Постановка задачи

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad \dots, \quad (x_n, y_n)$$

Алгебраическая интерполяция. Будем аппроксимировать функцию с помощью полинома, который проходит через заданную систему точек

$$P(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}$$

Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

Формула Ньютона для интерполирования вперед

$$P_n(x) = y(x_0) + (x - x_0) y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) y(x_0, x_1, x_2) + \dots$$

$$\dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} y(x_0, x_1, \dots, x_i) \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$$

Формула Ньютона для интерполирования назад

$$P_n(x) = y(x_n) + (x - x_n) y(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) y(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots$$

$$\dots + (x - x_n)(x - x_{n-1})\dots(x - x_1) y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} y(x_{n-i}, x_{n-i+1}, \dots, x_n) \prod_{k=n-i+1}^{n} (x - x_k)$$

Разделенной разностью первого порядка называется величина $y(x_i, x_j) = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$. Разделенные разности второго и третьего порядка определяются аналогично

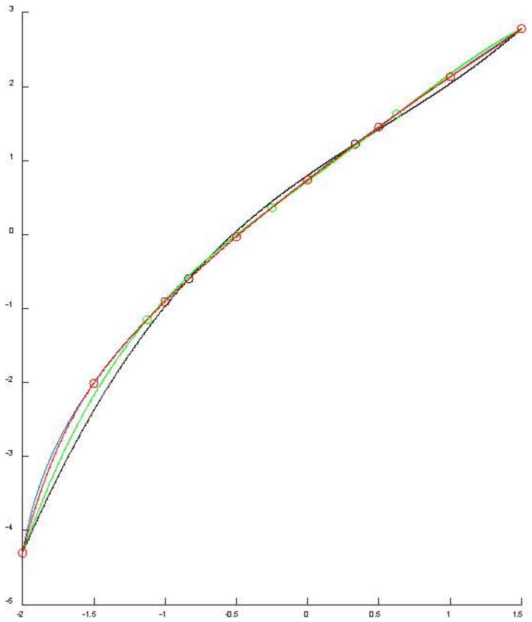
$$y(x_i, x_j, x_k) = \frac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k}$$

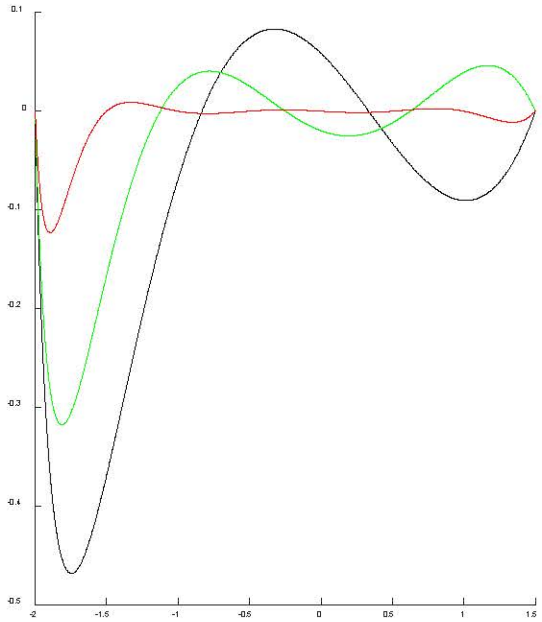
$$y(x_i, x_j, x_k, x_l) = \frac{y(x_i, x_j, x_k) - y(x_i, x_j, x_l)}{x_i - x_l}$$

	1пор	2пор	3пор	4пор	5пор
y_0	$y(x_0,x_1)$	$y(x_0,x_1,x_2)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$
y_1	$y(x_1,x_2)$	$y(x_1,x_2,x_3)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$	
y_2	$y(x_2,x_3)$	$y(x_2,x_3,x_4)$	$y(x_2,x_3,x_4,x_5)$		
y_3	$y(x_3,x_4)$	$y(x_3,x_4,x_5)$			
y_4	$y(x_4,x_5)$				
y_5					

Полином Эрмита

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n}\left\{(x-x_j)y'_j+\left(1-2\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_j-x_k}\right)y_j\right\}\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_j-x_i}\right)^2$$



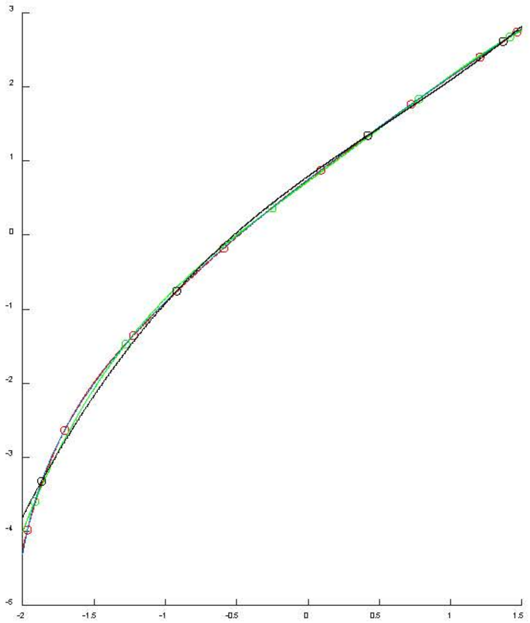
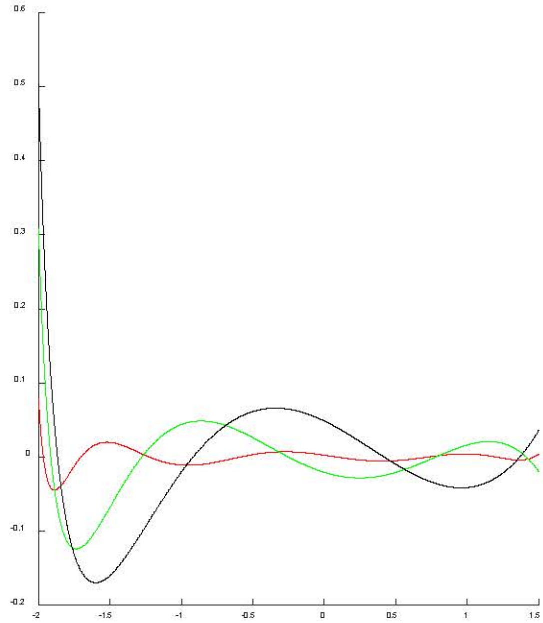


Сетки

Равномерная $[a,b]$ $\quad x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i,\quad i=\overline{0,n}$

Чебышевская $\qquad [-1,1]\quad t_k=\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2(n+1)},\quad k=\overline{0,n}$

$$[a,b]\quad x_k=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k,\quad k=\overline{0,n}$$

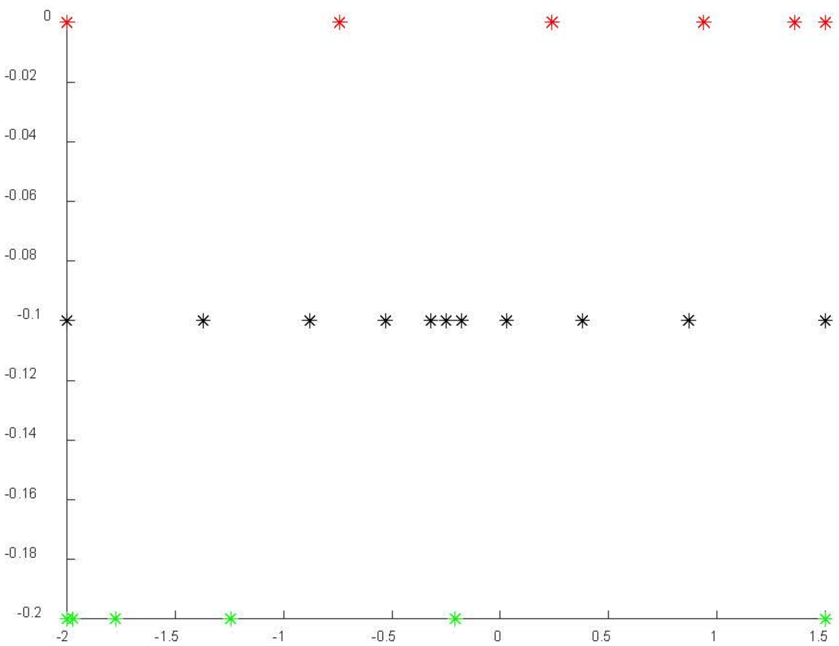
 

Сгущение около левой границы, правой границы и центра

$$x_i = a + \frac{(ih)^2}{(b-a)}, \quad i = \overline{0,n}, \quad nh = b-a$$

$$x_i = b - \frac{[(n-i)h]^3}{(b-a)^2}, \quad i = \overline{0,n}, \quad nh = b-a$$

$$x_{\pm i} = \frac{a+b}{2} \pm 2\frac{(ih)^2}{(b-a)}, \quad i = \overline{0,n}, \quad 2nh = b-a$$



Функция с разрывом производной

Есть функция $f(x)$. Хотим сделать у нее «угол» в точке t

$$g(x)=\begin{cases}\left|f(x)-f(t)\right|+f(t)\\ f(t)-\left|f(t)-f(x)\right|\end{cases}$$