人工智能引论 第五次作业

周子锐 2100011032

2023 年 6 月 5 日

1

解答.

(1) 进行透视投影时:

- 对点 $P_1 = (0, 1, 0)$, 相机到此点的直线方程为 $\boldsymbol{r}_1 = (0, t, -1 + t)$, 其与圆 $y^2 + (z - 4)^2 = 2$ 不存在交点, 故而屏幕上 P_1 点的颜色为 0.
- 对点 $P_2 = (0, \frac{1}{4}, 0)$, 相机到此点的直线方程为 $\boldsymbol{r}_2 = (0, \frac{1}{4}t, -1 + t)$. 其与圆的第一个交点为 $Q_2(0, 1, 3)$. 圆在此点处的法线方向为 $\boldsymbol{n}_2 = (0, -1, 1)$. 这与光源到此点的方向共线. 根据朗博余弦定理, 光源发出的光在此点都被接收到. 屏幕上的点 P_2 的颜色为

$$0.8 \cos 0 + 0.2 = 1.$$

- 对点 $P_3 = (0, -\frac{1}{4}, 0)$, 相机到此点的直线方程为 $\boldsymbol{r}_3 = (0, -\frac{1}{4}t, -1 + t)$, 其与圆的第一个交点为 $Q_3(3, -1)$. 注意到光源到点 Q_3 的直线与圆在 Q_3 之前还有交点, 从而不存在反射光, 在屏幕上 P_3 的颜色为 0.2.

(2) 进行正交投影时:

- 对点 P_1. 发出的射线与圆的交点恰好就是 Q_2, 从而由上可知屏幕上 P_1 的颜色为 1.
- 对点 P_2, 发出的射线与圆的交点为 $Q_4(0, \frac{1}{4}, 4 - \frac{\sqrt{31}}{4})$. 计算得到光源到 Q_3 的直线与该点法线的夹角为约为 $\alpha_2 \approx 42.60°$, 从而屏幕上 P_2 的颜色为

$$0.8 \cos \alpha_2 + 0.2 \approx 0.79.$$

- 对点 P_3, 发出的射线与圆的交点为 $Q_5(0, -\frac{1}{4}, 4 - \frac{\sqrt{31}}{4})$, 计算得到光源到 Q_5 的直线与该点法线的夹角为约为 $\alpha_3 \approx 65.68°$, 从而屏幕上 P_3 的颜色为

$$0.8 \cos \alpha_3 + 0.2 \approx 0.53.$$

2

解答.

(1) 对物体 i, 它与物体 j 之间的弹簧力为

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -k_{ij}(\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\| - l_{ij})\frac{\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j}{\|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\|}.$$

在一维情况下有

$$F_{ij} = k_{ij}\mathrm{sgn}(x_j - x_i)(|x_j - x_i| - l_{ij}).$$

从而在时刻 t 物体 i 的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\dot{v_i} = \sum\limits_{j\neq i} F_{ij} = \sum\limits_{j\neq i} k\cdot\mathrm{sgn}(x_j - x_i)(|x_j - x_i| - l_0) \\ \dot{x_i} = v_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3$$

带入具体数据后得到该问题在 $t = 0$ 时的质点微分方程:

$$\begin{cases} \dot{v_1} = 3 \\ \dot{v_2} = 2 \\ \dot{v_3} = -5 \\ \dot{x_i} = v_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

(2) 记 $t = 0$ 时物体 i 的状态参量为 x_i, v_i; $t = 1$ 时物体的状态参量为 x_i', v_i'.

根据半隐式欧拉积分的公式有

$$\begin{cases} v_i' = v_i + f(x_i, v_i, t)\delta t \\ x_i' = x_i + v_i'\delta t \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3.$$

具体地, 带入 (1) 中结果, 并有 $\delta t = h = 1$.

$$\begin{cases} v_1' = v_1 + 3 \\ v_2' = v_2 + 2 \\ v_3' = v_3 - 5 \\ x_i' = x_i + v_i', \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}.$$

再带入初值得到

$$\begin{cases} v_1' = 3, x_1' = 2 \\ v_2' = 3, x_2' = 3 \\ v_3' = -6, x_3' = -3 \end{cases}.$$

(3) 根据隐式欧拉积分公式的一般形式有

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + M^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{v}', t')\delta t \\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}'\delta t \end{cases}$$

其中 M 为主对角线上为 n 个物体的质量的对角矩阵.

对 $\boldsymbol{f}$ 进行 Taylor 展开并略去高阶项有

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}\Delta \boldsymbol{v}.$$

将其带入到隐式欧拉积分的方程中有

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{v} = M^{-1}\delta t(\boldsymbol{f} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\Delta \boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}\Delta \boldsymbol{v}) \\ \Delta \boldsymbol{x} = \delta t(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v}) \end{cases}.$$

带入消去 $\Delta \boldsymbol{x}$ 有

$$\Delta v = M^{-1}\delta t(f + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\delta t(\boldsymbol{v} + \Delta \boldsymbol{v})) + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}\Delta \boldsymbol{v}).$$

整理得

$$\left(M - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\delta t)^2 - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}\delta t\right)\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\delta t + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\delta t)^2.$$

解此方程得到 $\Delta \boldsymbol{v}$, 进而计算 $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{x}'$.

回到原问题, 注意到 f 仅是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数, 从而方程简化为

$$\left(M - \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\delta t)^2\right)\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}\delta t + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\delta t)^2.$$

进一步的, 由 $f_i = \sum\limits_{j \neq i} k \cdot \mathrm{sgn}(x_j - x_i)(|x_j - x_i| - l_0)$ 得到:

- $i \neq j$ 时, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = k$.
- $i = j$ 时, $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = -(n-1)k$.

因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-(n-1)k & k & \cdots & k\\ k & -(n-1)k & \cdots & k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ k & k & \cdots & -(n-1)k\end{bmatrix}$$

带入具体数据后解方程得到

$$\Delta\boldsymbol{v}=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)^{\top}.$$

从而

$$\boldsymbol{v}'=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)^{\top},\boldsymbol{x}'=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)^{\top}.$$

3

解答.

(1) 根据纯策略纳什均衡的定义知所有的符合条件的均衡点为 (A:v,B:x) 和 (A:u,B:z).

(2) 不存在纯纳什策略均衡. 记 A 的混合策略为 $(p,1-p)^{\top}$, B 的混合策略为 $(q,1-q)^{\top}$.

对于 B, 假设已知 p, 那么 A 的最小收益为 $\min(2p-3(1-p),-5p+3(1-p))=\min(5p-3,-8p+3)$, A 为了使其最大, 有 $p=\frac{6}{13}$.

对于 A, 假设已知 q, 那么 A 的最大收益为 $\max(2q-5(1-q),-3q+3(1-q))=\max(7q-5,-6q+3)$, B 为了使其最小有 $q=\frac{8}{13}$.

从而混合策略纳什均衡为 $(\frac{6}{13},\frac{7}{13})^{\top}$ 和 $(\frac{8}{13},\frac{5}{13})^{\top}$. 此时 A 的收益为 $-\frac{9}{13}$.