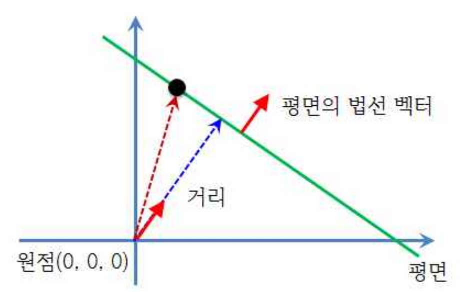
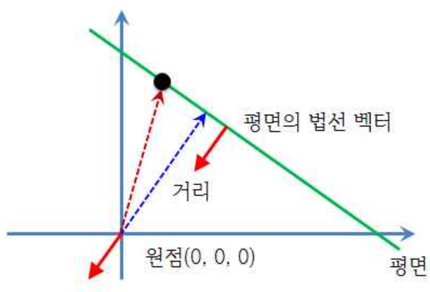
1. 3D 그래픽 기초(3D Graphics Fundamentals)

(5) 평면(Plane)의 이해

① 평면(Plane)

평면은 3차원 공간에서 무한히 확장하는 무한히 얇은 면이다. 평면을 표현하기 위하여 평면이 향하고 있는 방향이 필요하다. 그리고 같은 방향을 갖는 많은 평면들을 구분하기 위하여 원점에서 평면까지의 거리가 필요하다. 평면의 방향은 다음 그림과 같이 원점에서 멀어지는 경우와 원점을 향하고 있는 두 가지의 경우가 있다. 평면이 향하고 있는 방향을 평면의 법선 벡터(Normal vector)라고 한다.





평면의 법선 벡터가 원점에서 멀어지도록 향하고 있으면 원점은 평면 뒤에 있다. 이 경우 원점에서 평면까지의 거리는 음수(Negative)로 정의한다. 평면의 법선 벡터가 원점을 향하고 있으면 원점은 평면 앞에 있으며 원점에서 평면까지의 거리는 양수(Positive)로 정의한다. 유사하게 어떤 한 점에서 평면까지의 거리(수직 거리)는 그 점이 평면의 법선 벡터 방향에 있으면 양수, 그렇지 않으면 음수로 정의한다. 한 점에서 평면까지의 거리가 양수이면 그 점은 “평면 앞에 있다“라고 하고, 한 점에서 평면까지의 거리가 음수이면 그 점은 ”평면 뒤에 있다“라고 한다.

평면을 표현하기 위하여 평면의 법선 벡터와 원점에서 평면까지의 거리가 필요하므로 평면은 다음과 같은 구조체로 표현할 수 있다.

```
struct Plane
{
    Vector      normal;             //평면의 법선 벡터
    float       distance;           //원점에서 평면까지의 거리
};
```

다각형이 어떤 평면에 속하는 가를 알기 위해서 또는 평면의 법선 벡터를 알기 위해서 다각형의 법선 벡터를 계산하면 된다. 다각형의 법선 벡터를 계산하기 위하여 벡터의 외적 연산을 사용한다.

원점에서 평면까지의 거리는 벡터의 내적 연산(직교 투영)으로 구할 수 있다. 벡터 a와 b가 단위 벡터일 때, 두 벡터의 내적 연산의 결과는 두 벡터가 이루는 각도 θ의 $\cos(\theta)$와 같다.

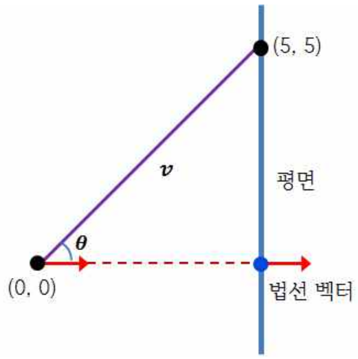
$$a \cdot b = |a||b|\cos(\theta) = \cos(\theta) \qquad (\because |a| = 1, |b| = 1)$$

그러나 벡터 a가 단위 벡터이고 벡터 b가 단위 벡터가 아니면, 두 벡터의 내적은 단위 벡터가 아닌 벡터의 크기와 두 벡터가 이루는 각도 θ의 $\cos(\theta)$의 곱이 된다.

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\theta) = |b|\cos(\theta) \qquad (\because |a| = 1)$$

다음 그림에서 벡터 v와 법선 벡터 n의 내적 연산은 벡터의 v의 크기(길이)에 $\cos(\theta)$을 곱한 것이고, 직각삼각형의 삼각비(cosine)에 의하여 빨간색 점선의 길이가 된다.

$$v \cdot n = |v||n|\cos(\theta) = |v|\cos(\theta) \qquad (\because |n| = 1)$$

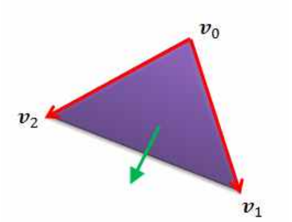


즉, 단위 벡터와 단위 벡터가 아닌 벡터의 내적은 단위 벡터가 아닌 벡터의 크기(길이)를 단위 벡터에 투영한 것이다. 이때 투영된 벡터(선분)의 길이가 원점에서 평면까지의 거리가 된다. 즉, 평면의 법선 벡터가 단위 벡터이고 평면 위의 한 점을 나타내는 벡터가 주어지면 이 벡터를 평면의 법선 벡터와 내적 연산을 하면 원점에서 평면까지의 거리를 계산할 수 있다.

다각형(삼각형)의 세 점이 주어지면 다각형을 포함하는 평면을 다음과 같이 구할 수 있다.

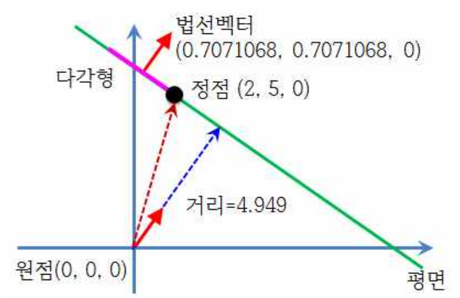
```
Plane GetPolygonPlane(Vector v0, Vector v1, Vector v2)
{
    Plane plane;
    Vector edge1 = Vector3Subtract(v1, v0);
    Vector edge2 = Vector3Subtract(v2, v0);
    Vector normal = Vector3CrossProduct(edge1, edge2);
    plane.normal = Vector3Normalize(normal);
    plane.distance = Vector3DotProduct(v0, plane.normal);

    return(plane);
}
```



평면 위의 한 점이 주어지면 평면까지의 거리를 계산할 수 있으므로, 평면을 다음과 같이 표현할 수도 있다. 원점에서 평면까지의 거리를 계산하기 위하여 두 개의 벡터가 필요하다. 첫 번째 벡터는 평면의 법선 벡터이다. 두 번째 벡터는 원점에서 평면 위의 점까지의 벡터이다(평면 위의 점 벡터). 이 두 벡터의 내적은 원점에서 평면까지의 거리이다.

```
struct Plane
{
    Vector normal;              //평면의 법선 벡터
    Vector point;               //평면위의 한 점
};
```

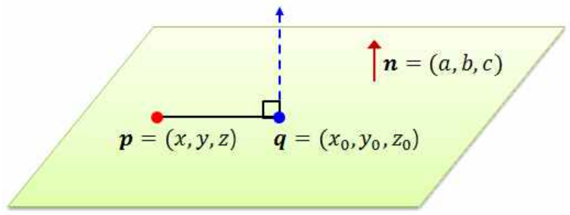


② 평면의 방정식(Plane Equation)

평면은 평면의 법선 벡터 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$와 원점에서 평면까지의 거리 d로 표현할 수 있다. 수학적으로 평면의 방정식은 다음과 같다. 이것은 평면 위의 임의의 점 (x,y,z)는 $ax+by+cz+d=0$을 만족한다는 것을 의미한다. a, b, c는 평면의 법선 벡터 (a,b,c)이고 d는 원점에서 평면까지의 거리이다.

$$ax+by+cz+d=0$$

다음은 평면 위의 임의의 선분과 평면의 법선 벡터는 수직임을 이용하여 평면의 방정식을 유도하는 과정을 보이고 있다. 즉, 평면 위의 한 점 $\boldsymbol{q}=(x_0,y_0,z_0)$와 평면의 법선 벡터 $\boldsymbol{n}$이 주어질 때, 평면 위의 임의의 점 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$에 대하여 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})=0$임을 사용하여 평면의 방정식을 유도하고 있다.



- 평면의 방정식

$$\boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = 0$$

$$\boldsymbol{n} \bullet (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{n} \bullet ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$$(a, b, c) \bullet ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = (a, b, c) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(ax - ax_0) + (by - by_0) + (cz - cz_0) = 0$$

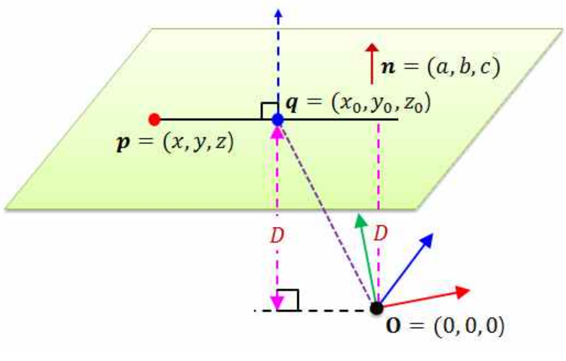
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

위의 평면의 방정식에서 $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$의 의미를 다음 그림에서 생각해 보자. $(ax_0 + by_0 + cz_0)$는 평면의 법선 벡터 (a, b, c)와 평면 위의 한 점 (x_0, y_0, z_0)의 내적을 의미한다. 벡터 (a, b, c)가 단위 벡터($\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$)이면 $(ax_0 + by_0 + cz_0)$는 원점에서 평면까지의 거리(다음 그림에서 보라색 점선의 길이)가 된다.



$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \qquad (\because (a, b, c)\text{가 단위 벡터})$$

$$\boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{n} = (x_0, y_0, z_0) \bullet (a, b, c) = ax_0 + by_0 + cz_0 = D$$

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0) = -D$$

즉, 평면의 법선 벡터 (a, b, c)가 단위 벡터이면 $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$는 원점에서

평면까지의 거리를 의미한다. 평면의 방향이 원점에서 멀어지는 경우 원점에서 평면까지의 거리를 음수로 나타내기 위하여 음수 부호를 사용한다.

평면은 네 개의 실수 (a, b, c, d)로 표현할 수 있다. 이때 (a, b, c)는 평면의 법선 벡터(단위 벡터)이고, d는 원점에서 평면까지의 거리이다. d가 음수이면 원점은 평면의 뒤에 있고 d가 양수이면 원점은 평면 앞에 있다. 어떤 점이 평면의 앞에 있다는 것은 그 점이 평면에서 평면의 법선 벡터 방향에 위치함을 의미한다. 어떤 점이 평면의 뒤에 있다는 것은 그 점이 평면에서 평면의 법선 벡터의 반대 방향에 위치함을 의미한다.

평면의 법선 벡터가 0 벡터가 아닌 평면의 방정식 $ax + by + cz + d = 0$이 주어지면, 평면의 법선 벡터가 단위 벡터가 되도록 표현할 수 있다. 평면의 방정식의 양변을 평면의 법선 벡터의 크기로 나누면 $a^{'}x + b^{'}y + c^{'}z + d^{'} = 0$된다. 평면의 법선 벡터가 단위 벡터가 되도록 하는 것을 평면을 정규화(Plane normalize)한다고 한다. 평면을 정규화하면 법선 벡터는 단위 벡터가 되고(방향이 바뀌지 않음), $d^{'}$가 원점에서 평면까지의 거리가 된다.

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$\frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$
$$\frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{by}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$
$$d^{'} = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

다음은 평면을 정규화하는 예이다.

$x + 2y + 2z - 6 = 0$

$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$

원점에서 평면까지의 거리는 2이고 원점은 평면 뒤에 있다.

- 점과 평면의 거리

다음은 임의의 점 $\boldsymbol{r} = (x_1, y_1, z_1)$과 정규화된 평면 $ax + by + cz + d = 0$ 사이의 거리는 $(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$임을 보이고 있다. 이것은 정규화된 평면 $ax + by + cz + d = 0$의 방정식의 왼쪽 식에서 x에 x_1, y에 y_1, z에 z_1을 대입한 것과 같다.

$|\boldsymbol{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$D = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}) = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q}))$

$D = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{q})) = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}((a, b, c) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0))$

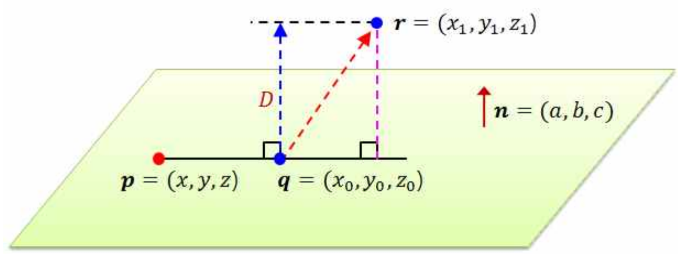
$D = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(ax_1 - ax_0 + by_1 - by_0 + cz_1 - cz_0)$

$D = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0))$

$D = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(ax_1 + by_1 + cz_1 + d)$

$D = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$D = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



임의의 점 (x_1, y_1, z_1)에서 평면 $ax + by + cz + d = 0$까지의 거리는 평면을 정규화하고 점을 정규화된 평면의 방정식의 왼쪽 식에 대입하여 구할 수 있다.

다음은 점 $(-1, -2, -3)$에서 평면 $x + 2y + 2z - 6 = 0$까지의 거리를 구하는 예이다.

$x + 2y + 2z - 6 = 0$

$\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0$

$\frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(-2) + \frac{2}{3}(-3) - 2 = \frac{-17}{3}$

점 $(-1, -2, -3)$에서 평면 $x + 2y + 2z - 6 = 0$까지의 거리는 $\frac{-17}{3}$이다.

그리고 거리가 음수이므로 점 $(-1, -2, -3)$은 평면 뒤에 있다.

③ 점과 평면의 위치 관계

한 점과 하나의 평면에 대하여, 점은 평면 앞에 있거나, 뒤에 있거나, 또는 평면 위에 있을 수 있다(점과 평면의 위치 관계).

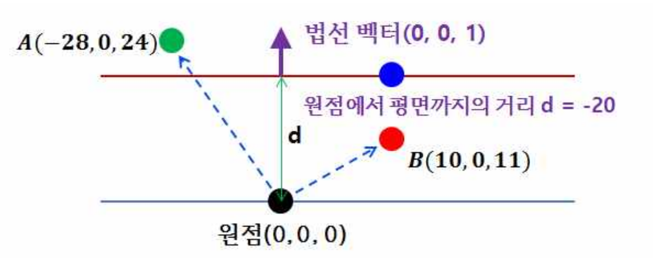
- 평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$이 주어질 때

평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$이 정규화되어 있을 때, 평면의 법선 벡터는 (a,b,c)이고 원점에서 평면까지의 거리는 d이다. 임의의 점 (x_1,y_1,z_1)이 평면 위에 있는지, 평면의 앞 또는 뒤에 있는 가를 검사하기 위하여 $(ax_1+by_1+cz_1+d)$의 부호를 조사하면 된다. $(ax_1+by_1+cz_1+d)$는 평면 $ax+by+cz+d=0$의 방정식의 왼쪽 식에서 x에 x_1, y에 y_1, z에 z_1을 대입한 것을 의미한다. $(ax_1+by_1+cz_1+d)$는 벡터 $(a,b,c,1)$와 (x_1,y_1,z_1,d)의 내적 연산으로 계산할 수 있다.

  - $(ax_1+by_1+cz_1+d)$의 값이 0이면 점 (x_1,y_1,z_1)는 평면 위에 위치한다.
  - $(ax_1+by_1+cz_1+d)$의 값이 양수이면 점 (x_1,y_1,z_1)는 평면 앞에 위치한다.
  - $(ax_1+by_1+cz_1+d)$의 값이 음수이면 점 (x_1,y_1,z_1)는 평면 뒤에 위치한다.

평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$이 정규화되지 않아도 점 (x_1,y_1,z_1)을 평면의 방정식에 대입하여 부호를 조사하면 점과 평면의 위치 관계를 구할 수 있다(정규화를 하여도 부호는 바뀌지 않으므로).

다음은 평면의 법선 벡터가 (0, 0, 1)이고, 원점에서 평면까지의 거리 d가 -20일 때 점과 평면의 위치 관계를 구하는 예이다.



점 $A(-28,0,24)$는 평면의 앞에 위치한다.

$\{(-28\times 0)+(0\times 0)+(24\times 1)+(-20)=4\}>0$

원점에서 점 $A(-28,0,24)$까지의 벡터를 법선 벡터와 내적하면 $|d|$보다 크다.

점 $B(10,0,11)$는 평면의 뒤에 위치한다.

$\{(10\times 0)+(0\times 0)+(11\times 1)+(-20)=-9\}<0$

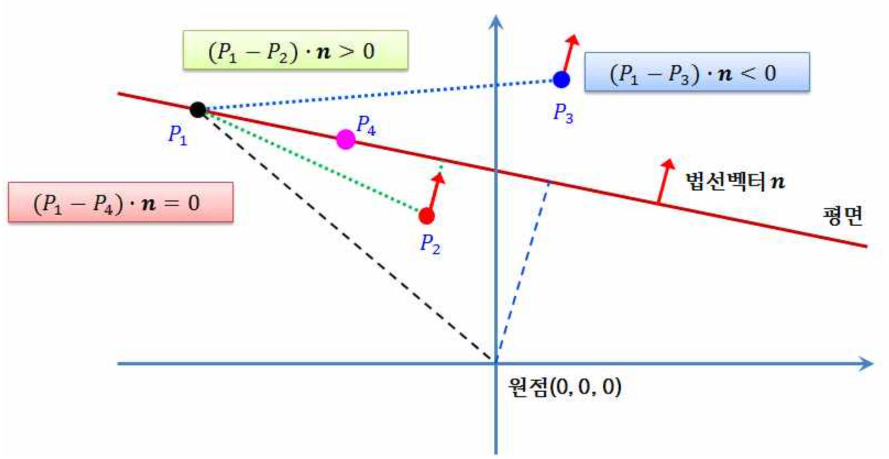
원점에서 점 $B(10,0,11)$까지의 벡터를 법선 벡터와 내적하면 $|d|$보다 작다

- 평면 위의 한 점과 법선 벡터가 주어질 때

평면 위의 한 점과 평면의 법선 벡터를 사용하여 평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$을 구할 수 있지만, 평면 위의 한 점과 평면의 법선 벡터를 사용하여 임의의 한 점과 평면의 위치 관계를 계산할 수 있다. 다음 그림에서 평면 위의 한 점 $\boldsymbol{P}_1$과 평면의 법선 벡터 $\boldsymbol{n}$이 주어지면, 임의의 점 $\boldsymbol{Q}$와 평면의 위치 관계는 점 $\boldsymbol{P}_1$에서 점 $\boldsymbol{Q}$를 뺀 벡

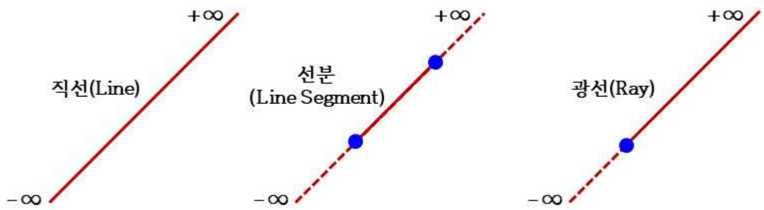
터 $(P_1 - Q)$를 법선 벡터 n에 투영(내적)하여 부호를 조사하면 알 수 있다.

- $(P_1 - Q) \cdot n$가 양수이면 점 Q는 평면 뒤에 위치한다.
- $(P_1 - Q) \cdot n$가 음수이면 점 Q는 평면 앞에 위치한다.
- $(P_1 - Q) \cdot n$가 0이면 점 Q는 평면 위에 위치한다.



④ 광선와 평면의 교점(Ray-Plane Intersection)

한 점에서 한 방향으로 무한히 뻗어 가는 직선(반직선)을 광선(Ray)이라 한다. 광선(광선의 방정식)은 광선의 시작점 벡터 O와 광선의 방향 벡터 D를 사용하여 표현할 수 있다. 이 표현에서 광선 위의 점을 구할 수 있도록 매개변수(Parameter)를 사용하여 표현한다.

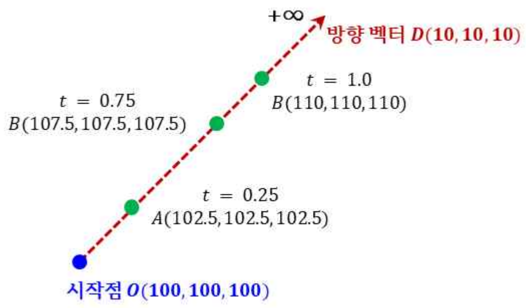


광선의 방정식은 시작점 벡터 O, 광선의 방향 벡터 D, 매개변수 $(t \geq 0)$를 사용하여 다음과 같이 표현한다.

$$R(t) = O + tD$$

다음의 그림에서 시작점 벡터가 $O = (100, 100, 100)$, 광선의 방향 벡터가 $D = (10, 10, 10)$이므로 광선의 방정식은 다음과 같다.

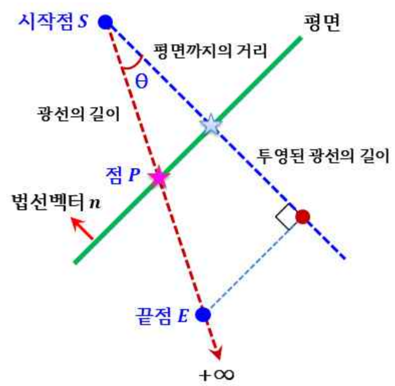
$$R(t) = O + tD = (100, 100, 100) + t(10, 10, 10) = (100 + 10t, 100 + 10t, 100 + 10t)$$



광선과 평면이 주어질 때, 광선과 평면은 세 가지 위치 관계를 갖는다. 광선과 평면이 한 점에서 교차하거나, 광선과 평면이 평행하거나, 광선이 평면 위에 있을 수 있다. 우리는 광선과 평면의 위치 관계를 구하려고 한다. 광선은 광선의 방정식으로 표현할 수 있고, 평면은 평면의 방정식으로 표현할 수 있으므로, 광선과 평면의 위치 관계는 광선의 방정식과 평면의 방정식을 연립하여 해를 구하는 것과 같다. 다음과 같은 두 가지 방법을 알아보자.

- 기하학적 해법(Geometric Solution)

  평면의 방정식 $ax+by+cz+d=0$은 법선 벡터 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$과 평면 위의 점 벡터 $\boldsymbol{P}=(x,y,z)$를 사용하여 벡터 형식 $(\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n})+d=0$으로 표현할 수 있다. 이때 $d=-(\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n})$이다.



  위의 그림과 같이 광선의 시작점이 $\boldsymbol{S}$, 끝점이 $\boldsymbol{E}$이고, 이 광선과 평면의 교점이 $\boldsymbol{P}$라고 하자. 그림과 같이 시작점 $\boldsymbol{S}$가 평면의 앞에 있고 끝점 $\boldsymbol{E}$가 평면의 뒤에 있다면, 광선은 평면을 뚫고 지나간 것이다. 즉, 광선과 평면의 교점이 있다. 교점 $\boldsymbol{P}$는 광선의 방정식을 만족하므로 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{S}+t(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S})$로 표현할 수 있다. 이제 매개변수 t를 구하면 광선과 평면의 교점을 구할 수 있다. 매개변수 $(0 \le t \le 1)$는 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S}|$와 $|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S}|$의 비율이다.

$$t=\frac{|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S}|}$$

  광선의 시작점 $\boldsymbol{S}$에서 평면까지의 거리는 $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S}) \cdot (-\boldsymbol{n})$ 또는 $(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n})+d$이다. $(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{S}) \cdot (-\boldsymbol{n})$는 시작점 $\boldsymbol{S}$에서 교점 $\boldsymbol{P}$까지의 벡터를 평면의 법선 벡터 $(-\boldsymbol{n})$에 투

영한 것이다. $(S \bullet n)+d$는 교점 P가 평면 위의 점이므로 평면의 방정식에 대입한 것이다.

$$S\text{에서 평면까지의 거리} = (P-S) \bullet (-n) = (S \bullet n)+d$$

광선의 시작점 S에서 끝점 E까지의 벡터를 평면의 법선 벡터 $(-n)$에 투영한 것을 투영된 광선의 길이라고 하자.

$$\text{투영된 광선의 길이} = (E-S) \bullet (-n) = |E-S|\cos(\theta)$$

매개변수 t는 다음과 같다(그림에서 두 삼각형이 닮았으므로 닮음비를 사용한다).

$$t = \frac{(S \bullet n)+d}{(E-S) \bullet (-n)}$$

광선의 시작점 S와 끝점 E와 평면의 방정식이 주어지면, 광선과 평면의 교점을 구할 수 있다. 광선의 끝점 E가 평면 앞에 있지 않는 경우에도 위의 해법은 유효하다. 다만, 그 경우에는 교점이 없게 된다.

정리하면, 광선의 시작점 S, 끝점 E, 그리고 평면의 방정식이 주어지면 매개변수 t를 계산한다.

$$t = \frac{(S \bullet n)+d}{(E-S) \bullet (-n)}$$

- $(0 \le t \le 1)$이면 교점은 $P = S + t(E-S)$이다.
- $(t < 0)$이면 광선의 시작점이 평면의 뒤쪽에 있다. 이 경우 광선은 평면과 교차할 수 없다.
- $(t > 1)$이면 평면과의 교점은 광선의 끝점을 지나게 되고 이 경우 교점은 유효하지 않은 것으로 취급한다.
- 투영된 광선의 길이가 0이면($(E-S) \bullet (-n) = 0$) 교점이 없다는 의미이다. 즉, θ가 90도이므로 광선이 평면에 평행하다.
- 광선의 시작점에서 평면까지의 거리($(S \bullet n)+d$)가 음수이면 광선의 시작점이 평면의 뒤쪽에 있다는 의미이다.

- 대수학적 해법(Algebraic Solution)

평면의 방정식 $(P \bullet n)+d=0$과 광선의 방정식 $R(t) = S + t(E-S)$를 연립하여 매개변수 t를 구할 수 있다. 광선과 평면의 교점이 P이라면 P는 광선 위의 점이므로 $P = R(t)$를 만족하는 매개변수 t가 존재한다. $R(t)$를 평면의 방정식 $(P \bullet n)+d=0$에 대입하여 매개변수 t를 구해보자.

$$(P \bullet n)+d = (R(t) \bullet n)+d = 0$$

$$(R(t) \bullet n)+d = ((S+t(E-S)) \bullet n)+d = 0$$

$$(S \bullet n)+t((E-S) \bullet n)+d = 0$$

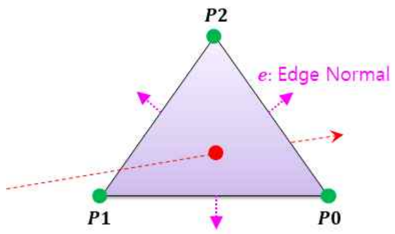
$$t((E-S) \bullet n) = -d-(S \bullet n)$$

$$t = \frac{-(d+(\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{n}))}{(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{S})\cdot \boldsymbol{n}}$$

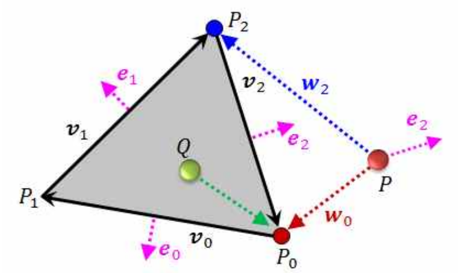
위의 매개변수 t는 기하학적 방법으로 구한 것과 완전히 일치한다.

⑤ 점과 다각형의 포함 관계

이제 점과 평면의 위치 관계를 계산하면 어떤 점이 평면 위의 점인 가를 알 수 있다. 또는 광선과 평면의 교점을 구할 수 있다. 어떤 점이 평면 위에 위치할 때, 그 점이 평면 위에 있는 어떤 다각형 내부의 점인 가를 다음과 같이 판단할 수 있다.



다음 그림과 같이 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$과 점 $\boldsymbol{Q}$가 주어졌다고 가정하자. 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$는 핑크색 삼각기둥의 윗면이라고 생각하자. 점 $\boldsymbol{Q}$는 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$을 포함하는 평면 위의 점이다.



$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_0,\ \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{P}_2$

$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$

$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{n},\ \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{w}_0 = (\boldsymbol{P}_0 - \boldsymbol{Q}),\ \boldsymbol{w}_1 = (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{Q}),\ \boldsymbol{w}_2 = (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{Q})$

- $(\boldsymbol{w}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0) < 0$이면 점 $\boldsymbol{Q}$는 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 외부의 점이다.
- $(\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) < 0$이면 점 $\boldsymbol{Q}$는 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 외부의 점이다.
- $(\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) < 0$이면 점 $\boldsymbol{Q}$는 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 외부의 점이다.
- $(\boldsymbol{w}_0 \cdot \boldsymbol{e}_0) \geq 0$, $(\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) \geq 0$, 그리고 $(\boldsymbol{w}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) \geq 0$이면 점 $\boldsymbol{Q}$는 삼각형 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 내부의 점이다.

위의 그림에서 점 Q는 삼각형 내부의 점이고 점 P는 $(w_2 \cdot e_2) < 0$이므로 삼각형 외부의 점이다.

다음은 점이 삼각형 내부에 있는 가를 검사하는 함수의 예이다.

```
bool PointInTriangle(Vector point, Vector p0, Vector p1, Vector p2)
{
    Vector v0 = Vector3Subtract(p1, p0);
    Vector v1 = Vector3Subtract(p2, p1);
    Vector v2 = Vector3Subtract(p0, p2);
    Vector normal = Vector3CrossProduct(v1, v2);
    normal = Vector3Normalize(normal);
    Vector e0 = Vector3CrossProduct(v0, normal);
    Vector w0 = p0 - point;
    if (Vector3DotProduct(w0, e0) < 0.0f) return(false);
    Vector e1 = Vector3CrossProduct(v1, normal);
    Vector w1 = p1 - point;
    if (Vector3DotProduct(w1, e1) < 0.0f) return(false);
    Vector e2 = Vector3CrossProduct(v2, normal);
    Vector w2 = p2 - point;
    if (Vector3DotProduct(w2, e2) < 0.0f) return(false);

    return(true);
}
```

⑥ 충돌 검사(Collision Detection)

슈팅(Shooting) 게임을 생각해 보자. 어떤 캐릭터 A가 적 캐릭터 B를 향하여 총을 쏘는 문제를 생각해 보자. 캐릭터 A가 적 캐릭터 B를 향하여 총을 쏘려면, 캐릭터 A가 적 캐릭터 B를 향하도록 회전해야 한다. 회전할 방향은 벡터 $(B-A)$이다. 캐릭터 A가 현재 향하고 있는 방향(로컬 z-축)을 $look$ 벡터라고 하면, 캐릭터 A의 회전축은 벡터 $look$와 $(B-A)$의 외적 연산으로 구할 수 있고, 회전 각도는 내적으로 구할 수 있다. 또한 스칼라 삼중적을 사용하면 최단 회전 방향을 구할 수 있다.

이제, 캐릭터 A가 회전하여 적 캐릭터 B를 향하고 있다고 가정하자. 캐릭터 A가 총을 쏘면 총알이 게임 세상에서 이동할 것이다. 총알의 초기 위치는 총구의 위치 벡터 g이고, 총알의 이동 방향(총구의 방향)은 캐릭터 A가 현재 향하고 있는 방향(로컬 z-축) 벡터 $look$이라고 가정하자. 총알의 이동 속력을 s㎧이라고 하면 한 프레임 Δt 동안 이동을 하는 거리는 $(s\Delta t)$이다. 총알의 이동은 벡터 $look$에 스칼라 $(s\Delta t)$를 곱한 벡터를 총알의 위치 벡터 g에 더하여 새로운 총알의 위치 벡터 g를 구하는 것이다. 매 프레임마다 이 과정을 반복하면 총알은 게임 세상에서 잘 움직이고 있을 것이다.

다음으로 총알이 움직일 때마다 총알이 적 캐릭터 B를 뚫고 지나갔는가를 검사해야 한다. 총알이 적 캐릭터 B를 뚫고 지나갔다면, 적 캐릭터 B를 게임 세상에서 없애야 한다

(죽었음). 그러면 어떻게 총알이 적 캐릭터 B를 뚫고 지나갔는가를 검사할 수 있을까를 생각해보자. 총알은 직선 운동을 한다고 가정하면, 총알의 궤적은 발사 시작점에서 총알의 유효 사거리까지의 광선이라고 생각할 수 있다. 매 프레임마다, 광선의 시작점은 현재 순간의 총알의 위치 벡터 $\boldsymbol{g}$이고, 광선의 끝점은 $(\boldsymbol{g}+(s\Delta t)\boldsymbol{look})$이다. 적 캐릭터 B는 메쉬(모델)을 가지고 있고, 메쉬는 삼각형의 집합이다. 우리는 하나의 삼각형이 주어지면 삼각형을 포함하는 평면의 방정식을 구할 수 있다. 또한, 총알의 궤적을 나타내는 광선과 평면의 교점을 구할 수 있다. 만약 교점이 있다면, 교점이 삼각형의 내부의 점인가를 검사할 수 있다. 교점이 삼각형의 내부의 점이라면 총알이 적 캐릭터 B의 메쉬의 일부(삼각형)를 뚫고 지나간 것이다. 이 과정을 메쉬를 구성하는 모든 삼각형들에 대하여 반복하면 총알과 적 캐릭터 B와의 충돌 검사를 할 수 있다. 물론 이 방법이 가장 좋은 충돌 검사의 방법은 아님에 주의하라.