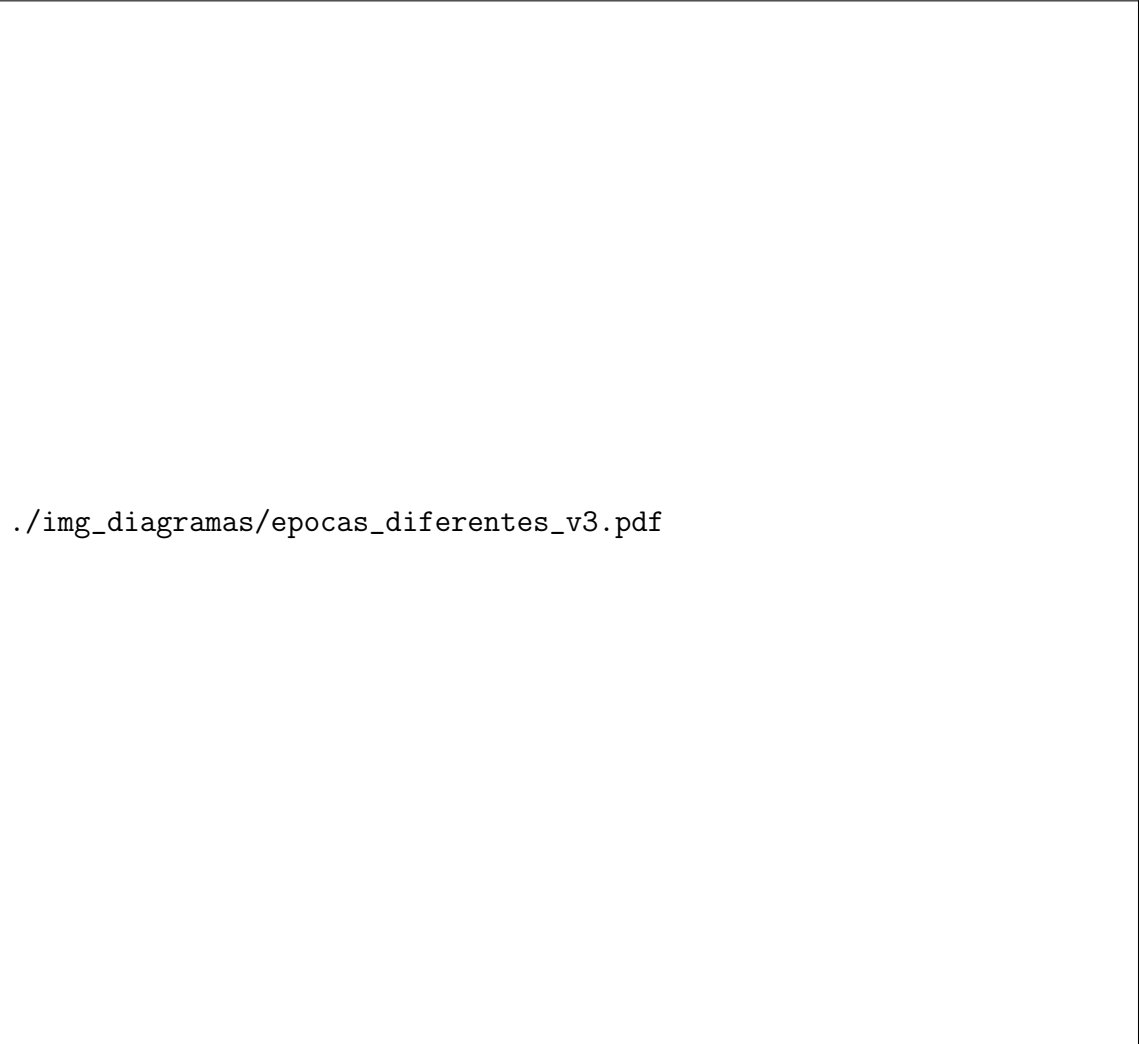
Entonces, se propone que los registros de PSG se comportan como procesos localmente estacionarios; más aún, se propone que esta característica cambia cualitativamente en adultos mayores con PDC, para los cuales el *nivel de homogeneidad* del PSG es muy similar durante MOR y NMOR.

Cabe destacar que la aplicación *per se* de la prueba fue efectuada usando el software estadístico R [68]. En particular, se utilizó la implementación incluida en el paquete `fractal` [19] bajo la función `stationarity`.



`./img_resultados/cabeza_VCR.pdf`

**Figura 6.3:** Cambio en el porcentaje de épocas estacionarias conforme el tamaño de ventana



`./img_diagramas/epocas_diferentes_v3.pdf`

**Figura 6.4:** Efecto del tamaño de ventana sobre la clasificación de estacionariedad.





`./img_art_dfa/VCNNS1_comp_est_.png`

**Figura 6.5:** Distribución en el tiempo de ventanas estacionarias, usando diferentes tamaños de ventana.

## 6.4. Espectro de potencias


Adicionalmente a la clasificación de épocas como estacionarias, se calculó su espectro de potencia. Como una metodología común, se calculó el **espectro de banda ancha**, es decir, la potencia total y relativa correspondientes a las frecuencias que caracterizan las ondas delta, theta, alfa, beta y gamma (ver cuadro 5.1).

Usando los espectros de banda ancha se ha calculado el coeficiente de enlentecimiento  $R_E$ , definido en la expresión 6.1, con particular atención al sueño MOR. Esta cantidad se ha reportado como un posible marcador de deterioro cognitivo leve en adultos mayores [12].

$$R_E = \frac{\text{potencia}_\delta + \text{potencia}_\theta}{\text{potencia}_\alpha + \text{potencia}_\beta} = \frac{\int_{0.5\text{Hz}}^{7\text{Hz}} h(\omega) d\omega}{\int_{7\text{Hz}}^{30\text{Hz}} h(\omega) d\omega} \quad (6.1)$$

El espectro de potencias se ha calculado usando el estimador adaptativo propuesto por Barbour y Parker [6], el cual se encuentra implementado dentro del paquete `psd` bajo la función `pspectrum`. Se ha usado dicho estimador para garantizar heurísticamente que el espectro de potencias calculado (1) es independiente del usado para determinar la estacionariedad y (2) es compatible con la metodología *usual*; como el algoritmo `psd` supone estacionariedad débil se espera que emule resultados obtenidos bajo tal supuesto.

Como se discute posteriormente, los bloques de épocas estacionarias están relacionados a bloques cuyo espectro de potencia son distintos. Así mismo son diferentes los coeficientes  $R_E$  calculados para dichos bloques.



`./img_art_dfa/VCNNS1_espectral_total.png`

**Figura 6.6:** Espectro de potencias de banda ancha (delta, theta alfa, beta, gamma).

# Capítulo 7

## Resultados

Previo al análisis de la estacionariedad, se corroboró la hipótesis de que las variables independientes son estadísticamente iguales entre los grupos CTL y PDC. Las comparaciones usando la prueba  $t$  de Welch (cuadro 7.1) indican que efectivamente la hipótesis se cumple salvo para los puntajes de Neuropsi.

Se evaluó si pudieran existir relaciones entre las variables que se presumen independientes. Usando la prueba de correlación de Spearman (cuadro 7.2) se encontró sólo hay correlaciones monotónicas entre los siguientes pares de variables:

- Edad y Escolaridad
- Puntaje en Neuropsi y Puntaje en Mini Mental-State Examination (MMSE)
- Tiempo de MOR (en segundos) y Tiempo en MOR (porcentaje)

La primera relación, no muy fuerte, puede explicarse como un *efecto generacional*: la educación superior ha aumentado su cobertura durante las últimas décadas, y entonces los grupos poblacionales más jóvenes tienen en promedio más años de escolaridad. Algunos autores han sugerido que un bajo nivel de escolaridad es un factor de riesgo para padecer deterioro cognitivo, en base a estudios horizontales de larga escala [49]. En el presente trabajo se ignora este dato, en vista de que no se pudieron relacionar el nivel de escolaridad de los participantes con su desempeño en pruebas neuropsicológicas.

La relación entre los puntajes en Neuropsi y en MMSE era de esperarse, ya que ambas pruebas miden parámetros similares y tienen contenidos independientes. Cabe

**Cuadro 7.1:** Variables independientes entre grupos

	Grupo CTL		Grupo PDC		t de Welch		
	Media	(DE)	Media	(DE)	<i>p</i>	<i>t</i>	<i>ν</i>
Edad	68.2	(7.2)	67.6	(3.4)	0.8746	0.16	6.11
Escolaridad	9.2	(2.7)	8.4	(2.2)	0.6201	0.52	7.69
Neuropsi	108.9	(5.2)	87.8	(5.6)	<b>0.0003</b>	6.17	7.94
MMSE	29.4	(0.9)	27.4	(1.4)	0.0706	0.16	6.11
Sueño [s]	7:51:30	(0:57:36)	7:16:48	(2:24:43)	0.6836	0.50	5.24
MOR [s]	0:52:06	(0:23:00)	0:34:18	(0:22:14)	0.2486	1.24	7.99
MOR [%]	11.3	(5.1)	8.4	(4.8)	0.3871	0.91	7.96

DE=Desviación Estándar

**Cuadro 7.2:** Correlaciones entre variables independientes

	1	2	3	4	5	6
1 Edad	•					
2 Escolaridad	-0.7134*	•				
3 Neuropsi	-0.2432	0.3776	•			
4 MMSE	-0.1063	0.1812	0.8477***	•		
5 Sueño [s]	0.0486	-0.0944	0.0545	0.0374	•	
6 MOR [s]	0.2796	-0.5035	0.1879	0.2618	-0.1515	•
7 MOR [%]	0.3709	-0.5287	0.0182	0.0748	-0.3578	1****

Niveles de significancia: \*&lt;.05 , \*\*&lt;.01 , \*\*\*&lt;.005 , \*\*\*\*&lt;.001

mencionar el curioso fenómeno en que (1) los puntajes de MMSE tienen estadísticamente las mismas medias grupales, (2) los puntajes de MMSE están fuertemente correlacionados con los puntajes de Neuropsi, y (3) los puntajes de Neuropsi tienen estadísticamente medias grupales diferentes. Se confirma que la prueba MMSE tiene menor sensibilidad que la prueba Neuropsi para detectar deterioro cognitivo.

Era por demás obvia la relación entre la cantidad total de sueño MOR, con su proporción respecto a todo el sueño. Sin embargo, conviene mencionar que la cantidad de sueño MOR no es afectada por ninguna de las otras variables independientes; luego entonces las cantidades que fueron estudiadas (estacionariedad, espectro de potencias) no tienen correlaciones sesgadas con las demás variables.




**Figura 7.1:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante sueño MOR y NMOR, usando ventanas de 30 segundos

## 7.1. Estacionariedad en sueño MOR

Se sometió a prueba la hipótesis de que durante sueño MOR ocurre en mayor medida la estacionariedad débil, en comparación con el sueño NMOR. Para ello, se compararon el porcentaje de épocas estacionarias en el sentido de PSR, ocurridas durante sueño MOR y NMOR. La comparación fue efectuada usando la prueba  $\chi^2$  de Pearson. Se encontró de manera consistente que los canales ROG y LOG presentaron diferencias significativas ( $p < 0.05$ ) entre sueño MOR y NMOR, lo cual puede explicarse por los movimientos oculares rápidos característicos del sueño MOR. En los canales que corresponden al EEG no se encontraron patrones consistentes y claros entre los sujeto (ver figura 7.1).

Se repitió la comparación a un nivel grupal, usando la prueba  $U$  de Mann-Whitney. Se encontraron diferencias significativas para el grupo CTL en los canales P3, P4, PZ, ROG y EMG; en el grupo PDC se observaron tales diferencias sólo en P4. Las proporciones muestran tendencias que, quizá, resultaron no ser significativas por el tamaño pequeño de la muestra: los canales P3 y PZ podrían ser diferentes también para individuos del grupo PDC, y el canal LOG podría ser diferente durante sueño MOR y NMOR. Así mismo se hipotetiza que para el grupo CTL, en todos los canales, el sueño MOR es presenta menor cantidad de épocas estacionarias.



./img\_art\_dfa/Comparacion\_gpos\_CTL\_PDC\_v3.pdf

**Figura 7.2:** Proporciones de épocas estacionarias, durante sueño MOR y NMOR.

Se concluye que no se puede establecer diferencias entre las medias grupales para esta cantidad (proporción de épocas estacionarias, medidas en el sentido de PSR), debido a la gran variabilidad entre sujetos.



**Figura 7.3:** Proporciones de épocas estacionarias, grupos CTL y PDC.



## 7.2. Discusión

## 7.3. Conclusiones

Se concluye que es posible la ocurrencia de fragmentos arbitrariamente cortos de registros de PSG que no son débilmente estacionarios. Paralelamente, la presencia de estos fragmentos se ve influida por el estado de actividad del cerebro. Como consecuencia directa de este fenómeno, es posible limitar los efectos *distorsivos* de la no-estacionariedad, para lo cual basta un diseño experimental que distinga adecuadamente el estado de actividad a estudiar.

En otro ámbito, es en principio posible usar la proporción de estacionariedad (*densidad* de ventanas estacionarias en el sentido de PSR) en el EEG para caracterizar estados de actividad cerebral. Para ello, falta investigar las características particulares de la etapa que se busca identificar, así como otras etapas cercanas en el tiempo.

## 7.4. Trabajo a futuro

Una vez que se ha identificado un marcador para el PDC usando un grupo de laboratorio, conviene automatizar los análisis para su uso clínico sobre un público más general. Un uso más amplio de la técnica asegura una mayor población para poder estudiar la efectividad y sensibilidad de la prueba Y más que eso, se espera que puedan ser sinceramente beneficiosos para los pacientes. Siguiendo el protocolo usual, los marcadores presentados no serán usados como único recurso para generar un diagnóstico clínico, sino como un apoyo a las herramientas existentes.

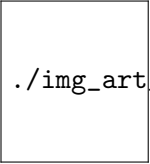

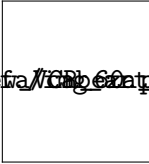
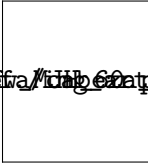
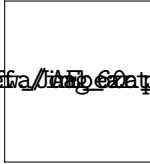
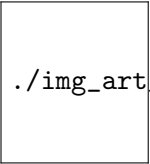

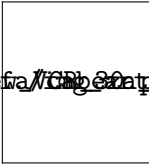
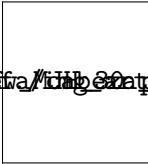
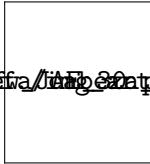
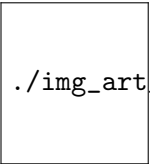

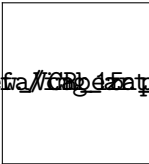
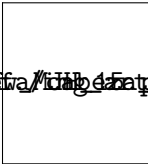
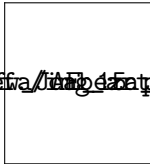
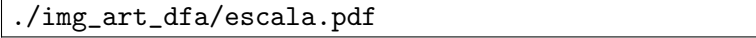
El uso de marcadores basados en registros de PSG –basados en el EEG en general– aporta una base fisiológica al diagnóstico de deterioro cognitivo, misma que no es posible usando únicamente pruebas neuropsicológicas. Conviene destacar que, de entre las herramientas para el registro fisiológico del sistema nervioso central, las técnicas electrofisiológicas son las más económicas y menos invasivas; generar marcadores basados en ellas facilita su uso por el público general como herramienta diagnóstica, sobre todo en ausencia de síntomas.

# Apéndice A

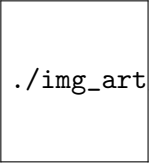

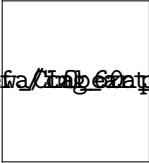
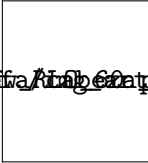
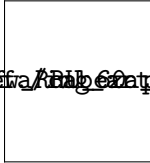
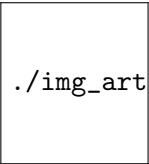

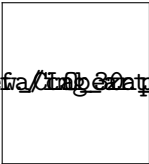
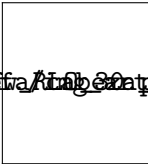
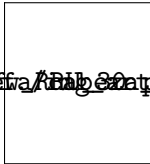
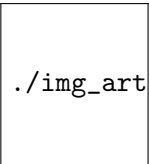

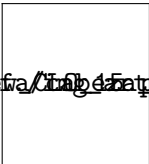
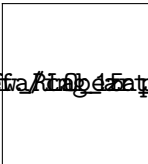
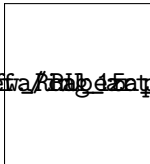
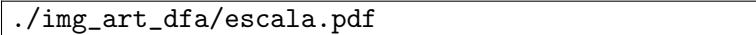
## Compilados gráficos

En este apéndice se muestran los compilados gráficos mencionados en la parte de resultados, y que representan la distribución temporal y pseudo-espacial de las ocurrencia de épocas PSG dentro de los registros para cada paciente.

Primeramente se presentan los compilados gráficos en los que se ha destacado el sueño MOR; posteriormente se presentan los mismos gráficos resaltando los patrones visuales propuestos, que parecen estar relacionados con la aparición de sueño MOR.

Tamaño de ventana [s]	Grupo CTL				
	VCR	MJH	JAE	GHA	MFGR
$30 \times 2^1$					
$30 \times 2^0$					
$30 \times 2^{-1}$					
					


Tamaño de ventana [s]	Grupo PDC				
	CLO	RLO	RRU	JGZ	AEFP
$30 \times 2^1$					
$30 \times 2^0$					
$30 \times 2^{-1}$					
					

**Figura A.1:** Regiones donde la cantidad de ventanas estacionarias es significativamente diferente durante MOR y NMOR. Diferentes tamaños de ventana



`./img_ejemplos/VCNNS1_comp_est_.png`

(a) Épocas estacionarias usando diferentes tamaños de ventana



`./img_resultados/cabeza_VCR.pdf`

(b) Resumen de épocas estacionarias según tamaño de ventana

**Figura A.2:** Gráficos individuales para el sujeto VCR

## Patrones visuales

`./img_ejemplos/zoom_VCR.pdf`

`./img_ejemplos/zoom_MJH.pdf`

`./img_ejemplos/zoom_JAE.pdf`

`./img_ejemplos/zoom_GHA.pdf`

`./img_ejemplos/zoom_MFGR.pdf`





# Bibliografía

- [1] AASM: *The AASM Manual for the scoring of sleep and associated events. Rules, terminology and technical specifications*. Westchester, IL, U.S.A., 2007.
- [2] Abrisqueta-Gómez, J., Ostrosky-Solis, F., Bertolucci, P. y Bueno, F.: *Applicability of the Abbreviated Neuropsychologic Battery (NEUROPSI) in Alzheimer Disease Patients*. *Alz Dis Assoc Disord*, 22:72–78, 2008.
- [3] Amer, M. S., Hamza, S. A., El Akkad, R. M. y Abdel Galeel, Y. I. I.: *Does self-reported sleep quality predict poor cognitive performance among elderly living in elderly homes?* *Aging & Mental Health*, 17(7):788–792, 2013.
- [4] Ardila, A. y Ostrosky, F.: *Guía para el diagnóstico neuropsicológico*. Florida: American Board of Professional Neuropsychology, 2012.
- [5] Aserinsky, E. y Kleitman, N.: *Regularly occurring periods of eye motility, and concomitant phenomena, during sleep*. *Science*, 118:273–274, 1953.
- [6] Barbour, A. J. y Parker, R. L.: *psd: Adaptive, sine multitaper power spectral density estimation for R*. *Computers & Geosciences*, 63:1–8, 2014.
- [7] Barlow, J. S.: *Methods of Analysis of Nonstationary EEGs, with Emphasis on Segmentation Techniques: A Comparative Review*. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 2(3):267–304, 1985.
- [8] Blake, M. G. y Boccia, M. M.: *Basal Forebrain Cholinergic System and Memory*. *Curr Top Behav Neurosci.*, 2017.
- [9] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H15 2 O PET study*. *Brain*, 120:1173–1197, 1997.

- [10] Braun, A., Balkin, T., Wesenten, N., Carson, R., Varga, M., Baldwin, P., Selbie, S., Belenky, G. y Herscovitch, P.: *Regional cerebral blood flow throughout the sleep-wake cycle. An H<sub>2</sub> (15) O PET study*. Brain: a journal of neurology, 120(7):1173–1197, 1997.
- [11] Brayet, P., Petit, D., Frauscher, B., Gagnon, J.F., Gosselin, N., Gagnon, K., Rouleau, I. y Montplaisir, J.: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment*. Clin EEG Neurosci, 47:134–141., 2015.
- [12] Brayet, P., Petit, D., Frauscher, B., Gagnon, J.F., Gosselin, N., Gagnon, K., Rouleau, I. y Montplaisir, J.: *Quantitative EEG of Rapid-Eye-Movement Sleep: A Marker of Amnestic Mild Cognitive Impairment*. Clinical EEG and Neuroscience, 47(2):134–141, 2016.
- [13] Britannica The Editors of Encyclopædia: *Electroencephalography*. <https://www.britannica.com/science/electroencephalography>. Revisado: 2017-11-15.
- [14] Carrillo-Mora, P., Ramírez-Peris, J. y Vázquez, K. Magaña: *Neurobiología del sueño y su importancia: antología para el estudiante universitario*. Revista de la Facultad de Medicina, 56(4):5–15, 2013.
- [15] Chen, P., Wu, D., Chen, C., Chi, N. y Kang, J.H.and Hu, C.: *Rapid eye movement sleep atonia in patients with cognitive impairment*. J Neurol Sci, 15:34–37, 2011.
- [16] Clark, Jr., J.W.: *The Origin of Biopotentials*. En Webster, J.G. (ed.): *Medical Instrumentation. Applications and Design*, cap. 4, págs. 126–188. Wiley, Estados Unidos, 4<sup>a</sup> ed., 2009.
- [17] Cohen, B. A. y Sances, A.: *Stationarity of the human electroencephalogram*. Medical and Biological Engineering and Computing, 15(5):513–518, 1977.
- [18] CONAPO: *Proyecciones de población de México 2000-2050 (Projections about the population of Mexico 2000-2050)*. Consejo Nacional de Población, México., 2010.

- [19] Constantine, W. y Percival, D.: *fractal: Fractal Time Series Modeling and Analysis*, 2016. <https://CRAN.R-project.org/package=fractal>, R package version 2.0-1.
- [20] Contreras, S. A.: *Sueño a lo largo de la vida y sus implicancias en salud*. Revista Médica Clínica Las Condes, 24(3):341–349, 2013.
- [21] Corsi, M.: *Psicofisiología del sueño*. Trillas, México, 1983.
- [22] Dahlhaus, R. y cols.: *Fitting time series models to nonstationary processes*. The annals of Statistics, 25(1):1–37, 1997.
- [23] Datta, S., Mavanji, V., Ulloor, J. y Patterson, E.: *Activation of phasic pontine-wave generator prevents rapid eye movement sleep deprivation-induced learning impairment in the rat: a mechanism for sleep-dependent plasticity*. Journal of neuroscience, 24:1416–1427, 2004.
- [24] Ermentrout, G. B. y Terman, D. H.: *Mathematical Foundations of Neuroscience*, vol. 35. Springer Science & Business Media, 2010.
- [25] Fishbein, W.: *Disruptive effects of rapid eye movement sleep deprivation on long-term memory*. Physiology & Behavior, 6(4):279–282, 1971.
- [26] Fishbein, W. y Gutwein, B. M.: *Paradoxical sleep and memory storage processes*. Behavioral Biology, 19(4):425–464, 1977.
- [27] Greenberg, S. A.: *The Geriatric Depression Scale (GDS)*. Best Practices in Nursing Care to Older Adults, 4:1–2, 2012.
- [28] INEGI: *Censo de Población y Vivienda 2010*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/ccpv/2010/>. Revisado: 2017-11-15.
- [29] INEGI: *Encuesta Intercensal 2015*. <http://www.beta.inegi.org.mx/proyectos/enchogares/especiales/intercensal/>. Revisado: 2017-11-15.
- [30] Instituto Nacional de Geriátría y Secretaría de Salud: *Plan de acción Alzheimer y otras demencias. México, 2014*, 2014. México.
- [31] Jasper, H. H.: *The Ten Twenty Electrode System of the International Federation*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 10(2):371–375, 1958.

- [32] Kaiser, D. A.: *QEEG: State of the Art, or State of Confusion*. Journal of Neurotherapy, 4(2):57–75, 2000.
- [33] Kaplan, A. Y.: *The problem of segmental description of human electroencephalogram*. HUMAN PHYSIOLOGY C/C OF FIZIOLOGIJA CHELOVEKA, 25:107–114, 1999.
- [34] Kawabata, N.: *A Nonstationary Analysis of the Electroencephalogram*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-20(6):444–452, 1973.
- [35] Klem, G., Lüders, H. O., Jasper, H. H. y Elger, C.: *The ten-twenty electrode system of the International Federation*. Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, 52:3–6, 1999. (Suplemento).
- [36] Knopman, D. S., DeKosky, S. T., Cummings, J., Chui, H., Corey-Bloom, J., Relkin, N., Small, G., Miller, B. y Stevens, J.: *Practice Parameter: Diagnosis of Dementia (An Evidence-based Review) Report of the Quality Standards Subcommittee of the American Academy of Neurology*. Neurology, 56(9):1143–1153, 2001.
- [37] Kreuz, T., Mormann, F., Andrzejak, R. G., Kraskov, A., Lehnertz, K. y Grassberger, P.: *Measuring synchronization in coupled model systems: A comparison of different approaches*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 225(1):29–42, 2007.
- [38] Leconte, P. y Hennevin, E.: *Augmentation de la durée de sommeil paradoxal consécutive a un apprentissage chez le rat*. C.R. Acad. Sci. Paris, 273:86–88, 1971.
- [39] Leconte, P. y Hennevin, E.: *Sommeil paradoxal et mémorisation: effet du délai d'endormissement chez le rat*. Journal de physiologie, 65:255–256, 1972.
- [40] Lipsitz, L. A. y Goldberger, A.: *Loss of complexity and aging, potential applications of fractals and chaos theory to senescence*. Journal of the American Medical Association, 267(13):1806–1809 doi:10.1001/jama.1992.03480130122036, 1992.
- [41] Llinás, R. y Ribary, U.: *Coherent 40 Hz oscillation characterizes dream state in humans*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 90:2078–2081, 1993.

- [42] Lopez, C. A.: *Manual diagnóstico y estadístico de los trastornos mentales: DSM-5*. Editorial medica panamericana, 2014.
- [43] Louie, K. y Wilson, M.: *Temporally structured replay of awake hippocampal ensemble activity during rapid eye movement sleep*. Neuron, 29:145–156, 2001.
- [44] Lucero, M.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat*. Brain research, 20:319–322, 1970.
- [45] Lucero, M. A.: *Lengthening of REM sleep duration consecutive to learning in the rat*. Brain Research, 20(2):319–322, 1970.
- [46] McEwen, J. A. y Anderson, G. B.: *Modeling the Stationarity and Gaussianity of Spontaneous Electroencephalographic Activity*. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-22(5):361–369, 1975.
- [47] McKhann, G., Drachman, D., Folstein, M., Katzman, R., Price, D. y Stadlan, E.: *Clinical diagnosis of Alzheimer's disease: report of the NINCDS-ADRDA Work group under the auspices of Department of Health and Human Services Task Force on Alzheimer's disease*. Neurology, 34:939–944, 1984.
- [48] Mejía-Arango, S. y Gutiérrez-Robledo, L.: *Prevalence and incidence rates of dementia and cognitive impairment no dementia in the Mexican population: data from the Mexican Health and Aging Study*. J. Aging Health, 23:1050–1074., 2011.
- [49] Mejía-Arango, S., Jaimes-Miguel, A., Villa, A., Ruiz-Arregui, L. y Gutiérrez-Robledo, L.: *Deterioro cognoscitivo y factores asociados en adultos mayores en México*. Salud Pública de México, 49:S475–S481, 2007.
- [50] Miyata, S., Noda, A., Iwamoto, K., Kawano, N., Okuda, M. y Ozaki, N.: *Poor sleep quality impairs cognitive performance in older adults*. Journal of Sleep Research, 22(5):535–541, 2013.
- [51] Montes-Rojas, J., Gutiérrez-Gutiérrez, L., Silva-Pereyra, J., García-Ramos, G. y Río Portilla, Y. del: *Perfil cognoscitivo de adultos mayores de 60 años con y sin deterioro cognoscitivo*. Rev Chil Neuropsicol, 7:121–126, 2012.

- [52] Moruzzi, G.: *Active processes in the brain stem during sleep. Harvey Lectures, 58, 233-297, in María Corsi. (1983).* Psicofisiología del sueño (Psychophysiology of sleep)., 1963.
- [53] Niedermeyer, E. y Schomer, D. L.: *Historical Aspects of EEG.* En Schomer, D. L. y Lopes Da Silva, F. (eds.): *Niedermeyer's Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields*, cap. 1, págs. 1–16. Lippincott Williams & Wilkins, 6<sup>a</sup> ed., 2011.
- [54] Ostrosky-Solís, F., Ardila, A. y Rosselli, M.: *Neuropsi: A brief neuropsychological test battery in Spanish with norms by age and educational level.* Journal of the International Neuropsychological Society, 5:413–433, 1999.
- [55] Ostrosky-Solís, F., Gómez, M. E., Villaseñor, E. M., Roselli, M., Ardila, A. y Pineda, D.: *Neuropsi: Atención y Memoria.* Manual Moderno, 2<sup>a</sup> ed., 2003.
- [56] Ostrosky-Solís, F., López-Arango, G. y Ardila, A.: *Sensitivity and Specificity of the Mini-Mental State Examination in a Spanish-Speaking Population.* Applied Neuropsychology, 7(1):25–31, 2000.
- [57] Park, D. C. y Reuter-Lorenz, P.: *The Adaptive Brain: Aging and Neurocognitive Scaffolding.* Annual Review of Psychology, 60:173–196, 2009.
- [58] Pavlides, C., Greenstein, Y., Grudman, M. y Winson, J.: *Long-term potentiation in the dentate gyrus is induced preferentially on the positive phase of theta-rhythm.* Brain research, 439:383–387, 1988.
- [59] Pearlman, C.: *REM sleep deprivation impairs latent extinction in rats.* Physiology and behavior, 11:233–237, 1973.
- [60] Pearlman, C. y Becker, M.: *REM sleep deprivation impairs bar-press acquisition in rats.* Physiology & Behavior, 13(6):813–817, 1974.
- [61] Pearlman, C. A.: *Latent learning impaired by REM sleep deprivation.* Psychonomic Science, 25(3):135–136, 1971.
- [62] Petersen, R. C., Doody, R., Kurz, A., Mohs, R. C., Morris, J. C., Rabins, P. V., Ritchie, K., Rosser, M., Thal, L. y Winblad, B.: *Current concepts in mild cognitive impairment.* Archives of neurology, 58(12):1985–1992, 2001.

- [63] Potvin, O., Lorrain, D., Forget, H., Dubé, M., Grenier, S., Prévile, M. y Hudon, C.: *Sleep Quality and 1-Year Incident Cognitive Impairment in Community-Dwelling Older Adults*. SLEEP, 35(4):491–499, 2012.
- [64] Priestley, M.B.: *Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 27(2):204–237, 1965.
- [65] Priestley, M.B.: *Design Relations for Non-stationary Processes*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 28(1):228–240, 1966.
- [66] Priestley, M.B.: *Spectral Analysis and Time Series*, vol. 1,2. Academic Press, 1981.
- [67] Priestley, M.B. y Subba Rao, T.: *A Test for Non-stationarity of Time-series*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 31(1):140–149, 1969.
- [68] R Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2015. <https://www.R-project.org/>.
- [69] Rechtschaffen, A. y Kales, A.: *A manual of standarized terminology, techniques and scoring system for sleep stages of human subjects*. Brain information service/Brain Research Institute, 1968.
- [70] Reid, K. J., Martinovich, Z., Finkel, S., Statsinger, J., Golden, R., Harter, K. y Zee, P. C.: *Sleep: A Marker of Physical and Mental Health in the Elderly*. The American Journal of Geriatric Psychiatry, 14(10):860–866, 2006.
- [71] Robles, A., Del Ser, T., Alom, J., Peña-Casanova, J. y Neurología Grupo Asesor del Grupo de Neurología de la Conducta y Demencias de la Sociedad Española de: *Propuesta de criterios para el diagnóstico clínico del deterioro cognitivo ligero, la demencia y la enfermedad de Alzheimer*. Neurología, 17(1):17–32, 2002.
- [72] Rosales-Lagarde, A.: *La relación sueños-cerebro y sus modelos*. Ludus Vitalis, 22(41):311–331, 2016.



- [73] Rosales-Lagarde, A., Martínez-Alcalá, C. y Pliego-Pastrana, P.: *Analysis of Neuropsychological Tests and functions to Diagnose Mild Cognitive Impairment in Mexico*. *Alzheimer's and Dementia*, 12(supplement):746, 2016.
- [74] Rosales-Lagarde, A., Río-Portilla, Y. del, Guevara, M. A. y Corsi-Cabrera, M.: *Caída abrupta del tono muscular al entrar a sueño MOR en el ser humano*. *Salud Mental*, 31:117–123, 2009.
- [75] Rosales-Lagarde, A., Rodríguez-Torres, E., Enciso-Alva, J., Martínez-Alcalá, C., Vázquez-Tagle, G., Tetlalmatzi-Montiel, M., Viveros, J. y López-Noguerola, J.S.: *STATIONARITY DURING REM SLEEP IN OLD ADULTS*. *Alzheimer's and Dementia*, 13(7, Supplement):P723 – P724, 2017, ISSN 1552-5260. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1552526017311706>, 2017 Abstract Supplement.
- [76] Roumec, B., Gismondi, M., Gomez, A.M. y Sousa, L.: *Escala por interrogatorio de las actividades de la vida diaria: validación y correlación con escalas de severidad de deterioro cognitivo en pacientes con demencia tipo Alzheimer*. *Neurología Argentina*, 6(3):137–141, 2014.
- [77] Sanhueza Guzmán, C.: *Programa de entrenamiento cerebral en adultos mayores sin deterioro cognitivo: atención, memoria y funciones ejecutivas*. Tesis de Doctorado, Universidad Complutense de Madrid, 2014.
- [78] Schliebs, R. y Arendt, T.: *The cholinergic system in aging and neuronal degeneration*. *Behavioural Brain Research*, 221(2):555–563, 2011.
- [79] Schliebs, R. y Arendt, T.: *The cholinergic system in aging and neuronal degradation*, *Behavioural Brain Research*, 221:555–563, 2011.
- [80] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. *SLEEP*, 14(4):325–330, 1991.
- [81] Smith, C. y Lapp, L.: *Increases in number of REMS and REM density in humans following an intensive learning period*. *Sleep*, 14:325–330, 2001.
- [82] Steriade, M. y Amzica, F.: *Intracortical and corticothalamic coherency of fast spontaneous oscillations*. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 93:2533–2538, 1996.

- [83] Sugimoto, H., Ishii, N., Iwata, A., Suzumura, N. y Tomita, T.: *On the stationarity and normality of the electroencephalographic data during sleep stages*. Computer Programs in Biomedicine, 8(3–4):224–234, 1978.
- [84] Vargas Terrez, B.E., Villamil Salcedo, V., Rodríguez Estrada, C., Pérez Romero, J. y Cortés Sotres, J.: *Validación de la escala Kessler 10 (K-10) en la detección de depresión y ansiedad en el primer nivel de atención. Propiedades psicométricas*. Salud Mental, 34(4):323–331, 2011.
- [85] Vázquez-Tagle Gallegos, G.R., García-Muñoz, V., Rosales-Lagarde, A., Rodríguez Torres, E., Martínez-Alcalá, C. y Reséndiz-Flores, O.: *Correlación inter-hemisférica durante el sueño MOR del Adulto Mayor con Deterioro Cognitivo*, 2016. Congreso Nacional, Sociedad Mexicana de Ciencias Fisiológicas. Campeche, México.
- [86] Velasco, S.L., Ayuso, L.L., Contador, I. y Pareja, F.B.: *Versiones en español del Minimental State Examination (MMSE). Cuestiones para su uso en la práctica clínica*. Revista de Neurología, 61(8):363–371, 2015.
- [87] Yesavage, J.A., Brink, T.L., Rose, T.L., Lum, O., Huang, V., Adey, M. y Leirer, V.O.: *Development and Validation of a Geriatric Depression Screening Scale: A Preliminary Report*. Journal of Psychiatric Research, 17(1):37–49, 1982.