

Examen de Computación II

Abel Rosado Peinado - 5265
abel.rosado@estudiante.uam.es

UAM — November 26, 2021

Ejercicio 1

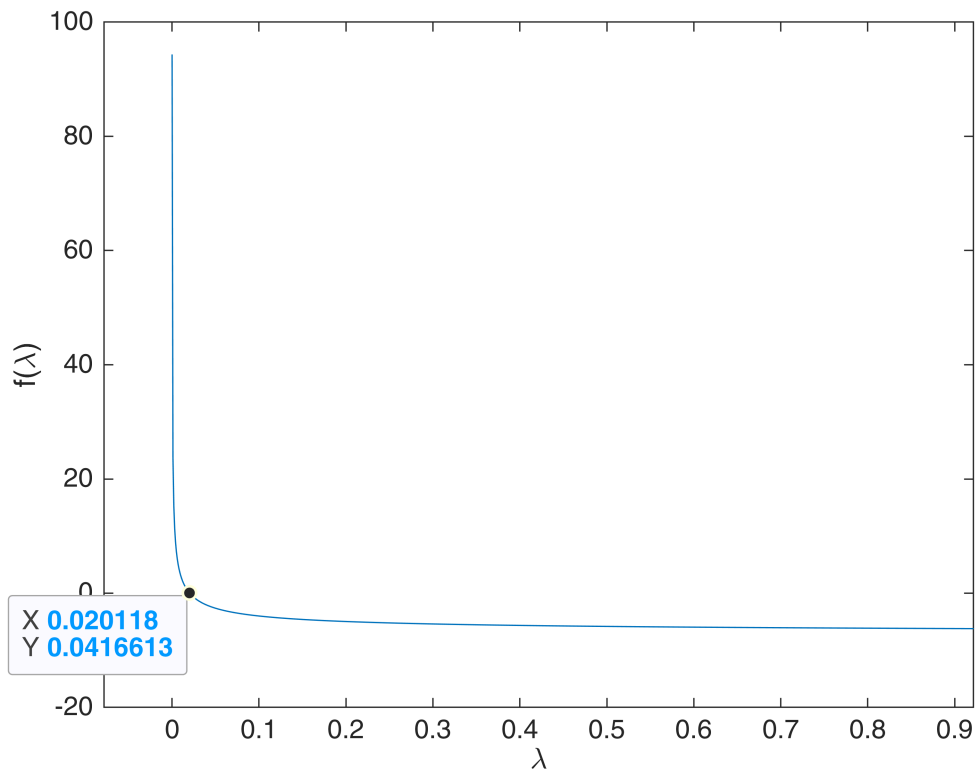
a. Introducción al problema

El problema consiste en hallar los ceros de la siguiente función,

$$f(\lambda) = \lambda^{-1/2} + 2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{\lambda^{1/2} R_e} + \frac{K}{3.71 D} \right),$$

para $K = 0.25 \cdot 10^{-3}$ m, $D = 0.3$ m y $R_e = 200000$.

Si representamos la función, como se observa en la siguiente figura, podemos apreciar visualmente que esta corta el 0 aproximadamente en $\lambda \approx 0.02$.



b. Bisección y Newton-Rhapson

Para determinar más concretamente cual es esa raíz, usaremos el método de la bisección en el intervalo $\lambda \in [0.0001, 1]$ y el método de Newton-Rhapson con punto inicial $\lambda = 0.0001$, calculando la derivada de forma numérica con h igual a la tolerancia, como estamos utilizando las diferencias centradas, sabemos

que el error de ese método es de orden h^2 , por lo que el error cometido al hacer la derivada numérica será muchísimo menor a la tolerancia.

Hemos establecido una tolerancia de 10^{-9} para obtener en ambos métodos unas soluciones con una precisión de 8 cifras significativas.

$$\lambda_{\text{bisección}} = 0.020349756 \quad \lambda_{\text{Newton}} = 0.020349756$$

Observamos que obtenemos el mismo resultado en ambos métodos, y que concuerdan con el resultado que cabría esperar tras la inspección visual, por lo que podemos estar bastante seguros que no nos hemos equivocado.

Los dos métodos se diferencian en el número de iteraciones que tardan en completarse, mientras que el método de la bisección tarda 30 iteraciones en alcanzar la precisión establecida, el método de Newton-Rhapson lo logra en tan solo 11 iteraciones.

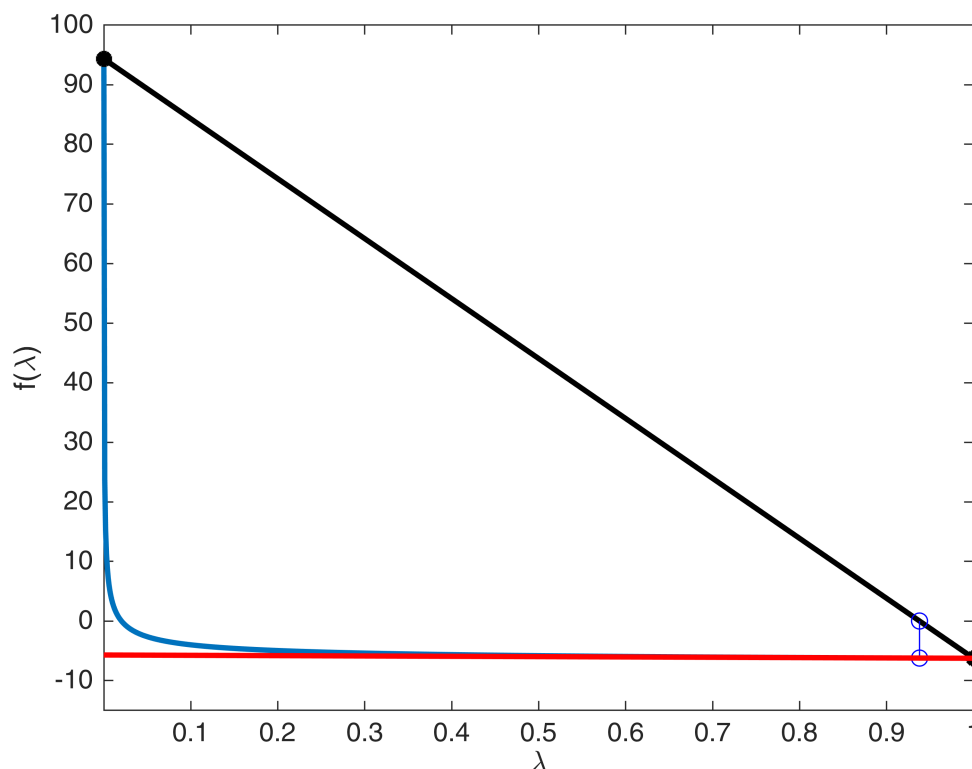
Tenemos una expresión que nos estima el número iteraciones necesario para alcanzar la raíz utilizando el método de la bisección con una precisión dada en un intervalo inicial dado, tal que

$$n \geq \left\lceil \log_2 \frac{b-a}{\epsilon} \right\rceil = \left\lceil \log_2 \frac{1-0.0001}{10^{-9}} \right\rceil = \lceil 29.8972 \rceil = 30$$

Mientras que el método de la bisección es de orden lineal, el método de Newton-Rhapson es cuadrático, por lo que es esperable que requiera muchas menos iteraciones que el de la bisección.

c. Secante

Por otro lado, podríamos intentar usar el método de la secante en el mismo intervalo que el método de la bisección, pero este va a fallar por lo que se observa en la siguiente figura



En la primera iteración, la recta corta el eje x en $\lambda \approx 0.94$, tal que $f(0.94) \approx -6.216$, y en la segunda iteración, la recta resultante corta el eje x en $\lambda \approx -10.39$, donde la función no está definida, por lo que el método falla.

Ejercicio 2

a. Construir matriz

Podemos escoger cualquier matriz invertible, pero nos conviene elegir una matriz que no tenga 0s en la diagonal para poder pivotar en el método LU y no tener que cambiar las filas, y además que sea diagonalmente dominante, para asegurarnos la convergencia con los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.

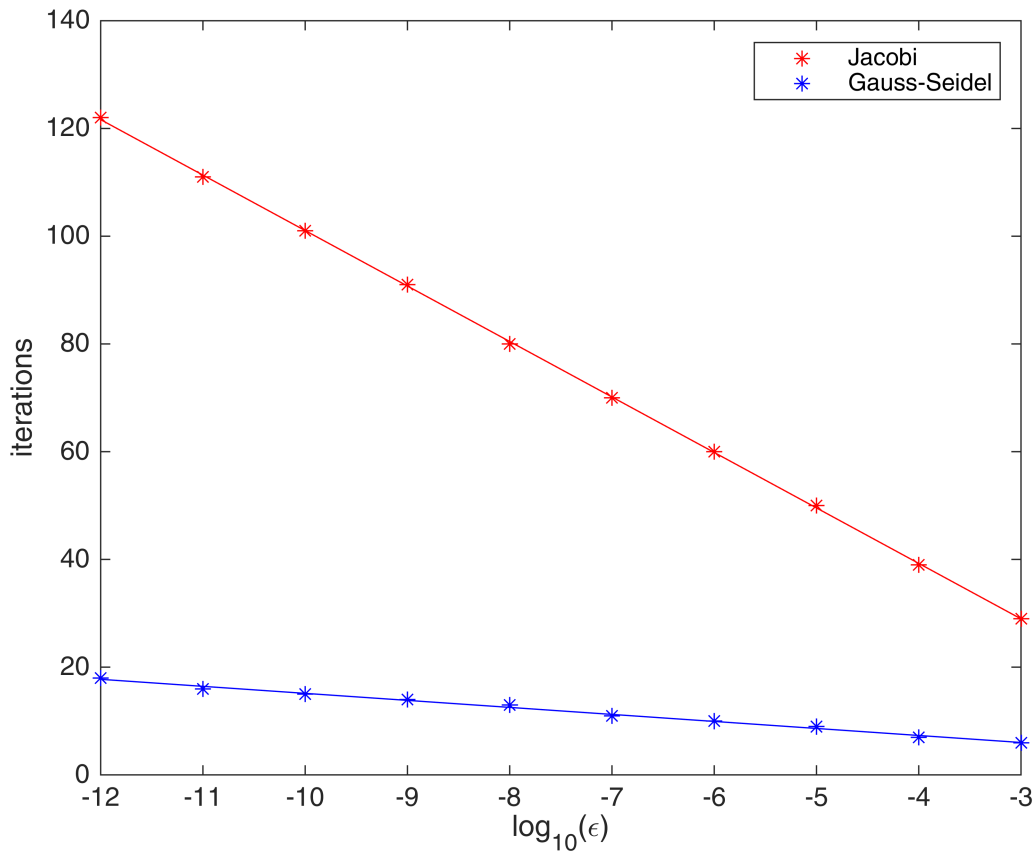
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Como \mathbf{A} es simétrica, podemos diagonalizarla utilizando el método de Jacobi, y podemos comprobar que su determinante es no nulo, concretamente $\det(\mathbf{A}) = 10^{10} \pm 10^{-8}$, y por lo tanto es invertible y el sistema propuesto tiene solución.

b. LU

Utilizando entonces el método LU para obtener la solución al sistema tenemos la siguiente solución, que podemos verificar haciendo el producto matricial que es correcta.

$$\mathbf{x}_{\text{LU}}^T = [-0.2 \quad -0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7]$$



c. Métodos iterativos

Ahora entonces resolvemos el sistema anterior utilizando los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para precisiones que varían por múltiplos de 10^{-1} desde 10^{-3} hasta 10^{-12} , para determinar el error en cada iteración he utilizado la norma suprema, comprobando si $\|\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^{i-1}\|_\infty = \max(|x_j^i - x_j^{i-1}|) < \epsilon$.

No creo que sea informativo poner el resultado de cada precisión para cada método, así que daré los resultados para la precisión final de 10^{-12} , que nos salen idénticas al resultado anterior, salvo por un error de orden 10^{-12} .

$$\mathbf{x}_{\text{Jacobi}}^T = [-0.2 \quad -0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7]$$

$$\mathbf{x}_{\text{Gauss-Seidel}}^T = [-0.2 \quad -0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \quad 0.5 \quad 0.6 \quad 0.7]$$

Entonces ahora representamos el número de iteraciones que toma cada método para hallar la solución a una precisión determinada en función de esa precisión, que se observa en la figura de la página anterior.

Se observa entonces que el método de Gauss-Seidel es mucho más rápido que el de Jacobi, necesitando entre 5 y 7 veces menos iteraciones, al menos para esta matriz en concreto.

Se observa además que hay una relación lineal en ambos casos entre el número de iteraciones y $\log_{10}(\epsilon)$. Podemos hacer un ajuste por mínimos cuadrados como se observa en la figura y obtenemos unas pendientes

$$m_{\text{Gauss-Seidel}} \approx -1.3 \text{ iteraciones} \quad m_{\text{Jacobi}} \approx -10.3 \text{ iteraciones}$$