人工智能引论 第三次作业

周子锐 2100011032

2023 年 4 月 17 日

1

解答. 平方损失函数为

$$L(f(x_i), y_i) = (f(x_i) - y_i)^2.$$

在本题中, $f(x) = wx + b$, 需要最小化的函数为

$$J(w, b) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L(f(x_i), y_i) = \frac{1}{3}\left[(b-1)^2 + (2w+b-1)^2 + (3w+b-4)^2\right]$$

求偏导得

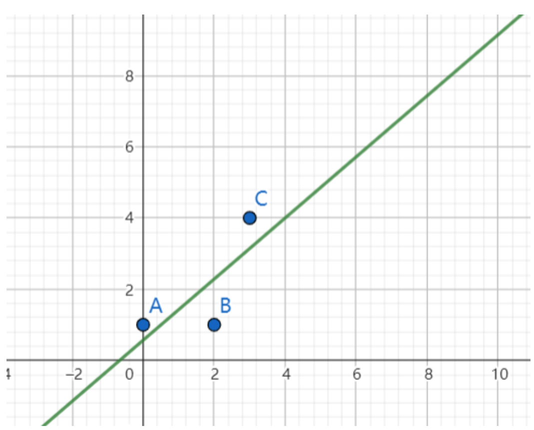
$$\frac{\partial J}{\partial w} = \frac{1}{3}[4(2w+b-1) + 6(3w+b-4)] = \frac{1}{3}(26w + 10b - 28)$$
$$\frac{\partial J}{\partial b} = \frac{1}{3}[2(b-1) + 2(2w+b-1) + 2(3w+b-4)] = \frac{2}{3}(5w + 3b - 6)$$

令偏导数为 0 得到

$$w = \frac{6}{7}, \quad b = \frac{4}{7}$$

由于 J 的最小值一定存在, 故上面求出的即为使 J 最小的 w 和 b.

各数据点和回归曲线的示意图如下:



2

解答.

(1) $P(y=1|x=x_i)=\sigma(f(x_i))=\sigma(w^\top x_i+b)$

$P(y=0|x=x_i)=1-P(y=1|x=x_i)=1-\sigma(w^\top x_i+b)=\sigma(-(w^\top x_i+b))$.

(2) 最大似然估计要求最大化下式的值:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n P(y=y_i|x=x_i)=&\prod_{i=1}^n P(y=1|x=x_i)^{y_i}(y=0|x=x_i)^{1-y_i}\\=&\prod_{i=1}^n \sigma(w^\top x_i+b)^{y_i}\sigma(-(w^\top x_i+b))^{1-y_i}\end{aligned}$$

对其取对数得到对数似然函数

$$\begin{aligned}L(w,b)=&\sum_{i=1}^n y_i\log\sigma(w^\top x_i+b)+(1-y_i)\log\sigma(-(w^\top x_i+b))\\=&-\sum_{i=1}^n\Big(y_i\log(1+\exp(-w^\top x_i-b))+(1-y_i)\log(1+\exp(w^\top x_i+b))\Big)\end{aligned}$$

3

解答.

(1) 下用 log 指代以 2 为底的对数.

记集合 D 为全集, 属性 A 的可能取值为 $\{0,1\}$.

集合 D 的熵为 $H(D)=-\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}+\log 3$.

集合 $D^{A=0}$ 的熵为 $H(D^{A=0})=0$.

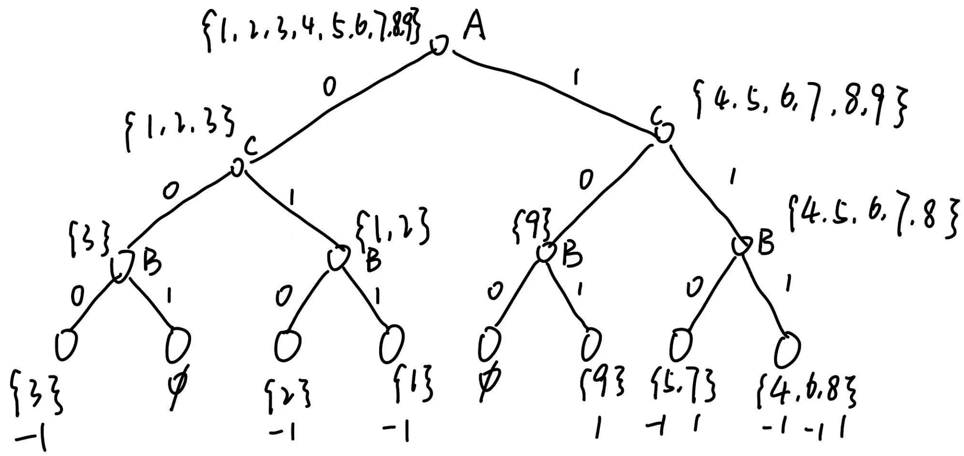
集合 $D^{A=1}$ 的熵为 $H(D^{A=1})=1$.

属性 A 对集合 D 的增益 $g(D,A)=H(D)-\sum_i\frac{|D^{A=a_i}|}{|D|}H(D^{A=a_i})=-\frac{2}{3}+\log 3-\left(\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{2}{3}\cdot 1\right)=-\frac{4}{3}+\log 3$

集合 D 上属性 A 的熵 $H_A(D)=-\left(\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}+\log 3$.

综上, 属性 A 的增益率为 $g(D,A)=\frac{g(D,A)}{H_A(D)}=\frac{-\frac{4}{3}+\log 3}{-\frac{2}{3}+\log 3}=\frac{-4+3\log 3}{-2+3\log 3}\approx 0.274$

(2) 分类树如下所示



其中在各节点处标注了当前待分类的集合和分类所使用的属性. 在叶子节点的集合下方还标注了每个数据的标签.

对于数据点 $x_* = [1,1,1]$, 其最终落到分类树上的最右侧的节点. 由于该节点中标签为 -1 的节点数量多于为 1 的节点数量, 故该数据点的分类结果为 -1.

4

解答.

(1) 首先求 $\frac{\partial a_i}{\partial z_j}$.

- $i = j$ 时,

$$\frac{\partial a_i}{\partial z_i} = \frac{e^{z_i}(\sum_j e^{z_j}) - (e^{z_i})^2}{(\sum_j e^{z_j})^2} = a_i - a_i^2.$$

- $i \neq j$ 时,

$$\frac{\partial a_i}{\partial z_j} = \frac{0 - e^{z_i}e^{z_j}}{(\sum_j e^{z_j})^2} = -a_i a_j.$$

故 $\frac{\partial L}{\partial z} = \left(\frac{\partial L}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial z_n}\right)^\top$, 其中

$$\frac{\partial L}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial a_i}\frac{\partial a_i}{\partial z_j} = a_j\left(\frac{\partial L}{\partial a_j} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial a_i} a_i\right).$$

(2) 记上一问的 a_i 为 b_i, 则在这里有 $a_i = \ln b_i$, 从而

$$\frac{\partial a_i}{\partial z_j} = \frac{\partial a_i}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial z_j} = \frac{1}{b_i}\frac{\partial b_i}{\partial z_j}.$$

利用上一问的结果求 $\frac{\partial a_i}{\partial z_j}$.

- $i = j$ 时,
$$\frac{\partial a_i}{\partial z_i} = \frac{1}{b_i} b_i - b_i^2 = 1 - b_i = 1 - e^{a_i}.$$
- $i \neq j$ 时,
$$\frac{\partial a_i}{\partial z_j} = -\frac{1}{b_i} \cdot b_i b_j = -b_j = -e^{a_j}.$$

故 $\frac{\partial L}{\partial z} = \left(\frac{\partial L}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial L}{\partial z_n}\right)^\top$, 其中

$$\frac{\partial L}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial z_j} = \frac{\partial L}{\partial a_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial a_i} e^{a_i}.$$