1 Задание

Дана следующая SRS:

$$\begin{cases} aabc \to bbaa \\ b \to ccaa \\ bc \to a \\ aac \to \varepsilon \end{cases}$$

По данной SRS определить:

- завершимость;
- конечность классов эквивалентности по НФ (для построения эквивалентностей считаем, что правила могут применяться в обе стороны). Если их конечное число, то построить минимальную систему переписывания, им соответствующую;
- локальную конфлюэнтность и пополняемость по Кнуту-Бендиксу.

Провести автоматическое тестирование предполагаемой эквивалентности двух указанных SRS:

Фазз-тестирование эквивалентности: строится случайное слово ω и случайная цепочка переписываний его в ω' по $\mathcal{T}$. Проверить, можно ли получить ω' из ω (или наоборот) в рамках правил $\mathcal{T}'$.

Метаморфное тестирование: выбрать инварианты, которые должны сохраняться (либо монотонно изменяться) при переписывании в рамках $\mathcal{T}$. Породить случайную цепочку переписываний над случайным словом в $\mathcal{T}'$ и проверить выполнимость инвариантов. Как минимум два разных инварианта.

2 Завершимость

Введём функцию $rev(\omega)$, которая будет разворачивать строку ω. Зададим порядок букв c $>$ b $>$ a и сравнивать будем строки по их реверсам: слово u считаем больше слова v, если $rev(u)$ лексикографически больше $rev(v)$ в алфавите c$>$b$>$a. ε считаем минимальной строкой.

1) $rev(\text{aabc}) = \text{cbaa} > rev(\text{bbaa}) = \text{aabb} \Rightarrow \text{aabc} > \text{bbaa}$;

2) $rev(\text{b}) = \text{b} > rev(\text{ccaa}) = \text{aacc} \Rightarrow \text{b} > \text{ccaa}$;

3) $rev(\text{bc}) = \text{cb} > rev(\text{a}) = \text{a} \Rightarrow \text{bc} > \text{a}$;

4) $rev(\text{aac}) = \text{caa} > \varepsilon$.

Видим, что фундированность выполняется, следовательно SRS является завершимой.

3 Конечность классов эквивалентности по НФ

Так как в данной SRS существует правило $aac \to \varepsilon$, а для построения эквивалентностей мы считаем, что правила могут применяться в обе стороны, то по этому правилу мы можем построить бесконечное количество различных строк, следовательно для данной SRS существует бесконечное количество классов эквивалентности.

4 Локальная конфлюэнтность

Рассмотрим неоднозначно сходящуюся критическую пару:

$u = aabc$,

$v = u \xrightarrow{R2} aaccaac \xrightarrow{R4} c$,

$w = u \xrightarrow{R1} bbaa \xrightarrow{R2} ccaaccaaaa \xrightarrow{R4} cccaaaa$,

$v \neq w$.

v и w являются нормальными формами, однако они не равны, следовательно локальная конфлюэнтность не выполняется

5 Пополняемость по Кнуту-Бендиксу

Рассмотрим строку $aa(bc)^n$. В ней можно использовать бесконечное количество раз правила R1 и R3 и получить расходящуюся пару:

$aa(bc)^n \xrightarrow{R1} bbaa(bc)^{n-1} \xrightarrow{R1} \dots \xrightarrow{R1} b^{2n}aa$

$aa(bc)^n \xrightarrow{R3} aaa(bc)^{n-1} \xrightarrow{R3} \dots \xrightarrow{R3} a^{n+2}$

Следовательно алгоритм Кнута-Бендикса будет добавлять бесконечное число правил и процедура не завершится.

6 Инварианты

1) $I_1(s) = (2|\omega|_a + |\omega|_b + |\omega|_c) \bmod 5$

2) $I_2(s) = (2|\omega|_a + 6|\omega|_b + 6|\omega|_c) \bmod 10$