Práctica 14

Abel Rosado Peinado - 5265
abel.rosado@estudiante.uam.es

UAM — December 21, 2021

Queremos encontrar la función potencial $\phi(r)$ entre dos superficies esféricas conductoras cargadas, tal que $\phi(R_1) = V_1$ y $\phi(R_2) = V_2$, para ello, como el potencial es simétricamente esférico, aplicamos la ecuación de Laplace en coordendas esféricas, tal que,

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi}{dr}\right) = 0 \to \frac{d\phi}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \to \phi = \frac{A}{r} + B$$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \frac{A}{R_1} + B = V_1 \\ \frac{A}{R_2} + B = V_2 \end{cases} \to \begin{cases} A = \frac{R_1R_2}{R_2-R_1}(V_1 - V_2) \\ B = \frac{V_2R_2-V_1R_1}{R_2-R_1} \end{cases}$$

Entonces, si $R_1 = 0.05$ m, $R_2 = 0.1$ m, $V_1 = 110$ V y $V_2 = 0$ V, entonces $A = 11$ Vm y $B = -110$ V.
'Para resolverlo númericamente, convertimos la ecuación de Laplace en una ecuación de diferencias finitas

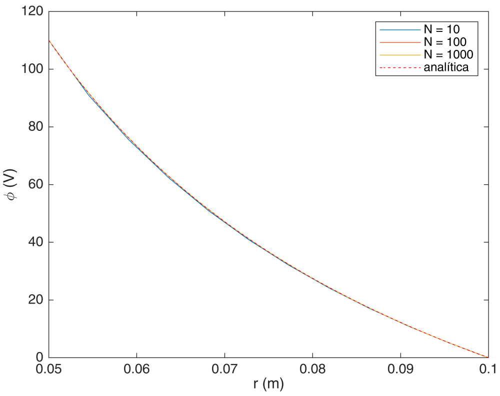
$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = -\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} \to \frac{\phi(r_{i+1}) - 2\phi(r_i) + \phi(r_{i-1})}{h^2} = -\frac{2}{r_i}\frac{\phi(r_{i+1}) - \phi(r_{i-1})}{2h} \qquad \phi(r_i) \mapsto \omega_i$$

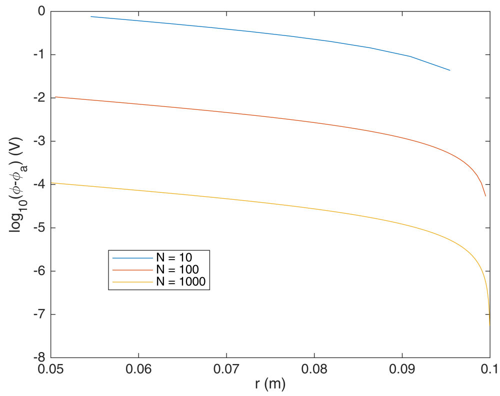
$$\frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2} = -\frac{2}{r_i}\frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h} \to -2\omega_i + \omega_{i+1}\left(1 + \frac{h}{r_i}\right) + \omega_{i-1}\left(1 - \frac{h}{r_i}\right) = 0$$

Que podemos organizar como una matriz y resolver el sistema lineal asociado, tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -\left(1+\frac{h}{r_1}\right) & 0 & \dots & 0 \\ -\left(1-\frac{h}{r_2}\right) & 2 & -\left(1+\frac{h}{r_2}\right) & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1-\frac{h}{r_{N-1}}\right) & 2 & -\left(1+\frac{h}{r_{N-1}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1-\frac{h}{r_N}\right) & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_{N-1} \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0\left(1-\frac{h}{r_1}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \omega_{N+1}\left(1+\frac{h}{r_N}\right) \end{bmatrix}$$

De tal forma que $\omega_0 = \phi(r_0) = \phi(R_1) = V_1$ y $\omega_{N+1} = \phi(r_{N+1}) = \phi(R_2) = V_2$.





Vemos entonces que a mayor número de intervalos, mayor es la precisión, algo esperable, y que para esta función en concreto, cuanto más te acercas a R_2, el error tiende a 0, mientras que cuando te acercas a R_1 el error no tiende a 0 nada más que en $r = R_1$.