

Задача Коши. Методы Рунге – Кутты

Задача Коши в простейшем случае ставится для дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x, y) \quad x \in [a, b] \quad y(a) = y_a$$

Строится сетка ($x_0=a, x_n=b$) на отрезке $[a, b]$ (в общем случае она может быть неравномерной). Методы Рунге-Кутты строятся с наперед заданной точностью s по схеме

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^s \rho_j k_j \quad k_j = f(x_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{m=1}^{j-1} \beta_{jm} k_m)$$

Все методы Рунге-Кутты являются

- одношаговыми - значение решения в следующей точке находится только по значению решения в предыдущей точке)
- явными – неизвестная величина стоит слева от знака равенства, а все что справа – известно

Простейшим методом Рунге-Кутты является метод 1 порядка точности – метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_0 = y_a - \text{известно}$$

Методы Рунге-Кутты 2 порядка

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + h_i f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h_i, \tilde{y}_{i+1})] \quad \text{метод Эйлера – Коши}$$

$$\alpha = 1 \quad \tilde{y}_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} f(x_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + h_i f(x_i + \frac{h_i}{2}, \tilde{y}_{i+1}), \quad \text{модифицированный метод Эйлера}$$

В литературе существуют другие названия этих методов

Схемы методов Рунге-Кутты 3его и 4ого порядков

Во всех схемах $k_1 = f(x_i, y_i)$

Схемы 3ого порядка		Схемы 4ого порядка	
1/2	1/3	1/2	1/3
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+1}, y_i - hk_1 + 2hk_2)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i + \frac{2hk_2}{3})$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_1}{2})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{hk_2}{2})$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_3)$	$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$ $k_2 = f(x_{i+\frac{1}{3}}, y_i + \frac{hk_1}{3})$ $k_3 = f(x_{i+\frac{2}{3}}, y_i - \frac{hk_1}{3} + hk_2)$ $k_4 = f(x_{i+1}, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$

Метод Эйлера – единственный метод 1-ого порядка, а методов 2-ого порядка и далее можно создать бесконечно много

Достижение точности в методах Рунге-Кутты

Во всех вышеприведенных формулах величина шага может быть изменена при переходе от одной точки к другой. Один из способов вычислить значение функции с определенной точностью – это применить правило Рунге. Тогда алгоритм действий для получения следующего значения функции будет такой

1. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h=x_{i+1}-x_i$
2. Вычислить y_{i+1} с помощью y_i с шагом $h/2$ (от точки x_i необходимо сделать два шага до точки x_{i+1})
3. Вычислить поправку $\frac{y_{i+1}^h - y_{i+1}^{h/2}}{2^k - 1}$ (здесь k – порядок метода) и сравнить ее с точностью
4. Если точность больше поправки, то повторить действия начиная с п.2., уменьшив шаг в 2 раза.
5. Если поправка меньше точности, то перейти к следующей точке.

В схемах четвертого порядка на каждом шаге можно вычислять величину $\Theta = \left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right|$. Если

это число меньше 0,05 (нескольких сотых), то шаг считается выбранным правильно, иначе шаг следует уменьшить.

Как и в любом итерационном методе, мы будем следить за сходимостью метода по двум зависимостям

- **фактическая точность от задаваемой точности**. Здесь под фактической точностью понимается норма (лучше бесконечная) разности значений полученной функции и точного решения

- **число итераций от задаваемой точности**. Итерации – это число разбиений отрезка (степень 2) для достижения заданной точности. Эти числа могут быть не одинаковые для различных точек отрезка, поэтому на график выносятся максимальное из них: при таком числе разбиений мы точно достигнем нужной точности

Также можно поступать «наоборот». Менять шаг вычислять **фактическую точность**. Тогда график строится от **величины шага**.

Исследовательская часть работы

Понятно, что решение будет зависеть от начальных условий, и, если условия заданы с ошибкой, эти ошибки могут сказаться на решении задачи. Нужно будет внести в начальные условия (по x или/и по y) некоторую ошибку и проследить за «реакцией решения» на эту ошибку. Итог: **зависимость фактической погрешности от величины ошибки**