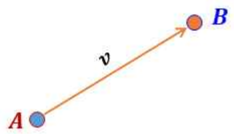
1. 3D 그래픽 기초(3D Graphics Fundamentals)

(8) DirectX Math

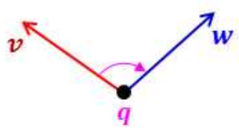
⑨ 사원수(Quaternion)

- 사원수에 대한 이해

  점 $\boldsymbol{A}$와 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어지면 점 $\boldsymbol{B}$를 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}$와 같이 유일하게 결정할 수 있다. 즉, 점 벡터는 위치(이동)를 나타내는 정보이고 벡터의 덧셈은 위치를 바꾸는 연산이라고 할 수 있다.



  사원수는 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어질 때 회전을 하여 새로운 방향 벡터 $\boldsymbol{w}$를 유일하게 결정할 수 있는 회전 정보이다. 즉, 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$와 회전 정보($\boldsymbol{q}$)를 가지고 연산($*$, 회전)을 하면 ($\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}*\boldsymbol{q}$), 방향 벡터 $\boldsymbol{v}$가 방향 벡터 $\boldsymbol{w}$와 방향이 같아질 수 있도록 회전 정보($\boldsymbol{q}$, 사원수)와 연산($*$, 회전)을 정의하자.



- 사원수의 정의

  $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,k)$일 때, 사원수 $\boldsymbol{q}$는 다음과 같이 4개의 실수를 가진 4-차원 벡터로 정의한다. 3-차원 벡터 (x,y,z)는 사원수 $(x,y,z,0)$와 동차이다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}+w$$

  사원수는 다음과 같이 벡터 부분 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$와 실수 부분 w로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w),\ \boldsymbol{u}=(x,y,z)$$

  영 사원수(Zero Quaternion)는 모든 요소가 0인 사원수 $\boldsymbol{0}=(0,0,0,0)$이다.

- 사원수의 상등(Equality)

  사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$가 주어질 때, 사원수의 상등, 덧셈, 뺄셈, 곱셈을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}_1=(x_1,y_1,z_1,w_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}+w_1=(\boldsymbol{u},w_1)\qquad \boldsymbol{u}=(x_1,y_1,z_1)$$

$$\boldsymbol{q}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2) = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2 = (\boldsymbol{v}, w_2) \qquad \boldsymbol{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 상등은 다음과 같이 정의한다(대응하는 요소들이 같아야 함). 사원수를 4차원 벡터로 보면 벡터의 상등과 같다.

$$(\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_1) \Leftrightarrow (x_1 = x_2), (y_1 = y_2), (z_1 = z_2), (w_1 = w_2)$$

$$(\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_2) \Leftrightarrow (\boldsymbol{u}, w_1) = (\boldsymbol{v}, w_2) \Leftrightarrow (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, w_1 = w_2)$$

- 사원수의 덧셈(Addition)과 뺄셈(Subtraction)

  사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 덧셈과 뺄셈은 다음과 같이 정의한다(벡터의 덧셈, 뺄셈과 같다).

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 + z_2)\boldsymbol{k} + (w_1 + w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) + (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 = (x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{j} + (z_1 - z_2)\boldsymbol{k} + (w_1 - w_2)$$

$$\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) - (x_2, y_2, z_2, w_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2)$$

- 사원수의 곱셈(Multiplication)

  사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정의한다(다항식의 곱셈과 유사하다).

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 &= (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2)\\ &= x_1x_2\boldsymbol{i}^2 + x_1y_2\boldsymbol{ij} + x_1z_2\boldsymbol{ik} + x_1\boldsymbol{i}w_2 + y_1x_2\boldsymbol{ji} + y_1y_2\boldsymbol{j}^2 + y_1z_2\boldsymbol{jk} + y_1w_2\boldsymbol{j}\\ &\quad + z_1x_2\boldsymbol{ki} + z_1y_2\boldsymbol{kj} + z_1z_2\boldsymbol{k}^2 + z_1w_2\boldsymbol{k} + w_1x_2\boldsymbol{i} + w_1y_2\boldsymbol{j} + w_1z_2\boldsymbol{k} + w_1w_2\end{aligned}$$

  $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$에 대하여 다음을 정의한다.

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{ji},\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{kj},\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{ik}$$

  이제 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 &= (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2)\\ &= (x_2w_1 - y_2z_1 + z_2y_1 + w_2x_1)\boldsymbol{i} + (x_2z_1 + y_2w_1 - z_2x_1 + w_2y_1)\boldsymbol{j}\\ &\quad + (-x_2y_1 + y_2x_1 + z_2w_1 + w_2z_1)\boldsymbol{k} + (-x_2x_1 - y_2y_1 - z_2z_1 + w_2w_1)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2) = \boldsymbol{q}_3 = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k} + w_1)(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k} + w_2) = (x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k} + w_3)$$

$$x_3 = x_2w_1 - y_2z_1 + z_2y_1 + w_2x_1$$

$$y_3 = x_2z_1 + y_2w_1 - z_2x_1 + w_2y_1$$

$$z_3 = -x_2y_1 + y_2x_1 + z_2w_1 + w_2z_1$$

$$w_3 = -x_2x_1 - y_2y_1 - z_2z_1 + w_2w_1$$

3차원 벡터 $\boldsymbol{u}=(x_1, y_1, z_1)$와 $\boldsymbol{v}=(x_2, y_2, z_2)$의 외적 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$과 내적 $(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})$는 다음과 같다.

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(y_1z_2-z_1y_2, z_1x_2-x_1z_2, x_1z_1-y_1x_2)$$
$$\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 3차원 벡터의 외적과 내적을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2=(x_1, y_1, z_1, w_1)(x_2, y_2, z_2, w_2)=(\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2)=(x_3, y_3, z_3, w_3)$$
$$\begin{aligned}&w_2\boldsymbol{u}+w_1\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\&=w_2(x_1, y_1, z_1)+w_1(x_2, y_2, z_2)+(y_1z_2-z_1y_2, z_1x_2-x_1z_2, x_1z_1-y_1x_2)\\&=(x_2w_1-y_2z_1+z_2y_1+w_2x_1, x_2z_1+y_2w_1-z_2x_1+w_2y_1, -x_2y_1+y_2x_1+z_2w_1+w_2z_1)\\&=(x_3, y_3, z_3)\end{aligned}$$
$$w_3=-x_2x_1-y_2y_1-z_2z_1+w_2w_1=w_1w_2-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=w_1w_2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 $\boldsymbol{q}_2$의 곱셈 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2=(\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2)=(w_2\boldsymbol{u}+w_1\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}), w_1w_2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}))$$

사원수의 곱셈에 대한 교환 법칙은 성립하지 않지만 결합 법칙은 성립한다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\neq\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_1$$
$$\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3)=(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)\boldsymbol{q}_3$$

사원수의 곱셈에 대한 항등원 $\boldsymbol{e}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{e}=(0, 0, 0, 1)=(\boldsymbol{0}, 1)$$
$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$$

사원수의 덧셈과 곱셈에 대한 분배 법칙이 다음과 같이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3)=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_3$$
$$(\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2)\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_3+\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_3$$

- 실수와 3차원 벡터의 사원수 표현

  실수와 사원수에 대하여 다음을 정의한다. 즉, 실수 s는 벡터부분이 $\boldsymbol{0}$벡터이고 실수부분이 s인 사원수와 같다.

$$s=(0, 0, 0, s)$$

3-차원 벡터는 실수 부분이 0인 사원수와 같다.

$$\boldsymbol{u} = (x, y, z) = (\boldsymbol{u}, 0) = (x, y, z, 0)$$

실수 s를 사원수로 취급할 수 있으므로 실수 s와 사원수 $\boldsymbol{q}$의 곱을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$s\boldsymbol{q} = s(x, y, z, w) = (0, 0, 0, s)(x, y, z, w) = (sx, sy, sz, sw)$

$\boldsymbol{q}s = (x, y, z, w)s = (x, y, z, w)(0, 0, 0, s) = (sx, sy, sz, sw) = s\boldsymbol{q}$

- 사원수의 켤레(Conjugate)

  사원수 $\boldsymbol{q}$의 켤레(Conjugate) 사원수 $\boldsymbol{q}^*$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w),\ \boldsymbol{u} = (x, y, z)$$
$$\boldsymbol{q}^* = (-x, -y, -z, w) = (-\boldsymbol{u}, w)$$

켤레 사원수에 대하여 다음의 성질이 성립한다.

$$(\boldsymbol{q}^*)^* = \boldsymbol{q}$$
$$(s\boldsymbol{q}^*) = s\boldsymbol{q}^*$$
$$(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^*$$
$$(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_1^* + \boldsymbol{q}_2^*$$
$$\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w) + (-\boldsymbol{u}, w) = (\boldsymbol{0}, 2w) = 2w$$
$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = |\boldsymbol{u}|^2 + w^2 = \boldsymbol{q}^*\boldsymbol{q}$$

- 사원수의 크기(Norm)

  사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기(Norm)을 다음과 같이 정의한다.

$$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{|\boldsymbol{u}|^2 + w^2}$$

크기가 1인 사원수를 단위 사원수(Unit Quaternion)라고 한다. 사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 $\hat{\boldsymbol{q}}$으로 표기한다($|\hat{\boldsymbol{q}}| = 1$).

사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기에 대하여 다음 성질이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^* = |\boldsymbol{q}|^2$$
$$|\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2| = \sqrt{(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|^2\boldsymbol{q}_1^*} = \sqrt{\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^*|\boldsymbol{q}_2|^2} = \sqrt{|\boldsymbol{q}_1|^2|\boldsymbol{q}_2|^2} = |\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2|$$
$$|\boldsymbol{q}^*| = |\boldsymbol{q}|$$
$$|\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2|^2 = (\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^* = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^*\boldsymbol{q}_1^* = \boldsymbol{q}_1|\boldsymbol{q}_2|^2\boldsymbol{q}_1^* = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^*|\boldsymbol{q}_2|^2 = |\boldsymbol{q}_1|^2|\boldsymbol{q}_2|^2$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_2$의 곱 $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$은 단위 사원수이다.

- 사원수 곱셈의 항등원(Identity)

사원수 곱셈의 항등원은 $\boldsymbol{I} = (\mathbf{0}, 1) = (0, 0, 0, 1)$이다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w),\ \boldsymbol{u} = (x, y, z)$$

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u}, w) = (x, y, z, w) = \boldsymbol{q}$$

- 사원수의 역(Inverse)

사원수 $\boldsymbol{q}$가 영 사원수가 아닐 때, $\boldsymbol{q}$의 역(Inverse) 사원수 $\boldsymbol{q}^{-1}$를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}^{-1} = \frac{\boldsymbol{q}^*}{|\boldsymbol{q}|^2}$$

사원수 $\boldsymbol{q}$의 역 $\boldsymbol{q}^{-1}$에 대하여 다음이 성립한다.

$$(\boldsymbol{q}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{q}$$

$$(s\boldsymbol{q})^{-1} = \frac{1}{s}(\boldsymbol{q}^{-1}) = s^{-1}(\boldsymbol{q}^{-1})$$

$$(-\boldsymbol{q})^{-1} = -(\boldsymbol{q}^{-1})$$

$$(\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2)^{-1} = \boldsymbol{q}_2^{-1}\boldsymbol{q}_1^{-1}$$

$$\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}\frac{\boldsymbol{q}^*}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{|\boldsymbol{q}|^2}{|\boldsymbol{q}|^2} = 1 = (0, 0, 0, 1) = \boldsymbol{I}$$

사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{q}^{-1}$$

$$|\boldsymbol{q}^{-1}| = |\boldsymbol{q}^*| = |\boldsymbol{q}| = 1$$

- 사원수의 내적(Dot Product)

사원수 $\boldsymbol{q}_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1) = (\boldsymbol{u}_1, w_1)$과 $\boldsymbol{q}_2 = (x_2, y_2, z_2, w_2) = (\boldsymbol{u}_2, w_2)$가 주어질 때 사원수의 내적 $(\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2)$을 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 = (x_1, y_1, z_1, w_1) \cdot (x_2, y_2, z_2, w_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2$$

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}_1, w_1) \cdot (\boldsymbol{u}_2, w_2) = (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2, w_1w_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + w_1w_2$$

사원수 $\boldsymbol{q}_1 = (\boldsymbol{u}_1, w_1)$과 사원수 $\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}_2, w_2)$의 내적은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + w_1w_2 = |\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2|cos(\theta)$$

사원수 $\boldsymbol{q}$의 크기와 내적 사이에 다음 성질이 성립한다.

$$\sqrt{\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q}} = |\boldsymbol{q}|,\ \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} = |\boldsymbol{q}|^2$$

- 단위 사원수의 회전 표현

사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w),\ \boldsymbol{u} = (x, y, z)$$

$$|\boldsymbol{q}| = 1$$

$$|\boldsymbol{q}| = \sqrt{\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} = \sqrt{|\boldsymbol{u}|^2 + w^2}$$

$$|\boldsymbol{q}|^2 = 1 = |\boldsymbol{u}|^2 + w^2$$

$(|\boldsymbol{u}|^2 + w^2 = 1)$이면 $(-1 \le w \le 1)$이다$(|\boldsymbol{u}|^2 \ge 0)$.

$(-1 \le w \le 1)$이면 $w = cos(\theta)$인 θ가 존재한다$(0 \le \theta \le \pi)$.

$$sin^2(\theta) = 1 - cos^2(\theta) = 1 - w^2 = |\boldsymbol{u}|^2$$

$$|\boldsymbol{u}|^2 = |sin(\theta)| = sin(\theta) \qquad (\because 0 \le \theta \le \pi)$$

$$\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{\boldsymbol{u}}{sin(\theta)} = \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{u} = sin(\theta)\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w) = (sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta))$$

$(0 \le \theta \le \pi)$일 때, $sin(-\theta) = -sin(\theta)$이고 $cos(-\theta) = cos(\theta)$이므로 $\boldsymbol{q}^*$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q}^* = (-sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta)) = (sin(-\theta)\boldsymbol{n}, cos(-\theta))$$

앞에서 사원수 $(\boldsymbol{u}, w_1)$과 사원수 $(\boldsymbol{v}, w_2)$의 곱셈을 다음과 같이 표현할 수 있음을 증명하였다.

$$\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2 = (\boldsymbol{u}, w_1)(\boldsymbol{v}, w_2) = (w_2\boldsymbol{u} + w_1\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}), w_1w_2 - (\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v}))$$

3차원 벡터 $\boldsymbol{v}$를 다음과 같이 사원수 $\boldsymbol{p}$로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{v}, 0)$$

$\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w)(\boldsymbol{v}, 0)(-\boldsymbol{u}, w) = (\boldsymbol{u}, w)(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} &= \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^* = (\boldsymbol{u}, w)(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u}) \\ &= (w(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})) + (\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})), w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{u}\bullet(w\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})))\end{aligned}$$

3-차원 벡터의 외적 연산은 다음과 같이 내적 연산으로 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1}$의 벡터 부분은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& w(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}-(w\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})) \\
&\quad = w^2\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\times(w\boldsymbol{v}))+(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \\
&\quad = (w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u} \\
&\quad = (w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{qpq}^{-1}$의 실수 부분은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\bullet(w\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})) \\
&\quad = w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\bullet(w\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\bullet(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}) \\
&\quad = w(\boldsymbol{v}\bullet\boldsymbol{u})-w(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})+\boldsymbol{u}\bullet(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u})=0
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{qpq}^{-1}$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{qpq}^{-1}=((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),0)$$

삼각함수에 대한 다음의 성질이 성립한다.

$$cos^2(\theta)-sin^2(\theta)=cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)$$
$$2cos(\theta)sin(\theta)=sin(2\theta)$$

사원수 $\boldsymbol{q}$가 단위 사원수일 때 $\boldsymbol{q}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{q}=(x,y,z,w)=(\boldsymbol{u},w)=(sin(\theta)\boldsymbol{n},cos(\theta)) \qquad (0\le\theta\le\pi)$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q}$와 3차원 벡터 $\boldsymbol{v}$에 대하여 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{qpq}^{-1}=\boldsymbol{qpq}^{*}=((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}),0) \\
&\quad \boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}=(sin(\theta)\boldsymbol{n})\bullet(sin(\theta)\boldsymbol{n})=sin^2(\theta)(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{n})=sin^2(\theta)|\boldsymbol{n}|^2=sin^2(\theta) \\
&\quad ((w^2-(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{u}))\boldsymbol{v}+2(\boldsymbol{u}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}+2w(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = (cos^2(\theta)-sin^2(\theta))\boldsymbol{v}+2((sin(\theta)\boldsymbol{n})\bullet\boldsymbol{v})(sin(\theta)\boldsymbol{n})+2cos(\theta)((sin(\theta)\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = cos(2\theta)\boldsymbol{v}+2sin^2(\theta)(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+2cos(\theta)sin(\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}) \\
&\qquad = cos(2\theta)\boldsymbol{v}+(1-cos(2\theta))(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+sin(2\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

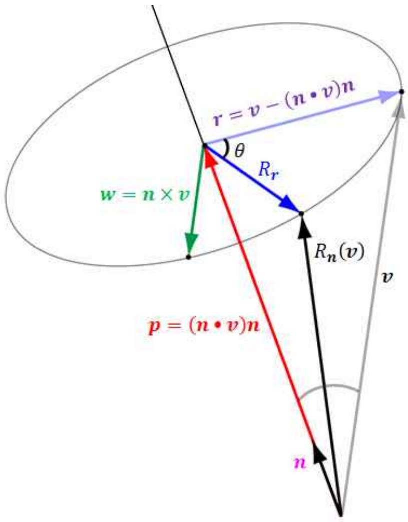
사원수 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$의 w-요소가 0이므로 $\boldsymbol{qpq}^{-1}$는 3차원 벡터이고, 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{qpq}^{-1}=cos(2\theta)\boldsymbol{v}+(1-cos(2\theta))(\boldsymbol{n}\bullet\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}+sin(2\theta)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})$$

행렬의 기초에서 다룬 로드리게스 회전 공식은 다음과 같다. 임의의 회전축 $\boldsymbol{n}$을 중

심으로 벡터 v를 θ만큼 회전(변환)한 결과 벡터 $R_n(\theta)$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R_n(\theta) = \cos(\theta)v + (1-\cos(\theta))(v \cdot n)n + \sin(\theta)(n \times v)$$



사원수 qpq^{-1}를 로드리게스 회전 공식 $R_n(\theta)$과 비교하면 아주 유사함을 알 수 있다. $R_n(\theta)$의 θ가 qpq^{-1}에서 2θ로 표현된 것을 제외하면 두 표현이 같음을 알 수 있다. 이제 qpq^{-1}에서 θ를 ½θ로 바꾸면 $qpq^{-1} = R_n(\theta)$이다.

$$q = (x, y, z, w) = (u, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \qquad (0 \le \theta \le \pi)$$

$$qpq^{-1} = qpq^{*} = cos(\theta)v + (1-cos(\theta))(n \cdot v)n + sin(\theta)(n \times v) = R_n(\theta)$$

이것은 qpq^{-1}가 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼 회전한 결과 $R_n(\theta)$와 같음을 나타낸다. 즉, 단위 사원수 q가 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼의 회전을 표현하고 있다는 의미이다. 벡터 v를 회전축 n을 중심으로 θ만큼의 회전을 사원수로 표현하려면 먼저 회전축 벡터 n을 정규화하고, 다음과 같이 표현하면 된다. θ만큼의 회전을 하려면 ½θ로 사원수를 표현한다는 것에 주의하라.

$$q = (x, y, z, w) = (u, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

이제 단위 사원수 q로부터 3차원 벡터 v를 회전한 결과를 얻으려면 벡터 v를 사원수 $p = (v, 0)$로 표현하고 연산 qpq^{-1} 또는 qpq^{*}을 하면 된다.

단위 사원수 q로부터 3차원 벡터 v를 회전한 결과를 얻을 수 있다는 의미로 $R_q(v)$로 표기한다.

$$R_q(v) = qpq^{*} = R_n(v)$$

- 단위 사원수를 사용한 회전 표현의 성질

단위 사원수 q의 역 q^{-1}는 q의 켤레와 같다($q^{-1} = q^*$).

$$q = (u, w) = \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$q^{-1} = q^* = (-u, w) = \left(-sin\left(\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \left(sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)n, cos\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \left(sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(-n), cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

위의 수식은 회전축 n을 중심으로 θ만큼의 회전을 나타내는 q의 역 회전은 q^{-1}임을 보여준다. 사원수 q의 역 q^{-1}는 회전축 n을 중심으로 $-\theta$만큼의 회전을 나타낸다. 또한 사원수 q의 역 q^{-1}는 회전축 $(-n)$을 중심으로 θ만큼의 회전을 나타낸다.

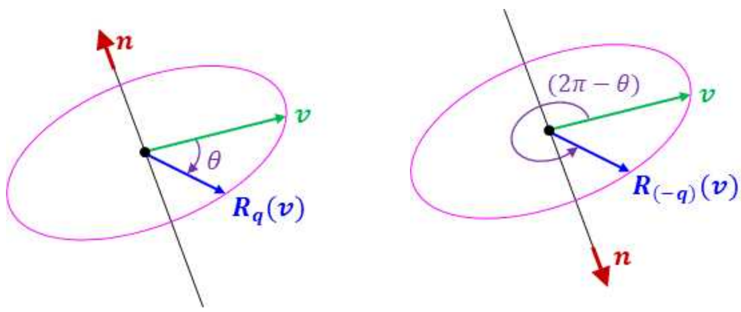
다음은 사원수 q를 사용하여 벡터 v를 회전한 결과와 사원수 $(-q)$를 사용하여 벡터 v를 회전한 결과가 같음을 보이고 있다.

$$R_{(-q)}(v) = (-q)p(-q)^* = (-1)(q)p(-1)(q)^* = qpq^* = R_q(v)$$

벡터 v의 회전을 표현하는 사원수 $(-q)$의 회전축과 회전의 각도가 사원수 q가 표현하는 회전축과 회전의 각도와 같지 않음에 유의하라. 다음은 사원수 $(-q)$가 표현하는 회전축은 $(-n)$이고 회전 각도는 $(2\pi-\theta)$임을 보이고 있다.

$$-q = (-u, -w) = \left(-sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)n, cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \left(sin\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)(-n), cos\left(\pi-\frac{\theta}{2}\right)\right) = \left(sin\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)(-n), cos\left(\frac{2\pi-\theta}{2}\right)\right)$$



다음은 단위 사원수가 아닌 경우의 회전의 결과는 단위 사원수를 사용한 회전의 결과와 같음을 보여준다. 단위 사원수가 아닌 사원수 q_s는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q_s = s\,\widehat{q}$$

$$q_s p q_s = (s\,\hat{q})p(s\,\hat{q})^{-1} = (s\,\hat{q})p(s^{-1}(\hat{q})^{-1}) = (s\,s^{-1})(\hat{q}\,p\,\hat{q}^{-1}) = \hat{q}\,p\,\hat{q}^{-1}$$

사원수를 4-차원 벡터로 취급하면 $(q_1 \cdot q_2)$는 두 사원수 사이의 각도의 코사인 값과 같다. 단위 사원수 q_1과 q_2의 내적 $(q_1 \cdot q_2)$의 값이 1이면 사원수 q_1과 q_2가 같은 회전을 표현한다는 의미이다.

$$q_1 = (u_1, w_1) = \left(sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)n_1, cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right), \quad q_2 = (u_2, w_2) = \left(sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)n_2, cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\right)$$

$(q_1 \cdot q_2)$의 값이 -1이면 사원수 q_1과 q_2가 같은 회전을 표현한다는 의미이다(회전 축의 방향이 반대).

- 단위 사원수를 사용한 회전 표현을 행렬로 표현하기

단위 사원수 q로부터 3차원 벡터 v를 회전한 결과 $R_q(v)$를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$R_q(v) = qpq^{-1} = qpq^{*} = (w^2 - (u \cdot u))v + 2(u \cdot v)u + 2w(u \times v)$$

단위 사원수 $q = (x, y, z, w) = (u, w)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$$

$$u \cdot u = x^2 + y^2 + z^2 = 1 - w^2$$

$v = (v_x, v_y, v_z)$일 때, $R_q(v)$에서 $(w^2 - (u \cdot u))v$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$w^2 - (u \cdot u) = w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2w^2 - 1$$

$$(w^2 - (u \cdot u))v = (2w^2 - 1)(v_x, v_y, v_z) = ((2w^2 - 1)v_x, (2w^2 - 1)v_y, (2w^2 - 1)v_z)$$

$$(w^2 - (u \cdot u))v = (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 2w^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2w^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2w^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$R_q(v)$에서 $2(u \cdot v)u$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$2(u \cdot v)u = 2(xv_x + yv_y + zv_z)(x, y, z)$$

$$2(u \cdot v)u = (2x^2v_x + 2xyv_y + 2xzv_z, 2xyv_x + 2y^2v_y + 2yzv_z, 2xzv_x + 2yzv_y + 2z^2v_z)$$

$$2(u \cdot v)u = (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 2x^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2 \end{bmatrix}$$

$R_q(v)$에서 $2w(u \times v)$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$2w(u \times v) = (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 0 & 2zw & -2yw \\ -2zw & 0 & 2xw \\ 2yw & -2xw & 0 \end{bmatrix}$$

$R_q(v)$를 행렬을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}^{*} = (w^2 - (\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}))\boldsymbol{v} + 2(\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v})\boldsymbol{u} + 2w(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

$$= (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 2w^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2w^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2w^2-1 \end{bmatrix}$$

$$+ (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 2x^2 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2 \end{bmatrix}$$

$$+ (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 0 & 2zw & -2yw \\ -2zw & 0 & 2xw \\ 2yw & -2xw & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 2x^2+2w^2-1 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 2y^2+2w^2-1 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 2z^2+2w^2-1 \end{bmatrix}$$

단위 사원수 $\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$2x^2 + 2w^2 = 2 - 2y^2 - 2z^2$$

$$2y^2 + 2w^2 = 2 - 2x^2 - 2z^2$$

$$2z^2 + 2w^2 = 2 - 2x^2 - 2y^2$$

$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v})$를 행렬을 사용하여 표현한 최종 결과는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v}) = (v_x, v_y, v_z)\begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

사원수 $\boldsymbol{q} = (x, y, z, w)$를 회전 행렬 $\boldsymbol{R_q}$로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R_q} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

회전 행렬 $\boldsymbol{R}$을 사원수 $\boldsymbol{q} = (x, y, z, w)$로 표현하는 과정은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2zw & 2xz-2yw \\ 2xy-2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz+2xw \\ 2xz+2yw & 2yz-2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

대각 원소들의 합은 다음과 같다.

$$R_{11} + R_{22} + R_{33} = (1-2y^2-2z^2) + (1-2x^2-2z^2) + (1-2x^2-2y^2)$$

$$= 3 - 4x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 3 - 4(x^2+y^2+z^2) = 3 - 4(1-w^2) = 4w^2 - 1$$

$$w = \frac{\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + 1}}{2}$$

$(w \neq 0)$이면 x, y, z는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_{23} - R_{32} = (2yz + 2xw) - (2yz - 2xw) = 4xw$$

$$x = \frac{R_{23} - R_{32}}{4w}$$

$$R_{31} - R_{13} = (2xz + 2yw) - (2xz - 2yw) = 4yw$$

$$y = \frac{R_{31} - R_{13}}{4w}$$

$$R_{12} - R_{21} = (2xy + 2zw) - (2xy - 2zw) = 4zw$$

$$z = \frac{R_{12} - R_{21}}{4w}$$

회전 행렬 $\boldsymbol{R}$을 사원수 $\boldsymbol{q} = (x, y, z, w)$로 표현하는 또 다른 방법은 다음과 같다.

$$R_{11} = max(R_{11}, R_{22}, R_{33})$$

$$R_{11} - R_{22} - R_{33} = (1 - 2y^2 - 2z^2) - (1 - 2x^2 - 2z^2) - (1 - 2x^2 - 2y^2) = 4x^2 - 1$$

$$x = \frac{\sqrt{R_{11} - R_{22} - R_{33} + 1}}{2}$$

$$y = \frac{R_{12} + R_{21}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

$$z = \frac{R_{13} + R_{31}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

$$w = \frac{R_{23} - R_{32}}{4x} \quad (x \neq 0)$$

- 단위 사원수의 합성(Composition)

  벡터 $\boldsymbol{v}_1$을 단위 사원수 $\boldsymbol{p}$로 회전(변환)한 결과 $\boldsymbol{v}_2$를 다시 단위 사원수 $\boldsymbol{q}$로 회전(변환)한 결과 $\boldsymbol{v}_3$는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{R_p}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{p}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{p}^{-1}$$

$$\boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{q}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{R_p}(\boldsymbol{v}_1)) = \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{q}^{-1} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{p}^{-1})\boldsymbol{q}^{-1} = (\boldsymbol{qp})\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{p}^{-1}\boldsymbol{q}^{-1}) = (\boldsymbol{qp})\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{qp})^{-1}$$

  단위 사원수 $\boldsymbol{p}$와 단위 사원수 $\boldsymbol{q}$의 곱 $\boldsymbol{pq}$은 단위 사원수임을 보이고 있다.

$$|\boldsymbol{pq}| = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| = 1$$

$$\boldsymbol{v}_3 = (\boldsymbol{qp})\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{qp})^{-1}$$

  즉, 벡터 $\boldsymbol{v}_3$는 $\boldsymbol{v}_1$을 단위 사원수 $(\boldsymbol{qp})$로 회전(변환)하는 것이다.

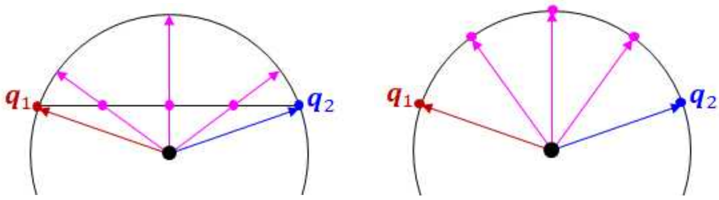
$$\boldsymbol{R_{qp}}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{R_q}(\boldsymbol{R_p}(\boldsymbol{v}_1))$$

- 사원수의 보간(Interpolation)

  단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_2$를 매개변수 t로 선형 보간(Linear Interpolation)

하면 다음과 같다. 이것은 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2를 연결한 선분 위의 점을 지나는 사원수를 구하는 것이다. 다음 그림은 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2를 연결한 선분을 균등하게 분할한 점을 지나는 사원수가 표현하는 회전 각이 다름을 보이고 있다. 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2 사이의 각도가 θ일 때, 0.25θ, 0.5θ, 0.75θ 만큼의 회전을 표현하는 단위 사원수 q를 선형 보간에 의하여 구하면 실제 회전의 결과는 균등하지 않게 된다.

$$q = (1-t)q_1 + tq_2$$



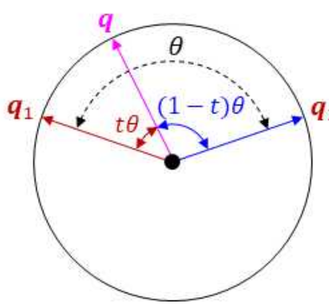
그러므로 회전을 표현하는 사원수의 경우 선형 보간이 아닌 다른 보간 방법이 필요하다.

사원수 $q_1 = (u_1, w_1)$과 사원수 $q_2 = (u_2, w_2)$가 단위 사원수이면 내적은 다음과 같다.

$$q_1 \bullet q_2 = cos(\theta)$$

다음 그림에서 단위 사원수 q_1가 표현하는 회전과 단위 사원수 q_2가 표현하는 회전 사이의 각도가 θ이다. 단위 사원수 q_1와 단위 사원수 q 사이의 각도가 $t\theta$이고, 단위 사원수 q와 단위 사원수 q_2의 각도가 $(1-t)\theta$이다. 단위 사원수 q_1가 표현하는 회전에서 $t\theta$만큼 더 회전을 한 회전을 표현하는 단위 사원수 q를 단위 사원수 q_1와 단위 사원수 q_2를 사용하여 표현하자. 즉, 다음 수식을 만족하는 실수 t_1과 t_2를 구해보자.

$$q = t_1 q_1 + t_2 q_2$$



$$q_1 \bullet q_1 = 1,\ q_2 \bullet q_2 = 1,\ q_1 \bullet q = cos(t\theta),\ q \bullet q_2 = cos((1-t)\theta),\ q_1 \bullet q_2 = cos(\theta)$$

$$q_1 \bullet q = t_1(q_1 \bullet q_1) + t_2(q_1 \bullet q_2)$$

$$cos(t\theta) = t_1 + t_2 cos(\theta)$$

$$q \bullet q_2 = t_1(q_1 \bullet q_2) + t_2(q_2 \bullet q_2)$$
$$cos((1-t)\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2$$

삼각 함수의 차 공식에 따라 다음이 성립한다.

$$cos((1-t)\theta) = cos(\theta - t\theta) = cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta)$$
$$sin((1-t)\theta) = sin(\theta - t\theta) = sin(\theta)cos(t\theta) - cos(\theta)sin(t\theta)$$

다음을 만족하는 실수 t_1과 t_2를 구하자.

$$cos(t\theta) = t_1 + t_2 cos(\theta) \quad (1)$$
$$cos((1-t)\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2 \quad (2)$$

식 (1)에 $cos(\theta)$를 곱하여 식 (2)에서 빼면 t_2를 구할 수 있다.

$$cos(t\theta)cos(\theta) = t_1 cos(\theta) + t_2 cos^2(\theta)$$
$$t_2(1 - cos^2(\theta)) = cos((1-t)\theta) - cos(\theta)cos(t\theta)$$
$$t_2 sin^2(\theta) = cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta) - cos(\theta)cos(t\theta) = sin(\theta)sin(t\theta)$$
$$t_2 = \frac{sin(\theta)sin(t\theta)}{sin^2(\theta)} = \frac{sin(t\theta)}{sin(\theta)}$$

식 (2)에 $cos(\theta)$를 곱하여 식 (1)에서 빼면 t_2를 구할 수 있다.

$$cos((1-t)\theta)cos(\theta) = t_1 cos^2(\theta) + t_2 cos(\theta)$$
$$t_1(1 - cos^2(\theta)) = cos(t\theta) - cos((1-t)\theta)cos(\theta)$$
$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta) - cos(\theta)(cos(\theta)cos(t\theta) + sin(\theta)sin(t\theta))$$
$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta) - cos^2(\theta)cos(t\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$
$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta)(1 - cos^2(\theta)) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$
$$t_1 sin^2(\theta) = cos(t\theta)sin^2(\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)$$
$$t_1 = \frac{cos(t\theta)sin^2(\theta) - cos(\theta)sin(\theta)sin(t\theta)}{sin^2(\theta)}$$
$$t_1 = \frac{cos(t\theta)sin(\theta) - cos(\theta)sin(t\theta)}{sin(\theta)}$$
$$t_1 = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin(\theta)}$$

q를 실수 t_1과 t_2를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

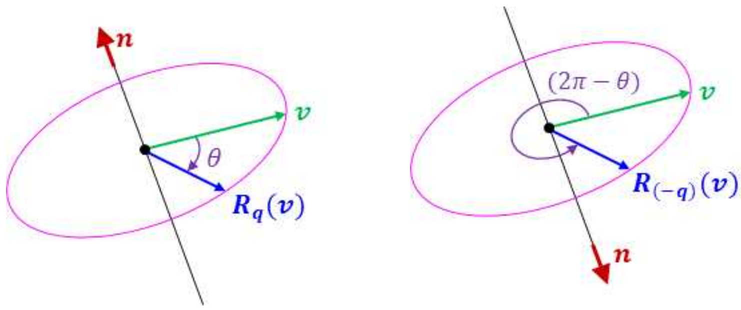
$$q = t_1 q_1 + t_2 q_2 = \frac{sin((1-t)\theta)}{sin(\theta)} q_1 + \frac{sin(t\theta)}{sin(\theta)} q_2 = \frac{sin((1-t)\theta) q_1 + sin(t\theta) q_2}{sin(\theta)}$$

위의 식은 단위 사원수 q_1이 표현하는 회전과 단위 사원수 q_2가 표현하는 회전을 매개변수 t로 보간(Interpolation)하여 구할 수 있음을 보여준다. 이러한 보간을 구면 보간(Spherical Interpolation)이라고 하며 $q = slerp(q_1, q_2, t)$로 표기한다.

$$q = slerp(q_1, q_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_1 + sin(t\theta)q_2}{sin(\theta)}$$

다음의 수식은 사원수 q에 의하여 벡터 v를 회전한 결과 $R_q(v)$를 구하는 방법은 두 가지가 있음을 보이고 있다. 하나의 방법은 사원수 q가 나타내는 회전축을 중심으로 θ 만큼 회전하는 것이고, 다른 방법은 사원수 $(-q)$가 나타내는 회전축을 중심으로 $(2\pi - \theta)$만큼 회전하는 것이다.

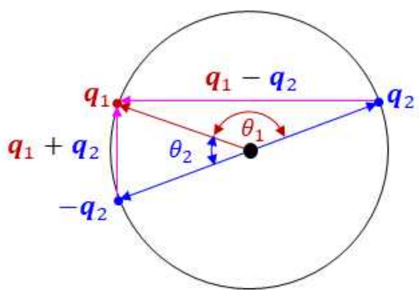
$$R_q(v) = qpq^{-1} = ((-1)q)p((-1)q^{-1}) = (-q)p(-q)^{-1} = R_{(-q)}(v)$$



사원수 q가 표현하는 회전과 사원수 $(-q)$가 표현하는 회전이 같으므로 단위 사원수 q_1이 표현하는 회전과 단위 사원수 q_2가 표현하는 회전을 매개변수 t로 구면 보간을 하는 방법은 다음의 두 가지이다.

$$q = slerp(q_1, q_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_1 + sin(t\theta)q_2}{sin(\theta)}$$

$$q = slerp(q_1, -q_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)q_1 + sin(t\theta)(-q_2)}{sin(\theta)}$$



위의 그림에서 $slerp(q_1, q_2, t)$로 구한 사원수보다 $slerp(q_1, -q_2, t)$로 구한 사원수가 더 짧은 회전을 나타낸다. 단위 사원수 q_1과 단위 사원수 q_2가 주어질 때, $(|q_1 - q_2|^2 > |q_1 + q_2|^2)$이면 $slerp(q_1, -q_2, t)$를 선택하고 $(|q_1 - q_2|^2 < |q_1 + q_2|^2)$이면 $slerp(q_1, q_2, t)$를 선택한다.

⑩ DirectXMath의 사원수(Quaternion) 함수

다음 함수 XMQuaternionIdentity()는 단위 사원수 $(0, 0, 0, 1)$를 반환한다.

다음 함수 XMQuaternionConjugate()는 사원수 $q = (x, y, z, w)$의 켤레 사원수 $(-x, -y, -z, w)$를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionConjugate(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionLength()는 사원수 $q = (x, y, z, w)$의 크기 $|q|$를 반환한다. 함수 XMQuaternionLengthSq()는 사원수 $q = (x, y, z, w)$의 크기 $|q|$의 제곱을 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionLength(XMVECTOR q);
XMVECTOR XMQuaternionLengthSq(XMVECTOR q);
```

$$|q| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

다음 함수 XMQuaternionNormalize()는 사원수 $q = (x, y, z, w)$의 크기를 1로 만들어(정규화하여) 반환한다. 사원수 $q = (x, y, z, w)$의 각 요소를 $|q|$로 나누어 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionNormalize(XMVECTOR q);
XMVECTOR XMQuaternionNormalizeEst(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionInverse()는 사원수(q)의 역 사원수 q^{-1}를 반환한다. 사원수(q)의 역은 사원수(q)의 켤레 사원수를 정규화하는 것이다.

```
XMVECTOR XMQuaternionInverse(XMVECTOR q);
```

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$$

다음 함수 XMQuaternionIsIdentity()는 사원수(q)가 단위 사원수이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsIdentity(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsInfinite()는 사원수(q)의 어떤 요소가 $\pm\infty$이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsInfinite(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 사원수(q)의 어떤 요소가 NaN이면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionIsNaN(XMVECTOR q);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 두 사원수(q1, q2)가 같으면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionEqual(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

다음 함수 XMQuaternionIsNaN()는 두 사원수(q1, q2)가 같지 않으면 참을 반환한다.

```
bool XMQuaternionNotEqual(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

다음 함수 XMQuaternionDot()는 두 사원수(q1, q2)의 내적 연산의 결과를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionDot(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

$$\boldsymbol{q}_1 \cdot \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + w_1 w_2 = |\boldsymbol{q}_1||\boldsymbol{q}_2| cos(\theta)$$

다음 함수 XMQuaternionMultiply()는 두 사원수(q1, q2)의 곱셈 연산(q2 * q1)의 결과(사원수의 합성)를 반환한다. 곱셈 연산(q2 * q1)의 결과는 사원수 q1으로 회전을 한 다음에 사원수 q2로 회전을 하는 것과 같다.

```
XMVECTOR XMQuaternionMultiply(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2);
```

$$\boldsymbol{q}_2 \boldsymbol{q}_1 = (x_2, y_2, z_2, w_2)(x_1, y_1, z_1, w_1) = (x_3, y_3, z_3, w_3)$$

$$x_3 = x_1 w_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2 + w_1 x_2$$

$$y_3 = x_1 z_2 + y_1 w_2 - z_1 x_2 + w_1 y_2$$

$$z_3 = -x_1 y_2 + y_1 x_2 + z_1 w_2 + w_1 z_2$$

$$w_3 = -x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 + w_1 w_2$$

다음 함수 XMQuaternionBaryCentric()는 세 개의 사원수(q1, q2, q3)에 대한 매개변수(f, g)의 무게중심 좌표를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionBaryCentric(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2, XMVECTOR
q3, float f, float g);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationAxis()는 회전 축(axis)을 중심으로 각도(angle) 만큼의 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationAxis(XMVECTOR axis, float angle);
```

회전 축을 정규화한 벡터 $\boldsymbol{n}$을 중심으로 각도 θ 만큼의 회전을 표현하는 사원수 $\boldsymbol{q}$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q} = (x, y, z, w) = (\boldsymbol{u}, w) = (sin(\theta)\boldsymbol{n}, cos(\theta))$$

다음 함수 XMQuaternionToAxisAngle()는 사원수(q)가 표현하는 회전 축(axis)과 회전 각도(angle)를 반환한다.

```
void XMQuaternionToAxisAngle(XMVECTOR *axis, float *angle, XMVECTOR
q);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationNormal()는 단위 벡터의 회전 축(normal)을 중심으로 각도(angle) 만큼의 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationNormal(XMVECTOR normal, float angle);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationMatrix()는 회전 행렬(m)에 해당하는 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationMatrix(XMMATRIX m);
```

다음 함수 XMQuaternionRotationRollPitchYaw()는 오일러 각(pitch, yaw, roll)에 해당하는 회전을 표현하는 사원수를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionRotationRollPitchYaw(float pitch, float yaw,
float roll);
XMVECTOR XMQuaternionRotationRollPitchYawFromVector(XMVECTOR
angles);
```

다음 함수 XMQuaternionSlerp()는 두 개의 단위 사원수(q1, q2)를 매개변수(t)로 구면 보간한 결과를 반환한다.

```
XMVECTOR XMQuaternionSlerp(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2, float t);
XMVECTOR XMQuaternionSlerpV(XMVECTOR q1, XMVECTOR q2, XMVECTOR t);
```

단위 사원수 $\boldsymbol{q}_1$과 단위 사원수 $\boldsymbol{q}_2$를 매개변수 t로 구면 보간한 결과는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{q} = slerp(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, t) = \frac{sin((1-t)\theta)\boldsymbol{q}_1 + sin(t\theta)\boldsymbol{q}_2}{sin(\theta)}$$