Преобразование производящих функций

genfunc.ru(18.03.2018)

давным-давно в далёкой галактике

При решении рекуррентных соотношений были использованы некоторые приёмы работы с производящими функциями. Здесь эти приёмы рассмотрены более подробно и оформлены в виде таблицы в конце раздела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Напоминаю, что мы находимся в рамках определения, данного во «Введении», а именно: **производящая функция последовательности** $(a0, a1, a2, \dots)$ есть формальный степенной ряд

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

Говорят, что функция «производит», или «генерирует» последовательность, так как в разложении функции $G(z)$ ряд по степеням z, коэффициент при z_n равен a_n. Обозначается этот факт с помощью записи:

$$[z^n]G(z) = a_n$$

Данная запись так и читается: «коэффициент при z_n в разложении функции G по степеням z».

Последовательность (a_n) начинается от нуля, но иногда удобно считать, что n — произвольное целое число. Для этого полагаем $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$.

Производящая функция является **формальным рядом**, то есть не следует считать, что z — число и пытаться строгость рассуждений привязывать к доказательству сходимости степенных рядов. Мы смотрим на производящие функции как на формальные суммы, не принимая во внимание их сходимость. Существуют ряды, которые расходятся во всех точках кроме нуля, например,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + 24z^4 + 120z^5 + \cdots$$

однако манипуляции с ними остаются корректными все равно. Строгое доказательство преобразований формальных степенных рядов здесь не приводится.

В любом случае, если Вы не доверяете механизму производящих функций, можно поступить следующим образом: получить некоторую формулу, а затем доказать её строго другим способом, например, методом математической индукции. Скажем, получили формулу для чисел Фибоначчи – проверьте, что она удовлетворяет рекуррентному соотношению и выполняются начальные условия. Проще доказать формулу, которая уже у нас в руках, чем выводить её «с нуля».

СДВИГ

Итак, функция $G(z)$ генерирует последовательность $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Что даёт умножение всей функции на z_m ($m \geq 0$, целое)? Для ответа на этот вопрос распишем процесс умножения подробнее:

$$z^m G(z) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \cdots$$

Данная функция генерирует новую последовательность:

$$(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m}, a_0, a_1, \dots)$$

которая является сдвигом исходной последовательности на m элементов вправо. То есть

$$[z^n]\Big(z^m G(z)\Big) = a_{n-m}$$

Обратите внимание на то, что запись корректна, поскольку при $n < m$ получаются отрицательные индексы, а элементы с такими индексами мы договорились считать нулями.

Аналогично, но в обратную сторону, происходит процесс деления. Для того, чтобы отрицательные (после сдвига) члены были равны нулю, нужно вычесть первые m слагаемых:

$$\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \cdots$$

То есть

$$[z^n]\left(\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - \cdots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m}\right) = a_{n+m}$$

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ И ДЕЛИТЕЛЬ

Довольно часто приходится иметь дело с последовательностью (na_n). Такая последовательность получается путём дифференцирования функции $G(z)$ с последующим умножением результата на z:

$$zG'(z) = z\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)' = z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$$

В предпоследней сумме индекс суммирования стал начинаться от 1, так как производная константы $a'0 = 0$, а в последней сумме мы снова заставили его начинаться от 0, так как при $n = 0$ величина $(0 \cdot a_0 z^0)$ все равно равна нулю и не влияет на сумму. Таким образом,

$$[z^n]\Big(zG(z)\Big) = na_n$$

Аналогично, интегрирование функции $\dfrac{G(z) - a0}{z}$ поделит общий член последовательности на n (заметьте, что мы предусмотрительно сдвинули элементы влево, а иначе у нас получилась бы последовательность $\dfrac{a_{n-1}}{n} n \geq 1$ [проверьте]).

$$\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n t^{n-1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n$$

Обратите внимание, что в новой последовательности нулевой член равен нулю.

$$[z^n]\left(\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt\right) = \begin{cases} n = 0 & : \quad 0 \\ n > 0 & : \quad \dfrac{a_n}{n} \end{cases}$$

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НА КОНСТАНТУ

Рассмотрим две производящие функции:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Мы можем их формально сложить:

$$G(z) + H(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

что, в общем-то не удивительно.

Производящую функцию можно умножить на постоянный множитель:

$$\alpha G(z) = \alpha a_0 + \alpha a_1 z + \alpha a_2 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n$$

Символ z также можно умножить на постоянное число:

$$G(rz) = a_0 + a_1 rz + a_2 (rz)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n z^n$$

Таким образом,

$$\begin{array}{lcl} [z^n]\left(G(z) + H(z)\right) & = & a_n + b_n \\ [z^n]\left(\alpha G(z)\right) & = & \alpha a_n \\ [z^n]\left(G(rz)\right) & = & r^n a_n \end{array}$$

СВЁРТКА

Перемножим производящие функции $G(z)$ и $H(z)$:

$$F = G \cdot H = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$

Сумму, взятую в скобки, принято называть «свёрткой» (обозначим её через c_n):

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Таким образом, произведение производящих функций, генерирующих последовательности (a_n) и (b_n), генерирует свёртку (c_n).

Рассмотрим частный случай этого замечательного факта. Пусть $b_n = 1$, тогда

$$F(z) = \frac{1}{1-z} G(z) = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n$$

То есть функция $\dfrac{G(z)}{1-z}$ генерирует последовательность частичных сумм исходной последовательности (a_n). Такое положение дел даёт нам много свободы, например, теперь легко представлять себе разложение в ряд следующих дробей, не вспоминая явно про биномиальные коэффициенты:

$$G(z) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

Обратите внимание на то, как следующая последовательность получается из частичных сумм предыдущей.

Далее, используя свёртку, можно доказать некоторые полезные тождества. Мы знаем, чему равна сумма биномиальных коэффициентов с целым положительным верхним индексом n: Она равна 2^n. А чему равна сумма их квадратов? — $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \ ?, \quad n \geq 0,$ целое.

Распишем сумму подробнее:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

Теперь хорошо видно, что это свёртка двух последовательностей, каждая из которых порождается функцией

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Значит

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = [z^n](1+z)^{2n} = \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0, \text{ целое.}$$

Кстати, эта красивая последовательность биномиальных коэффициентов из 2n по n украшает верхнюю часть нашего сайта.

ЧЁТНЫЕ И НЕЧЁТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Рассмотрим сумму

$$G(z) + G(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n z^n + a_n(-z)^n) = a_n(1+(-1)^n)z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

Таким образом, производящая функция $\frac{G(z)+G(-z)}{2}$ генерирует последовательность $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \dots)$, то есть последовательность, в которой элементы с нечётными номерами заменены нулями. Например, пусть $G(z) = \frac{1}{1-z}$, тогда

$$\frac{G(z)+G(-z)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{1-z^2}$$

Полученная производящая функция генерирует последовательность $(1, 0, 1, 0, \dots)$, что согласуется с таблицей производящих функций (последовательность №5 при $m = 2$).

Последовательность, в которой элементы с нечётным индексом вырезаны, можно «уплотнить» заменой z на $z^1/2$:

$$\frac{G(\sqrt{z})+G(-\sqrt{z})}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^n$$

Такая производящая функция генерирует последовательность из элементов с чётными номерами в исходной последовательности: $(a_0, a_2, a_4, \dots)$.

Рассуждая аналогично, получим: $$\frac{G(z) - G(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$$

Такая функция «обнуляет» элементы, стоящие на чётных позициях. Вопрос: как «уплотнить» такую последовательность (убрать появившиеся нули)?

ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Предполагается, что

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

В таблице указаны основные преобразования, которые можно законно выполнять с производящими функциями $G(z)$ и $H(z)$, а также комплексными числами α, β, γ и целым m. В левой колонке указано действие над функциями, а в правой — порождаемая после этого действия последовательность.

А здесь я ничего не учидел (предложения принимаются)