Práctica 14

Abel Rosado Peinado - 5265
abel.rosado@estudiante.uam.es

UAM — December 16, 2021

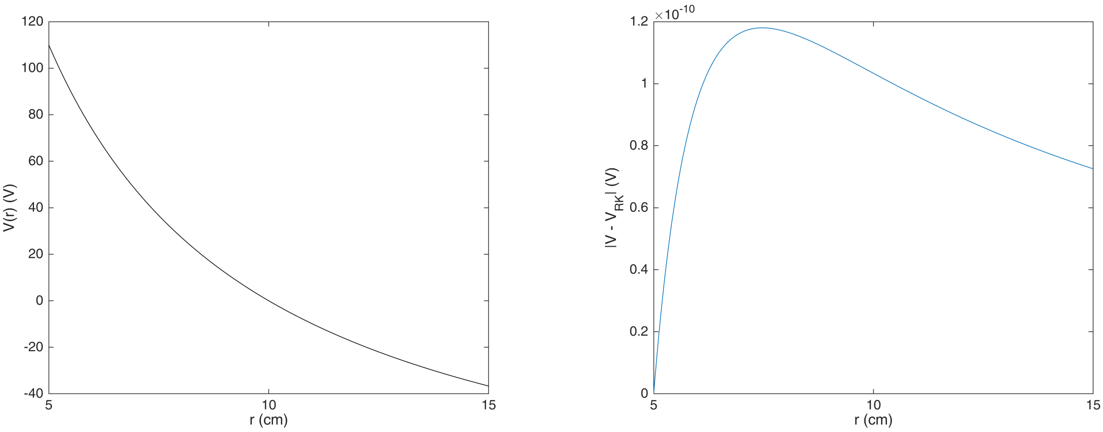
Queremos encontrar la función potencial $V(r)$ entre dos superficies esféricas conductoras cargadas, tal que $V(R_1) = V_1$ y $V(R_2) = V_2$, para ello, como el potencial es simétricamente esférico, aplicamos la ecuación de Laplace en coordendas esféricas, tal que,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{c_1}{r^2} \rightarrow V = \frac{A}{r} + B$$

Ahora aplicamos las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \frac{A}{R_1} + B = V_1 \\ \frac{A}{R_2} + B = V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2) \\ B = \frac{V_2 R_2 - V_1 R_1}{R_2 - R_1} \end{cases}$$

Entonces, si $R_1 = 0.05$ m, $R_2 = 0.1$ m, $V_1 = 110$ V y $V_2 = 0$ V, entonces $A = 11$ Vm y $B = -110$ V, y podemos observarlo representado en la figura inferior.



Para resolverlo númericamente, la ecuación de Laplace la transformamos en un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{dV}{dr} = U \\ \frac{dU}{dr} = -\frac{2}{r}U \end{cases}$$

Al resolverlo utilizando el shooting method, obtenemos una pendiente inicial de -4400 Vm^{-1}, impreso con 16 cifras significativas, el resultado exacto, por lo que si ahora integramos la ecuación con RK, las diferencias que veamos con la solución analítica serán unicamente las propias de la integración con RK, como se observa en la figura anterior.